

УДК 621.396.62

**МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС ТА ФОРМАЛІЗАЦІЯ ТИПІВ СПОТВОРЕНЬ У ЦИФРОВОМУ КАНАЛІ ЗВ'ЯЗКУ З OFDM-СИГНАЛАМИ<sup>1</sup>**

*Котлярів В. В.; Мирончук О. Ю.; Шпилька О. О., к.т.н.  
Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут», Київ, Україна,  
shpylka@rtf.kpi.ua*

**MATHEMATICAL DESCRIPTION AND FORMALIZATION TYPES OF DISTORTION IN A DIGITAL COMMUNICATION CHANNEL WITH OFDM-SIGNALS**

*Kotlyarov V.; Myronchuk O.; Shpylka O., PhD  
National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, Ukraine*

**Вступ**

Сигнали з ортогональним частотним мультиплексуванням (англ. Orthogonal frequency division multiple – OFDM) широко використовуються в системах цифрового телебачення і радіомовлення (ISDB-T, DVB-T, DAB, DRM), а також в мережах цифрового широкосмугового доступу WiFi, WiMAX. Використання OFDM у системах мобільного бездротового зв'язку стримувалось великою інформаційною ємністю виконання складних математичних обчислень, але розвиток технологій у виготовленні мікропроцесорів дозволив впровадити цю технологію в четверте покоління мобільного зв'язку LTE. Найбільшою перевагою OFDM технології є висока спектральна ефективність [1], що досягається за рахунок передачі великої кількості промодульованих ортогональних підносійних, спектри яких перекриваються. Однак висока спектральна ефективність потребує проведення якісної синхронізації як носійної, так і тактової частот. Негативним наслідком порушення синхронізації буде виникнення явища інтерференцій: міжносійна інтерференція – МНІ, та/або міжсимвольна інтерференція – МСІ. Для створення методів компенсації зміщень тактової та носійної частот, їх фазових зсувів, що виникають внаслідок неузгодженості генераторів приймача та передавача, необхідно отримати аналітичні вирази спотворень, утворених в інформаційному сигналі. Тому актуальною є задача аналізу впливу неточностей синхронізації на прийнятий сигнал.

Технологія OFDM ґрунтується на передачі інформації за допомогою символів, послідовність яких утворює сигнал  $x(t)$ . Відліки певного символу

---

<sup>1</sup> <http://radap.kpi.ua/radiotechnique/article/view/1229>

можуть бути сформовані за допомогою використання зворотного дискретного перетворення Фур'є над  $N$ -мірним комплексним масивом, який є зображенням OFDM символу в частотній області [1,3,4]. Елементи комплексного масиву розглядаються як параметри  $N$  підносійних, кожна з яких є точкою на модуляційному сузір'ї (напр. QPSK, QAM16, QAM64 і т.і.). Для захисту від згубного впливу MCI, на початок кожного OFDM символу в часовій області вставляється циклічний префікс з  $N_g$  відліків, які є копією кінця цього символу, дивіться рис.1а. Таким чином кожен OFDM символ складається з  $N + N_g$  відліків, а кожен  $n$ -й відлік  $i$ -го символу в сигналі  $x(t)$  може бути представлений як:

$$x(i(N + N_g)T_s + N_gT_s + nT_s) = x_{i,n} = \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} X_{i,k} \exp\left(j2\pi \frac{nk}{N}\right),$$

де  $n = -N_g, \dots, N - 1$ ;  $x_{i,n}$   $n$ -й відлік  $i$ -го символу;  $X_{i,k}$  –  $k$ -й відлік комплексного зображення в частотній області  $i$ -го символу, який залежить від інформаційного повідомлення і описує параметр  $k$ -ої підносійної. Для захисту від впливу сусідніх каналів, в частотній області вводять захисні інтервали, дивіться рис. 1б. Індекси підносійних представляються симетричними відносно нуля для того, щоб спектр сигналу відображався симетрично початку координат.

