

**МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРОЦЕСУ ЧАСТОТНОГО
УПРАВЛІННЯ СТРУМОМ РЕАКТИВНОГО НАВАНТАЖЕННЯ**

Агаліді Ю. С. к. т. н., ст. н. с.,

Кожухар П. В. аспірант

*Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут», м. Київ, Україна*

Вступ

Передумовою даної роботи послугувала практична задача, яка полягала у розробці керованого джерела магнітного поля для систем магнітооптичної візуалізації (МОВ). Технологія МОВ є досить актуальною для неруйнівного контролю, оскільки дозволяє створювати візуальне подання просторового розподілу амплітуд магнітних полів розсіяння різноманітних об'єктів.

Чутливий елемент пристроїв МОВ – магнітооптичний перетворювач, характеризується магнітним гістерезисом. Який призводить до зниження чутливості МОВ. Відомий спосіб зменшення впливу магнітного гістерезису на якість МОВ – підмагнічування перетворювача змінним магнітним полем з затухаючою амплітудою [1, 2], що потребує розробки керованого джерела змінного магнітного поля. Задачі магнітних вимірювань засобами МОВ і топографування полів розсіяння [3] потребують наявності керованого джерела постійного магнітного поля.

Виходячи з комплексу міркувань технічної доцільності, авторами було запропоновано спосіб управління струмом реактивного навантаження [4], який полягає у тому, що частотна модуляція напруги живлення у реактивному навантаженні викликає відповідну амплітудну модуляцію струму. Зазначене описання способу управління струмом носить здебільшого декларативний характер і тому потребує подальшого теоретичного опрацювання, що і є метою даної роботи.

Постановка задачі

Задля практичного використання способу частотного управління струмом реактивного навантаження [4], необхідно створити математичну модель цього процесу на основі встановлення аналітичних залежностей між параметрами задачі.

Мета створення моделі – імітаційна (отримання розрахункових залежностей для проектування пристрою управління магнітним полем). Метод створення моделі – аналітичний.

Метод оцінки якості моделі – якісна оцінка адекватності за критеріями фізичності на основі чисельних експериментів.

Еквівалентна схема джерела магнітного поля

Вхідний параметр моделі – часова залежність напруги на виході інвертора $U(t)$, вихідний – часова залежність струму $I(t)$, який протікає через індуктор. Модель будується на основі відомих властивостей котушок індуктивності. Еквівалентна схема індуктора складається із ідеальних послідовно ввімкнених котушки індуктивності ($L=1,6$ мГн) і резистора ($R=8,2$ Ом), які визначають його комплексний опір. Схема заміщення джерела магнітного поля представлена на рисунку 1.

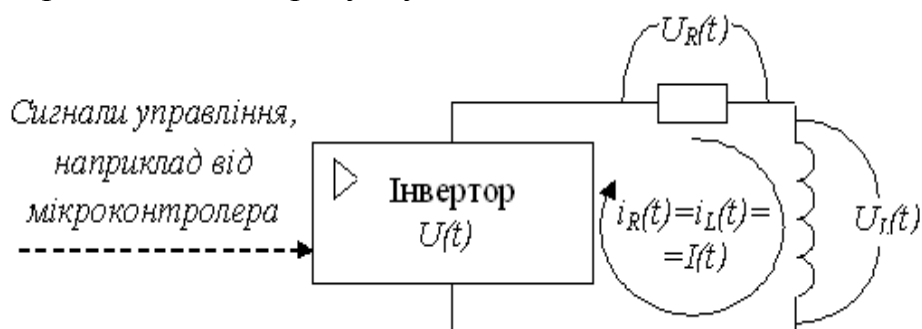


Рис. 1. Схема заміщення джерела магнітного поля

Встановлення аналітичних залежностей між параметрами задачі

При моделюванні приймається наближення, що на індуктор не діють сторонні магнітні поля (хоча вони і створюються об'єктом контролю приладу, але є відносно малими), а також припущення, що на модель не впливають випадкові чинники (детермінована модель). Тому, відповідно до закону Ома, падіння напруги на резисторі і індуктивності відповідно складають (1) і (2):

