

**Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd**

**Dynamická analýza olopatkovaných
disků axiálních
turbosoustrojí**

Ing. Tomáš Míšek

**disertační práce
k získání akademického titulu doktor
v oboru Aplikovaná mechanika**

**Školitel: Prof. Ing. Vladimír Zeman, DrSc.
Katedra mechaniky**

Plzeň 2011

**The University of West Bohemia
Faculty of Applied Sciences**

**Dynamic Analysis of Bladed Disks
of Axial Turbomachinery**

Ing. Tomáš Míšek

**A thesis submitted
for the degree of Doctor of Philosophy in
Applied Mechanics**

**Supervisor: Prof. Ing. Vladimír Zeman, DrSc.
Department of Mechanics**

Plzeň 2011

Prohlášení o autorství

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně s použitím odborné literatury a pramenů uvedených v seznamu, který je součástí této disertační práce.

V Plzni dne:

.....

Podpis autora

Autorská práva

Podle Zákona o právu autorském c.35/1965 Sb. (175/1996 Sb. CR) x 17 a Zákona o vysokých školách č. 111/1998 Sb. je využití a společenské uplatnění výsledků této disertační práce, včetně uváděných vědeckých poznatku nebo jakékoliv nakládání s nimi možné pouze na základě autorské smlouvy za souhlasu autora a Fakulty aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni

Poděkování

Zde bych chtěl poděkovat firmě Doosan – Škoda Power, že mi umožnila publikovat výsledky měření a výpočtů týkajících se lopatky 1220mm.

Dále chci poděkovat svému školiteli prof. Ing. V. Zemanovi, DrSc. z Katedry mechaniky Fakulty aplikovaných věd za jeho inspirující podněty a pečlivou kontrolu obsahu této práce.

Obsah

Obsah	3
Seznam hlavních označení	4
1 Úvod	8
1.1 Dynamika olopatkovaných disků	9
1.1.1 Rotačně periodická symetrie olopatkovaných disků	10
1.1.2 Buzení olopatkovaných disků a vynucené kmitání	10
1.1.3 Vibrace lopatek buzených torzním momentem generátoru – poruchové stavy	12
1.1.4 Hodnocení odezev z pohledu vysokocyklové únavy	12
1.2 Cíl disertační práce	14
2 Teorie kmitání rotačně symetrických struktur	15
2.1 Vlastní frekvence a vlastní tvary rotačně symetrické struktury	15
2.1.1 Modální analýza	18
2.2 Vynucené kmitání	20
2.2.1 Harmonické buzení pohybující se v prostoru a stojící struktura	22
2.2.2 Harmonické buzení nehybné v prostoru	24
2.2.3 Harmonické buzení pohybující se v prostoru a rotující struktura	26
2.2.4 Buzení s proměnnou amplitudou Diracova impulzu a rotující struktura	32
3 Rotačně periodická struktura	36
3.1 Výpočtový model	36
3.2 Problém vlastních hodnot - modální analýza	38
3.3 Vynucené kmitání	41
3.3.1 Harmonické buzení silou periodicky rozloženou v obvodovém směru	41
3.3.2 Buzení obecně rozloženou statickou silou a rotující struktura .	45
3.3.3 Vybuditelnost vlastního tvaru - běžící vlny	47
3.4 Aplikace rotačně periodické podmínky	48
3.4.1 Ověření na jednoduché rotačně periodické struktuře	48
3.4.2 Modální analýza a vynucené kmitání koncové NT lopatky . .	52
3.5 Redukce počtu stupňů volnosti	58
3.5.1 Guyanova metoda	58
3.5.2 Aplikace statické redukce na lopatku LSB48	59
3.6 Harmonická analýza lopatky LSB48	66
3.7 Závěry - Rotačně periodická struktura	72
4 Vzájemná interakce lopatek a rotoru z pohledu torzního kmitání	73
4.1 Princip interakce lopatek a rotoru z pohledu torzního kmitání	73
4.1.1 Modální vlastnosti dvojdisku s lopatkami	74
4.1.2 Vynucené kmitání dvojdisku s lopatkami	79

4.2	Aplikace vzájemné interakce lopatek a rotoru	82
4.2.1	Aplikace metodiky výpočtu - pokusný rotor s lopatkou LSB48	84
4.2.2	Aplikace metodiky výpočtu - rotorová soustava "Indie" s lopatkou LSB48	86
4.2.3	Torzni harmonické buzení - rotorová soustava "Indie" s lopatkou LSB48	88
4.3	Závěr - vzájemná torzní interakce lopatek a rotoru	92
5	Shrnutí a závěr	93
5.1	Shrnutí a dosažené výsledky	93
5.2	Výhled další práce	95
6	Literatura	96
7	Přílohy	99
7.1	Příloha 1 - Odezva rotující struny na harmonické buzení	99
7.2	Příloha 2 - Snížení tuhosti vlivem rotace	102
7.3	Příloha 3 - Sestavení pohybových rovnic pro jednoduché rotačně pe- riodické struktury	103
7.4	Příloha 4 - Problematika tlumení	105
7.5	Příloha 5 - Hodnocení dynamických napětí z pohledu vysokocyklové únavy	109
7.6	Příloha 6 - Parametr buzení oběžných lopatek	113
	Seznam publikovaných prací	119
	Anotace	120
	Anotation	122

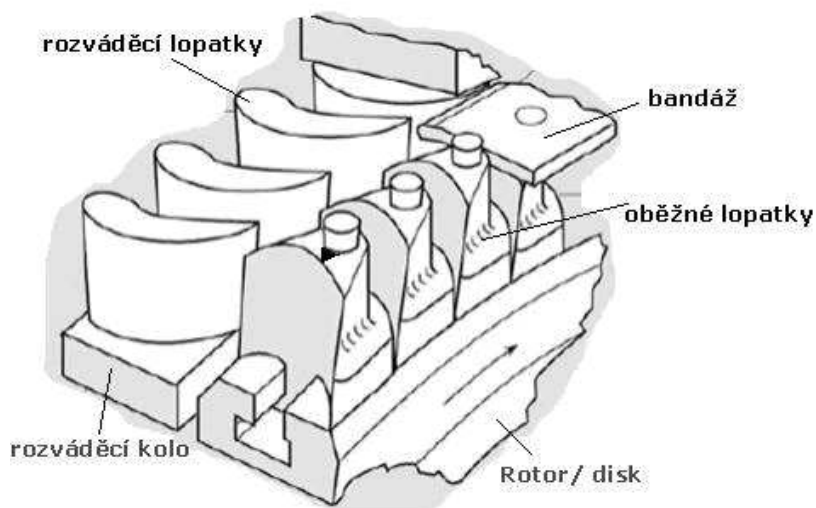
Seznam hlavních značení

Označení	Jednotky	Popis
r, φ, z	-	válcový souřadnicový systém
α	<i>rad</i>	úhlové natočení struny
β	<i>rad</i>	fázový posuv
γ	-	poměr vlastních frekvencí
δ	-	Diracova funkce
η	-	poměrný útlum
φ	<i>rad</i>	úhlová souřadnice, úhel definující segment
λ	-	vlnové číslo, vlastní číslo
μ	<i>kg m⁻¹</i>	měrná hmotnost
ξ	-	poměrná frekvence
π	-	Ludolfovo číslo
σ	Pa	napětí
χ	-	parametr vybuditelnosti
ψ	<i>rad</i>	fázový posun
ω_b	<i>rad s⁻¹</i>	úhlová budící frekvence
ω_k	<i>rad.s⁻¹</i>	k-tá úhlová vlastní frekvence
Ω	<i>rad.s⁻¹</i>	úhlová rychlost otáčení
c	<i>m s⁻¹</i>	vlnová rychlost
f	<i>Nm⁻¹</i>	síla na jednotkovou délku struny, budící síla
i	-	imaginární jednotka
k	<i>Nm⁻¹</i>	tuhost
m	<i>kg</i>	hmotnost
n	-	počet segmentů periodické struktury
q	<i>m</i>	zobecněná souřadnice, deformace struny
r	<i>m</i>	poloměr stočené struny
x	<i>m</i>	deformace struktury
t	<i>s</i>	čas
u	-	modální souřadnice
v	-	vlastní vektor
E_k	J	kinetická energie
E_p	J	potenciální energie
F	<i>N</i>	budící síla

Označení	Jednotky	Popis
I	kgm^2	moment setrvačnosti
M_0	Nm	budící moment
ND	-	počet uzlových průměrů
R_e	Pa	mez kluzu
R_m	Pa	mez pevnosti
T	N	předepínací síla struny
U	m	vlastní funkce
Λ	-	spektrální matice
B	-	matice tlumení
D	-	matice tlumení
G	-	matice gyroskopického momentu
H	-	transformační matice
I	-	jednotková matice
K	-	matice tuhosti
K_0	-	matice tuhosti zahrnující vliv vyztužení systému
M	-	matice hmotnosti
T	-	transformační matice
V	-	modální matice
\mathcal{F}	-	Laplaceův obraz síly
\mathcal{G}	-	Laplaceův obraz impulzní funkce
\mathcal{Q}	-	Laplaceův obraz odezvy

1 Úvod

Turbosoustrojím se rozumí mechanické rotační zařízení, které buď zpracovává tlakovou energii média a přetváří ji na mechanickou práci nebo naopak. Tlaková energie média se mění expanzí na kinetickou energii, která je pak předávána na lopatky stroje. V případě, že tok média je rovnoběžný s osou rotace stroje, mluvíme o takzvaných axiálních turbosoustrojích. Pokud tok média je kolmý na osu rotace stroje, jedná se pak o radiální turbosoustrojí. V této práci se budeme zabývat pouze problematikou axiálních turbosoustrojí. Mezi turbosoustrojí patří například parní a spalovací turbína nebo kompresor. Tyto typy strojů jsou složeny ze statorových a rotačních celků, jak naznačuje obrázek 1.1.



Obrázek 1.1: Schématický obrázek axiálního stupně turbíny

Rotační části turbosoustrojí jsou z pohledu spolehlivosti a bezpečnosti provozu vystaveny extrémnímu statickému, ale i dynamickému zatížení. Jedná se hlavně o oběžné lopatky a disky rotorů. Vlastní lopatka se obecně skládá z listu, nožky a bandáže. Rozeznáváme několik typů závěsů jako je T závěs, vidličkový závěs a stromečkový závěs. Listy lopatek mohou být různě tvarované, a proto je dělíme na prizmatické a zkroucené. Také bandáž může být různě konstrukčně řešena, a tak rozlišujeme integrální bandáž, která je součástí listu, a dále pak nýtovanou bandáž, která je k listu připevněna pomocí nýtů.

Z pohledu statického zatížení je lopatka vystavena odstředivé síle a dále pak tlakové síle média. Tyto složky zatížení jsou relativně jednoduše predikovatelné na rozdíl od dynamických sil interagujících s olopatkovaným diskem.

Hlavním zdrojem dynamického buzení lopatek je nerovnoměrné tlakové pole, které je způsobeno úplavy za jednotlivými rozváděcími lopatkami. Taktéž různé nerovnoměrnosti po obvodě proudového pole mohou vykazovat zdroj buzení (dělicí rovina rozváděcích kol, odběry páry , parciální ostřík atd.). Vibrace rotoru torzní či příčné mohou být také zdrojem buzení.

Při návrhu olopatkovaného disku je kladen hlavní důraz na spolehlivý, bezpečný a klidný provoz stroje. Z tohoto důvodu je kladen značný požadavek na dynamické odladění olopatkovaného disku a také na intenzitu dynamických odezev.

1.1 Dynamika olopatkovaných disků

Problematikou dynamiky olopatkovaných disků se jako první začal zabývat na začátku 20-tých let minulého století Campbell [2]. Snažil se pochopit rezonanční stavy u rotačně periodických struktur. Před ním však již Stodola [1] sestavil základní kritéria návrhu samotné lopatky z pohledu dynamického chování. Následně se ukázalo, že je nutné analyzovat chování celého olopatkovaného disku nikoliv jen samotné lopatky, jak ve svém díle dokázal Campbell [2]. Prohl [4] ve svém díle zavedl pojem rezonanční faktor, který charakterizuje velikost rezonanční odezvy v závislosti na počtu lopatek ve svazku a dále na poměru počtů rozváděcích a oběžných lopatek. Jeho práce pak byla dále rozšířena Saitem [5] . V dnešní době se však od svazkování lopatek upouští a nahrazuje se kontinuální vazbou.

Výpočet modálních vlastností rotujících disků a lopatek byl nejdříve prováděn na základě analytických vztahů [6], [4]. Ewins [7] na základě výpočtů a experimentu ověřil, že olopatkovaný disk vykazuje mnohem více vlastních tvarů a frekvencí než samotná lopatka a zavedl takzvaný interferenční diagram, kde je provázanost mezi lopatkou a diskem dobře rozpoznatelná. Zavedl také pojem rodina vlastních tvarů, což je skupina tvarů, které vykazují stejný charakter kmitání a liší se pouze uzlovým průměrem. Ewins již prováděl výpočty na základě metody konečných prvků (MKP). Lopatky modeloval nosníkovými prvky a disk skořepinovými prvky. Velkou neznámou byla tuhost upevnění lopatky v disku. Ta byla zjišťována na základě měření a v MKP výpočtech modelována jako pružina. Problém správného uchycení lopatky na disk z pohledu tuhosti spojení je stále velká neznámá a to i v případě, kdy lopatky a disk modelujeme pomocí 3D objemových prvků. To platí zvláště u krátkých lopatek vysokotlakých a středotlakých dílů, kde tuhost uložení je prakticky totožná s ohybovou tuhostí lopatky. Chyba výpočtu roste s frekvenčně vyšším tvarem kmitu lopatky. Tuhost uchycení lopatky je do značné míry nelineární, jelikož se většinou jedná o kontaktní tuhost. Výrobní tolerance lopatky a disku dále také ovlivňují tuto vazební tuhost.

Velká neurčitost v tuhosti vazby lopatka disk vede některé výrobce k tomu, že vlastní frekvence krátkých lopatek nepočítají a spoléhají se na konstrukční provedení jejich olopatkovaných disků. Hlavním principem je vnést do systému přídatné tlumení ve formě tření sousedních lopatek. Toto opatření má umožnit provoz lopatek i v rezonanci.

V případě dlouhých lopatek je situace s výpočtem vlastních frekvencí mnohem příznivější. Ohybová tuhost dlouhých koncových lopatek je minimálně ovlivňována tuhostí uložení lopatky. Tyto lopatky mají vlastní frekvence velmi nízké a je zapotřebí je při návrhu odladovat vůči několika prvním harmonickým frekvencím.

Ewins [8],[9],[10] se dále zabýval problémem rozladěných disků z pohledu velikosti amplitudy kmitání lopatek. Na základě Ewinsovo i jiných prací nelze učinit jednoznačný závěr, zdali vlivem rozladění dochází k ponížení amplitud odezev. Vždy to závisí na konkrétním případě rozladění a buzení. V mnoha případech se ukazuje, že rezonanční amplitudy kmitání jsou nižší u rozladěných struktur. V této práci se problematikou rozladěných disků nebudeme zabývat.

1.1.1 Rotačně periodická symetrie olopatkovaných disků

Jelikož olopatkované disky obsahují mnohdy velký počet lopatek (až několik set), vyvstává problém s numerickou náročností dynamických analýz. V případě, kdy jsou lopatky modelovány pomocí nosníkových případně skořepinových prvků je náročnost na výpočetní techniku akceptovatelná. Pokud je však olopatkovaný disk modelován pomocí objemových prvků, je již numerická náročnost výpočtového modelu natolik rozsáhlá, že je nutné uvažovat o možnosti redukce stupňů volnosti daného problému. Jednou z možností je využití periodicity námi uvažovaného olopatkovaného disku. Již v roce 1979 přišel Thomas [18] s teorií, jak modelovat pouze jeden segment rotačně periodické struktury a tím významně snížit výpočtovou náročnost. Thomas zavádí rotačně periodickou podmínku symetrie pomocí níž a modelu jednoho segmentu je schopen popsat chování celé rotačně periodické struktury. Svou teorii aplikuje při dynamické analýze betonové chladicí věže elektrárny. V roce 1981 Wildheim [19] aplikuje stejnou teorii při dynamické analýze rotující struktury s uvažováním Coriolisových sil. V bývalém Československu jako první zmiňovanou metodu aplikoval v roce 1982 Krásný [11].

Při návrhu koncových nízkotlakých lopatek parních turbin je k zjištění modálních vlastností olopatkovaných disků využívána rotačně periodická symetrie. Výpočtem charakteristik vlastního kmitání olopatkovaných disků parních turbin s využitím rotační periodicity se zabývá práce Polacha [3], kde zmiňovanou metodu aplikuje při výpočtu modálních vlastností lopatky Skoda 1080mm s "cik-cak" vazbou. Firma Mitsubishi v roce 2005 vyvinula koncovou lopatku o délce 1220mm a pro výpočty modálních vlastností využila periodicity systému [21]. Podobně i firma Hitachi v roce 2002 uveřejnila článek [22], ve kterém prezentuje vývoj koncových lopatek a pro výpočty jejich dynamického chování aplikuje podmínky rotačně periodické symetrie.

1.1.2 Buzení olopatkovaných disků a vynucené kmitání

Olopatkované disky turbosoustrojí jsou vystaveny mnoha typům budících účinků, které vznikají jako důsledek vlastního provozu těchto strojů. Jedná se o účinky

proudícího média, které obtéká dané lopatkové mříže. Dalším zdrojem buzení může být rotorové chvění, které se běžně vyskytuje za provozu. U turbin, které slouží k výrobě elektrické energie pomocí generátoru, se mohou objevit budící účinky vznikající v důsledku neoptimálního provozu daného generátoru. Výše uvedené zdroje buzení mají za následek vznik odezví, které jsou pro daný typ buzení specifické.

Stanovení budících účinků je značně obtížný proces. Pro jejich určení je možné použití numerických metod, které nejsou vždy přesné, neboť nemohou postihnout všechny aspekty fyzikálních dějů odehrávajících se v lopatkovém kanálu. Jsou však jedinou možností, jak predikovat budící účinky u nově navrhovaných strojů. Pro stanovení dynamického zatížení oběžných lopatek od nerovnoměrného tlakového pole za rozváděcí mříží dávají tyto CFD (computation fluid dynamics) výpočty postačující výsledky. Jejich náročnost na výpočetní čas je však značná, neboť se jedná o v čase proměnný děj, který je nutné řešit iteračními metodami. Dalším způsobem jak zjistit budící účinky je experimentální měření. Toho se většinou využívá v případě výskytu provozních problémů, ale také při testování prototypových zařízení. Bohužel v případě experimentálního měření aerodynamického buzení je obtížné zmapovat celé proudové pole a i zde se setkáme s mnoha omezeními.

Z výše uvedených důvodů se v literatuře většinou setkáme s analýzami vynuceného kmitání pro testovací rotačně periodické struktury, kde zdrojem buzení jsou většinou AC elektromagnet či tryskající vzduch. Práce Severa [30] se zabývá mimo jiné porovnáním dynamického chování experimentálního zjednodušeného olopatkovaného kola a jeho numerického modelu a to ve formě amplitudo frekvenčních charakteristik (jedná se o model olopatkovaného kola s třecí vazbou). Ojedinelé porovnání výsledků vynuceného kmitání impelleru radiálního kompresoru získaných na základě MKP modelu a měření na reálném díle je prezentováno v publikaci Dickmanna [31]. Autor nejprve numericky simuloval proudění v lopatkové mříži a následně získané nestacionární tlakové pole aplikoval na MKP model radiálního impelleru a dále pak provedl harmonickou analýzu vynuceného kmitání ve frekvenční oblasti.

Během posledních deseti let se začala pozornost soustřeďovat na vynucené kmitání s uvažováním tření mezi vazebními členy lopatek, což sebou přináší značné zkomplikování numerických výpočtů, neboť se jedná o nelineární chování systému. Je pak nutné řešit soustavu nelineárních diferenciálních rovnic. Často používanou metodou pro řešení tohoto nelineárního problému je metoda HBM (Harmonic balance method), kterou je možné použít v případě, pokud nelineární systém je buzen periodicky proměnným zatížením. Tato metoda byla aplikována Petrovem [15],[16] při analýze vynuceného kmitání lopatek axiálního turbokompresoru. Petrov použil Galerkinovu metodu, která převedla nelineární diferenciální rovnice na soustavu nelineárních algebraických rovnic. Ty byly dále řešeny Newton-Raphsonovou metodou. Podobně řeší Siewert [17] na základě HBM odezvu turbínových lopatek s nelineární třecí vazbou.

1.1.3 Vibrace lopatek buzených torzním momentem generátoru – poruchové stavy

S tím jak se vylepšovaly mechanické vlastnosti vysokopevnostních ocelí, rostla možnost vyvíjet delší a účinnější koncové lopatky nízkotlakých dílů. Delší lopatky mají však obecně nižší vlastní frekvence, které se nacházejí v oblasti dvojnásobku frekvence elektrické sítě. Při provozu generátoru mohou nastat poruchové děje, jež mají harmonický či periodický charakter s periodou děje jednonásobku a dvojnásobku frekvence sítě. Tyto poruchové děje mohou být zdrojem buzení koncových lopatek a vybudit tzv. deštníkový tvar kmitu olopatkovaného disku. Začátkem 80. let se objevily první poruchy lopatek v důsledku vysokocyklové únavy, která nastala vlivem rezonačního kmitání, kdy došlo k vzájemné interakci lopatek a rotorové soustavy [25]. V důsledku toho se zavádí nová návrhová kritéria pro posuzování správného naladění lopatek z pohledu vzájemné interakce lopatka - rotorová soustava [26],[27],[28]. Pro výpočet modálních vlastností systému lopatky- rotor je používána metoda konečných prvků. Rotor je modelován pomocí 1D nosníkových prvků, které se běžně používají při torzní analýze rotorové soustavy. Historicky první MKP modely lopatek byly reprezentovány několika vzájemně pospojovanými hmotnými body, které byly přes pružiny spojeny s modelem rotoru. Tyto modely lopatek bylo nutné předem patřičně kalibrovat, což nebylo vždy jednoduché. S rozvojem výpočetní techniky bylo umožněno modelovat lopatky pomocí 3D nosníkových prvků. Tento přístup se běžně používá do dnešní doby, ačkoliv má mnohé nevýhody.

1.1.4 Hodnocení odezev z pohledu vysokocyklové únavy

Věrohodně numericky stanovit skutečnou dynamickou odezvu (dynamická napětí) oběžných lopatek turbin je velmi obtížné. Například u dlouhých koncových NT lopatek jsme schopni určit jejich vlastní frekvence relativně přesně, avšak zdroj buzení je velmi těžko predikovatelný. Naopak u krátkých lopatek vysokotlakých a středotlakých stupňů jsme zdroj buzení schopni určit, neboť se jedná většinou o buzení od úplavů za rozváděcími lopatkami a na základě CFD simulací je možné tyto budící síly stanovit. Na druhou stranu model mechanického chování lopatek vykazuje značné nepřesnosti z pohledu určení vlastních frekvencí, neboť zde hraje velkou roli tuhost vetknutí lopatky do disku a případně kontaktní vazba na bandáži. Zmíněné důvody často vedou k tomu, že se volí konzervativní přístup a určují se rezonační napětí bez ohledu na naladění systému. Vyberou se potenciálně nebezpečné vlastní frekvence, které jsou v blízkosti frekvence buzení a pro tyto případy se stanoví rezonační stavy. Rezonační napětí jsou pak posuzována z pohledu vysokocyklové únavy. Tento přístup byl zvolen v práci [34].

Další možností jak určit dynamické napětí je provedení měření za provozních podmínek. Pro krátkodobé měření je možné použít širokou škálu typů tenzometrů,

bohužel však jejich použití je limitováno pracovní teplotou lopatek a agresivním prostředím, což velmi často snižuje jejich životnost. V poslední době se pro provozní monitorování dlouhých lopatek NT stupňů využívá tzv. metoda Tip-timing, která umožňuje sledování všech lopatek daného kola. Na základě naměřených amplitud je pak možné sestavit numerické modely předpovídající zbytkovou životnost lopatek (např. práce Baldy [35]).

Existuje mnoho výpočtových modelů k stanovení životnosti součástí [36]. Ať již jsou tyto modely založeny na uniaxiálních či multiaxiálních kritériích, ve většině případů musí být kalibrovány na určitý stav napjatosti daného kritického místa součásti, což není vždy jednoduché ať již z časových či finančních důvodů. To je jeden z hlavních důvodů, proč je v praxi stále aplikován přístup dimenzování na nekonečnou životnost na základě Haigova diagramu a používány koeficienty bezpečnosti zahrnujících většinu neurčitostí.

1.2 Cíl disertační práce

Současným světovým trendem je zlepšování účinnosti turbín díky zvyšování vstupních parametrů pracovního média. Velký důraz je také kladen na kompaktní provedení, jelikož nemálo snižuje celkové náklady na výstavbu elektrárny. Toto vede k potřebě optimalizovat dimenzování olopatkovaných disků jak z pohledu statického, tak dynamického. K tomu je však zapotřebí vylepšit a zdokonalit stávající výpočtové metody.

Hlavním cílem disertační práce je vytvoření metodiky výpočtu vlastních frekvencí lopatek s kontaktní vazbou a dále určení jejich odezev pro různé typy buzení. Tato metodika bude sloužit při návrhu nových lopatek, ale zároveň bude moci být aplikována na lopatky, které jsou již v provozu. Tím bude možno zpětně verifikovat chování lopatek, u kterých se vyskytly v minulosti provozní problémy. Metodika by měla pokrýt všechny typy lopatek od krátkých typů (vysokotlaké a středotlaké lopatky- krátké) až po koncové a předposlední stupně nízkotlakých dílů parních turbín.

V současné době není výše popsaná metodika ve Škodě Power k dispozici a nebo je pouze v omezené míře, kdy je možno analyzovat jen vlastní frekvence volných lopatek, případně lopatek ve svazcích. Existují však určité limity na počet lopatek ve svazku. Výpočet vlastních frekvencí lopatek s kontaktní vazbou je velmi omezený.

Metodika dynamické analýzy olopatkovaných disků bude založena na lineárních přístupech s využitím metody konečných prvků. Využití lineárních modelů přinese efektivní přístup k zjišťování vlastních frekvencí a vynucených odezev olopatkovaných disků. Cílem bude taktéž ověření dané metodiky měření, které však není náplní této práce, ale je důležitou součástí vývoje nových výpočtových postupů. Prezentované metodiky budou aplikovány na reálné olopatkované disky a nikoliv jen na modelové případy.

Nahrazení stávajícího běžně používaného přístupu k výpočtu interakce lopatek a rotorové soustavy novým, který přinese zpřesnění výpočtu modálních vlastností takovéto soustavy, je dalším cílem této práce.

Z pohledu buzení budou uvažovány všechny typy zdrojů, které se mohou reálně vyskytnout při provozu axiálních turbosoustrojí. Především se jedná o buzení od nespojitého pole proudění média za statorovými díly jako je např. rozváděcí kolo, dělicí rovina rozváděcího kola, odběrná potrubí, atd. Torzní buzení rotorové soustavy od poruchových dějů na elektro-generátoru je dalším typem zdroje buzení, které bude uvažováno při dynamických analýzách. Při tomto typu buzení dochází k interakci kmitání dlouhých koncových lopatek s torzním kmitáním rotorové soustavy. Dále budou uvažovány zdroje buzení, které se používají při experimentálních testech olopatkovaných disků, jako je například buzení elektromagnetickým polem generovaným AC magnetem či buzení tryskajícím médiem (olej, voda, vzduch).

Zjištěné dynamické odezvy ve formě amplitud dynamických napětí je nutné dále posoudit z pohledu bezpečnosti a případně stanovit životnost lopatek z pohledu vysokocyklové únavy.

2 Teorie kmitání rotačně symetrických struktur

Campbell [2] již v roce 1924 na základě experimentů zjistil, že u rotačně a periodicky symetrických rotujících a nerotujících struktur dochází k vybuzení několika typů vynucených tvarů.

- A. Běžící vlnění – dopředná , zpětná
- B. Stojící vlnění
- C. Stojaté vlnění

Výše uvedené typy vlnění mohou nastat, jak u rotujících tak nerotujících disků, vždy to závisí na typu buzení. Stejný typ odezvy můžeme získat pro rotující disk a v prostoru nerotující buzení, tak pro nerotující disk a v prostoru rotující buzení. Typ odezvy vždy závisí na relativním pohybu mezi diskem a buzením.

V této práci budou hlavně zmiňovány případy buzení, které se vyskytují při provozu v turbosoustrojích a ovlivňují chování olopatkovaných disků. Dále budou zmíněna buzení, která jsou používána při experimentální verifikaci modálních vlastností lopatek.

Pochopení dynamických vlastností olopatkovaných disků, jakožto periodické struktury, je základním předpokladem. Nejdříve se budeme tedy zabývat odvozením dynamického chování takových systémů. Odvození bude provedeno pro rotačně symetrickou strukturu, což je ve skutečnosti zvláštní případ periodické struktury, kdy počet periodicky opakujících se substruktur se blíží nekonečnu.

2.1 Vlastní frekvence a vlastní tvary rotačně symetrické struktury

V literatuře se většinou setkáme s odvozením pohybových rovnic pro rotačně symetrické desky [13],[14], které jsou popsány jako 2D kontinuum. Tyto rovnice jsou pak následně řešeny pomocí Besselových funkcí. Řešení 2D kontinua z pohledu modálních vlastností a vynuceného kmitání je zbytečně komplikované pro pochopení chování rotačně symetrických struktur. V mnoha případech není ani možné nalézt analytické řešení, proto pro další odvození zvolíme 1D kontinuum, jehož chování bude popsáno pouze jednou zobecněnou souřadnicí. Toto umožní relativně jednoduché odvození a analytické řešení pohybové rovnice takového systému.

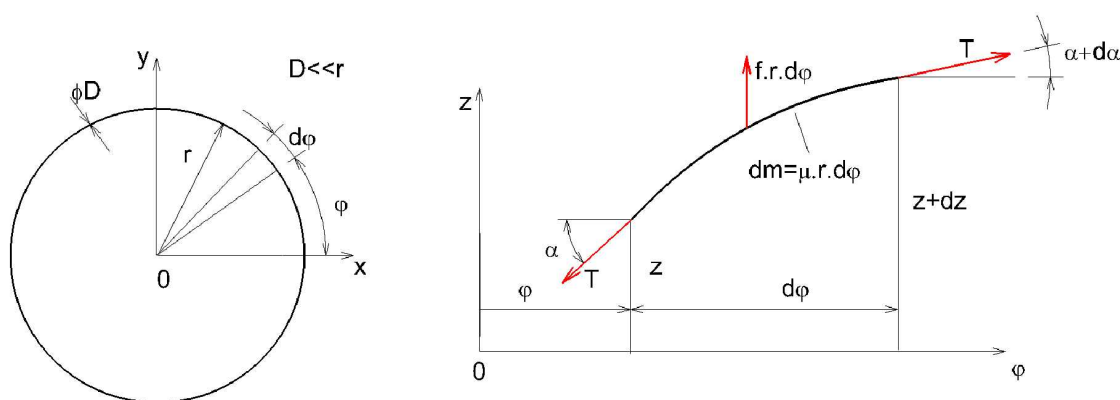
Vlastnosti rotačně periodických struktur odvodíme na základě rotačně symetrické struktury se spojitě rozloženými vlastnostmi. Modelem je předepnutá struna stočená do kruhu viz. obr. 2.1. Z fyzikálního pohledu by se takový model těžko realizoval, ale pro účely odvození chování rotační struktury je tento model optimální svojí jednoduchostí. Cílem bude sestavit pohybovou rovnici popisující příčné kmitání předepnuté struny stočené do kruhu a dále zjistit modální vlastnosti a odezvy na různé druhy buzení.

Základní předpoklady

- průměr struny je mnohem menší než průměr struktury
- silové předepnutí struny je po celé délce konstantní, nebo je tak dostatečně velké, že změna síly vlivem kmitání struny je zanedbatelná
- ohybové natočení struny je malé, takže platí

$$\alpha = \sin\alpha = \tan\alpha = \frac{\partial z}{r\partial\varphi} \quad (2.1)$$

- uvažuje se příčné kmitání struny ve směru osy symetrie struktury
- uvažuje se konzervativní systém, to je bez tlumení



Obrázek 2.1: Model předepnuté struny stočené do kruhu

Předpokládáme, že na strunu působí spojitě po obvodě proměnná a časově závislá síla $f(\varphi, t)$, která má směr rovnoběžný s osou symetrie struktury. Struna má měrnou hmotnost μ . Na základě D’Alambertova principu sestavíme silovou rovnici rovnováhy pro element o délce $r \cdot d\varphi$,

$$-T\sin\alpha + T\sin(\alpha + d\alpha) + f(\varphi, t)r d\varphi - dm\ddot{z}(\varphi, t) = 0 \quad (2.2)$$

kde

$z(\varphi, t)$ – deformace struny

$f(\varphi, t)$ – síla na jednotku délky struny

φ – úhlová souřadnice

μ – měrná hmotnost struny na jednotku délky

T – předepínací síla struny

α – úhlové natočení struny

Pokud budeme uvažovat malé deformace struny, pak platí přibližně následující vztahy (2.3)

$$\alpha = \frac{\partial z}{r\partial\varphi}, d\alpha = \frac{\partial^2 z}{r\partial\varphi^2} d\varphi \text{ pro } d\varphi \rightarrow 0, \sin(\alpha + d\alpha) = \alpha + d\alpha \quad (2.3)$$

a rovnici (2.2) upravíme do tvaru (2.5),

$$T \frac{\partial^2 z(\varphi, t)}{\partial\varphi^2} = \mu r^2 \frac{\partial^2 z(\varphi, t)}{\partial t^2} - r^2 f \quad (2.4)$$

$$c^2 z'' = r^2 \ddot{z} - \frac{r^2}{\mu} f, \text{ kde } c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (2.5)$$

kde čárkami resp. tečkami jsou označeny parciální derivace příčné výchylky struny podle úhlové souřadnice resp. času.

Pohybová rovnice (2.5) popisuje příčné kmitání předepnuté struny stočené do kruhu. Pokud položíme budící sílu rovnu nule, pak rovnice (2.5) přejde do tvaru (2.6), který popisuje vlnovou rovnici, kde c vyjadřuje vlnovou rychlost.

$$c^2 z'' = r^2 \ddot{z} \quad (2.6)$$

2.1.1 Modální analýza

Uvažujme vlnovou rovnici (2.6) a hledejme řešení této rovnice metodou separace proměnných ve tvaru

$$z(\varphi, t) = U(\varphi)q(t) \quad (2.7)$$

Dosazením vztahu (2.7) do rovnice (2.6) získáme rovnici (2.8), v které je pravá strana funkcí času a levá strana je funkcí úhlu φ . Aby nastala rovnost, je nutné, aby se obě strany rovnaly konstantě. Rovnice (2.8) se tímto rozpadne na dvě nezávislé rovnice .

$$\frac{U''}{U} = \frac{r^2\ddot{q}}{c^2q} = -\lambda^2 \quad (2.8)$$

$$U'' = -\lambda^2 U \quad (2.9)$$

$$\ddot{q} = -\frac{c^2}{r^2}\lambda^2 q \quad (2.10)$$

Řešení diferenciální rovnice (2.9) budeme hledat ve tvaru

$$U(\varphi) = C_1 \sin p\varphi + C_2 \cos p\varphi \quad (2.11)$$

Dosazením vztahu (2.11) do rovnice (2.9) dostaneme charakteristickou rovnici

$$-p^2 + \lambda^2 = 0 \rightarrow p = \pm\lambda \quad (2.12)$$

Dále budeme aplikovat okrajové podmínky pro rotačně symetrickou izolovanou strukturu $U(\varphi) = U(\varphi + 2\pi)$, což je podmínka spojitosti.

Dosazením okrajové podmínky do vztahu (2.11) a respektováním řešení charakteristické rovnice (2.12), obdržíme vztah, ze kterého určíme vlnové číslo λ .

$$U(\varphi) = U(\varphi + 2\pi) \rightarrow C_1 \sin \lambda\varphi + C_2 \cos \lambda\varphi = C_1 \sin \lambda(\varphi + 2\pi) + C_2 \cos \lambda(\varphi + 2\pi)$$

$$C_1, C_2 \neq 0, \lambda_j = j \text{ pro } j = -\infty, \dots - 1, 0, 1, 2, 3, \dots \infty$$

Výsledné řešení rovnice (2.9) je,

$$U_j(\varphi) = C_1 \sin j\varphi + C_2 \cos j\varphi \text{ pro } j = -\infty, \dots - 1, 0, 1, 2, 3, \dots \infty \quad (2.13)$$

kde vztah (2.13) vyjadřuje vlastní funkci $U(\varphi)$ reprezentující vlastní tvar kmitání. Pro další výpočty a jednodušší matematické zápisy je účelné vlastní funkci (2.13) zapsat v jiném tvaru. Je známo, že lineární kombinací dvou vlastních funkcí opět

získáme vlastní funkci. Provedeme tedy součet a dále rozdíl dvou vlastních funkcí $U_j(\varphi), U_{-j}(\varphi)$ a získáme tím nové vyjádření vlastních funkcí

$$\begin{aligned} U_j^s(\varphi) &= C_j^s \sin j\varphi \\ U_j^c(\varphi) &= C_j^c \cos j\varphi \end{aligned} \quad (2.14)$$

kde $j = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$. Ze vztahu (2.14) je zřejmé, že pro jedno vlnové číslo $j \neq 0$, existují dvě vlastní funkce, které jsou navzájem ortogonální.

Konstanty C_j^s, C_j^c se mohou určit např. na základě normování. Pokud platí vztah (2.15), pak mluvíme o tzv. ortonormálních vlastních funkcích.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (U_k^x U_j^x) d\varphi &= \pi \text{ pro } x = s, c ; j = k \neq 0, \quad C_j^s = C_j^c = 1 \\ \int_0^{2\pi} (U_k^x U_j^x) d\varphi &= 0 \text{ pro } j \neq k \\ \int_0^{2\pi} (U_0^c U_0^c) d\varphi &= 2\pi, \quad C_0^c = \frac{1}{\pi} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Dosadíme-li do rovnice (2.10) za vlnové číslo λ , tak získáme

$$\ddot{q} + \omega_j^2 q = 0 \quad (2.16)$$

kde

$$\omega_j = j \frac{c}{r} = j \frac{1}{r} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \text{ pro } j = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$$

Rovnice (2.16) je rovnicí harmonického kmitání a ω_j je j-tou vlastní frekvencí struktury. Námí řešená struktura má nekonečně vlastních funkcí U_j a vlastních frekvencí ω_j . Nulová vlastní frekvence $\omega_0 = 0$ přísluší pohybu struny jako tuhého tělesa.

Homogenní řešení rovnice (2.16) bude mít tvar (2.17), kde konstanty \overline{C}_j^s a \overline{C}_j^c budou určeny na základě počátečních podmínek.

$$q_j = \overline{C}_j^s \sin(\omega_j t) + \overline{C}_j^c \cos(\omega_j t) \quad (2.17)$$

2.2 Vynucené kmitání

Z pohledu provozu axiálních turbosoustrojí je důležité znát, jaké odezvy mohou nastat pro určité typy buzení rotačně symetrických struktur. Cílem bude zjistit tvary vynuceného kmitání pro různé typy buzení. Během provozu axiálních turbosoustrojí se můžeme setkat pouze s určitým typem buzení. Při experimentálních testech je však často nemožné nasimulovat stejný typ buzení jako při provozu, proto se budeme zabývat i takovými druhy buzení, které jsou používány během experimentálních testů.

