

**ОБЧИСЛЕННЯ ПОХІДНИХ ВІД ПЕРЕДАТОЧНОГО ОПОРУ ПО
ПОВЕРХНЕВІЙ ПРОВІДНОСТІ КІНЦЕВИХ ЕЛЕМЕНТІВ ПРИ
РОЗВ'ЯЗАННІ ЗВОРотної ЗАДАЧІ ІМПЕДАНСНОЇ ТОМОГРАФІЇ
МЕТОДОМ ЗОН ПРОВІДНОСТЕЙ**

Рибіна І.О., магістрант; Рибін О.І., д.т.н., професор;

Шарпан О.Б., д.т.н., професор

Національний технічний університет України

"Київський політехнічний інститут", м. Київ, Україна

Серед методів томографічних досліджень останні роки велику увагу приділяють створенню імпедансних томографів [1], які при відносно простій (порівняно з рентгенівською, емісійною та магнітно-резонансною томографіями) технічній реалізацією самого томографічного пристрою, вимагають створення достатньо складного математичного апарату розв'язання прямої (аналіз) та зворотної (синтез, тобто реконструкція внутрішнього розподілу опорів в плоскому розтині або в декількох шарах об'ємного розтину) задачі [2–4].

Методи розв'язання зворотної задачі можна розбити на дві великі групи

- 1) метод зворотної проекції та його модифікації [3,4];
- 2) ітераційні методи [5—13].

Метод зворотної проекції полягає в обчисленні передаточних опорів (напруг) по обводу розтину при дії у вигляді джерела струму та зворотному проєціюванні цих передаточних опорів на площину томографічного розтину (фантому) вздовж ліній рівної напруги. При цьому на відміну від таких томографічних методів, як рентгенівські, магнітно-резонансні, емісійні та ультразвукові [1,14—18] траєкторії проєціювання не є прямими лініями і залежать від шуканого розподілення опорів (структури) фантома. Отже, вони є невідомими. До того ж передаточний опір є нелінійною функцією всіх графоелементів (неоднорідностей) фантома. При цьому навіть при отриманні достовірної структури розподілу опорів самі опори будуть відрізнятися від їх абсолютних значень. Тому більш перспективним слід вважати використання ітераційних методів реконструкції образу в імпедансній томографії, хоча це вимагає значно більших зусиль як при створенні математичного апарату розв'язання прямої задачі, так і (особливо) при розв'язанні задачі зворотної.

Метою статті є розгляд особливостей розв'язанні зворотної задачі імпедансної томографії методом зон провідностей.

Метод і методика досліджень

Ідея полягає в обчисленні передаточних опорів першого наближення

розподілення опорів усередині розтину і подальшому уточненні цього розподілення в ітераційній процедурі шляхом мінімізації нев'язки між обчисленими та вимірними значеннями передаточних опорів по обводу розтину. Ясно, що зворотна задача має (якщо має) багато розв'язків (математично некоректно поставлена задача), але при наявності достатньо точного першого наближення ітераційна процедура дає достовірні результати. Для чисельного розв'язання прямої та зворотної задачі на ПЕОМ площину (об'єм) розтину слід дискретизувати, розбивши її (його) на кінцеві елементи [11,12,19], які будуть відповідати пікселям (вокселям) зображення на екрані монітору (перша дискретизація). Далі слід провести другу дискретизацію, замінивши кінцеві елементи їх електричними моделями (трикутниками або квадратами з двома діагональними гілками опорів для плоского фантома або тетраедрами чи кубами з усіма діагональними гілками в разі об'ємного фантома). Таким чином пряма та зворотна задачі зводяться до задачі теорії кіл. Основна ідея розв'язання прямої задачі запропонована в роботі [5]. При цьому метод аналізу (пряма задача) повинен бути зручним для побудови ітераційної процедури, що й зумовило вибір для аналізу методу модифікацій [20—22]. В ітераційній процедурі звичайно використовують метод Ньютона-Рафсона, для чого складають систему рівнянь

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Z_{nsp}^{(1)}}{\partial \sigma_1} \times \Delta \sigma_1 + \dots + \frac{\partial Z_{nsp}^{(1)}}{\partial \sigma_M} \times \Delta \sigma_M &= \Delta Z_{nsp}^{(1)} \\
 \dots & \dots \dots \dots \\
 \frac{\partial Z_{nsp}^{(M)}}{\partial \sigma_1} \times \Delta \sigma_1 + \dots + \frac{\partial Z_{nsp}^{(M)}}{\partial \sigma_M} \times \Delta \sigma_M &= \Delta Z_{nsp}^{(M)} ,
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

де $Z_{nsp}^{(k)}$ — k -й передаточний опір; σ_d — питома поверхнева (або об'ємна) провідність d -го кінцевого елемента фантома; $\Delta Z_{nsp}^{(k)}$ — різниця між вимірним та обчисленим передаточними опорами; $\Delta \sigma_d$ — прирощення питомої провідності d -го кінцевого елемента, яке мінімізує нев'язку $\Delta Z_{nsp}^{(k)}$. Таким чином, для розв'язання зворотної задачі слід для кожної ітерації скласти систему рівнянь (1), для чого, в свою чергу, слід обчислити похідні від кожної передаточної провідності по всім поверхневим (об'ємним) питомим провідностям. Враховуючи, що кожен кінцевий елемент має однорідну сталу провідність, похідну від передаточного опору, наприклад, для чотирикутної електричної моделі квадратного кінцевого елемента (рис. 1) можна обчислити за формулою

