

УДК 621.396.669

**ФИЛЬТРАЦИЯ СЛАБЫХ СИГНАЛОВ  
В БЕЛОМ ГАУССОВОМ ШУМЕ**

*Макаренко А. С., к.т.н. доцент; Мельничук А. В., магистрант  
Национальный технический университет Украины «Киевский  
политехнический институт», Киев, Украина*

**FILTRATION OF WEAK SIGNALS IN WHITE GAUSSIAN NOISE**

*Makarenko A., Cand. Of Sci (Technics), associate professor;  
Melnychuk A., undergraduate student  
National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute», Kyiv, Ukraine*

**Введение**

В радиотехнических и радиоэлектронных системах уровень полезных сигналов в ряде случаев соизмерим с уровнем собственных шумов источника сигнала, что создает существенные трудности при обработке этих сигналов [1]. Проблема выделения слабых сигналов из аддитивной смеси сигнала и шума характерна для радиолокации, радионавигации и цифровых систем связи (ЦСС) [2,3]. Для обнаружения слабых сигналов в сильных шумах было развито значительное число методов. Наиболее широкое распространение получили методы оптимальной фильтрации с использованием того или иного критерия оптимальности [4]. Чаще всего используют критерии максимального отношения сигнал/шум, минимума среднего квадрата ошибки и максимума апостериорной (послеопытной) вероятности. Оптимальные фильтры весьма полно освещены в литературе и хорошо изучены [4,5], поэтому не имеет смысла описывать их характеристики и недостатки. Следует лишь отметить, что выигрыш в отношении сигнал/шум при использовании оптимальной фильтрации для целей обнаружения равен базе сигнала  $M = T_c \cdot \Delta f$ , где  $T_c$  — длительность сигнала,  $\Delta f$  — полоса частот, в которой он передается. При использовании в аналоговых устройствах квазиоптимальной фильтрации данный выигрыш на 0.9 дБ меньше [5].

Чтобы преодолеть ограниченные возможности существующих методов, основанных на оптимальной фильтрации, в данной статье рассматривается и обосновывается новый способ обработки слабых сигналов в условиях сильных шумов, позволяющий достичь существенно больших значений отношения сигнал/шум.

Целью статьи является разработка нового способа обработки слабых сигналов в условиях сильных шумов и его применение для создания чувствительного усилителя.

### Способ обработки слабых сигналов в сильных шумах

Сущность предлагаемого способа состоит в том, что полезный сигнал  $f(t)$  вместе с шумом усиливают и модулируют этой смесью по амплитуде колебание несущей частоты, затем при помощи безынерционной нелинейной цепи – диода с резистивной нагрузкой, выделяют только положительные полупериоды амплитудно-модулированного сигнала и положительные выбросы шума. Полученное таким образом суммарное колебание, содержащее последовательность косинусоидальных импульсов и шум пропускают через фильтр, частоту среза которого выбирают из условия неискаженной передачи косинусоидальных импульсов. После этого смесь сигнала и шума подвергается двойному дифференцированию, в результате чего сигнал преобразуется в последовательность косинусоидальных импульсов противоположного знака, каждый из которых в равной мере ослаблен и содержит две дельта-функции, которые затем устраняются, а шум становится высокочастотным, поскольку при двойном дифференцировании шума его энергетический спектр (спектральная плотность мощности) изменяется пропорционально  $\omega^4$  (известно [6], что энергетический спектр шума на выходе линейного четырехполюсника равен энергетическому спектру на его входе, умноженному на квадрат модуля коэффициента передачи четырехполюсника). После чего смесь подается на восстанавливающий фильтр — фильтр нижних частот Баттерворта 4-го порядка, на выходе которого выделяется сигнал  $f(t)$ , а шум весьма существенно ослабляется.

### Теоретическое обоснование способа обработки

Обоснование способа обработки проведем на примере чувствительного усилителя, структурная схема которого представлена на рис. 1.