Nejčastějším zdrojem buzení při experimentálních testech olopatkovaných disků je AC elektromagnet umístěný v blízkosti lopatek, který generuje střídavé elektromagnetické pole. (Nutnou podmínkou při tomto zdroji buzení je, aby buzená struktura byla vyrobena z feromagnetického materiálu.) Dále se jako zdroj buzení používá tryska respektive soubor trysek rovnoměrně rozmístěných po obvodě struktury. Z těchto trysek proudí médium (vzduch, olej, atd.), které dopadá na lopatky a každá lopatka je pak periodicky buzena díky změně hybnosti dopadajícího média.

Dále budou uvažovány čtyři typy buzení:

- Harmonické buzení pohybující se v prostoru a stojící struktura
- Harmonické buzení nehybné v prostoru
- Harmonické buzení pohybující se v prostoru a rotující struktura
- Buzení s proměnnou amplitudou Diracova impulzu a rotující struktura

Nehomogenní řešení pohybové rovnice příčného kmitání (2.5) budeme hledat ve tvaru (2.18) jako lineární kombinaci vlastních funkcí U_j

$$z(\varphi, t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} U_j(\varphi) q_j(t) = \sum_{j=0}^{\infty} (U_j^s(\varphi) q_j^s(t) + U_j^c(\varphi) q_j^c(t)) \quad (2.18)$$

Dosadíme řešení (2.18) do rovnice (2.5) a tu pak vynásobíme postupně U_k^s, U_k^c a dále integrujeme podle φ od 0 do 2π . Vzhledem k ortogonalitě vlastních funkcí bude výsledkem soustava nezávislých diferenciálních rovnic (2.21).

$$c^2 j^2 \int_0^{2\pi} U_k^s \sum_{j=0}^{\infty} (U_j^s(\varphi) q_j^s(t) + U_j^c(\varphi) q_j^c(t)) d\varphi + r^2 \int_0^{2\pi} U_k^s \sum_{j=0}^{\infty} (U_j^s(\varphi) \ddot{q}_j^s(t) + U_j^c(\varphi) \ddot{q}_j^c(t)) d\varphi = \quad (2.19)$$

$$= \frac{r^2}{\mu} \int_0^{2\pi} (U_k^s f) d\varphi \quad \text{pro } U_k^s$$

$$c^2 j^2 \int_0^{2\pi} U_k^c \sum_{j=0}^{\infty} (U_j^s(\varphi) q_j^s(t) + U_j^c(\varphi) q_j^c(t)) d\varphi + r^2 \int_0^{2\pi} U_k^c \sum_{j=0}^{\infty} (U_j^s(\varphi) \ddot{q}_j^s(t) + U_j^c(\varphi) \ddot{q}_j^c(t)) d\varphi = \quad (2.20)$$

$$= \frac{r^2}{\mu} \int_0^{2\pi} (U_k^c f) d\varphi \quad \text{pro } U_k^c$$

$$\ddot{q}_k^s + \omega_k^2 q_k^s = \frac{1}{\pi\mu} f_k^s \quad \text{pro } k = 1, 2, 3, \dots, \infty$$

$$\ddot{q}_k^c + \omega_k^2 q_k^c = \frac{1}{\pi\mu} f_k^c \quad \text{pro } k = 1, 2, 3, \dots, \infty \quad (2.21)$$

$$\ddot{q}_k^c = \frac{1}{2\pi\mu} f_0^c \quad \text{pro } k = 0$$

Sílu f_k^x pro $x = s, c$ nazýváme modální silou.

$$f_k^x = \int_0^{2\pi} (U_k^x f) d\varphi \quad \text{pro } x = s, c ; \quad f_0^c = \int_0^{2\pi} f d\varphi \quad (2.22)$$

Poznámka

 Jelikož jsou vlastní funkce U_k^x a U_j^x ortogonální a normované dle (2.15), pak platí

$$\int_0^{2\pi} (U_k^x U_j^x) d\varphi = \begin{cases} \pi, & \text{pro } j = k \neq 0, x = s, c \\ 2\pi, & \text{pro } j = k = 0, x = c \end{cases} \quad (2.23)$$

$$\int_0^{2\pi} (U_k^x U_j^x) d\varphi = 0 \quad \text{pro } j \neq k ; \quad \int_0^{2\pi} (U_k^s U_j^c) d\varphi = 0$$

2.2.1 Harmonické buzení pohybující se v prostoru a stojící struktura

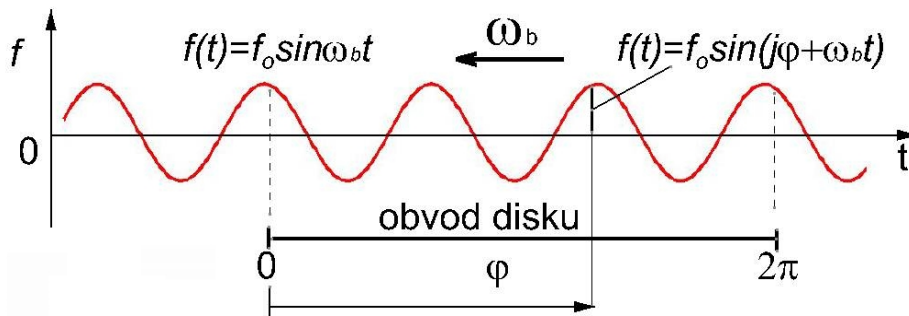
S tímto typem buzení se v turbinářské praxi většinou nesetkáme, ale pro úplnost pochopení problematiky je vhodné se o něm zmínit.

Budeme uvažovat buzení, které je harmonicky proměnné v čase a zároveň je harmonicky proměnné v prostoru a je vyjádřeno vztahem

$$f(\varphi, t) = f_0 \sin(j\varphi_s + \omega_b t) \quad (2.24)$$

kde f_0 je amplituda síly, ω_b je budící frekvence, j je libovolné celé nezáporné číslo, φ_s je polární souřadnice definující pozici na struně v klidovém souřadném systému. V tomto případě je polární souřadný systém struktury ztotožněn s klidovým souřadným systémem a platí $\varphi_s = \varphi$. Budeme se zabývat pouze ustálenou odezvou na dané buzení, přechodové stavy nás z praktického pohledu nebudou zajímat.

Grafické znázornění buzení je ukázáno na obrázku 2.2.



Obrázek 2.2: Harmonické buzení pohybující se v prostoru a stojící struktura (pro $j=3$)

Modální síly f_k^x pro $x = s, c$ a pro výše uvedený typ buzení vyjádříme ve tvaru

$$\begin{aligned} f_k^s &= \int_0^{2\pi} \sin k\varphi f_0 \sin(j\varphi + \omega_b t) d\varphi = \dots = \pi f_0 \cos(\omega_b t) \quad \text{pro } j = k \\ f_k^c &= \int_0^{2\pi} \cos k\varphi f_0 \sin(j\varphi + \omega_b t) d\varphi = \dots = \pi f_0 \sin(\omega_b t) \quad \text{pro } j = k \\ f_k^c &= 2\pi f_0 \sin(\omega_b t) \quad \text{pro } k = 0 \\ f_k^{s,c} &= 0 \quad \text{pro } j \neq k \end{aligned} \quad (2.25)$$

Vlastní funkci U_k^x pro $x = s, c$ předpokládáme dle (2.14) .

Budící modální síla f_k^x nabývá nenulové hodnoty jen v tom případě, pokud platí $j = k$. Z toho lze učinit závěr, že vlastní tvar může být vybuzen pouze tehdy, pokud tvar budící síly má stejný počet uzlových průměrů jako daný vlastní tvar.

Sílu f_k^x dosadíme do rovnic (2.21) a ustálenou odezvu q_k budeme hledat ve tvaru (2.26)

$$q_k^s = A_k^s \cos \omega_b t, \quad q_k^c = A_k^c \sin \omega_b t \quad (2.26)$$

Dále dosazením vztahu (2.26) do rovnic (2.21) a jejich vyřešením získáme neznámé A_k^s, A_k^c .

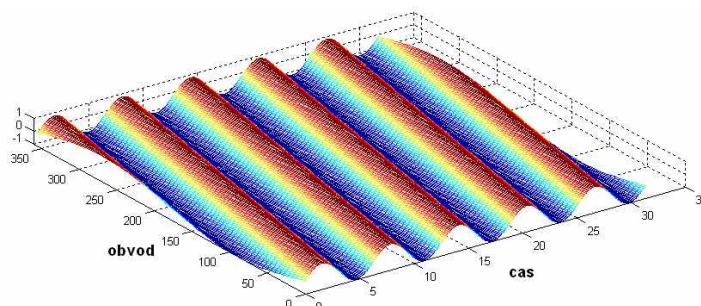
$$A_k^s = A_k^c = \frac{\frac{1}{\mu} f_0}{\omega_k^2 - \omega_b^2}, \text{ pro } k = 1, 2, 3, \dots, \infty, \quad A_0^c = -\frac{f_0}{\mu \omega_b^2} \quad (2.27)$$

Výsledná ustálená odezva na harmonické buzení prezentované na obrázku 2.2 je rovna

$$\begin{aligned} z(\varphi, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} A_k^s (\sin k\varphi \cos \omega_b t + \cos k\varphi \sin \omega_b t) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\mu} \frac{f_0}{\omega_k^2 - \omega_b^2} \sin(k\varphi + \omega_b t) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Dílní závěry

- Rezonance nastane pokud vlastní frekvence struktury je rovna frekvenci buzení a zároveň však musí platit, že vybuzený vlastní tvar kmitu se musí shodovat s tvarem budící síly, co se uzlových průměrů týká. Vynuceným tvarem kmitu bude běžící vlna, jak je schematicky ukázáno na obrázku 2.3.
- Běžící vlna nastává u nerotujících disků v případě harmonického buzení pohybujícího se v prostoru. Vynucený tvar běžící vlny má časově a prostorově proměnné uzly a kmitny. Na obrázku 2.3. je vidět rozvinutý obvod kmitajícího disku od 0° do 360° s jedním uzlovým průměrem.



Obrázek 2.3: Schématický obrázek běžící vlny

2.2.2 Harmonické buzení nehybné v prostoru

S tímto typem buzení se také v turbinářské praxi většinou nesetkáme, ale pro úplnost pochopení problematiky je vhodné se o něm zmínit.

Budeme uvažovat harmonické buzení v čase i po obvodě ve tvaru

$$f(\varphi, t) = f_0 \cos(j\varphi) \sin \omega_b t \quad (2.29)$$

kde f_0 je amplituda síly a ω_b je budící frekvence. Podle (2.23) modální síly jsou

$$\begin{aligned} f_k^s &= \int_0^{2\pi} \sin k\varphi f_0 \cos(j\varphi) \sin \omega_b t d\varphi = \dots = 0 \quad \text{pro } j = k \\ f_k^c &= \int_0^{2\pi} \cos k\varphi f_0 \cos(j\varphi) \sin \omega_b t d\varphi = \dots = \pi f_0 \sin(\omega_b t) \quad \text{pro } j = k \\ f_k^c &= 2\pi f_0 \sin(\omega_b t) \quad \text{pro } k = 0 \\ f_k^{s,c} &= 0 \quad \text{pro } j \neq k \end{aligned} \quad (2.30)$$

Modální budící síla f_k^x nabývá nenulové hodnoty jen v tom případě pokud platí $j = k$. Z toho lze učinit závěr, že vlastní tvar může být vybuzen pouze tehdy, pokud tvar budící síly má stejný počet uzlových průměrů jako daný tvar.

Budící sílu f_k^x dosadíme do rovnic (2.21) a ustálenou odezvu q_k^x pro $x = s, c$ budeme hledat ve tvaru (2.31).

$$q_k^s = A_k^s \cos \omega_b t, \quad q_k^c = A_k^c \sin \omega_b t \quad (2.31)$$

Dále dosazením vztahu (2.31) do rovnic (2.21) a jejím vyřešením získáme neznámé A_k^s, A_k^c .

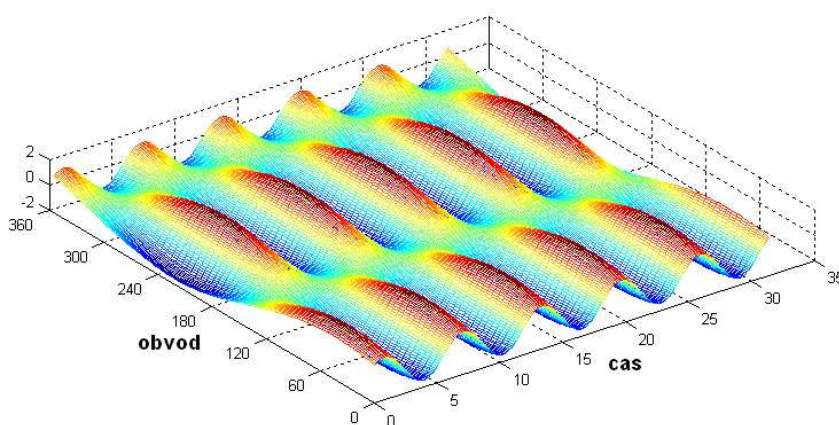
$$A_k^s = 0, \quad A_k^c = \frac{\frac{1}{\mu} f_0}{\omega_k^2 - \omega_b^2}, \quad \text{pro } k = 1, 2, 3, \dots, \infty, \quad A_0^c = -\frac{f_0}{\mu \omega_b^2} \quad (2.32)$$

Výsledná ustálená odezva na harmonické buzení (2.29) je rovna

$$z(\varphi, t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^c \cos k\varphi \sin \omega_b t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\mu} \frac{f_0}{\omega_k^2 - \omega_b^2} \cos k\varphi \sin \omega_b t \quad (2.33)$$

Dílčí závěry

- Rezonance nastane pokud vlastní frekvence struktury ω_k je rovna frekvenci buzení ω_b a zároveň však musí platit, že vybuzený vlastní tvar kmitu se musí shodovat s tvarem budící síly, což se uzlových průměrů týká. Vynuceným tvarem kmitu bude stojaté vlnění, jak je schematicky ukázáno na obrázku 2.4.
- Stojaté vlnění nastává u nerotujících disků v případě harmonického buzení nehybného v prostoru. Vynucený tvar stojatého vlnění má časově a prostorově neproměnné uzly a kmitny. Během stojatého vlnění nastávají okamžiky, kdy disk resp. stočená struna nevykazuje žádné amplitudy kmitání. Na obrázku 2.4. je vidět rozvinutý obvod kmitajícího disku od 0° do 360° s jedním uzlovým průměrem.



Obrázek 2.4: Schématický obrázek stojatého vlnění

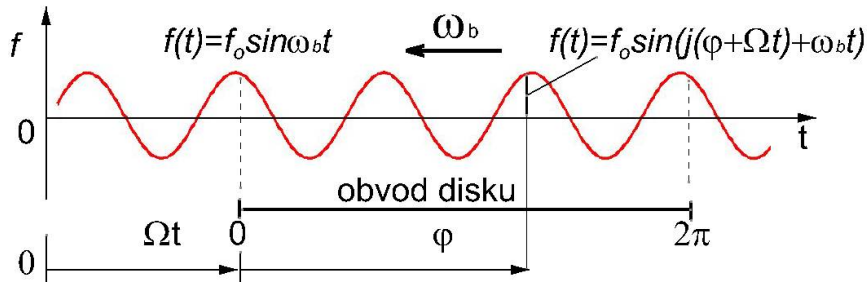
2.2.3 Harmonické buzení pohybující se v prostoru a rotující struktura

Budeme uvažovat buzení, které je harmonicky proměnné v čase a zároveň je harmonicky proměnné v prostoru a je vyjádřeno vztahem (2.34),

$$f(\varphi, t) = f_0 \sin(j\varphi_s + \omega_b t) = f_0 \sin(j(\varphi + \Omega t) + \omega_b t) \quad (2.34)$$

kde f_0 je amplituda síly, ω_b je budící frekvence, Ω je úhlová rychlost struktury, j je libovolné celé nezáporné číslo, φ_s je polární souřadnice určující pozici na struně v klidovém souřadném systému, φ je polární souřadnice určující pozici na struně v rotujícím souřadném systému svázaném se strunou. V tomto případě platí $\varphi_s = \varphi + \Omega t$.

Uvažujme směr otáčení struny, jak je znázorněno na obrázku 2.5.



Obrázek 2.5: Buzení harmonické pohybující se v prostoru a rotující struktura (pro $j=3$)

$$f_k^s = \int_0^{2\pi} \sin k\varphi f_0 \sin(j(\varphi + \Omega t) + \omega_b t) d\varphi = \dots = \pi f_0 \cos(k\Omega t + \omega_b t) \quad \text{pro } j = k$$

$$f_k^c = \int_0^{2\pi} \cos k\varphi f_0 \sin(j(\varphi + \Omega t) + \omega_b t) d\varphi = \dots = \pi f_0 \sin(k\Omega t + \omega_b t) \quad \text{pro } j = k$$

$$f_k^c = 2\pi f_0 \sin(k\Omega t - \omega_b t) \quad \text{pro } k = 0$$

$$f_k^{s,c} = 0 \quad \text{pro } j \neq k$$
(2.35)

Budící síla f_k^x nabývá nenulové hodnoty jen v tom případě, pokud platí $j = k$. Z toho lze učinit závěr, že vlastní tvar může být vybuděn pouze tehdy, pokud tvar budící síly má stejný počet uzlových průměrů jako daný tvar.

Sílu f_k^x dosadíme do rovnic (2.21) a ustálenou odezvu q_k budeme hledat ve tvaru (2.36).

$$q_k^s = A_k^s \cos((k\Omega + \omega_b)t), \quad q_k^c = A_k^c \sin((k\Omega + \omega_b)t) \quad (2.36)$$

Dále dosazením vztahů (2.36) do rovnic(2.21) a jejich vyřešením získáme neznámé A_k^s , A_k^c .

$$A_k^s = A_k^c = \frac{\frac{1}{\mu} f_0}{\omega_k^2 - (k\Omega + \omega_b)^2} \quad (2.37)$$

Výsledná ustálená odezva na harmonické buzení je rovna

$$\begin{aligned} z(\varphi, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} A_k^c [\sin k\varphi \cos(k\Omega + \omega_b)t + \cos k\varphi \sin(k\Omega + \omega_b)t] = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_0}{\mu} \frac{1}{\omega_k^2 - (k\Omega + \omega_b)^2} \sin(k\varphi + (k\Omega + \omega_b)t) \end{aligned} \quad (2.38)$$

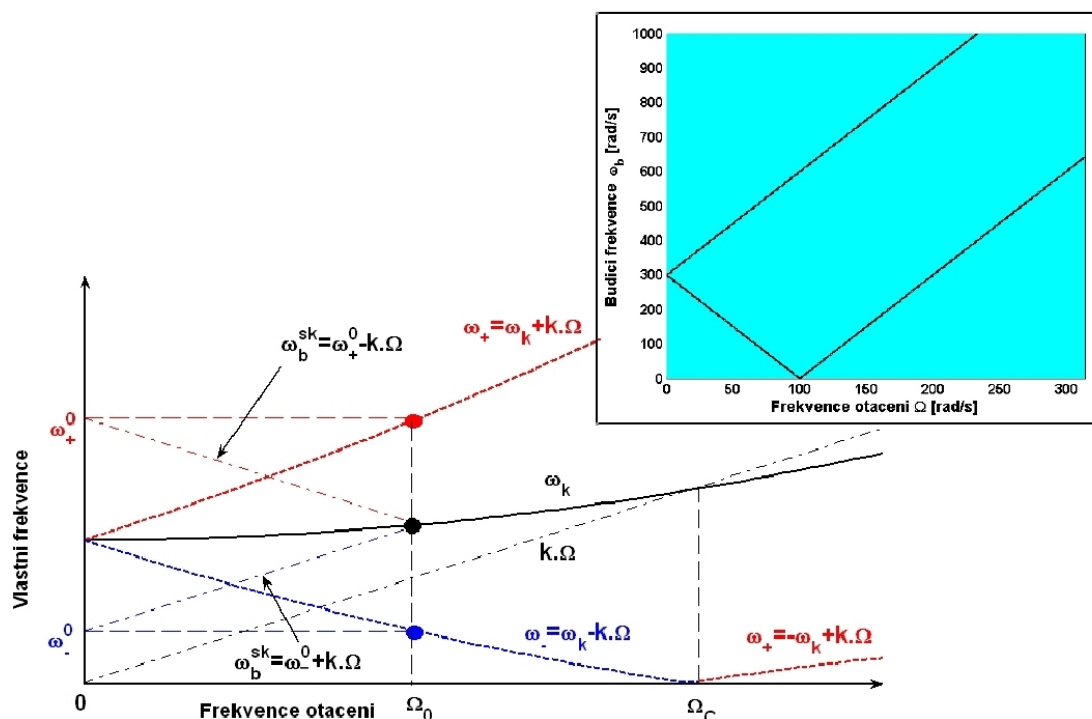
Do grafu vyneseme pro dané k amplitudu A_k^s v závislosti na frekvenci otáčení Ω a na frekvenci buzení ω_b pro známé ω_k a získáme tak graf, který je na obrázku 2.6 vpravo nahoře a kde černé čáry naznačují tzv. zdánlivou rezonanci.

Dále vyneseme do Campbellova diagramu jak zdánlivé, tak skutečné rezonační frekvence ω^{sk} tak, jak ukázáno na obrázku 2.6. Frekvence ω_+ , resp. ω_- označuje zdánlivé rezonační frekvence. Z grafu je patrné, že vhodnou volbou frekvence otáčení Ω a budící frekvence ω_b můžeme vybudit libovolnou vlastní frekvenci ω_k daného systému.

U rotujících rotačně periodických struktur se zavádí pojmy jako dopředu a zpětně běžící vlna. Pokud směr vlnění po obvodu struny je totožný resp. opačný se směrem otáčení, mluvíme o dopředu resp. zpětně běžící vlně. Ze vztahu (2.38) pro ustálenou odezvu můžeme zjistit uhlovou rychlost běžící vlny, neboť je dána časovou derivací argumentu harmonické funkce sinus pro konstantní φ a je rovna $k\Omega + \omega_b$.

Matematicky můžeme podmínku pro dopředu resp. zpětně běžící vlnu zapsat ve tvaru

$$\text{sign}(\Omega) = \text{sign}(k\Omega + \omega_b) \quad \text{resp.} \quad \text{sign}(\Omega) = -\text{sign}(k\Omega + \omega_b)$$



Obrázek 2.6: Campbellův diagram

Tabulka 2.1: Rozlišení běžících vln

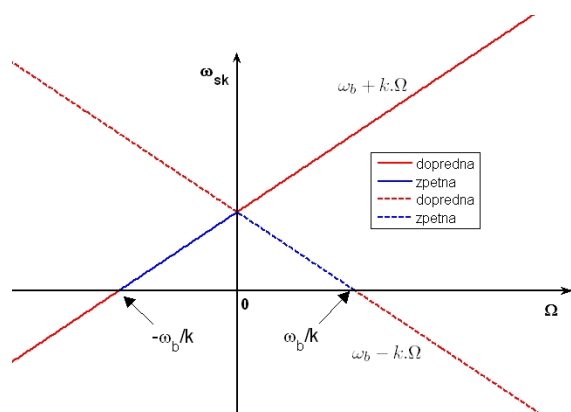
	$\omega_b > 0$	$\omega_b < 0$
zpětná	$\Omega \in (-\omega_b/k, 0)$	$\Omega \in (-\infty, 0) \wedge (\omega_b/k, \infty)$
dopředná	$\Omega \in (-\infty, -\omega_b/k) \wedge (0, \infty)$	$\Omega \in (0, \omega_b/k)$

Z tabulky 2.1 je zřejmé, že vybudění zpětně či dopředu běžící vlny závisí na směru buzení ω_b . Grafické znázornění je vidět na obrázku 2.7.

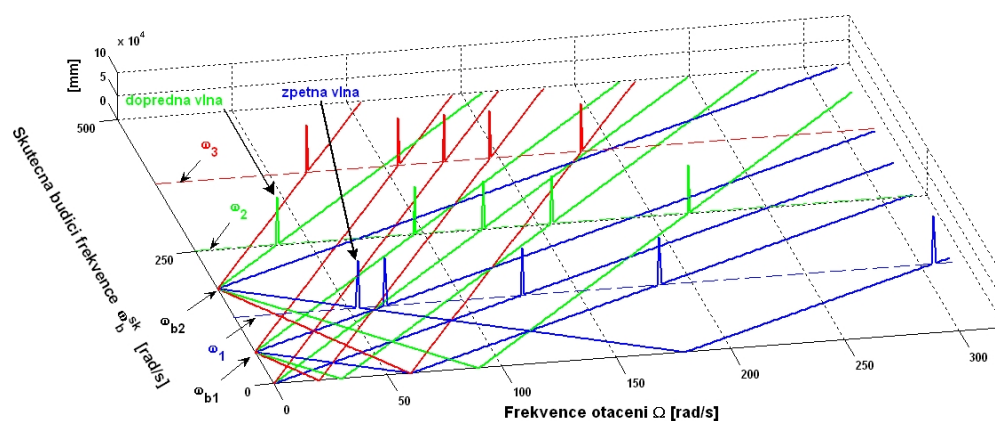
Pro vybrané místo na struně určené úhlem φ vyneseme závislost (2.38) pro různé budící frekvence $(0, \omega_{b1}, \omega_{b2})$ do grafu, viz. obrázek 2.8, kde $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ jsou vlastní frekvence struny. S takovýmto typem odezvy se setkáme, pokud budeme měřit např. tenzometrem umístěným na rotující struktuře. Navození rezonančního stavu může být docíleno pomocí tzv. rozmítání (sweepování) budící frekvence ω_b nebo změnou frekvence otáčení.

Poznámka:

V případě monitorování a měření časové odezvy rotující struktury a následného vyhodnocení pomocí např. Rychlé Fourierovy transformace (FFT) s cílem získat frekvenční spektrum, se pak výsledné měřené frekvence v závislosti na otáčkách vynášejí do Campbellova diagramu jako je na obrázku 2.7. V praxi se většinou setkáme s tím, že se všechny naměřené frekvence zobrazují pouze do prvního kvadrantu. To má za důsledek, že se pak frekvence ze zbylých tří kvadrantů ozrcadí kolem os souřadného systému do prvního kvadrantu viz. obrázek 2.8.



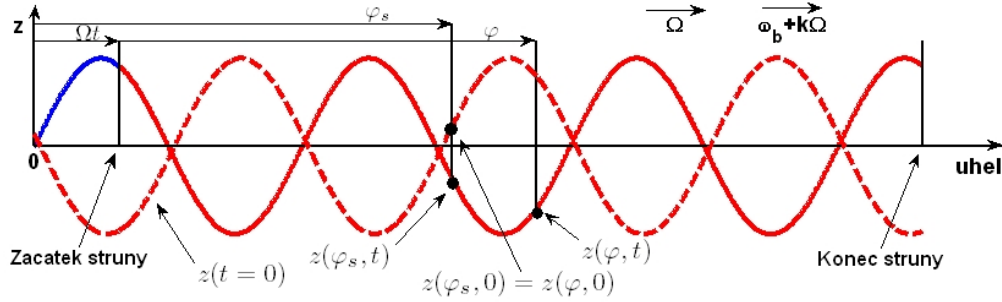
Obrázek 2.7: Schématické zobrazení Campbellova diagramu (vybuditelnost dopředné resp. zpětné vlny)



Obrázek 2.8: 3D waterfall - odezva na harmonické buzení (pro předepnutou strunu stočenou do kruhu)

Odezva v klidovém souřadném systému

Zavedeme souřadnici φ_s popisující obvodovou pozici struny v klidovém souřadném systému. Na základě obrázku 2.9 můžeme stanovit vztah mezi φ a φ_s .



Obrázek 2.9: Schématické zobrazení běžící vlny

$$\begin{aligned} \varphi_s &= \varphi - \Omega t && \text{pro dopřednou vlnu} \\ \varphi_s &= \varphi + \Omega t && \text{pro zpětnou vlnu} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Dosadíme (2.39) do (2.38) a dostaneme odezvu struny v klidovém souřadném systému.

$$z(\varphi_s, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_0}{\mu} \frac{1}{\omega_k^2 - (k\Omega + \omega_b)^2} \sin(k\varphi_s + \omega_b t + 2k\Omega t) \quad \text{pro dopřednou vlnu} \quad (2.40)$$

$$z(\varphi_s, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_0}{\mu} \frac{1}{\omega_k^2 - (k\Omega + \omega_b)^2} \sin(k\varphi_s + \omega_b t) \quad \text{pro zpětnou vlnu} \quad (2.41)$$

Budeme-li měřit odezvu snímačem, který je umístěn v klidovém souřadném systému, pak změřená frekvence bude rovna $\omega_b + 2k\Omega$ pro dopředně běžící vlnu resp. ω_b pro zpětně běžící vlnu. Pokud bude budící frekvence ω_b rovna nule, pak z pohledu pozorovatele v nerotujícím (klidovém) souřadném systému se jeví vynucený tvar rotující struktury jako v prostoru nehybný, mluvíme pak o stojícím vlnění.

Pro dokreslení problematiky prezentované v této kapitole je v Příloze 7.1 uveden příklad řešení odezvy rotující struny na harmonické buzení.

Dílčí závěry

- Rezonanční stav nastane, pokud jmenovatel ve výrazu (2.38) je roven nule, což znamená, že vlastní frekvence struktury ω_k je rovna frekvenci $|k\Omega + \omega_b|$. Musí však také platit, že vybuzený vlastní tvar kmitu se musí shodovat s tvarem budící síly, což se počtu uzlových průměrů týká. Vynuceným tvarem kmitu bude běžící vlna, jak je schematicky ukázáno na obrázku 2.3.
- Z pohledu axiálních turbosoustrojí je zajímavý případ, kdy frekvence buzení ω_b je rovna nule. Jedná se pak o takzvané buzení statickou silou, která je v prostoru harmonicky rozložená. Tento typ buzení nastává při provozu turbosoustrojí, kdy rotující olopatkované kolo je buzeno nerovnoměrně rozloženým tlakovým polem za rozváděcími lopatkami. V tomto případě dochází k jevu, že vlna na rotující struktuře se pohybuje v opačném směru než je její směr otáčení. Z pohledu pozorovatele v nerotujícím souřadném systému se jeví vynucený tvar rotující struktury jako v prostoru nehybný. Mluvíme pak o stojícím vlnění. Frekvenci otáčení při níž nastává rezonance, nazýváme kritickou frekvencí (na obrázku 2.6 v Campbellově diagramu je značena jako Ω_C). Stojící vlnění je z pohledu klidového souřadného systému invariantní v čase, jak ukazuje vztah (2.42)

$$z(\varphi_s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\mu \omega_k^2 - (k\Omega)^2} f_0 \sin(k\varphi_s) \quad (2.42)$$

2.2.4 Buzení s proměnnou amplitudou Diracova impulsu a rotující struktura

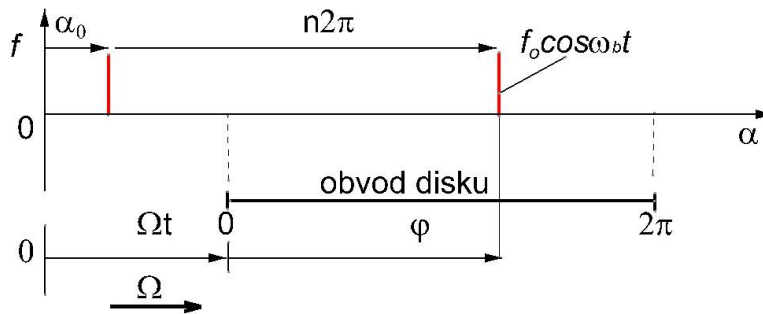
Při experimentálních měřeních se často k buzení systému využívá AC magnet či tryska. Tyto druhy buzení jsou specifické tím, že zdroj buzení je velmi lokalizován. Rotační či periodická struktura je buzena během jedné otáčky pouze po dobu velmi krátkého času. Toto buzení můžeme tedy zjednodušeně chápat jako buzení Diracovým impulzem. Jelikož je uvažována rotující struktura, pak můžeme toto buzení impulzem také chápat jako buzení Diracovým hřebem s periodou 2π . Budeme uvažovat buzení ve tvaru

$$f(\varphi, t) = f_0 \cos(\omega_b t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(\varphi + \Omega t - \alpha_0 - n2\pi) \quad (2.43)$$

kde úhel α_0 určuje pozici impulsu ve stacionárním souřadném systému, φ je polární souřadnice určující pozici na struně v rotujícím souřadném systému svázaném se strunou, f_0 je amplituda síly, ω_b je budící frekvence, Ω je úhlová rychlost struktury. Diracův impuls matematicky modelujeme pomocí δ funkce (Diracova funkce), pro kterou platí

$$\delta(\varphi - \gamma) = \begin{cases} \infty & \text{pro } \varphi = \gamma \\ 0 & \text{pro } \varphi \neq \gamma \end{cases}, \quad \int_a^b \delta(\varphi - \gamma) d\varphi = \begin{cases} 1 & \text{pro } \gamma \in \langle a, b \rangle \\ 0 & \text{pro } \gamma \notin \langle a, b \rangle \end{cases}$$

Obrázek 2.10 schematicky znázorňuje buzení rotující struktury Diracovým impulzem.



Obrázek 2.10: Buzení Diracovým impulzem a rotující struktura

Modální budící síly f_k^x pro $x = s, c$ získáme tak, že dosadíme výraz (2.43) do vztahu pro výpočet modální síly (2.22), kterou pak dosadíme do rovnic (2.21).

$$\begin{aligned} f_k^s &= \int_0^{2\pi} \sin k\varphi f_0 \cos(\omega_b t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(\varphi + \Omega t - \alpha_0 - n2\pi) d\varphi = f_0 \cos \omega_b t \sin(k(-\Omega t + \alpha_0)) \\ f_k^c &= \int_0^{2\pi} \cos k\varphi f_0 \cos(\omega_b t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(\varphi + \Omega t - \alpha_0 - n2\pi) d\varphi = f_0 \cos \omega_b t \cos(k(-\Omega t + \alpha_0)) \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \ddot{q}_k^s + \omega_k^2 q_k^s &= \frac{1}{\pi \mu} f_0 \cos \omega_b t \sin(k(-\Omega t + \alpha_0)) \\ \ddot{q}_k^c + \omega_k^2 q_k^c &= \frac{1}{\pi \mu} f_0 \cos \omega_b t \cos(k(-\Omega t + \alpha_0)) \end{aligned} \quad (2.45)$$

Poznámka

Určitý integrál součinu funkce $\cos(k\varphi)$ a Diracova hřebene s periodou 2π na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ je roven

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \cos k\varphi \sum_{n=0}^{\infty} \delta(\varphi + \Omega t - \alpha_0 - n2\pi) d\varphi = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{ll} \cos k(-\Omega t + \alpha_0 + n2\pi) & \text{pro } (-\Omega t + \alpha_0 + n2\pi) \in \langle 0, 2\pi \rangle \\ 0 & \text{pro } (-\Omega t + \alpha_0 + n2\pi) \notin \langle 0, 2\pi \rangle \end{array} \right\} = \\ &= \cos k(-\Omega t + \alpha_0) \end{aligned}$$

Stejný postup je v případě součinu funkce $\sin(k\varphi)$ a Diracova hřebene s periodou 2π na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$.

K řešení rovnice (2.45) použijeme Laplaceovu transformaci a budeme uvažovat nulové počáteční podmínky $q_k(0) = 0, \dot{q}_k(0) = 0$, po transformaci dostaneme Laplaceův obraz rovnice (2.45).

$$\mathcal{G}(s)\mathcal{Q}(s) = \mathcal{F}(s) \quad (2.46)$$

kde $\mathcal{F}(s)$ je Laplaceův obraz síly, $\mathcal{Q}(s)$ je Laplaceův obraz odezvy a dále

$$\mathcal{G}(s) = s^2 + \omega_k^2 \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^s(s) &= \frac{f_0}{\pi\mu} \frac{k\Omega(-k^2\Omega^2 + \omega_b^2 - s^2)\cos k\alpha_0 + s(k^2\Omega^2 + \omega_b^2 + s^2)\sin k\alpha_0}{((\omega_b - k\Omega)^2 + s^2)((\omega_b + k\Omega)^2 + s^2)} \\ \mathcal{F}^c(s) &= \frac{f_0}{\pi\mu} \frac{k\Omega(+k^2\Omega^2 - \omega_b^2 + s^2)\sin k\alpha_0 + s(k^2\Omega^2 + \omega_b^2 + s^2)\cos k\alpha_0}{((\omega_b - k\Omega)^2 + s^2)((\omega_b + k\Omega)^2 + s^2)}\end{aligned}\quad (2.48)$$

Zpětnou Laplaceovou transformací vztahu (2.49) získáme řešení $q_k(t)$. Vztah (2.50) je odvozen pro případ, kdy je $\alpha_0 = 0$.

$$\mathcal{Q}(s) = \frac{\mathcal{F}(s)}{\mathcal{G}(s)} \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned}q_k^s(t) &= \frac{f_0}{\pi\mu} \left[\frac{1}{2} \frac{\sin(\omega_b + k\Omega)t}{(\omega_b + k\Omega)^2 - \omega_k^2} - \frac{1}{2} \frac{\sin(\omega_b - k\Omega)t}{(\omega_b - k\Omega)^2 - \omega_k^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\frac{k\Omega}{\omega_k}(-k^2\Omega^2 + \omega_b^2 + \omega_k^2)\sin(\omega_k t)}{((\omega_b + k\Omega)^2 - \omega_k^2)((\omega_b - k\Omega)^2 - \omega_k^2)} \right] \\ q_k^c(t) &= \frac{f_0}{\pi\mu} \left[\frac{1}{2} \frac{-\cos(\omega_b + k\Omega)t}{(\omega_b + k\Omega)^2 - \omega_k^2} - \frac{1}{2} \frac{\cos(\omega_b - k\Omega)t}{(\omega_b - k\Omega)^2 - \omega_k^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(k^2\Omega^2 + \omega_b^2 - \omega_k^2)\sin(\omega_k t)}{((\omega_b + k\Omega)^2 - \omega_k^2)((\omega_b - k\Omega)^2 - \omega_k^2)} \right]\end{aligned}\quad (2.50)$$

Výsledná ustálená odezva na výše uvedené buzení je rovna

$$\begin{aligned}z(\varphi, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} (\sin k\varphi q_k^s + \cos k\varphi q_k^c) = \\ &= \frac{f_0}{2\pi\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\cos(k\Omega t + \omega_b t + k\varphi)}{\omega_k^2 - (\omega_b + k\Omega)^2} + \frac{\cos(-k\Omega t + \omega_b t - k\varphi)}{\omega_k^2 - (\omega_b - k\Omega)^2} \right]\end{aligned}\quad (2.51)$$

Třetí člen ve výrazu (2.50) reprezentuje přechodový děj, neboť se harmonicky mění s vlastní frekvencí ω_k . První dva členy popisují vynucené ustálené kmitání.

Rezonanční stav nastane, pokud ve výrazu (2.51) je jmenovatel u prvního či druhého zlomku roven nule. Rezonanční podmínku pak můžeme zapsat ve tvaru (2.52).

$$\omega_k = \omega_b \pm k\Omega \quad (2.52)$$

Vztah (2.52) se využívá při experimentálním měření olopatkovaných disků, pokud je využíván k buzení AC magnet s proměnou budící frekvencí ω_b . Tento vztah nám umožňuje identifikovat uzlové průměry k -tého tvaru kmitání, neboť při rezonačním stavu známe vlastní frekvenci ω_k (z měření), budící frekvenci ω_b a frekvenci otáčení Ω .