$$U_R(t) = RI(t), U_L(t) = L \frac{dI(t)}{dt} \quad (1), (2)$$

Згідно із другим законом Кірхгофа і враховуючи (1,2) складемо рівняння для подальшого визначення струму $I(t)$, що протікає через індуктивність:

$$U(t) = RI(t) + L \frac{dI(t)}{dt} \quad (3)$$

Розв'язок цього рівняння являє собою суму частинного рішення вихідного неоднорідного рівняння $I_{np}(t)$ (примусова складова, що визначається лише видом функції напруги на виході інвертора) і загального рішення однорідного рівняння $I_B(t)$ (вільна складова, що визначається енергією, яка запасається в полях котушки індуктивності), яке отримують шляхом прирівнювання його лівої частини до нуля [5]:

$$I(t) = I_{np}(t) + I_B(t) \quad (4)$$

Т. я. з математичної точки зору не існує обмежень щодо вибору частинного рішення, у цьому випадку у якості останнього зручно прийняти рішення $I_{\text{пр}}$, що дорівнює шуканій змінній I в усталеному режимі (при $t \rightarrow \infty$). Нижче подано розрахунок схеми в усталеному режимі (5).

З розрахунку видно, що частинне рішення (3) $I_{\text{пр}}(t)$ визначається лише видом вхідної функції $U(t)$ (напруги на виході інвертора) і тому називається примусовою складовою.

$$\begin{cases} t \rightarrow \infty \\ U(t) = |I_{\text{пр}}(t)(R + X_L)| \\ X_L = j\omega L \\ \omega = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_L = 0 \\ U(t) = RI_{\text{пр}}(t) \end{cases} \Rightarrow I_{\text{пр}}(t) = \frac{U(t)}{R}, \text{ де} \quad (5)$$

X_L – реактивний опір котушки індуктивності, ω – частота періодичних коливань.

Друга складова $I_{\text{в}}(t)$ загального розв’язку $I(t)$ рівняння (4) – розв’язок рівняння (3) з нульовою лівою частиною – відповідає режиму, коли інвертор не впливає безпосередньо на RL-ланцюг. Вплив інвертора тут проявляється посередньо через енергію, що запасається в полях котушки індуктивності. Такий режим роботи називається вільним, а змінна $I_{\text{в}}(t)$ – вільною складовою.

Загальне вирішення однорідного рівняння (6), що отримується із вихідного (3), шляхом його прирівнювання до нуля подано у (6-10):

$$RI_{\text{в}} + L \frac{dI_{\text{в}}}{dt} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{dI_{\text{в}}}{dt} = -\frac{R}{L} I_{\text{в}}, \quad (7)$$

$$\int \frac{1}{I_{\text{в}}} dI_{\text{в}} = \int -\frac{R}{L} dt, \quad (8)$$

$$\ln(I_{\text{в}}) = C_0 - \frac{R}{L} t, \quad (9)$$

$$I_{\text{в}}(t) = e^{C_0 - \frac{R}{L} t} = e^{C_0} \cdot e^{-\frac{R}{L} t} = C_1 \cdot e^{-\frac{R}{L} t}, \text{ де} \quad (10)$$

C_0, C_1 – константи інтегрування.

З (4, 5) та (10) маємо вираз для розрахунку струму в котушці індуктивності:

$$I(t) = \frac{U}{R} + C_1 \cdot e^{-\frac{R}{L} t}, \text{ де} \quad (11)$$

$t > 0$ – час, що пройшов після встановлення напруги U на виході інверто-

ра, C_1 – параметр, що визначає початкові умови.

Знайдемо C_1 , перетворивши вираз (11) в момент $t = 0$:

$$C_1 = I(0) - \frac{U}{R}, \text{ де} \quad (12)$$

$I(0)$ – струм, що протікає через котушку індуктивності, в момент комутації (встановлення напруги U).

