

**CÍCERO CARLOS RAMOS DE BRITO**

**MÉTODO GERADOR DE DISTRIBUIÇÕES E CLASSES DE DISTRIBUIÇÕES  
PROBABILÍSTICAS**

**TESE DE DOUTORADO**

**RECIFE - PE  
AGOSTO - 2014**



**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM BIOMETRIA E ESTATÍSTICA APLICADA**

**MÉTODO GERADOR DE DISTRIBUIÇÕES E CLASSES DE DISTRIBUIÇÕES  
PROBABILÍSTICAS**

Tese apresentada à Universidade Federal Rural de Pernambuco, para obtenção do título de Doutor em Biometria e Estatística Aplicada, Área de Concentração: Modelagem e estatística aplicada.

Estudante: Cícero Carlos Ramos de Brito

Orientador: Prof. Dr. Wilson Rosa de Oliveira

Co-orientador: Prof. Dr. Leandro Chaves Rêgo

**Recife, agosto de 2014**

Ficha catalográfica

B862m Brito, Cícero Carlos Ramos de  
Método gerador de distribuições e classes de  
distribuições probabilísticas / Cícero Carlos Ramos de  
Brito. – Recife, 2014.  
241 f. : il.

Orientador: Wilson Rosa de Oliveira.  
Tese (Doutorado em Biometria e Estatística  
Aplicada) – Universidade Federal Rural de Pernambuco,  
Departamento de Estatística e Informática, Recife, 2014.  
Referências e apêndice(s).

1. Distribuições probabilísticas 2. Funções geradoras de  
classes de distribuições 3. Método gerador de distribuições  
de probabilidade 4. Método gerador de classes de  
distribuições de probabilidade I. Oliveira, Wilson Rosa de,  
orientador II. Rêgo, Leandro Chaves, co-orientador.

CDD 310

**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO**  
**PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM BIOMETRIA E ESTATÍSTICA APLICADA**

**MÉTODO GERADOR DE DISTRIBUIÇÕES E CLASSES DE DISTRIBUIÇÕES**  
**PROBABILÍSTICAS**

CÍCERO CARLOS RAMOS DE BRITO


Tese julgada adequada para obtenção do título de Doutor em Biometria e Estatística Aplicada, defendida e aprovada por unanimidade em 07/08/2014 pela Banca Examinadora.

Orientador:



Prof. Dr. Wilson Rosa de Oliveira Junior  
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Banca Examinadora:



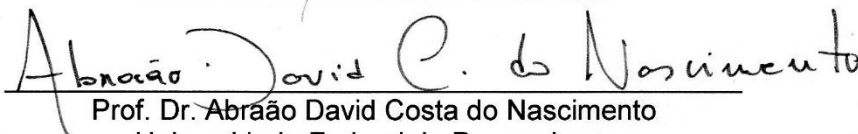
Prof. Dr. Leandro Chaves Rêgo  
Universidade Federal de Pernambuco



Prof. Dr. Renato José de Sobral Cintra  
Universidade Federal de Pernambuco



Prof. Dr. Antônio Murilo Santos Macedo  
Universidade Federal de Pernambuco



Prof. Dr. Abraão David Costa do Nascimento  
Universidade Federal de Pernambuco

As duas mulheres da minha vida,  
minha mãe D. Severina Ramos de  
Brito (*in memoriam*) e, minha  
esposa Bárbara Christina Silva de  
Brito.

Dedico.

## AGRADECIMENTOS

Ao meu bom Deus, por estar sempre presente nos momentos de alegrias e dificuldades.

À minha família, pois, sem ela não teria conseguido vencer mais esta batalha.

À Universidade Federal Rural de Pernambuco, em especial ao Departamento de Estatística e Informática, por ter dado todas as condições necessárias para a realização do presente trabalho.

Aos Professores Doutores Wilson Rosa de Oliveira e Leandro Chaves Rêgo, pela dedicação, ensinamentos, confiança, amizade e paciência sempre concedida.

À Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Biometria e Estatística Aplicada, por ter dado todas as condições necessárias para o desenvolvimento do curso.

A todos os Professores do Programa de Pós-Graduação em Biometria e Estatística Aplicada que, diretamente ou indiretamente, contribuíram para o meu sucesso.

Aos doutores, professores e amigos Paulo José Duarte Neto, Kleber Napoleão Nunes de Oliveira Barros, Gabriel Rivas de Melo, José de Arimatéa Rocha, Ricardo Normando e João Silva Rocha pelo apoio e incentivo a este trabalho.

Aos professores José Antônio Aleixo da Silva e Gauss Moutinho Cordeiro, que sempre me incentivaram e me estimularam na academia, principalmente na pesquisa científica, tendo servido de exemplos para meu crescimento no estudo da Biometria e especificamente na Estatística.

## RESUMO

Este trabalho divide-se em cinco capítulos. No primeiro trazemos a introdução que contém os objetivos e a relevância deste estudo. No segundo, temos a revisão da literatura em que apresentamos o estado da arte deste campo do conhecimento e fazemos um apanhado das distribuições mais utilizadas que são base para as que generalizamos em capítulos posteriores. No terceiro capítulo, apresenta-se o método gerador, que é um teorema proposto com 7 corolários, que estende o processo de construções de distribuições de probabilidades, a fim de que as classes de distribuições sejam construídas a partir de funções monotônicas univariadas pré-definidas e distribuições conhecidas. No quarto capítulo foi trabalhado semelhantemente ao terceiro, entretanto, a construção se deu a partir das funções monotônicas multivariadas pré-definidas e distribuições multivariadas conhecidas. Também foi realizado o desenvolvimento das novas distribuições probabilísticas e novas funções geradoras de classes de distribuições probabilísticas. Ilustramos a potencialidade da nova distribuição de probabilidade univariada aqui proposta através de uma aplicação ao conjunto de dados reais de excessos de picos de enchentes apresentado em Choulakian e Stephens (2001). Para uma aplicação da nova distribuição multivariada proposta, utilizou-se a base de dados de medidas da Flor de Iris apresentada no trabalho de Fisher (1936). São comparados seis modelos e para a seleção desses modelos, foram utilizados o Critério de Informação de Akaike (AIC), o Critério de Informação de Akaike corrigido (AICc), o Critério de Informação Bayesiano (BIC), o Critério de Informação Hannan Quinn (HQIC) e as estatísticas de Cramer Von-Mises e de Anderson-Darling para avaliar o ajuste dos modelos. Por fim, apresentamos as conclusões a partir das análises e comparações dos resultados obtidos e direções a trabalhos futuros.

**Palavras-chave:** distribuições probabilísticas, funções geradoras de classes de distribuições de probabilidades, método gerador de distribuições de probabilidades, método gerador de classes de distribuições probabilísticas.

## ABSTRACT

This work is divided into five chapters. The first one contains the objectives and the relevance of this study. In the second one, we review the literature presenting the state of the art in the field and we give an overview of the most used distributions which are the basis for the ones we generalize in later chapters. In the third chapter, the method for generating distributions is presented by means of a theorem and 7 corollaries. This method extends the probability distribution building process, so that the classes of distributions are constructed from pre-defined univariate monotonic functions and known distributions. In the fourth chapter, similarly to the third one, however, the construction was made from pre-defined multivariate monotonic functions and known multivariate distributions. We also conducted the development of new probability distributions and new generating functions of probability distribution classes. We illustrate the potentiality of this new univariate probability distribution we propose here by means of an application to an actual data set of excesses of flood peaks presented by Choulakian e Stephens (2001). For the application of the new multivariate distribution proposed, we used the database of measurements of Iris Flower exposed in Fisher's work (1936). Six models were compared and, for their choice, we based on the Akaike Information Criterion (AIC), the Akaike Information Criterion corrected (AICc), Bayesian Information Criterion (BIC), the Hannan Quinn Information Criterion (HQIC) and the statistics of Cramér-von Mises and Anderson-Darling to assess the model fitting. Finally, we present the conclusions from de analyses, the comparisons from the results found in this thesis, the possibilities for research and ways to future works.

**Keywords:** probability distributions, generating functions for classes of probability distributions, generating method of probability distributions, method of generating classes of probability distributions.



## LISTA DE FIGURAS

Figura		Pág.
3.2.1	Representação do suporte da fda do Teorema 3.1 para $\lim_{x \rightarrow -\infty} U(x) \neq \lim_{x \rightarrow -\infty} V(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} U(x) \neq 0$ .....	37
3.2.2	Representação do suporte da fda do Teorema 3.1 para $\lim_{x \rightarrow -\infty} U(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} V(x) \neq 0$ .....	37
3.2.3	Representação do suporte da fda do Corolário 3.1.1 para $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{W}(x) \neq \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{U}(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{U}(x) = 0$ .....	39
3.2.4	Representação do suporte da fda do Corolário 3.1.1 para $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{W}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{U}(x) \neq 0$ .....	39
3.7.2.1.1	<i>Fdp</i> da distribuição complementar gama $\frac{1-Exp}{Exp}$ com $\alpha$ variando.....	87
3.7.2.1.2	<i>Fdp</i> da distribuição complementar gama $\frac{1-Exp}{Exp}$ com $\beta$ variando.....	88
3.7.2.1.3	<i>Fdp</i> da distribuição complementar gama $\frac{1-Exp}{Exp}$ com $\lambda$ variando.....	88
3.7.2.1.4	<i>Fda</i> da distribuição complementar gama $\frac{1-Exp}{Exp}$ com $\alpha$ variando.....	87
3.7.2.1.5	<i>Fda</i> da distribuição complementar gama $\frac{1-Exp}{Exp}$ com $\beta$ variando.....	88
3.7.2.1.6	<i>Fda</i> da distribuição complementar gama $\frac{1-Exp}{Exp}$ com $\lambda$ variando.....	88
3.7.2.2.1	$\mathcal{R}(x)$ da distribuição complementar gama $\frac{1-Exp}{Exp}$ com $\alpha$ variando.....	89
3.7.2.2.2	$\mathcal{R}(x)$ da distribuição complementar gama $\frac{1-Exp}{Exp}$ com $\beta$ variando.....	89
3.7.2.2.3	$\mathcal{R}(x)$ da distribuição complementar gama $\frac{1-Exp}{Exp}$ com $\lambda$ variando.....	89
3.7.2.13.1	<i>Fdp's</i> ajustados a massa de dados dos picos de enchentes no rio Wheaton.....	100
4.8.2.1.1	Superfície da <i>fdp</i> da Weibull bivariada $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$ .....	153/ 179
4.8.2.1.2	Contorno da <i>fdp</i> da Weibull bivariada $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$ .....	153/ 179

4.8.2.1.3	Superfície da <i>fdp</i> da Weibull bivariada $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$ com $a_1$ variando.....	179
4.8.2.1.4	Contorno da <i>fdp</i> da Weibull bivariada $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$ com $a_1$ variando.....	179
4.8.2.1.5	Superfície da <i>fdp</i> da Weibull bivariada $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$ com $a_2$ variando.....	180
4.8.2.1.6	Contorno da <i>fdp</i> da Weibull bivariada $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$ com $a_2$ variando.....	180
4.8.2.1.7	Superfície da <i>fdp</i> da Weibull bivariada $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$ com $b_1$ variando.....	180
4.8.2.1.8	Contorno da <i>fdp</i> da Weibull bivariada $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$ com $b_1$ variando.....	180
4.8.2.1.9	Superfície da <i>fdp</i> da Weibull bivariada $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$ com $b_2$ variando.....	180
4.8.2.1.10	Contorno da <i>fdp</i> da Weibull bivariada $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$ com $b_2$ variando.....	180
4.8.2.1.11	Superfície da <i>fdp</i> da Weibull bivariada $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$ com $\lambda_1$ variando.....	181
4.8.2.1.12	Contorno da <i>fdp</i> da Weibull bivariada $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$ com $\lambda_1$ variando.....	181
4.8.2.1.13	Superfície da <i>fdp</i> da Weibull bivariada $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$ com $\lambda_2$ variando.....	181
4.8.2.1.14	Contorno da <i>fdp</i> da Weibull bivariada $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$ com $\lambda_2$ variando.....	181

4.8.2.2.1	Superfície da função de risco da Weibull bivariada $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$ .....	154/ 182
4.8.2.2.2	Contorno da função de risco da Weibull bivariada $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$ .....	155/ 182
4.8.2.2.3	Superfície da função de risco da Weibull bivariada $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$ com $a_1$ variando.....	182
4.8.2.2.4	Contorno da função de risco da Weibull bivariada $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$ com $a_1$ variando.....	182
4.8.2.2.5	Superfície da função de risco da Weibull bivariada $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$ com $a_2$ variando.....	182
4.8.2.2.6	Contorno da função de risco da Weibull bivariada $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$ com $a_2$ variando.....	182
4.8.2.2.7	Superfície da função de risco da Weibull bivariada $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$ com $b_1$ variando.....	183
4.8.2.2.8	Contorno da função de risco da Weibull bivariada $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$ com $b_1$ variando.....	183
4.8.2.2.9	Superfície da função de risco da Weibull bivariada $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$ com $b_2$ variando.....	183
4.8.2.2.10	Contorno da função de risco da Weibull bivariada $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$ com $b_2$ variando.....	183
4.8.2.2.11	Superfície da função de risco da Weibull bivariada $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$ com $\lambda_1$ variando.....	183
4.8.2.2.12	Contorno da função de risco da Weibull bivariada $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$ com $\lambda_1$ variando.....	183

