

*Радіотехнічні кола та сигнали*

2. Каяцкас А.А. Основы радиоэлектроники. - М.:Высш.шк.,1988. 464 с.
3. Манаев Е.И. Основы радиоэлектроники. - М.: Радио и связь. 1985. 488 с.
4. Трохименко Я.К. Ошибки формальной теории усилителей с обратной связью. // Радиоэлектроника. - 1973. № 2. С. 127 – 134.

<p>В.Д. Шашук  <b>К вопросу о классификации обратных связей в радиоэлектронных цепях.</b>          Показана необходимость анализа условий, при которых можно пренебречь прямой передачей сигнала через обратимый канал обратной передачи. Это позволяет обосновано подойти к определению вида обратной связи.</p>	<p>V.D. Stashuk.  <b>To a question on classification of feedback in radioelectronic circuits.</b>          In the article, necessity of the analysis of conditions when it is possible to neglect direct transfer of a signal through the reversible feedback channel is shown. It allows to define a kind of a feedback correctly.</p>
---	---

*Надійшла до редакції 20 травня 2006 року*

УДК 621.372.061

**АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ СИТЕМ В ОБЛАСТІ ТРАНСФОРМАНТ  
КРАТНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ EIWAL**

*Рибін О.І., Ткачук А.П.*

*Запропоновано алгоритм розв'язання диференційних рівнянь рівноваги лінійних систем в базисі кратного ортогонального перетворення EIWAL.*

**Вступ. Постановка задачі**

Розв'язання диференційних рівнянь рівноваги лінійних систем, як відомо, найбільш ефективно реалізується при використанні перетворення Фур'є та споріднених з ним ( $z$ -перетворення, перетворення Лапласа). Це забезпечило поширення перетворення Фур'є у найрізноманітніших галузях науки і техніки. Але розв'язання задач оброблення, передачі та архівації сигналів часто вимагає переходу до інших, відмінних від перетворення Фур'є ортогональних перетворень [1], які забезпечують краще стиснення інформації або більшу зручність обробки [2-4].

Широкого розповсюдження набувають з цього приводу "кратні" ортогональні перетворення, наприклад перетворення Фур'є-Мелліна, деякі види гомоморфних перетворень [5-6].

Метою даної роботи є розроблення математичного апарату розв'язання диференційних рівнянь в області кратного перетворення, одержаного з власних векторів дискретного оператора диференціювання в базисі Уолша-Адамара та перетворення Уолша, названого авторами перетворенням EIWAL (Eigenvector-Walsh).

**Опис запропонованого методу**

Як відомо [7, 8], лінійне диференційне рівняння

$$\begin{aligned} a_m \cdot \frac{d^m x}{dt^m} + a_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + a_1 \cdot \frac{dx}{dt} + a_0 \cdot x = \\ = b_n \cdot \frac{d^n y}{dt^n} + b_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \cdot \frac{dy}{dt} + b_0 \cdot y \end{aligned} \quad (1)$$

в області трансформант Уолша-Адамара перетворюється до вигляду

$$\begin{aligned} \left( a_m \cdot \overline{\overline{A}}^m + a_{m-1} \cdot \overline{\overline{A}}^{m-1} + \dots + a_1 \cdot \overline{\overline{A}} \cdot x + a_0 \cdot \overline{\overline{E}} \right) \cdot \overline{X}_\xi = \\ = \left( b_n \cdot \overline{\overline{A}}^n + b_{n-1} \cdot \overline{\overline{A}}^{n-1} + \dots + b_1 \cdot \overline{\overline{A}} \cdot x + b_0 \cdot \overline{\overline{E}} \right) \cdot \overline{Y}_\xi, \end{aligned} \quad (2)$$

де  $\overline{\overline{A}}^k = \left[ \overline{\overline{W}} \cdot \overline{\overline{D}}_H^T \right]^k$ ;  $\overline{\overline{E}}$  – одинична матриця;  $\overline{\overline{W}}$  – матриця (дискретний оператор) перетворення Уолша-Адамара;  $\overline{\overline{D}}_H$  – нормована (поділена на  $N$ ) матриця похідних від оператора  $\overline{\overline{W}}$ ;  $T$  – символ транспонування;  $N$  – порядок квадратних матриць  $\overline{\overline{A}}$  та  $\overline{\overline{E}}$ ;  $\overline{X}_\xi$ ,  $\overline{Y}_\xi$  – стовпці амплітуд спектрів за Адамаром відповідно реакції та дії розміру  $N \times 1$ .