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Z_{nsp}^{(k)}}{\partial \sigma_d} &= \frac{\partial Z_{nsp}^{(k)}}{\partial g_{1d(a+b)}} \times \frac{\partial g_{1d(a+b)}}{\partial \sigma_d} + \frac{\partial Z_{nsp}^{(k)}}{\partial g_{1d(b+c)}} \times \frac{\partial g_{1d(b+c)}}{\partial \sigma_d} + \frac{\partial Z_{nsp}^{(k)}}{\partial g_{1d(c+d)}} \times \frac{\partial g_{1d(c+d)}}{\partial \sigma_d} + \\
 &\frac{\partial Z_{nsp}^{(k)}}{\partial g_{1d(a+d)}} \times \frac{\partial g_{1d(a+d)}}{\partial \sigma_d} + \frac{\partial Z_{nsp}^{(k)}}{\partial g_{2d(a+c)}} \times \frac{\partial g_{2d(a+c)}}{\partial \sigma_d} + \frac{\partial Z_{nsp}^{(k)}}{\partial g_{2d(b+d)}} \times \frac{\partial g_{2d(b+d)}}{\partial \sigma_d},
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

де індекси в дужках при провідностях означають номери вузлів ввімкнення провідностей електричної еквівалентної схеми кінцевого елемента; $Z_{пер}^{(k)}$ – передаточний опір, який є комбінацією елементів оберненої матриці провідностей \bar{Z} . Оскільки похідна $\frac{\partial g_{id}(x+y)}{\partial \sigma_d}$ згідно з [23] є явною функцією від питомої провідності σ_d , то обчислення таких похідних не становить труднощів.

Так, для квадратного кінцевого елемента (рис. 1) похідні $\frac{\partial g_i}{\partial \sigma_d}$ мають наступний вигляд

$$\frac{\partial g_1}{\partial \sigma_d} = \frac{9+4\sqrt{2}}{m(32-4\sqrt{2})}; \quad \frac{\partial g_2}{\partial \sigma_d} = \frac{-1+2\sqrt{2}}{m(32-4\sqrt{2})}, \quad (3)$$

де $m = S/a$; S — площа рівнобічного прямокутного трикутника з гіпотенузою a , яка дорівнює стороні квадратного кінцевого елемента.

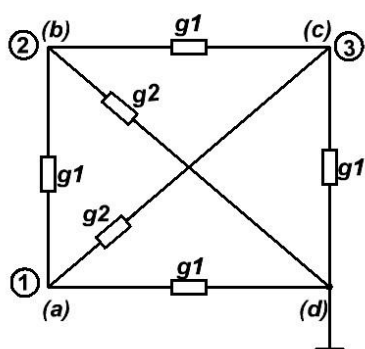


Рис.1

Похідні від передаточного опору обчислюють за іншою методикою [24-27], для реалізації якої треба мати обернену матрицю (в загальному випадку комплексних) провідностей \bar{Z} всього фантома, що й забезпечує запропонований в [5] алгоритм методу модифікацій для розв'язання прямої задачі.

Похідні від передаточного опору обчислюють за іншою методикою [24-27], для реалізації якої треба мати обернену матрицю (в загальному випадку комплексних) провідностей \bar{Z} всього фантома, що й забезпечує запропонований в [5] алгоритм методу модифікацій для розв'язання прямої задачі.

Похідні від передаточного опору обчислюють за іншою методикою [24-27], для реалізації якої треба мати обернену матрицю (в загальному випадку комплексних) провідностей \bar{Z} всього фантома, що й забезпечує запропонований в [5] алгоритм методу модифікацій для розв'язання прямої задачі.

Для передаточного опору зі входу з вузлами α та β на вхід з вузлами γ та δ похідна по питомій поверхневій провідності квадратного кінцевого елемента, з вершинами квадрату з номерами a, b, c, d має вигляд

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial Z_{(\gamma+\delta)(\alpha+\beta)}}{\partial \sigma_{a,b,c,d}} = \\ & \frac{1}{m} \{ (z_{a\alpha} - z_{a\beta}) [A(z_{\gamma a} - z_{\delta a}) - (z_{\gamma b} - z_{\delta b}) + B(z_{\gamma c} - z_{\delta c}) - (z_{\gamma d} - z_{\delta d})] + \\ & (z_{b\alpha} - z_{b\beta}) [-(z_{\gamma a} - z_{\delta a}) + A(z_{\gamma b} - z_{\delta b}) - (z_{\gamma c} - z_{\delta c}) + B(z_{\gamma d} - z_{\delta d})] + \\ & (z_{c\alpha} - z_{c\beta}) [B(z_{\gamma a} - z_{\delta a}) - (z_{\gamma b} - z_{\delta b}) + A(z_{\gamma c} - z_{\delta c}) - (z_{\gamma d} - z_{\delta d})] + \\ & (z_{d\alpha} - z_{d\beta}) [-(z_{\gamma a} - z_{\delta a}) + B(z_{\gamma b} - z_{\delta b}) - (z_{\gamma c} - z_{\delta c}) + A(z_{\gamma d} - z_{\delta d})] \}, \end{aligned} \quad (4)$$

де $A = \frac{15+2\sqrt{2}}{7}$; $B = -\frac{1+2\sqrt{2}}{7}$.