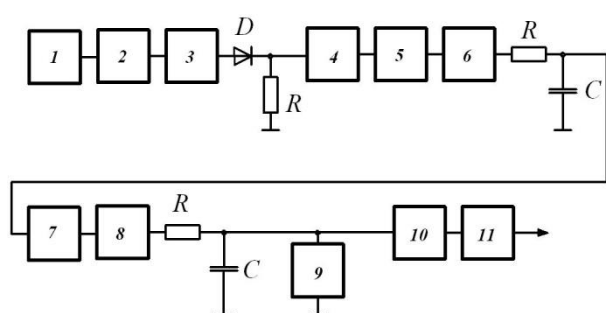


Рис.1. Структурная схема чувствительного усилителя: (1) источник сигнала с шумом; (2) усилитель; (3) модулятор; (4) фильтр; (5) дифференциатор; (6) развязывающий усилитель; (7) дифференциатор; (8) развязывающий усилитель; (9) электронный ключ; (10) фильтр нижних частот; (11) усилитель-инвертор

Сигнал источника  $I$  с внутренним сопротивлением  $R_c$  усиливается до нужного уровня усилителем 2 и подается на амплитудный модулятор-перемножитель 3, на который поступает также колебание несущей частоты  $f_0$ .

На выходе модулятора установлена безынерционная нелинейная цепь — диод  $D$  с резистивной нагрузкой  $R$ . На выходе этой цепи формируется последовательность косинусоидальных импульсов, амплитуды которых меняются по закону управляющего сигнала  $f(t)$ .

Таким образом, на вход фильтра 4- фильтра Баттерворта 2-го порядка по-

ступає послідовність косинусоїдальних виборок, удовлетворяющих условию теоремы Котельникова, рис.2.

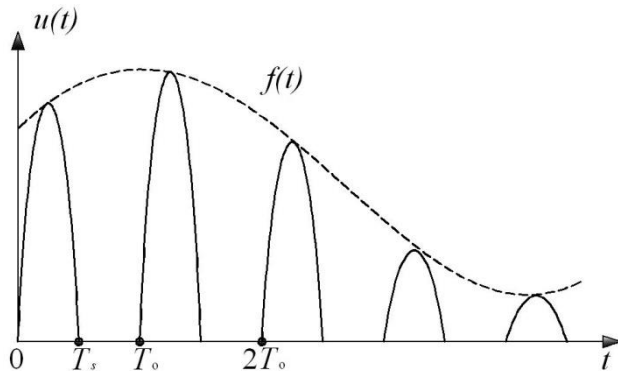


Рис.2.Последовательность косинусоидальных выборок

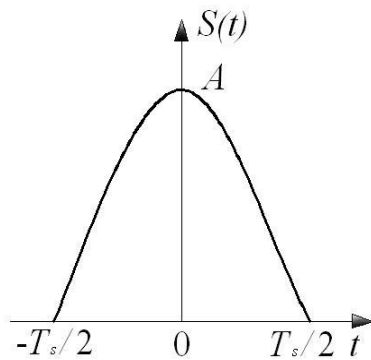


Рис.3. Косинусоидальный импульс

точно можно считать, что спектр импульса сосредоточен в полосе частот  $0 \div f_{cp}$ , где  $f_{cp} = \frac{3}{(2T_c)}$ .

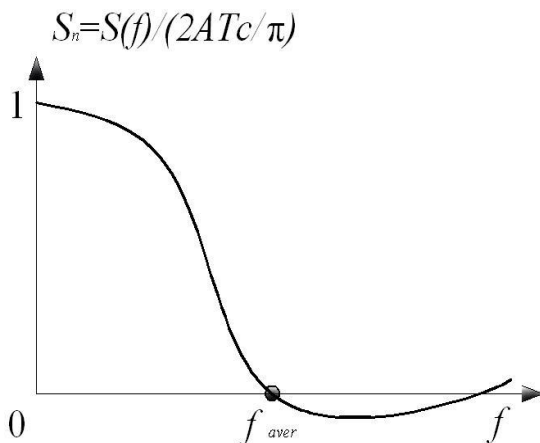


Рис.4. Спектр косинусоидального импульса

как показали расчеты, позволяет ослабить уровень шумов вне его полосы пропускания в нужной степени.

Частота среза фильтра 4 выбирается из условия неискаженной передачи косинусоидального импульса длительностью  $T_c = \frac{T_0}{2}$ , где  $T_0 = \frac{1}{f_0}$ .