4.8.2.2.13	Superfície da função de risco da Weibull bivariada $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$ com $\lambda_2$ variando.....	184
4.8.2.2.14	Contorno da função de risco da Weibull bivariada $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$ com $\lambda_2$ variando.....	184
4.8.2.11.1 (a)	Histograma dos dados das pétalas da Flor Iris em perspectiva (a).....	164
4.8.2.11.1 (b)	Histograma dos dados das pétalas da Flor Iris em perspectiva (b).....	164
4.8.2.11.1	Gráfico do contorno ajustado ao modelo M4.1.....	165
4.8.2.11.2	Gráfico de superfície ajustado ao modelo M4.1.....	165
4.8.2.11.3	Gráfico do contorno ajustado ao modelo M4.2.....	166
4.8.2.11.4	Gráfico de superfície ajustado ao modelo M4.2.....	166
4.8.2.11.5	Gráfico do contorno ajustado ao modelo M4.3.....	166
4.8.2.11.6	Gráfico de superfície ajustado ao modelo M4.3.....	166
4.8.2.11.7	Gráfico do contorno ajustado ao modelo M4.4.....	166
4.8.2.11.8	Gráfico de superfície ajustado ao modelo M4.4.....	166
4.8.2.11.9	Gráfico do contorno ajustado ao modelo M4.5.....	167
4.8.2.11.10	Gráfico de superfície ajustado ao modelo M4.5.....	167
4.8.2.11.11	Gráfico do contorno ajustado ao modelo M4.6.....	167
4.8.2.11.12	Gráfico de superfície ajustado ao modelo M4.6.....	167

## LISTA DE TABELAS

Tabela		Página
2.2.1	Algumas classes de distribuições existentes na literatura.....	25
3.3.1	Alguns funcionais construtores de classes de distribuições probabilísticas obtidos a partir do <b>1C3.1.5</b> .....	45
3.3.2	Alguns funcionais construtores de classes de distribuições probabilísticas obtidos a partir do <b>1C3.1.6</b> .....	51
3.6.1	Generalizações de modelos de classes já existentes.....	69
3.7.2.13.1	excessos de picos de cheias em m <sup>3</sup> /s do Rio Wheaton.....	98
3.7.2.13.2	estimativa de máxima verossimilhança dos parâmetros, dos erros (erros padrões em parênteses) e cálculos das estatísticas AIC, AICc, BIC, HQIC, testes A e W para as distribuições M3.1 a M3.6.....	99
4.3.1	Alguns funcionais construtores de classes de distribuições probabilísticas obtidos a partir do <b>1C3.1.5</b> .....	120
4.3.2	Alguns funcionais construtores de classes de distribuições probabilísticas obtidos a partir do <b>1C4.1.6</b> .....	128
4.5.1	Generalizações de modelos de classes já existentes.....	140
4.8.2.11.1	Estimativa dos parâmetros, dos erros para as distribuições M4.1 a M4.6.....	165
4.8.2.11.2	Cálculos das estatísticas AIC, AICc, BIC e HQIC para as distribuições M4.1 a M4.6.....	168

## LISTA DE APÊNDICE

	Página
Apêndice.....	179
Apêndice A: Lista de funções monotônicas crescentes e decrescentes.....	179
Apêndice B: Lista de funções monotônicas envolvendo distribuições.	185
Apêndice C: Listas de funções monotônicas crescentes e decrescentes.....	194
Apêndice D: Listas de classes de distribuições.....	197
Apêndice E: Algoritmos para o caso univariado.....	204
Apêndice F: Algoritmos para o caso multivariado.....	223

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO.....</b>	<b>20</b>
<b>2. REVISÃO DE LITERATURA .....</b>	<b>23</b>
2.1 Modelagens .....	23
2.2 Distribuições de Probabilidade .....	23
2.3 Método de Máxima Verossimilhança .....	27
2.4 Critérios de seleção de modelos.....	29
2.4.1 Critério de Akaike - AIC.....	29
2.4.2 Critério de Akaike Corrigido - AICc.....	29
2.4.3 Critério de informação bayesiano - BIC .....	30
2.4.4 Critério de informação de Hannan-Quinn - HQIC .....	30
2.4 Teste de Cramér Von Mises e Anderson-Darling.....	30
2.5.1 Teste de Anderson-Darling .....	31
2.5.2 Teste de Cramér Von Mises.....	31
2.5.3 Teste de Wald Wolfowitz.....	32
<b>3. MÉTODO GERADOR DE DISTRIBUIÇÕES E CLASSES DE DISTRIBUIÇÕES     PROBABILÍSTICAS, CASO UNIVARIADO. ....</b>	<b>33</b>
3.1 Introdução .....	33
3.2 Método proposto.....	34
Teorema 3.1 (T3.1): Método gerador de distribuições e classes de distribuições probabilísticas .....	34
Corolário 3.1.1 (C3.1.1): Método complementar gerador de distribuições e classes de distribuições probabilísticas .....	37
Corolário 3.1.2 (C3.1.2): Normalização de funções monotônicas não constantes .	40
Corolário 3.1.3 (C3.1.3): Normalização de diferenças de funções monotônicas....	41
Corolário 3.1.4 (C3.1.4): Normalização complementar de diferenças de funções monotônicas .....	41
3.3 Funções monotônicas envolvendo distribuições de probabilidades. ....	42
Corolário 3.1.5 (C3.1.5): Método gerador de classes de distribuições probabilísticas .....	42
Corolário 3.1.6 (C3.1.6): Método complementar gerador de classes de distribuições probabilísticas .....	49
Corolário 3.1.7 (C3.1.7): Método normalizado gerador de classes de distribuições probabilísticas .....	55
Teorema 3.2 (T3.2): Equivalência entre o Teorema 3.1 e os seus corolários. ....	56

3.4. Suportes para as Classes de Distribuições Probabilísticas.....	59
Teorema 3.3 (T3.3): Teorema geral dos suportes. ....	59
Corolário 3.3.1 (C3.3.1): Baselines discretas geram distribuições discretas.....	61
Teorema 3.4 (T3.4): Suporte da distribuição é a união dos suportes das baselines. .....	62
Teorema 3.5 (T3.5): Distribuições de funções contínuas geram distribuições de funções contínuas.....	63
Teorema 3.6 (T3.6): Distribuições de variáveis aleatórias contínuas geram distribuições de variáveis aleatórias contínuas. ....	65
Teorema 3.7 (T3.7): Integrais de diferenciais de distribuições discretas geram distribuições discretas.....	65
3.5. Nomenclatura para as Classes de Distribuições Probabilísticas e para as distribuições de probabilidades, caso univariado.....	66
3.6. Obtenções de generalizações de modelos de classes já existentes .....	68
3.7. Modelo proposto.....	78
3.7.1 Obtenção de uma classe de distribuições a partir do Teorema 3.1 .....	78
3.7.1.1 Modelo funcional classe gama $(1-G_1)/G_1$ .....	78
3.7.1.2 Função Risco usando a classe gama $(1-G_1)/G_1$ .....	78
3.7.1.3 Expansões da Função de Distribuição e da Densidade da Classe gama $(1-G_1)/G_1$ .....	78
3.7.1.4 Expansão para os momentos de ordem $m$ para a classe gama $(1-G_1)/G_1$ .....	79
3.7.1.5 Expansão para a função geradora de momentos para a classe gama $(1-G_1)/G_1$ .....	80
3.7.1.6 Expansão para a função característica para a classe gama $(1-G_1)/G_1$ .....	81
3.7.1.7 Expansão para os momentos centrais de ordem $m$ para a Classe Gama $(1-G_1)/G_1$ .....	82
3.7.1.8 Expansão para o coeficiente geral para a Classe gama $(1-G_1)/G_1$ .....	83
3.7.1.9 Expansão para o Desvio Médio e Desvio Quantílico para a Classe gama $(1-G_1)/G_1$ .....	84
3.7.1.10 Derivadas da função log-verossimilhança em relação aos parâmetros para a Classe gama $(1-G_1)/G_1$ .....	85
3.7.1.11 Entropia de Rényi usando a Classe gama $(1-G_1)/G_1$ .....	85
3.7.2 Construção de uma distribuição da Classe gama $(1-G_1)/G_1$ .....	86
3.7.2.1 Distribuição Gama $(1-Exp)/Exp$ .....	87
3.7.2.2 Função Risco usando a distribuição gama $(1-Exp)/Exp$ .....	88
3.7.2.3 Expansões da Função de Distribuição e da Densidade da distribuição Gama $(1-Exp)/Exp$ .....	90



3.7.2.4 Expansão para os momentos de ordem $m$ da distribuição Gama (1-Exp)/Exp .....	91
3.7.2.5 Expansão para a função geradora de momentos da distribuição Gama (1-Exp)/Exp .....	91
3.7.2.6 Expansão para a função característica da distribuição Gama (1-Exp)/Exp	92
3.7.2.7 Expansão para os momentos centrais de ordem $m$ da distribuição Gama (1-Exp)/Exp .....	93
3.7.2.8 Expansão para o coeficiente geral da distribuição Gama (1-Exp)/Exp .....	93
3.7.2.9 Função Quantílica da distribuição gama (1-Exp)/Exp .....	94
3.7.2.10 Expansão para o Desvio Médio e Desvio Quantílico da distribuição gama (1-Exp)/Exp .....	95
3.7.2.11 Derivadas da função log-verossimilhança em relação aos parâmetros da distribuição Gama (1-Exp)/Exp .....	96
3.7.2.12 Entropia Rényi usando a distribuição gama (1-Exp)/Exp .....	96
3.7.2.13 Aplicação .....	97
3.7.2.14 Etapas para identificação de modelos univariados para modelagens....	100
3.8. Conclusão .....	102
<b>4. MÉTODO GERADOR DE DISTRIBUIÇÕES E CLASSES DE DISTRIBUIÇÕES PROBABILÍSTICAS, CASO MULTIVARIADO.....</b>	<b>103</b>
4.1 Introdução .....	103
4.2. Operadores-diferença .....	103
Lema 4.1: As composições de operadores-diferença são lineares.....	104
4.3. Método proposto.....	105
Teorema 4.1 (T4.1): Método gerador de distribuições e classes de distribuições probabilísticas multivariadas. ....	105
Corolário 4.1.1 (C4.1.1): Método complementar gerador de distribuições e classes de distribuições probabilísticas multivariadas.....	111
Corolário 4.1.2 (C4.1.2): Normalização de funções multivariadas monotônicas não constantes .....	114
Corolário 4.1.3 (C4.1.3): Normalização de diferenças de funções multivariadas monotônicas .....	115
Corolário 4.1.4 (C4.1.4): Normalização complementares de diferenças de funções monotônicas multivariadas.....	116
4.4 Funções monotônicas envolvendo distribuições de probabilidades multivariadas. ....	116
Corolário 4.1.5 (C4.1.5): Método gerador de classes de distribuições probabilísticas multivariadas.....	117

Corolário 4.1.6 (C4.1.6): Método Complementar gerador de classes de distribuições probabilísticas multivariadas. ....	125
Corolário 4.1.7 (C4.1.7): Método normalizado gerador de classes de distribuições probabilísticas multivariadas. ....	133
Teorema 4.2 (T4.2): Equivalência entre o Teorema 4.1 e os seus corolários. ....	134
4.5. Suportes para as Classes de Distribuições Probabilísticas para o caso multivariado. ....	134
Teorema 4.3 (T4.3): Teorema geral dos suportes para o caso multivariado. ....	134
Corolário 4.3.1 (C4.3.1): Baseline discreta multivariada gera distribuição discreta multivariada. ....	135
Teorema 4.4 (T4.4): Suporte de distribuição multivariada é a união dos suportes da baseline multivariadas. ....	135
Teorema 4.5 (T4.5): Distribuições de funções contínuas multivariadas geram distribuições de funções contínuas multivariadas. ....	136
Teorema 4.6 (T4.6): Distribuições de variáveis aleatórias contínuas multivariadas geram distribuições de variáveis aleatórias contínuas multivariadas. ....	136
Teorema 4.7 (T4.7): Integrais de diferenciais de distribuições discretas multivariadas geram distribuições discretas multivariadas. ....	137
4.6. Nomenclatura para as Classes de Distribuições Probabilísticas e para as distribuições de probabilidades, caso multivariado. ....	137
4.7. Obtenções de generalizações de modelos de classes já existentes. ....	139
4.8. Modelo proposto. ....	141
4.8.1 Obtenção de uma classe de distribuições a partir do Teorema 4.1. ....	141
4.8.1.1 Modelo Weibull bivariada $(G_2(y)/(1-G_2(y)), G_1(x)/(1-G_1(x)))$ . ....	141
4.8.1.2 Função Risco usando a Classe Weibull bivariada $(G_2(y)/(1-G_2(y)), G_1(x)/(1-G_1(x)))$ . ....	142
4.8.1.3 Expansões da Função de Distribuição e da Densidade da Classe Weibull bivariada $(G_2(y)/(1-G_2(y)), G_1(x)/(1-G_1(x)))$ . ....	142
4.8.1.4 Expansão para os momentos bivariados de ordens $m_1$ e $m_2$ para a Classe Weibull bivariada $(G_2(y)/(1-G_2(y)), G_1(x)/(1-G_1(x)))$ . ....	144
4.8.1.5 Expansão para a função geradora de momentos bivariados para a Classe Weibull bivariada $(G_2(y)/(1-G_2(y)), G_1(x)/(1-G_1(x)))$ . ....	145
4.8.1.6 Expansão para a função característica bivariada para a Classe Weibull bivariada $(G_2(y)/(1-G_2(y)), G_1(x)/(1-G_1(x)))$ . ....	146
4.8.1.7 Expansão para os momentos centrais bivariados de ordens $m_1$ e $m_2$ para a Classe Weibull bivariada $(G_2(y)/(1-G_2(y)), G_1(x)/(1-G_1(x)))$ . ....	147
4.8.1.8 Expansão para o coeficiente geral bivariado para a Classe Weibull bivariada $(G_2(y)/(1-G_2(y)), G_1(x)/(1-G_1(x)))$ . ....	148