Zvláštní případy

- Pro případ kdy struktura nerotuje tj. $\Omega = 0$, můžeme výraz (2.51) zjednodušit. Ustálená odezva je pak vyjádřena vztahem (2.53), který popisuje stojaté vlnění nerotující struktury viz. obrázek 2.4. S tímto typem odezvy se můžeme v praxi často setkat a to v případě, kdy je prováděna experimentální modální analýza rotační struktury buzené v jednom místě harmonickým signálem.

$$z(\varphi, t) = \frac{f_0}{\pi\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(\omega_b t) \cos k\varphi}{\omega_k^2 - \omega_b^2} \quad (2.53)$$

- Pro případ kdy je $\Omega \neq 0$ a frekvence buzení $\omega_b = 0$, pak výraz (2.51) přejde do tvaru (2.55) (pro ustálenou odezvu).

$$q_k(t) = \frac{f_0}{\pi\mu} \left[\frac{-\sin k\Omega t + \cos k\Omega t}{\omega_k^2 - (k\Omega)^2} \right] \quad (2.54)$$

$$z(\varphi, t) = \frac{f_0}{\pi\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{-\sin k\Omega t \sin k\varphi + \cos k\Omega t \cos k\varphi}{\omega_k^2 - (k\Omega)^2} \right] = \frac{f_0}{\pi\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(k\Omega t + k\varphi)}{\omega_k^2 - (k\Omega)^2} \quad (2.55)$$

S tímto typem odezvy se v praxi setkáváme, pokud je rotující rotačně symetrická struktura buzena médiem z trysky. V tomto případě jsou odezvou běžící vlny, jejichž úhlová frekvence je rovna $k\Omega$.

Ze vztahu (2.55) vyplývá, že při buzení rotující struktury lokalizovanou statickou silou dochází k buzení všemi násobky otáčkové frekvence, mimo jiné nazývané jako polyharmonické buzení.

Dílní závěry

- Pokud je nerotující ($\Omega = 0$) rotačně symetrická struktura buzena v jednom místě harmonicky proměnným impulzem, pak ustálenou odezvou je stojaté vlnění.
- Pokud je rotující rotačně symetrická struktura buzena statickým impulzem, pak ustálenou odezvou je nekonečně mnoho běžících vln s úhlovými frekvencemi $k\Omega$.
- Vztah $\omega_k = \omega_b \pm k\Omega$ určuje rezonační podmínku a zároveň je v praxi využíván pro identifikaci počtu uzlových průměrů vybuzených vlastních tvarů.

3 Rotačně periodická struktura

Rotačně periodickou strukturou rozumíme n identických substruktur (segmentů), které tvoří uzavřený prstenec. Sousedící segmenty jsou provázány vazební podmínkou tak, aby se zaručilo požadované rotačně periodické chování. Příkladem rotačně symetrické struktury je olopatkovaný disk, ozubené kolo, či elektrárenská chladicí věž.

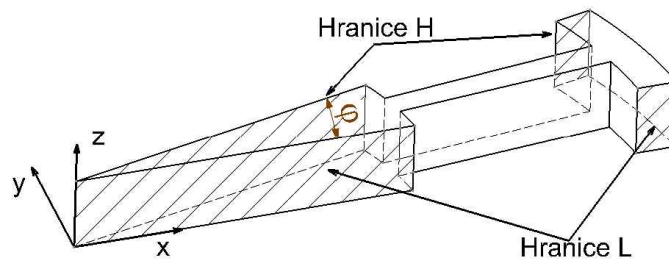
3.1 Výpočtový model

Pro numerickou analýzu olopatkovaného disku je nutné sestavit patřičný jeho matematický model. V dnešní době nejrozšířenější způsobem k vytvoření výpočtového modelu je aplikace metody konečných prvků (MKP). Tato metoda umožňuje pomocí diskretizace kontinua popsat systém pomocí matice hmotnosti \mathbb{M} , matice tlumení \mathbb{B} , matice gyroskopických momentů \mathbb{G} a matice tuhosti \mathbb{K} .

Cílem této práce není presentovat postup sestavování matic \mathbb{M} , \mathbb{B} , \mathbb{K} , \mathbb{G} , neboť existuje mnoho komerčních programů, které velmi efektivně toto provedou a dále poskytují možnost exportovat výše uvedené matice v binární či textové formě. Tato práce mimo jiné chce presentovat výpočetní postupy, které nejsou dostupné v komerčních programech a je nutné tyto postupy naprogramovat mimo již zmiňované programy.

Mějme rotačně periodickou strukturu složenou z n segmentů rotující úhlovou rychlostí Ω kolem osy symetrie z , viz. obrázek 3.1.

Segment struktury je ohraničen obecnými plochami, které svírají úhel φ , a který je definován jako podíl 2π ku počtu segmentů n , viz. obrázek 3.1.



Obrázek 3.1: Schématické znázornění segmentu rotačně periodické struktury

Písmenem L (z anglického low) budeme označovat hranici segmentu, která má v pravotočivém souřadném systému úhlovou polohu menší než druhá hranice, kterou budeme značit písmenem H (z anglického high).

Pohybová rovnice popisující chování jednoho segmentu je dána rovnicí (3.1).

$$\mathbb{M}\ddot{q} + \mathbb{B}\dot{q} + \Omega\mathbb{G}\dot{q} + \mathbb{K}q = f(t), \text{ kde } \mathbb{K} = \mathbb{K}_0 + \Omega^2(\mathbb{K}_{st} - \mathbb{M}_D) \quad (3.1)$$

Člen $\Omega^2\mathbb{M}_D$ reprezentuje matici tzv. snížení tuhosti vlivem rotace a člen $\Omega^2\mathbb{K}_{st}$ je matice vyjadřující zpevnění lopatky proti ohybu v důsledku působení odstředivých sil. Principiální vysvětlení je uvedeno v Příloze 7.2 . Matice \mathbb{M} resp. \mathbb{K} popisuje hmotnost resp. tuhost lopatky za klidu. Člen popisující gyroskopický efekt $\Omega\mathbb{G}\dot{q}$, nebudeme dále uvažovat, neboť jeho vliv není významný, jak bylo ukázáno v publikaci [20].

Rotační periodicity struktury je možno využít ke snížení počtu stupňů volnosti a to tolikrát kolik je substruktur (segmentů). Máme-li diskrétní matematický model substruktury (3.1), pak je možné sestavit také diskrétní matematický model celé rotačně periodické struktury s využitím rotačně periodické podmínky. Použití této podmínky je omezeno na ideálně rotačně periodickou strukturu. A to platí jak pro vlastní geometrii struktury, tak pro aplikované zatížení. Pro případ, kdy je rotačně periodická struktura zatížena obecně rozloženým zatížením měnící se harmonicky v čase, je možné toto zatížení popsat pomocí teorie Fourierových řad.

Šíří-li se rotačně periodickou strukturou vlna v obvodovém směru pak úhlové fázové zpoždění ψ mezi hranicemi segmentu je dáno vztahem (3.2), kde ND definuje počet uzlových průměrů. (V literatuře se ND někdy nazývá jako harmonický index případně vlnové číslo). Úhel ψ může nabývat hodnot od $-\pi$ do $+\pi$.

$$\psi = ND\varphi \tag{3.2}$$

Pro případ, kdy $\psi = \pi$, platí (3.3), což znamená, že počet uzlových průměrů ND může nabývat maximální hodnoty, která je rovna polovině počtu segmentů. Pokud n je liché číslo, pak ND může nabývat maximální hodnoty $(n - 1)/2$.

$$ND = \frac{\psi}{\varphi} = \frac{\pi}{\frac{2\pi}{n}} = \frac{n}{2} \tag{3.3}$$

Vektor zobecněných souřadnic q můžeme rozdělit na posuvy v místě hranic q_L, q_H a na posuvy vnitřních uzlů segmentu q_i . Ve stejném duchu rozdělíme i zobecněné síly f , viz. vztah (3.4).

$$q = \begin{bmatrix} q_L \\ q_i \\ q_H \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} f_L \\ f_i \\ f_H \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

Poznámka:

 Z pohledu silového zatížení segmentu je třeba si uvědomit, že pokud se aplikují vnější silové účinky f_L, f_H na obě hranice segmentu L a H, pak tyto musí splňovat vztah (3.7) a zároveň jejich amplitudy musí mít poloviční velikost než v případě, když by se aplikovala síla jen na jednu z hranic segmentu. Je to z důvodu rozdělení silového zatížení mezi sousedícími segmenty.

Pomocí posuvů q_L můžeme vyjádřit posuvy q_H na hranici H dle vztahu (3.5), který definuje rotačně periodickou podmínku.

$$q_H = e^{i\text{ND}\varphi} q_L \quad (3.5)$$

Podmínku periodicity (3.5) dále dosadíme do vztahu (3.4) tak, abychom vyloučili posuvy q_H .

$$q = \begin{bmatrix} q_L \\ q_i \\ q_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I}e^{i\psi} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_L \\ q_i \end{bmatrix} = \mathbb{H} \begin{bmatrix} q_L \\ q_i \end{bmatrix} = \mathbb{H}\bar{q} \quad (3.6)$$

$$f = \begin{bmatrix} f_L \\ f_i \\ f_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I}e^{i\psi} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_L \\ f_i \end{bmatrix} = \mathbb{H} \begin{bmatrix} f_L \\ f_i \end{bmatrix} = \mathbb{H}\bar{f} \quad (3.7)$$

Transformační vztahy (3.6) a (3.7) dosadíme do pohybové rovnice (3.1) a celou rovnici vynásobíme zleva hermitovskými transponovanou maticí \mathbb{H}^H . Tímto dojde k vyloučení zobecněných souřadnic q_H .

$$\bar{\mathbb{M}}\ddot{\bar{q}} + \bar{\mathbb{B}}\dot{\bar{q}} + \bar{\mathbb{K}}\bar{q} = \mathbb{H}^H\mathbb{H}\bar{f}(t) \quad (3.8)$$

Matice $\bar{\mathbb{M}} = \mathbb{H}^H\mathbb{M}\mathbb{H}$ a $\bar{\mathbb{K}} = \mathbb{H}^H\mathbb{K}\mathbb{H}$ jsou Hermitovské matice, neboť platí

$$(\mathbb{H}^H\bar{\mathbb{M}}\mathbb{H})^H = \mathbb{H}^H\bar{\mathbb{M}}\mathbb{H} \quad , \quad (\mathbb{H}^H\bar{\mathbb{K}}\mathbb{H})^H = \mathbb{H}^H\bar{\mathbb{K}}\mathbb{H} \quad (3.9)$$

Rovnice (3.8) popisuje chování celého olopatkovaného disku na základě matematického modelu jednoho segmentu a rotačně periodické podmínky.

3.2 Problém vlastních hodnot - modální analýza

Modální analýzou se rozumí zjišťování modálních vlastností systému jako jsou vlastní frekvence a vlastní tvary. Modální analýza může být založena na základě experimentu, pak mluvíme o experimentální modální analýze, nebo na základě výpočtů, a pak ji nazýváme výpočtová modální analýza. V této kapitole se budeme zabývat výpočtovou modální analýzou.

Dále budeme uvažovat konzervativní resp. slabě nekonzervativní lineární systém (3.8). To znamená, že $\bar{\mathbb{B}} = \mathbf{0}$ resp. $\bar{\mathbb{B}}$ nemá významný vliv na modální vlastnosti systému.

$$\bar{\mathbb{M}}\ddot{\bar{q}} + \bar{\mathbb{K}}\bar{q} = 0 \quad (3.10)$$

Řešení rovnice (3.10) budeme hledat ve tvaru,

$$\bar{q} = v e^{i\lambda t} \quad (3.11)$$

kde v je vlastní vektor a λ je vlastní frekvence.

Dosazením (3.11) do rovnice (3.10) dostaneme rovnici popisující problém vlastních hodnot.

$$(\bar{\mathbb{K}} - \lambda^2 \bar{\mathbb{M}})v = 0 \quad (3.12)$$

Rovnici můžeme dále rozdělit na část reálnou a část imaginární.

$$\bar{\mathbb{K}} = \bar{\mathbb{K}}^R + i\bar{\mathbb{K}}^I, \quad \bar{\mathbb{M}} = \bar{\mathbb{M}}^R + i\bar{\mathbb{M}}^I \quad (3.13)$$

$$\left(\begin{bmatrix} \bar{\mathbb{K}}^R & -\bar{\mathbb{K}}^I \\ \bar{\mathbb{K}}^I & \bar{\mathbb{K}}^R \end{bmatrix} - \lambda^2 \begin{bmatrix} \bar{\mathbb{M}}^R & -\bar{\mathbb{M}}^I \\ \bar{\mathbb{M}}^I & \bar{\mathbb{M}}^R \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v^R \\ v^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Řešením problému vlastních hodnot lineární rovnice (3.14) získáme vlastní frekvence λ a vlastní vektory v .

V závislosti na ND získáme tři typy vlastních tvarů:

1. Pro případ ND=0 budou všechny segmenty kmitat shodně a se stejnou fází. Tento tvar kmitu je popsán pouze jedním vlastním tvarem a jednou vlastní frekvencí.
2. Pro případ ND=n/2 budou všechny segmenty mít shodný tvar, ale sousední segmenty budou kmitat v protifázi. Tento tvar kmitu může nastat pouze v případě, pokud n je sudé. Tento tvar kmitu je popsán pouze jedním vlastním tvarem a jednou vlastní frekvencí podobně jako pro případ ND=0
3. Tvary kmitu pro všechny ostatní ND se vyskytují v párech a jsou vůči sobě ortogonální, tzn. v^I a v^R jsou vzájemně ortogonální.

Rozvineme-li vlastní tvar v základního segmentu dle vztahu (3.15) získáme vlastní tvar v_c celé rotačně periodické struktury, kde \mathbb{T} je transformační matice.

$$v_c = \begin{bmatrix} \mathbb{I} \\ \mathbb{I}e^{iND\varphi} \\ \vdots \\ \mathbb{I}e^{iND\varphi(n-1)} \end{bmatrix} v = \mathbb{T}v \quad (3.15)$$

Dále zjistíme vztah mezi vlastními tvary pro případ kdy $\psi = ND\varphi$ a $\psi = -ND\varphi$.

Podobně jako pro $\psi = ND\varphi$ provedeme odvození charakteristické rovnice pro $\psi = -ND\varphi$. Platí,

$$\mathbb{H}^- = \mathbb{H}^* \quad (3.16)$$

kde \mathbb{H}^- značí transformační matici pro $-ND$ dle vztahu (3.6) a je komplexně sdružená s maticí \mathbb{H} .

Charakteristická rovnice bude pak popsána dle (3.17),

$$\left((\overline{\mathbb{K}})^* - (\lambda^-)^2 (\overline{\mathbb{M}})^* \right) v^- = 0 \quad (3.17)$$

kde v^- resp. λ^- značí vlastní vektor resp. vlastní číslo pro případ $-ND$. A dále platí,

$$(\mathbb{H}^-)^H \mathbb{M} \mathbb{H}^- = (\mathbb{H}^*)^H \mathbb{M} \mathbb{H}^* = (\mathbb{H}^H \mathbb{M} \mathbb{H})^* = (\overline{\mathbb{M}})^*$$

$$(\mathbb{H}^-)^H \mathbb{K} \mathbb{H}^- = (\mathbb{H}^*)^H \mathbb{K} \mathbb{H}^* = (\mathbb{H}^H \mathbb{K} \mathbb{H})^* = (\overline{\mathbb{K}})^*$$

neboť prvky matic \mathbb{M} , \mathbb{K} jsou reálné. K rovnici (3.17) najdeme rovnici komplexně sdruženou (3.18).

$$\left(\overline{\mathbb{K}} - \{(\lambda^-)^*\}^2 \overline{\mathbb{M}} \right) (v^-)^* = 0 \quad (3.18)$$

Na základě porovnání rovnic (3.18) a (3.12) můžeme konstatovat, že musí platit

$$\lambda = (\lambda^-)^* , v = (v^-)^* \quad (3.19)$$

Dále dosadíme do vztahu (3.15) jednou pro případ ND a pak pro případ $-ND$ a dostaneme

$$\begin{aligned} v_c &= \mathbb{T}v \\ v_c^- &= \mathbb{T}^* v^- = (\mathbb{T}v)^* = v_c^* \end{aligned} \quad (3.20)$$

Pro vlastní tvary, které mají stejné uzlové průměry, liší se ale znaménkem platí, že tyto tvary jsou vůči sobě komplexně sdružené, jak ukazuje (3.20).

Definování uzlových průměrů vyšších než $n/2$

Vyjdeme ze vztahu (3.2) ($\psi = ND\varphi$, kde $\varphi = 2\pi/n$) definující fázový posun deformací dvou sousedních segmentů v závislosti na uzlovém průměru. Zavedme více obecný fázový posuv $\tilde{\psi}$ dle (3.21)

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} &= \psi + s2\pi \\ \tilde{\psi} &= -\psi + s2\pi \quad , \text{kde } s = 0, 1, 2, \dots, \infty \end{aligned} \quad (3.21)$$

Po dosazení do (3.21) za $\tilde{\psi} = \widetilde{ND}\varphi$ resp. $\psi = ND\varphi$ a dělením úhlem φ dostaneme

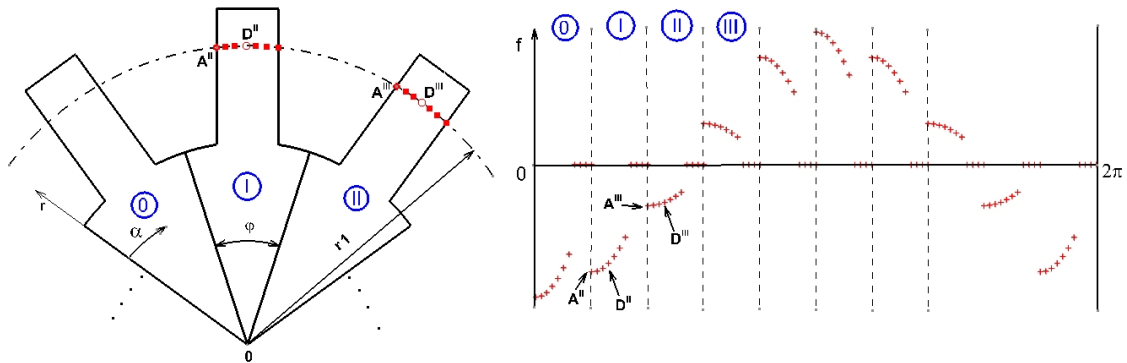
$$\widetilde{ND} = sn \pm ND \quad (3.22)$$

kde \widetilde{ND} nazýváme taktéž uzlovým průměrem. Pro daný ND existuje nekonečně mnoho uzlových průměrů \widetilde{ND} , které jsou svázány vztahem (3.22), tzn. vlastní tvar kmitu definovaný uzlovým průměrem ND v sobě zároveň obsahuje i vyšší uzlové průměry \widetilde{ND} .

3.3 Vynucené kmitání

3.3.1 Harmonické buzení silou periodicky rozloženou v obvodovém směru

Budeme předpokládat, že vnější silové účinky na rotačně periodickou strukturu mají časově harmonický průběh a zároveň jsou jejich amplitudy v daný časový okamžik po obvodě disku periodicky rozloženy tak, jak je naznačeno na obrázku 3.2.



Obrázek 3.2: Graf znázorňující rozložení budící síly na poloměru r_1 v daný časový okamžik (schématické zobrazení pro strukturu s 10 segmenty a s rozložením síly odpovídající jednomu uzlovému průměru)

Graf ukazuje průběh amplitud síly po obvodě na poloměru r_1 v daný časový okamžik. Je-li bod A^{II} libovolný bod na segmentu II a bod A^{III} na segmentu III a pokud platí, že jsou tyto body vůči sobě pootočený kolem osy symetrie o úhel φ definující výšec segmentu, pak silové účinky působící v těchto bodech musí být svázány podmínkou rotačně periodické symetrie (3.23), kde k je libovolné celé nezáporné číslo definující tvarové rozložení sil v obvodovém směru.

$$f_{A^{\text{II}}} = e^{ik\varphi} f_{A^{\text{III}}} \quad (3.23)$$

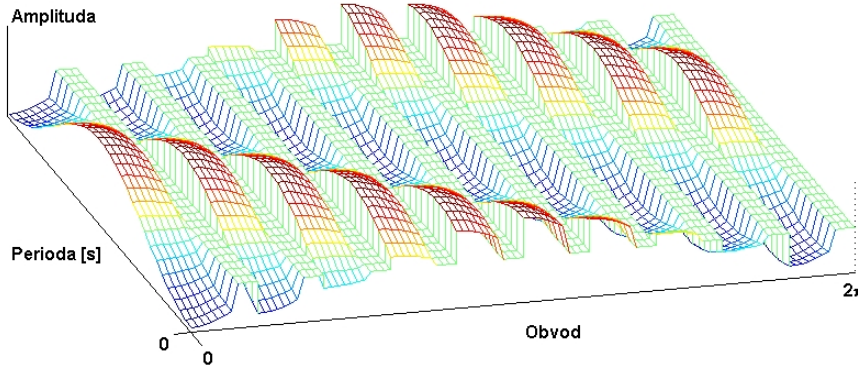
Jinými slovy to znamená, že pokud aplikujeme silové zatížení $f_0(r, z, \alpha)$ na základní segment 0, pak na segmentu j bude silové rozložení definované vztahem (3.24). Toto je nutný požadavek, aby platily následující vztahy pro výpočet harmonické odezvy.

$$f_j(r, z, \alpha) = e^{ikj\varphi} f_0(r, z, \alpha) \quad (3.24)$$

Časový průběh výše definovaného silového zatížení na j -tém segmentu je dán vztahem (3.25), kde r, z, α jsou válcové souřadnice popisující místo na struktuře, $f_0(r, z, \alpha)$ je amplituda síly, ω_b je budící frekvence. Úhel α může nabývat hodnot z intervalu $(0, 2\pi/n)$.

$$f_j(r, z, \alpha, t) = f_0(r, z, \alpha) e^{i(kj\varphi + \omega_b t)} \quad (3.25)$$

Příklad harmonického časového průběhu budící síly periodicky se měnící po obvodě struktury je zobrazen graficky na obrázku 3.3.



Obrázek 3.3: Časový průběh budící síly periodicky se měnící po obvodě struktury (schématické zobrazení pro strukturu s 10 segmenty a s rozložením síly odpovídající jednomu uzlovému průměru)

Z praktického pohledu nás dále bude zajímat ustálená odezva nikoliv přechodový děj. Budeme předpokládat, že systém je slabě nekonzervativní. Pro výpočet odezvy zvolíme modální metodu, tzn. modální transformaci (3.26), kterou dosadíme do rovnice (3.8) a vynásobíme zleva hermitovskými transponovanou modální maticí \mathbb{V}^H .

$$\bar{q} = \mathbb{V}u(t) \quad (3.26)$$

Modální matice \mathbb{V} je normalizovaná tak, aby platilo

$$\mathbb{V}^H \bar{\mathbb{M}} \mathbb{V} = \mathbb{I} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{V}^H \bar{\mathbb{B}} \mathbb{V} = \mathbb{D}, \quad \mathbb{V}^H \bar{\mathbb{K}} \mathbb{V} = \Lambda$$

Matice \mathbb{D} je diagonální a prvky na diagonále jsou rovny $2\eta_j\omega_j$, kde ω_j je j -tá vlastní frekvence a η_j je poměrný útlum j -tého tvaru.

$$\mathbb{V}^H \bar{\mathbb{M}} \mathbb{V} \ddot{u}(t) + \mathbb{V}^H \bar{\mathbb{B}} \mathbb{V} \dot{u}(t) + \mathbb{V}^H \bar{\mathbb{K}} \mathbb{V} u(t) = \mathbb{V}^H \mathbb{H}^H \mathbb{H} \bar{f}(t) \quad (3.27)$$

$$\mathbb{I} \ddot{u}(t) + \mathbb{D} \dot{u}(t) + \Lambda u(t) = \mathbb{V}^H \mathbb{H}^H \mathbb{H} \bar{f}(t) \quad (3.28)$$

Pro budící sílu $\bar{f}(t) = \bar{f}_0 e^{i\omega_b t}$ budeme řešení rovnice (3.28) hledat ve frekvenční oblasti ve tvaru $u(t) = u_0 e^{i\omega_b t}$

$$u_0 = [-\mathbb{I}\omega_b^2 + i\omega_b \mathbb{D} + \Lambda]^{-1} \mathbb{V}^H \mathbb{H}^H \mathbb{H} \bar{f}_0 \quad (3.29)$$

Výsledná časová odezva má pak tvar (3.30).

$$\bar{q}(t) = \mathbb{V} [-\mathbb{I}\omega_b^2 + i\omega_b \mathbb{D} + \Lambda]^{-1} \mathbb{V}^H \mathbb{H}^H \mathbb{H} \bar{f}_0 e^{i\omega_b t} \quad (3.30)$$

Odezvu j -tého segmentu pak vyjádříme dle (3.31),

$$q_j = e^{iND\varphi_j} \begin{bmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I}e^{iND\varphi} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q}_L \\ \bar{q}_i \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

kde ND reprezentuje počet uzlových průměrů a platí $ND = k$.

Časová odezva určená vztahem (3.30) reprezentuje tzv. běžící vlnu, jejíž úhlová rychlost je rovna budící frekvenci ω_b . Pro odezvu a rezonační stav při výše uvedeném typu buzení platí podobné závěry, které byly učiněny v kapitole 2.2.1 (Harmonické buzení pohybující se v prostoru a stojící rotačně symetrická struktura), tzn. rezonační stav nastane v případě, kdy jsou splněny následující dvě podmínky:

1. platí rovnost budící a vlastní frekvence $\omega_b = \omega_j$ (j -tá vlastní frekvence)
2. existuje tvarová shoda mezi budící silou a vlastním tvarem ve smyslu počtu uzlových průměrů tj. $ND = k$

Zvláštní případy

Vyděme ze vztahu (3.30) pro výpočet amplitudy harmonické odezvy a předpokládejme, že budící síla se bude po obvodě na jednotlivých segmentech měnit dle vztahu (3.24). Zajímá nás, jak se bude lišit výsledná odezva pro případ, kdy tvarové rozložení síly bude vykazovat k uzlových průměrů, a pro případ, kdy síla bude obsahovat $n-k$ uzlových průměrů, kde n je počet segmentů struktury. Dále předpokládejme, že v obou případech bude síla $\bar{f}_0(r, z)$ na základním segmentu identická. Dosadíme vztah (3.2) do vztahu (3.3) pro transformační matice \mathbb{H} s tím, že jednou budeme uvažovat $ND=k$ a podruhé $ND=n-k$, viz. (3.32).

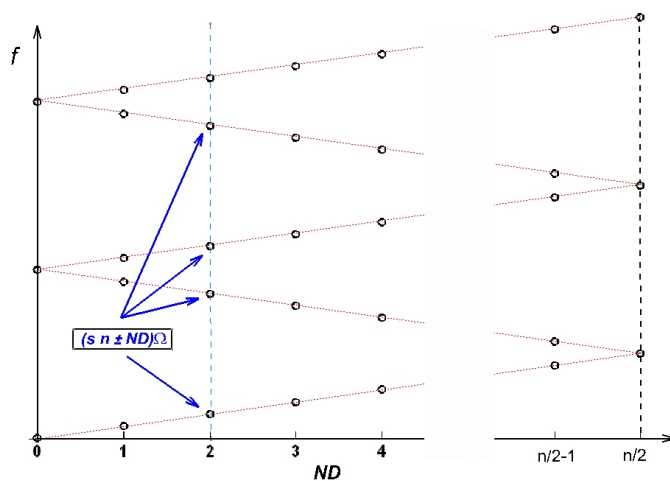
$$\mathbb{H}_k = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I}e^{ik\frac{2\pi}{n}} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{H}_{n-k} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I}e^{i(n-k)\frac{2\pi}{n}} & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{H}_k^* \quad (3.32)$$

Ve vztahu (3.30) figuruje mimo jiné součin $\mathbb{H}^H \mathbb{H}$, který může ovlivnit výslednou odezvu, ostatní členy ve vztahu jsou v našem případě neměnné, neboť z kapitoly 3.2 víme, že vlastní tvar resp. modální matice \mathbb{V} pro dané ND je zároveň vlastním tvarem pro $s n \pm ND$. Pro oba zkoumané případy se matice \mathbb{H}_k a \mathbb{H}_{n-k} liší tím, že jsou vůči sobě komplexně sdružené, ale pro jejich součin $\mathbb{H}_k^H \mathbb{H}_k = \mathbb{H}_{n-k}^H \mathbb{H}_{n-k}$ platí rovnost, z čehož vyplývá, že v obou případech bude odezva totožná.

Mějme rotačně periodickou strukturu, která rotuje úhlovou rychlostí Ω a působí na ní statická síla vůči nepohybujícímu se souřadnicovému systému. Pokud tvar rozložení síly je charakterizován ND uzlovými průměry, pak je rotující struktura buzena frekvencí $\omega_b = ND \Omega$. Na základě závěrů z kapitoly 2.2.3 můžeme prohlásit,

že při rezonačním stavu dojde k vybuzení zpětně běžící vlny, která se bude jevit v nepohybujícím se souřadnicovém systému jako stojící.

Graf na obrázku 3.4 ukazuje grafickou interpretaci závislosti budící frekvence na počtu uzlových průměrů budící síly. Dále je možné pomocí tohoto grafu identifikovat, jaké uzlové průměry se mohou vybudit, což naznačuje svislá modrá svislá čára.



Obrázek 3.4: Graf závislosti budící frekvence na uzlových průměrech budící síly

3.3.2 Buzení obecně rozloženou statickou silou a rotující struktura

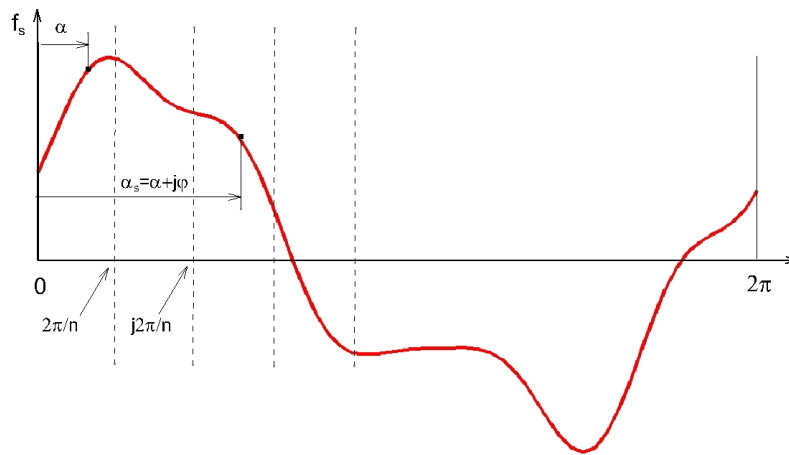
Budeme předpokládat obecně rozloženou statickou sílu v prostoru, která svými účinky působí na rotující rotačně periodickou strukturu. Statická budící síla $f_s(r, z, \alpha_s)$ je popsána pomocí válcových souřadnic r, α_s, z , kde osa z je osou rotace a zároveň je i osou rotačně periodické symetrie struktury. Úhlová rychlost struktury je Ω . Pro zvolené souřadnice r, z je průběh statické síly v závislosti na α_s dán funkcí $f(\alpha_s)$, viz. obrázek 3.5. Tato funkce je funkcí periodickou s periodou 2π . Pro libovolný úhel α_s a jemu odpovídající budící sílu $f_s(r, z, \alpha_s)$ můžeme tuto sílu na základě konečného Fourierova rozvoje popsat dle vztahu (3.33),

$$f_s(r, z, \alpha_s) = f_s(r, z, \alpha + j\varphi) = \sum_{k=0}^{n/2} f_k(r, z, \alpha) e^{ik\varphi} e^{ikj\varphi} \quad (3.33)$$

kde $f_k(r, z, \alpha)$ je koeficient Fourierova rozvoje, který je závislý na souřadnicích r, z, α a reprezentuje budící sílu s k uzlovými průměry, která působí na základní segment. Úhel α může nabývat hodnot z intervalu $\langle 0, 2\pi/n \rangle$ a libovolné α_s můžeme vyjádřit pomocí úhlu α a φ dle vztahu (3.34),

$$\alpha_s = \alpha + j\varphi \quad (3.34)$$

kde j může nabývat hodnot od 0 do $n-1$.



Obrázek 3.5: Schématický průběh statické budící síly v obvodovém směru (pro zvolené souřadnice r, z)

Jelikož struktura současně rotuje úhlovou rychlostí Ω a je vystavena působení statické síly $f_s(r, z, \alpha_s)$, je to ve výsledku to samé, jako když je stojící struktura buzena

rotující silou $f_s(r, z, \alpha_s)$ o úhlové rychlosti Ω . Toto buzení pak můžeme zapsat ve tvaru (3.35).

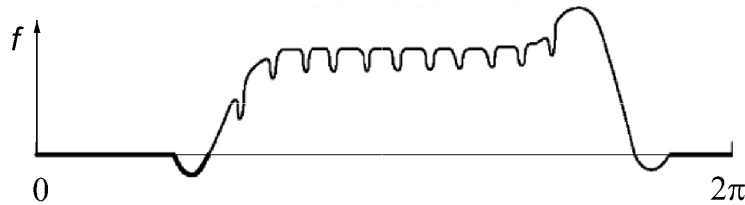
$$f_s(r, z, \alpha_s, t) = \sum_{k=0}^{n/2} f_k(r, z, \alpha) e^{ik(j+1)\varphi} e^{ik\Omega t} \quad (3.35)$$

Výraz $f_k(r, z, \alpha) e^{ik(j+1)\varphi} e^{ik\Omega t}$ reprezentuje periodicky rozloženou sílu po obvodu struktury a zároveň má tato síla časově harmonický průběh s frekvencí $k\Omega$. Odezva na tento typ buzení byla řešena v kapitole 3.3.1, kde vektor odezvy je dán výrazem (3.30).

Výsledná odezva rotující struktury na buzení statickou silou je dána součtem odezev pro jednotlivé budící síly $f_k(r, z, \alpha)$ dle vztahu (3.36).

$$q(t) = \sum_{k=0}^{n/2} \mathbb{H} \bar{q}_k(t) = \sum_{k=0}^{n/2} \mathbb{H} \mathbb{V} [-\mathbb{I} (k\Omega)^2 + i k\Omega \mathbb{D} + \Lambda]^{-1} \mathbb{V}^H \mathbb{H}^H f_k e^{i k\Omega t} \quad (3.36)$$

S tímto typem buzení se v turbinářské praxi setkáme velmi často, ať už je to buzení oběžných lopatek v důsledku úplavů za rozváděcími lopatkami či v důsledku nerovnoměrného tlakového pole v okolí odběrového potrubí páry a nebo v důsledku tzv. parciálního ostříku oběžných lopatek u regulačních stupňů, viz. obrázek 3.6. U prvně zmiňovaného případu, tj. u buzení oběžných lopatek vlivem úplavů, se však velmi často toto buzení nahrazuje pouze první harmonickou složkou z výrazu (3.33).



Obrázek 3.6: Obecný průběh síly působící na oběžné kolo při parciálním ostříku získaný na základě CFD výpočtu

3.3.3 Vybuditelnost vlastního tvaru - běžící vlny

Z praktického pohledu je vždy důležité vědět, jak moc se daný vlastní tvar kmitu vybudí při známém silovém buzení. V literatuře [33] se pro tyto účely zavádí tzv. participační faktor, který definuje míru vybuditelnosti vlastního tvaru při daném buzení.

Budeme předpokládat, že tlumení je proporcionální charakterizované poměrným útlumem η a vlastní tvary jsou od sebe dostatečně frekvenčně vzdáleny, tzn. do rezonační odezvy bude dominantně přispívat vždy ten vlastní tvar, který má vlastní frekvenci rovnu budící.

$$\left| \frac{1}{\omega_m^2 - \omega_b^2 + 2i\eta\omega_b\omega_m} \right| \sim 0, \text{ pro } \omega_b \neq \omega_m \text{ kde } m=1,2,3,\dots$$

Pro určení příspěvku m -tého vlastního tvaru do celkové odezvy při buzení frekvencí $\omega_b = \omega_m$ vyjdeme ze vztahu (3.30) a vyjádříme rezonační odezvu za výše uvedeného předpokladu,

$$\{\bar{q}(t)\}_m = \begin{bmatrix} \{v_L\}_m \\ \{v_i\}_m \end{bmatrix} \frac{1}{2i\eta_m\omega_m^2} [\{v_L^H\}_m \quad \{v_i^H\}_m] \mathbb{H}^H \mathbb{H} \begin{bmatrix} f_L \\ f_i \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$$\text{kde } \mathbb{H}^H \mathbb{H} = \begin{bmatrix} 2\mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{H}^H \mathbb{H} \begin{bmatrix} f_L \\ f_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2f_L \\ f_i \end{bmatrix} = \hat{f} = \hat{f}_0 e^{i\omega_b t}$$

Dále zavedeme parametr χ_m , který je dán vztahem (3.38) a definuje míru vybuditelnosti m -tého tvaru kmitu z pohledu afinity vlastního tvaru kmitu $\{v\}_m$ a budící síly.

$$\chi_m = \frac{\{v^H\}_m \hat{f}_0}{|\{v\}_m| |\hat{f}_0|} \quad (3.38)$$

Parametr χ_m může nabývat hodnot od 0 do 1. Pokud je $\chi_m=0$, pak vlastní tvar $\{v\}_m$ není možno vybudit danou budící silou (budící síla a vlastní tvar jsou vůči sobě ortogonální). Pokud je $\chi_m=1$, pak dojde k vybuzení vlastního tvaru $\{v\}_m$ v maximálně možné míře.

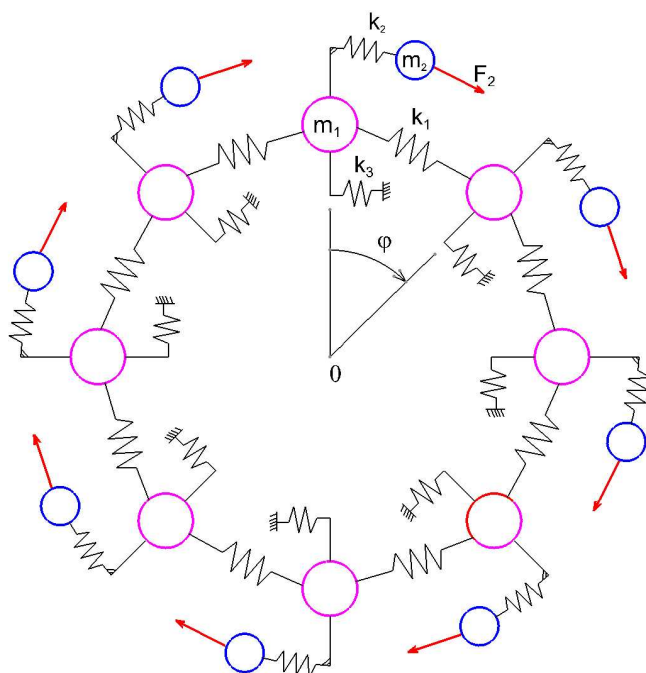
Hodnota parametru χ_m v praxi poslouží k rychlému posouzení nebezpečnosti vybuzení vlastních tvarů kmitů budící silou vyvolanou aerodynamickými silami na lopatku. Praktické použití je ukázáno v kapitole 3.6.