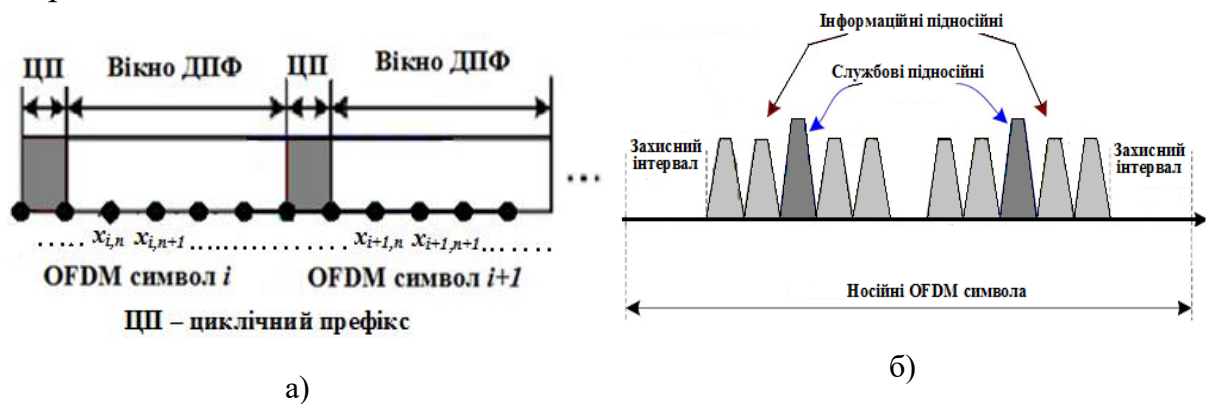


Рис. 1

Ще одним негативним явищем, яке впливає на якість передачі інформації, є багатопроменеве поширення радіохвиль, що виникає внаслідок їх відбиття, дифракції та розсіювання від різноманітних перешкод на шляху поширення. В залежності від значень часових затримок поширення в точці прийому сигнали з різних променів можуть складатися як в фазі, так і в протифазі, що призводить до утворення завмирань на певних значеннях частоти. Імпульсну характеристику, такого багатопроменевого каналу, можна представити у вигляді [2]:

$$h(t) = \sum_r \dot{h}_r(t) \cdot \delta(t - \tau_r(t)) + v(t), \quad (1)$$

де  $\dot{h}_r(t)$  – комплексний коефіцієнт згасання в  $r$ -му промені;  $\tau_r(t)$  – затримка розповсюдження по  $r$ -му променю.

Для стаціонарних багатопроменевих каналів, параметри яких повільно змінюються в часі, можна записати  $\dot{h}_r(t) = \dot{h}_r$ ,  $\tau_r(t) = \tau_r$ . Частотна характеристика багатопроменевого каналу може бути отримана з імпульсної характеристики (1) за допомогою перетворення Фур'є :

$$H_k = \sum_r \dot{h}_r \exp\left(-j2\pi \frac{\tau_r k}{T_s N}\right). \quad (2)$$

Таким чином, сигнал  $z(t)$  на виході багатопроменевого каналу (1) може бути отриманий як згортка переданого сигналу  $x(t)$  з імпульсною характеристикою  $h(t)$ :

$$z(t) = \sum_r \dot{h}_r x(t - \tau_r) + v(t) \quad (3)$$

де  $v(t)$  – описує адитивний білий гаусівський шум. Багатопроменеве розповсюдження призводить до утворення МСІ, що згубно впливає на якість передачі сигналу [1].

Метою даної роботи є проведення математичного опису спотворень модуляційних сузір'їв під впливом різноманітних видів неузгодженостей синхронізації, а також моделювання отриманих результатів для візуалізації та визначення типових ознак відповідних неузгодженостей синхронізації в спотворених сузір'ях.

### Математичний аналіз спотворень внаслідок неузгоджених параметрів синхронізації

Для проведення моделювання спотворень, що виникають в системі зв'язку з OFDM технологією, внаслідок неточної синхронізації використувалась схема обробки сигналу зображена на рис. 2.