Розклавши оператор  $\overline{\overline{A}}$  на власні значення та власні вектори, вираз можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \overline{\overline{P}} \cdot (a_m \cdot \overline{\overline{\lambda}}^m + a_{m-1} \cdot \overline{\overline{\lambda}}^{m-1} + \dots + a_1 \cdot \overline{\overline{\lambda}} + a_0 \cdot \overline{\overline{E}}) \cdot \overline{\overline{P}}^* \cdot \overline{X}_\xi = \\ = \overline{\overline{P}} \cdot (b_n \cdot \overline{\overline{\lambda}}^n + b_{n-1} \cdot \overline{\overline{\lambda}}^{n-1} + \dots + b_1 \cdot \overline{\overline{\lambda}} + b_0 \cdot \overline{\overline{E}}) \cdot \overline{\overline{P}}^* \cdot \overline{Y}_\xi, \end{aligned} \quad (3)$$

де  $\overline{\overline{\lambda}}^k$  – діагональна матриця власних значень матриці  $\overline{\overline{A}}$  в степені  $k$ , тобто – матриця з діагональними елементами  $\lambda_d^k$ ;  $\overline{\overline{P}}$  – матриця утворена векторами-стовпцями власних значень  $\pi_d$ , а  $\overline{\overline{P}}^*$  – транспонована і комплексно спряжена матриця  $\overline{\overline{P}}$ .

Вирази в дужках формули (3) можна записати як діагональні матриці  $\overline{\overline{\lambda}}_{\Sigma A}$  та  $\overline{\overline{\lambda}}_{\Sigma B}$ , причому діагональні елементи матриць з номерами (0,0), мають значення  $a_0$  та  $b_0$  відповідно, а елементи  $d$ -го рядка і  $d$ -го стовпця мають відповідно вигляд

$$\begin{aligned} \lambda_{\Sigma Add} = a_m \cdot \lambda_d^m + a_{m-1} \cdot \lambda_d^{m-1} + \dots + a_1 \cdot \lambda_d + a_0; \\ \lambda_{\Sigma Bdd} = b_n \cdot \lambda_d^n + b_{n-1} \cdot \lambda_d^{n-1} + \dots + b_1 \cdot \lambda_d + b_0. \end{aligned} \quad (4)$$

Враховуючи (4), розв'язок задачі аналізу можна знайти у вигляді

$$\overline{X}_\xi = \overline{\overline{P}} \cdot \overline{\overline{\lambda}}_{\Sigma A}^{-1} \cdot \overline{\overline{\lambda}}_{\Sigma B} \cdot \overline{\overline{P}}^* \cdot \overline{Y}_\xi = \overline{\overline{P}} \cdot \overline{\overline{\lambda}}_{\Sigma AB} \cdot \overline{\overline{P}}^* \cdot \overline{Y}_\xi, \quad (5)$$

де  $\overline{\overline{\lambda}}_{\Sigma AB}$  – діагональна матриця, елемент діагоналі (0,0) якої має вигляд

$$\lambda_{\Sigma AB00} = \frac{b_0}{a_0},$$

а елемент  $(d,d)$

$$\lambda_{\Sigma AB dd} = \frac{b_n \cdot \lambda_d^n + b_{n-1} \cdot \lambda_d^{n-1} + \dots + b_1 \cdot \lambda_d + b_0}{a_m \cdot \lambda_d^m + a_{m-1} \cdot \lambda_d^{m-1} + \dots + a_1 \cdot \lambda_d + a_0}. \quad (6)$$

Підставимо тепер в вираз (5) замість  $\overline{X}_\xi$  та  $\overline{Y}_\xi$  вирази

$$\begin{aligned} \overline{X}_\xi &= \overline{\overline{W}} \cdot \overline{X}_t \\ \overline{Y}_\xi &= \overline{\overline{W}} \cdot \overline{Y}_t \end{aligned} \quad (7)$$

де  $\overline{\overline{W}}$  – нормований дискретний оператор перетворення Уолша-Адамара;  $\overline{X}_t$  та  $\overline{Y}_t$  відповідно стовпці відліків у часі реакції та дії.