4.8.1.9 Derivadas da função log-verossimilhança em relação aos parâmetros para a classe Weibull bivariada ( $G_2(y)/(1-G_2(y)), G_1(x)/(1-G_1(x))$ ).....	149
4.8.1.10 Entropia bivariada de Rényi usando a classe Weibull bivariada ( $G_2(y)/(1-G_2(y)), G_1(x)/(1-G_1(x))$ ) .....	150
4.8.2 Construção de uma distribuição da classe Weibull bivariada ( $G_2(y)/(1-G_2(y)), G_1(x)/(1-G_1(x))$ ) .....	152
4.8.2.1 Distribuição Weibull bivariada ( $Exp_2(y)/(1-Exp_2(y)), Exp_1(x)/(1-Exp_1(x))$ ) .....	152
4.8.2.2 Função de Risco bivariado usando a distribuição Weibull bivariada ( $Exp_2(y)/(1-Exp_2(y)), Exp_1(x)/(1-Exp_1(x))$ ) .....	154
4.8.2.3 Expansões das Funções de Distribuição e da Densidade da Weibull bivariada ( $Exp_2(y)/(1-Exp_2(y)), Exp_1(x)/(1-Exp_1(x))$ ) .....	155
4.8.2.4 Expansão para os momentos bivariados de ordens $m_1$ e $m_2$ da distribuição Weibull bivariada ( $Exp_2(y)/(1-Exp_2(y)), Exp_1(x)/(1-Exp_1(x))$ ) .....	157
4.8.2.5 Expansão para a função geradora de momentos da distribuição Weibull bivariada ( $Exp_2(y)/(1-Exp_2(y)), Exp_1(x)/(1-Exp_1(x))$ ) .....	157
4.8.2.6 Expansão para a função característica da distribuição Weibull bivariada ( $Exp_2(y)/(1-Exp_2(y)), Exp_1(x)/(1-Exp_1(x))$ ) .....	158
4.8.2.7 Expansão para os momentos centrais bivariados de ordens $m_1$ e $m_2$ para a distribuição Weibull bivariada ( $Exp_2(y)/(1-Exp_2(y)), Exp_1(x)/(1-Exp_1(x))$ ).....	158
4.8.2.8 Expansão para o coeficiente geral bivariado da distribuição Weibull bivariada ( $Exp_2(y)/(1-Exp_2(y)), Exp_1(x)/(1-Exp_1(x))$ ) .....	159
4.8.2.9 Derivadas da função log-verossimilhança em relação aos parâmetros da distribuição Weibull bivariada ( $Exp_2(y)/(1-Exp_2(y)), Exp_1(x)/(1-Exp_1(x))$ ).....	160
4.8.2.10 Entropia bivariada de Rényi usando a classe Weibull bivariada ( $G_2(y)/(1-G_2(y)), G_1(x)/(1-G_1(x))$ ).....	161
4.8.2.11 Aplicação .....	163
4.8.2.12 Etapas para identificação de modelos multivariados para modelagens .	168
4.9. Conclusão .....	170
<b>5. CONCLUSÕES, CONTRIBUIÇÕES E TRABALHOS FUTUROS.....</b>	<b>171</b>
5.1 Conclusões.....	171
5.2 Contribuições.....	172
5.3 Trabalhos futuros.....	173
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>174</b>
<b>APÊNDICE .....</b>	<b>179</b>
Apêndice A: Gráficos das funções densidade e funções de risco para Weibull exponencial bivariada ( $Exp_2(y)/(1-Exp_2(y)), Exp_1(x)/(1-Exp_1(x))$ ).....	179
Apêndice B: Listas de funções monotônicas envolvendo distribuições .....	185

Relação de funções monotônicas com conjuntos imagens limitadas: .....	185
1. Relação de funções monotônicas não decrescentes $uj$ com conjuntos imagens que vai de 0 a 1: .....	185
2. Relação de funções monotônicas não decrescentes $vj$ com conjuntos imagens que vai de 1 a 0: .....	187
3. Relação de funções monotônicas não constantes $h$ 's com conjuntos imagens limitadas:.....	188
4. Relação de funções monotônicas $h$ 's com conjuntos imagens ilimitadas à direita: .....	190
4.1 Relação de funções monotônicas não decrescentes $hj$ 's com conjuntos imagens ilimitadas à direita: .....	190
4.2 Relação de funções monotônicas não decrescentes $zj$ 's com conjuntos imagens ilimitadas à direita: .....	192
Apêndice C: Listas de funções monotônicas crescentes e decrescentes .....	194
1 Relação de funções crescentes com imagens limitadas .....	194
2 Relação de funções decrescentes com imagens limitadas .....	194
3 Relação de funções crescentes com imagens ilimitadas à direita .....	194
4 Relação de funções decrescentes com imagens ilimitadas à direita .....	195
5 Relação de funções crescentes com imagens ilimitadas à esquerda .....	195
6 Relação de funções decrescentes com imagens ilimitadas à esquerda .....	195
7 Relação de funções crescentes com imagens ilimitadas.....	196
8 Relação de funções decrescentes com imagens ilimitadas.....	196
Apêndice D: Compêndio de classes de distribuições.....	197
Lista de classes de distribuições oriundas da 2S1C3.1.5 da Tabela 3.3.1: .....	197
Lista de classes de distribuições oriundas da 8S1C3.1.5 da Tabela 3.3.1: .....	198
Lista de classes de distribuições oriundas da 21S1C3.1.5 da Tabela 3.3.1: .....	199
Lista de classes de distribuições oriundas da 21S1C3.1.6 da Tabela 3.3.2: .....	201
Apêndice E: Algoritmos para o caso univariado.....	204
1. Algoritmo do esboço do gráfico da função densidade da distribuição gama (1-Exp)/Exp (M3.2) .....	204
2. Algoritmo do esboço do gráfico da função de distribuição acumulada da gama (1-Exp)/Exp (M3.2) .....	207
3. Algoritmo de estimação no sas da distribuição gama (1-Exp)/Exp .....	210
4. Algoritmo de ajuste das distribuições univariadas gama $\ln(1-\text{Exp})$ , gama (1-Exp)/Exp, weibull exponenciada, weibull modificada, beta pareto e weibull .....	213
5. Algoritmo para o cálculo das estatísticas de Cramér von Mises e Anderson-Darling .....	221

Apêndice F: Algoritmos para o caso multivariado .....	223
1. Algoritmo implementado no software SAS 9.1 para estimação dos parâmetros dos modelos multivariados para o conjunto de dados íris. ....	223
2. Comandos implementados no software R 3.0.2 para construção da tabela com medidas de adequação: AIC, AICc, BIC e HQIC para o caso multivariado. ....	225
3. Comandos implementados no software R 3.0.2 para construção dos gráficos de contorno bivariados da densidade do modelo proposto. ....	226
4. Comandos implementados no software R 3.0.2 para construção dos gráficos de contorno bivariados da função de risco do modelo proposto.....	228
5. Comandos implementados no software R 3.0.2 para construção dos gráficos de superfície bivariados da densidade do modelo proposto.....	231
6. Comandos implementados no software R 3.0.2 para construção dos gráficos de superfície bivariados da função de risco do modelo proposto. ....	234
7. Comandos implementados no software R 3.0.2 para construção dos gráficos de contorno estimado do modelo proposto. ....	236
8. Comandos implementados no software R 3.0.2 para construção dos gráficos de superfície-densidade estimados do modelo proposto. ....	239

# 1. INTRODUÇÃO

A quantidade de informação e/ou dados disponíveis para análise cresce cada vez mais rápido, fazendo com que novas distribuições probabilísticas sejam necessárias para melhor descrever as especificidades de cada fenômeno/experimento estudado. Com o advento de ferramentas computacionais cada vez mais poderosas, tem sido possível utilizar distribuições com mais parâmetros para o ajuste de massas de dados.

Constam na literatura várias generalizações e extensões de distribuições simétricas e assimétricas, discretas e contínuas, algumas apontadas em Cysneiros *et al.* (2005), Cordeiro e Castro (2011), Barros (2010), Adamski, Human e Bekker (2012), Arslan (2004), Kundu, Balakrishnan e Jamalizadeh (2011), Lin e Li (2012), Rootzén e Tajvidi (2006) e Adamski *et al.* (2013). Nota-se que a importância desses novos modelos é que, dependendo da situação, existe a necessidade de modelos mais sensíveis ou menos sensíveis à massa de dados.

Desta forma, o objetivo geral principal deste trabalho consiste em propor um método gerador de distribuições e classes de distribuições probabilísticas que unifique os métodos de gerar classes de distribuições existentes na literatura. A ideia deste método é gerar classes a partir de distribuições já conhecidas, fazendo uso de funções monotônicas e de uma função de distribuição acumulada.

O método gerador proposto é apresentado na forma de um teorema e 7 corolários, estendendo processos de construções de distribuições de probabilidades. Em particular, as classes de distribuições são derivadas a partir de funções monotônicas univariadas pré-definida e distribuições univariadas conhecidas. É proposto, de forma análoga, outro teorema com 7 corolários para funções monotônicas multivariadas pré-definida e, também, para distribuições multivariadas conhecidas.

Este trabalho propõe métodos geradores de classes e distribuições probabilísticas tanto para o caso univariado como para o caso multivariado. Para ilustrar a potencialidade do método gerador proposto, são aqui propostas duas novas classes de distribuições, a classe de distribuições univariada gama  $(1-G_1)/G_1$  e a classe de distribuições multivariada Weibull bivariada  $(G_2(y)/(1-G_2(y)), G_1(x)/(1-G_1(x)))$ . As propriedades estatísticas de tais classes são derivadas, tais como: média,

variância, desvio-padrão, desvio-médio, curtose, assimetria, função geradora de momentos, função característica e análise gráfica.

A título de verificar a aplicabilidade das classes propostas, foram propostas e analisadas a distribuição univariada gama  $(1-Exp)/Exp$  e a distribuição multivariada Weibull bivariada  $(Exp^2(y)/(1- Exp^2(y)), Exp^1(x)/(1- Exp^1(x)))$ . As propriedades estatísticas de tais distribuições foram também estudadas, sendo as mesmas aplicadas a modelagem de dados reais, testando-as e comparando-as com os modelos comumente usados e conhecidos na literatura. A distribuição univariada gama  $(1-Exp)/Exp$  foi utilizada para modelar os excessos de picos de enchentes, conforme a base de dados utilizada no trabalho de Choulakian e Stephens (2001). Já para o caso da distribuição multivariada Weibull bivariada  $(Exp^2(y)/(1- Exp^2(y)), Exp^1(x)/(1- Exp^1(x)))$ , foi utilizada a base de dados de medidas da Flor de Iris, exposta no trabalho de Fisher (1936).

Nas próximas linhas apresentaremos a organização da tese, indicando o que mostra cada capítulo. A presente tese, dedica o segundo capítulo à revisão de literatura que está baseada nos estudos de Mudholkar *et al* (1995), Marshall e Olkin (1997), Gupta e Kundu (1999), Eugene *et al* (2002), Cysneiros *et al* (2005), Nadarajah e Kotz (2006), Zografos (2008), Brito (2009), Zografos e Balakrishnan (2009), Silva *et al* (2010), Nadarajah (2011), Cordeiro e Castro (2011), Pescim *et al* (2012), Adamski, Human e Bekker (2012), Jayakumar, Solairaju e Sulthan (2012), Cardeño, Nagar e Sánchez (2005), Sarabia e Gómez-Déniz (2008), Fung e Seneta (2010), Arslan (2004), Kundu, Balakrishnan e Jamalizadeh (2011), Ademola e Ahamefula (2012), Schmidt, Hrycej e Stütze (2006), Lin e Li (2012), Rootzén e Tajvidi (2006), Adamski *et al* (2013), entre outros. Também fazemos uma revisão sobre o método de estimação utilizado neste trabalho, bem como dos critérios estatísticos utilizados para comparar o ajuste dos modelos nas aplicações a dados reais.