Отже, для знаходження струму, що протікає через котушку індуктивності, в певний момент $t > 0$, необхідно знати значення цього струму в момент комутації (при $t = 0$) відповідно до (11, 12):

$$I(t) = \frac{U}{R} + \left(I(0) - \frac{U}{R} \right) \cdot e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (13)$$

При чисельному моделюванні процесу часові розгортки сигналів зручно подавати у матричному вигляді. Таким чином, відповідно до (13), вхідними параметрами моделі є два вектори: вектор часу t і вектор напруги U , причому кожний ненульовий рядок вектора відповідає точці для обчислення. В нульовому рядку задаються початкові умови: $t_0 = 0\text{с}$, $U_0 = U(t_0) = 0\text{В}$, $I_0 = I(t_0) = 0\text{А}$. Обчислення сигналу струму, який протікає через індуктор, відбувається дискретно – через задані, відносно невеликі, проміжки $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ в заданих точках i . Вихідний параметр моделі – вектор струму I . Значення напруги на виході інвертора U_i за період Δt_i відповідає значенню струму I_i , який протікає через індуктор в момент t_i (рис. 2).

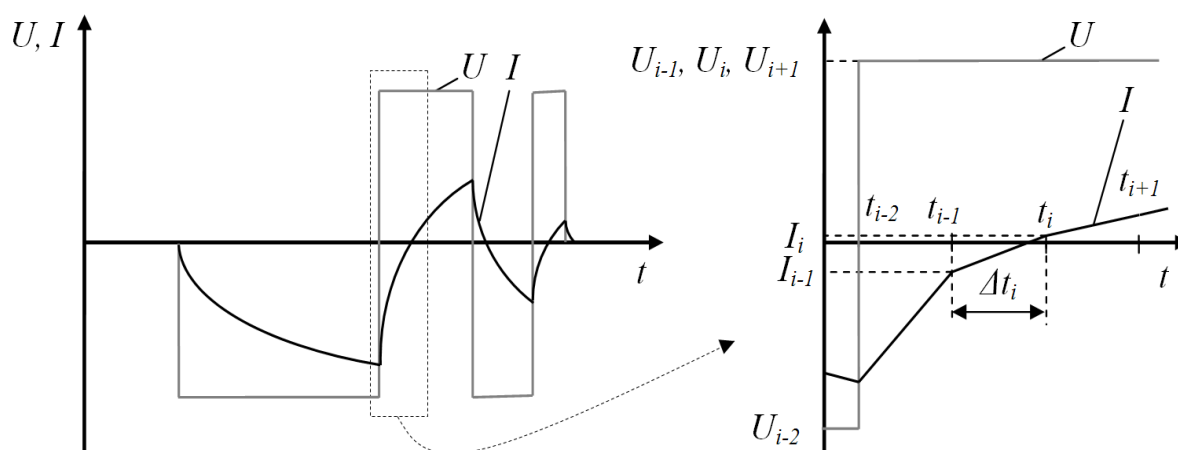


Рис. 2. Параметри моделі пристрою управління

Відповідно до першого закону комутації, магнітний потік, зчеплений з котушкою індуктивності, у момент комутації (зміни напруги на котушці індуктивності) зберігає те значення, що мав до комутації, і починає змінюватися саме із цього значення. Отже у ланцюзі з котушкою індуктивності струм у момент комутації також зберігає своє значення:

$$I(t_{i-1}^+) = I(t_{i-1}^-). \quad (14)$$

Тому справедливий вираз для обчислення струму I_i , який протікає через індуктор в момент t_i :

$$I_i = \frac{U_i}{R} + \left(I_{i-1} - \frac{U_i}{R} \right) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot \Delta t_i}. \quad (15)$$

Перевірка адекватності моделі

Для якісної оцінки адекватності моделі порівнюються результати, що отримуються в процесі моделювання, із апріорно відомими, достовірними значеннями. Оскільки, загально відомі співвідношення амплітуд струму і напруги реактивного навантаження для синусоїдальних сигналів в усталеному режимі, то перевірку змодельованого сигналу струму (15), зручно виконувати для стандартного гармонійного впливу.