Одержимо реакції

$$\overline{X}_t = \overline{\overline{W}} \cdot \overline{\overline{\Pi}} \cdot \overline{\overline{\lambda}}_{\Sigma AB} \cdot \overline{\overline{\Pi}}^* \cdot \overline{\overline{W}} \cdot \overline{Y}_t = \overline{\overline{EIW}}^* \cdot \overline{\overline{\lambda}}_{\Sigma AB} \cdot \overline{\overline{EIW}} \cdot \overline{Y}_t, \quad (8)$$

де  $\overline{\overline{EIW}}^* = \overline{\overline{W}} \cdot \overline{\overline{\Pi}}$  та  $\overline{\overline{EIW}} = \overline{\overline{\Pi}}^* \cdot \overline{\overline{W}}$  – дискретні матричні оператори зворотного і прямого кратного перетворення відповідно, названого у роботі EI WAL.

Порівняємо вираз (8) з виразом для дискретного перетворення Фур'є

$$\overline{X}_t = \overline{\overline{F}}^* \cdot \overline{\overline{Diag}}(F(j \cdot \omega)) \cdot \overline{\overline{F}} \cdot \overline{Y}_t, \quad (9)$$

де  $\overline{\overline{F}}$ ,  $\overline{\overline{F}}^*$  – дискретні матричні оператори прямого та зворотного перетворення Фур'є;  $\overline{\overline{Diag}}(F(j \cdot \omega))$  – діагональна матриця функції кола, елемент  $D_{00}$  якої має вигляд

$$D_{00} = \frac{b_0}{a_0},$$

а елемент  $D_{dd}$  дорівнює

$$D_{dd} = \frac{b_n \cdot (j \cdot \omega_d)^n + b_{n-1} \cdot (j \cdot \omega_d)^{n-1} + \dots + b_1 \cdot (j \cdot \omega_d) + b_0}{a_m \cdot (j \cdot \omega_d)^m + a_{m-1} \cdot (j \cdot \omega_d)^{m-1} + \dots + a_1 \cdot (j \cdot \omega_d) + a_0}. \quad (10)$$

Порівняння (10) і (6) та (9) і (8) показує, що ці вирази подібні. Звідси виходить, що трудомісткість аналізу (8) за функціями EI WAL співпадає з трудомісткістю аналізу з використанням перетворення Фур'є.

Більше того, оскільки вирази (10) і (6) при заміні  $j \cdot \omega_d$  на  $\lambda_d$  тотожні, теореми про диференціювання та згортку оригіналів, відомі для перетворення Фур'є, вірні також і для запропонованого перетворення EI WAL, а, наприклад, в теорії кіл можливо використовувати усі процедури пов'язанні із введенням образів  $j \cdot \omega_d \cdot L \rightarrow \lambda_d \cdot L$  та  $1/j \cdot \omega_d \cdot C \rightarrow 1/\lambda_d \cdot C$ .

Алгоритм формування матриць  $\overline{\overline{EIW}}$  та  $\overline{\overline{\lambda}}$

Оператор дискретного перетворення  $\overline{\overline{EIW}}$  розміром  $N \times N$  будемо формувати окремими підматрицями, які є групою окремих трансформант, а матрицю  $\overline{\overline{\lambda}}$  – окремими підмножинами діагональних елементів  $\lambda_d$ , що відповідають групам трансформант. Так, матриця перетворення  $\overline{\overline{EIW}}$  складається з  $n+1$  підматриць, де  $n = \log_2(N)$ . Кожна  $r$ -та підматриця має розмір  $2^{r-1} \times N$  при  $r = 1, 2, \dots, n$ . Нульова підматриця має розмір  $1 \times N$ . Відповідно маємо  $n+1$  підмножин діагональних елементів матриці  $\overline{\overline{\lambda}}$ .