Оскільки кількість похідних M в (1) становить сотні...тисячі, а формулу (4) слід застосовувати M разів, що, хоча під силу сучасним ПЕОМ, створює додаткові складності при формуванні масивів даних. Так, хоча коефіцієнт m в (4) не залежить від питомої провідності кінцевого елемента, елементи зворотної матриці в цій формулі від цієї провідності залежать. Оскільки для розрахунку σ_d в середині розтину (фантому) необхідно в розумних межах мінімізувати $\Delta\sigma_d$ в (1), то найбільшою проблемою є обернення матриці похідних M -го порядку

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial Z_{nep}^{(k)}}{\partial \sigma_d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Z_{nep}^{(1)}}{\partial \sigma_1} & \dots & \frac{\partial Z_{nep}^{(1)}}{\partial \sigma_M} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial Z_{nep}^{(M)}}{\partial \sigma_1} & \dots & \frac{\partial Z_{nep}^{(M)}}{\partial \sigma_M} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Ця матриця (на відміну від матриці провідностей фантома порядку $N \cong M$) не має відомої заздалегідь структури (яку має матриця провідностей, що й дозволяє розробити ефективні методи обернення такої матриці [5], враховуючи розрідженість системи рівнянь вузлових напруг фантома). Матриця $\begin{bmatrix} \frac{\partial Z_{nep}^{(k)}}{\partial \sigma_d} \end{bmatrix}$ є повністю заповненою, тому для її обернення слід використувати класичний метод Гаусса або специфічні методи обернення матриць надвисоких порядків [28,29]. Так, наприклад, за методом Гаусса для обернення матриці порядку M слід виконати M^3 трудомістких операцій (множень/ділень) і таку ж кількість простих операцій (додавань/віднімань). При порядку $M = 1000$ матриці $\begin{bmatrix} \frac{\partial Z_{nep}^{(k)}}{\partial \sigma_d} \end{bmatrix}$ це вимагає 10^9 операцій трудомістких, суттєво позначається на часі обчислень. Але найнеприємнішим моментом є погана зумовленість цієї матриці при великих M , що (в основному, за рахунок віднімань) може призвести до катастрофічних похибок. Нехай, наприклад, σ_1, σ_2 — провідності, які мало між собою відрізняються і знаходяться близько до центру фантома. Тоді навіть інтуїтивно ясно, що похідні від усіх передаточних опорів $\frac{\partial Z_{nep}^{(1)}}{\partial \sigma_1} \dots \frac{\partial Z_{nep}^{(M)}}{\partial \sigma_1}$; $\frac{\partial Z_{nep}^{(1)}}{\partial \sigma_2} \dots \frac{\partial Z_{nep}^{(M)}}{\partial \sigma_2}$ (перший та другий стовпці в (1)) будуть дуже близькими за значеннями. В разі їх тожності, як відомо, визначник матриці (5) буде рівним нулю. Збільшення розрядності розрахунків призведе до катастрофічного збільшення часу обчислень без гарантії отримання коректного результату. Питання про структурування матриці (5) в науковій літературі не розглядається і підходи до структурування невідомі. Отже, єдине, що залишається — це структуру-

вання фантома, запропоноване в (30) як метод «променів» провідності та «зон провідності» (рис.2), при якому для обраного фіксованого положення джерела струму та вимірювальних електродів здійснюється розбиття на зони з постійною в цій зоні провідністю A кількість таких зон дорівнює кількості вимірювальних електродів. При розташуванні по обводу розтину навіть 32 електродів (при цьому кількість вимірювальних дорівнює 30) система (1) буде лише 30-го порядку, що знімає проблему розв'язання системи (1), оскільки 32 рази розв'язати задачу з системою рівнянь 30-го порядку в ітераційній процедурі значно легше, ніж одну задачу в ітераційній процедурі з системою рівнянь 1000...8000-го порядку. Метод зон провідності (30) вимагає створення системи рівнянь (1) для кожної зони (рис.2), номер якої відповідає номеру вузла. Отже, для рис.2,*а* таких зон буде 15, для рис.2,*б* (ліворуч) – шість, а для рис.2*в* – 14.

Розглянемо особливості обчислення похідних для методу «променів» та «зон провідності». Якщо пронумерувати вузли по зовнішньому контуру фантома, як це показано, наприклад, на рис.2*а*, то обернену матрицю $\bar{\bar{Z}}$ фантома можна представити у блочному вигляді

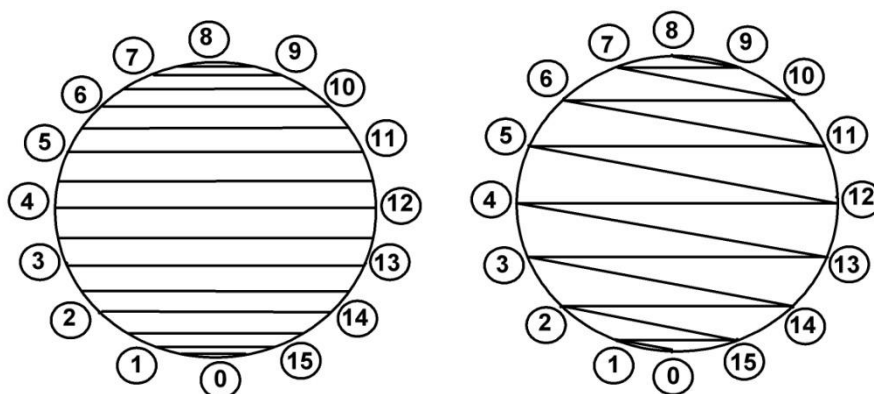
$$\bar{\bar{Z}} = \begin{bmatrix} \bar{\bar{Z}}_{00} & \bar{\bar{Z}}_{0y} \\ \bar{\bar{Z}}_{y0} & \bar{\bar{Z}}_{yy} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

де $\bar{\bar{Z}}_{00}$ – блок оберненої матриці 15-го порядку (при 16 вимірювальних електродах); $\bar{\bar{Z}}_{0y}, \bar{\bar{Z}}_{y0}$ – прямокутні матриці розмірів $15 \times (N-15) \times 15$; $\bar{\bar{Z}}_{yy}$ – квадратна матриця порядку $(N-15)$; N – порядок матриці $\bar{\bar{Z}}$.