Косинусоидальный импульс (рис.3) описывается выражением  $S(t) = A \cos\left(\frac{\pi t}{T_c}\right)$ ,

$-\frac{T_c}{2} \leq t \leq \frac{T_c}{2}$ , где  $A$  — амплитуда импульса, а  $T_c$  — его длительность. Спектр такого импульса может быть записан в виде [3]:

$$S(f) = \frac{2AT_c}{\pi} \cdot \frac{\cos(\pi f T_c)}{1 - 4(f T_c)^2}$$

и показан на рис. 4.

С достаточной для практики точностью можно считать, что спектр импульса сосредоточен в полосе частот  $0 \div f_{cp}$ , где  $f_{cp} = \frac{3}{(2T_c)}$ .

Поскольку  $T_c = \frac{T_0}{2}$ , то  $f_{cp} = 3f_0$ . В качестве фильтра 4 целесообразно использовать фильтр Баттерворта 2-го порядка, пропускающий частоты в полосе  $0 \div f_{cp}$ . Как известно, фильтр Баттерворта 2-го порядка обеспечивает крутизну АЧХ, равную 12 дБ на октаву, что,

Шум источника входного сигнала и шумы усилителя независимы, центрированы, поэтому на выходе фильтра 4 они суммируются по мощности [8].

Далее смесь сигнала и шума подвергается двойному дифференцированию. Поскольку цепь от входа фильтра 4 до выхода является линейно-параметрической, к ней применим принцип суперпозиции, поэтому прохождение сигнала и шума через устройство обработки можно рассчитывать отдельно.

Выход фильтра 4 соединен со входом первого дифференциатора 5, выход которого соединен со входом первого развязывающего усилителя 6, выход этого усилителя соединен со входом ограничивающего фильтра — фильтра нижних частот с частотой среза, равной  $3f_0$ .

Выход первого ограничивающего фильтра соединен со входом второго дифференциатора 7, выход которого соединен со входом второго развязывающего усилителя 8, а его выход соединен со входом второго ограничивающего фильтра с той же частотой среза  $f_{cp} = 3f_0$ . Емкость этого фильтра может закорачиваться при помощи ключа 9, что, как будет показано в дальнейшем, позволит устранять дельта-функции, образующиеся при двойном дифференцировании сигнала.

Выход второго ограничивающего фильтра соединен со входом восстанавливающего фильтра 10 — фильтра нижних частот Баттерворта 4-го порядка, выход которого соединен со входом усилителя-инвертора, выход которого и есть выходом устройства обработки.

Ограничивающие RC-фильтры введены в схему для того, чтобы ограничить рост шумов на выходах развязывающих усилителей, обусловленный их дифференцированием. На ключ 9 подается последовательность управляющих импульсов, благодаря чему удается устранять дельта-функции сигнала. Эти импульсы формируются схемой управления из колебания несущей частоты, которое, в свою очередь, создается генератором частоты  $f_0$  (на рис.1 не показаны).

### Обработка шума в устройстве

Как известно [9], энергетический спектр шума (спектральная плотность мощности) после двойного дифференцирования будет иметь вид:  $G_{вых} = G_0 (K_p \tau_\partial \omega)^4$ , где  $G_0$  — равномерный энергетический спектр шума на выходе фильтра 4,  $K_p$  — результирующий коэффициент передачи дифференциатора и развязывающего усилителя,  $\tau_\partial$  — постоянная времени дифференциатора, которая выбирается из условия  $\tau_\partial \omega_{cp} = 0.1$ .

Мощность шума на выходе фильтра нижних частот будет равна:

$$P_{\text{вих}} = \sigma_{\text{вих}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\omega_{cp}} G_0 (K_p \tau_{\partial} \omega_{cp})^4 K^2(\omega) d\omega \approx \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2\pi} \Omega_m G_0 (K_p \tau_{\partial} \Omega_m)^4 \quad (1)$$

где  $K^2(\omega)$  — квадрат модуля коэффициента передачи фильтра Баттерворта 4-го порядка, причем в полосе частот от 0 до  $\Omega_m$   $K^2(\omega) \approx 1$ , а за границами этой полосы практически равен нулю. Здесь  $\Omega_m$  — частота среза ФНЧ, которая равна максимальной частоте в спектре входного сигнала.