Нульова підматриця є нульовим рядком матриці  $\overline{\overline{EIW}}$ , який визначається виразом

$$Eiwal_0(0, m) = \exp(j \cdot 0 \cdot m), \quad (11a)$$

де  $m = 0, 1, \dots, N - 1$ .

Перша підматриця є першим рядком матриці  $\overline{\overline{EIW}}$ , який визначається виразом

$$Eiwal_1(0, m) = \exp(j \cdot \pi \cdot m), \quad (11б)$$

де  $m = 0, 1, \dots, N - 1$ .

Елементи  $r$ -ї підматриці визначаються як

$$\begin{aligned} Eiwal_r(k, m) &= \overline{\overline{Eiwal_r(2^{r-1} - k - 1, m)}} = \\ &= \exp\left(-j \cdot \pi \cdot \left[\frac{(2 \cdot m + 1) \cdot (2 \cdot k + 1)}{2^r}\right]\right), \end{aligned} \quad (11в)$$

де  $k$  – порядковий номер базисної функції в окремій  $r$ -тій підматриці,  $k = 0, 1, \dots, 2^{r-1} - 1$ ;  $r = 2, 3, \dots, n$ ;  $m = 0, 1, \dots, N - 1$ ;  $\overline{\overline{\phantom{x}}}$  – знак комплексного спряження.

Відповідні підмножини діагональних елементів  $\lambda_i$  матриці  $\overline{\overline{\lambda}}$ :

$$\lambda_0 = 0; \quad (12a)$$

$$\lambda_k^r = 1 + \exp(j \cdot \varphi_k), \quad (12б)$$

де  $\varphi_k = \pi \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot k + 1}{2^{r-1}}\right)$  радіан або  $\varphi_k = 180^\circ \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot k + 1}{2^{r-1}}\right)$  градусів;

$k$  – номер елемента діагональної матриці у окремій  $r$ -тій підмножині,  $k = 0, 1, \dots, 2^{r-1} - 1$ ;  $r = 1, 2, \dots, n$ .

**Алгоритм аналізу диференційних рівнянь  
в базисі перетворення EIWAL**

Алгоритм аналізу лінійних систем в базисі перетворення EIWAL має наступний вигляд.

1. Замінити усі дії їх образами відносно  $\lambda$  (так само, як це робиться для перетворення Лапласа відносно  $p$ ), або обчислити “спектри” за формулою прямого перетворення  $\bar{Y}_\lambda = \overline{EIW} \cdot \bar{Y}_t$ .

2. Символічним методом відносно операнди  $\lambda$  знайти необхідні реакції кола в символічному вигляді.

3. Підставити значення  $\lambda_d$  (відомі і незмінні для матриці дискретного оператора диференціювання  $\bar{A}$  в (2)) в відповідні вирази (6) і знайти для кожної реакції,

$$x_{\lambda_d} = \lambda_{\Sigma ABdd} \cdot y_{\lambda_d}$$

4. Для одержаних “спектрів” реакції  $x_{\lambda_d}$  знайти зворотне перетворення EIWAL

$$\bar{X}_t = \overline{EIW}^* \cdot \bar{X}_\lambda, \tag{13}$$

де  $\bar{X}_\lambda = [x_{\lambda_0}, x_{\lambda_1}, \dots, x_{\lambda_d}, \dots, x_{\lambda_{N-1}}]^T$ .

Таким чином, алгоритм розв’язання диференційних рівнянь рівноваги лінійних систем (крім базисних функцій  $Eiwal(n,t)$ , дискретні відліки яких знаходяться в матриці EIWAL і “частот” цих базисних функцій) не відрізняється від відомого алгоритму розв’язання лінійних диференційних рівнянь (аналізу лінійних систем) за методом перетворення Фур’є.