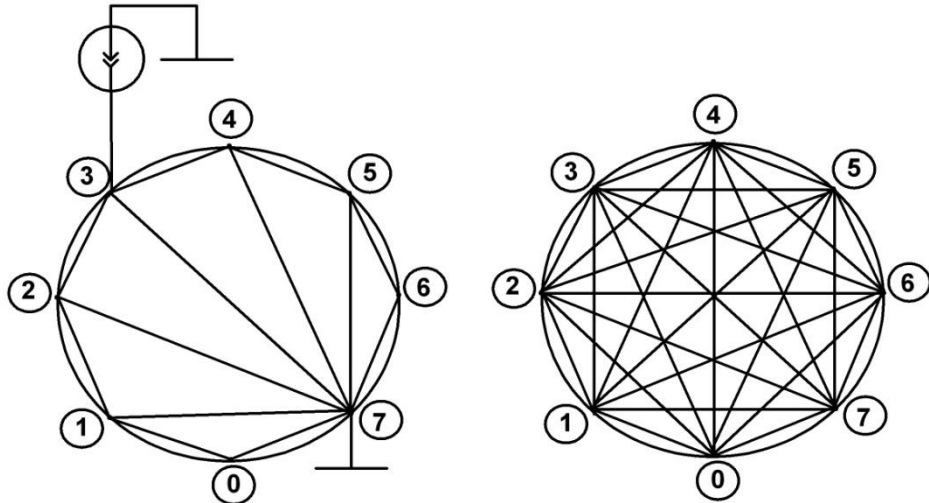
Як відомо, похідні від матриці $\bar{\bar{Z}}$ в (3) можна обчислити, використовуючи визначення зворотної матриці $\bar{\bar{Z}}$, тобто

$$\bar{\bar{Z}} \times \bar{\bar{Y}} = \bar{\bar{E}}, \quad (7)$$

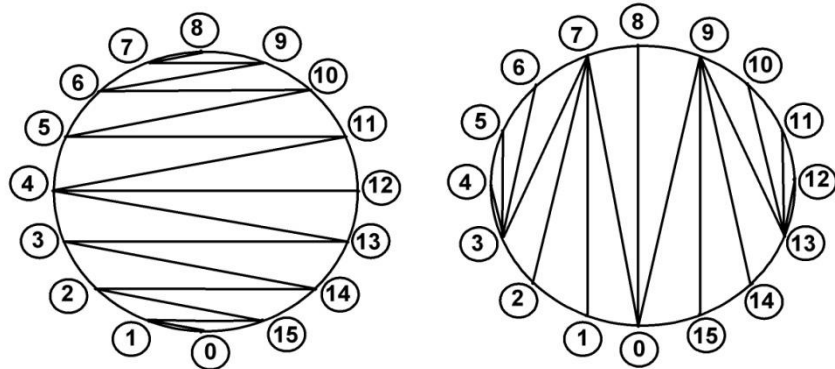
де $\bar{\bar{E}}$ — одинична матриця.



а



б



в

Рис.2

Диференціюючи вираз (4) по провідності σ_d , отримаємо

$$\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \sigma_d} \times \bar{Y} + \bar{Z} \times \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \sigma_d} = \bar{0},$$

де $\bar{0}$ — квадратна матриця нулів, звідки

$$\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \sigma_d} = -\bar{Z} \times \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \sigma_d} \times \bar{Z}. \quad (8)$$

Оскільки в (1) потрібні лише деякі похідні від елементів зворотної матриці, проведемо деякі перетворення виразу (5). Для цього нагадаємо, що в матриці \bar{Z}_{00} в (3) номери рядків дорівнюють номерам вузлів, для яких обчислюють передаточний опір, а в матриці \bar{Z}_{0y} номери рядків та стовпців дорівнюють номерам вузлів певної зони (або «променя» провідностей). Тому матрицю похідних $\bar{\Psi} = \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \sigma_d}$ можна теж представити у блочному вигляді

$$\bar{\bar{\Psi}} = \begin{bmatrix} \bar{\bar{\Psi}}_{00} & \bar{\bar{\Psi}}_{0y} \\ \bar{\bar{\Psi}}_{y0} & \bar{\bar{\Psi}}_{yy} \end{bmatrix} \quad (9)$$

з матрицями таких самих розмірів, що й у (3). При обчисленні похідних по провідності зони (при цьому усі передаточні опори обчислюються відносно загального вузла) з матриці (6) слід залишити перший блочний стовпець

$$\bar{\bar{\Psi}}_{\text{пр}} = [\bar{\bar{\Psi}}_{00} \quad \bar{\bar{\Psi}}_{y0}]^T,$$

де T — знак транспонування.

Враховуючи, що після вирощування за методом модифікацій (на базі оберненої матриці кінцевого елемента – рис.1) оберненої матриці сектора (рис.2) велика кількість вузлів усередині цього сектора, як і вузлів по зовнішньому обводу фантома, які належать до цього сектора і номери яких не співпадають з номерами електродів, є внутрішніми і не впливають на подальші розрахунки. Рядки та стовпці з номерами, співпадаючими з номерами внутрішніх вузлів, з оберненої матриці для сектора (зони) слід викреслити.

Це призводить до значного зменшення порядку оберненої матриці сектору.

Після вирощування зв'язків між секторами отримаємо матрицю $\bar{\bar{Z}}$, порядок N якої значно менший, ніж кількість вузлів фантома.

Оскільки при обчисленні похідних від передаточних опорів, які для ввімкнення електродів джерела струму між загальним вузлом 0 і протилежним йому l -м вузлом на зовнішньому обводі фантома співпадають з одним стовпцем матриці $\bar{\bar{Z}}_{00}$ (без елемента z_{ll}), то диференціювати слід лише один l -й стовпець цієї матриці.