Если бы шум не подвергался обработке (двойному дифференцированию), то на выходе ФНЧ мощность шума была бы равна:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\omega_{cp}} G_0 K^2(\omega) d\omega \approx \frac{1}{2\pi} G_0 \Omega_m \quad (2)$$

Найдем коэффициент выигрыша по мощности для шума:

$$K_{ш} = \frac{\sigma^2}{\sigma_{\text{вих}}^2} = \frac{\left(\frac{1}{2\pi}\right) G_0 \Omega_m \cdot 5}{\left(\frac{1}{2\pi}\right) G_0 \Omega_m (K_p \tau_{\partial} \Omega_m)^4} = \frac{5}{(K_p \tau_{\partial} \Omega_m)^4} \quad (3)$$

Введем условие, чтобы мощность шума при двойном дифференцировании на выходе второго ограничивающего фильтра (т.е. на входе ФНЧ) была бы такой же, как и на входе (т.е. выходе фильтра Ф). При этом

$\frac{5}{(K_p \tau_{\partial} \omega_{cp})^4} = 1$ , откуда находим  $K_p = 10\sqrt[4]{5}$ , поскольку  $\tau_{\partial} \omega_{cp} = 0.1$ . При

этом выражение (3) приводится к виду:

$$K_{ш} = \frac{5}{(K_p \tau_{\partial} \Omega_m)^4} = \frac{5}{(10\sqrt[4]{5} \cdot 0.1)^4} \cdot \left(\frac{\omega_{cp}}{\Omega_m}\right)^4 = \left(\frac{\omega_{cp}}{\Omega_m}\right)^4 \quad (4)$$

Далее рассмотрим прохождение сигнала через устройство обработки. После первого дифференцирования сигнал будет иметь вид (рис.5):

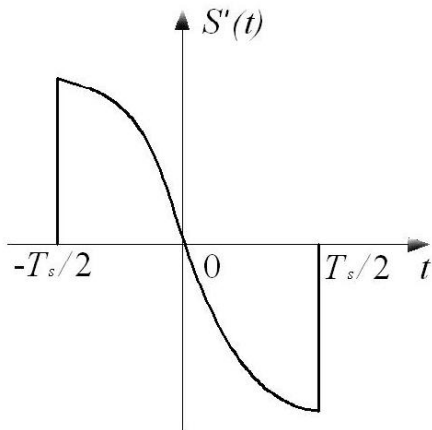


Рис.5. Сигнал после первого дифференциатора при помощи ключа

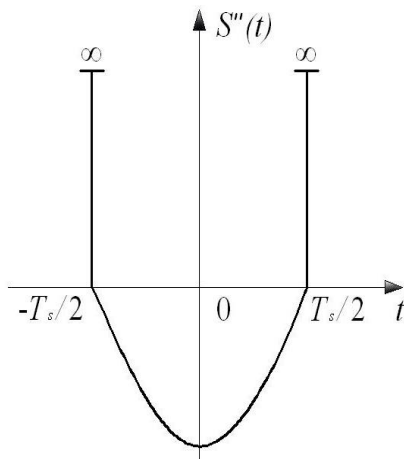


Рис.6. Сигнал после второго дифференциатора

$$S'(t) = -A \left( \frac{\pi K_p \tau_d}{T_c} \right) \sin \left( \frac{\pi t}{T_c} \right) \quad (5)$$

После второго дифференцирования имеем:

$$S''(t) = -A \left( \frac{\pi K_p \tau_d}{T_c} \right)^2 \cos \left( \frac{\pi t}{T_c} \right) + A \left( \frac{\pi K_p \tau_d}{T_c} \right) \times \left[ \delta \left( t + \frac{T_c}{2} \right) + \delta \left( t - \frac{T_c}{2} \right) \right] \quad (6)$$

Сигнал  $S''(t)$  представлен на рис.6. Найдем степень ослабления сигнала в устройстве с учетом того, что дельта-функции устраняются  $K$ , закорачивающего емкость второго ограничивающего фильтра на короткий промежуток времени. Коэффициент ослабления сигнала будет равен:

$$K_c = \left( \frac{\pi K_p \tau_d}{T_c} \right)^2 = \left( \frac{\pi \cdot 0.1 \cdot 10^4 \sqrt{5}}{\omega_{cp} \cdot \frac{3}{2 f_{cp}}} \right)^2 = \frac{\sqrt{5}}{9} \quad (7)$$

Таким образом, ослабление сигнала по мощности при его двойном дифференцировании составляет 12 дБ. Нетрудно показать, что ослабление выборок сигнала в выходном восстанавливающем фильтре 10 составляет 10 дБ. Таким образом, суммарное ослабление сигнала в устройстве обработки равно 22 дБ.