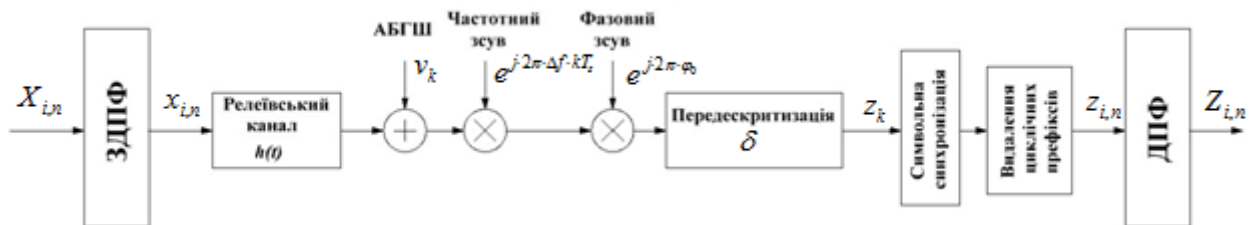


Рис. 2

У випадку, коли сигнал генератора для пониження частоти в приймачі не відповідає дійсній носійній частоті, виникає зміщення носійної частоти. Це може бути пов'язано з двома чинниками: невідповідністю частот генераторів в передавачі і приймачі або ефектом Доплера, що є наслідком руху

передавача і/або приймача [2-4]. Враховуючи значення  $\Delta f$  величини зміщення носійної частоти, прийнятий сигнал у неперервному часі буде зміщений на постійну частоту і матиме форму:

$$z_{i,n} = z(t)e^{j2\pi\Delta f \cdot t} \Big|_{t=i(N+N_g)T_s+N_gT_s+nT_s}.$$

Зміщення носійної частоти  $\Delta f$  спочатку може бути нормалізоване відповідно до відстані між підносійними  $f_s = 1/NT_s$  і потім розкладене на цілу ( $\varepsilon_I$ ) та дробову ( $\varepsilon_f$ ) компоненти –  $\Delta f = (\varepsilon_I + \varepsilon_f)f_s$ . Використовуючи властивості перетворення Фур'є [5], можна показати, що прийнятий сигнал (3) із зміщенням частоти  $\Delta f$  в частотній області матиме вид:

$$\begin{aligned} Z_{i,k} = & X_{i,k-\varepsilon_I} H_{k-\varepsilon_I} \text{sinc}(\varepsilon_f) \exp\left(j2\pi \frac{i(N+N_g)+N_g}{N} (\varepsilon_I + \varepsilon_f)\right) \exp(-j\pi\varepsilon_f) + \\ & + \sum_{\substack{l=N/2 \\ l=-N/2, l \neq k-\varepsilon_I}} X_{i,l} H_l \text{sinc}(\varepsilon_I + \varepsilon_f + l - k) \times \\ & \times \exp\left(j2\pi \frac{i(N+N_g)+N_g}{N} (\varepsilon_I + \varepsilon_f)\right) \exp(-j\pi(\varepsilon_I + \varepsilon_f + l - k)) + V_{i,k} \end{aligned} \quad (4)$$

Як видно з (4), ціла складова  $\varepsilon_I$  нормованого зміщення частоти  $\Delta f$  спричиняє фазовий зсув модуляційного сузір'я та циклічний зсув спектра на  $\varepsilon_I$  відліків, дробова складова зміщення приводить до загасання корисної амплітуди, фазового зсуву та інтерференції між підносійними, що описується другим доданком. Шумовий компонент каналу, внаслідок дії адитивного білого гаусівського шуму, на  $k$ -ій підносійній  $i$ -го символу позначено як  $V_{i,k}$ .