Для l -го стовпця $\bar{\bar{z}}_l$ матриці $\bar{\bar{Z}}_{00}$ формула для обчислення похідних від його елементів по провідності d -го сектору σ_d матиме вигляд

$$\frac{\partial \bar{\bar{z}}_l}{\partial \sigma_d} = -[\bar{\bar{Z}}_{00} \quad \bar{\bar{Z}}_{0y}] \times \bar{\bar{\Psi}}_{\text{пр}} \times \bar{\bar{z}}_l, \quad (10)$$

де $\bar{\bar{\Psi}}$ – матриця провідностей системи рівнянь вузлових напруг d -го сектору порядку N (тобто сформована за правилами формування матриці $\bar{\bar{Y}}$, але з урахуванням провідностей тільки матриці d -го сектору), в якій замість множника $1/k$ (2) перед результуючою матрицею стоїть множ-

ник $\frac{1}{m} = 1/k\sigma l$. Проілюструємо запропонований метод обчислення похід-

них на простому прикладі. Для цього розглянемо фантом, кінцевими елементами якого є рівносторонні трикутники з нормованими значеннями опорів їх електричної моделі, що дорівнюють одиниці (рис.3), тобто усі кі-

нцеві елементи мають однакову питому поверхневу провідність. Для фантома (рис.3) методом модифікацій [5] було розв'язано пряму задачу, тобто знайдено обернену матрицю провідностей. Нехай джерело струму ввімкнене між вузлом 18 та загальним («землею»), а зонами з рівною, шуканою за вимірюваннями, провідністю є зони між вузлами: a — 1,2,6,9,18,10,3,4; b — 1,5,8,7,9,6,3; c — 4,3,10,18,17,14,12,11; d — 11,12,14,17,15,16,13. Для обчислення поверхневих провідностей цих зон слід обчислити, наприклад, похідні від передаточних опорів $Z_{1,18}, Z_{5,18}, Z_{11,18}, Z_{13,18}$. При цьому матриця (5) має вигляд

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z_{1,18}}{\partial \sigma_a} & \frac{\partial z_{1,18}}{\partial \sigma_b} & \frac{\partial z_{1,18}}{\partial \sigma_c} & \frac{\partial z_{1,18}}{\partial \sigma_d} \\ \frac{\partial z_{5,18}}{\partial \sigma_a} & \frac{\partial z_{5,18}}{\partial \sigma_b} & \frac{\partial z_{5,18}}{\partial \sigma_c} & \frac{\partial z_{5,18}}{\partial \sigma_d} \\ \frac{\partial z_{11,18}}{\partial \sigma_a} & \frac{\partial z_{11,18}}{\partial \sigma_b} & \frac{\partial z_{11,18}}{\partial \sigma_c} & \frac{\partial z_{11,18}}{\partial \sigma_d} \\ \frac{\partial z_{13,18}}{\partial \sigma_a} & \frac{\partial z_{13,18}}{\partial \sigma_b} & \frac{\partial z_{13,18}}{\partial \sigma_c} & \frac{\partial z_{13,18}}{\partial \sigma_d} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

де $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c, \sigma_d$ — провідності зон a, b, c, d , а $Z_{i,18}$ — передаточні опори зі входу (18,0) на входи ($i, 0$).

Матриця $\bar{\bar{Z}}_{00}$ в (7) для схеми рис.3 (нумерація рядків і стовпців — 18, 1, 5, 11, 13) має вигляд

$$\bar{\bar{Z}}_{00} = \begin{bmatrix} 0,7390 & 0,2467 & 0,3180 & 0,2469 & 0,3183 \\ 0,2467 & 0,3832 & 0,3046 & 0,1812 & 0,2112 \\ 0,3180 & 0,3041 & 0,6017 & 0,2112 & 0,2539 \\ 0,2465 & 0,1812 & 0,2112 & 0,3832 & 0,3046 \\ 0,3183 & 0,2112 & 0,2539 & 0,3046 & 0,6017 \end{bmatrix},$$

а матриця $\bar{\bar{\Psi}}_{пр}$ для похідної по провідності σ_a a -ї зони має вигляд

$$\bar{\bar{\Psi}}_{пр} = \bar{\bar{Y}}_a = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & -0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & -2 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 6 & -1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 6 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

В матриці $\bar{\bar{Y}}_a$ нумерація рядків та стовпців наступна: 18, 1, 5, 11, 13, причому рядки та стовпці з нульовими елементами в матриці не показані. Виключаючи з матриці $[\bar{\bar{Z}}_{00} \quad \bar{\bar{Z}}_{0y}]$ стовпці, номери яких дорівнюють не дорівнюють номерам стовпців матриці $\bar{\bar{Y}}_a$, отримаємо матрицю $[\bar{\bar{Z}}_{00} \quad \bar{\bar{Z}}_{0y}]$ в скороченому вигляді

$$\bar{\bar{Z}}_{\text{СК}} = \begin{bmatrix} 0,7390 & 0,2467 & 0,3279 & 0,3695 & 0,2355 & 0,4110 & 0,4924 & 0,4860 \\ 0,2467 & 0,3832 & 0,2804 & 0,2431 & 0,2184 & 0,2599 & 0,2537 & 0,2465 \\ 0,3180 & 0,3041 & 0,3677 & 0,3051 & 0,2421 & 0,3461 & 0,3335 & 0,3169 \\ 0,2465 & 0,1812 & 0,2191 & 0,2431 & 0,2184 & 0,2347 & 0,2405 & 0,2465 \\ 0,3183 & 0,2112 & 0,2639 & 0,3051 & 0,2421 & 0,2936 & 0,3052 & 0,3169 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

де номери рядків — 18, 1, 5, 11, 13, а стовпців — 18, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 10 (згідно з нумерацією вузлів фантома рис.3). Аналогічно, скорочений стовпець \bar{z}_l ($l=18$) має вигляд транспонованого 18-го (першого в матриці $\bar{\bar{Z}}_{\text{СК}}$, який має в матриці $\bar{\bar{Z}}$ номер 18) з нумерацією рядків 18, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 10.