Швидкодія запропонованого методу залежить від можливості аналітичного опису функції  $Eiwal(n,t)$  та організації відповідного швидкого перетворення, що є окремою задачею, якій буде присвячена спеціальна робота.

**Ілюстрація одержаних результатів**

Розглянемо класичний приклад коефіцієнту передачі паралельного резонансного контуру.

Коефіцієнт передачі контуру у вигляді  $K(j \cdot \omega_i)$  та  $K(\lambda_i)$ :

$$K(j \cdot \omega_i) = \frac{g}{g + j \cdot \omega_i \cdot C + \frac{1}{j \cdot \omega_i \cdot L}}; \quad K(\lambda_i) = \frac{g}{g + \lambda_i \cdot C + \frac{1}{\lambda_i \cdot L}}$$

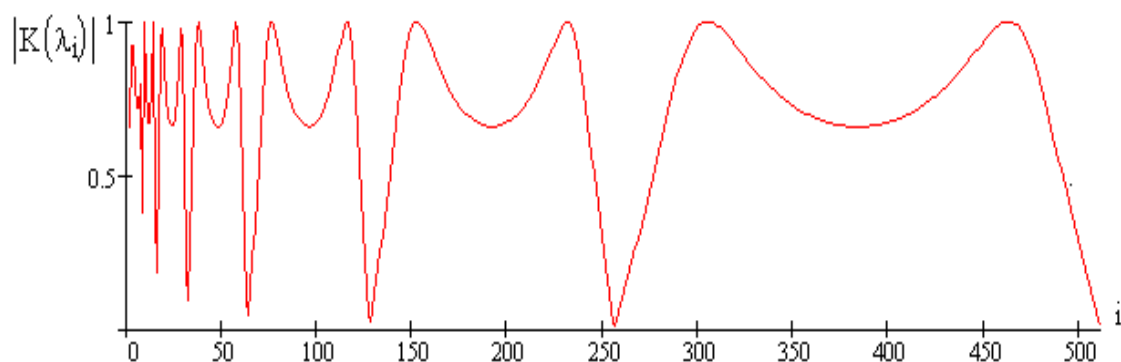
Для простоти обчислень приймемо  $g = 1$ .

Нехай резонанс має місце на середній нормованій частоті. Тоді

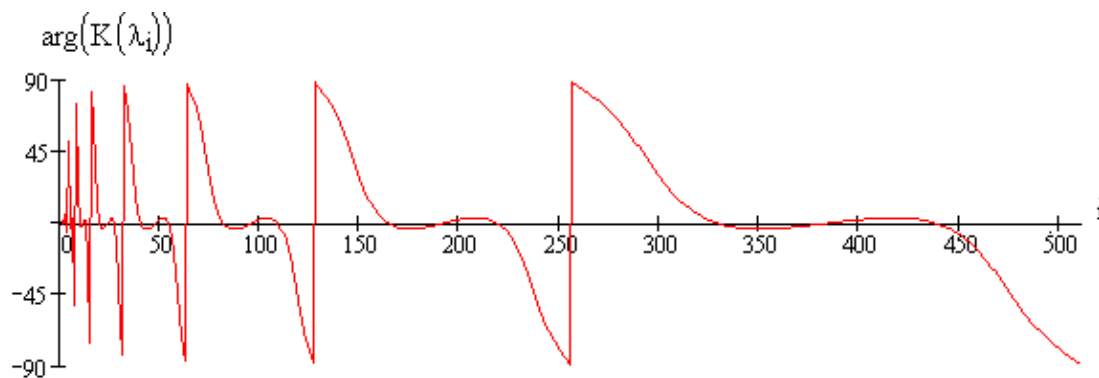
$$\frac{N}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} = \frac{N}{4}, \text{ звідки } L \cdot C = (2/\pi)^2.$$

Оберемо значення:  $L = \frac{1}{10} \cdot (2/\pi)^2$ ,  $C = 10 \cdot (2/\pi)^2$ .

На рис. 1 наведені нормовані амплітудна та фазова характеристики коефіцієнта передачі  $K(\lambda_i)$  в області перетворення EIWAL, а на рис. 2 при перестановці відліків згідно двійкової інверсії їх номерів. Пунктирною лінією на рис. 2 показано  $K(j \cdot \omega_i)$ . Розрахунки проведено для формату перетворення  $N = 512$ .