Різниця фази носійного коливання та фази генератора для пониження частоти прийнятого сигналу утворює фазовий зсув носійної частоти. На значення фазового зсуву також впливають фазові шуми генераторів та інших компонентів. Фазовий шум  $\varphi_n$  сигналу генератора може бути змодельований як дискретний в часі процес Вінера-Леві [6]:

$$\varphi_n = \varphi_{n-1} + \psi_n,$$

де  $\psi_n$  – приріст фази момент часу  $n$ . Слід зазначити, що  $\psi_n$  відповідає гаусівському розподілу з нульовим математичним очікуванням випадкової величини та дисперсією:

$$\sigma_\psi^2 = 2\pi B T_s,$$

де  $B$  – відповідає двосторонній 3дБ смузі;  $T_s$  – період відліків. Спектральна густина потужності сигналу гетеродину з таким фазовим шумом описується рівнянням:

$$S(f) = \frac{2}{\pi B} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{2(f - f_c)}{B}\right)^2\right)}$$

Коли такий сигнал гетеродину використовується в приймачі для перенесення спектра сигналу з носійної частоти, прийняті відліки сигналу в часовій області матимуть вигляд:

$$z_{i,n} = z(t) e^{j(\varphi_0 + \varphi_{i,n})} \Big|_{t=i(N+N_g)T_s + N_g T_s + nT_s},$$

а результуючий спектр буде спектром сигналу, згорнутим із спектром гетеродину з ненульовою смугою. В результаті підносійні прийнятого OFDM символу будуть "змішані" з сусідніми підносійними цього символу. Приймачі OFDM дуже чутливі до цього спектрального розширення, тому що це вводить загальну фазову помилку на всіх підносійних, а також призводить до МНІ. Таким чином можна показати що, прийнятий в частотній області сигнал з фазовою помилкою  $e^{j(\varphi_{i,n} + \varphi_0)}$ , описується виразом:

$$Z_{i,k} = X_{i,k} H_k \exp(j\phi_0) \left( \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \exp(j\phi_{i,n}) \right) + \sum_{l=-N/2, l \neq k}^{N/2-1} X_{i,l} H_l \exp(j\phi_0) \left( \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \exp(j\phi_{i,n}) \exp(j2\pi n(k-l)/N) \right) \quad (5)$$

де  $\phi_{i,n}$  – фазовий шум  $n$ -го семплу в  $i$ -му символі, а  $\phi_0$  – постійний фазовий зсув на початку  $i$ -го символу.

Помилка фази носійної має два ефекти: МНІ та додатковий фазовий зсув. Останній виникає через постійний фазовий зсув та усереднений фазовий шум. Слід зазначити, що ширина смуги на рівні 3дБ фазового шуму є значно меншою у порівнянні з символною швидкістю  $1/T$ , і рівень утвореного МНІ досить малий. Іншими словами, якщо фазовий шум є відносно сталий в межах символу OFDM, інтерференція між підносійними також дуже мала.

Природа появи зсуву тактової частоти подібна до зсуву носійної, тому що вона також утворюється внаслідок невідповідності частот генераторів і/або ефекту Допплера [2-4]. Зсув тактової частоти виникає у випадку, коли генератори з неузгодженими частотами використовуються для тактування перетворювача цифрового сигналу в аналоговий в передавачі і аналого-цифрового перетворювача в приймачі. Ще одним джерелом виникнення зсуву тактової частоти є не скомпенсований зсув носійної частоти. Якщо отриманий сигнал неперервного часу тактують з інтервалом  $(1 + \delta)T_s$ , а не  $T_s$ , тоді  $n$ -та прийнята вибірка  $i$ -го символу приймає значення:

$$z_{i,n} = z(t) \Big|_{t=i(N+N_g)(1+\delta)T_s + N_g(1+\delta)T_s + n(1+\delta)T_s},$$

У випадку, коли всі відліки належать одному символу, тобто МСІ всередині вікна ДПФ відсутнє, то можна показати, що  $k$ -й відлік  $i$ -го символу

прийнятого сигналу в частотній області матиме вигляд:

$$\begin{aligned}
 Z_{i,k} = & X_{i,k} H_k \operatorname{sinc}(\delta k) \exp\left(j2\pi \frac{i(N + N_g) + N_g}{N} \delta k\right) \exp(j\pi \delta k) + \\
 & + \sum_{l=-N/2, l \neq k}^{N/2-1} X_{i,l} H_l \operatorname{sinc}((1 + \delta)l - k) \times \\
 & \times \exp\left(j2\pi \frac{i(N + N_g) + N_g}{N} \delta l\right) \exp(-j\pi(1 + \delta)l - k) + V_{i,k}
 \end{aligned} \tag{6}$$

З виразу (6) видно, що зсув частоти дискретизації на  $\delta$ , спричиняє ослаблення корисного сигналу і фазовий зсув модуляційного сузір'я. Слід звернути увагу на те, що фазовий зсув має постійний приріст, пропорційний до  $k$  і  $\delta$ , коли індекс символу  $i$  збільшується. Крім того виникає МНІ, яке описується другим доданком у формулі (6).