Результатом перемножень в (7) матриць (9), (10) і стовпця \bar{z}_l є перший стовпець похідних в (8) для a -ї зони фантома рис.3 у вигляді

$$\frac{\partial \bar{z}_{l,18}}{\partial \sigma_a} = \left[\frac{\partial z_{1,18}}{\partial \sigma_a} \quad \frac{\partial z_{5,18}}{\partial \sigma_a} \quad \frac{\partial z_{11,18}}{\partial \sigma_a} \quad \frac{\partial z_{13,18}}{\partial \sigma_a} \right]^T = [-0,149 \quad -0,1684 \quad -0,1085 \quad -0,1401]^T.$$

У випадку, коли зона має внутрішні вузли (наприклад, якщо зоною є фігура на рис.3, утворена вузлами: «загальний», 1, 5, 8, 7, 9, 18, 10, 3, 4, а внутрішніми вузлами є 2-й та 6-й — зона ∞), то для розрахунків за методом «променів» та «зон» провідностей [30] їх слід відсторонити. Для цього в оберненій матриці провідностей фантома $\bar{\bar{Y}}$ слід викреслити усі рядки та стовпці, номери яких дорівнюють номерам внутрішніх вузлів. В матриці провідностей $\bar{\bar{Y}}$ слід еквівалентними перетвореннями багатопробеневиких зірок або частковим розв'язанням системи вузлових напруг відносно напруг внутрішніх вузлів [31] виконати редукцію системи рівнянь фантома.

Так, для зони ∞ (з нумерацією вузлів 1, 5, 8, 7, 9, 18, 10, 3, 4) матриця провідностей має вигляд

$$\bar{\bar{Y}}_{\infty} = \begin{bmatrix} 5,657 & -1,343 & -0,400 & -0,057 & -0,057 & 0,0 & -0,057 & -0,057 & -2,343 \\ -1,343 & 3,657 & -1,400 & -0,057 & -0,057 & 0,0 & -0,057 & -0,400 & -0,343 \\ -0,400 & -1,400 & 5,200 & -1,400 & -0,400 & 0,0 & -0,400 & -0,800 & -0,400 \\ -0,057 & -0,057 & -1,400 & 3,657 & -1,343 & 0,0 & -0,343 & -0,400 & -0,057 \\ -0,057 & -0,057 & -0,400 & -1,343 & 5,657 & -1,0 & -2,343 & -0,400 & -0,057 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & -1,0 & 2,0 & -1,000 & 0,0 & 0,0 \\ -0,057 & -0,057 & -0,400 & -0,343 & -2,343 & -1,0 & 5,657 & -1,400 & -0,057 \\ -0,057 & -0,400 & -0,800 & -0,400 & -0,400 & 0,0 & -1,400 & 5,200 & -1,400 \\ -2,343 & -0,343 & -0,400 & -0,057 & -0,057 & 0,0 & -0,057 & -1,400 & 5,657 \end{bmatrix}.$$

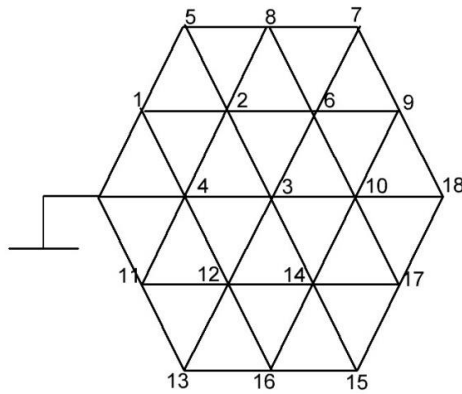


Рис.3

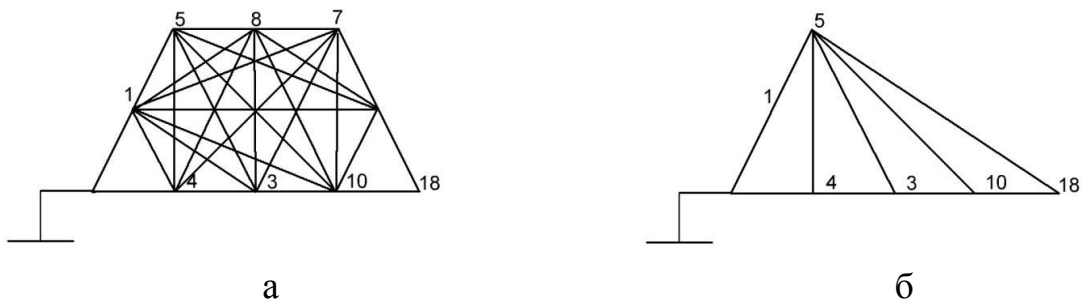


Рис.4

Наведена матриця провідностей відповідає зоні з еквівалентно перетвореними зірками, променеві гілки яких виходять з внутрішніх вузлів з номерами 2 та 6. Еквівалентну схему такої зони (указані лише гілки без ваг) наведено на рис.4,а. Якщо вимірювання передаточного опору для зони проводити у вузлі 5, то для даної зони внутрішніми вузлами слід вважати також вузли 1, 8, 7, 9. В цьому випадку редукована еквівалентна схема зони буде мати вигляд рис.4,б. Як видно з рис.4,б, матриця провідностей зони має п'ятий порядок.

Таким чином, виключення внутрішніх вузлів, обраних для розв'язання зворотної задачі зон, дозволяє, використовуючи запропонований алгоритм обчислення похідних, значно скоротити кількість трудомістких операцій та упустити процедуру розв'язання зворотної задачі імпедансної томографії.

Висновки

1. Запропоновано процедуру обчислення похідних від передаточного опору по провідності зони для реалізації методу зон провідностей, яка дозволяє обчислювати похідні для зони в цілому, а не для окремих її кінцевих елементів.