No terceiro capítulo, mostraremos o método para generalizar e estender o processo de construções de distribuições de probabilidades, em que as classes de distribuições são construídas a partir de funções monotônicas univariadas de distribuições pré-definidas. Mostramos que com o método proposto podemos obter as classes de distribuições de probabilidade que compõem a literatura atual.

No quarto capítulo, mostraremos o método para generalizar e estender o processo de construções de distribuições de probabilidades multivariadas, em que as classes de distribuições são construídas a partir de funções monotônicas

multivariadas de distribuições multivariadas pré-definidas. Também mostramos como gerar as classes de distribuições multivariadas de probabilidades que compõem a literatura atual utilizando o método proposto.

No quinto capítulo, exibimos as conclusões a partir das análises e comparações dos resultados obtidos, apontando assim, outras possibilidades de pesquisas, bem como as contribuições e os trabalhos futuros.



## **2. REVISÃO DE LITERATURA**

### **2.1 Modelagens**

Um modelo é uma formulação que descreve fenômenos do mundo real, de modo a ser possível representar, interpretar e fazer previsões, podendo ser utilizado nos mais diversos campos do conhecimento. Não se pretende que um modelo, independente do campo em estudo, seja uma cópia exata do mundo real, mas uma simplificação que revele os processos chave do fenômeno estudado, sendo possível perceber e prever novas situações dentro do universo em estudo (Box e Draper, 1987).

Um modelo pode ainda ser definido como uma formulação matemática baseada em hipóteses que busca representar fenômenos físicos ou sistemas biológicos, com o intuito de gerar uma equação matemática que possa descrever, explicar e representar o(s) fenômeno(s) com certo nível de confiabilidade.

A criação de modelos mais flexíveis, ou seja, que conseguem modelar melhor fenômenos atípicos, captando mais informações, faz-se necessária para melhor compreensão dos mesmos. Sendo assim, nota-se a importância da área de generalização de distribuições de probabilidade para construção de modelos mais flexíveis e, portanto, que mais se adequam a modelagem de dados reais.

### **2.2 Distribuições de Probabilidade**

Há na literatura diversas classes de distribuições de probabilidades. Segundo Lee et al. (2013), as distribuições univariadas são originadas de três maneiras que são: os métodos de equação diferencial, o método de transformação e método quantílico. Ainda para estes autores, estes três modos são os propostos antes de 1980, após 1980 temos o método gerador de distribuição assimétrica, método de adição de parâmetros para uma distribuição existente, método gerador-beta (classe beta-G), método transformado-transformador (família TX) e o método de composição. Desta maneira, pode-se perceber o quanto é antigo e importante o estudo do

desenvolvimento de distribuições de probabilidade, pois faz-se necessário encontrar um modelo que espelhe bem a realidade (LEE *et al.*, 2013).

As distribuições multivariadas são originadas geralmente por métodos baseados em estatísticas de ordem, mistura, marginais especificadas, variáveis em comum e outros que incluem ponderação (SARABIA e GÓMEZ-DÉNIZ, 2008). A distribuição multivariada generalizada de Marshall-Olkin, que inclui como caso especial a distribuição multivariada exponencial tem grande importância em estudos de análise de sobrevivência (LIN e LI, 2012).

Outras distribuições multivariadas como a generalizada de Pareto que discute o método de blocos de máxima (ROOTZÉN e TAJVIDI, 2006) e a distribuição assimétrica multivariada generalizada Beta Tipo II origina-se de distribuições qui-quadradas (ADAMSKI *et al.*, 2013), representam generalizações importantes de utilidade em análise de formas.

Existem na literatura várias generalizações e extensões das distribuições simétricas e assimétricas, discretas e contínuas, algumas apontadas em Cysneiros *et al* (2005), Cordeiro e Castro (2011) e Barros (2010), Arslan (2004), Kundu, Balakrishnan e Jamalizadeh (2011), Ademola e Ahamefula (2012), Schmidt, Hrycej e Stütze (2006), Lin e Li (2012), Rootzén e Tajvidi (2006), Adamski *et al* (2013). A importância desses novos modelos é que dependendo da situação, precisamos de modelos mais sensíveis a massa de dados ou de modelos menos sensíveis a pontos extremos, entretanto, nosso foco, neste trabalho não é nas aplicações desse tipo de generalização. Também existem distribuições na forma matriciais como apontado em Muirhead (2005), entretanto, não abordaremos tais distribuições neste trabalho.

A Tabela 2.2.1 a seguir apresenta classes de distribuições univariadas e multivariadas existentes na literatura, suas nomenclaturas e o trabalho em que as mesmas foram apresentadas.

Tabela 2.2.1 - Algumas classes de distribuições existentes na literatura.

Classe de Distribuição	Nomenclatura
$F(x) = G^a(x)$ , com $a > 0$	$G_1$ exponenciada definida por Mudholkar <i>et al</i> (1995)
$F(x) = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^{G(x)} t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt$ , com $a > 0$ , $b > 0$ e $0 < t < 1$ .	beta1 $G_1$ definida por Eugene <i>et al</i> (2002)
$F(x) = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^{G(x)} t^{a-1}(1+t)^{-(a+b)} dt$ , com $a > 0$ , $b > 0$ e $t > 0$	beta3 $G_1$ definida por Thair e Nadarajah (2013)
$F(x) = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^{G^c(x)} t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt$ , com $a > 0$ , $b > 0$ , $c > 0$ e $0 < t < 1$	Mc1 $G_1$ definida por McDonald (1984)
$F(x) = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^{G^c(x)} t^{a-1}(1+t)^{-(a+b)} dt$ , com $a > 0$ , $b > 0$ , $c > 0$ e $t > 0$	Mc3 $G_1$ definida por Thair e Nadarajah (2013)
$F(x) = 1 - (1 - G^a(x))^b$	Kumaraswamy $G_1$ definida por definida por Cordeiro e Castro (2011)
$F(x) = 1 - (1 - (1 - G(x))^a)^b$ , com $a > 0$ e $b > 0$	Kumaraswamy tipo 2 definida por Thair e Nadarajah (2013)
$F(x) = \frac{G(x)}{G(x)+b(1-G(x))}$ , com $b > 0$	Marshall e Olkin definida por Marshall e Olkin (1997)
$F(x) = 1 - \left( \frac{b(1-G(x))}{G(x)+b(1-G(x))} \right)^\theta$ , com $b > 0$ e $\theta > 0$	Marshall e Olkin $G_1$ definida por Jayakumar e Mathew (2008)
$F(x) = \left( \frac{G(x)}{G(x)+b(1-G(x))} \right)^\theta$ , com $b > 0$ e $\theta > 0$	Marshall e Olkin $G_1$ definida por Thair e Nadarajah (2013)
$F(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{-\ln(1-G(x))} t^{\alpha-1} e^{-\beta t} dt$	Gama G definida por Zografos e Balakrishnan (2009)
$F(x) = 1 - \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{-\ln(G(x))} t^{\alpha-1} e^{-\beta t} dt$	Gama G definida Cordeiro (2013)
$F(x) = 1 - \frac{c(\theta e^{-\alpha H(x)})}{c(\theta)}$ , com $x > 0$ , $\theta > 0$ e $C(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \theta^n$	Distribuição Weibull estendida definida por Silva <i>et al</i> (2013) e Silva (2013)

$F(x) = \frac{1 - \exp(-\lambda G(x))}{1 - e^{-\lambda}}$	Kumaraswamy-G Poisson definida por Ramos (2014)
$F(x) = \left(1 - (1 - G^a(x))^b\right)^c, \quad \text{com } a > 0, b > 0 \text{ e } c > 0$	Kumaraswamy-G exponencializada definida por Ramos (2014)
$F(x) = \frac{e^{\lambda e^{-\beta x^\alpha}} - e^\lambda}{1 - e^\lambda}, x > 0$	Beta Weibull Poisson definida por Paixão (2014)
$F(x) = \int_0^{G(x)} K t^{a-1} (1-t)^{b-1} \exp(-ct) dt, \quad \text{com } a > 0, b > 0 \text{ e } c \in \mathcal{R}$	Beta Kummer generalizada definida por Pescim <i>et al</i> (2012)
$F(x) = \frac{e^{-\frac{2}{\alpha}W(-\alpha e^{-\alpha})} - e^{-\frac{2}{\alpha}W(\psi(x))}}{e^{-\frac{2}{\alpha}W(-\alpha e^{-\alpha})} - 1}, \quad \text{em que } W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^{n-2}}{(n-1)!} x^n \text{ e } \psi(x) = -\alpha e^{-\alpha - bx^a}$	Weibull Generalizada Poisson definida por Paixão (2014)
$F(x) = \frac{(1-\beta)^{-s} - \{1 - \beta[1 - G(x)]\}^{-s}}{(1-\beta)^{-s} - 1}$	Binomial Negativa Generalizada definida por Paixão (2014)
$F(x) = \frac{\zeta(s) - Li_s[1-G(x)]}{\zeta(s)}, \quad \text{em que } Li_s(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s} \text{ e } \zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$	Zeta-G definida por Paixão (2014)
$F(x) = \sum_{k=0}^x \frac{C^{(k)}(a)}{k! C(\lambda)} (\lambda - a)^k$	Série de Potências definida por Consul e Famoye (2006)
$F(x) = \sum_{k=1}^x \frac{1}{k!} [(C(0))^k]^{(k-1)}$	Lagrangiana básica definida por Consul e Famoye (2006)
$F(x) = \sum_{k=n}^x \frac{n}{(k-n)! k} [(C(0))^k]^{(k-n)}$	Lagrangiana delta definida por Consul e Famoye (2006)
$F(x) = (\sum_{k=0}^x P(X=k))^\delta, \quad P(X=k) = \begin{cases} w(0), & k=0 \\ [(C(0))^k w^{(1)}(0)]^{(k-1)}, & k=1,2,3,\dots \end{cases}$	Lagrangiana generalizada definida por Consul e Famoye (2006)
$F(x) = \int_{-\infty}^x e^{\int_{b_0+b_1t+\dots+b_r t^r}^{a_0+a_1t+\dots+a_s t^s} dt} dt$	Pearson generalizada na forma de EDO definida por Shakil <i>et al</i> (2010)

$F(x) = \int_{-\infty}^x e^{\int_{b_0+b_1t+\dots+b_r t^r}^{a_0+a_1t+\dots+a_s t^s} (f(t))^\beta dt} dt, \quad \beta \geq 0$	Generalizada da Pearson generalizada na forma de EDO definida por Shakil <i>et al</i> (2010)
$F(x) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \left( \sum_{i=1}^2 \alpha_i(t) f^{\beta_i}(t) \right) dt dy$	Famílias generalizadas na forma de EDO definida por Voda (2009).
$F(x) = c \cdot \int_{-\infty}^x \left( e^{\int_{-\infty}^y \frac{a+t}{b_0+b_1t+b_2t^2} dt} \right) dy$	Método da Equação Diferencial por Pearson (1895)
$F(x) = \int_{-\infty}^x F(t) \cdot (1 - F(t)) \cdot g(t) dt$	Método da Equação Diferencial por Burr (1942)
$F(x) = c \cdot \int_{-\infty}^x \left( e^{\int_{-\infty}^y \frac{a_0+a_1t+\dots+a_m t^m}{b_0+b_1t+\dots+b_n t^n} dt} \right) dy$	Método da Equação Diferencial por Dunning e Hanson (1977)
$F(x) = \alpha \cdot \int_{-\infty}^x \left( F^\beta(t) - F^\theta(t) \right) dt, \alpha > 0, \theta > \beta$ com $Q(y) = Q(y; \underline{\lambda}) = x$ e $f(x) = g(y; \underline{\lambda})$	Método de função quantílica proposto por Voit (1992)
$F(x) = \alpha \cdot \int_{-\infty}^x F^\beta(t) \cdot (1 - F^\theta(t)) dt,$ $\alpha > 0, \theta > 0$ e $\beta > 0$ com $Q(y) = Q(y; \underline{\lambda}) = x$ e $f(x) = g(y; \underline{\lambda})$	Método de função quantílica proposto por Gupta e Kundu (1999)
$F(x) = \alpha \cdot \int_{-\infty}^x F^\beta(t) \cdot (1 - F^\theta(t))^\gamma dt,$ $\alpha > 0, \theta > 0, \beta > 0$ e $\gamma > 0$ com $Q(y) = Q(y; \underline{\lambda}) = x$ e $f(x) = g(y; \underline{\lambda})$	Método de função quantílica proposto por Muino <i>et al.</i> (2006)
$F(x, y) = \int_0^{\frac{G_2(y)}{1-G_2(y)}} \int_0^{\frac{G_1(x)}{1-G_1(x)}} \frac{\alpha(1-\alpha)}{(1+t_1+t_2)^{\alpha+2}} dt_1 dt_2, \text{ com } \alpha > 1.$	Debasis Kundu · Rameshwar D. Gupta bivariada -G definida por Kundu e Gupta (2011)
$F(x, y) = \int_0^{\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}} \int_0^{\frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}} \frac{\alpha(1-\alpha)}{(1+t_1+t_2)^{\alpha+2}} dt_1 dt_2, \text{ com } \alpha > 1.$	Distribuição exponencial bivariada generalizada definida por Kundu e Gupta (2011)

Para ilustrar a potencialidade das distribuições propostas neste trabalho, as mesmas serão ajustadas a dados reais, em que os mesmos serão estimados pelo método da máxima verossimilhança, que é exposto a seguir.