3.4 Aplikace rotačně periodické podmínky

3.4.1 Ověření na jednoduché rotačně periodické struktuře

Uvedený postup (kapitoly 3.2, 3.3) výpočtu modálních vlastností a vynuceného kmitání s využitím rotačně periodické podmínky byl naprogramován v prostředí Matlab. Problém vlastních hodnot je řešen pomocí vestavěné funkce *eigs*, která je založena na Lanczos metodě hledání vlastních hodnot.

Správnost odvození a také sestavení programu bude ověřena na jednoduché rotačně periodické struktuře, která je schématicky zobrazena na obrázku 3.7.



Obrázek 3.7: Rotačně periodická struktura

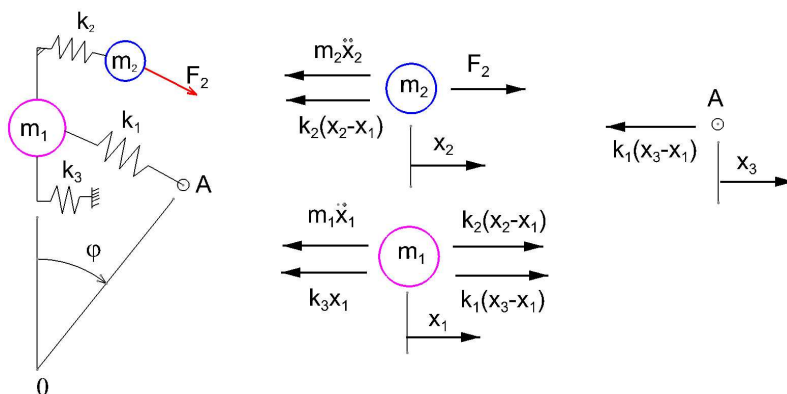
Námi analyzovaná rotačně periodická struktura je obecně tvořena n segmenty, kde každý segment je tvořen dvěma hmotnými body m_1 , m_2 , které jsou provázány pružinami k_1 , k_2 , k_3 . Uvažujeme, že každý hmotný bod má pouze jeden stupeň volnosti a to v obvodovém směru. Hmotné body m_2 struktury jsou harmonicky buzeny silou f_2 , která je po obvodě harmonicky rozložena. Takovouto strukturu je možné chápat jako zjednodušený model olopatkovaného disku, kde k_2 , m_2 resp. k_1 , m_1 reprezentují lopatku resp. disk, k_3 určuje tuhost mezi diskem a rotorem.

Cílem dále prezentovaných analýz je porovnání dvou přístupů výpočtu dynamického chování rotačně periodické struktury a ověření správného odvození vztahů v kapitolách 3.2, 3.3.

1. Dynamická analýza rotačně periodické struktury bez aplikace rotačně periodické podmínky - uvažován plný model
2. Dynamická analýza rotačně periodické struktury s aplikací rotačně periodické podmínky

Pro případ 1 sestavíme na základě D' Alembertova principu silovou rovnici rovnováhy pro každý hmotný bod a získáme tak pohybové rovnice pro celou rotačně periodickou strukturu. Detailnější informace ohledně sestavení rovnic jsou uvedeny v Příloze 7.3.

Pro případ 2 uvažujme pouze segment viz. obrázek 3.8. Předpokládejme, že hmotné body segmentu mají jeden stupeň volnosti a pohybují se pouze v obvodovém směru tj. posouvají se pouze po kružnicích se středem v bodě O. Posuvy x_1, x_2, x_3 jsou uvažovány v rovině struktury a reprezentují posuv v obvodovém směru.



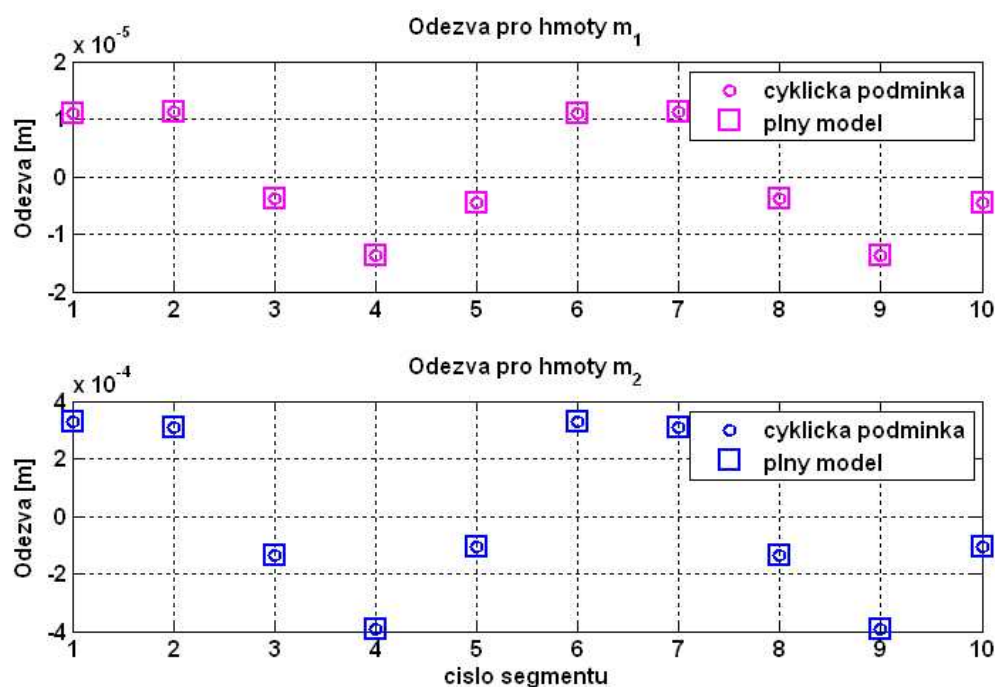
Obrázek 3.8: Segment rotačně periodické struktury

Sestavíme rovnice silové rovnováhy (3.39) pro jednotlivé hmotné body.

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + k_3 & -k_2 & -k_1 \\ -k_2 & k_2 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

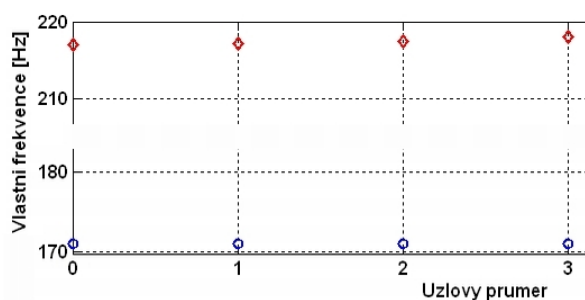
Využitím vztahů (3.6), (3.7), (3.30) a (3.31) můžeme stanovit ustálenou odezvu celé periodické struktury na buzení silou f_2 .

Pro zvolenou hodnotu $n = 10$ (počet segmentů) a pro zvolené hmotnosti a tuhosti m_i, k_i byly vyčísleny hodnoty odezev pro jednotlivé hmotné body a ty byly vyneseny do grafů 3.9 a to jak pro plný model, tak pro případ jednoho segmentu s rotačně periodickou podmínkou.



Obrázek 3.9: Odezva rotačně periodické struktury na harmonické buzení

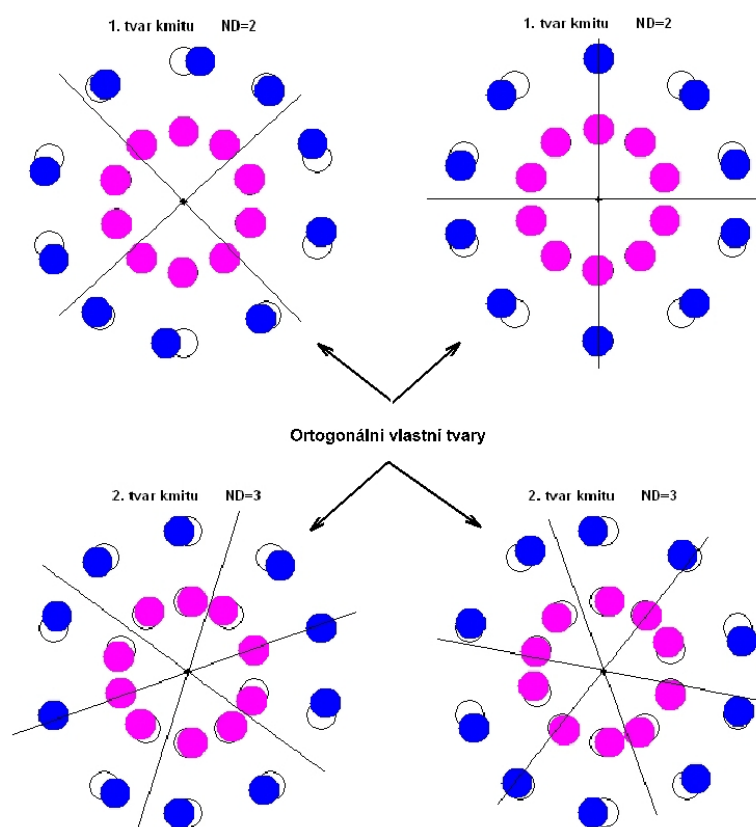
Z grafů 3.9 je zřejmé, že oba přístupy dávají shodné hodnoty odezev, čímž se podařilo ověřit správnost odvození dříve uvedených vztahů a zároveň naprogramovaného kódu pro řešení dynamického chování rotačně periodických struktur. Pro úplnost je nutné zmínit, že i hodnoty modálních vlastností byly prakticky shodné pro oba přístupy. Graf na obrázku 3.10 ukazuje závislost vlastních frekvencí na uzlových průměrech tzv. interferenční diagram. Je na něm vidět efekt mírného vyztužování struktury v závislosti na uzlových průměrech a to zejména pro druhou vlastní frekvenci.



Obrázek 3.10: Interferenční diagram pro rotačně periodickou strukturu (viz. obrázek 3.7)

Na obrázku 3.11 jsou ukázány příklady dvou vlastních tvarů analyzované struktury. Tvary v horní části resp. v dolní obrázku obsahují dva resp. tři uzlové průměry.

Pro každý tvar je zobrazena reálná a imaginární část. Tyto části jsou na sebe ortogonální, což je možné poznat mimo jiné tak, že uzlové čáry (průměry) u ortogonálních tvarů kmitu jsou vůči sobě otočeny o úhel $\pi/2$, je podělen počtem uzlových průměrů (např. pro dva uzlové průměry je natočení uzlových průměrů vůči sobě $\pi/4$). U prvního tvaru kmitu dominantně kmitají hmoty m_2 v porovnání s hmotou m_1 . Vlastní frekvence prvního tvaru kmitu se prakticky nemění v závislosti na počtu uzlových průměrech, jak je vidět na interferenčním diagramu, viz. obrázek 3.10. U druhého tvaru kmitu již kmitají i hmoty m_1 a vlastní frekvence tohoto 2. tvaru kmitu se již znatelně zvyšuje s rostoucím počtem uzlových průměrů.



Obrázek 3.11: Ukázka vlastních tvarů rotačně periodické struktury

Dílčí závěry

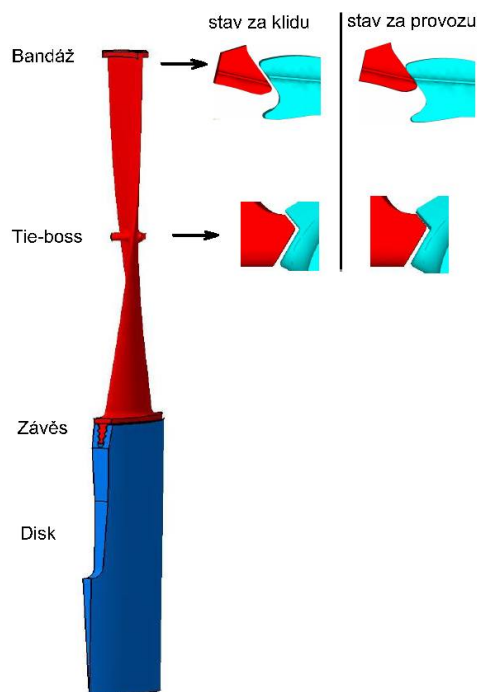
- Podařilo se ověřit správnost odvozených vztahů pro výpočet modálních vlastností a odezvy za použití rotačně periodické podmínky a to na základě porovnání výpočtu odezvy dvou modelů jednoduché rotačně periodické struktury. První model byl tzv. "plný" bez uvažování rotačně periodické podmínky a druhý model byl popsán jedním segmentem a rotačně periodickou podmínkou.
- Byla ověřena správnost naprogramování postupu výpočtu modálních vlastností a odezvy.

3.4.2 Modální analýza a vynucené kmitání koncové NT lopatky

Při vývoji nových koncových lopatek nízkotlakého stupně (NT) je kladena velká pozornost na správné odladění z pohledu násobků otáčkové frekvence. Pro nově vyvíjenou lopatku s vazebními členy bylo zapotřebí stanovit metodiku výpočtu jak vlastních frekvencí, tak výpočtu vynuceného kmitání.

Popis a funkce lopatky LSB48

List lopatky LSB48 je dlouhý 1220mm a má po délce proměnné profilování. Lopatka je osazena vazebními členy tj. bandáží v místě její špičky a dále tzv. tie-boss přibližně v polovině její délky. Za klidu v zamontovaném stavu existuje mezi vazebními členy sousedních lopatek definovaná vůle, jejíž hodnota se pohybuje v rozmezí 1mm až 1.5mm. Bandáž i tie-boss slouží jako výztužné vazební členy a zároveň plní funkci třecího tlumiče. Neopomenutelnou výhodou těchto vazebních členů ve fázi návrhu lopatky je možnost ladění jejich modálních vlastností na základě změny polohy a tvaru vazebních členů. Lopatka je k disku rotoru připevněna pomocí stromečkového závěsu viz obrázek 3.12. Vlastní lopatka je vyrobená z jednoho kusu materiálu jako výkovek, který je následně třískově obráběn na CNC obráběcích centrech. Funkční kontaktní plochy lopatky (závěs, vazební členy) vyžadují zvláštní pozornost při obrábění z důvodu vysokých požadavků na jejich rozměrovou a tvarovou přesnost.



Obrázek 3.12: Model lopatky LSB48

V důsledku působení odstředivé síly a toho, že středy krutu a těžiště jednotlivých profilů nejsou totožné, dochází k deplanaci jednotlivých řezů profilu a tím ke vzniku kroutícího momentu. Tento moment způsobuje nakroucení listu lopatky kolem myšlené spojnice středů jednotlivých profilů. Úhel rozkrutu na špičce listu bývá u takto dlouhých lopatek (cca 1000mm) bez vazebních členů až 6° . Při zvyšování otáček turbíny z 0 1/min na nominální otáčky dochází se zvyšujícími se otáčkami k přibližování kontaktních ploch vazebních členů a k vymezování vůle. Při předem nadefinovaných otáčkách nastane kontakt (zamčení) vazebních členů a tím se vytvoří po obvodu kontinuální vazba. Toto má za následek zvýšení tuhosti olopatkovaného kola, což vede k přeladění systému do oblasti vyšších frekvencí. Při návrhu lopatky se tohoto pozitivního efektu využívá, neboť se méně vlastních frekvencí nachází v nebezpečné nízkofrekvenční oblasti.

Tabulka 3.1: Mechanické vlastnosti materiálu lopatky a disku při 20°C

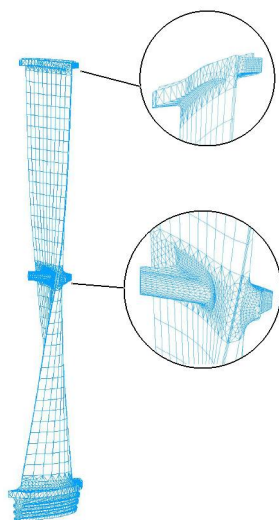
	Lopatka	Disk
Mez kluzu [MPa]	1130	850
Mez pevnosti [MPa]	1270	1000
Modul pružnosti [GPa]	196	205

Základní mechanické vlastnosti materiálu lopatky a disku jsou uvedeny v tabulce 3.1. Lopatka LSB48 je vyrobena z vysokopevnostní martenziticky precipitačně vytvrditelné oceli.

Modální analýza

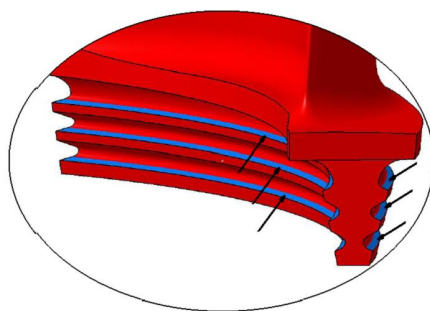
Modální analýza lopatky LSB48 byla provedena pomocí metody MKP. Nejprve byl model lopatky diskretizován pomocí kvadratický objemových prvků. Celá diskretizace modelu lopatky byla provedena v prostředí komerčního programu ANSYS. Ukázka objemové sítě je zobrazena na obrázku 3.13. Výstupem diskretizace jsou matice tuhosti a hmotnosti. Diskretizovaný model lopatky LSB48 obsahuje cca 30 tisíc uzlů a tedy cca 90 tisíc stupňů volnosti.

Obecně platí, že modální vlastnosti lopatek jsou ovlivňovány vlastním diskem, ke kterému jsou uchyceny, proto se mluví o modálních vlastnostech olopatkovaných disků. Existují však zvláštní případy, kdy disk do modálních vlastností lopatek prakticky nepromlouvá. To je v případě, pokud poddajnostní charakteristiky disku jsou oproti lopatkovým zanedbatelné, což většinou nastává u koncových NT lopatek. Pak není nutné při výpočtu modálních vlastností olopatkovaného disku uvažovat vliv disku, což má za následek nižší počet stupňů volnosti diskretizovaného modelu.



Obrázek 3.13: MKP model lopatky LSB48

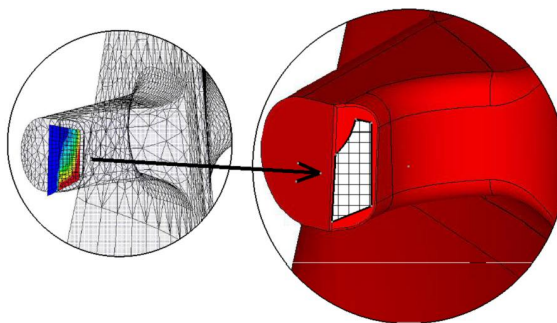
Nedílnou součástí výpočtu modálních vlastností lopatek je stanovení okrajových podmínek, neboť ty významně ovlivňují korektnost výsledných vlastních frekvencí. K tomu aby mohla být nalezena optimální okrajová podmínka reprezentující reálné uchycení lopatky v místě závěsu, bylo nutné provést mnoho výpočtových citlivostních analýz několika koncových lopatek. Na základě porovnání numericky vypočtených a naměřených vlastních frekvencí analyzovaných lopatek byla následně stanovena optimální okrajová podmínka. Ukázalo se, že jako optimální okrajová podmínka je uchycení kontaktních ploch závěsu viz. obrázek 3.14, kde je všem uzlům a jejím příslušejícím stupňům volnosti zabráněno v posuvu.



Obrázek 3.14: Okrajové podmínky na závěsu lopatky LSB48

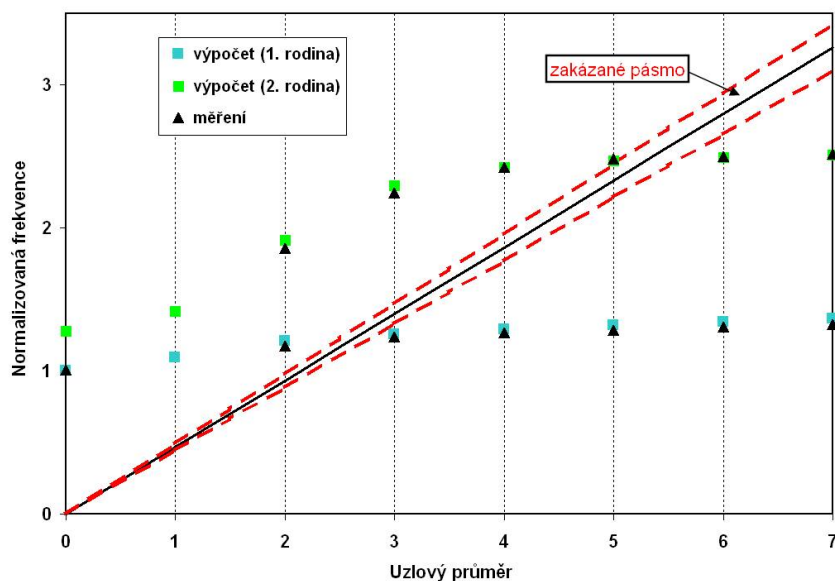
U lopatek s vazebními členy nejen okrajová podmínka v místě závěsu lopatky ovlivňuje modální vlastnosti, ale taktéž reprezentativní nahrazení kontaktního spojení vazebních členů významně promlouvá do správného nalezení modálních vlastností vázaných lopatek. Kontaktní vazba mezi vazebními členy vykazuje obecně nelineární vlastnosti, abychom mohli zjistit modální vlastnosti lopatky je nutné nejprve nahradit tuto nelineární vazbu vazbou lineární.

Nejprve bylo na základě statické nelineární analýzy stanoveno provázání sousedních lopatek v místě kontaktu vazebních členů. Cílem bylo stanovit mapu kontaktních tlaků v místě kontaktních ploch vazebních členů při provozním zatížení lopatek. Je zde zaveden předpoklad, že mapa kontaktních tlaků se nebude významně měnit z pohledu jejího tvaru při různém provozním zatížení. Tento předpoklad může být splněn v případě, že lopatka a vůle mezi vazebními členy jsou navrženy tak, aby kontaktní tlak byl dostatečně vysoký. Tento předpoklad je pro analyzovanou lopatku LSB48 splněn, což bylo ověřeno na základě výpočtů pro různé stavy zatížení (1. stav - lopatka nezatížená, 2. stav - lopatka zatížena maximálním provozním výkonem). Vzájemné provázání sousedních lopatek je realizováno pouze v místě skutečného dosednutí vazebních členů. Uzly kontaktních ploch, které jsou ve vzájemném dotyku, jsou provázány pomocí rotačně periodické podmínky symetrie (3.5). Příklad rozložení kontaktního tlaku v místě vazebního členu je ukázán na obrázku 3.15, kde je následně také zobrazena síť kontaktní plochy, která bude svázána se sousední lopatkou.



Obrázek 3.15: Mapa kontaktních tlaků a plocha provázání vazebního členu

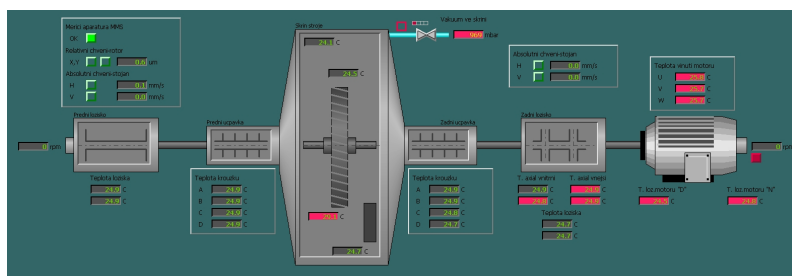
Výpočet modálních vlastností lopatky LSB48 proběhl v prostředí systému Ansys. Problém vlastních hodnot byl řešen pomocí algoritmu Block Lanczos. Výsledkem jsou vlastní frekvence a tvary, které se nacházejí v kritickém frekvenčním pásmu 0 až 350Hz. Ty jsou vyneseny do interferenčního diagramu viz . obrázek 3.16. Vlastní frekvence v grafu jsou normalizované vůči první frekvenci s nulovým počtem uzlových průměrů. Kritérium pro správné naladění lopatek je dáno tak, aby se žádná vlastní frekvence nenacházela v zakázaném pásmu, které je ohraničeno červenou čárkovanou čarou na obrázku 3.16. Toto kritérium říká, že vlastní frekvence musí být vzdáleny minimálně $\pm 5\%$ od násobků otáčkové frekvence (pro 1 až 7 násobek). Při návrhu lopatky LSB48 bylo provedeno několik desítek modifikací geometrie lopatky, než bylo docíleno splnění zmiňovaného kritéria. Modifikace se zejména týkaly tvarování a umístění tei-bossu, tvaru a tloušťky bandáže a dále změny tvaru vlastního listu lopatky. Finální konstrukční provedení lopatky LSB48 bylo následně vyrobeno a podrobena testům.



Obrázek 3.16: Interferenční diagram pro lopatku LSB48 za rotace (3000 1/min)

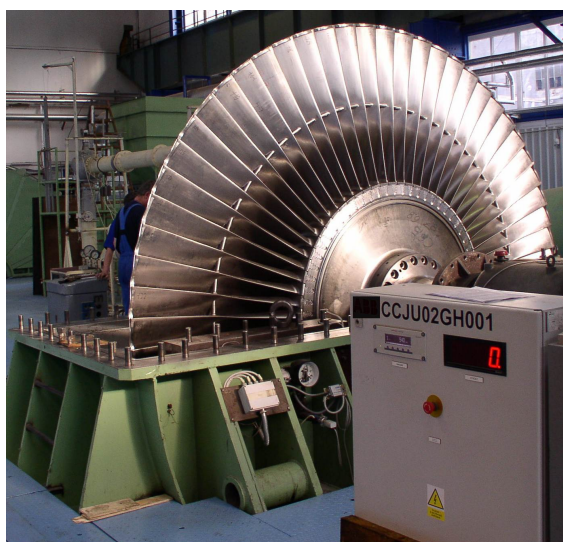
Experimentální ověření

Testy probíhaly na experimentálním standu, který je tvořen vakuovou komorou, pohonným zařízením, budícím systémem a vlastním olopatkovaným diskem viz. obrázek 3.17. Několik lopatek bylo osazeno velmi citlivými piezo-krytalickými tenzometry tak, aby bylo možné zaznamenat i velmi malé hodnoty vibrací. Tenzometry byly umístěny do referenčního místa, které se nachází cca 50mm nad patním profilem a cca 25mm od odtokové hrany na hřbetní části lopatky. Budícím systémem byl AC magnet umístěný ve vakuové komoře v těsné blízkosti lopatek. Tento AC magnet sloužil k vybuzení vlastních frekvencí olopatkovaného disku. Pomocí tzv. sweepování frekvence byly postupně buzeny jednotlivé vlastní frekvence s různými uzlovými průměry a na základě dříve odvozeného vztahu (2.52) byly identifikovány uzlové průměry vlastních tvarů.



Obrázek 3.17: Principiální schéma experimentálního standu

Hlavním cílem experimentálního měření lopatek LSB48 bylo ověření vlastních frekvencí za rotace při frekvenci otáčení 50Hz. Většinu vlastních frekvencí v pásmu 0-350Hz se podařilo vybudit jen kromě tří tvarů a to druhého vlastní tvaru s nultým uzlovým průměrem a obou tvarů s jedním uzlovým průměrem. Porovnání vypočtených a naměřených frekvencí je zobrazeno na obrázku 3.16. Experiment potvrdil, že existuje velmi dobrá shoda mezi výpočtovým model a skutečným dílem, což vypovídá o kvalitní metodice výpočtu modálních vlastností lopatky LSB48.



Obrázek 3.18: Experimentální stand s olopatkovaným diskem

Dílčí závěry

- Byla sestavena metodika pro zjištění modálních vlastností pro dlouhé vázané lopatky. Tato metodika je do jisté míry limitována konstrukčním návrhem lopatky, neboť je založena na lineárním chování kontaktní vazby během provozu. Vhodným návrhem vazebních členů lopatky lze tento předpoklad splnit.
- Porovnáním naměřených a vypočtených vlastních frekvencí se podařilo ověřit jednak korektní naladění lopatky LSB48 a dále metodiku výpočtu modálních vlastností vázaných lopatek. Experiment potvrdil, že existuje velmi dobrá shoda mezi výpočtovým modelem a skutečným dílem, neboť odchylky u naměřených a vypočtených vlastních frekvencí se pohybovaly do 3%.

3.5 Redukce počtu stupňů volnosti

Geometrie lopatek axiálních turbin je ve většině případech velmi komplexní a komplikovaná. Taktéž uchycení lopatky k disku či vazba mezi sousedními lopatkami vyžaduje přesný popis z výpočtového pohledu. Tyto zmiňované argumenty je nutné vzít v potaz při sestavování matematického modelu. Jako nejvhodnější se jeví použití diskretizace pomocí objemových prvků, které umožňují geometricky popsat i komplikované geometrie. Nevýhodou však je, že výsledný matematický model je výpočtově velmi náročný. Z tohoto důvodu je nutné přistoupit k redukci stupňů volnosti daného problému a to zejména v případě vynuceného kmitání, kdy je cílem zjistit např. amplitudo frekvenční charakteristiku v širokém frekvenčním pásmu a zároveň pro několik typů buzení z pohledu uzlových průměrů.

Z hlediska nebezpečnosti vlastních tvarů kmitu lopatek nás zejména zajímá několik nejnižších tvarů a frekvencí a proto jako jedna z vhodných metod pro redukci se jeví tzv. statická redukce - Guyanova. Tato metoda je založena na výběru tzv. master stupňů volnosti (DOF). Do těchto stupňů volnosti je pak kondenzována tuhost ostatních stupňů volnosti zvaných slave. Předpokládá se, že setrvačné účinky setrvačných hmot slave stupňů volnosti nejsou významné. Toto omezení je nutné brát v potaz při výběru master stupňů volnosti, tzn. přednostně volit master DOF v místech, kde je nejvíce koncentrována hmota struktury.

3.5.1 Guyanova metoda

Mějme matematický popis kmitání definovaný pohybovými rovnicemi (3.1) a předpokládejme, že silové účinky jsou aplikovány jak do master, tak do slave uzlů. Zobecněné posuvy master resp. slave DOF označíme q_m resp. q_s . Rovnici (3.1) po zanedbání gyroskopických účinků pak přepíšeme do tvaru (3.40).

$$\begin{bmatrix} \mathbb{M}_{mm} & \mathbb{M}_{ms} \\ \mathbb{M}_{sm} & \mathbb{M}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_m \\ \ddot{q}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{B}_{mm} & \mathbb{B}_{ms} \\ \mathbb{B}_{sm} & \mathbb{B}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_m \\ \dot{q}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{K}_{mm} & \mathbb{K}_{ms} \\ \mathbb{K}_{sm} & \mathbb{K}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_m \\ q_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_m \\ f_s \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Zanedbáním setrvačných a tlumících sil získáme tzv. rovnici kvazistatické rovnováhy (3.41).

$$\begin{bmatrix} \mathbb{K}_{mm} & \mathbb{K}_{ms} \\ \mathbb{K}_{sm} & \mathbb{K}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_m \\ q_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_m \\ f_s \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Ze soustavy rovnic (3.41) vyloučíme vektor zobecněných posuvů q_s .

$$q_s = \mathbb{K}_{ss}^{-1} (f_s - \mathbb{K}_{sm} q_m) \quad (3.42)$$

$$(\mathbb{K}_{mm} - \mathbb{K}_{ms} \mathbb{K}_{ss}^{-1} \mathbb{K}_{sm}) q_m = f_m - \mathbb{K}_{ms} \mathbb{K}_{ss}^{-1} f_s \quad , \quad (3.43)$$

Na základě rovnice (3.42) můžeme zapsat transformační vztah mezi vektory q a q_m .

$$q = \begin{bmatrix} q_m \\ q_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ -\mathbb{K}_{ss}^{-1}\mathbb{K}_{sm} \end{bmatrix} q_m + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{K}_{ss}^{-1} f_s \end{bmatrix} = T q_m + f_T \quad (3.44)$$

$$T = \begin{bmatrix} I \\ -\mathbb{K}_{ss}^{-1}\mathbb{K}_{sm} \end{bmatrix}, \quad f_T = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{K}_{ss}^{-1} f_s \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Nyní dosadíme substituční vztah (3.44) do rovnice (3.40) a získáme tak redukovanou soustavu,

$$\widehat{\mathbb{M}}\ddot{q} + \widehat{\mathbb{B}}\dot{q} + \widehat{\mathbb{K}}q = \widehat{f}(t) \quad (3.46)$$

kde

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{K}} &= \mathbb{K}_{mm} - \mathbb{K}_{ms}\mathbb{K}_{ss}^{-1}\mathbb{K}_{sm} \\ \widehat{\mathbb{M}} &= \mathbb{M}_{mm} - \mathbb{K}_{ms}\mathbb{K}_{ss}^{-1}\mathbb{M}_{sm} - \mathbb{M}_{ms}\mathbb{K}_{ss}^{-1}\mathbb{K}_{sm} + \mathbb{K}_{ms}\mathbb{K}_{ss}^{-1}\mathbb{M}_{ss}\mathbb{K}_{ss}^{-1}\mathbb{K}_{sm} \\ \widehat{\mathbb{B}} &= \mathbb{B}_{mm} - \mathbb{K}_{ms}\mathbb{K}_{ss}^{-1}\mathbb{B}_{sm} - \mathbb{B}_{ms}\mathbb{K}_{ss}^{-1}\mathbb{K}_{sm} + \mathbb{K}_{ms}\mathbb{K}_{ss}^{-1}\mathbb{B}_{ss}\mathbb{K}_{ss}^{-1} \\ \widehat{f} &= f_m - \mathbb{K}_{ms}\mathbb{K}_{ss}^{-1}f_s - \mathbb{M}_{ms}\mathbb{K}_{ss}^{-1}\ddot{f}_s - \mathbb{B}_{ms}\mathbb{K}_{ss}^{-1}\dot{f}_s \end{aligned} \quad (3.47)$$

Tato metoda redukce je aplikovatelná pro slabě tlumené soustavy, pokud je splněna podmínka

$$\|\mathbb{M}_{ss}\|, \|\mathbb{M}_{ms}\| \ll \|\mathbb{M}_{mm}\|.$$

Výše uvedený postup statické redukce je rozšířen o možnost aplikovat silové účinky i do slave uzlů, což je velmi praktické v případě zatížení lopatek tlakovým polem od pracovního média.

3.5.2 Aplikace statické redukce na lopatku LSB48

Metoda statické redukce byla aplikována na MKP model lopatky LSB48. Cílem bylo snížit počet stupňů volnosti daného modelu tak, aby následné dynamické analýzy probíhaly v krátkých časech v řádu několika minut nikoliv dnů.

Pokud použijeme plný model (DOF cca 95000) a rotačně periodickou podmínku, pak výpočet odezvy na harmonické buzení ve frekvenční oblasti pro vybraný uzlový průměr a danou frekvenci trvá na výkonném PC cca 1-2min. Výpočet odezvy lopatky v pásmu 50-400Hz s krokem 1Hz a pro několik uzlových průměrů např. 0 až 10 může pak trvat až 5 dní. V případě, že použijeme paralelní výpočtovou architekturu, pak se čas výpočtu sníží na několik desítek hodin, ale i to je stále nepřijatelné, pokud víme, že existuje možnost provedení výpočtu o několik řádů rychleji, při zachování akceptovatelné přesnosti výpočtu.

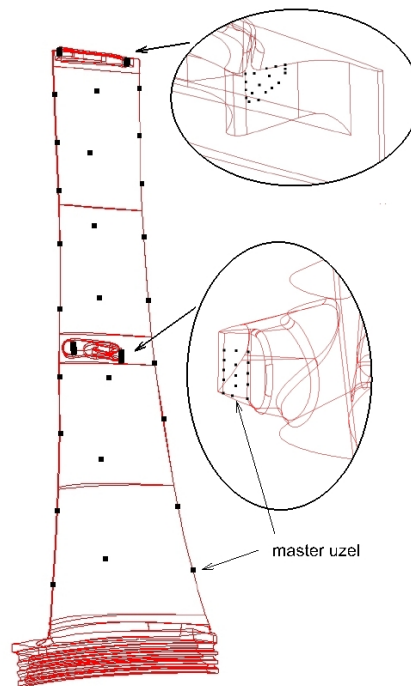
Metoda statické redukce (viz. kapitola 3.5.1) byla realizována v prostředí ANSYS. Jedním z důležitých cílů bylo dosáhnout podobných modálních vlastností plného a redukovaného modelu lopatky LSB48 v oblasti několika nejnižších vlastních frekvencí. Toho může být dosaženo jen za předpokladu správné volby master uzlů, a proto byla věnována jejich výběru zvýšená pozornost.

Na samotném listu lopatky (nikoliv na vazebních členech) bylo vybráno 25 master uzlů, jak je naznačeno na obrázku 3.19. U každého z těchto uzlů byly uvažovány tři stupně volnosti. Ukázalo se, že pro volnou lopatku bez vazebních členů je výběr 75DOFs dostatečný za předpokladu, že jsou zvoleny přibližně v místech, jak naznačuje obrázek 3.19. Porovnání vlastních frekvencí je v tabulce 3.2 a relativní rozdíl příslušejících si frekvencí se pohybuje do 2%.

Tabulka 3.2: Porovnání vlastních frekvencí samotné lopatky LSB48

	f1[Hz]	f2[Hz]	f3[Hz]	f4[Hz]	f5[Hz]	f6[Hz]
Plný model	84,6	133,3	179,6	260,0	326,5	397,2
Redukovaný model	85,2	133,1	180,5	261,6	328,4	404,9

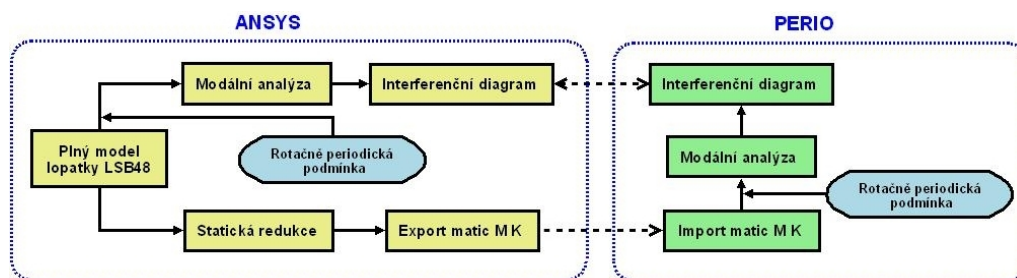
Pokud je však lopatka osazena vazebními členy, které vytvářejí vazbu mezi lopatkami, pak je nutné tuto vazbu, resp. tuhost vazby relativně přesně postihnout. Toho lze docílit pouze výběrem dalších master uzlů v místech, kde je realizován kontakt lopatek. V případě lopatky LSB48 muselo být zvoleno dalších 15 resp. 18 master uzlů na každé straně tie-bossu resp. bandáže tak, jak je možno vidět na detailu obrázku 3.19. Výběr master uzlů na obou stranách kontaktních členů musel být proveden s ohledem na možnou aplikaci rotačně periodické podmínky (3.5) tzn. odpovídající si uzly na *Hranici L* a na *Hranici H* musejí být vůči sobě posunuty o úhel φ (viz. obrázek 3.1). Výsledný redukovaný model lopatky obsahoval 91master uzlů, což ve výsledku znamená snížení počtu stupňů volnosti z původních 95000 u plného modelu na pouhých $3 \times 91 = 273$ DOFs u redukovaného modelu.