За допомогою пакету MathCAD 14 обчислено поведження індуктора при дії на нього гармонійного синусоїдального сигналу з амплітудою напруги 5 В і частотою 2 кГц. Обчислена відносна різниця між вхідною частотою (напруги) і вихідною частотою (струму) складає $10^{-11}\%$.

Також, відомо, що при дії на індуктивне навантаження синусоїдального струму постійної частоти ω , його опір в усталеному режимі складає $X_L = j\omega L$. Тому можна визначити теоретично значення амплітуди струму, який протікає через індуктор в усталеному режимі ($I = 0,255\text{А}$). Обчислена відносна різниця між теоретичною амплітудою струму і визначеною за результатами моделювання складає $3 \times 10^{-4}\%$.

При збудженні резистивно-індуктивного двополюсника синусоїдальним сигналом з постійною частотою, зсув фаз φ між напругою і струмом у ньому знаходиться у межах $0 > \varphi > \pi/2$ і визначається із співвідношенням: $\varphi = \arctg(\omega L/R) = 1,14 \text{ рад} = 65^\circ$. Обчислена відносна різниця між теоретичним зсувом фаз і визначеним за результатами моделювання складає $0,8\%$.

Значення частоти, амплітуди струму, зсуву фаз між струмом і напругою виміряні за результатами моделювання не відрізняються істотно (не більше ніж на 1%) від теоретичних значень. Значення вихідного струму в моделі розраховується дискретно, тому неможливо з абсолютною точністю визначити частоту вихідного струму і зсув фаз між струмом і напругою індуктора за результатами моделювання. Крім того, абсолютно точні значення амплітуди струму в усталеному режимі можна визначити лише при $t \rightarrow \infty$, однак в даному випадку амплітуда струму визначалась після декількох десятків періодичних коливань вхідної напруги.

Також, було виконано моделювання вихідного струму індуктора із тими самими параметрами збудження, що і в попередньому випадку, окрім частоти вхідної напруги, яка була збільшена до 10 кГц. Тут, як і в попередньому випадку, значення частоти, амплітуди струму, зсуву фаз між стру-

мом і напругою виміряні за результатами моделювання відрізняються від теоретичних значень не більше ніж на 1%. В результаті збільшення частоти амплітуда коливань вихідного струму зменшилась від 0,26 А при частоті збудження 2 кГц до 0,06 А при частоті збудження 10 кГц.

Результати аналізу чисельних експериментів дозволяють зробити висновок щодо якісної адекватності моделі за критеріями фізичності, оскільки отримані значення для амплітуди (і її залежності від частоти), частоти і фази вихідного струму не суперечать відомим властивостям резистивно-індуктивного двополюсника.

Приклади практичного застосування моделі

Як було зазначено у вступі, запропонований спосіб управління струмом реактивного навантаження [4] і математична модель цього процесу розроблялися задля вирішення практичної задачі, яка полягала у розробці керуваного джерела магнітного поля для систем МОВ.

Із використанням розробленої моделі було отримано часові залежності вихідного струму в індукторі від прикладеної напруги для режимів підмагнічування МОВ змінним магнітним полем з затухаючою амплітудою (рис. 3) і постійним полем зміщення (рис. 4).