Ослабление шума определяется выражением (4) и зависит от соотношения  $\left( \frac{\omega_{cp}}{\Omega_m} \right)$ . Очевидно, что при надлежащем выборе  $\omega_0 = \frac{\omega_{cp}}{3}$   $K_{ш}$  может быть весьма существенным.

Например, при  $F_m = \frac{\Omega_m}{2\pi} = 10 \text{ кГц}$ ,  $f_0 = 300 \text{ кГц}$ ,  $f_{cp} = 900 \text{ кГц}$ ,  $K_{ш} = 78 \text{ дБ}$ .

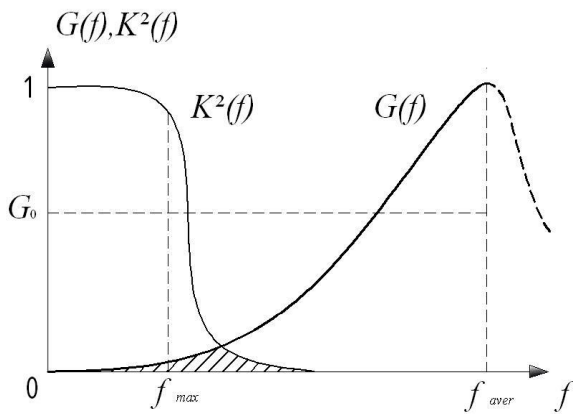


Рис.7. Ослабление шума выходным ФНЧ:  $K^2(f)$  — квадрат модуля коэффициента передачи фильтра Баттерворта 4-го порядка,  $G_0$  — спектральная плотность мощности шума,  $G(f)$  — спектральная плотность мощности шума после двойного дифференцирования

Шум же при двойном дифференцировании имеет энергетический спектр, изменяющийся пропорционально  $\omega^4$ , т.е. становится высокочастотным, что создает предпосылки для его существенного ослабления с помощью выходного ФНЧ (рис.7).

Заштрихованная область под кривыми на рис.7 — мощность шума на выходе ФНЧ, что свидетельствует о значительном уменьшении мощности шума на выходе устройства обработки.

### Результаты компьютерного моделирования

Серия расчетов, проведенная в среде *MATLAB* для 50000 реализаций белого гауссового шума, задаваемого на выходе фильтра 4, при дисперсии, равной  $1 B^2$ , и максимальной частоте спектра входного сигнала  $F_m = 10 \text{ кГц}$ , показала следующее. Результирующий выигрыш в отношении сигнал/шум (пунктирная кривая на рис.9) незначительно отличается от рассчитанного теоретически (сплошная кривая). Несколько меньшее значение выигрыша

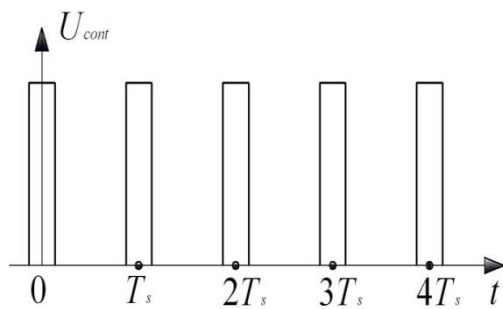


Рис.8. Последовательность управляющих импульсов

объясняется тем, что при устранении дельта-функций с помощью импульсов конечной длительности (см. рис.8) теряется часть энергии косинусоидальных выборок.

С учетом ослабления сигнала выигрыш в отношении сигнал/шум в устройстве будет равен:  $K_g = 78 - 22 = 56 \text{ дБ}$ . Ослабленный сигнал усиливается и инвертируется с помощью малошумящего усилителя-инвертора 11, установленного на выходе ФНЧ 10.

Следует отметить, что косинусоидальный импульс — это единственный из известных сигналов, который при двойном дифференцировании сохраняет (с точностью до знака) свою форму и содержит две дельта-функции противоположного знака, которые могут быть устранены.