Obrázek 3.19: Výběr master uzlů na lopatce LSB48

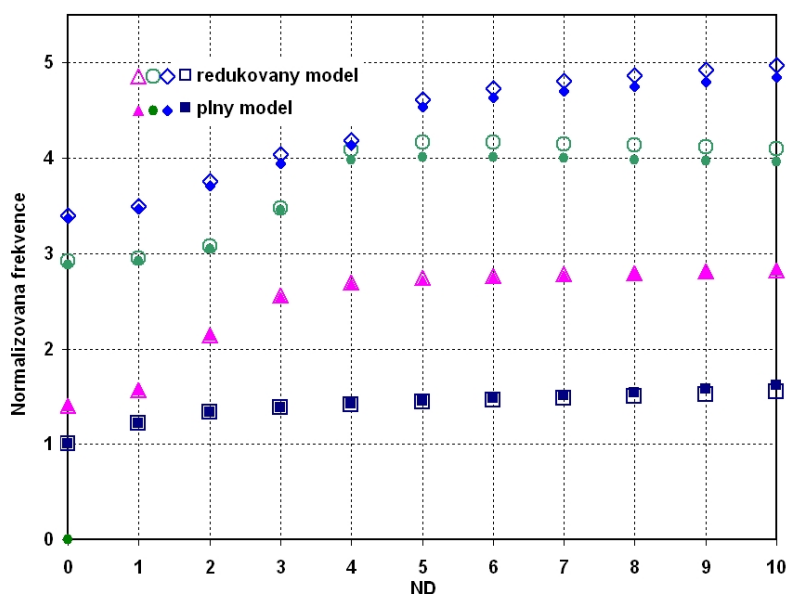
Jak již bylo zmíněno v úvodu kapitoly 3.4, byl sestaven v prostředí MATLAB programový nástroj nazvaný PERIO, který umožňuje analyzovat modální vlastnosti rotačně periodických struktur s využitím rotačně periodické podmínky. Tento programový nástroj byl používán k výpočtu modálních vlastností redukovaného modelu olopatkovaného kola. K ověření korektnosti redukovaného modelu byl zvolen postup, kdy jsou vzájemně porovnávány interferenční diagramy a to redukovaného modelu a plného modelu tak, jak je naznačeno na obrázku 3.20. Dále byly pro ilustraci vykresleny některé tvary kmitu a to pomocí modulu, který je součástí programu PERIO. Na obrázku 3.23 jsou zobrazeny první vlastní tvary olopatkovaného kola s jedním uzlovým průměrem, jeden tvar odpovídá reálné složce a druhý imaginární složce vlastního vektoru. Tyto dva tvary jsou vůči sobě ortogonální, jak je možné vidět ze vzájemného natočení uzlových průměrů obou tvarů (svírají úhel $\pi/2$).

Tvar kmitu na obrázku 3.24 odpovídá prvnímu ohybovému tvaru lopatky, kde vlastní tvar celého olopatkovaného kola obsahuje tři uzlové průměry. Je zajímavé, že vlastní tvary kmitání lopatek obsahují obě složky posuvů a to jak obvodovou, tak axiální, což je způsobeno natočením hlavních os odporu v ohybu profilů vůči rovině kolmé k ose rotace. Z porovnání velikostí obou složek posuvů je vidět, že lopatka kmitá u 1. tvaru kmitu dominantně v axiálním směru, což je dáno tím, že horní část profilů listu již má deskový tvar, jehož minimální osa odporu v ohybu je téměř paralelní s rovinou kolmou k ose rotace. Podobně jako první tvar kmitu tak i druhý tvar kmitu dominantně kmitá v axiálním směru viz. obrázek 3.25, kde již je však možno pozorovat uzlovou kružnici a to v místě těsně pod špičkou listu lopatky.



Obrázek 3.20: Schématický postup porovnání modálních vlastností plného a redukovaného modelu

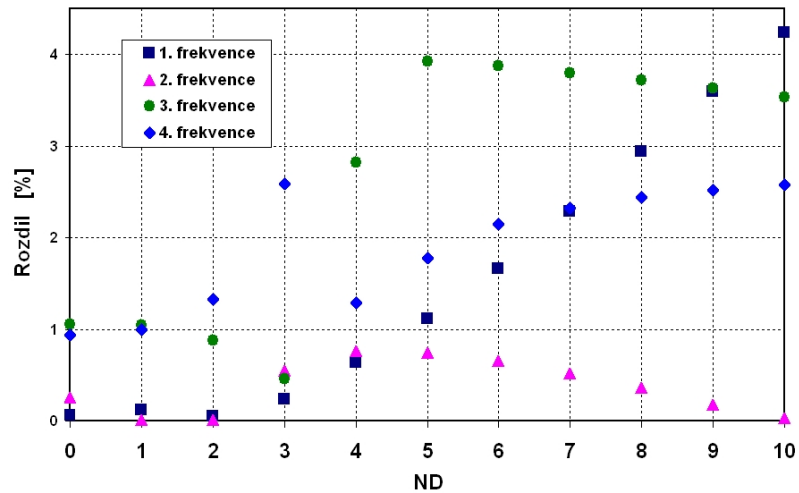
Porovnání prvních čtyř vlastních frekvencí ve formě interferenčního diagramu je zobrazeno na obrázku 3.21. Vlastní frekvence v grafu jsou normalizované vůči první frekvenci s nulovým počtem uzlových průměrů. Relativní rozdíly sobě odpovídajících si vlastních frekvencí v závislosti na uzlových průměrech jsou zobrazeny na obrázku 3.22. Tyto relativní rozdíly obou modelů prakticky nepřesahují hodnotu 4% v pásmu uzlových průměrů 0 až 7, což pro další výpočtové analýzy je dostačující shoda, neboť nás více bude zajímat trend dynamického chování lopatky než např. přesná hodnota odezvy.



Obrázek 3.21: Porovnání vlastních frekvencí plného modelu a redukovaného modelu lopatky LSB48

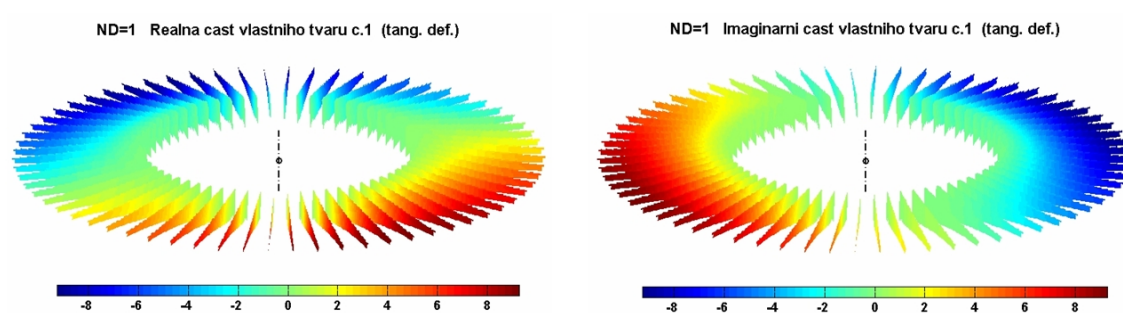
Dále byla zkoumána citlivost modálních vlastností redukovaného modelu na volbu master uzlů a to zejména v oblasti kontaktu vazebních členů. Ukázalo se, že právě volba těchto master uzlů má významný vliv na vlastní frekvence celého olopatko-

vaného kola a tento vliv roste s narůstajícím počtem uzlových průměrů vlastního tvaru. Relativní rozdíly vlastních frekvencí plného a redukovaného modelu mohou dosahovat až několik desítek procent, jak bylo zjištěno pro případ ne zcela optimální volby master uzlů. Na základě tohoto zjištění je tedy vždy nutné verifikovat korektnost redukovaného modelu.

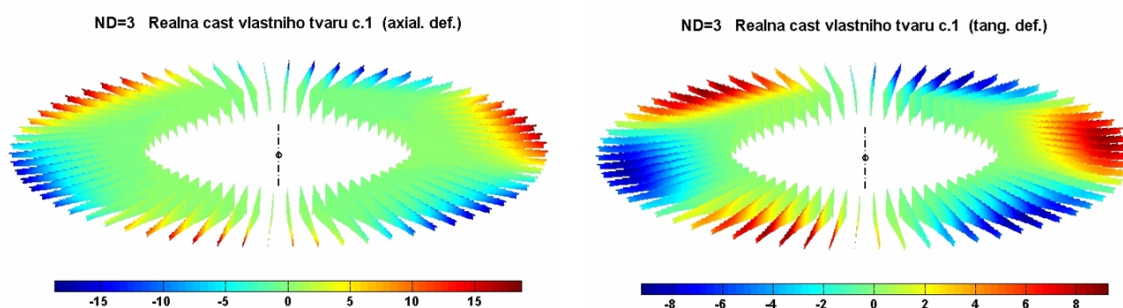


Obrázek 3.22: Relativní rozdíl vlastních frekvencí plného modelu a redukovaného modelu lopatky LSB48

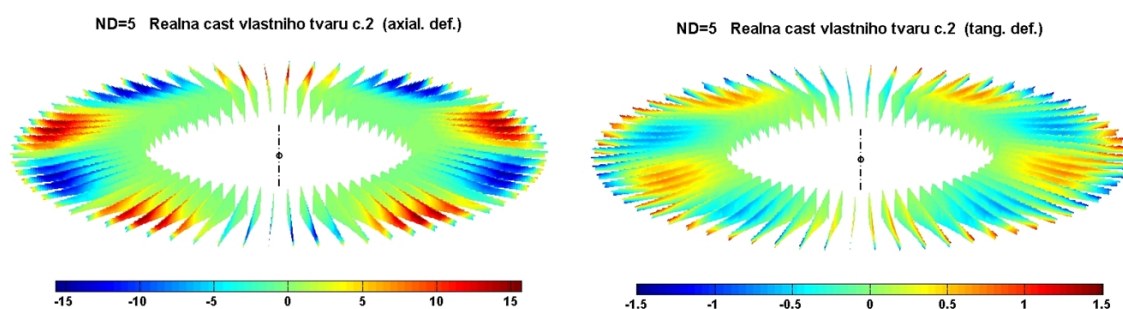
Program PERIO využívá pro výpočet modálních vlastností rotačně periodických struktur matice hmotnosti \mathbb{M} a tuhosti \mathbb{K} , příslušející jednomu segmentu struktury (např. jedné lopatce). Vlastní program neumožňuje sestavení těchto matic, avšak tyto matice mohou být sestaveny např. v prostředí ANSYS a dále pak exportovány do textových souborů v tzv. Harwell-Boeing (HB) formátu. V rámci programu PERIO bylo vytvořeno rozhraní, jenž umožňuje načítání matic \mathbb{M} a \mathbb{K} ve formátu HB. Pomocí tohoto programu je pak možné řešit nejen problematiku modálních vlastností, ale i vynuceného kmitání rotačně periodických struktur, jak je prezentováno v kapitolách 3.2 a 3.3.



Obrázek 3.23: 1. Vlastní tvar kmitu olopatkovaného kola LSB48 (1 uzlový průměr)



Obrázek 3.24: 1. Vlastní tvar kmitu olopatkovaného kola LSB48 (3 uzlové průměry)



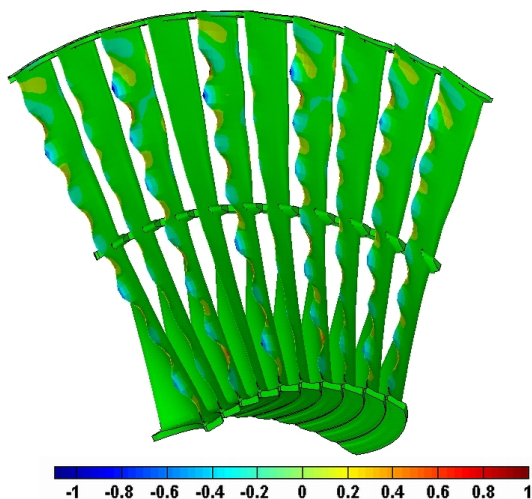
Obrázek 3.25: 2. Vlastní tvar kmitu olopatkovaného kola LSB48 (5 uzlových průměrů)

Dílčí závěry

- Byla ověřena možnost použití statické redukce za účelem významného snížení počtu stupňů volnosti lopatky s vazebními členy. Je však nutná správná volba master uzlů (stupňů volnosti) a to jak v oblasti listu, tak zejména v oblasti kontaktních ploch vazebních členů.
- Nově vyvinutý program PERIO je možné využívat jako rychlý nástroj pro výpočet modálních vlastností olopatkovaných kol a ty následně zobrazit ve formě interferenčního diagramu. Program dále umožňuje grafické znázornění vlastních tvarů kmitu.

3.6 Harmonická analýza lopatky LSB48

V úvodní kapitole 1.1.2 bylo zmíněno, jak problematické je stanovení skutečného buzení lopatek, pomineme-li buzení vyvolané nerovnoměrností tlakového pole za rozváděcí mříží, které je možno predikovat s dostatečnou mírou přesnosti pomocí numerické simulace (CFD). V případě dlouhých koncových NT lopatek není buzení od počtu rozváděcích lopatek nebezpečné. Důvodem je fakt, že budící frekvence se nachází v oblasti vysokých vlastních tvarů lopatky a tudíž tyto tvary jsou již velmi tvarově komplikované a tedy špatně vybuditelné. Pro představu u lopatky LSB 48 je 48 rozváděcích lopatek, čemuž odpovídá budící frekvence 2400Hz (frekvence otáčení 50Hz) a poblíž ní se nachází 34. vlastní tvar viz. obrázek 3.26. Je vidět, že u lopatek kmitají pouze části odtokových hran. Pokud budeme uvažovat, že amplituda budící síly $F(r)$ je po výšce lopatky přibližně konstantní, pak dle vztahu (3.38) bude tvarový parametr χ_k velmi malý blížící se nule.



Obrázek 3.26: 34. vlastní tvar kmitu s 18 uzlovými průměry a frekvencí 2440Hz (výřez olopatkovaného disku s deseti lopatkami LSB48 - axiální posuv)

Z provozní praxe je však naopak známo, že nejnižší vlastní tvary kmitu dlouhých lopatek jsou nebezpečné, neboť jsou snadno vybuditelné a to násobky otáčkové frekvence, proto se vyžaduje dostatečný odstup vlastních frekvencí od násobků 1 až 7 (případně 8) frekvence otáčení. Důvodem je vyvarovat se synchronnímu kmitání se zmiňovanými násobky, což je dáno faktem, že v průtočné části před a za lopatkou se mohou vyskytovat nerovnoměrná tlaková pole způsobená různými konstrukčními prvky (dělicí rovina, výstužná žebra, odběrová potrubí, atd.), která mohou být potenciálním zdrojem buzení. Z praxe jsou však známy případy, kdy je lopatka naladěná v těsné blízkosti 5-té harmonické frekvence a přesto nevykazuje zvýšené vibrace. Důvod je ten, že není přítomen takový zdroj buzení, který by danou vlastní frekvenci vybudil. Tuto zkušenost však nelze zobecnit.

Byla provedena výpočtová studie, která měla za cíl zjistit, jaké uzlové průměry a tvary kmitu jsou nejnázřejší vybuditelné. Cílem bylo porovnat vůči sobě rezonační amplitudy kmitání při jednotkovém buzení lopatky LSB48 rovnoměrně rozloženém po její délce. Pro výpočet dynamických odezev byl použit redukovaný MKP model lopatky LSB48 viz. kapitola 3.5.2. Postupně pro jednotlivé uzlové průměry 0 až 10 byla analyzována dynamická odezva na harmonické buzení ve frekvenčním pásmu 80 až 440Hz s krokem 0.5Hz. To ve skutečnosti obnáší provedení cca 8000 harmonických analýz. Krokování frekvence 0.5Hz je velmi hrubé na to, aby vystihlo rezonační vrcholy amplitudo-frekvenčních charakteristik pro případ, kdy tlumení soustavy bude nízké (poměrný útlum cca 0.1%). Pro účely výpočtové studie bylo tlumení uměle navýšeno na hodnotu 1% kritického tlumení, což má za následek snížení rezonačních amplitud odezvy přibližně 10x oproti reálnému stavu. To s sebou přináší, že rezonační vrcholy amplitudo-frekvenčních charakteristik budou více ploché a lépe prokresleny (vystiženy vrcholy) při větším krokování budící frekvence. Byla přibližně určena maximální chyba, jaké se dopustíme při výpočtu rezonační amplitudy při krokování 0.5Hz. Největší nepřesnosti při určení rezonačních amplitud mohou vzniknout v oblasti spodního frekvenčního pásma tj. kolem 80Hz.

Chybu výpočtu vlivem krokování určíme na základě známého vzorce pro výpočet odezvy jednohmotového oscilátoru,

$$u = \frac{u_{\text{stat}}}{\sqrt{(1 - \xi^2)^2 + (2\eta\xi)^2}} \quad (3.48)$$

kde ξ je poměrná frekvence, η je poměrný útlum a u_{stat} je statická výchylka. Pokud předpokládáme, že nejnižší vlastní frekvence je v okolí 100Hz a krokování frekvence je 0.5Hz, pak se bude jedna poměrná frekvence ξ vždy nacházet v pásmu $\langle 0.9975, 1.0025 \rangle$. Dosazením těchto poměrných frekvencí do vztahu (3.48) získáme odezvy a ty pak porovnáme vůči rezonačnímu stavu. V tabulce 3.3 jsou uvedeny dva případy pro dva různé poměrné útlumy. Pro poměrný útlum 1% je maximální chyba v určení rezonační amplitudy 3.2%, což je pro naše účely akceptovatelné, ale pro 10 krát nižší útlum tj. 0.1% může chyba dosáhnout až 63%.

Tabulka 3.3: Poklesy odezev v závislosti na poměrné frekvenci a poměrném útlumu

	$\eta = 0.01$		$\eta = 0.001$	
	amplituda u ($\times u_{\text{stat}}$)	pokles	amplituda u ($\times u_{\text{stat}}$)	pokles
$\xi = 1$	50	-	500	-
$\xi = 1.0025$	48.39	3.2%	185.5	63%
$\xi = 0.9975$	48.63	2.8%	186.0	63%

To, že byl poměrný útlum uměle snížen, nijak nedegraduje provedenou studii, neboť ta nemá za cíl zjišťovat absolutní hodnoty rezonačních amplitud, ale je zaměřena

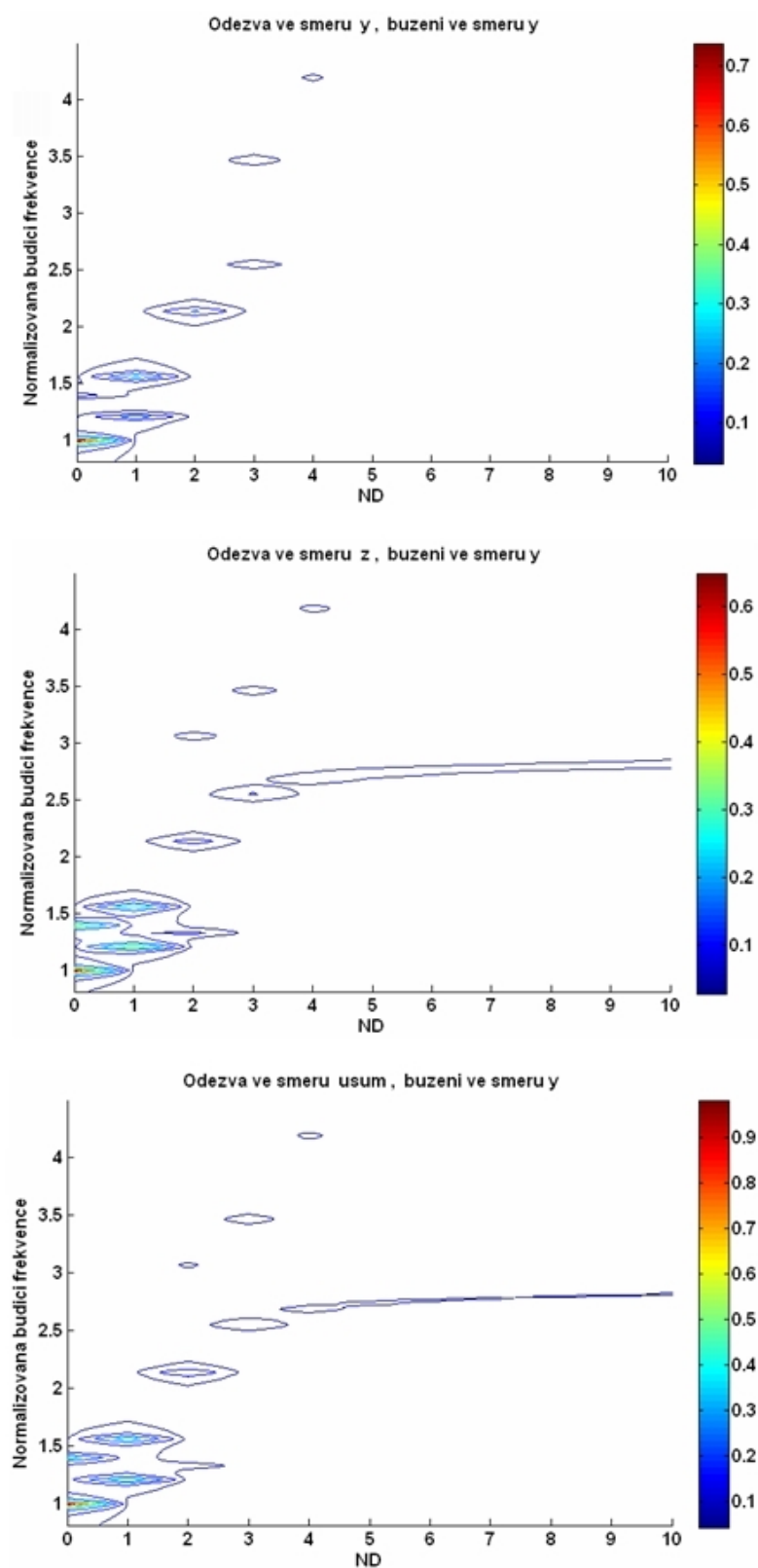
na relativní poměření vypočtených rezonačních amplitud. Tato studie ukazuje jeden z možných způsobů, jak zmapovat míru vybuditelnosti jednotlivých tvarů kmitu lopatek.

Olopatkované kolo s LSB48 bylo buzeno ve dvou směrech odděleně a to ve směru axiálním (směr osy otáčení) resp. ve směru obvodovém. Tomu pak odpovídají odezvy na obrázku 3.27 resp. 3.28. Pro každý směr buzení jsou zobrazeny odezvy ve směru axiálním (směr z), ve směru tangenciálním (směr y) a celková odezva (usum).

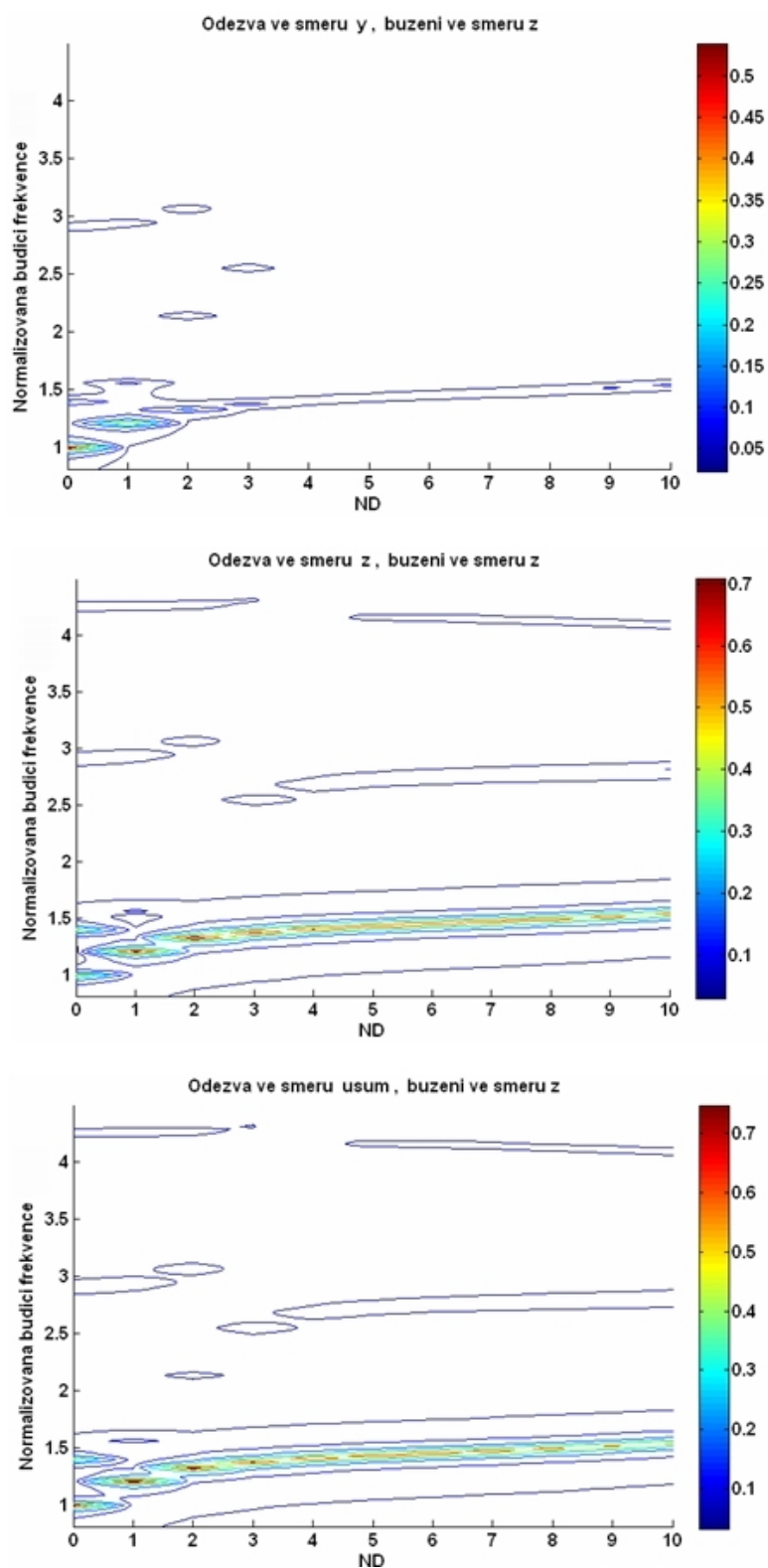
U obou směrů buzení se vyskytuje největší odezva u prvního tvaru kmitu s nultým a jedním uzlovým průměrem. Nultý uzlový průměr může být v praxi zejména vybuzen torzním kmitáním rotoru, na toto téma je podrobně zaměřena kapitola 4. V případě prvního uzlového průměru není třeba se obávat, že bude vybuzen ať již za provozu či při najíždění turbíny na nominální otáčky, neboť hodnota vlastní frekvence u tohoto tvaru kmitu je kolem 120Hz při 3000 ot/min. Dále víme na základě numericky zjištěného Campbellova diagramu (není prezentován v této práci), že otáčková frekvence je vždy významně nižší než vlastní frekvence tvaru kmitu s jedním uzlovým průměrem, což je důležité poznamenat vzhledem k významnému dynamickému vyztužení od odstředivých sil.

Při buzení v axiálním směru dochází k dominantnímu kmitání v axiálním směru, což lze vysvětlit tím , že je lopatka v tomto směru nejméně tuhá. Naopak při buzení lopatek v obvodovém směru lopatky axiálně u prvního tvaru kmitu prakticky nekmitají, vyjma několika prvních uzlových průměrů. Souhrnně lze říci, že se vzrůstajícím počtem uzlových průměrů amplitudy klesají a kmitání se projevuje zejména u prvního tvaru kmitu (první rodiny tvarů kmitu).

Vizualizace odezev na obrázcích 3.27 resp. 3.28 není zcela korektní, neboť odezvy jsou zobrazeny jako spojité v závislosti na počtu uzlových průměrů, na druhou stranu toto zobrazení se jeví autorovi jako nejvíce názorné. Barevná škála isochar odezev je odstupňována progresivně tak, aby byly znázorněny i nižší hladiny amplitud. Budící frekvence v grafu jsou normalizované vůči první vlastní frekvenci s nultým počtem uzlových průměrů.

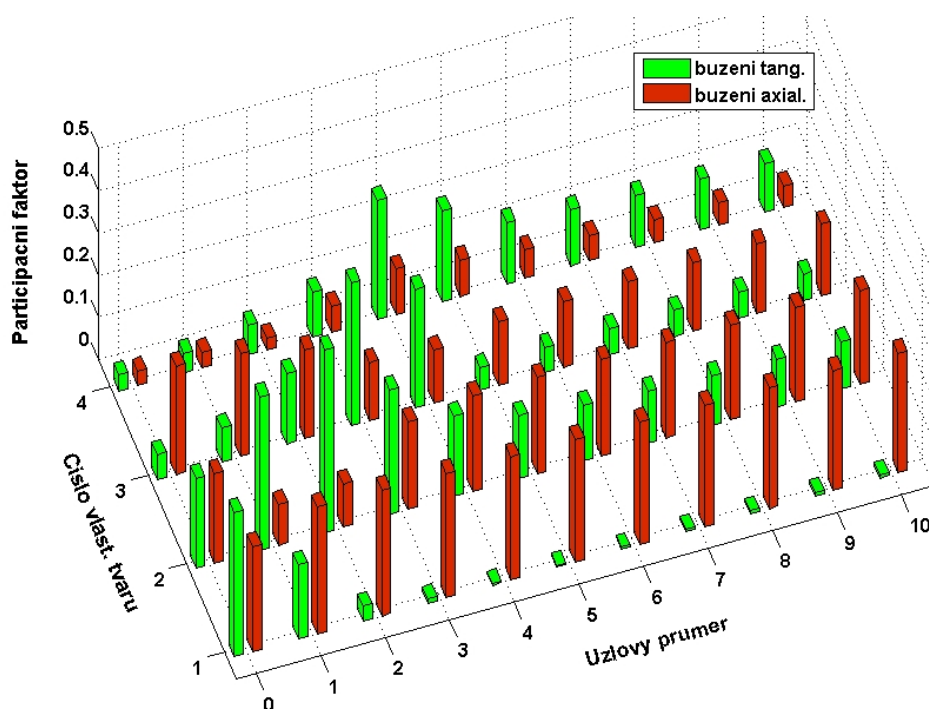


Obrázek 3.27: Amplitudy odezvy [mm] lopatky LSB48 na harmonické buzení silou ve směru obvodovém (směr y)



Obrázek 3.28: Amplitudy odezvy [mm] lopatky LSB48 na harmonické buzení silou ve směru axiálním (směr z)

V kapitole 3.3.3 byl odvozen vztah (3.38) pro výpočet parametru χ (participační faktor), který umožňuje posoudit míru vybuditelnosti jednotlivých vlastních tvarů v závislosti na počtu uzlových průměrů. Pro dvě různé budící síly (lišící se směrem) aplikované na lopatku LSB48 byl stanoven parametr χ . Závislost tohoto parametru na vlastním tvaru kmitu, počtu uzlových průměrů a směru budící síly je vynesena do grafu na obrázku 3.29. Porovnáním grafů na obrázcích 3.27 a 3.28 s grafem 3.29 je vidět značná shoda v míře vybuditelnosti vlastních tvarů, což bylo záměrem tohoto ověření. Z toho plyne možnost do budoucna hodnotit vlastní tvary kmitu z pohledu jejich vybuditelnosti na základě parametru χ , což je výpočtově méně náročné.



Obrázek 3.29: Participační faktor v závislosti na vlastním tvaru, počtu uzlových průměrů a směru budící síly pro lopatku LSB48

Dílčí závěry

- Při rovnoměrně rozloženém buzení po délce lopatky dochází k dominantnímu vybudění první rodiny vlastních tvarů kmitu a to zejména při axiálním směru buzení. Amplitudy celkové odezvy se mírně snižují s narůstajícím počtem uzlových průměrů.
- Parametr vybuditelnosti χ může být používán jako vhodný nástroj pro posuzování míry vybuditelnosti vlastního tvaru kmitu. Výhodou je jeho nízká výpočetní náročnost v porovnání s výpočtem celkové odezvy.

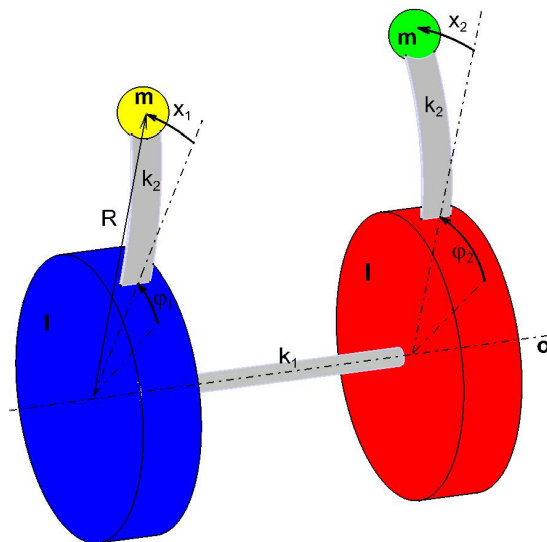
3.7 Závěry - Rotačně periodická struktura

- Byly odvozeny vztahy pro stanovení modálních vlastností a odezev rotačně periodických struktur při použití rotačně periodické podmínky. Byly uvažovány dva typy buzení: 1. Harmonické buzení silou periodicky rozloženou v obvodovém směru 2. Harmonické buzení silou obecně rozloženou.
- Podařilo se ověřit správnost odvozených vztahů pro výpočet modálních vlastností a odezvy za použití rotačně periodické podmínky a to na základě porovnání výpočtu odezev dvou modelů jednoduché rotačně periodické struktury. První model byl tzv. "plný" bez uvažování periodické podmínky a druhý model byl popsán jedním segmentem a periodickou podmínkou. Dále byla ověřena správnost naprogramování postupu výpočtu modálních vlastností a odezvy.
- Nově vyvinutý program PERIO je možné využívat jako rychlý nástroj pro výpočet modálních vlastností olopatkovaných kol a ty následně zobrazit ve formě interferenčního diagramu, dále umožňuje grafické znázornění vlastních tvarů kmitu.
- Byla sestavena metodika výpočtu modálních vlastností pro dlouhé vázané lopatky. Tato metodika je do jisté míry limitována konstrukčním návrhem lopatky, neboť je založena na lineárním chování kontaktní vazby během provozu. Z pohledu nominálního provozu těchto typů lopatek není však nelineární chování žádoucí. Vhodným návrhem vazebních členů lopatky lze tento předpoklad splnit.
- Porovnáním naměřených a vypočtených vlastních frekvencí se podařilo ověřit jednak korektní naladění lopatky LSB48 a dále metodiku výpočtu modálních vlastností vázaných lopatek. Experiment potvrdil, že existuje velmi dobrá shoda mezi výpočtovým modelem a skutečným dílem, neboť odchylky u naměřených a vypočtených vlastních frekvencí se pohybovaly do 3%.
- Byla ověřena možnost použití statické redukce za účelem významného snížení počtu stupňů volnosti lopatky s vazebními členy. Je však nutná správná volba master uzlů (stupňů volnosti) a to jak v oblasti listu, tak zejména v oblasti kontaktních ploch vazebních členů. Redukovaný model může sloužit např. pro parametrické studie chování lopatek.
- Pro posuzování míry vybuditelnosti vlastního tvaru kmitu byl zaveden parametr vybuditelnosti χ . Jeho výhodou je nízká výpočetní náročnost v porovnání s výpočtem celkové odezvy.

4 Vzájemná interakce lopatek a rotoru z pohledu torzního kmitání

4.1 Princip interakce lopatek a rotoru z pohledu torzního kmitání

Princip vzájemné interakce lopatek a rotoru bude prezentován na jednoduchém modelu, který má čtyři stupně volnosti a reprezentuje dvojdisk osazený lopatkami viz. obrázek 4.1. Každý z disků má jeden stupeň volnosti, kterým je natočení disku kolem osy o . Disk je charakterizován svým moment setrvačnosti I k ose rotace o . Oba disky jsou vzájemně propojeny torzní pružinou o tuhosti k_1 . Lopatky jsou reprezentovány hmotným bodem o hmotnosti m a ohybovou tuhostí k_2 a to za předpokladu, že je uvažováno soufázné kmitání všech lopatek na disku.



Obrázek 4.1: Zjednodušený model rotoru s lopatkami

Dynamické chování vyšetřovaného modelu popíšeme pomocí pohybových rovnic, které sestavíme na základě Lagrangeových rovnic druhého druhu,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = f_i \quad \text{pro } i = 1, 2, 3, 4 \quad (4.1)$$

kde $q_i = [x_1, x_2, \varphi_1, \varphi_2]^T$ je vektor zobecněných souřadnic a f_i je vektor zobecněných sil. Sestavíme vztahy (4.2) pro kinetickou a potenciální energii:

$$E_k = \frac{1}{2} m (R\dot{\varphi}_1 + \dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2} m (R\dot{\varphi}_2 + \dot{x}_2)^2 + \frac{1}{2} I \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} I \dot{\varphi}_2^2 \quad (4.2)$$

$$E_p = \frac{1}{2}k_2x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2 + \frac{1}{2}k_1(\varphi_1 - \varphi_2)^2$$

Dosazením vztahů (4.2) pro kinetickou a potenciální energii do rovnice (4.1), získáme pohybovou rovnici (4.3) pro analyzovaný mechanický systém.

$$\begin{bmatrix} m & 0 & mR & 0 \\ 0 & m & 0 & mR \\ mR & 0 & I + mR^2 & 0 \\ 0 & mR & 0 & I + mR^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_1 & -k_1 \\ 0 & 0 & -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$\mathbb{M}\ddot{q} + \mathbb{K}q = 0 \quad (4.4)$$

Rovnice (4.3) resp. (4.4) popisují volné kmitání dvojdisku s lopatkami.

4.1.1 Modální vlastnosti dvojdisku s lopatkami

K získání modálních vlastností analyzovaného systému budeme řešit problém vlastních hodnot (4.5)

$$(\mathbb{K} - \lambda^2\mathbb{M})v = 0 \quad (4.5)$$

Analytickým vyřešením (4.5) získáme vlastní frekvence λ .

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \bar{\omega}_1 \sqrt{\frac{1}{2}(\eta + 1 + \gamma^2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(1 - \gamma^2)^2 + 2\eta + (\eta)^2 + 2\eta\gamma^2}} \\ \lambda_3 &= \bar{\omega}_1 \sqrt{\eta + 1} \\ \lambda_4 &= 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

kde

$$\eta = \frac{mR^2}{I}, \quad \gamma = \frac{\bar{\omega}_2}{\bar{\omega}_1}, \quad \bar{\omega}_1 = \sqrt{\frac{k_2}{m}}, \quad \bar{\omega}_2 = \sqrt{\frac{2k_1}{I}}, \quad \delta = \frac{k_1}{R^2k_2} = \frac{\gamma^2}{2\eta}$$

$\bar{\omega}_1$ odpovídá vlastní frekvenci samotné lopatky a $\bar{\omega}_2$ vlastní frekvenci samotného dvojdisku. Znaménko + v (4.6) je přiřazeno vlastní frekvenci λ_1 a znaménko - nižší vlastní frekvenci λ_2 .