### 2.3 Método de Máxima Verossimilhança

O método de máxima verossimilhança é usado para estimar os parâmetros que melhor expliquem a amostra observada, sendo apresentado nas linhas seguir.

Seja  $\underline{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^T$ , o vetor de variáveis independentes e identicamente distribuídas (*iid*) de uma variável aleatória  $\underline{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$  gerada de uma função densidade de probabilidade (*fdp*) conhecida  $f(\underline{y}, \underline{\theta})$  de alguma família de distribuições  $\mathcal{F}$ , denominada função do modelo estatístico, dependente de um vetor de parâmetros desconhecidos  $\underline{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_p)^T$ . Define-se também,  $\theta \subseteq \mathcal{R}^p$  o espaço paramétrico representando o conjunto de valores possíveis do vetor  $\underline{\theta}$ .

A função de verossimilhança para  $\underline{\theta}$  baseada na observação  $\underline{Y} = \underline{y}$  é expressa por  $L(\underline{\theta}) = L(\underline{\theta}, \underline{y}) = f(\underline{y}, \underline{\theta})$ ,  $\underline{\theta} \in \theta$ . Frequentemente, as componentes de  $\underline{Y}$  são mutuamente independentes para todas as distribuições em  $\mathcal{F}$  e a função de verossimilhança de  $\underline{\theta}$  pode ser escrita como  $L(\underline{\theta}) = \prod_{i=1}^n f_i(y_i; \underline{\theta})$ , em que  $f_i$  representa a *fdp* individual da *i*-ésima observação.

Segundo Cordeiro (1999), a inferência com base na verossimilhança pode ser considerada como um processo de obtenção de informação sobre o vetor  $\underline{\theta}$ , a partir do ponto  $\underline{y}$  e do espaço amostral, pela da função  $L(\theta)$ . Não há, em geral, uma correspondência biunívoca entre os vetores  $\underline{y}$  e  $L(\underline{\theta})$ , equivalentemente, certa verossimilhança pode corresponder a um contorno  $R(\underline{y})$ . Este processo reduz a informação sobre  $\underline{\theta}$  disponível em  $\underline{y}$ . Usualmente, trabalha-se o logaritmo da função de verossimilhança  $\log(L(\underline{\theta}))$ , denominado função de log-verossimilhança. Como a função logaritmo é monotônica crescente, maximizar  $L(\underline{\theta})$  e  $\ell(\underline{\theta})$  em  $\theta$  são processos equivalentes. A função de log-verossimilhança, também chamada função suporte, pode ser escrita como:

$$\ell(\underline{\theta}) = \log(L(\underline{\theta})) = \sum_{i=1}^n \log\{f_i(y_i; \underline{\theta})\}.$$

O estimador de máxima verossimilhança (EMV)  $\hat{\underline{\theta}}$  de  $\underline{\theta}$  é o valor que maximiza  $L(\underline{\theta})$  em  $\theta$ , isto é,  $L(\hat{\underline{\theta}}) \geq L(\underline{\theta})$  para todo  $\theta \in \theta$ . Então, o EMV é definido de modo que, para todo  $\theta \in \theta$ ,  $\ell(\hat{\underline{\theta}}) \geq \ell(\underline{\theta})$ , ou seja:

$$\hat{\underline{\theta}} = \arg \max_{\underline{\theta} \in \theta} \ell(\underline{\theta}).$$

## 2.4 Critérios de seleção de modelos

Muitos procedimentos têm sido propostos com o intuito de comparar modelos. A propriedade interessante de que, sob condições de regularidade, o estimador de máxima verossimilhança seja assintoticamente eficiente, mostra que a função de verossimilhança tende a ser um critério mais sensível a pequenos desvios dos parâmetros do modelo de seus valores verdadeiros.

### 2.4.1 Critério de Akaike - AIC

Seguindo esta ideia, Akaike (1972) apresentou seu método de identificação de modelos. Ainda Akaike (1974) descreveu como o problema de seleção de modelos pode sistematicamente ser manuseado pelo uso do critério de informação introduzido em 1972. Esse critério de informação de Akaike (AIC) é uma estatística bem conhecida e de fácil interpretação para seleção de modelos de regressão. Desta forma, para comparar todos os modelos não transformados e transformados ajustados aos dados, pode-se usar o critério de informação de Akaike definido por:

$$AIC = -2 \cdot \ell(\hat{\theta}) + 2 \cdot p$$

em que  $\ell(\hat{\theta})$  é a log-verossimilhança maximizada de  $\theta$  e  $p$  é o número de parâmetros do preditor linear ou não linear  $\eta_i$  para os modelos. A equação com o menor valor do  $AIC$ , entre todos os modelos ajustados, pode ser considerada como a que melhor explica os dados.

### 2.4.2 Critério de Akaike Corrigido - AICc

Este critério é uma correção para populações finitas do AIC:

$$AICc = -2\log(L(\hat{\theta})) + \frac{2np}{n-p-1}$$

Burnham e Anderson (2002) defendem que quando  $n$  é pequeno deve-se utilizar uma correção do AIC, uma vez que AICc converge para AIC quando  $n$  tende para o infinito, não havendo diferença em utilizar AICc no lugar do AIC.

### 2.4.3 Critério de informação bayesiano - BIC

O Critério de informação bayesiano foi proposto por Schwarz (1978) e é dado por:

$$BIC = -2\log(L(\hat{\theta})) + p\log(n),$$

em que  $L(\hat{\theta})$  é a verossimilhança do modelo escolhido,  $p$  é o número de parâmetros a serem estimados e  $n$  é o número de observações da amostra. Tal como o AIC, este critério seleciona entre todos os modelos testados aquele que tem o menor BIC.

### 2.4.4 Critério de informação de Hannan-Quinn - HQIC

O critério de informação de Hannan-Quinn (HQIC) é um critério de classificação de modelos alternativo ao AIC e BIC. Proposto do Hannan e Quinn (1979) e é definido por

$$HQIC = -2p\log(\log(n)) - 2\log(L(\hat{\theta})).$$

Este critério tem pouco uso prático (BURNHAM e ANDERSON, 2002) visto que, a maior parte dos conjuntos de dados tem poucas observações. O HQIC deve ser mínimo.

## 2.4 Teste de Cramér Von Mises e Anderson-Darling

Os testes de Cramer-Von Mises e Anderson-Darling são baseados na função de distribuição empírica (FDE) dos dados, e apresentam vantagens sobre o teste de aderência qui-quadrado, incluindo maior poder e invariância em relação aos pontos



médios dos intervalos escolhidos. Os testes Anderson-Darling e Cramer-von Mises pertencem à classe quadrática de estatísticas baseadas na FDE, pois trabalham com as diferenças quadráticas entre a distribuição empírica e a hipotética.

### 2.5.1 Teste de Anderson-Darling

O teste de Anderson-Darling foi proposto por Anderson-Darling (1952) e é mais utilizado quando o tamanho da amostra não é maior que 25. Este teste baseia-se na função de distribuição empírica.

Considere  $\delta_i = F(x_{(i)}; \underline{\theta})$  uma *f. d. a.*, com  $x_{(i)}$  em ordem ascendente. Faça  $y_{(i)} = \Phi^{-1}(\delta_i)$ , em que  $\Phi$  representa a distribuição normal padrão.

Seja  $p_{(i)} = \Phi([y_{(i)} - \bar{y}]/s_y)$ , onde  $\bar{y}$  é a média e  $s_y$  o desvio=padrão dos  $y_{(i)}$ , respectivamente.

Assim, a expressão da estatística de teste de Anderson-Darling é calculada da seguinte forma. Seja

$$A^2 = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(2i - 1) \log(p_{(i)}) + (2n + 1 - 2i) \log(1 - p_{(i)})]$$

em que  $p_{(i)} = \Phi([y_{(i)} - \bar{y}]/s_y)$  são percentis ordenados da distribuição normal padrão e  $\Phi$  representa a função de distribuição acumulada normal padrão. A estatística de Anderson-Darling é dada por  $A^* = A^2((1 + 0,75/n + 2,25/n^2))$ .

### 2.5.2 Teste de Cramér Von Mises

Este teste também se baseia na distribuição acumulada e foi proposto por Darling (1957). A expressão da estatística de teste de Cramér Von Mises é calculada da seguinte forma. Seja

$$W^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left( p_{(i)} - \frac{2i - 1}{2n} \right)^2,$$

em que  $p_{(i)}$  é definido como na seção anterior. A estatística de Cramér Von Mises é dada por  $W^* = W^2(1 + 0.5/n)$ .

Ambos os testes de hipótese Anderson-Darling e Cramér Von Mises são discutidos em detalhes por Chen and Balakrishnan (1995) e vale-se a seguinte regra de comparação tendo suas estatísticas como figuras de mérito: quanto menores os valores das estatísticas, melhor o modelo associado a ela.

### 2.5.3 Teste de Wald Wolfowitz

Este é um teste não paramétrico que foi recomendado pela Organização Meteorológica Mundial - WMO utilizado para a avaliação de autocorrelação em séries temporais (SERRANO *et al.*, 1999; MITCHELL *et al.* 1966, SNEYERS, 1963).

Ele é executado da seguinte forma:

Primeiro, obtém-se uma série padronizada da variável aleatória  $Z$  pela Equação:

$$Z_i = \frac{X_i - \bar{X}}{S_X}$$

em que  $X_i$  denota o valor da variável aleatória no ano  $i$ ,  $\bar{X}$  é a média amostral,  $S_X$  é o desvio padrão da série.

A estatística de teste  $u$  é estimada pela Equação:

$$u = \frac{1 + (n - 1)(\sum_{i=1}^n z_i \cdot z_{i+1} / \sum_{i=1}^n z_i^2)}{\sqrt{n - 1}},$$

em que  $z_{n+1} = z_1$ ,  $u$  denota a estatística de teste,  $n$  é o tamanho da série,  $z_i$  e  $z_{i+1}$  representam as variáveis padronizadas nos anos  $i$  e  $i + 1$ , respectivamente.

Esse teste estabelece que a variável de teste  $u$  segue uma distribuição normal padrão com média zero e desvio padrão um na hipótese nula de autocorrelação nula ( $\rho = 0$ ). Para um dado nível de confiança  $\alpha$  a hipótese nula será rejeitada se  $P(z < u) > \alpha$ .

## **3. MÉTODO GERADOR DE DISTRIBUIÇÕES E CLASSES DE DISTRIBUIÇÕES PROBABILÍSTICAS, CASO UNIVARIADO.**

### **3.1 Introdução**

Nosso objetivo é obter um método para generalizar e estender o processo de construções de distribuições de probabilidades de forma mais abrangente, permitindo que classes de distribuições sejam construídas utilizando funções monotônicas de distribuições pré-definidas. Através deste método proposto pode-se obter diversas classes de distribuições de probabilidades que tem sido recentemente propostas na literatura.

Este capítulo está organizado da seguinte maneira. Na Seção 3.1, temos uma breve introdução, trazendo o objetivo; na Seção 3.2, temos o método proposto (Teorema 3.1) que se baseia no uso de funções monotônicas para gerar distribuições de probabilidades e apresentamos alguns corolários deste método; na Seção 3.3, particularizamos para o caso de funções monotônicas que são composições de distribuições de probabilidade já conhecidas, obtendo assim classes de distribuições probabilísticas e apresentamos também outros corolários do método proposto e o Teorema 3.2 que demonstra a equivalência do Teorema 3.1 e seus Corolários; na Seção 3.4, analisam-se os suportes dos funcionais geradores de classes de distribuições probabilísticas; na Seção 3.5, sistematizamos no que se diz respeito à nomenclatura das expressões encontradas; na Seção 3.6, mostramos como obter os modelos já existentes na literatura a partir dos corolários apresentados nas seções anteriores; na Seção 3.7 utilizando o Corolário 3.1.5 geramos uma nova classe de distribuições, em que desenvolvemos suas propriedades de caracterização e apresentamos os resultados de aplicações, tabelas e gráficos; e na Seção 3.8, trazemos a conclusão deste capítulo.

### 3.2 Método proposto

O método proposto para gerar classes de distribuições neste trabalho faz uso de funções monotônicas  $U: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U_j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ,  $L_j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ,  $M_j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  e  $V_j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  e de uma função de distribuição acumulada  $F$  (*fda*). A ideia do método é gerar uma distribuição de probabilidade integrando com respeito a distribuição  $F$  nas regiões de  $L_j(x)$  a  $U_j(x)$  e  $M_j(x)$  a  $V_j(x)$  para qualquer  $x \in \mathbb{R}$  e  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ . O Teorema 3.1, a seguir, demonstra condições suficientes que as funções  $U(x)$ ,  $V(x)$ ,  $L_j(x)$ ,  $U_j(x)$ ,  $M_j(x)$  e  $V_j(x)$  devem satisfazer de modo a garantir que o método proposto gera uma função de distribuição de probabilidade.