белого гауссового шума, задаваемого на выходе фильтра 4, при дисперсии, равной  $1 B^2$ , и максимальной частоте спектра входного сигнала  $F_m = 10 \text{ кГц}$ , показала следующее. Результирующий выигрыш в отношении сигнал/шум (пунктирная кривая на рис.9) незначительно отличается от рассчитанного теоретически (сплошная кривая). Несколько меньшее значение выигрыша

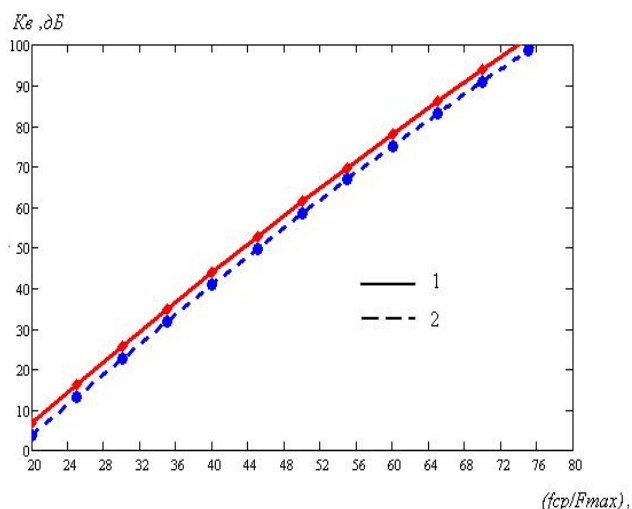


Рис.9. Результируючий вииграш в отношении сигнал/шум: 1- теоретически рассчитанное значение виигрыша; 2- экспериментальное значение виигрыша

## Выводы

Достоинством рассмотренного способа и устройства на его основе является то, что здесь происходит существенное ослабление не только шумов усилителей, предшествующих блокам обработки, но и шумов источника входного сигнала (в приемнике антенны), что создает предпосылки для создания устройств и систем с новыми функциональными возможностями.

Предложенный способ обработки аддитивной смеси сигнала и шума можно с успехом использовать в радиолокационных системах

и ЦСС, в которых применяется квадратурная схема обработки с синхронными (когерентными) детекторами в двух каналах обнаружителя [3,5]. Это позволит существенно уменьшить мощность передатчиков таких систем либо увеличить дальность их действия при неизменной (прежней) мощности передатчиков.

На основе этого способа могут быть построены обнаружители косинусоидальных цифровых и радиолокационных видеоимпульсов [10].

Возможно также внедрение нового способа и устройств на его основе в системы спутниковой связи, радионавигацию, гидролокацию и современные медицинские диагностические системы.

## Литература

1. Ногин В.Н. Аналоговые электронные устройства. — М. : Радио и связь, 1992. — 304 с.
2. Лезин Ю.С. Введение в теорию и технику радиотехнических систем. — М. : Радио и связь, 1986. — 280 с.
3. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. Изд. 2-е, испр.: Пер. с англ. — М. : Издательский дом «Вильямс», 2003. — 1104 с.: ил. — Парал. Тит. Англ. ISBN 5-8459-0497-8.
4. Ван Трис Г. Теория обнаружителя, оценок и модуляции: Пер. с англ. Под ред. В.И. Тихонова. т.1. — М. : Сов.радио, 1972. — 744с.
5. Сосулин Ю. Г. Теория обнаружителя и оценивания стохастических сигналов. — М. : Сов.радио, 1977. — 608с.
6. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. — М. : Сов.радио, 1977. — 608с.
7. Галкин В. А. Цифровая мобильная радиосвязь. — М. : Горячая линия – Телеком, 2007. — 432с.
8. Латхи Б.П. Системы передачи информации. Перевод с англ. Под общей редакцией Б. И. Кувшинова — М. : Связь, 1971. — 324с.



9. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. — М.: Радио и связь, 1982. — 624с
10. Патент України №75231U, Україна, МПК (2006), G01S 7/285. Рішення про видачу патенту від 26.11.2012 р. Пристрій виявлення косинусоїдальних цифрових і радіолокаційних сигналів / Макаренко О.С.