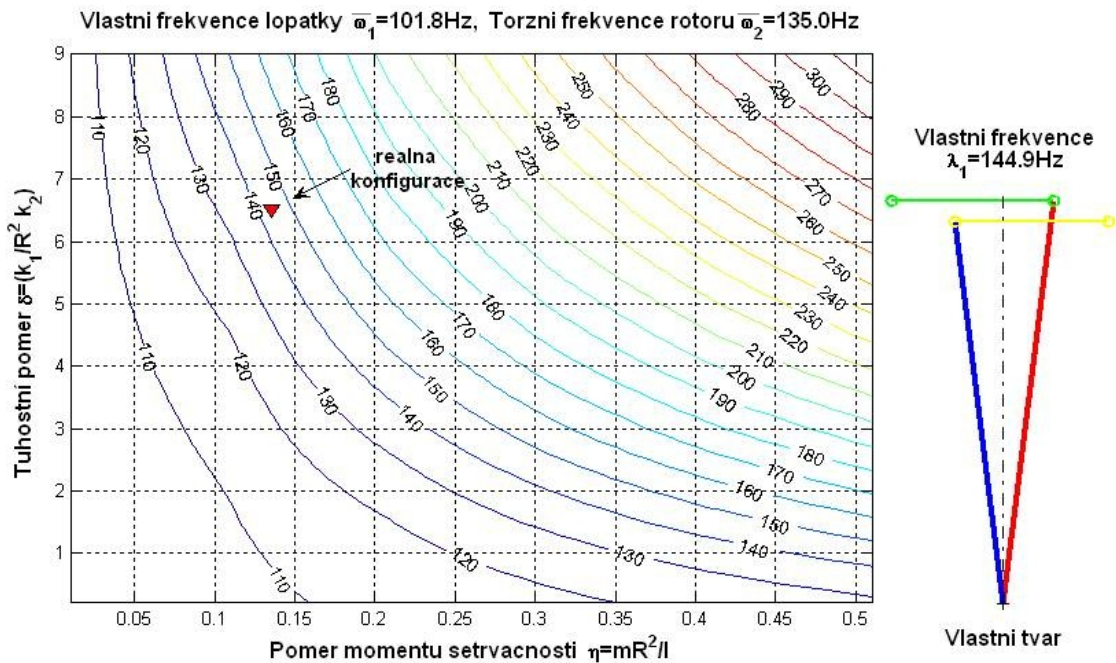
Zvláštní případy

- Pro limitní případ $\eta \rightarrow 0$ se vázaný systém lopatky-rotor rozpadne na tři nezávislé systémy a to dvakrát ohybové kmity samostatné lopatky na patě vetknuté a na torzně kmitající dvojdisk bez lopatek. Tomu odpovídající vlastní frekvence dle (4.7) jsou:

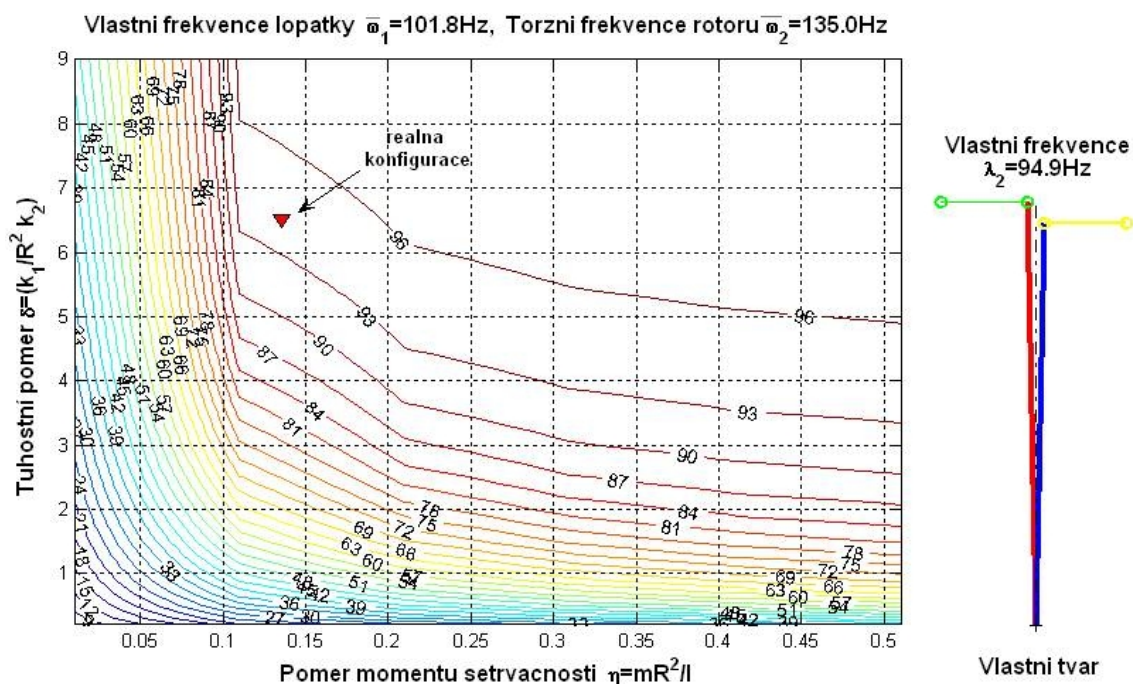
$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \bar{\omega}_1 \gamma = \bar{\omega}_2 \\ \lambda_{2,3} &= \bar{\omega}_1 \\ \lambda_4 &= 0\end{aligned}\quad (4.7)$$

- V případě , že je rotor jednoproudý tj. osazen jen jednou řadou koncových lopatek, pak vzájemná interakce lopatek a disku vyústí pouze v jednu vázanou vlastní frekvenci λ_3 popsanou vztahem (4.6).

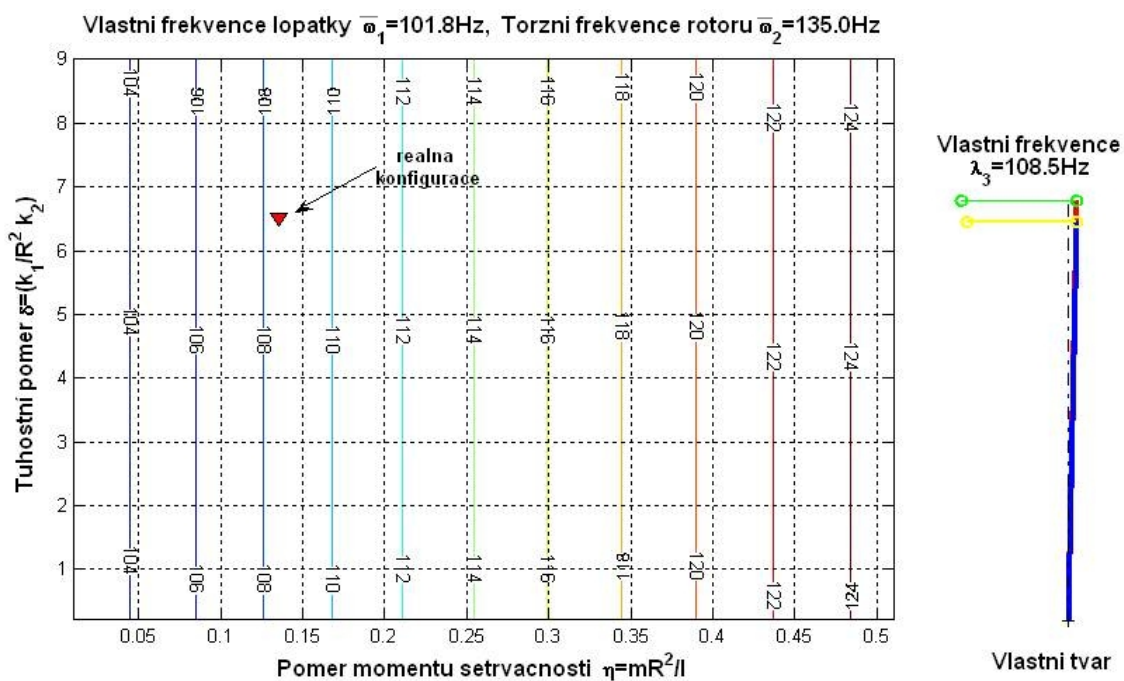
Dále provedeme parametrickou studii, která nám pomůže lépe pochopit vzájemnou interakci lopatek a rotoru pro různé parametry η a δ . Toho pak lze využít při návrhu rotoru turbíny a také při odlaďování rotorové soustavy z pohledu torzních frekvencí. Do parametrů η a δ jsou zahrnuty všechny lopatky po obvodě disku. Závislosti vlastních frekvencí (4.6) na parametrech η a δ jsme vynesli do grafů 4.2, 4.3, 4.4. Rozsah parametrů byl volen s ohledem na možné reálné konfigurace rotoru a lopatek. Do uvedených grafů byl dále zanesen bod, který odpovídá přibližně lopatce LSB48 a nízkotlakému dvou Prouděmu rotoru (vlastní frekvence samotné lopatky je $\bar{\omega}_1 = 101.8\text{Hz}$ a samotného rotoru bez lopatek LSB48 je $\bar{\omega}_2 = 135\text{Hz}$). Pro zmiňovanou konfiguraci je na obrázcích dále schématicky ukázán tvar kmitu dvojdisku s lopatkami pro každou vlastní frekvenci λ .



Obrázek 4.2: Vliv vlastní frekvence λ_1 v závislosti na parametrech η a δ



Obrázek 4.3: Vliv vlastní frekvence λ_2 v závislosti na parametrech η a δ



Obrázek 4.4: Vliv vlastní frekvence λ_3 v závislosti na parametrech η a δ

Poznámka

K stanovení ekvivalentní tuhosti k_{ekv} a hmotnosti lopatky m_{ekv} (dle obrázku 4.1 se jedná o tuhost k_2 a hmotnost m) použijeme přístup, který porovnává kinetickou energii vlastního tvaru lopatek a příslušné ekvivalentní hmoty soustředěné do vybraného místa na lopatce. Zaměříme se pouze na první ohybový tvar kmitu lopatky, neboť jeho frekvence je ve většině případech nejbližší dvojnásobku frekvence sítě. Ekvivalentní hmotu m_{ekv} lopatky umístíme na její konec, který kmitá největší amplitudou u_L . Na základě MKP výpočtu frekvenčně nejnižšího ohybového vlastního tvaru lopatky můžeme vypočítat kinetickou energii vlastního tvaru kmitu dle následujícího vztahu,

$$E_k = \frac{1}{2} \dot{u}^T \mathbb{M} \dot{u} \quad , \quad \text{pro hmotný bod} \quad \longrightarrow \quad E_k = \frac{1}{2} m_{ekv} \dot{u}_L^2$$

kde \dot{u} je vektor rychlostí výchylek popisující vlastní tvar kmitu lopatky a \mathbb{M} je matice hmotnosti lopatky. Rychlost na konci lopatky \dot{u}_L určíme také z MKP výpočtu. Porovnáním výše uvedených vztahů vypočteme ekvivalentní hmotnost lopatky m_{ekv} . Ekvivalentní tuhost k_{ekv} pak vypočteme ze vztahu pro vlastní frekvenci 1DOF oscilátoru,

$$k_{ekv} = m_{ekv} \omega_{v1}^2$$

kde ω_{v1} je vlastní frekvence příslušející danému ohybovému tvaru lopatky.

Podobným přístupem můžeme určit i ekvivalentní moment setrvačnosti a tuhost rotoru (dle obrázku 4.1 se jedná o tuhost k_1 a moment setrvačnosti I). Takto stanovené ekvivalentní parametry popisující vlastnosti dvojdisku s lopatkami nám poslouží k tomu, že z nich určíme parametry η a δ (popisující reálnou konfiguraci) a ty vyneseme jako bod do grafů 4.2,4.3,4.4.

Dílní závěry

- Z grafické interpretace vlastních tvarů je patrné, že vlastní tvar odpovídající frekvenci λ_1 je charakterizován dominantním kmitáním disků v protifázi, při kterém lopatky kmitají v protifázi s příslušnými disky ale i vůči sobě. Naproti tomu u vlastního tvaru odpovídajícího frekvenci λ_3 dominantně kmitají lopatky a to vůči disku v protifázi a vůči sobě soufázně. U vlastního tvaru odpovídajícího frekvenci λ_2 opět kmitají dominantně lopatky, ale v tomto případě kmitají soufázně s diskem.
- Porovnáme-li vlastní frekvenci $\bar{\omega}_1$ s vlastními frekvencemi λ_2, λ_3 , u kterých kmitají dominantně lopatky, je možné učinit závěr, že v případě dvojproudeho rotoru dochází k jevu, kdy se vlastní frekvence samotné lopatky rozštěpí na

dvě frekvence, pro které platí $\lambda_2 \leq \bar{\omega}_1 \leq \lambda_3$. Pro případ jednoproudého rotoru pak bude platit $\bar{\omega}_1 \leq \lambda_3$.

- Uvedené grafy 4.2, 4.3, 4.4 je možné použít pro libovolnou reálnou konfiguraci dvouproudého rotoru a zjistit tak citlivost změn jednotlivých parametrů na vlastní frekvence. Stačí pouze znát hodnoty vlastních frekvencí $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ a poměr setrvačných hmot η a ty vynést do uvedených grafů.
- V případě lopatky LSB48 je vidět, že frekvence λ_3 , λ_2 se nachází v oblasti , kde citlivost na změnu parametrů η a δ je malá, což znamená, že se nemusíme obávat významného přeladění pro různé varianty NT rotorů, neboť reálné modifikace či úpravy NT rotorů se budou většinou pohybovat v rámci několika desetin vzhledem k δ a do jedné desetiny vzhledem k η .
- Je-li vlastní frekvence samotné lopatky těsně kolem dvojnásobku frekvence elektrické sítě, pak s velkou pravděpodobností nebude docházet k významnému kmitání lopatek vlivem torzního buzení od generátoru, neboť vlivem vzájemné interakce lopatek a rotoru dojde k "přeladění" lopatky a k posunu vlastní frekvence dále od budící frekvence.

4.1.2 Vynucené kmitání dvojdisku s lopatkami

Vyvstává otázka, jak se bude chovat dvojdisk z pohledu torzně vynuceného kmitání, pokud bude buzen harmonicky proměnným momentem v místě disku. Nebude existovat taková reálná konfigurace rotoru a lopatek, pro níž budou rezonační amplitudy kmitání lopatek minimální?

Vzhledem k lineárnímu modelu dvojdisku uvažujme buzení harmonicky proměnným torzním momentem v místě disku 1 o jednotkové amplitudě M_0 . Vektor buzení bude mít pak tvar (4.8).

$$f(t) = f_0 e^{i\omega_b t}, \quad f_0 = [0, 0, M_0, 0]^T \quad (4.8)$$

Pohybovou rovnici dvojdisku (4.4) rozšíříme o člen zahrnující tlumení. Předpokládáme, že systém je slabě nekonzervativní.

$$\mathbb{M}\ddot{q} + \mathbb{B}\dot{q} + \mathbb{K}q = f \quad (4.9)$$

Zaměříme se pouze na ustálenou odezvu nikoliv na přechodový děj. Pro výpočet odezvy zvolíme modální metodu, tzn. modální transformaci (3.26). Pro budící sílu (4.8) můžeme řešení rovnice (4.9) hledat ve frekvenční oblasti ve tvaru $u(t) = u_0 e^{i\omega_b t}$, kde u_0 je dáno vztahem (4.10).

$$u_0 = [-\mathbb{I}\omega_b^2 + i\omega_b \mathbb{D} + \Lambda]^{-1} \mathbb{V}^T f_0 \quad (4.10)$$

Pro \mathbb{D} a Λ platí

$$\mathbb{V}^T \mathbb{B} \mathbb{V} = \mathbb{D}, \quad \mathbb{V}^T \mathbb{K} \mathbb{V} = \Lambda$$

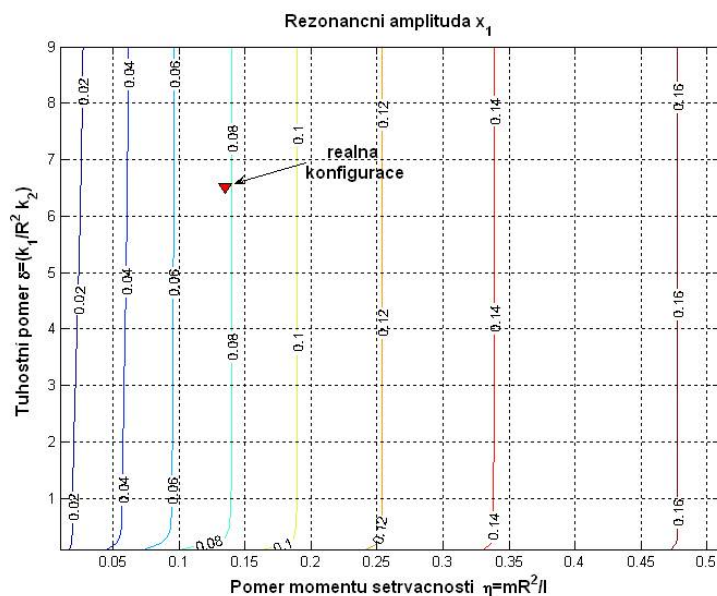
Matrice \mathbb{D} je diagonální a prvky na diagonále jsou rovny $2\zeta_j \omega_j$, kde ω_j je j -tá vlastní frekvence a ζ je poměrný útlum j -tého vlastního tvaru.

Vektor amplitud q_0 je pak dán vztahem (4.11)

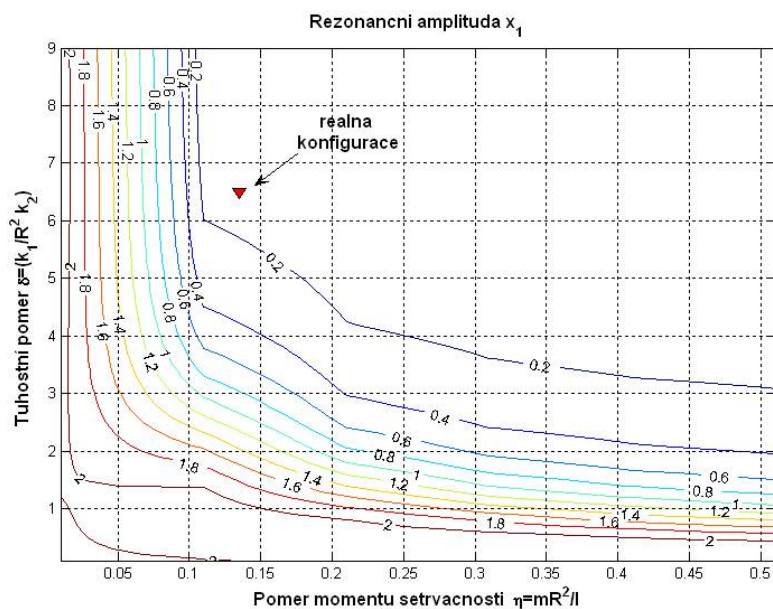
$$q_0 = \mathbb{V} [-\mathbb{I}\omega_b^2 + i\omega_b \mathbb{D} + \Lambda]^{-1} \mathbb{V}^T f_0 \quad (4.11)$$

Podobně jako v kapitole 4.1.1 provedeme parametrickou studii, která nám ukáže v tomto případě vliv parametrů η a δ na rezonanční amplitudu kmitání lopatek x_1 a x_2 . Ukázalo se, že velikosti rezonančních amplitud x_1 a x_2 jsou prakticky totožné, proto dále budou prezentovány výsledky jen pro x_1 . Jelikož z předchozích závěrů již víme, že nebezpečné pro kmitání lopatek mohou být vlastní frekvence λ_2, λ_3 (při těchto frekvencích kmitají dominantně lopatky), proto vyneseme do grafů závislost q_0 dle vztahu (4.11) na parametrech η , δ . V grafech 4.5, 4.6 jsou prezentovány rezonační amplitudy x_1 a x_2 [mm] pro zvolený poměrný útlum $\zeta = 0.001$. Rozsah parametrů byl volen s ohledem na možné reálné konfigurace rotoru a lopatek. Do uvedených grafů byl dále zanesen bod, který odpovídá přibližně lopatce LSB48 a

nízkotlakému dvouproudému rotoru (vlastní frekvence samotné lopatky je $\bar{\omega}_1 = 101.8\text{Hz}$ a samotného rotoru bez lopatek LSB48 je $\bar{\omega}_1 = 135\text{Hz}$).



Obrázek 4.5: Závislost rezonanční amplitudy x_1 na parametrech η a δ při frekvenci buzení rovné λ_3



Obrázek 4.6: Závislost rezonanční amplitudy x_1 na parametrech η a δ při frekvenci buzení rovné λ_2

Dílčí závěry

- Porovnáme-li mezi sebou grafy 4.5, 4.6 z pohledu velikosti amplitud můžeme učinit závěr, že při rezonančním kmitání vlastní frekvencí λ_2 jsou rezonanční amplitudy lopatek významně vyšší v porovnání s případem, kdy dvojdisk rezonuje s vlastní frekvencí λ_3 . Z praktického pohledu to znamená dodržovat větší odstup frekvence λ_2 od potenciálně nebezpečné budící frekvence rovné dvojnásobku frekvence sítě.
- Dále je z grafů patrné, že změnou "reálné konfigurace" rotoru a lopatek v rámci několika desetin z pohledu δ a jedné desetiny z pohledu η nedocílíme významného snížení amplitud kmitání lopatek. Dokonce se jeví, že reálná konfigurace rotoru je optimálně navržena z pohledu rezonační amplitudy kmitání při vlastní frekvenci λ_2 .

4.2 Aplikace vzájemné interakce lopatek a rotoru

S tím jak se vylepšují mechanické vlastnosti vysokopevnostních ocelí, roste možnost vyvíjet delší a účinnější koncové lopatky nízkotlakých dílů. Delší lopatky mají však obecně nižší vlastní frekvence, které se nacházejí v oblasti dvojnásobku frekvence elektrické sítě. Při provozu generátoru mohou nastat poruchové děje, jež mají harmonický či periodický charakter s periodou děje jednonásobku a dvojnásobku frekvence sítě. Tyto poruchové děje mohou být zdrojem buzení koncových lopatek a vybudit tzv. dešťníkový tvar kmitu olopatkovaného disku.

Jedním z nejvíce nebezpečných poruchových jevů z pohledu vysokocyklové únavy lopatek je tzv. nesouměrné zatížení generátoru. Tento jev se projevuje harmonickými pulsacemi kroutícího momentu s frekvencí rovnající se dvojnásobku frekvence sítě. Tento poruchový děj může trvat až několik hodin, což je čas dostatečně dlouhý na to, aby mohlo dojít k vysokocyklovému porušení lopatek. Amplituda budícího momentu v místě vinutí generátoru může dosahovat až 10% nominálního kroutícího momentu.

V případě torzního buzení rotorové soustavy vlivem poruchy na generátoru dochází ke vzniku vázaného kmitání mezi lopatkami a vlastní rotorovou soustavou. Toto je důvod proč je nutné analyzovat modální vlastnosti systému lopatky-rotorová soustava a nikoliv jen samotný olopatkovaný disk. Není třeba se obecně zabývat všemi stupni lopatek, ale pouze těmi, jejichž vlastní frekvence jsou poblíž dvojnásobku frekvence sítě. Tuto podmínku splňuje ve většině případů pouze nízkotlaký koncový stupeň.

Pro výpočet modálních vlastností systému lopatky-rotor je běžně používána metoda konečných prvků. Rotor je modelován pomocí 1D nosníkových prvků, které se používají při torzní analýze rotorové soustavy. Lopatky jsou pak modelovány pomocí 3D nosníkových prvků. Tento přístup se běžně používá, ačkoliv má určité nevýhody.

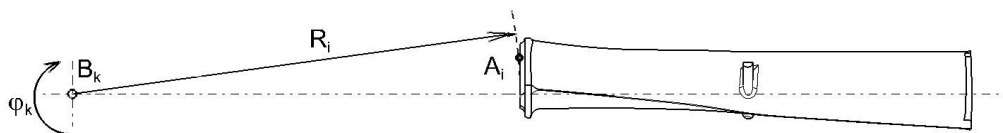
1. MKP modely lopatek s využitím 3D nosníkových prvků jsou nepřesné
2. 3D nosníkové modely lopatek je nutno kalibrovat dle přesnějších MKP modelů lopatek (3D objemové modely)
3. Nutno pracovat s dvěma modely lopatek (3D nosníkové a 3D objemové), což je časově náročnější
4. U 3D nosníkových modelů lopatek je obtížné modelování vazebních členů

Tyto nevýhody výše zmiňovaného přístupu vedly k zamýšlení jak využít standardní 3D objemový model lopatky pro výpočet modálních vlastností systému lopatky-rotor. Vystávají dvě otázky, jak propojit 3D model lopatek s 1D modelem rotoru a dále jak využít rotační periodicitu olopatkovaného disku pro snížení počtu stupňů volnosti daného problému. Využití rotační periodicity je nezbytné, neboť

parní turbíny mohou mít od jednoho až po osm koncových nízkotlakých stupňů (pro čtyři dvou Proudé nízkotlaké díly). Pokud bychom modelovali všechny lopatky v kole, kterých bývá většinou kolem 60, na osmi stupních a uvažovali, že model jedné lopatky obsahuje cca 20 000 stupňů volnosti, pak celý model systému lopatky-rotor bude obsahovat 10 milionů stupňů volnosti. Takto rozsáhlý model není možné v dnešní době dostupnými hardwarovými prostředky počítat.

Problém v aplikaci rotační periodicity na olopatkovaný disk tkví v tom, jak zachovat hmotnostní (setrvačné) a tuhostní poměry mezi vlastním rotorem a lopatkami, neboť při použití rotační periodicity bude model celého systému obsahovat vždy jen jednu lopatku na daném stupni. Toto lze elegantně vyřešit tím, že se uměle navýší tuhost a hmotnost lopatky a to tolikrát, kolik je lopatek obsaženo v kole. Tím se zaručí i zachování modálních vlastností samotné lopatky. Fyzikální vysvětlení pro navýšení tuhostních a setrvačných vlastností lopatek je založeno na faktu, že jednotlivé lopatky jsou paralelně spojeny tj. kmitají stejnou amplitudou a stejnou fází tzn. právě jedna modelovaná lopatka pak reprezentuje všechny lopatky v kole.

Propojení 3D modelu lopatky s 1D modelem rotoru je realizováno pomocí tzv. vazebních rovnic. Na obrázku 4.7 je naznačena situace. Uzel rotoru B_k reprezentuje k -té místo, kde jsou lopatky propojeny s rotorem. Uzly lopatky A_i reprezentují místa, kde je lopatka spojena s diskem. Samotný disk je zahrnut do modelu rotorové soustavy jako pevně v rotoru uložený tuhý kotouč o daném momentu setrvačnosti. Torzní tuhost disku je natolik vysoká, že je možné disk uvažovat jako tuhý. Pak můžeme zavést vazební podmínku (4.12), která popisuje vazbu mezi torzním natočením rotoru φ_k v místě B_k a obvodovým posuvem q_i bodů A_i lopatky,



Obrázek 4.7: Vazba mezi rotorem a lopatkou

$$q_i = R_i \varphi_k \quad \text{pro } i = 1, 2, 3 \dots n \quad (4.12)$$

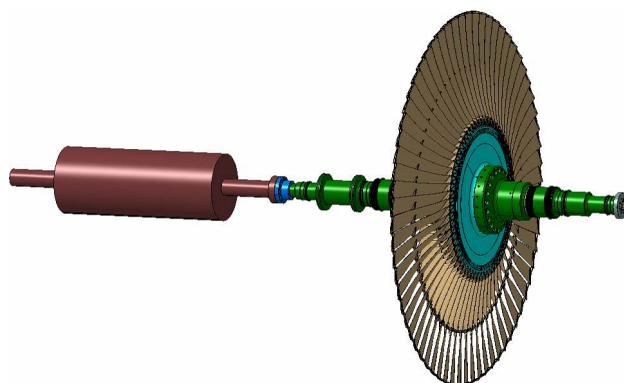
kde n je počet uzlů, které spojují disk s lopatkou.

Je nutné zdůraznit, že cílem je analyzovat pouze torzní tvary kmitu rotorové soustavy a k nim příslušející tvary kmitu lopatek s nulovým uzlovým průměrem, kdy všechny lopatky v kole kmitají stejnou amplitudou a stejnou fází.

Uvedený postup výpočtu vzájemného torzního kmitání rotoru a lopatek byl automatizován pomocí APDL jazyka v prostředí ANSYS. To umožnilo využití standardně používaných vstupních souborů popisujících vlastnosti a geometrii rotorové soustavy a dále přineslo zefektivnění výpočtových analýz.

4.2.1 Aplikace metodiky výpočtu - pokusný rotor s lopatkou LSB48

Zmiňovaný postup v kapitole 4.2 byl aplikován při výpočtu vzájemného torzního kmitání lopatek LSB48 a pokusného rotoru prezentovaného na obrázcích 3.18 a 4.8. Cílem bylo zjistit správnost navržené metodiky a ověření její přesnosti na základě porovnání s experimentálně zjištěnými daty.



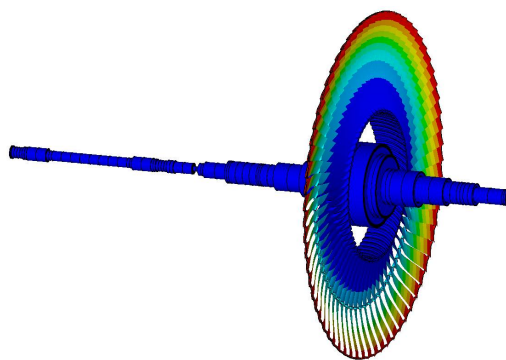
Obrázek 4.8: CAD model pokusného rotoru

Pokusný rotor je složen z dvou hřídelových nástavců, mezi které je vložen disk osazený lopatkami. Pokusný rotor je poháněn AC motorem o výkonu 1.4MW. Motor může také fungovat jako budič torzního kmitání, kdy na ustálený kroutící moment je superponována harmonická složka momentu. Frekvence harmonického torzního buzení se může plynule měnit v rozsahu 80 až 130Hz. Taktéž amplitudu torzního budícího momentu je možné regulovat v rozsahu 0 až 30% nominálního kroutícího momentu.

Model rotorové soustavy pokusného standu byl diskretizován na základě MKP v prostředí ANSYS s využitím vyvinuté metodiky. Následně byla provedena modální analýza, jejímž hlavním výstupem je vlastní frekvence a vlastní tvar vázaného torzního kmitání rotor - lopatky. Grafické znázornění hledaného vlastního tvaru je vidět na obrázku 4.9. Měřené a vypočtené vlastní frekvence vázaného kmitání rotor-lopátky jsou shrnuty v tabulce 4.1.

Tabulka 4.1: Vlastní frekvence vázaného kmitání rotor-lopátky pokusného rotoru

	Výpočet samotná lopatka	Výpočet s vlivem rotoru	Experiment
Frekvence [Hz]	101.8	110.1	110.5



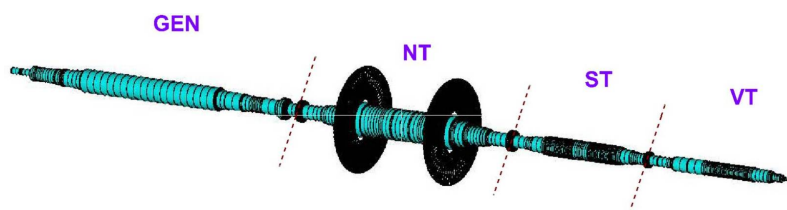
Obrázek 4.9: Vypočtený torzní tvar pokusného rotoru s lopatkou LSB48

Dílčí závěry

- Na základě výpočtové analýzy vlastních frekvencí se ukázalo, že efekt vzájemné interakce rotoru a lopatky se významně projevil a to zvýšením vlastní frekvence lopatek cca o 8.5Hz. Tento výrazný efekt lze přičíst relativně vysokému poměru setrvačných hmot lopatek vůči disku tak, jak ukazuje graf 4.4 a vztah (4.6).
- Provedené měření ukázalo na velmi dobrou shodu mezi výpočtem a experimentem. Rozdíl vlastních frekvencí lopatek mezi oběma přístupy činil pouze 0.4Hz.

4.2.2 Aplikace metodiky výpočtu - rotorová soustava "Indie"s lopatkou LSB48

Postup uvedený v kapitole 4.2 byl dále aplikován při výpočtu vzájemného torzního kmitání lopatek LSB48 a rotorové soustavy "Indie". Tato rotorová soustava je složena z vysokotlakého dílu - VT, středotlakého dílu -ST, dvouproutěho nízkotlakého dílu - NT a generátoru - GEN, jak je naznačeno na obrázku 4.10. Výkon turbíny při nominálních otáčkách 3000 1/min je 660MW, což odpovídá nominálnímu přenášenému krouticímu momentu na spojnici generátoru 2100kNm.

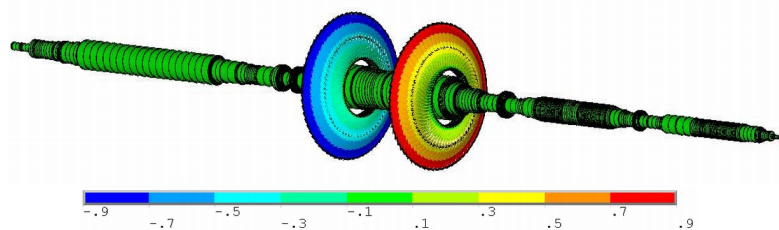


Obrázek 4.10: Rotorová soustava "Indie"s lopatkami LSB48

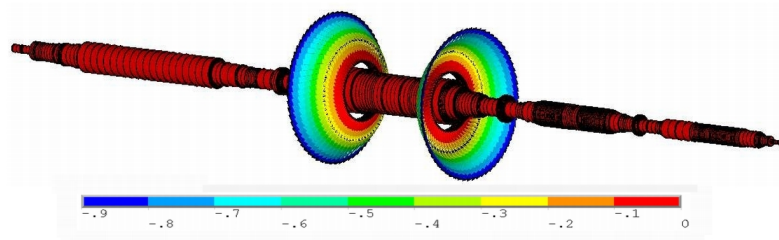
Diskretizace vlastní rotorové soustavy byla převzata již z existujícího vstupního souboru, který standardně slouží k torzní analýze rotorové soustavy. Jako diskrétní MKP model lopatky LSB 48, byl použit ten, který slouží k dynamickým analýzám samotné lopatky (k výpočtu interferenčního diagramu). Pomocí vytvořeného makra v prostředí ANSYS, které je postaveno na metodice popsané v kapitole 4.2 , byla provedena modální analýza výše uvedeného systému. Vlastní frekvence odpovídající dominantnímu ohybovému kmitání lopatek jsou shrnuty v tabulce 4.2 a jim příslušející vlastní tvary jsou zobrazeny na obrázcích 4.11,4.12.

Tabulka 4.2: Vlastní frekvence vázaného kmitání rotor-lopátky rotorové soustavy Indie

	Výpočet - samotná lopatka	Výpočet s vlivem rotoru - λ_2	Výpočet s vlivem rotoru - λ_3
Frekvence [Hz]	101.8	89.7	106.0



Obrázek 4.11: Torzní tvar rotorové soustavy "Indie"s lopatkou LSB48
 $\lambda_2=89.7\text{Hz}$



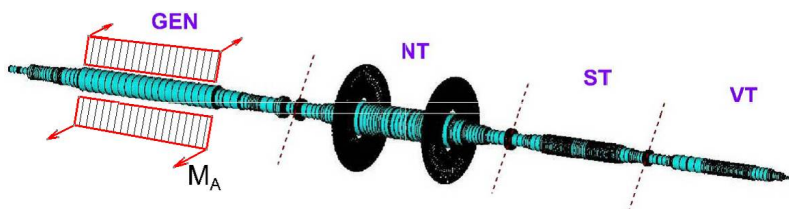
Obrázek 4.12: Torzní tvar rotorové soustavy "Indie"s lopatkou LSB48
 $\lambda_3=106.0\text{Hz}$

Dílčí závěry

- Ukázalo se , že navržená metodika umožňuje velmi rychle a operativně analyzovat vázané torzní frekvence rotoru a lopatek. Této skutečnosti lze výhodně využít pro případné parametrické studie zjišťující citlivost geometrických parametrů rotoru na vlastní frekvence lopatek.
- V případě rotorové soustavy, která je složena z tří dvouproutých NT dílů a obsahuje tedy šest koncových stupňů lopatek, trvá výpočtová modální analýza na výkonném PC cca 5-10 minut v závislosti na počtu hledaných vlastních frekvencí.
- Vypočtené vlastní frekvence v tabulce 4.2 splňují požadavky normy ISO 22266-1 [29] na odstup od dvojnásobku frekvence sítě

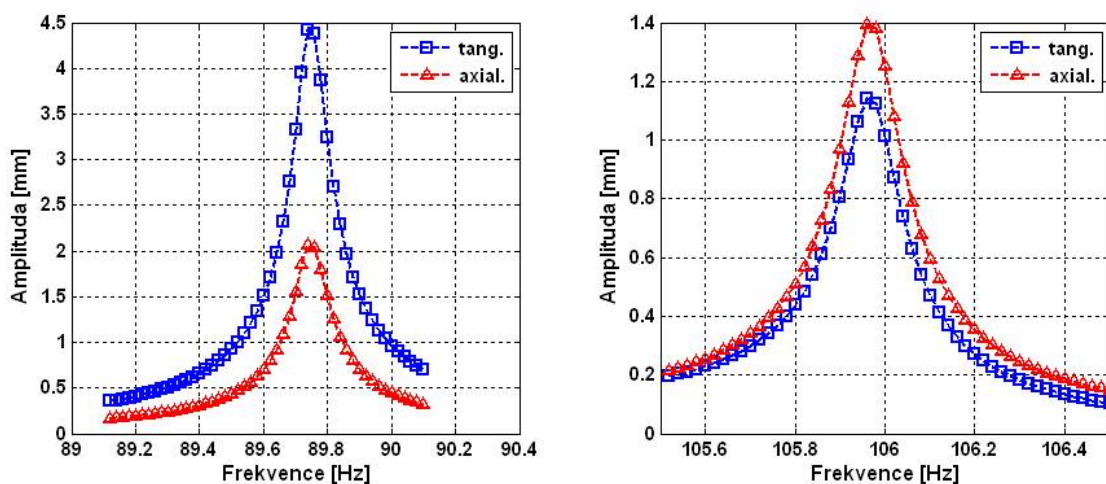
4.2.3 Torzní harmonické buzení - rotorová soustava "Indie"s lopatkou LSB48

Výpočtová analýza odezvy lopatek na harmonické buzení poskytuje odpověď, jak vysoká dynamická napětí budou existovat a v kterých místech lopatky se uplatní při jejím rezonačním kmitání. Již dříve bylo zmíněno, že v případě nesouměrného zatížení generátoru dochází k harmonickým pulsacím kroučícího momentu s frekvencí rovnající se dvojnásobku frekvence sítě. Amplituda budícího momentu v místě vinutí generátoru může dosahovat až 10% nominálního kroučícího momentu, což v případě rotorové soustavy "Indie" je $M_A = 210 \text{ kNm}$. Tento harmonicky se měnící kroučící moment byl rovnoměrně rozdělen do uzlů v místě vinutí generátoru tak, jak je naznačeno na obrázku 4.13. Pro výpočet odezvy byl využit MKP model prezentovaný v kapitole 4.2.2. Jelikož se jedná o harmonické buzení, je výhodné hledat řešení ve frekvenční oblasti za pomoci harmonické analýzy. Amplitudo frekvenční závislost daného systému budeme zjišťovat v okolí vlastních frekvencí λ_2 a λ_3 , které odpovídají dominantnímu kmitání lopatek a vyskytují se v blízkosti dvojnásobku frekvence sítě. Model tlumení systému byl uvažován viskózní s hodnotou poměrného útlumu o velikosti 0.06%, což odpovídá přibližně hodnotě materiálového tlumení, které bylo experimentálně zjištěno. Tento přístup je značně konzervativní, neboť neuvažuje konstrukční tlumení v místě vazebních členů lopatek. Vlastní harmonická analýza byla provedena v prostředí ANSYS.