У зв'язку з тим, що в системах з OFDM технологією передача відбувається посимвольно, ще однією вагомою частиною синхронізації системи є знаходження початку символу в часі для правильного позиціонування вікна ДПФ. Зсув позиції вікна на  $T_d$  відліків раніше, але таким чином, що сигнал у вікні не забруднений попереднім символом, спричиняє спотворення в частотній області у вигляді додаткового фазового зсуву для кожної підносійної:

$$Z_{i,k} = X_{i,k} H_k \exp\left(\frac{-j2\pi T_d k}{NT_s}\right) + V_{i,k}. \tag{7}$$

В іншому випадку, коли у вікно ДПФ потрапляють відліки із наступного або попереднього символу, виникає МСІ, а самі відліки  $Z_{i,k}$  будуть спотворені як по фазі так і по амплітуді:

$$Z_{i,k} = X_{i,k} H_k \frac{N - |T_d|/T_s}{N} \exp\left(-\frac{j2\pi T_d k}{NT_s}\right) + ISI + V_{i,k}. \tag{8}$$

Слід зазначити, що зниження рівня корисного сигналу у зображенні відбувається через зменшення кількості відліків поточного символу. Внесок інших вибірок виражається в збільшенні рівня МСІ.

### Моделювання отриманих результатів

За допомогою САПР Matlab отримані аналітичні вирази (4)-(8) були промодельовані для системи з OFDM технологією. Параметри OFDM сигналу обирались згідно одного з можливих режимів роботи в стандарті ISDB-T [7]:

- кількість підносійних 5617;
- модуляція підносійних QAM 16;
- модуляція пілотів BPSK;
- захисні інтервали в частотній області 1289/1288;
- захисний інтервал в часовій області 1/4;

- розмір вікна ДПФ – 8192.