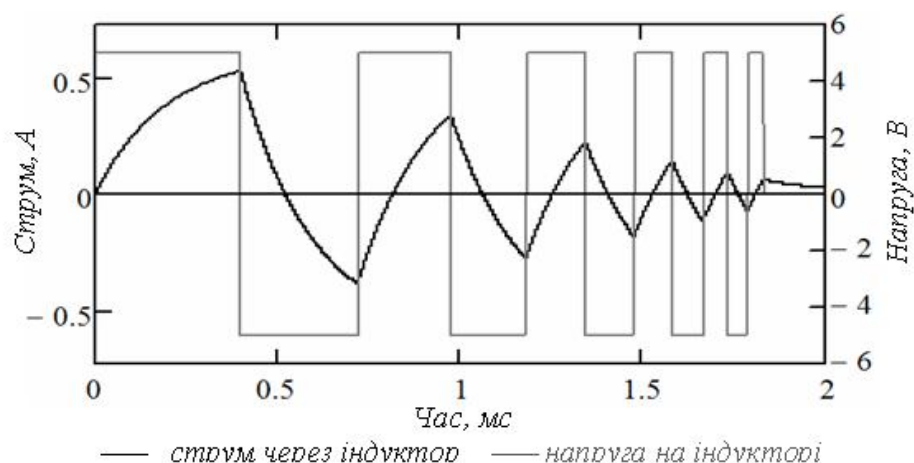


Рис. 3. Режим підмагнічування МОВ змінним магнітним полем з затухаючою амплітудою

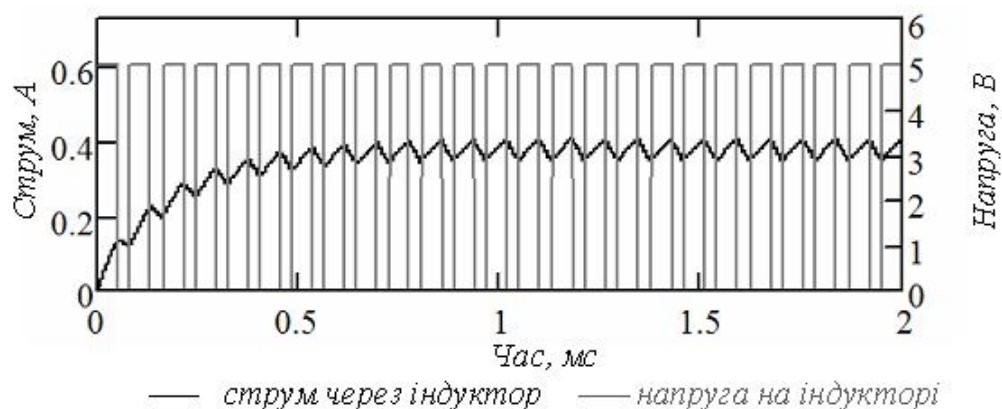


Рис. 4. Режим підмагнічування МОВ постійним полем зміщення

Як видно з наведених графіків (рис. 3-4), сигнал прикладеної до індуктора напруги є бінарною функцією, яка може формуватися безпосередньо цифровою електронікою, що зручно для практичної реалізації. Крім того, можливо в рамках єдиного схемотехнічного рішення отримувати різні режими підмагнічування МОВ з різними параметрами за рахунок зміни програми цифрового управління, що забезпечує гнучкість налаштування і універсальність функціонування.

Висновки

1. Шляхом рішення диференціального рівняння еквівалентної схеми резистивно-індуктивного навантаження, аналітично створено математичну модель процесу частотного управління струмом навантаження для запропонованого способу управління [4]. Математична модель дозволяє побудувати часову розгортку сигналу струму через індуктор за заданою часовою розгорткою напруги на індукторі.

2. В результаті аналізу реакції запропонованої моделі на стандартні впливи (гармонічний сигнал) з'ясовано, що її поведінка є адекватною за критеріями фізичності, а запропонований спосіб забезпечує реалізацію частотного управління струмом реактивного навантаження за заданими функціями.

3. Встановлено, що управління джерелом магнітного поля за рахунок частотної модуляції характеризується простотою реалізації і гнучкістю налаштування, зокрема, передбачає цифрове програмне керування.

4. Для оцінки моделі за критеріями точності необхідно виконати натурний експеримент для типових режимів, що видається перспективою продовження даної роботи.