#### Teorema 3.1 (T3.1): Método gerador de distribuições e classes de distribuições probabilísticas

Sejam  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U_j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ,  $L_j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ,  $M_j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  e  $V_j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , para  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ , funções monotônicas e contínuas à direita, tais que:

[c3.1]  $F$  é uma *fda* e  $U$  e  $V$  são não negativas;

[c3.2]  $U(x)$ ,  $U_j(x)$  e  $M_j(x)$  são não decrescentes e  $V(x)$ ,  $V_j(x)$  e  $L_j(x)$  são não crescentes,  $\forall j = 1, 2, 3, \dots, n$ ;

[c3.3] Se  $\lim_{x \rightarrow -\infty} U(x) \neq \lim_{x \rightarrow -\infty} V(x)$ , então  $\lim_{x \rightarrow -\infty} U(x) = 0$  ou  $\lim_{x \rightarrow -\infty} U_j(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} L_j(x)$

$\forall j = 1, 2, 3, \dots, n$ , e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} V(x) = 0$  ou  $\lim_{x \rightarrow -\infty} M_j(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} V_j(x)$ ,  $\forall j = 1, 2, 3, \dots, n$ ;

[c3.4] Se  $\lim_{x \rightarrow -\infty} U(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} V(x) \neq 0$ , então  $\lim_{x \rightarrow -\infty} U_j(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} V_j(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} M_j(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} L_j(x)$ ,  $\forall j = 1, 2, 3, \dots, n$ ;

[c3.5]  $\lim_{x \rightarrow -\infty} L_j(x) \leq \lim_{x \rightarrow -\infty} U_j(x)$  e se  $\lim_{x \rightarrow -\infty} V(x) \neq 0$ , então  $\lim_{x \rightarrow +\infty} M_j(x) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} V_j(x)$ ,

$\forall j = 1, 2, 3, \dots, n$ ;

[c3.6]  $\lim_{x \rightarrow +\infty} U_n(x) \geq \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\}$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} L_1(x) \leq \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) > 0\}$ ;

[c3.7]  $\lim_{x \rightarrow +\infty} U(x) = 1$ ;

[c3.8]  $\lim_{x \rightarrow +\infty} V(x) = 0$  ou  $\lim_{x \rightarrow +\infty} M_j(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} V_j(x)$ ,  $\forall j = 1, 2, 3, \dots, n$  e  $n \geq 1$ ;

[c3.9]  $\lim_{x \rightarrow +\infty} U_j(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} L_{j+1}(x)$ ,  $\forall j = 1, 2, 3, \dots, n-1$  e  $n \geq 2$ ;

[c3.10]  $F$  é uma *fda* sem pontos de descontinuidade ou todas as funções  $L_j(x)$  e  $V_j(x)$  são constantes à direita na vizinhança dos pontos cujas imagens são pontos de descontinuidades de  $F$ , sendo também contínuas em tais pontos e  $F$  não possui pontos de descontinuidade no conjunto  $\left\{ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} L_j(x), \lim_{x \rightarrow \pm\infty} U_j(x), \lim_{x \rightarrow \pm\infty} M_j(x), \lim_{x \rightarrow \pm\infty} V_j(x), \text{ para algum } j = 1, 2, \dots, n \right\}$ .

Então  $H(x) = U(x) \sum_{j=1}^n \int_{L_j(x)}^{U_j(x)} dF(t) - V(x) \sum_{j=1}^n \int_{M_j(x)}^{V_j(x)} dF(t)$  é uma *fda*.

**Demonstração:**

$$(i) \lim_{x \rightarrow -\infty} H(x) = 0.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} H(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( U(x) \sum_{j=1}^n \int_{L_j(x)}^{U_j(x)} dF(t) \right) - \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( V(x) \sum_{j=1}^n \int_{M_j(x)}^{V_j(x)} dF(t) \right) \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} U(x) \right) \sum_{j=1}^n \int_{\lim_{x \rightarrow -\infty} L_j(x)}^{\lim_{x \rightarrow -\infty} U_j(x)} dF(t) - \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} V(x) \right) \sum_{j=1}^n \int_{\lim_{x \rightarrow -\infty} M_j(x)}^{\lim_{x \rightarrow -\infty} V_j(x)} dF(t), \end{aligned}$$

onde a última igualdade decorre do fato que  $F$  é contínua em

$$\left\{ \lim_{x \rightarrow -\infty} U_j(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} L_j(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} V_j(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} M_j(x) \right\}.$$

Condições [c3.3] e [c3.4] garantem que:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} H(x) = \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} U(x) \right) \sum_{j=1}^n \int_{\lim_{x \rightarrow -\infty} L_j(x)}^{\lim_{x \rightarrow -\infty} U_j(x)} dF(t) - \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} V(x) \right) \sum_{j=1}^n \int_{\lim_{x \rightarrow -\infty} M_j(x)}^{\lim_{x \rightarrow -\infty} V_j(x)} dF(t) = 0.$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} H(x) = 1.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} H(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( U(x) \sum_{j=1}^n \int_{L_j(x)}^{U_j(x)} dF(t) \right) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( V(x) \sum_{j=1}^n \int_{M_j(x)}^{V_j(x)} dF(t) \right) \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} U(x) \right) \sum_{j=1}^n \int_{\lim_{x \rightarrow +\infty} L_j(x)}^{\lim_{x \rightarrow +\infty} U_j(x)} dF(t) - \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} V(x) \right) \sum_{j=1}^n \int_{\lim_{x \rightarrow +\infty} M_j(x)}^{\lim_{x \rightarrow +\infty} V_j(x)} dF(t), \end{aligned}$$

onde a última igualdade decorre do fato que  $F$  é contínua em

$$\left\{ \lim_{x \rightarrow +\infty} U_j(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} L_j(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} V_j(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} M_j(x) \right\}.$$

Deste modo as condições [c3.1], [c3.6], [c3.7], [c3.8] e [c3.9] garantem que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x) = 1.$$

(iii) Se  $x_1 \leq x_2$ , então  $H(x_1) \leq H(x_2)$ .

Seja  $x_1 \leq x_2$ , [c3.2] implica que:  $U_j(x_1) \leq U_j(x_2)$ ,  $L_j(x_1) \geq L_j(x_2)$ ,  $M_j(x_1) \leq M_j(x_2)$ ,  $V_j(x_1) \geq V_j(x_2)$ ,  $U(x_1) \leq U(x_2)$  e  $V(x_1) \geq V(x_2)$ . Além disso, [c3.2] e [c3.5] implicam que  $\sum_{j=1}^n \int_{L_j(x_1)}^{U_j(x_1)} dF(t) \geq 0$ ,  $\sum_{j=1}^n \int_{M_j(x_1)}^{V_j(x_1)} dF(t) \geq 0$ ,  $\sum_{j=1}^n \int_{L_j(x_2)}^{U_j(x_2)} dF(t) \geq 0$  e  $\sum_{j=1}^n \int_{M_j(x_2)}^{V_j(x_2)} dF(t) \geq 0$ .

Assim, como [c3.1]  $U$  e  $V$  são não negativas, temos que:

$$\begin{aligned} H(x_1) &= U(x_1) \sum_{j=1}^n \int_{L_j(x_1)}^{U_j(x_1)} dF(t) - V(x_1) \sum_{j=1}^n \int_{M_j(x_1)}^{V_j(x_1)} dF(t) \\ &\leq U(x_2) \sum_{j=1}^n \int_{L_j(x_2)}^{U_j(x_2)} dF(t) - V(x_2) \sum_{j=1}^n \int_{M_j(x_2)}^{V_j(x_2)} dF(t) = H(x_2). \end{aligned}$$

(iv)  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} H(x) = H(x_0)$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0^+} H(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} U(x) \sum_{j=1}^n \int_{L_j(x)}^{U_j(x)} dF(t) - \lim_{x \rightarrow x_0^+} V(x) \sum_{j=1}^n \int_{M_j(x)}^{V_j(x)} dF(t) \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow x_0^+} U(x) \right) \sum_{j=1}^n \int_{\lim_{x \rightarrow x_0^+} L_j(x)}^{\lim_{x \rightarrow x_0^+} U_j(x)} dF(t) - \left( \lim_{x \rightarrow x_0^+} V(x) \right) \sum_{j=1}^n \int_{\lim_{x \rightarrow x_0^+} M_j(x)}^{\lim_{x \rightarrow x_0^+} V_j(x)} dF(t) \\ &= U(x_0) \sum_{j=1}^n \int_{L_j(x_0)}^{U_j(x_0)} dF(t) - V(x_0) \sum_{j=1}^n \int_{M_j(x_0)}^{V_j(x_0)} dF(t) = H(x_0). \end{aligned}$$

As igualdades decorrem pelo fato de que  $U(x)$ ,  $U_j(x)$ ,  $M_j(x)$ ,  $V(x)$ ,  $V_j(x)$  e  $L_j(x)$  são contínuas a direita e por [c3.10].

De (i), (ii), (iii) e (iv), concluímos que  $H(x) = U(x) \sum_{j=1}^n \int_{L_j(x)}^{U_j(x)} dF(t) - V(x) \sum_{j=1}^n \int_{M_j(x)}^{V_j(x)} dF(t)$  é uma fda. ■

A seguir temos as Figuras 3.2.1 e 3.2.2 que representam o suporte da fda Teorema 3.1.

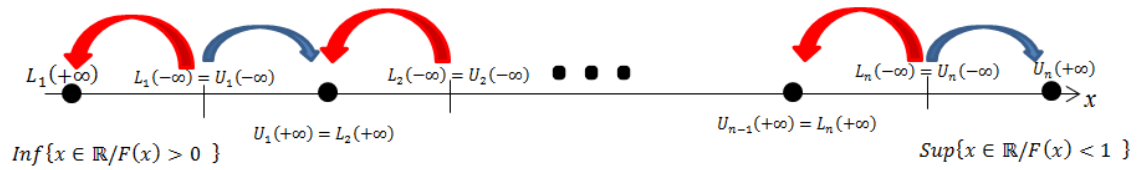


Figura 3.2.1 – Representação do suporte da fda do Teorema 3.1 para  $\lim_{x \rightarrow -\infty} U(x) \neq \lim_{x \rightarrow -\infty} V(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} U(x) \neq 0$

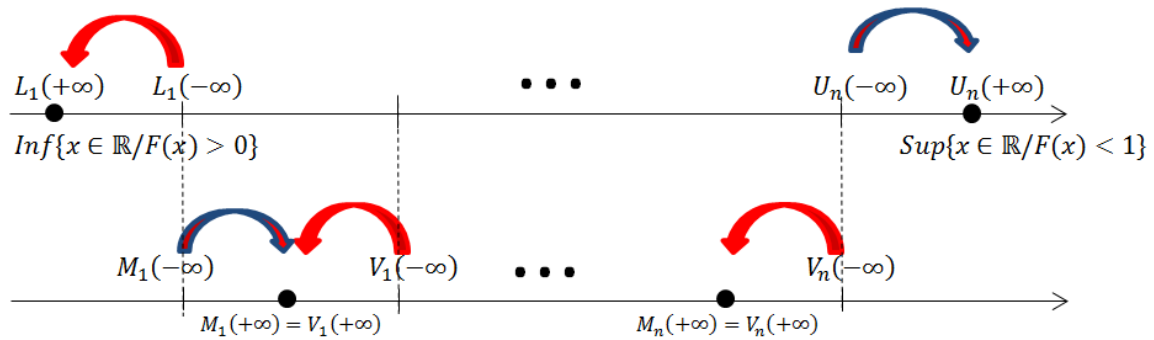


Figura 3.2.2 - Representação do suporte da fda do Teorema 3.1 para  $\lim_{x \rightarrow -\infty} U(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} V(x) \neq 0$

O Corolário 3.1.1 apresenta um método alternativo de gerar distribuições e classes de distribuições probabilísticas.