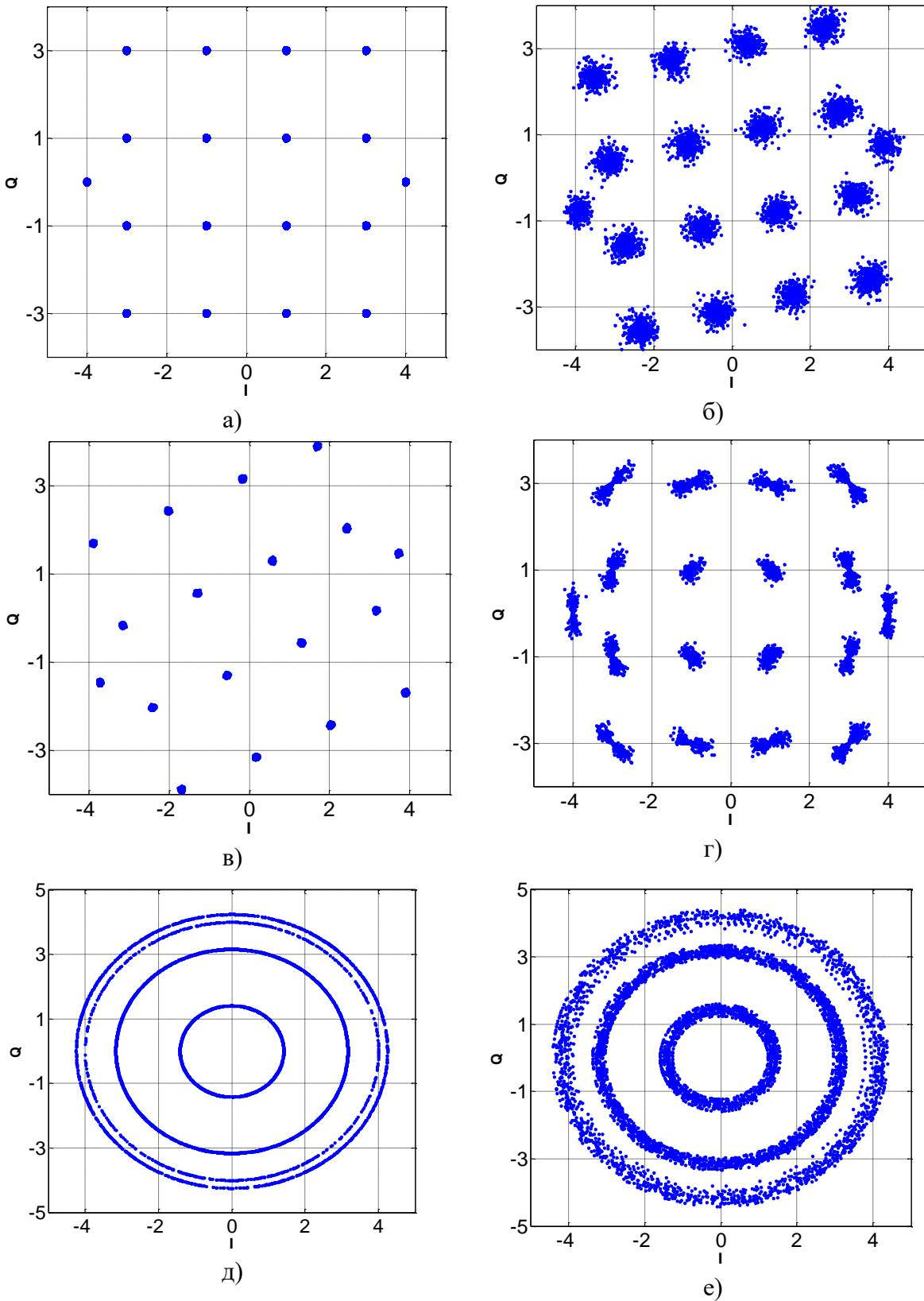


Рис. 3

Моделювання проводилось без дії адитивного білого гаусівського шуму

для забезпечення наочної оцінки впливу розлагодженості частот генераторів на модуляційне сузір'я. На рис. 3а зображено оригінальне модуляційне сузір'я QAM 16 для інформаційних підносійних. На рис. 3б зображено спотворене сузір'я, що утворилось внаслідок зсуву носійної частоти та описується виразом (4) з дробовою частиною  $\varepsilon_f$  рівною 0,05. На рис. 3в зображено спотворення внаслідок дії фазової помилки  $\varphi_0 = \frac{\pi}{8}$  та фазового шуму генератора носійної частоти. Неузгодженість тактової частоти з параметром  $\delta = -0,00001$  згідно (6) призводить до спотворень, що зображено на рис. 3г. Будь-який зсув тактової частоти за деякий проміжок часу призведе до зміщення вікна перетворення Фур'є відносно оригінального початку символу на деяку кількість відліків. На рис. 3д зображено вплив на модуляційне сузір'я зсунутого вікна на 5 відліків таким чином, що у вікно не потрапляють відліки із іншого символу, тобто відсутня МСІ, а на рис. 3е зображено сузір'я для вікна, в яке потрапило 5 відліків сусіднього символу, що призвело до утворення МСІ.

### **Висновки**

Отримані аналітичні вирази, що описують спотворення прийнятого інформаційного сигналу внаслідок неточної синхронізації, показали, що спотворення виражаються у виникненні інтерференції між підносійними сигналами та фазовими зсувами. Моделювання та дослідження характеру впливу різних неузгоджених параметрів синхронізації на прийняте сузір'я показали, що незначні неточності в синхронізації спричиняють досить критичні спотворення, які, як наслідок, значно погіршують ймовірність бітової помилки. Отримані результати дозволяють оцінити правильність роботи алгоритмів компенсації спотворень, що виникають внаслідок неточної синхронізації в процесі розробки чи верифікації системи.