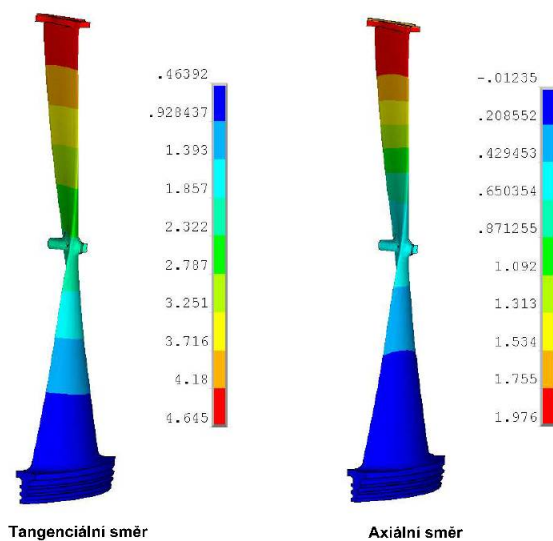
Obrázek 4.13: Rotorová soustava "Indie"s lopatkami LSB48 - harmonické buzení torzním momentem

Výsledky ve formě amplitudo frekvenčních charakteristik jsou zobrazeny na obrázku 4.14. Jedná se o odezvy na špičce lopatek ve směru axiálním (ve směru osy rotoru) a tangenciálním (směr obvodový). Obě řady lopatek LSB48 kmitají co do velikosti amplitud přibližně stejně. V grafech jsou vyneseny tedy pouze odezvy lopatek nacházející se blíže ke generátoru. Porovnáme-li výchylky při frekvenci 89.7Hz a při frekvenci 106Hz, je patrné, že lopatka významněji kmitá v případě nižší frekvence. Dále je patrné, že poměr amplitud v tangenciálním směru vůči axiálnímu směru se znatelně liší pro obě rezonační frekvence. Tento jev lze pravděpodobně přisoudit tomu, že vynucený tvar pro vyšší frekvenci 106Hz je již ovlivňován druhým tvarem kmitu lopatky, jak je možné vidět na interferenčním diagramu samotné lopatky, viz. obrázek 3.16.



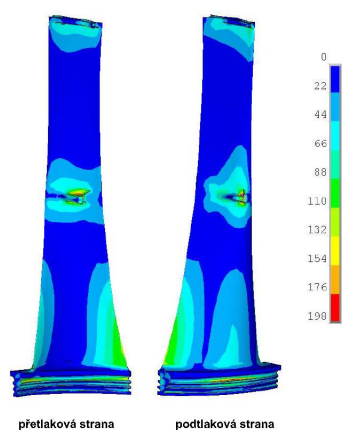
Obrázek 4.14: Odezva na špičce lopatky LSB48 rotorové soustavy "Indie" při harmonickém torzním buzení

Obrázek 4.15 ukazuje deformaci lopatky při rezonačním kmitání při frekvenci 89.7Hz.

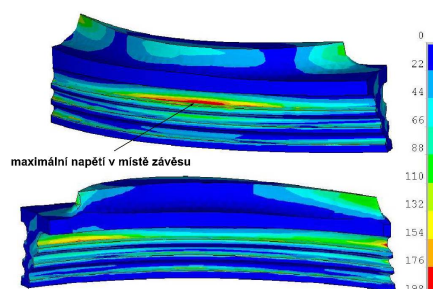


Obrázek 4.15: Deformace lopatky při rezonačním kmitání frekvencí 89.7Hz

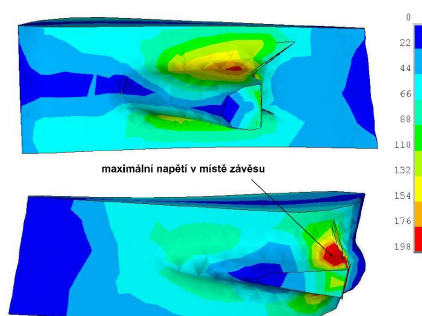
Rezonačním amplitudám kmitání odpovídají určité dynamické amplitudy napětí na povrchu lopatek, jak prezentují obrázky 4.16, 4.17, 4.18. Tato napětí jsou posuzována z pohledu vysokocyklové únavy v příloze 7.5. Cílem bude zjistit, zdali lopatka může pracovat v rezonanci i v případě vadné synchronizace generátoru.



Obrázek 4.16: Rozložení rezonačního napětí (HMH v MPa) na lopatce LSB48 při frekvenci 89.7Hz



Obrázek 4.17: Rozložení rezonačního napětí (HMH v MPa) v závěsu lopatky LSB48 při frekvenci 89.7Hz (max. 221MPa)



Obrázek 4.18: Rozložení rezonačního napětí (HMH v MPa) kolem tie-bossu lopatky LSB48 při frekvenci 89.7Hz (max. 260MPa)

Dílčí závěry

- Podařilo se ověřit, že platí závěry učiněné v kapitole 4.1.2, tzn. při rezonačním kmitání vlastní frekvencí λ_2 jsou rezonanční amplitudy vyšší v porovnání s případem, kdy je systém buzen vlastní frekvencí λ_3 .
- Poměr amplitud v tangenciálním směru vůči axiálnímu směru se znatelně liší pro obě rezonační frekvence. Tento jev lze pravděpodobně přisoudit tomu, že vynucený tvar pro vyšší frekvenci 106Hz je již ovlivňován druhým tvarem kmitu lopatky.

4.3 Závěr - vzájemná torzní interakce lopatek a rotoru

- V případě dvou Prouděho rotoru dochází k jevu, kdy se vlastní frekvence ohybových kmitů samotné lopatky rozštěpí na dvě frekvence, pro které platí $\lambda_2 \leq \bar{\omega}_1 \leq \lambda_3$. Pro případ jednoprouděho rotoru pak bude platit $\bar{\omega}_1 \leq \lambda_3$.
- Grafy 4.2, 4.3, 4.4 je možné použít pro libovolnou reálnou konfiguraci dvou Prouděho rotoru a zjistit tak citlivost změn jednotlivých parametrů na vlastní frekvence. Stačí pouze znát hodnoty vlastních frekvencí $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ a poměr momentů setrvačnosti η a ty vynést do uvedených grafů.
- Porovnáme-li mezi sebou grafy 4.5, 4.6 z pohledu velikosti amplitud, můžeme učinit závěr, že při rezonančním kmitání vlastní frekvencí λ_2 jsou rezonační amplitudy významně vyšší v porovnání s případem, kdy dvojdisk rezonuje s vlastní frekvencí λ_3 . Z praktického pohledu to znamená dodržovat větší odstup frekvence λ_2 od potenciálně nebezpečné budící frekvence rovné dvojnásobku frekvence sítě.
- Je-li vlastní frekvence samotné lopatky těsně kolem dvojnásobku frekvence elektrické sítě, pak s velkou pravděpodobností nebude docházet k významnému kmitání lopatek vlivem torzního buzení od generátoru, neboť vlivem vzájemné interakce lopatek a rotoru dojde k "přeladění a rozštěpení vlastní frekvence" lopatky a k posunu vlastní frekvence dále od budící frekvence.
- V případě lopatky LSB48 je vidět, že frekvence λ_3 , λ_2 se nachází v oblasti, kde citlivost na změnu parametrů η a δ je malá. To znamená, že se nemusíme obávat významného přeladění pro různé varianty NT rotorů, neboť reálné modifikace či úpravy NT rotorů se budou většinou pohybovat v rámci několika desetin změny parametru δ a do jedné desetiny změny parametru η .
- Ukázalo se, že navržená metodika umožňuje velmi rychle a operativně analyzovat vázané torzní frekvence rotoru a lopatek. V případě rotorové soustavy, která je složena ze tří dvou Proudých NT dílů a obsahuje tedy šest koncových stupňů lopatek, trvá výpočtová modální analýza na výkonném PC cca 5-10 minut v závislosti na počtu hledaných vlastních frekvencí.

5 Shrnutí a závěr

5.1 Shrnutí a dosažené výsledky

Předložená práce se zabývá problematikou dynamiky olopatkovaných disků a je tématicky rozčleněna do tří ucelených kapitol. Cílem práce je obsáhnout významné oblasti dynamiky olopatkovaných disků, s kterými se můžeme v praxi nejčastěji setkat a to zejména u parních turbín. Práce se snaží mimo jiné rozšířit stávající výpočetní metody a postupy, které jsou v současnosti používány ve ŠKODA POWER a to s cílem:

- zpřesnění výsledků výpočtových analýz, což přináší značné finanční úspory na výrobu prototypových lopatek, neboť tyto lopatky mohou být bez dodatečných úprav použity na reálném díle. Tomu však musí předcházet soubor experimentálních testů ověřujících dynamické a statické bezpečnosti.
- zjednodušení a zkrácení výpočtového času, což přináší možnost provádět parametrické studie ve stádiu návrhu např. nových lopatek.
- na jednoduchých modelech prezentovat a také zobecňovat chování složitých rotačně periodických struktur jakými jsou např. tvarově složité koncové lopatky nízkotlakých dílů, což má za cíl hlouběji pochopit jejich dynamické chování.

Většina předložených metodik výpočtů je aplikována na reálných lopatkách. Pokud jsou k dispozici naměřená data, pak jsou porovnávána s analyzovanými výsledky za účelem kalibrace výpočetní metodiky.

Pochopení dynamického chování rotačně periodických struktur je nejprve objasněno na jednoduché 1D rotačně symetrické struktuře (rotující stočená struna), pro níž byla sestavena pohybová rovnice a následně byly určeny její modální vlastnosti. Dále byla zjišťována odezva zmiňované rotačně symetrické struktury na různé typy buzení a to takové, s kterými je možné se setkat, ať již při provozu reálných turbosoustrojů, či během experimentálních testů. To přináší mimo jiné schopnosti předpovědět charakter odezvy, což je velmi užitečné v případě návrhu experimentálního zařízení. Dále je prezentován detailní rozbor výsledných odezev pro jednotlivé typy buzení včetně zvláštních případů, což dává ucelený pohled na chování rotačně periodických struktur. Podobně rozsáhlý a ucelený rozbor není v běžně dostupné literatuře možné najít.

Stěžejní kapitola této práce je zaměřena na dynamickou analýzu rotačně periodických struktur (olopatkovaných disků) s využitím rotačně periodické podmínky, která umožňuje významným způsobem zredukovat počet stupňů volnosti dané úlohy resp. výpočetní nároky. V teoretické části jsou odvozeny vztahy pro výpočet modálních vlastností olopatkovaných disků. Následně jsou diskutovány jejich vlastnosti. Dále

jsou odvozeny vztahy pro výpočet odezvy na harmonické buzení pro různé typy rozložení sil po obvodě kola:

- periodicky se opakující rozložení sil
- obecně rozložená síla - pomocí Fourierovy řady je rozložena na jednotlivé harmonické složky a pro každou z těchto složek je odezva řešena samostatně. Výsledná odezva je pak dána součtem jednotlivých odezev.

Pro zjištění modálních vlastností a vynuceného kmitání periodických struktur s využitím rotačně periodické podmínky byl sestaven výpočetní nástroj PERIO v prostředí MATLAB. Správnost odvozené teorie a funkčnost programu byla ověřena na jednoduché rotačně periodické struktuře obsahující 8 segmentů, každý se dvěma stupni volnosti.

Byla sestavena metodika výpočtu modálních vlastností pro dlouhé vázané lopatky. Tato metodika je do jisté míry limitována konstrukčním návrhem lopatky, neboť je založena na lineárním chování kontaktní vazby během provozu. Z pohledu nominálního provozu těchto typů lopatek není však nelineární chování žádoucí. Vhodným návrhem vazebních členů lopatky lze tento předpoklad splnit. Zmíněná metodika byla aplikována při výpočtu modálních vlastností koncové nízkotlaké lopatky LSB48, které byly nedílnou součástí procesu konstrukčního návrhu. Byla sestavena komplexní metodika výpočtu modálních veličin pro dlouhé vázané lopatky zejména zahrnující správnou volbu okrajových podmínek. Porovnáním naměřených a vypočtených vlastních frekvencí se podařilo ověřit jednak korektní naladění lopatky LSB48 a dále metodiku výpočtu modálních veličin vázaných lopatek. Experiment potvrdil, že existuje velmi dobrá shoda mezi výpočtovým modelem a skutečným dílem, neboť odchylky u naměřených a vypočtených vlastních frekvencí se pohybovaly do 3%.

Byla ověřena možnost použití statické redukce za účelem významného snížení počtu stupňů volnosti lopatky s vazebními členy. Je však nutná správná volba master uzlů (stupňů volnosti) a to jak v oblasti listu, tak zejména v oblasti kontaktních ploch vazebních členů. Redukovaný model může sloužit např. pro parametrické studie chování lopatek.

Pro posuzování míry vybuditelnosti vlastního tvaru kmitu byl zaveden parametr vybuditelnosti χ a byl odvozen vztah pro jeho stanovení v případě použití rotačně periodické podmínky. Výhodou parametru χ je jeho nízká výpočetní náročnost v porovnání s výpočtem celkové odezvy. Byl použit při vyhodnocování míry vybuditelnosti vlastních tvarů lopatky LSB48.

Problematika vzájemné interakce lopatek a rotoru při torzním kmitání je další oblast, kterou se předložená práce zabývá. Nejprve je na zjednodušeném modelu dvojdisku s lopatkami prezentován princip vzájemné interakce lopatek a rotoru. Pomocí Lagrangeových rovnic druhého druhu jsou sestaveny pohybové rovnice a následně jsou řešeny modální vlastnosti a vynucené kmitání tohoto systému. Jedním z hlavních cílů analýzy zjednodušeného modelu bylo provedení detailního rozboru vlivu jednotlivých parametrů (tuhost, hmotnost lopatek a rotoru) na vlastní

frekvence a na rezonanční amplitudy kmitání lopatek. Model je možno svými parametry naladit tak, aby s akceptovatelnou přesností predikoval vzájemnou interakci skutečné rotorové soustavy s lopatkami. Toho lze využít při návrhu, ať již samotné koncové NT lopatky, tak rotoru. Pro urychlení práce a pro lepší názornost byly sestaveny grafy, pomocí kterých je možné pro libovolnou reálnou konfiguraci dvouproudého rotoru zjistit vliv jednotlivých parametrů na vlastní frekvence.

Pro zpřesnění predikce modálních vlastností systému lopatky-rotor (při torzním kmitání rotoru) byla sestavena metodika, která je založena na metodě MKP, kdy je rotor modelován pomocí 1D nosníkových prvků a lopatky pomocí 3D objemových prvků s použitím podmínky cykličnosti. Tento postup výpočtu vzájemného torzního kmitání rotoru a lopatek byl zautomatizován pomocí APDL jazyka v prostředí ANSYS. Navržená metodika umožňuje velmi rychle a operativně analyzovat vázané torzní frekvence rotoru a lopatek. V případě rotorové soustavy, která je složena ze tří dvouproudých NT dílů a obsahuje tedy šest koncových stupňů lopatek, trvá výpočtová modální analýza na výkonném PC cca 5-10 minut v závislosti na počtu hledaných vlastních frekvencí.

Korektnost a přesnost navržené metodiky byla ověřena experimentálním měřením na pokusném kole s lopatkou LSB48, kde byla prokázána velmi dobrá shoda mezi výpočtem a experimentem. Rozdíl vlastních frekvencí (při interakci lopatka - rotor) mezi výpočtem a experimentem činil pouze 0.4Hz.

Většina výpočtových metod a postupů prezentovaných v této práci byla již zavedena a je používána ve Škoda Power při dynamických analýzách olopatkovaných disků.

5.2 Výhled další práce

V návaznosti na předloženou práci autor předpokládá pokračování práce v problematice dynamiky olopatkovaných disků a to zejména v následujících oblastech:

- Aplikace a rozšíření programu PERIO pro řešení vynuceného kmitání s obecně rozloženou silou po obvodě olopatkovaného disku.
- Odvození vztahů pro odezvu rotačně symetrické struktury na buzení obecně n Diracovými impulsy nerovnoměrně rozloženými po jejím obvodě.
- Vývoj programového nástroje umožňujícího predikovat vybuditelnost vlastního tvaru kmitu lopatek na základě znalosti rozložení síly od média na lopatce (výstup z CFD analýz) a daného vlastního tvaru kmitu lopatky.

6 Literatura

- [1] Stodola, A., "Steam Turbine", D.Van Nostrand Co, New York, 1905
- [2] Campbell,W., "The protection of steam-turbine disk wheels from axial vibration," Transactions of ASME, 31–160, 1924
- [3] Polach, P., "Výpočtem charakteristik vlastního kmitání olopatkovaných disků parních turbin s využitím rotační periodicity", Disertační práce, ZCU, Plzen,1998
- [4] Prohl, M., A., A method for calculating vibration frequency and stress of a banded groups of turbine buckets, Transactions of the ASME, 1958
- [5] Saito, E., "Resonance characteristics of turbine blades with compound periodic structure", International Journal JSME, vol 41, 727-733, 1998
- [6] Armstrong, E.K., "An investigation into the coupling between turbine disk and blade Vibration" PhD Thesis, Christ's College, Cambridge , 1955
- [7] Ewins, D., J., "Vibration Characteristics of Bladed Disk Assemblies" Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 15, No. 3, pp. 65-79, 1973
- [8] Ewins, D.J., "Vibration Modes of Mistuned Bladed Disks", Journal of Engineering for Power, ASME paper No. 75-GT-114, 1975
- [9] Singh, M.P., Ewins, D.J., "A Probabilistic analysis of Mistuned Bladed Turbine Disc" Institute of Mechanical Engineers, 1988,
- [10] Ewins, D.J., Han, Z.S., "Resonant Vibration Level of a Mistuned bladed Disk" Journal of vibration, stress and Reliability in Design; Trans. of ASME, Vol. 106, pp. 211-217, 1984
- [11] Krásný, I., "Numerical Solution of Rotationally Periodic Structures", Acta Technica ČSAV, No.5, 634-650,1982
- [12] Slavík,J., Stejskal,V.,Zeman, V., "Základy dynamiky strojů", Nakladatelství ČVUT Praha,1997
- [13] Gatti,P., Ferrari, V., "Applied Structural and Mechanical Vibrations", Taylor & Francis, New York, 2003
- [14] Leissa,A., "Vibration of Plates", National Aeronautics and Space Administration,1969
- [15] Petrov, E. P., "A method for use of cyclic symmetry properties in analysis of nonlinear multiharmonic vibrations of bladed discs", ASME Paper No. GT-2003-38480, 2003

- [16] Petrov, E., Ewins, D., 2003, "Analytical Formulation of Friction Interface Elements for Analysis of Nonlinear Multi-Harmonic Vibrations of Bladed Discs", *J. Turbomach.*, Vol. 125, Issue 2, pp. 364-371, 2003
- [17] Siewert, C., Panning, L., Wallaschek, J., Richter, C., "Multiharmonic Forced Response Analysis of a Turbine Blading Coupled by Nonlinear Contact Forces", *ASME Trans.*, Vol. 132, Issue 5, 2010
- [18] Thomas, D. L., "Dynamics of rotationally periodic structures", *Inter. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 14., pp. 81-102., 1979
- [19] Wildheim, J., "Vibrations of Rotating Circumferentially Periodic Structures", *Q. J. Mech. Appl. Math.*, vol. 34, Part 2, pp. 213-229, 1981
- [20] Kellner J., "Kmitání turbínových lopatek a olopatkovaných disků", *Disertační práce*, ZCU Plzen, 2009
- [21] Kaneko, Y., Mori, K., and Ohyama, H., "Development and Verification of 3000 rpm 48 inch Integral Shroud Blade for Steam Turbine," *Proceedings of ASME*, PWR2005-50347, 2005
- [22] Machida, M., Yoda, H., "Development of Long Blades with Continuous Cover Blade Structure for Steam Turbines", *Journal - Hitachi Review*, Vol. 51, No. 5, 2002
- [23] Moffatt S., He L. , "Blade Forced Response Prediction for Industrial Gas Turbines Part I: Methodologies", *Proceedings of ASME*, GT2003-38640, 2003
- [24] Ning W., Moffatt S., "Blade Forced Response Prediction for Industrial Gas Turbines Part I: Verification and application ", *Proceedings of ASME*, GT2003-38642, 2003
- [25] La Rosa, J. A. et al, "Analysis of Turbine Blade Vibrations Induced by Electrical -Mechanical Interactions", *Proceedings of Power Generation Conference*, Arizona, 1980
- [26] Steigleder, K., Kramer, E., "Coupled Vibrations of Steam Turbine Blades and Rotors Due to Torsional Excitation by Negative Sequence Currents", *Proceedings of American Power Conference*, Chicago, 1989
- [27] Reid, S., R., "Coupled blade-rotor torsional vibration component and low pressure blade retrofit issues", *ASME, PWR* ,Vol. 28, p. 251-259, 1995
- [28] Mazur, Z., Luna-Ramirez, A., Juarez-Islas, J.A, "Steam turbine blade failure analysis", *Engineering Failure Analysis*, Vol. 15, No 40210, p. 129-141, 2008
- [29] norma ISO 22266-1 Mechanical vibration – Torsional vibration of rotating machinery – Part 1: Land-based steam and gas turbine generator sets in excess of 50 MW, 2009

- [30] Sever, I., A., „Experimental Validation of Turbomachinery Blade Vibration Predictions“, disertační práce, Imperial College London, 2004
- [31] Dickmann, H., P., ”Unsteady Flow in Turbocharger Centrifugal Compressor: Three – Dimensional Computational Fluid Dynamics Simulation and Numerical and Experimental Analysis of Impeller Blade Vibration “, Journal of Turbomachinery, Vol. 128, p. 455-466, 2006
- [32] Černý, V., ”Experimentální identifikace poměrného útlumu vybraných materiálů“, Výzkumná zpráva Škoda Power, VZTP 1052, 2010
- [33] Byrtus, M., Hajžman M., Zeman, V.,“ Dynamika rotujících soustav“, ZCU, Plzeň, 2011
- [34] Míšek, T., Tětiva, A., Prchlík, L. , Duchek, K., ”Prediction of High Cycle Fatigue Life of Steam Turbine Blading Based on Unsteady CFD and FEM Forced Response Calculation”, in the Proceedings of the ASME Turboexpo - Power for Land, sea and Air, Montreal, 2007
- [35] Balda, M.,” An estimation of the residual life of blades”, Dynamics of Machines, s. 11-18, Praha,1999
- [36] Singh, M. P., Thakur, M. K., ”Assessing Useful Life of Turbomachinery Components ”, 34th Turbomachinery symposium, s. 177-192, 2005
- [37] Růžička, M., Hanke, M., Rost, M.,”Dynamická pevnost a životnost”, Nakladatelství ČVUT Praha, 1992

7 Přílohy

7.1 Příloha 1 - Odezva rotující struny na harmonické buzení

Mějme rotující strunu, která rotuje úhlovou frekvencí $\Omega = 2\pi \cdot 10 \text{ rad/s}$ (viz. obrázek 2.1) a je buzena harmonickou silou o úhlové frekvenci ω_b . Necht' je amplituda buzení f_0 rovna 1 N/m a popis budící síly je dán vztahem (2.34). Předpokládejme měrnou hmotnost struny $\mu = 0.5 \text{ kg/m}$, poloměr zakřivení struny $r=1 \text{ m}$, předepnutí struny silou $T=10000 \text{ N}$. Zajímá nás, jak bude vypadat ustálená časová rezonanční odezva na výše uvedený typ buzení.

Vlastní frekvence struny je dána vztahem (2.16).

$$\omega_j = j \frac{c}{r} = j \frac{1}{r} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad \text{pro } j = 1, 2, 3 \dots \infty$$

Pro dva uzlové průměry (čtyři uzly na obvodě struny), tj. $j=2$, je vlastní frekvence $\omega_k = 283 \text{ rad/s}$.

Uvažujme, že je budící síla předepsána vztahem (2.34).

$$f(\varphi, t) = f_0 \sin(j\varphi_s + \omega_b t) = f_0 \sin(j(\varphi + \Omega t) + \omega_b t)$$

Ustálená časová odezva byla odvozena a je popsána vztahem (2.38).

$$z(\varphi, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_0}{\mu} \frac{1}{\omega_k^2 - (k\Omega + \omega_b)^2} \sin(k\varphi + (k\Omega + \omega_b)t)$$

Rezonance nastane, pokud platí

$$\omega_k = |k\Omega + \omega_b|$$

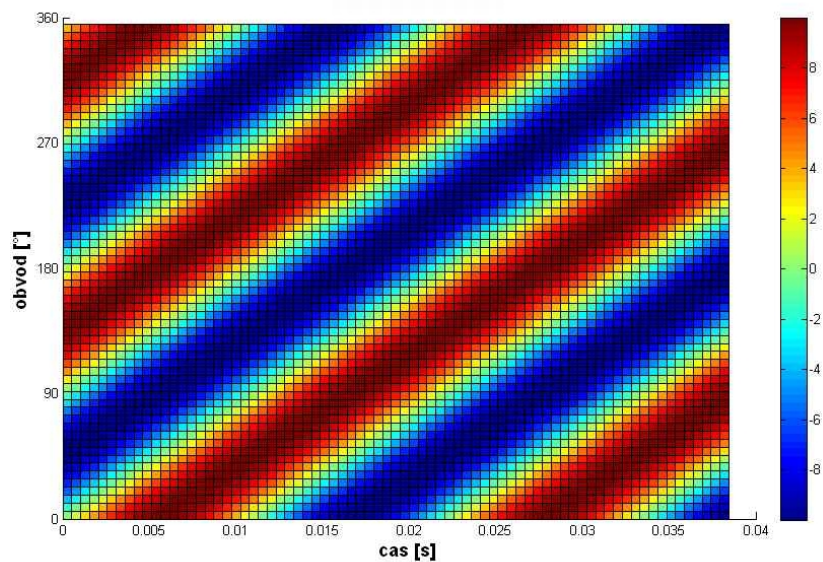
Hodnotu budící úhlové frekvence předpokládáme jako kladné číslo. Znaménko určuje směr buzení vůči směru otáčení Ω . Pokud je hodnota budící úhlové frekvence ω_b kladná, má buzení shodný směr jako je směr otáčení.

Rozlišujeme dva případy

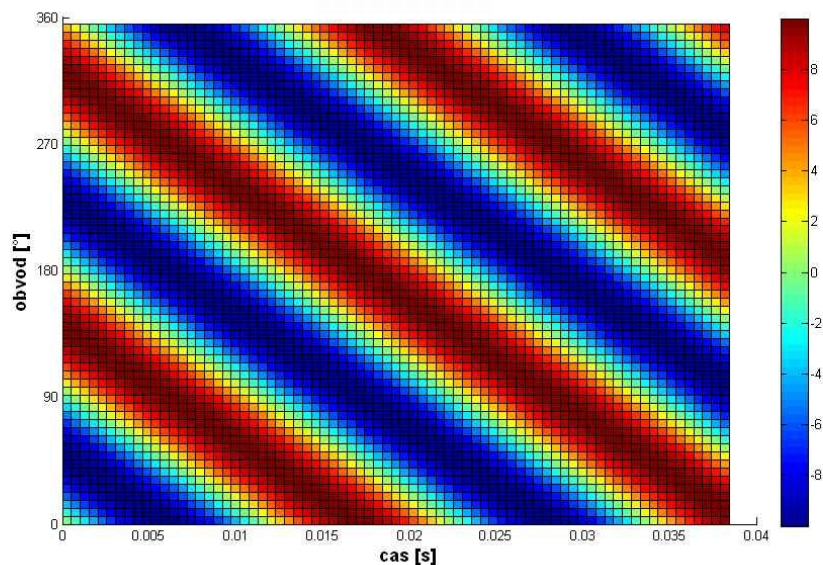
1. $\omega_k = k\Omega + \omega_{b1}$ pro shodný směr ω_{b2} jako je směr otáčení Ω , pak platí \Rightarrow
 $\omega_{b1} = \omega_k - k\Omega = 283 - 2 \times 63 = 157 \text{ rad/s}$
2. $\omega_k = k\Omega + \omega_{b2}$ pro opačný směr ω_{b2} než je směr otáčení Ω , pak platí \Rightarrow
 $\omega_{b2} = \omega_k + k\Omega = 283 + 2 \times 63 = 409 \text{ rad/s}$

Grafické znázornění časové odezvy je ukázáno na následujících obrázcích 7.2 a 7.1. Jak již bylo zmíněno v kapitole 2.2 rezonační stav lze vyvolat pro dvě různé hodnoty budící frekvence. Tyto frekvence se liší kromě velikosti také svým směrem.

Směr pohybu vlnění je v prvním případě opačný než směr otáčení (zpětné vlnění) a v druhém případě je totožný jako směr otáčení (dopředné vlnění).



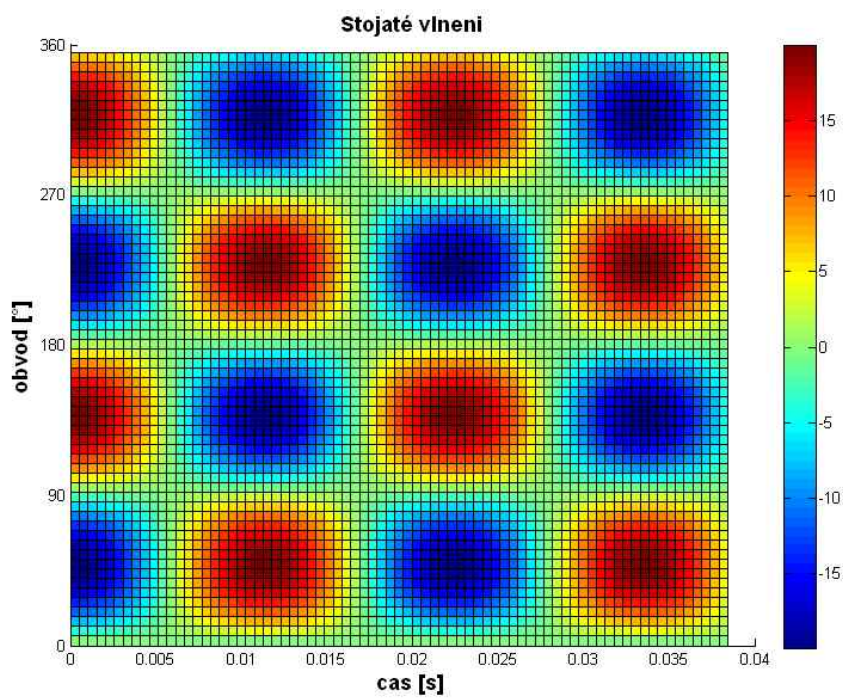
Obrázek 7.1: Časová odezva struny [m] při budící frekvenci blízké ω_{b1} (dopředné vlnění)



Obrázek 7.2: Časová odezva struny [m] při budící frekvenci blízké ω_{b2} (zpětné vlnění)

Poznámka 1

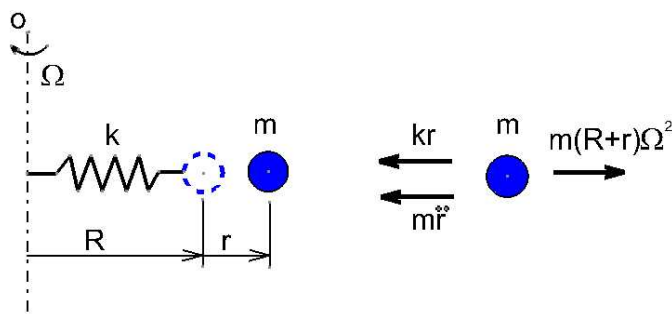
Pokud budeme rotující strunu budit zároveň dvěma různými frekvencemi ω_{b1} a ω_{b2} , pak dojde k sečtení obou odezev a vznikne tzv. stojaté vlnění viz. následující obrázek 7.3.



Obrázek 7.3: Časová odezva struny [m] při budící frekvencemi blízkými ω_{b1} a ω_{b2} (stojaté vlnění)

7.2 Příloha 2 - Snížení tuhosti vlivem rotace

Mějme hmotný bod o hmotnosti m na pružině o statické tuhosti k . Nechť daný systém rotuje úhlovou rychlostí Ω kolem vertikální osy o , jak je schematicky naznačeno na obrázku 7.4.



Obrázek 7.4: Rotující hmota na pružině

Na základě D'Alembertova principu sestavíme silovou rovnici rovnováhy pro daný hmotný bod.

$$m\ddot{r} + kr - m\Omega^2(R + r) = 0$$

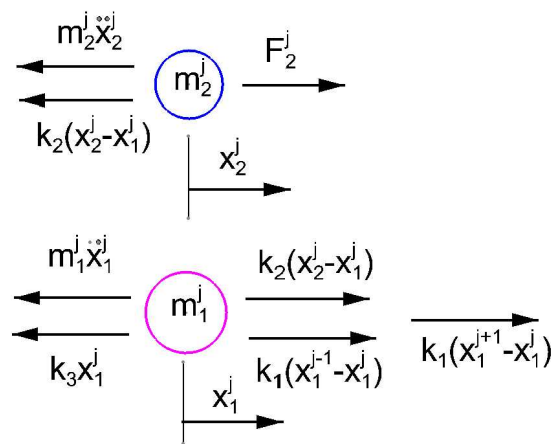
$$m\ddot{r} + (k - m\Omega^2)r = m\Omega^2 R, \quad \tilde{k} = (k - m\Omega^2)$$

Z poslední rovnice je zřejmé, že vlivem rotace dochází ke snížení tuhosti pružiny o hodnotu $m\Omega^2$.

Máme-li rotující systém principiálně podobný tomu, co je na obrázku 7.4, je zapotřebí vzít v úvahu výše popsany efekt a místo statické tuhosti k uvažovat modifikovanou tuhost \tilde{k} .

7.3 Příloha 3 - Sestavení pohybových rovnic pro jednoduché rotačně periodické struktury

Mějme jednoduchou rotačně periodickou strukturu, která je zobrazena na obrázku 3.7. Obecně je struktura sestavena z N segmentů, kde každý segment je tvořen dvěma hmotnými body m_1, m_2 , které jsou provázány pružinami k_1, k_2, k_3 . Předpokládejme, že hmotné body struktury mají jeden stupeň volnosti a pohybují se pouze v obvodovém směru tj. posouvají se pouze po kružnicích se středem v bodě O . Posuvy x_1^j, x_2^j jsou uvažovány v rovině struktury a reprezentují posuv v obvodovém směru. Hmotné body m_2^j struktury jsou harmonicky buzeny silou f_2^j . Každý hmotný bod uvolníme a sestavíme rovnice silové rovnováhy dle D'Alembertova principu, jak je naznačeno na obrázku 7.5.



Obrázek 7.5: Silová rovnováha uvolněných hmotných bodů

Index j označuje příslušnost k j -tému segmentu. Rovnice silové rovnováhy pro hmotný bod m_1^j a m_2^j jsou vyjádřeny následujícími vztahy.

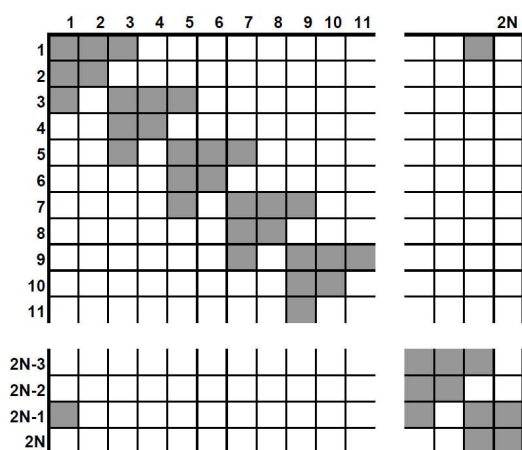
$$m_1^j \ddot{x}_1^j - k_2(x_2^j - x_1^j) - k_1(x_1^{j-1} - x_1^j) - k_1(x_1^{j+1} - x_1^j) + k_3 x_1^j = 0$$

$$m_2^j \ddot{x}_2^j + k_2(x_2^j - x_1^j) - f_2^j = 0$$

Soustavu pohybových rovnic můžeme pak zapsat v konfiguračním prostoru $x = [x_1^1, x_2^1, x_2^1, \dots, x_1^n, x_2^n]^T$ v maticovém tvaru,

$$\mathbb{M}\ddot{x} + \mathbb{K}x = f(t)$$

kde matice tuhosti \mathbb{K} je symetrická a má cirkulační charakter, jak je naznačeno na obrázku 7.6. Matice hmotnosti \mathbb{M} je diagonální a pozitivně definitní.



Obrázek 7.6: *Struktura matice tuhosti*

Uvažované hodnoty při výpočtu modálních vlastností a dynamických odezev jsou uvedeny v tabulce 7.1. Příklad odezvy je ukázán na obrázku 3.9.

Tabulka 7.1: *Vstupní parametry*

m_1	140	[kg]
m_2	3	[kg]
k_1	$1 \cdot 10^6$	[N/m]
k_2	$3.6 \cdot 10^6$	[N/m]
k_3	$2.5 \cdot 10^8$	[N/m]
n	10	počet segmentů
η	0.002	poměrný útlum
k	2	tvar budící síly
f_0	100	[N]

7.4 Příloha 4 - Problematika tlumení

Tlumení je fenomén, při kterém dochází k disipaci mechanické energie, která se následně přetváří v tepelnou energii. Tlumení se uplatňuje při dynamických jevech jako je např. kmitání. Velikost tlumení ovlivňuje chování dynamických systémů a proto je důležité ho uvažovat jak při výpočetních analýzách, tak při experimentálních testech. Tlumení systému se nejvíce uplatňuje při rezonačních stavech. Jeho pozitivní vliv na snižování velikosti amplitud kmitání systémů se hojně využívá v inženýrské praxi, neboť často prodlužuje životnost strojních součástí a zvyšuje komfort jejich používání. Jsou ovšem i případy, kdy tlumení (např. frikční) je považováno za nežádoucí např. valivá ložiska, neboť dochází k parazitnímu maření mechanické energie a tím snižování účinnosti systému.

Existují tři základní mechanizmy tlumení

- Vnitřní tlumení (materiálové)
- Konstrukční tlumení
- Aerodynamické tlumení

Materiálové tlumení je založeno na principu disipace mechanické energie v materiálu vlivem mikro a makroskopických procesů. Příčina materiálového tlumení je v existenci mikroskopických defektů v materiálu jako jsou hranice zrn, nečistoty, či pohyby dislokací. Následně pak termoelastické efekty způsobující lokální teplotní gradienty zapříčiňují nerovnoměrné napěťové pole a tvorbu disipační energie ve formě tepla.

Existuje mnoho matematických modelů popisujících vnitřní tlumení materiálů. Mezi dva základní patří viskoelastický model (7.1) a hysterézní model (7.2),

$$f(\dot{q}) = b_v \dot{q} \quad (7.1)$$

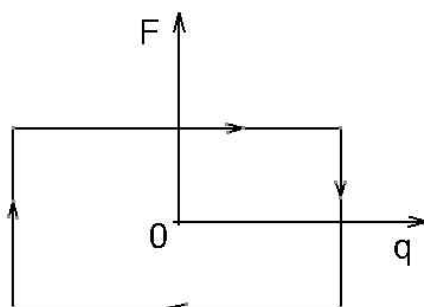
$$f(\dot{q}) = \frac{b_h}{\omega} \dot{q} \quad (7.2)$$

kde b_v a b_h jsou koeficienty tlumení a ω frekvence kmitání.