**Corolário 3.1.1 (C3.1.1): Método complementar gerador de distribuições e classes de distribuições probabilísticas**

Sejam  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{U}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{W}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U_j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ,  $L_j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ,  $M_j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  e  $V_j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ,  $\forall j = 1, 2, 3, \dots, \eta$ , funções monotônicas e contínuas à direita, tais que:

[cc3.1]  $F$  é uma fda e  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{W}$  são não negativas;

[cc3.2]  $\mathcal{U}(x)$ ,  $U_j(x)$  e  $M_j(x)$  são não decrescentes e  $\mathcal{W}(x)$ ,  $V_j(x)$  e  $L_j(x)$  são não crescentes,  $\forall j = 1, 2, 3, \dots, \eta$ ;

[cc3.3] Se  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{W}(x) \neq \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{U}(x)$ , então  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{U}(x) = 0$  ou  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{L}_j(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{U}_j(x)$ ,

$\forall j = 1, 2, 3, \dots, \eta$ , e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{W}(x) = 0$  ou  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{M}_j(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{V}_j(x)$ ,  $\forall j = 1, 2, 3, \dots, \eta$ ;

[cc3.4] Se  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{W}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{U}(x) \neq 0$ , então  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{U}_j(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{V}_j(x)$  e

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{M}_j(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{L}_j(x)$ ,  $\forall j = 1, 2, 3, \dots, \eta$ ;

[cc3.5]  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{M}_j(x) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{V}_j(x)$  e se  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{U}(x) \neq 0$ , então  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbb{L}_j(x) \leq \lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbb{U}_j(x)$

,  $\forall j = 1, 2, 3, \dots, \eta$ ;

[cc3.6]  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbb{V}_\eta(x) \geq \sup\{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) < 1\}$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} L_1(x) \leq \inf\{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) > 0\}$ ;

[cc3.7]  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathcal{W}(x) = 1$ ;

[cc3.8]  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathcal{U}(x) = 0$  ou  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbb{L}_j(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbb{U}_j(x)$ ,  $\forall j = 1, 2, 3, \dots, \eta$  e  $\eta \geq 1$ ;

[cc3.9]  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbb{V}_j(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbb{M}_{j+1}(x)$ ,  $\forall j = 1, 2, 3, \dots, \eta - 1$  e  $\eta \geq 2$ ;

[cc3.10]  $\varphi$  é uma *fda* sem pontos de descontinuidade ou todas as funções  $\mathbb{L}_j(x)$  e  $\mathbb{V}_j$  são constantes à direita na vizinhança dos pontos cujas imagens são pontos de descontinuidades de  $\varphi$ , sendo também contínuas em tais pontos e  $\varphi$  não possui pontos de descontinuidade no conjunto  $\left\{ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \mathbb{L}_j(x) (x), \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \mathbb{U}_j(x), \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \mathbb{M}_j(x), \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \mathbb{V}_j(x), \text{ para algum } j = 1, 2, \dots, \eta \right\}$ .

Então  $H(x) = 1 - \mathcal{W}(x) \sum_{j=1}^{\eta} \int_{\mathbb{M}_j(x)}^{\mathbb{V}_j(x)} d\varphi(t) + \mathcal{U}(x) \sum_{j=1}^{\eta} \int_{\mathbb{L}_j(x)}^{\mathbb{U}_j(x)} d\varphi(t)$  é uma *fda*.

### **Demonstração:**

No Teorema 3.1, considere,  $n = 1$ ,  $\mathcal{U}(x) = 1$ ,  $\mathcal{V}(x) = 0$ ,  $U_1(x) = 1$  e  $L_1(x) = \mathcal{W}(x) \sum_{j=1}^{\eta} \int_{\mathbb{M}_j(x)}^{\mathbb{V}_j(x)} d\varphi(t) - \mathcal{U}(x) \sum_{j=1}^{\eta} \int_{\mathbb{L}_j(x)}^{\mathbb{U}_j(x)} d\varphi(t)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , e  $F$  a *fda* da uniforme  $[0, 1]$ .

Note que  $U_1(x)$  e  $L_1(x)$  satisfazem as hipóteses do Teorema 3.1, pois: [cc3.1],

[cc3.2] e [cc3.5] garantem que  $L_1(x) = \mathcal{W}(x) \sum_{j=1}^{\eta} \int_{\mathbb{M}_j(x)}^{\mathbb{V}_j(x)} d\varphi(t) - \mathcal{U}(x) \sum_{j=1}^{\eta} \int_{\mathbb{L}_j(x)}^{\mathbb{U}_j(x)} d\varphi(t)$  é

não crescente e  $U_1(x) = 1$  é não decrescente satisfazendo as condições [c3.2] e

[c3.5], Condições [cc3.3] e [cc3.4] garantem que:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} U_1(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} L_1(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} U_1(x) = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} L_1(x) =$

$\inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) > 0\} = 0$  e ambas são contínuas à direita e  $F$  é uma *fda* sem

pontos de descontinuidade.

Logo, como todas as condições do Teorema 3.1 são satisfeitas, temos que:



$$H(x) = \int_{L_1(x)}^{U_1(x)} dF(s) = \int_{\mathcal{W}(x) \sum_{j=1}^{\eta} \int_{M_j(x)}^{V_j(x)} d\varphi(t) - \mathcal{U}(x) \sum_{j=1}^{\eta} \int_{L_j(x)}^{U_j(x)} d\varphi(t)} ds$$

$$H(x) = 1 - \mathcal{W}(x) \sum_{j=1}^{\eta} \int_{M_j(x)}^{V_j(x)} d\varphi(t) + \mathcal{U}(x) \sum_{j=1}^{\eta} \int_{L_j(x)}^{U_j(x)} d\varphi(t)$$

é uma função de distribuição de probabilidade. ■

A seguir temos as Figuras 3.2.3 e 3.2.4 que representam o suporte da fda do Corolário 3.1.1.

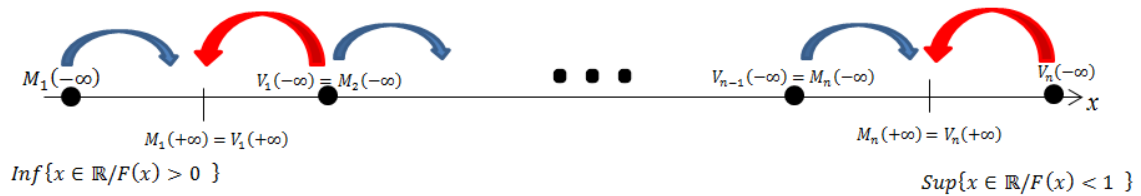


Figura 3.2.3 - Representação do suporte da fda do Corolário 3.1.1 para  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{W}(x) \neq$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{U}(x) \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{U}(x) = 0$$

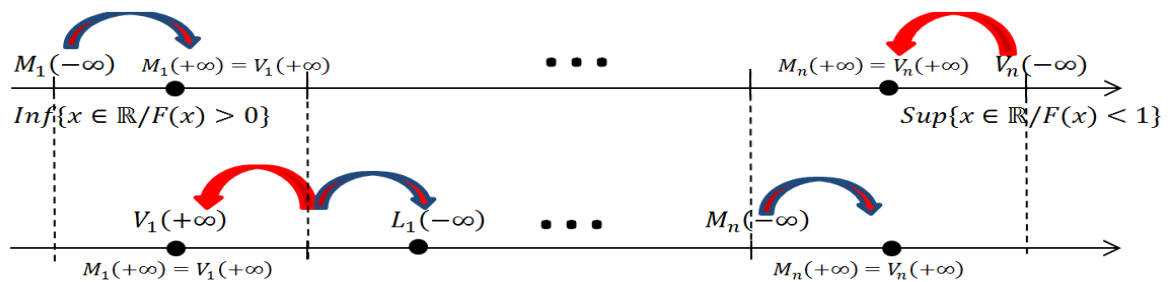


Figura 3.2.4 - Representação do suporte da fda do Corolário 3.1.1 para  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{W}(x) =$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{U}(x) \neq 0$$

O próximo corolário mostra que a normalização de qualquer função monotônica não constante gera uma distribuição de probabilidade

**Corolário 3.1.2 (C3.1.2): Normalização de funções monotônicas não constantes**

Seja  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função monotônica não constante, contínua à direita e com conjunto imagem limitado. Então

$$H(x) = \frac{h(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)}$$

é uma função de distribuição de probabilidade.

**Demonstração:**

No Teorema 3.1, considere  $n = 1$ ,  $U_1(x) = \frac{h(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)}$ ,  $L_1(x) = 0$ ,  $U(x) = 1$  e  $V(x) = 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , e  $F$  a *fda* da uniforme  $[0,1]$ . Note que  $U(x) = 1$  e  $V(x) = 0$ ,  $U_1(x)$  e  $L_1(x)$  satisfazem as hipóteses do Teorema 3.1, pois:  $U(x) = 1$  e  $U_1(x) = \frac{h(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)}$  são não decrescentes e  $L_1(x) = 0$  e  $V(x) = 0$  são não crescente, com  $\lim_{x \rightarrow -\infty} U_1(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} L_1(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} U_1(x) = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\} = 1$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} L_1(x) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) > 0\} = 0$ , sendo todas funções contínuas à direita e  $F$  é uma *fda* sem pontos de descontinuidade.

Logo, como todas as condições do Teorema 3.1 são satisfeitas, temos que:

$$H(x) = \int_{L_1(x)}^{U_1(x)} dF(t) = \int_0^{\frac{h(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)}} dt$$

$$H(x) = \frac{h(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)}$$

é uma função de distribuição de probabilidade. ■

O próximo corolário mostra outra alternativa para obter distribuições de probabilidade normalizando diferença de funções monotônicas.

**Corolário 3.1.3 (C3.1.3): Normalização de diferenças de funções monotônicas**

Sejam  $h_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $h_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funções contínuas à direita e limitadas, monotônicas não decrescente e não crescente, respectivamente. Se  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h_1(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} h_2(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h_1(x) \neq \lim_{x \rightarrow +\infty} h_2(x)$ , então  $H(x) = \frac{h_1(x) - h_2(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (h_1(x) - h_2(x))}$  é uma função de distribuição de probabilidade.

**Demonstração:**

Faça  $h(x) = h_1(x) - h_2(x)$  no Corolário 3.1.2. ■

O próximo corolário mostra outra alternativa para obter distribuições de probabilidade normalizando diferença de funções monotônicas.

**Corolário 3.1.4 (C3.1.4): Normalização complementar de diferenças de funções monotônicas**

Sejam  $h_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $h_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funções contínuas à direita e limitadas, monotônicas não decrescente e não crescente, respectivamente. Se  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h_2(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h_1(x) \neq \lim_{x \rightarrow -\infty} h_2(x)$ , então  $H(x) = 1 - \frac{h_2(x) - h_1(x)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} (h_2(x) - h_1(x))}$  é uma função de distribuição de probabilidade.

**Demonstração:**

Faça  $h(x) = h_1(x) - h_2(x) + \lim_{x \rightarrow -\infty} (h_2(x) - h_1(x))$  no Corolário 3.1.2. ■

Na próxima Seção, vamos ver alguns corolários do Teorema 3.1, em que as funções monotônicas  $U(x)$ ,  $V(x)$ ,  $U_j(x)$ ,  $L_j(x)$ ,  $M_j(x)$  e  $V_j(x)$  serão composições de funções de distribuições conhecidas, para obter funcionais geradores de classes de distribuições.

### 3.3 Funções monotônicas envolvendo distribuições de probabilidades.

Nesta seção, apresentamos as construções, proposta nesta tese, de funções monotônicas envolvendo distribuições. A criação e construção de funções monotônicas envolvendo distribuições consistem em encontrar funções monotônicas usando as operações básicas e as propriedades monotônicas de funções. O Apêndice B apresenta uma lista que pode ser usada para gerar classes de distribuições probabilísticas.

Formalmente, considere  $\mathcal{U}: [0,1]^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\vartheta: [0,1]^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mu_j: [0,1]^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ,  $\ell_j: [0,1]^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ,  $\nu_j: [0,1]^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  e  $m_j: [0,1]^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  funções monotônicas e contínuas à direita. A ideia desta técnica é fazer com que  $U(x) = \mathcal{U}(G_1, \dots, G_m)(x)$ ,  $V(x) = \vartheta(G_1, \dots, G_m)(x)$ ,  $U_j(x) = \mu_j(G_1, \dots, G_m)(x)$ ,  $L_j(x) = \ell_j(G_1, \dots, G_m)(x)$ ,  $M_j(x) = m_j(G_1, \dots, G_m)(x)$  e  $V_j(x) = \nu_j(G_1, \dots, G_m)(x)$ . Utilizaremos a abreviação  $(.)_j(x) = (G_1, \dots, G_m)_j(x) = (G_1(x), \dots, G_m(x))_j$  para representar o vetor formado por  $m$  *fda*'s calculadas no mesmo ponto  $x$  do domínio.

O Corolário 3.1.5 mostra que hipóteses  $\mathcal{U}$ ,  $\vartheta$ ,  $\mu_j$ ,  $\ell_j$ ,  $\nu_j$  e  $m_j$  devem satisfazer para que  $U(x)$ ,  $V(x)$ ,  $U_j(x)$ ,  $L_j(x)$ ,  $M_j(x)$  e  $V_j(x)$  satisfaçam as condições do Teorema 3.1 e possamos obter classes de distribuições probabilísticas.