Подальшим напрямком досліджень, являється створення ефективних методів компенсації спотворень на базі їх отриманих математичних описів.

### **References**

1. Hermann Rohling ed. (2011) *OFDM. Concepts of Future Communication Systems*, Springer Berlin Heidelberg, pp. 5-10. doi: 10.1007/978-3-642-17496-4
2. Proakis J. G. and Salehi M. (2008) *Digital Communications, 5th ed.*, McGraw-Hill Higher Education, 1170 p.
3. Tzi-Dar Chiueh and Pei-Yun Tsai (2007) *OFDM Baseband Receiver Design for Wireless Communications*, John Wiley and Sons. doi: 10.1002/9780470822500
4. Witrisal K. (2002) *OFDM Air-Interface Design for Multimedia Communications*, Delft University of Technology, pp. 116-118.
5. Boashash B. ed. (2003) *Time-Frequency Signal Analysis and Processing: A Comprehensive Reference*, Oxford: Elsevier Science, 1056 p.
6. Tomba L. (1998) On the effect of Wiener phase noise in OFDM systems, *IEEE Trans. Commun.*, Vol. 46, pp. 580-583. doi: 10.1109/26.668721



7. [\*Transmission system for digital terrestrial television broadcasting\*](#), ARIB Standard, ARIB STD-B31 Version 2.2-E1, Association of Radio Industries and Businesses.

*Котляров В. В., Мирончук О. Ю., Шпилька О. О. Математичний опис та формалізація типів спотворень у цифровому каналі зв'язку з OFDM-сигналами. Робота присвячена сучасним системам зв'язку з OFDM технологією передачі сигналів. Використовуючи властивості перетворення Фур'є отримано вирази для розрахунку впливу зміщення та фазового зсуву носійної частоти, зміщення тактової частоти на інформаційний сигнал в частотній області. За допомогою ЕОМ проведено моделювання отриманих виразів і показано вплив різних неузгодженостей на модуляційні сузір'я.*

**Ключові слова:** OFDM, синхронізація, зсув носійної частоти, зсув тактової частоти, зсув фази носійної частоти.

*Котляров В. В., Мирончук А. Ю., Шпилька А. А. Математическое описание и формализация типов искажений в цифровом канале связи с OFDM-сигналом. Работа посвящена современным системам связи с OFDM технологией передачи сигналов. Используя свойства преобразования Фурье получено выражения для расчета влияния частотного и фазового смещения несущей частоты, смещения тактовой частоты на информационный сигнал в частотной области. С помощью ЭВМ проведено моделирование полученных выражений и показано влияние неточностей синхронизации на модуляционные созвездия.*

**Ключевые слова:** OFDM, синхронизация, смещение несущей частоты, смещение тактовой частоты, смещение фазы несущей частоты.

*Kotlyarov V.; Myronchuk O.; Shpylka O. Mathematical description and formalization types of distortion in a digital communication channel with OFDM-signals.*

*Introduction.* OFDM technology is widely used in digital television, broadcasting and communication systems. The biggest OFDM advantage is its high spectral efficiency. But the high spectral efficiency needs high-quality synchronization. That is why it is important to analyze received signals distortions appearing because of timing inaccuracy in order to create their compensation algorithms.

*Mathematical analysis of distortions as a result of uncoordinated timing parameters.* Using Fourier transformations properties, the expression for calculation of displacement effect and phase shift of carrier frequency, displacement of timing frequency on the informational signal in the frequency region were acquired. With the help of computer, acquired expressions were simulated and the influence of different uncoordinations on the modulation constellations for the standards of digital video systems ISDB-T were shown.

*Conclusion.* As is seen from the modelling results, inessential inaccuracies at the synchronization cause quite critical distortions that as a result significantly worsen bit error rate. The acquired results let us estimate validity of operation of distortion compensation algorithms as a result of inaccurate synchronization in the process of system development or its verification.

**Keywords:** OFDM, synchronization, carrier frequency offset, sample rate offset, phase frequency offset.