2. Для підвищення швидкодії та зменшення розмірності розв'язуваної задачі показано доцільність редукції систем рівнянь (еквівалентних схем) частковим (відносно напруг внутрішніх вузлів) розв'язанням систем рівнянь рівноваги. Редукція оберненої матриці в цьому випадку полягає в викресленні її рядків та стовпців, номери яких співпадають з номерами внут-

рішніх вузлів.

3. Запропоновані формули обчислення похідних не залежать від форми кінцевих елементів, що утворюють зону, а залежать лише від форми такої зони, тобто від способу розбиття фантома.

4. Запропонована процедура проста і легко програмується при обчисленнях на ПЕОМ.

Література

1. Физика визуализации изображений в медицине: в 2х т. / под ред. С. Уэбба.—М.: Мир, 1991.
2. Brown V.H. Electrical Impedance Tomography / V.H. Brown, D.C. Barber // *Clinical Physics and Physiological Measurement*.—1992.—13.—Suppl.A, P.207.
3. Корженевский А.В. Способ получения томографического изображения тела и электроимпедансный томограф / А.В. Корженевский, Ю.С. Культиасов, В.А. Черепнин // Патент РФ на изобретение №2127075, 1996.
4. Электроимпедансная томография / Я.С. Пеккер, К.С. Бразовский, В.Ю. Усов, М.П. Плотников, О.С. Уманский. — Томск: ООО «Издательство научно-технической литературы», 2004.—190с.
5. Рыбина И.А. Решение прямой задачи импедансной томографии методами теории цепей/ И.А. Рыбина// Вісник НТУУ «КПІ». Сер. Радіотехніка. Радіоапаратобудування.—2010.—№43.— С.4—13.
6. Cheney M. Distinguishability in Impedance Tomography/M. Cheney, D. Isaacson// *IEEE Trans. Biomed. Eng.*—1992.—v.39.—P.852—860.
7. Murray T. Electrical Impedance Computed Tomography Based on a Finite Elements Model / T. Murray, Y. Kagawa// *IEEE Trans. On Biomed. Eng.*—1985.—v.32.—P.177—184.
8. Molinari M. Finite Element Optimization for Efficient Non-Linear Electrical Tomography Reconstruction/ M. Molinari, H. Fandohr, J. Generowich, S.J. Cox // 2nd World Congress on Industrial Process Tomography, 29—31 August 2001. Hannover, Germany.—2001.—P.406—417.
9. Yorkey T.J. A Comparison of Impedance Tomography Reconstruction Algorithms / T.J. Yorkey, J.G. Webster // *Clin. Phys. Physiol. Meas.*—1987.—v.9.—P.55.
10. Liebmann G. Solution of Partial Differential Equation with Network Analogues / G. Liebmann// *Br. J. Appl. Phys.*—1950.—v.5.—P.92.
11. Hua P. Iterative Reconstruction Methods Using Regularization and Optimal Current Patterns in Electrical Impedance Tomography / P. Hua // *IEEE Trans. Biomed. Eng.*—1991.—v. 10(4).—P.621.
12. Woo E.J. Finite Element Method and Reconstruction Algorithms in Electrical Impedance Tomography/ E.J. Woo // Dept. of Electrical and Computer Eng., Univ. of Wisconsin, Madison, (Ph. D. thesis), 1990.
13. Cheney M. Electrical Impedance Tomography / M. Cheney, D. Isaacson, J.C. Newell // *SIAM Reviev.*—1999.—v. 41.—№1.—P.85—101.
14. Системи відображення в медицині / В.Г. Абакумов, О.І. Рибін, Й. Сватош, Ю.С. Синєкоп.—К.: ВЕК+, 1999.—320с.
15. Cormack A.M. Early Two-dimensional Reconstruction and Recent Topics Stemming from It / A.M. Cormack // *Nobel Lectures Physiology or Medicine 1971—1980*. World Scientific Publishing Co.—1992.—P.551—563.
16. Hounsfield G.N. Computed Medical Imaging / G.N. Hounsfield // *Nobel Lectures Physiology or Medicine 1971—1980*. World Scientific Publishing Co.—1992.—P.568—586.
17. Lauterbur P.C. All Science is Interdisciplinary – from Magnetic Moments to Mole-

cules to Men / P.C. Lauterbur // Lex. Prix Nobel. The Nobel Prizes 2003. Nobel Foundation.—2004.—P.245—251.

18. Мэнсфилд П. Быстрая магнитно-резонансная томография / П. Мэнсфилд // Успехи физических наук.—2005.—т. 175.—№10.—С.1044—1052.

19. Сильвестр П. Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков.— М.: Мир, 1986.—229с.

20. Рыбин А.И. Решение задач моделирования обращением матрицы методом взаимных производных / А.И. Рыбин //Радиоэлектроника.1978. №6.С.35—47.(Изв. вузов).

21. Рыбин А.И. Численно-символьный метод анализа электрических цепей обобщенным методом модификаций / А.И. Рыбин // Праці інституту електродинаміки НАН України: Зб. наук. праць.—2002.—1(1).—С.26—30.

22. Основы теории кіл: Підручник для студентів ВНЗ. Ч.1 / Ю.О. Коваль, Л.В. Гринченко, І.О. Милютченко, О.І. Рибін / За аг. Редакцією В.М. Шокала, В.І. Правди.— Харків.: Колегіум, 2006.—668с.

23. Рибіна І.О. Моделювання кінцевого елемента в імпедансній томографії / О.І. Рибіна, Є.В. Гайдаєнко // Вісник НТУУ «КПІ». Сер. Радіотехніка. Радиоапаратобудування.—2010.—№41.— С.19—24.