**References**

1. Nogin V.N. Analogovye elektronnye ustroystva. - M.: Radio i sviaz, 1992. - 304.
2. Lezin U.S. Vvedenie v teoriyu i tehniku radiotekhnicheskikh system. - M.: Radio i sviaz, 1986. - 280s.
3. Sklar B. Cifrovaia sviaz. Teoreticheskie osnovy i prakticheskoe priminenie. Izd. 2, ispr. Per. s angl. - Moskva: Izdatelskii dom "Williams", 2003. - 1104 s.:il. - Paral. Tit. Ang. ISBN 5-8459-0497-8.
4. Van Tris G. Teoria obnaruzhitelia, ocenok i modulacii: Per. s angl. V.I. Tikhonova t.1. - M.: Sov.radio, 1972. - 744s.
5. Sosulin U.G. Teoria obnaruzhitelia i ocenivania stokhasticheskikh signalov. - M: Sov.radio, 1978. - 320s.
6. Gonorovskii I.S. Radiotekhnicheskie cepi i signali. - M.: Sov.radio, 1977. - 608s.
7. Galkin V.A. Cifrovaia mobilnaia radiosviaz. - M: Goriachaia linia - Telecom, 2007. - 432s.
8. Lathi B.P. Sistemi peredachi informacii. Perevod s angl. Pod obshchei redaktsiei B.I. Kuvshinova - M:Sviaz, 1971. - 324s.
9. Tikhonov V.I. Statisticheskaiia radiotekhnika. -M.: Radio I sviaz, 1982. - 624s.
10. Patent Ukrainy no.75231U, Ukraina, МПК (2006), G01S 7/285. Rishennia pro vida-chu patentu vid 26.11.2012. Prysrtii vyivlennia kosynusoidalnikh cifrovikh i radiolokaci-inikh sygnaliv / Makarenko O.S.

*Макаренко О.С., Мельничук О.В. Фільтрація слабких сигналів в білому гаусівському шумі. Стаття присвячена вирішенню проблеми обробки слабких сигналів в білому гаусівському шумі із забезпеченням набагато більшого виграшу у відношенні сигнал / шум у порівнянні з вже існуючими технічними рішеннями. Описується сутність нового способу обробки, розглядається чутливий підсилювач, що забезпечує виграш у відношенні сигнал / шум, що перевищує 50 дБ. Розкриваються переваги нового способу обробки і наводяться області його використання в сучасних радіотехнічних системах різного призначення.*

**Ключові слова:** фільтрація, білий шум, база сигналу, вибірка, диференціатор, енергетичний спектр, дельта-функція.

*Макаренко А.С., Мельничук А.В. Фильтрация слабых сигналов в белом гауссовом шуме. Статья посвящена решению проблемы обработки слабых сигналов в белом гауссовом шуме с обеспечением гораздо большего выигрыша в отношении сигнал/шум по сравнению с уже существующими техническими решениями. Описывается сутьность нового способа обработки, рассматривается чувствительный усилитель, обеспечивающий выигрыш в отношении сигнал/шум, превышающий 50 дБ. Раскрываются преимущества нового способа обработки и приводятся области его использования в современных радиотехнических системах различного назначения.*

**Ключевые слова:** фильтрация, белый шум, база сигнала, выборка, дифференциатор, энергетический спектр, дельта-функция.

*Makarenko A., Melnichuk A. Filtration of weak signals in white Gaussian noise.*

***Introduction.** The level of desired signals, in some cases, is comparable to the level of intrinsic noise source in radio and electronic systems. It creates substantial difficulties in the processing of these signals. The problem of the weak signals detecting from the additive mixture of signal and noise is characteristic for digital communication.*

***Object of the work.** The article is devoted to solving the problem of detecting the weak analog and digital signals on a background of strong noise providing much larger gain in the signal / noise ratio compared to the existing technical solutions. The essence of the new signal processing method is described in this article. The condition for achieving the task is obtaining the maximum gain in the signal / noise ratio greater than 50 dB for sensitive amplifier. The advantages of the product, effective for information processing with low power, are described.*

***Conclusions.** The dignity of the considered method and devices is a significant weakening of the noise amplifiers and noise input signal (in receiver antenna). It creates conditions for the development of devices and systems with new functionality. Sensitive amplifier can be used for postdetector processing the mixture of signal and noise in digital communication systems, radar, sonar and underwater acoustic communication.*

***Keywords:** filtering, white noise, base signal, sampling, differentiator, energy spectrum, delta function.*