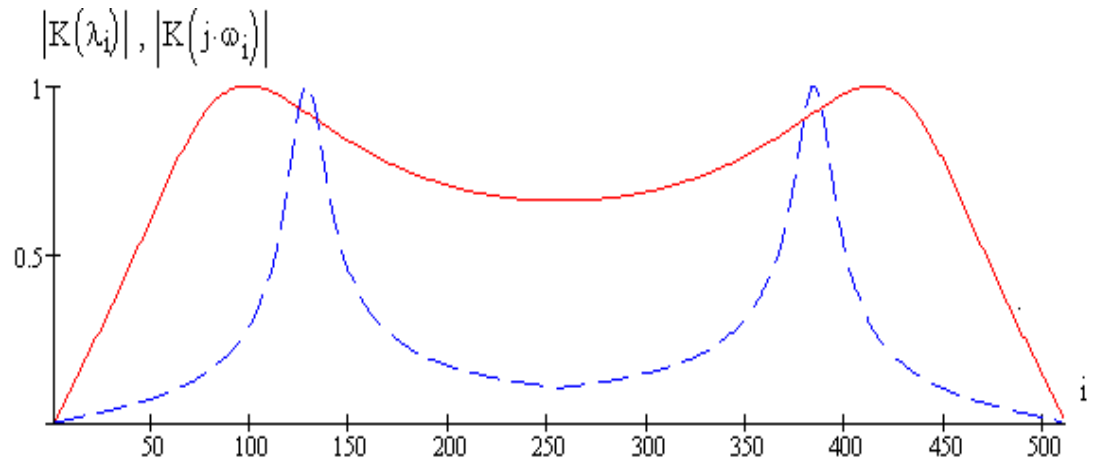


а

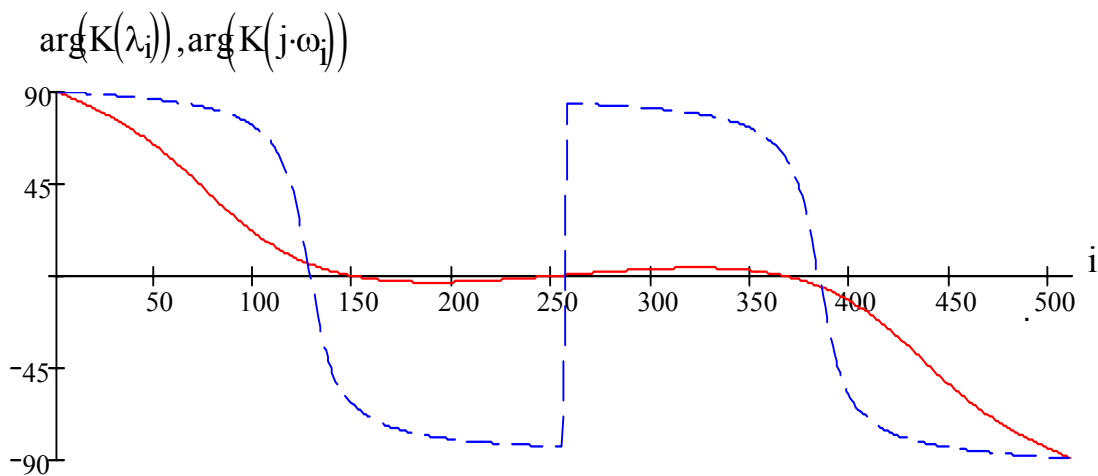


б

Рис. 1. Нормовані амплітудна (а) та фазова (б) характеристики коефіцієнта передачі в області перетворення EIWAL



а



б

Рис. 2. Порівняння амплітудних (а) та фазових (б) характеристик коефіцієнта передачі в області перетворень EIWAL та Фур'є

### Висновки

1. Одержане ортогональне перетворення EIWAL має базисні функції, тотожні базисним функціям перетворення Фур'є з точністю до фазових множників, тому амплітудні спектри перетворень EIWAL і Фур'є (при відповідному впорядкуванні) співпадають, а фазові спектри відрізняються.