Konstrukční tlumení vzniká v důsledku tření mezi dvěma součástmi způsobeného jejich vzájemným relativním pohybem, či v důsledku nárazů dvou styčných ploch. Nalezení obecného matematického modelu konstrukčního tlumení je velmi obtížné a proto se používají zjednodušené modely. Nejčastěji se pro popis konstrukčního tlumení používá Coulombův model suchého tření (7.3), jehož hysterézní smyčka je znázorněna na obrázku 7.7.

$$f(\dot{q}) = \mu N \text{sign}(\dot{q}) \quad (7.3)$$

Parametry konstitučního Coulombova modelu jsou zjišťovány na základě experimentálních testů. Hlavními faktory ovlivňující konstrukční tlumení je samotný materiál, kvalita a tvar kontaktních ploch. Důsledkem vzájemného tření kontaktních ploch může být opotřebení, kontaktní únava, proto jsou kontaktní plochy speciálně upraveny (kalení, plazmové nástřiky, návary tvrdokovem atd.), aby se zvýšila jejich odolnost proti opotřebení a tím zachovaly tlumící vlastnosti.



Obrázek 7.7: Coulombův model suchého tření (třecí síla versus posuv)

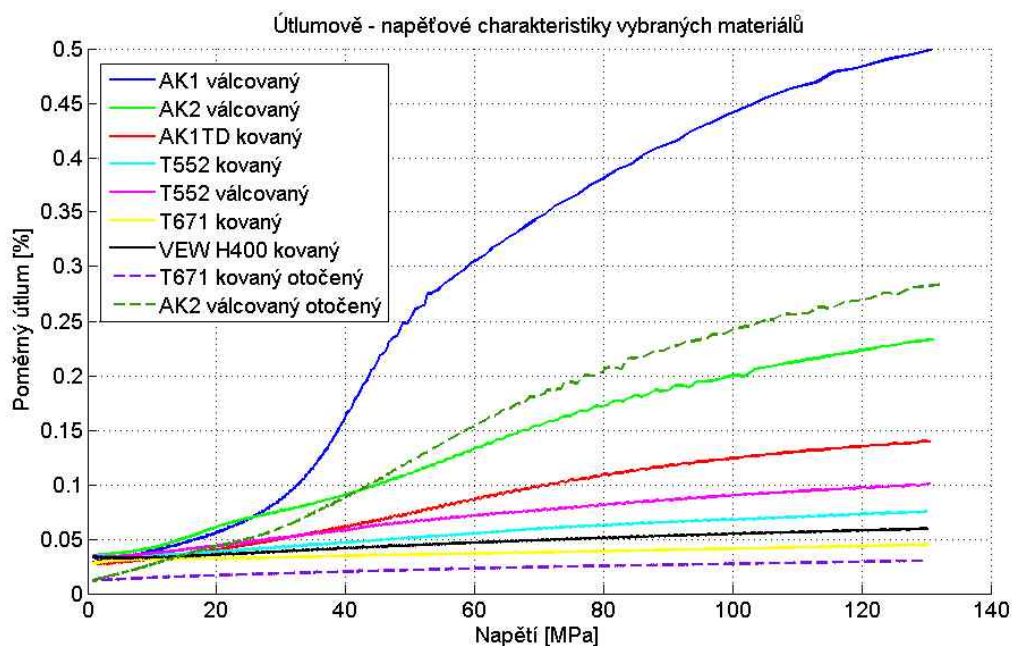
Aerodynamické tlumení vzniká při vzájemné interakci proudícího média a nehybného tělesa resp. při jejich vzájemném pohybu. Toto tlumení má složku viskózní způsobenou třecími ztrátami na povrchu tělesa a složku tlakovou, která je způsobená poklesem tlaku za tělesem vlivem úplavu. Tato odporová síla je dána vztahem (7.4),

$$f(\dot{q}) = c_d \rho \dot{q}^2 \text{sign}(\dot{q}) \quad (7.4)$$

kde c_d je aerodynamický součinitel odporu tělesa, ρ je hustota média a \dot{q} je relativní rychlost média vůči tělesu.

Tlumení u olopatkovaných disků axiálních turbosoustrojí

V dynamice axiálních turbosoustrojí se setkáváme se všemi třemi mechanizmy tlumení. Používané vysokopevnostní a creepově odolné materiály pro výrobu lopatek vykazují rozdílné materiálové tlumení. Je obecně známo, že toto tlumení je také významně závislé na velikosti amplitudy dynamické složky napětí, jak je vidět na grafu 7.8. Tyto závislosti byly měřeny na vzorcích nosníků obdélníkového průřezu, které byly na jedné straně vetknuty a vybuzeny počátečním výkmitem (odezva na počáteční podmínku). Podrobný popis experimentálního zjišťování materiálového tlumení je ve zprávě [32].



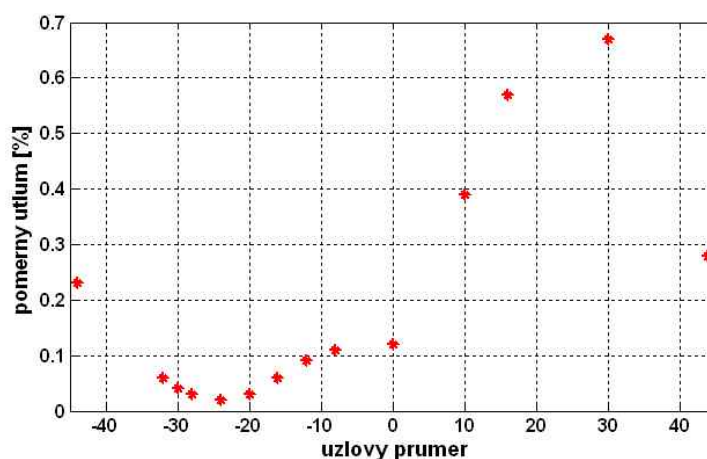
Obrázek 7.8: Materiálové tlumení vybraných materiálů lopatek v závislosti na amplitudě dynamického napětí

S konstrukčním tlumením se zejména setkáme v závěsu lopatky. U lopatek s nýtovanou bandáží dochází k tlumení mezi nýtem lopatky a bandáží. U moderních typů lopatek s kontinuální vazbou dochází ke konstrukčnímu tlumení mezi samotnými vazebními členy (např. bandáží, tie-bossem atd.). Tyto vazební členy jsou konstrukčně navrženy tak, aby vykazovaly optimální konstrukční tlumení. Samotný mechanismus konstrukčního tlumení vykazuje nelineární chování. Tudíž stanovení velikosti konstrukčního tlumení je obtížné a závislé na silových poměrech ve styčných kontaktních plochách. V technické praxi se často volí konzervativní přístup, kdy při dynamických analýzách je konstrukční tlumení nahrazeno energeticky ekvivalentním viskózním tlumením. Důvodem je mimo jiné zachování lineárního chování systému a tím značné zjednodušení výpočtových analýz.

Určení konstrukčního tlumení je možné pomocí experimentálního měření. Toto měření je nejlépe realizovat za provozu, aby se navodily patřičné silové poměry. Tento způsob je ale velmi finančně nákladný a v praxi často velmi obtížně realizovatelný, proto se volí jednodušší způsob a to měření ve vyvažovacím tunelu. Nastává však problém jak vyvodit dostatečně velké budící síly, které by odpovídaly provoznímu stavu. Pro tento účel se většinou používá buzení elektromagnetickým polem pomocí AC magnetu. Na principu tzv. sweepování budící frekvence se stanoví amplitudo-frekvenční charakteristika, na základě které se určí celkový útlum měřené lopatky. Jelikož je ve vyvažovacím tunelu vysoká hodnota vakua, je změřený útlum součtem pouze konstrukčního a materiálového útlumu, neboť aerodynamické tlumení není přítomné. Známe-li velikost materiálového útlumu na základě grafu 7.8, je jednoduché stanovit velikost konstrukčního tlumení.

Stanovení aerodynamického tlumení u olopatkovaných disků obtékaných pracovním médiem obnáší simultánně řešit chování nestacionárního proudového pole s vlastním kmitáním lopatek. Tento typ úloh je velmi numericky náročný a proto se v praxi často oba problémy řeší odděleně, neboť se předpokládá, že proudící médium nemá významný vliv na chování lopatek. Dále se předpokládá pouze jednosměrná interakce, což znamená, že pouze proudící médium je ovlivňováno pohybem lopatek.

Aerodynamický útlum se zejména stanovuje kvůli predikci vzniku samobuzeného kmitání lopatek (Flutteru). Za provozu mohou nastat takové proudové poměry, kdy hodnota aerodynamického tlumení je záporná, což znamená, že médium předává část své energie lopatkám a tak dochází k jejich samobuzení. Je na místě zmínit, že aerodynamické tlumení je ovlivňováno tvary kmitu lopatek a uzlovými průměry. Na obrázku 7.9 je ukázán příklad závislosti aerodynamického tlumení na počtu uzlových průměrů tvaru kmitu olopatkovaného kola.

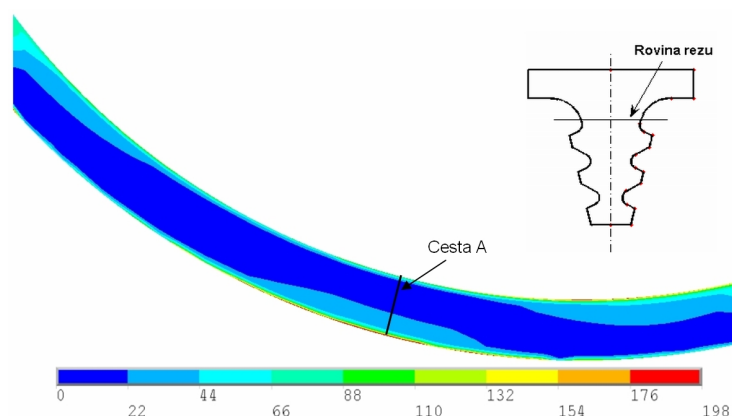


Obrázek 7.9: Příklad závislosti aerodynamického tlumení nízkotlakého stupně parní turbíny na uzlových průměrech

V případě, že aerodynamické tlumení je záporné a zároveň součet konstrukčního a materiálového tlumení je menší než aerodynamické tlumení, pak dochází k významnému kmitání lopatek a to u lineárních soustav nade všechny meze.

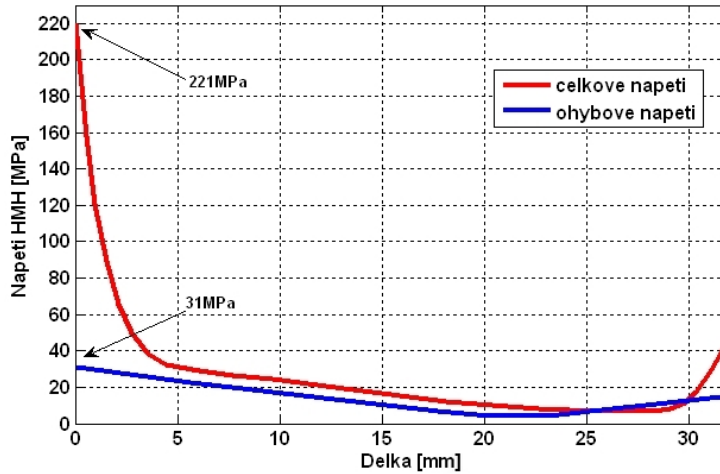
7.5 Příloha 5 - Hodnocení dynamických napětí z pohledu vysokocyklové únavy

V kapitole 4.2.3 byla numericky zjištěna rezonanční napětí na lopatce LSB48 při torzním buzení rotorové soustavy v místě generátoru. Nyní se zaměříme na napětí v nožce závěsu, viz. obrázek 4.17. V rádiusu horního krčku se vyskytuje kombinace vysokého středního statického napětí a amplitudy dynamického napětí. Na obrázku 7.10 je zobrazeno rozložení dynamického napětí z řezu procházejícím horním krčkem závěsu, tento řez je kolmý na radiálu lopatky.



Obrázek 7.10: Rozložení dynamického napětí HMM [MPa] v horním krčku závěsu

Dále byl zjištěn charakter a průběh dynamického napětí podél cesty A, která prochází místem s nejvyšším dynamickým napětím, viz. obrázek 7.11. Z průběhu napětí v krčku závěsu je vidět, že mají ohybový charakter, neboť ve středu krčku je napětí skoro nulové.



Obrázek 7.11: Průběh napětí podél cesty A

Cílem je zjistit, zdali dynamická napětí v krčku závěsu mohou způsobit porušení lopatky v důsledku vysokocyklové únavy. Pro hodnocení vysokocyklové únavy zvolíme metodu NSA (Nominal stress analysis). Je to jedna z nejstarších metod pro hodnocení vysokocyklové únavy, avšak je v technické praxi stále hojně používána. Vyjdeme z Haighova diagramu pro hladký vzorek, v kterém je mezní únavová čára dána vztahem (7.5)

$$\frac{\sigma_A}{\sigma_c} = 1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_f} \quad (7.5)$$

kde σ_A je amplituda napětí, σ_m značí střední nominální napětí, σ_c je mez únavy pro střídavé zatížení a σ_f značí fiktivní napětí. Mez únavy σ_c ponížíme o vliv koncentrátoru napětí dle vztahu (7.6),

$$\sigma_c^x = \frac{\sigma_c \varepsilon_v \eta_p \xi_p}{\beta} \quad (7.6)$$

kde ε_v je součinitel velikosti, η_p značí součinitel jakosti povrchu, ξ_p je součinitel vlivu prostředí a β značí součinitel vrubu, který vyjádříme dle Němce [37].

$$\beta = \left[1 + \left(\frac{\alpha_{\text{red}}}{\nu_\beta} - 1 \right) \eta \right] \psi \quad (7.7)$$

Hodnoty pro ν_β , η , ψ byly odečteny z grafů publikovaných v [37] a jsou uvedeny v tabulce 7.2. Koncentrátor redukovaných napětí α_{red} stanovíme dle (7.8),

$$\alpha_{\text{red}} = \frac{(\sigma_A^{\text{max}})_{\text{red}}}{(\sigma_A^{\text{nom}})_{\text{red}}} \quad (7.8)$$

kde $(\sigma_A^{\text{max}})_{\text{red}}$ je amplituda špičkového redukované napětí a $(\sigma_A^{\text{nom}})_{\text{red}}$ značí amplitudu nominálního redukovaného napětí. Obě napětí odečteme z grafu 7.11.

Tabulka 7.2: Hodnoty pro součinitele vrubu dle Němce

ν_β	η	ψ	α_{red}	β
1.1	1	.78	7.1	5.0

V tabulce 7.3 jsou dány mechanické vlastnosti materiálu lopatky včetně meze únavy pro střídavý cyklus zatěžování. Jsou uvažovány vlastnosti materiálu při teplotě 20°C, neboť hodnoty při provozní teplotě nejsou k dispozici a rozdíl mezi provozní teplotou a nami uvažovanou je velmi malý.

Tabulka 7.3: Mechanické vlastnosti materiálu lopatky při 20°C

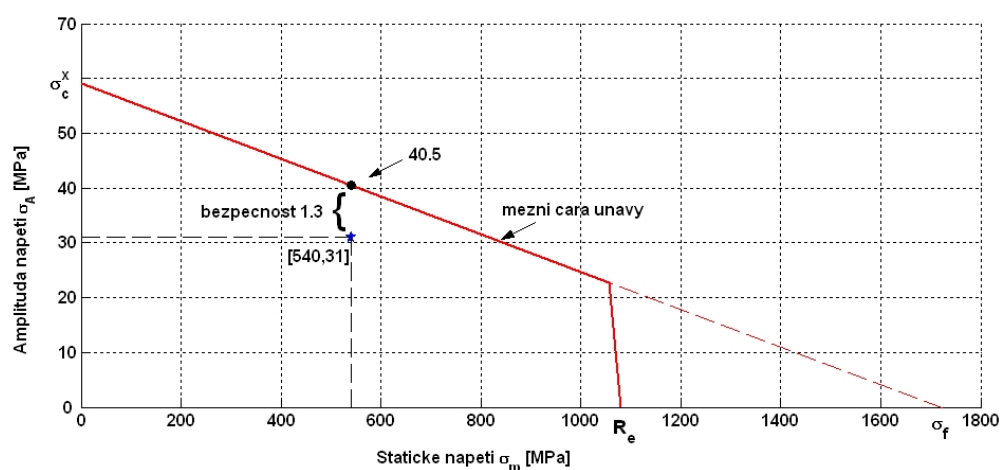
Mez kluzu R_e [MPa]	Mez pevnosti R_m [MPa]	Mez únavy σ_c [MPa]
1130	1270	510

Dosazením do vztahu (7.6) získáme poníženou mez únavy $\sigma_c^x = 59 \text{ MPa}$. Použité hodnoty součinitelů jsou uvedeny v tabulce 7.4.

Tabulka 7.4: Hodnoty součinitelů

ε_v	η_p	ξ_p
1	0.72	0.8

K vykreslení mezní únavové čáry v Haighově diagramu potřebuje dále znát fiktivní napětí σ_f , které stanovíme pro cyklické zatěžování v ohybu jako 1.4 násobek meze pevnosti R_m . Dále vyneseme do diagramu 7.12 bod reprezentující rezonační kmitání při nominálních otáčkách. Statické nominální napětí v krčku závěsu bylo určeno na základě statické analýzy lopatky vystavené působení odstředivých sil. Jeho hodnota je 540 MPa. Nominální amplituda ohybového napětí byla odečtena z grafu 7.11. Výsledná bezpečnost vůči ponížené mezi únavy vlivem vrubu při uvažování neměnného statického zatížení lopatky vychází 1.3. To je hodnota velmi nízká. Minimální hodnota bezpečnosti by měla být větší než 2.5 tak, aby pokryla neurčitosti a rozptyly hodnot použitých při sestavování Haighova diagramu a výpočtu rezonančních napětí. Obdobným způsobem jako byla stanovena bezpečnost pro kritické místo v krčku závěsu, může být stanovena bezpečnost pro libovolné místo na lopatce např. na tiebossu, viz. obrázek 4.18.



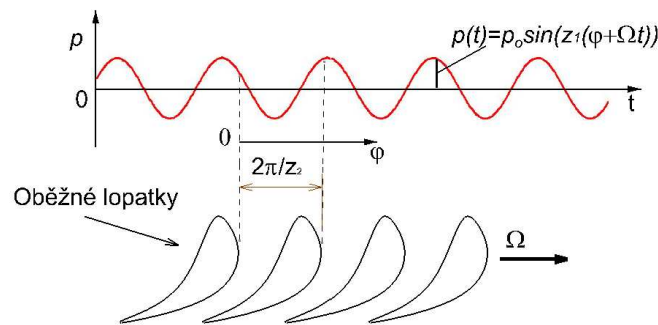
Obrázek 7.12: Haighův diagram pro napětí v krčku závěsu lopatky LSB48

Lopatka LSB48 byla frekvenčně navržena tak, aby k rezonačnímu kmitání nedocházelo a výše uvedená metoda hodnocení rezonačních napětí je ilustrativní. Zároveň si je autor vědom toho, že kvalita sítě v místě krčku závěsu není dostatečně jemná tak, aby přesně vystihla špičkové napětí v rádiu. Pro tento účel by musela být použita metoda submodelingu, jako tomu bylo v práci [34].

7.6 Příloha 6 - Parametr buzení oběžných lopatek

V turbinářské praxi se můžeme často setkat s parametrem buzení ε definujícím míru buzení oběžných lopatek. K jeho zavedení existuje podobný důvod jako pro parametr vybuditelnosti χ (3.38). Tento parametr ε však nerespektuje tvar vlastního kmitu, ale jen rozložení budící síly po ploše lopatky.

Předpokládejme, že tlakové pole za rozváděcí mříží je po délce lopatky neměnné a je po obvodu harmonicky rozloženo tak, jak je naznačeno na obrázku 7.13. Statickou složku tlakového pole v tomto případě neuvažujeme. Z pohledu rotující lopatkové mříže se tlakové pole jeví jako časově harmonicky proměnné.



Obrázek 7.13: Časový průběh tlaku za rozváděcí mříží působící na oběžné lopatky

Tlakové pole matematicky popíšeme dle (7.9),

$$p(\varphi, t) = p_0 \sin(z_1(\varphi + \Omega t)) \quad (7.9)$$

kde z_1 je počet rozváděcích lopatek, Ω je úhlová rychlost p_0 je amplituda tlaku. Síla působící na jednu oběžnou lopatku je dána integrálem,

$$f(t) = (r_1^2 - r_2^2) \int_0^{\frac{2\pi}{z_2}} p_0 \sin(z_1(\varphi + \Omega t)) d\varphi = \dots = f_0 \cos(z_1 \Omega t + \beta) \quad (7.10)$$

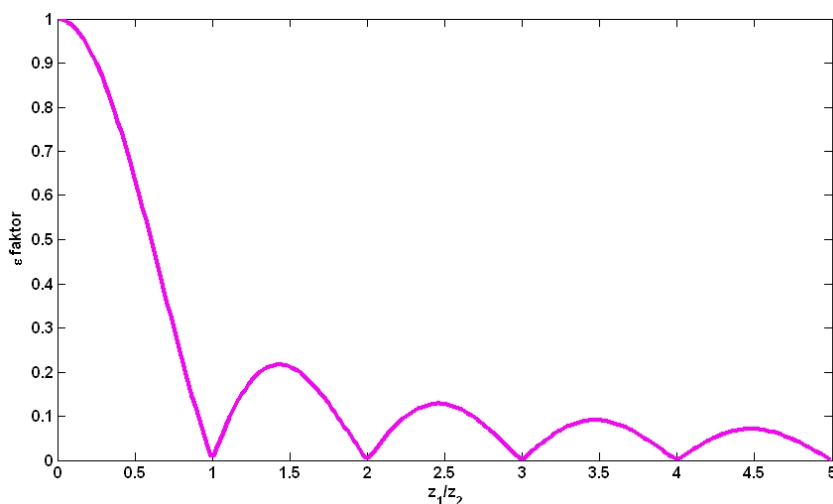
kde z_2 určuje počet oběžných lopatek, β úhel fázového posuvu, který v tomto případě nemá vliv na výslednou amplitudu buzení. r_1 a r_2 definují špičkový resp. patní poloměr lopatky. Amplituda budící síly f_0 je dána vztahem (7.11),

$$f_0 = \frac{(r_1^2 - r_2^2)p_0}{z_1} \sqrt{2(1 - \cos(2\pi \frac{z_1}{z_2}))} = \varepsilon \frac{(r_1^2 - r_2^2)p_0}{z_2} \quad (7.11)$$

kde

$$\varepsilon = \frac{z_2}{z_1} \sqrt{2(1 - \cos(2\pi \frac{z_1}{z_2}))} \quad (7.12)$$

Zavedeme parametr buzení ε , který udává závislost velikosti amplitud budící síly na poměru počtu rozváděcích lopatek ku oběžným. Závislost je zobrazena na obrázku 7.14.



Obrázek 7.14: Závislost velikosti budící síly na poměru počtu rozváděcích lopatek ku počtu oběžných

Na základě grafu 7.14 se jeví jako optimální volit počet rozváděcích lopatek jako celé násobky počtů oběžných lopatek, pak bude působící budící síla na lopatku minimální. V praxi se poměr z_1/z_2 pohybuje v rozsahu 0.6 až 1.2, což je ovlivněno požadavkem na maximální účinnost. Tento parametr je spíše orientační a slouží při návrhu turbinového stupně k výběru vhodného poměru z_1/z_2 .

Seznam obrázků

1.1	Schématiký obrázek axiálního stupně turbíny	8
2.1	Model předeprnuté struny stočené do kruhu	16
2.2	Harmonické buzení pohybující se v prostoru a stojící struktura (pro $j=3$)	22
2.3	Schématiký obrázek běžící vlny	23
2.4	Schématiký obrázek stojatého vlnění	25
2.5	Buzení harmonické pohybující se v prostoru a rotující struktura (pro $j=3$)	26
2.6	Campbellův diagram	28
2.7	Schématické zobrazení Campbellova diagramu (vybuditelnost dopředné resp. zpětné vlny)	29
2.8	3D waterfall - odezva na harmonické buzení (pro předeprnutou strunu stočenou do kruhu)	29
2.9	Schématické zobrazení běžící vlny	30
2.10	Buzení Diracovým impulzem a rotující struktura	32
3.1	Schématické znázornění segmentu rotačně periodické struktury	36
3.2	Graf znázorňující rozložení budící síly na poloměru r_1 v daný časový okamžik (schématické zobrazení pro strukturu s 10 segmenty a s rozložením síly odpovídající jednomu uzlovému průměru)	41
3.3	Časový průběh budící síly periodicky se měnící po obvodě struktury (schématické zobrazení pro strukturu s 10 segmenty a s rozložením síly odpovídající jednomu uzlovému průměru)	42
3.4	Graf závislosti budící frekvence na uzlových průměrech budící síly	44
3.5	Schématický průběh statické budící síly v obvodovém směru (pro zvolené souřadnice r, z)	45
3.6	Obecný průběh síly působící na oběžné kolo při parciálním ostříku získaný na základě CFD výpočtu	46
3.7	Rotačně periodická struktura	48
3.8	Segment rotačně periodické struktury	49
3.9	Odezva rotačně periodické struktury na harmonické buzení	50
3.10	Interferenční diagram pro rotačně periodickou strukturu (viz. obrázek 3.7)	50
3.11	Ukázka vlastních tvarů rotačně periodické struktury	51
3.12	Model lopatky LSB48	52
3.13	MKP model lopatky LSB48	54
3.14	Okrajové podmínky na závěsu lopatky LSB48	54
3.15	Mapa kontaktních tlaků a plocha provázání vazebního členu	55
3.16	Interferenční diagram pro lopatku LSB48 za rotace (3000 1/min)	56

3.17	Principiální schéma experimentálního standu	56
3.18	Experimentální stand s olopatkovaným diskem	57
3.19	Výběr master uzlů na lopatce LSB48	61
3.20	Schématický postup porovnání modálních vlastností plného a reduko- vaného modelu	62
3.21	Porovnání vlastních frekvencí plného modelu a redukováného modelu lopatky LSB48	62
3.22	Relativní rozdíl vlastních frekvencí plného modelu a redukováného modelu lopatky LSB48	63
3.23	1. Vlastní tvar kmitu olopatkovaného kola LSB48 (1 uzlový průměr) .	64
3.24	1. Vlastní tvar kmitu olopatkovaného kola LSB48 (3 uzlové průměry)	64
3.25	2. Vlastní tvar kmitu olopatkovaného kola LSB48 (5 uzlových průměrů)	64
3.26	34. vlastní tvar kmitu s 18 uzlovými průměry a frekvencí 2440Hz (výřez olopatkovaného disku s deseti lopatkami LSB48 - axiální posuv)	66
3.27	Amplitudy odezvy [mm] lopatky LSB48 na harmonické buzení silou ve směru obvodovém (směr \mathbf{y})	69
3.28	Amplitudy odezvy [mm] lopatky LSB48 na harmonické buzení silou ve směru axiálním (směr \mathbf{z})	70
3.29	Participační faktor v závislosti na vlastním tvaru, počtu uzlových průměrů a směru budící síly pro lopatku LSB48	71
4.1	Zjednodušený model rotoru s lopatkami	73
4.2	Vliv vlastní frekvence λ_1 v závislosti na parametrech η a δ	75
4.3	Vliv vlastní frekvence λ_2 v závislosti na parametrech η a δ	76
4.4	Vliv vlastní frekvence λ_3 v závislosti na parametrech η a δ	76
4.5	Závislost rezonanční amplitudy x_1 na parametrech η a δ při frekvenci buzení rovné λ_3	80
4.6	Závislost rezonanční amplitudy x_1 na parametrech η a δ při frekvenci buzení rovné λ_2	80
4.7	Vazba mezi rotorem a lopatkou	83
4.8	CAD model pokusného rotoru	84
4.9	Vypočtený torzní tvar pokusného rotoru s lopatkou LSB48	85
4.10	Rotorová soustava "Indie" s lopatkami LSB48	86
4.11	Torzní tvar rotorové soustavy "Indie" s lopatkou LSB48 $\lambda_2=89.7\text{Hz}$. .	87
4.12	Torzní tvar rotorové soustavy "Indie" s lopatkou LSB48 $\lambda_3=106.0\text{Hz}$.	87
4.13	Rotorová soustava "Indie" s lopatkami LSB48 - harmonické buzení torzním momentem	88
4.14	Odezva na špičce lopatky LSB48 rotorové soustavy "Indie" při har- monickém torzním buzení	89
4.15	Deformace lopatky při rezonačním kmitání frekvencí 89.7Hz	89

4.16	Rozložení rezonačního napětí (HMH v MPa) na lopatce LSB48 při frekvenci 89.7Hz	90
4.17	Rozložení rezonačního napětí (HMH v MPa) v závěsu lopatky LSB48 při frekvenci 89.7Hz (max. 221MPa)	90
4.18	Rozložení rezonačního napětí (HMH v MPa) kolem tie-bossu lopatky LSB48 při frekvenci 89.7Hz (max. 260MPa)	90
7.1	Časová odezva struny [m] při budící frekvenci blízké ω_{b1} (dopředné vlnění)	100
7.2	Časová odezva struny [m] při budící frekvenci blízké ω_{b2} (zpětné vlnění)	100
7.3	Časová odezva struny [m] při budící frekvencemi blízkými ω_{b1} a ω_{b2} (stojaté vlnění)	101
7.4	Rotující hmota na pružině	102
7.5	Silová rovnováha uvolněných hmotných bodů	103
7.6	Struktura matice tuhosti	104
7.7	Coulombův model suchého tření (třecí síla versus posuv)	106
7.8	Materiálové tlumení vybraných materiálů lopatek v závislosti na amplitudě dynamického napětí	107
7.9	Příklad závislosti aerodynamického tlumení nízkotlakého stupně parní turbíny na uzlových průměrech	108
7.10	Rozložení dynamického napětí HMH [MPa] v horním krčku závěsu	109
7.11	Průběh napětí podél cesty A	110
7.12	Haighův diagram pro napětí v krčku závěsu lopatky LSB48	112
7.13	Časový průběh tlaku za rozváděcí mříží působící na oběžné lopatky	113
7.14	Závislost velikosti budící síly na poměru počtu rozváděcích lopatek ku počtu oběžných	114

Seznam tabulek

2.1	Rozlišení běžících vln	28
3.1	Mechanické vlastnosti materiálu lopatky a disku při 20°C	53
3.2	Porovnání vlastních frekvencí samotné lopatky LSB48	60
3.3	Poklesy odezev v závislosti na poměrné frekvenci a poměrném útlumu	67
4.1	Vlastní frekvence vázaného kmitání rotor-lopátky pokusného rotoru	84
4.2	Vlastní frekvence vázaného kmitání rotor-lopátky rotorové soustavy Indie	86
7.1	Vstupní parametry	104
7.2	Hodnoty pro součinitele vrubu dle Němce	111
7.3	Mechanické vlastnosti materiálu lopatky při 20° C	111
7.4	Hodnoty součinitelů	111

Seznam publikovaných prací autora disertační práce

Míšek, T. , "Development of a 3000 RPM 48" Steel Blade for Steam Turbine Application", The 13th Blade Mechanics Seminar, Baden, Switzerland, 2006

Míšek, T. , Albl, P. , "Dynamický výpočet olopatkovaného disku VT rotoru" , Proceedings of Computation Mechanics, Nečtiny, 2006

Prchlik L., Wittner M., Míšek T., Albl P., "The Influence of Labyrinth Seal Design on Steam Turbine Rotor Stability: Parametric Study"ISCORMA-4 2007, Calgary, Canada, 2007

Míšek, T., Tětiva, A., Prchlík, L. , Duchek, K., "Prediction of High Cycle Fatigue Life of Steam Turbine Blading Based on Unsteady CFD and FEM Forced Response Calculation" , Proceedings of the ASME Turboexpo, Montreal, 2007

Prchlik, L., Míšek, T., Kubin, Z., Duchek, K., "Static and Dynamic Analysis of 48" Steel Last Stage Blade for Steam Turbine" , Proceedings of the ASME Turboexpo, Orlando, USA, 2009

Prchlik, L., Míšek, T., Kubin, Z., Duchek, K., "The Measurement of Dynamic Vibration Modes and Frequencies of a Large LP Bladed Disc" , Proceedings of the ASME Turboexpo, Orlando, USA, 2009

Kubin, Z., Panek, P., Cerny, V., Míšek T., Hlous J., Prchlik L., "Determination of crack initiation on L-1 LP steam turbine blades, Part 1: Measurements on rotortrain, material specimens and blades" , Proceedings of the ASME Turboexpo, Kanada , 2011

Anotace

Disertační práce se zabývá problematikou dynamické analýzy olopatkovaných disků axiálních turbosoustrojí. Úvodní kapitola je zaměřena na pochopení chování rotačně periodické struktury. Pro jednoduché 1D rotačně symetrické kontinuum (předepnutá stočená struna) je sestavena pohybová rovnice, která je následně analyticky řešena. Jsou nalezeny její vlastní frekvence a vlastní funkce. Dalším krokem je řešení vynuceného kmitání pro několik typů buzení. Typy buzení jsou vybrány takové, které se mohou objevit na reálných olopatkovaných discích turbosoustrojí nebo při experimentálním měření. Je ukázáno, že vybuzené kmity mají různý charakter závislý na typu buzení. Existují dva základní druhy kmitání rotačně symetrických struktur: stojaté vlnění, běžící vlnění.

Další kapitola práce je zaměřena na dynamickou analýzu rotačně periodických struktur (olopatkovaných disků) s využitím rotačně periodické podmínky, která umožňuje významným způsobem zredukovat počet stupňů volnosti dané úlohy, resp. výpočetní nároky. V teoretické části jsou odvozeny vztahy pro výpočet modálních vlastností olopatkovaných disků a následně jsou diskutovány jejich vlastnosti. Dále jsou odvozeny vztahy pro výpočet odezvy na harmonické buzení pro různé typy rozložení sil po obvodě kola. Pro výpočet modálních vlastností a vynuceného kmitání periodických struktur s využitím rotačně periodické podmínky byl sestaven výpočetní nástroj PERIO v prostředí MATLAB.

Byla sestavena metodika výpočtu modálních vlastností pro dlouhé vázané lopatky. Je uvažováno lineární chování kontaktní vazby během provozu lopatek. Navržená metodika výpočtu modálních vlastností pro dlouhé vázané lopatky mimo jiné zahrnuje správnou volbu okrajových podmínek. Tato metodika byla aplikována při výpočtech modálních vlastností koncové nízkotlaké lopatky LSB48, které byly nedílnou součástí procesu konstrukčního návrhu. Porovnáním naměřených a vypočtených vlastních frekvencí se podařilo ověřit jednak korektní naladění lopatky LSB48 a dále metodiku výpočtu modálních vlastností vázaných lopatek. Experiment potvrdil, že existuje velmi dobrá shoda mezi výpočtovým modelem a skutečným dílem, neboť odchylky u naměřených a vypočtených vlastních frekvencí se pohybovaly do 3%.

Byla ověřena možnost použití statické redukce za účelem významného snížení počtu stupňů volnosti lopatky s vazebními členy. Je však nutná správná volba master uzlů (stupňů volnosti) a to jak v oblasti listu, tak zejména v oblasti kontaktních ploch vazebních členů.

Pro posuzování míry vybuditelnosti vlastního tvaru kmitu byl zaveden parametr vybuditelnosti χ a byl odvozen vztah pro jeho stanovení v případě použití rotačně periodické podmínky. Tento vztah byl použit při vyhodnocování míry vybuditelnosti vlastních tvarů lopatky LSB48.

Závěrečná kapitola se zaměřuje na vzájemnou interakci lopatek a rotoru při torzním kmitání. Na zjednodušeném modelu dvojdisku s lopatkami je prezentován princip vzájemné interakce lopatek a rotoru. Jedním z hlavních cílů analýzy zjednodušeného modelu bylo provedení detailního rozboru vlivu jednotlivých parametrů (tuhost,

hmotnost lopatek a rotoru) na vlastní frekvence a na rezonanční amplitudy kmitání lopatek. Model je možno svými parametry naladit tak, aby s akceptovatelnou přesností predikoval vzájemnou interakci skutečné rotorové soustavy s lopatkami.

Pro zpřesnění predikce modálních vlastností systému lopatky-rotor (při torzním kmitání rotoru) byla sestavena metodika, která je založena na metodě MKP, kdy je rotor modelován pomocí 1D nosníkových prvků a lopatky pomocí 3D objemových prvků a dále je použita podmínka cykličnosti. Tento postup výpočtu vzájemného torzního kmitání rotoru a lopatek byl zautomatizován pomocí APDL jazyka v prostředí ANSYS. Navržená metodika umožňuje velmi rychle a operativně analyzovat vázané torzní frekvence rotoru a lopatek. Korektnost a přesnost navržené metodiky byla ověřena experimentálním měřením na pokusném kole s lopatkou LSB48.

Anotation

The thesis focuses on dynamic behavior of bladed disks of axial turbomachinery. The first section is dealing with axisymmetric structure in order to understand behavior of rotational periodic structures since they exhibit very similar properties. Equation of motion for simple 1D continuum (preloaded coiled string) was determined and afterwards analytically solved. Natural frequencies and functions were found out first and then forced response was analyzed for different kinds of excitation forces. They were selected as can be met on actual bladed disks of turbomachinery during operation or during test rig measurement. It was proven that two basic responses exist: rotating and fixed wave vibration.

The next chapter is dealing with dynamic analysis of rotational periodic structures utilizing equation of cyclic symmetry. This approach enables to reduce significantly number of degree of freedoms. Within theoretical part the relation for modal analysis of bladed disk is built up and then bladed disk properties are discussed. Relations for forced response calculation are presented and different types of harmonic force distribution around the bladed disk are distinguished. The new computation tool called PERIO was built in MATLAB. It allows determining modal properties and forced response of the periodic structures using cyclic symmetry equations.

The new methodology using cyclic symmetry was applied on a bladed disk with long interconnected blades designated as LSB48. The bladed disk system was considered as linear in terms of modeling contact at interlocking elements. Determination of appropriate boundary conditions was part of the work in order to obtain the most relevant model of the bladed disks. The FE model was verified from view of calculated natural frequencies against the measured data. Full scale measurement test under rotation confirmed good agreement between the both calculated and measured frequencies. The relative difference was up to 3%.

Application of static reduction was considered in order to significantly reduce number of degree of freedoms (dof). It was found that an application of the reduction is feasible with reasonable amount of accuracy however selection of master dofs is crucial especially in regions around the interlocking elements.

A shape response factor was derived for the rotational periodic structure in order to determine how extensively a particular mode shape can be excited in dependence to excitation force. This shape response factor was evaluated for first four mode shapes of the blade LSB48.

The final chapter focuses on coupled rotor blade torsional vibration. The simplified model of double disk with blades is considered for revealing basic principle of torsional interaction between blades and disks. The detailed study was carried out in order to find relation between natural frequencies and bladed disk parameters (stiffness and mass of blade and disk). The simplified model is possible to set up to represent the actual rotor train system with blades however accuracy is just moderate.

The unique methodology for prediction of coupled rotor-blade frequencies was developed in order to get accurate results of modal analysis with reasonable computation effort. The method is based on FE when a rotor and blades are modeled with 1D beam and 3D solid elements, respectively. Cyclic symmetry equations are considered for bladed disk behavior. This approach was implemented into ANSYS using APDL programming language. The good accuracy and correctness of the methodology were verified on a test rig using full-scale blades LSB48.