24. Трохименко Я.К. Статистический анализ линейных электронных цепей постоянного тока / Я.К. Трохименко, И.С. Каширский, А.И. Рыбин //Радиоэлектроника.—1974.—№6.—С.69—73.(Изв. вузов).

25. Трохименко Я.К. Вероятностный анализ линейных электронных цепей переменного тока /Я.К. Трохименко, И.С. Каширский, А.И. Рыбин // Радиоэлектроника.—1975.—№6.—С.35—40.(Изв. вузов).

26. Трохименко Я.К. Вероятностный анализ линейных электронных цепей методом разбиения на подсхемы / Я.К. Трохименко, И.С. Каширский, А.И. Рыбин // Радиоэлектроника.—1976.—№6.—С.70—77.(Изв. вузов).

27. Рыбин А.И. Символьный анализ электронных цепей с использованием матрицы взаимных производных / А.И. Рыбин, Я.К. Трохименко // Радиоэлектроника.—1978.—№6.—С.35—47.(Изв. вузов).

28. Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов.— М.: Наука,1973.—631с.

29. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики М.: Наука, 1977.—331с.

30. Рибіна І.О. Метод променів провідностей та моделювання фантома в імпедансній томографії / І.О. Рибіна // Вісник ЖДТУ. – 2010. – т.8 – № 4. – С.21—28.

31. Рыбин А.И. Анализ линейных электронных цепей методом опорного узла / А.И. Рыбин, Е.З. Садыкова // Вестник КПИ. Сер. Радиотехника.—1977. №14. С.20-29.

Рибіна І.О., Рибін О.І., Шарпан О.Б. Обчислення похідних від передаточного опору по поверхневій провідності кінцевих елементів при розв'язанні зворотної задачі імпедансної томографії методом зон провідності. В статті отримано формулу для похідної від передаточного опору при дії струмом на зовнішніх вузлах фантома по поверхневій провідності квадратного кінцевого елемента, розташованого в довільному місці томографічного розтину. Внаслідок складності оперування з такою формулою при великій кількості кінцевих елементів для методу «зон» та «променів» провідностей запропоновано процедуру обчислення похідних від передаточних опорів таких зон. При цьому формули для обчислення похідних не залежать від форми кінцевих елементів, а залежать лише від форми зон, тобто від способу розбиття на зони (деякі можливі розбиття наведено). Для зменшення трудомісткості обчислень запропоновано виконувати зменшення порядків матриць зон. Це необхідно внаслідок наявності в кожній зоні великої кількості внутрішніх вузлів, які при обчисленнях слід відсторонити шляхом еквівалентних перетворень. При цьому еквівалентні перетворення зворотної мат-

риці полягають у викресленні зі зворотної матриці всього фантома рядків та стовпців, номери яких співпадають з номерами внутрішніх вузлів, а при обчисленні кожного стовпця похідних від передаточних опорів — у викресленні стовпців та рядків, нульових для даної зони або таких, що помножуються на нульові стовпці матриці провідностей зони.

Ключові слова: імпедансна томографія, метод «променів» та «зон» провідностей, похідні від передаточних опорів, зворотна задача, поверхнева та об'ємна провідності.

Рыбина И.А., Рыбин А.И., Шарпан О.Б. **Вычисление производных от передаточного сопротивления по поверхностной проводимости конечных элементов при решении обратной задачи импедансной томографии методом зон проводимости.** В статье получена формула для производной от передаточного сопротивления при воздействии током на внешних узлах фантома по поверхностной проводимости квадратного конечного элемента, расположенного в произвольном месте томографического сечения. Ввиду сложности оперирования с такой формулой при большом количестве конечных элементов для метода «зон» и «лучей» проводимости предложена процедура вычисления производных от передаточных сопротивлений по проводимостям таких зон. При этом формулы для вычисления производных не зависят от формы конечных элементов, образующих зоны, а зависят лишь от формы таких зон, то есть от способа разбиений на зоны (некоторые возможные разбиения приводятся). Для уменьшения трудоемкости вычислений предложено производить уменьшение порядков матриц зон. Это необходимо ввиду наличия в каждой зоне большого числа внутренних узлов, которые при вычислениях следует устранить путем эквивалентных преобразований. При этом эквивалентные преобразования обратной матрицы заключаются в вычеркивании из обратной матрицы всего фантома строк и столбцов номера которых совпадают с номерами внутренних узлов, а при вычислении каждого столбца производных от передаточных сопротивлений — в вычеркивании столбцов и строк, нулевых для данной зоны или умножаемых на нулевые столбцы матрицы проводимостей зоны.

Ключевые слова: импедансная томография, метод «лучей» и «зон» проводимости, производные передаточных сопротивлений, обратная задача, поверхностная и объемная проводимости.

Rybina I.O., Rybin O.I., Sharpan O.B. **Determination of derivatives of transfer resistance on surface conductivity of finite elements by the conductivity method for solving the forward problem of Electrical Impedance Tomography.** The equation of derivative of square finite element surface conductivity, which is located in the arbitrary place of the domain, with current excitation on internal knots of the domain is got in this article. Calculation of transfer resistance of zones for zone and ray conductivity method due to complication of such equation with great number of finite elements is offered. These equations aren't depended on shape of finite elements, but they are depended on shape of zones. Reduction of order of matrix for decreasing of labour intensiveness of operation is proposed. It is necessary due to the presence of great number of internal knots, which are deleted with equivalent transformations. The equivalent transformation of inverse matrix consists on deletion rows and columns with numbers of internal knots from matrix of all phantom, and for calculation of each column of transfer resistance derivatives it consists on deletion of zero rows and columns for this zone or that are multiplied with zero columns of conductivity matrix of zone.

Keywords: Electrical Impedance Tomography, zone and ray conductivity method, derivatives of transfer resistance, forward problem, surface and volume conductivities.