Література

1. Рандошкин В. В., Червоненкис А.Я. Прикладная магнитооптика. М.: «Энергоатомиздат», 1990. -232 с., ил.
2. Бургов В. А. Физика магнитной записи. М.: «Искусство», 1973. - 496 с., с ил.
3. Кубраков Н. Ф. Метод магнитооптической визуализации и топографирования пространственно неоднородных магнитных полей. Труды ИОФАН, М.: Наука 1992, т. 35.
4. Патент на корисну модель (Україна) №41527 від 25.05.2009 р., Бюл. №10, G11B 5/02: Спосіб керування струмом реактивного навантаження. Заявник патенту: НТУУ «КПІ». По заявці у 2008 14918, від 24.12.2008 р. Приоритет від 25.05.2009 р.. Автори винаходу: Агаліді Ю. С., Кожухар П. В., Лебеда Д. В., Левий С. В., Мачнев О. М.
5. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. М.: Государственное издание физико-математической литературы, 1963. – 856 с., ил.

Агаліді Ю. С., Кожухар П. В. Математична модель процесу частотного управління струмом реактивного навантаження. З метою у розробки керованого джерела магнітного поля запропоновано і досліджено імітаційну математичну модель процесу частотного управління струмом реактивного навантаження. Запропоновано еквівалентну схему заміщення джерела магнітного поля реактивним навантаженням. Вхідний

параметр моделі – часова залежність напруги реактивного навантаження, вихідний – часова залежність струму реактивного навантаження, що пропорційний напруженості магнітного поля джерела. Рішенням системи лінійних диференціальних рівнянь побудовано математичну модель реактивного навантаження. Запропоновано спосіб частотного управління струмом реактивного навантаження. Наведено вираз для дискретного розрахунку процесу управління програмними засобами. Результати аналізу чисельних експериментів дозволяють зробити висновок щодо якісної адекватності моделі. Наведено приклади практичного застосування при розробці керованого частотою джерела магнітного поля. Встановлено, що управління джерелом магнітного поля за рахунок частотної модуляції характеризується простотою реалізації і гнучкістю налаштування, зокрема, передбачає цифрове програмне керування.

Ключові слова: математична модель, частотне управління, реактивне навантаження.

Агалиди Ю.С., Кожухарь П. В. **Математическая модель процесса частотного управления током реактивной нагрузки.** С целью разработки управляемого источника магнитного поля предложена и исследована имитационная математическая модель процесса частотного управления током реактивной нагрузки. Предложена эквивалентная схема замещения источника магнитного поля реактивной нагрузкой. Входной параметр модели – временная зависимость напряжения реактивной нагрузки, выходной – временная зависимость тока реактивной нагрузки, который пропорционален напряженности магнитного поля источника. Решением системы линейных дифференциальных уравнений построена математическая модель реактивной нагрузки. Предложен способ частотного управления током реактивной нагрузки. Приведено выражение для дискретного расчета процесса управления программными средствами. Результаты анализа численных экспериментов позволяют сделать вывод о качественной адекватности модели. Приведены примеры практического использования при разработке управляемого источника магнитного поля. Установлено, что управление источником магнитного поля за счет частотной модуляции характеризуется простотой реализации и гибкостью настройки, в частности предусматривает цифровое программное управление.

Ключевые слова: математическая модель, частотное управление, реактивная нагрузка.

Agalidi Yu. S., Kozhuhar P. V. **Mathematical model of frequency steering process for reactive load current.** A simulation mathematical model for the frequency control current reactive load was proposed and studied in order to develop a managed source of the magnetic field. An equivalent circuit of a magnetic field source as reactive load was proposed. Model input parameter is the time dependence of reactive load voltage; output one is the time dependence of reactive load current, which is proportional to the magnetic field source. A mathematical model of reactive load was got by calculating the system of linear differential equations. A method of frequency controlled current of reactive load was proposed. An expression for discrete calculating of control process by software was given. Results of the analysis of numerical experiments suggest qualitative adequacy of the model. Examples of practical use in the development of controlled magnetic field source were given. It was established that the management of the source of the magnetic field due to the frequency modulation is characterized by simplicity of implementation and configuration flexibility, in particular, provides a digital program control.

Key words: mathematical model, frequency steering, reactive load.