2. Дискретні частоти перетворення Фур'є – це уявні величини:

$$0; \pm 2\pi j; \pm 2 \cdot 2\pi j; \dots; \pm k \cdot 2\pi j; \dots,$$

номер яких  $k$  лінійно зв'язаний з нормованим значенням частоти

$$j \cdot \omega_k = j \cdot 2\pi \cdot k.$$

В разі перетворення EIWAL номер частоти  $i$  і значення частоти зв'язані нелінійною залежністю. Частота  $\lambda_i$  має дійсну і уявну складову і розташована на одиничному крузі на комплексній площині з центром в точці  $1+j \cdot 0$ . При форматі перетворення  $N$  цей круг поділено на  $2 \cdot N$  рівних секторів, а  $\lambda_i$

– це  $i$ -та точка, на верхньому півколі, починаючи з точки  $0+j\cdot 0$ , якщо рухатися за годинниковою стрілкою (аналогічно  $\lambda_{-i}$  – при русі з точки  $0+j\cdot 0$  проти годинникової стрілки).

3. Теорема про диференціювання оригіналу для перетворення формально співпадає з аналогічною теоремою Фур'є перетворення:

$$x(t) \rightarrow X(\lambda); \quad \frac{d}{dt}x(t) \rightarrow \lambda \cdot X(\lambda),$$

хоча при диференціюванні відповідної базисної функції  $X(\lambda)$  одержано множник  $j\cdot\omega$  (що і використовують в перетворенні Фур'є).

4. Оскільки для будь-якого номеру  $d > 0$   $\lambda \neq j\cdot 2\pi\cdot d$ , то амплітудні і фазові характеристики функцій кіл для Фур'є перетворення і для перетворення EIWAL будуть відрізнятися (іноді суттєво).

5. Запропоновану в роботі методику одержання ортогонального перетворення з теоремою про диференціювання оригіналу, яка співпадає з відповідною теоремою перетворення Фур'є, у подальшому слід поширити на розклади операторів диференціювання інших перетворень з дійсним ядром, таких як косинусоїдальне, Хартлі, похиле, REX, coREX і т. ін.

#### **Література**

1. Ахмед Н., Рао К. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов// Пер. с англ. под. общ. ред. И.Б. Фоменко. – М.: Связь, 1980.–248 с.
2. Рыбин А.И. Ортогональное экспоненциальное преобразование REX.// Радиоэлектроника. – 2004. – №2. – С. 3 - 9.
3. Рыбин А.И. Нормализация дискретных ортогональных преобразований тестовым сигналом. Радиоэлектроника. – 2004. – №5. – С. 36 - 41.
4. Pratt W. K. Digital Image Processing J. Wile & Sons, – 1991.v. 1, 2.
5. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. Москва: Техносфера, 2005. – 1072 с.
6. Jiří Jan. Číslicová filtrace, analyza a restaurace signálů. VUT v Brně (Čech rep.), 1997. – 438 s.
7. Рыбин А.И. Анализ линейных цепей в базисе преобразования Уолша.// Радиоэлектроника. – 2004. – №5. – С. 36 - 41.
8. Рыбин А.И., Григоренко Е.Г., Родионова М.В. Алгоритм анализа электрических цепей в базисе ортогональных преобразований с действительным ядром в области трансформант. // Праці Інституту електродинаміки НАНУ: Зб. наук. праць. – 2004.– №3(9). - С. 10-14.

Рыбин А.И., Ткачук А.П. <b>Анализ линейных систем в области трансформант преобразования EIWAL.</b> Предложен алгоритм решения дифференциальных уравнений линейных систем в базисе преобразования EIWAL.	Rybin A., Tkachuk A. <b>The analysis of linear systems in basis of EIWAL transformation.</b> The algorithm for solution of differential equations of liner systems in basis of EIWAL transformation is suggested.
---	---

*Надійшла до редакції 20 травня 2006 року*