#### Corolário 3.1.5 (C3.1.5): Método gerador de classes de distribuições probabilísticas

Sejam  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mu_j: [0,1]^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ,  $\ell_j: [0,1]^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  e  $\mathcal{U}: [0,1]^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\nu_j: [0,1]^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ,  $m_j: [0,1]^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  e  $\vartheta: [0,1]^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\forall j = 1, 2, 3, \dots, n$ , funções monotônicas e contínuas à direita tais que:

[d3.1]  $F$  é uma *fda* e  $\mathcal{U}$  e  $\vartheta$  são não negativas;

[d3.2]  $\mu_j$ ,  $m_j$  e  $\mathcal{U}$  são não decrescentes e  $\ell_j$ ,  $\nu_j$  e  $\vartheta$  são não crescentes,  $\forall j = 1, 2, 3, \dots, n$ , em cada uma das suas variáveis;

[d3.3] Se  $\mathcal{U}(0, \dots, 0) \neq \vartheta(0, \dots, 0)$ , então  $\mathcal{U}(0, \dots, 0) = 0$  ou  $\mu_j(0, \dots, 0) = \ell_j(0, \dots, 0)$ ,  $\forall j = 1, 2, 3, \dots, n$ , e  $\vartheta(0, \dots, 0) = 0$  ou  $m_j(0, \dots, 0) = \nu_j(0, \dots, 0)$ ,  $\forall j = 1, 2, 3, \dots, n$ ;

[d3.4] Se  $\mathcal{U}(0, \dots, 0) = \vartheta(0, \dots, 0) \neq 0$ , então  $\mu_j(0, \dots, 0) = \nu_j(0, \dots, 0)$  e  $m_j(0, \dots, 0) = \ell_j(0, \dots, 0)$ ,  $\forall j = 1, 2, 3, \dots, n$ ;

[d3.5]  $\ell_j(0, \dots, 0) \leq \mu_j(0, \dots, 0)$  e se  $\vartheta(0, \dots, 0) \neq 0$ , então  $m_j(1, \dots, 1) \leq v_j(1, \dots, 1)$ ,  
 $\forall j = 1, 2, 3, \dots, n$ ;

[d3.6]  $\mu_n(1, \dots, 1) \geq \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\}$  e  $\ell_1(1, \dots, 1) \leq \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) > 0\}$ ;

[d3.7]  $\mathcal{U}(1, \dots, 1) = 1$ ;

[d3.8]  $\vartheta(1, \dots, 1) = 0$  ou  $v_j(1, \dots, 1) = m_j(1, \dots, 1)$ ,  $\forall j = 1, 2, 3, \dots, n$  e  $n \geq 1$ ;

[d3.9]  $\mu_j(1, \dots, 1) = \ell_{j+1}(1, \dots, 1)$ ,  $\forall j = 1, 2, 3, \dots, n-1$  e  $n \geq 2$ ;

[d3.10]  $F$  é uma *fda* sem pontos de descontinuidade ou todas as funções  $\ell_j(\cdot)(x)$  e  $v_j(\cdot)(x)$  são constantes à direita na vizinhança dos pontos cujas imagens são pontos de descontinuidade de  $F$ , sendo também contínuas em tais pontos e  $F$  não possui pontos de descontinuidade no conjunto  $\{\ell_j(0, \dots, 0), \mu_j(0, \dots, 0), m_j(0, \dots, 0), v_j(0, \dots, 0), \ell_j(1, \dots, 1), \mu_j(1, \dots, 1), m_j(1, \dots, 1), v_j(1, \dots, 1), \text{para algum } j = 1, 2, \dots, n\}$ .

Então  $H_{G_1, \dots, G_m}(x) = \mathcal{U}(\cdot)(x) \sum_{j=1}^n \int_{\ell_j(\cdot)(x)}^{\mu_j(\cdot)(x)} dF(t) - \vartheta(\cdot)(x) \sum_{j=1}^n \int_{m_j(\cdot)(x)}^{v_j(\cdot)(x)} dF(t)$  é

um funcional gerador de classes de distribuições de probabilidades, onde  $(\cdot)(x) = (G_1, \dots, G_m)(x)$ .

**Demonstração:**

No Teorema 3.1, faça  $U(x) = \mathcal{U}(\cdot)(x)$ ,  $V(x) = \vartheta(\cdot)(x)$ ,  $U_j(x) = \mu_j(\cdot)(x)$ ,  $L_j(x) = \ell_j(\cdot)(x)$ ,  $M_j(x) = m_j(\cdot)(x)$  e  $V_j(x) = v_j(\cdot)(x)$ , e note que a condição [d3. *i*] implica a condição [c3. *i*] do Teorema 3.1 para  $i = 1, 2, \dots, 10$ .

Vejamos um caso especial do Corolário 3.1.5, que de fato é um funcional construtor de classes de distribuições probabilísticas que podem ser mais facilmente utilizados:

**1º Caso especial do Corolário 3.1.5 (1C3.1.5): Método construtor de classes de distribuições probabilísticas que podem ser mais facilmente utilizados.**

Sejam  $u_i: [0,1]^m \rightarrow [0,1]$  e  $v_i: [0,1]^m \rightarrow [0,1]$  funções monotônicas e contínuas à direita tais que  $u_i$  são não decrescentes  $v_i$  são não crescentes em cada uma das suas variáveis, com  $u_i(0, \dots, 0) = 0$ ,  $u_i(1, \dots, 1) = 1$ ,  $v_i(0, \dots, 0) = 1$  e  $v_i(1, \dots, 1) = 0$  para todo  $i = 1, \dots, k$ . Se no Corolário 3.1.5,  $\mathcal{U}(\cdot)(x) = \prod_{i=1}^k ((1 - \theta_i)u_i(\cdot)(x) + \theta_i)^{\alpha_i}$  e  $\vartheta(\cdot)(x) = \prod_{i=1}^k (\theta_i v_i(\cdot)(x))^{\alpha_i}$ , com  $\alpha_i \geq 0$  e  $0 \leq \theta_i \leq 1$ , então  $H_{G_1, \dots, G_m}(x) =$

$\prod_{i=1}^k ((1 - \theta_i)u_i(\cdot)(x) + \theta_i)^{\alpha_i} \sum_{j=1}^n \int_{\ell_j(\cdot)(x)}^{\mu_j(\cdot)(x)} dF(t) - \prod_{i=1}^k (\theta_i v_i(\cdot)(x))^{\alpha_i} \sum_{j=1}^n \int_{m_j(\cdot)(x)}^{v_j(\cdot)(x)} dF(t)$  é um funcional gerador construtor de classes de distribuições de probabilidades, onde  $(\cdot)(x) = (G_1, \dots, G_m)(x)$ .

A seguir, a Tabela 3.3.1 mostra a obtenção de alguns funcionais especiais construtores de classes de distribuições probabilísticas do funcional

$$H_{G_1, \dots, G_m}(x) = \prod_{i=1}^k ((1 - \theta_i)u_i(\cdot)(x) + \theta_i)^{\alpha_i} \sum_{j=1}^n \int_{\ell_j(\cdot)(x)}^{\mu_j(\cdot)(x)} dF(t) - \prod_{i=1}^k (\theta_i v_i(\cdot)(x))^{\alpha_i} \sum_{j=1}^n \int_{m_j(\cdot)(x)}^{v_j(\cdot)(x)} dF(t),$$

que podem ser mais facilmente utilizados nas gerações de classes de distribuições.

Considere nas expressões de **15S1C3.1.5 a 20S1C3.1.5**, as seguintes funções

$$\mu: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, \ell: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, \nu: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, m: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},$$

tais que  $\mu$  e  $m$  são não decrescentes e contínuas à direita, e  $\nu$  e  $\ell$  são não crescentes e contínuas à direita.

Tabela 3.3.1 – Alguns funcionais construtores de classes de distribuições probabilísticas obtidos a partir do **1C3.1.5**.

Alguns sub-casos do 1C3.1.5	Condições especiais sobre funções monotônicas e parâmetros	Funcionais construtores obtidos
<b>1S1C3.1.5</b>	$k = 1, \alpha_1 = 0$ e $v_j(1, \dots, 1) = m_j(1, \dots, 1)$	$H_{G_1, \dots, G_m}(x) = \sum_{j=1}^n \int_{\ell_j(\cdot)(x)}^{\mu_j(\cdot)(x)} dF(t)$
<b>2S1C3.1.5</b>	$n = 1, \theta_i = 0$ e $v_j(1, \dots, 1) = m_j(1, \dots, 1)$	$H_{G_1, \dots, G_m}(x) = \prod_{i=1}^k u_i^{\alpha_i(\cdot)}(x) \int_{\ell_1(\cdot)(x)}^{\mu_1(\cdot)(x)} dF(t)$
<b>3S1C3.1.5</b>	$n = 1, k = 1, \alpha_1 = 0$ e $v_1(1, \dots, 1) = m_1(1, \dots, 1)$	$H_{G_1, \dots, G_m}(x) = \int_{\ell_1(\cdot)(x)}^{\mu_1(\cdot)(x)} dF(t)$
<b>4S1C3.1.5</b>	$n = 1, k = 1, \alpha_1 = 0,$ $v_j(1, \dots, 1) = m_j(1, \dots, 1)$ e $f(t) = \frac{1}{\mu_1(1, \dots, 1) - \ell_1(1, \dots, 1)}$ em $[\ell_1(1, \dots, 1), \mu_1(1, \dots, 1)]$	$H_{G_1, \dots, G_m}(x) = \frac{\mu_1(\cdot)(x) - \ell_1(\cdot)(x)}{\mu_1(1, \dots, 1) - \ell_1(1, \dots, 1)}$
<b>5S1C3.1.5</b>	$n = 1, k = 1, \alpha_1 = 0,$ $\ell_1(\cdot)(x) = \mu_1(0, \dots, 0),$ $v_1(1, \dots, 1) = m_1(1, \dots, 1)$ e $f(t) = \frac{1}{\mu_1(1, \dots, 1) - \mu_1(0, \dots, 0)}$ em $[\mu_1(0, \dots, 0), \mu_1(1, \dots, 1)]$	$H_{G_1, \dots, G_m}(x) = \frac{\mu_1(\cdot)(x) - \mu_1(0, \dots, 0)}{\mu_1(1, \dots, 1) - \mu_1(0, \dots, 0)}$

<b>6S1C3.1.5</b>	$n = 1, k = 1, \alpha_1 = 0,$ $\mu_1(\cdot)(x) = \ell_1(0, \dots, 0),$ $\nu_1(1, \dots, 1) = m_1(1, \dots, 1) \mathbf{e}$ $f(t) = \frac{1}{\ell_1(0, \dots, 0) - \ell_1(1, \dots, 1)} \mathbf{e} m$ $[\ell_1(1, \dots, 1), \ell_1(0, \dots, 0)]$	$H_{G_1, \dots, G_m}(x) = \frac{\ell_1(\cdot)(x) - \ell_1(0, \dots, 0)}{\ell_1(1, \dots, 1) - \ell_1(0, \dots, 0)}$
<b>7S1C3.1.5</b>	$k = 1, \alpha_1 = 0 \mathbf{e}$ $\sum_{j=1}^n \int_{\ell_j(\cdot)(x)}^{\mu_j(\cdot)(x)} dF(t) = 1$	$H_{G_1, \dots, G_m}(x) = 1 - \sum_{j=1}^n \int_{m_j(\cdot)(x)}^{\nu_j(\cdot)(x)} dF(t)$
<b>8S1C3.1.5</b>	$n = 1, \theta_i = 1,$ $\mu_1(\cdot)(x) = +\infty \mathbf{e}$ $\ell_1(\cdot)(x) = -\infty$	$H_{G_1, \dots, G_m}(x) = 1 - \prod_{i=1}^k (v_i(\cdot)(x))^{\alpha_i} \int_{m_1(\cdot)(x)}^{\nu_1(\cdot)(x)} dF(t)$
<b>9S1C3.1.5</b>	$n = 1, k = 1, \alpha_1 = 0,$ $\mu_1(\cdot)(x) = +\infty \mathbf{e} \ell_1(\cdot)(x) = -\infty$	$H_{G_1, \dots, G_m}(x) = 1 - \int_{m_1(\cdot)(x)}^{\nu_1(\cdot)(x)} dF(t)$
<b>10S1C3.1.5</b>	$n = 1, k = 1, \alpha_1 = 0,$ $\mu_1(\cdot)(x) = +\infty, \ell_1(\cdot)(x) = -\infty,$ $f(t) = \frac{1}{\nu_1(0, \dots, 0) - m_1(0, \dots, 0)} \mathbf{e} m$ $[m_1(0, \dots, 0), \nu_1(0, \dots, 0)]$	$H_{G_1, \dots, G_m}(x) = 1 - \frac{\nu_1(\cdot)(x) - m_1(\cdot)(x)}{\nu_1(0, \dots, 0) - m_1(0, \dots, 0)}$
<b>11S1C3.1.5</b>	$n = 1, k = 1, \alpha_1 = 0,$ $m_1(\cdot)(x) = \nu_1(1, \dots, 1),$ $\mu_1(\cdot)(x) = +\infty, \ell_1(\cdot)(x) = -\infty,$ $f(t) = \frac{1}{\nu_1(0, \dots, 0) - \nu_1(1, \dots, 1)} \mathbf{e} m$ $[\nu_1(1, \dots, 1), \nu_1(0, \dots, 0)]$	$H_{G_1, \dots, G_m}(x) = \frac{\nu_1(\cdot)(x) - \nu_1(0, \dots, 0)}{\nu_1(1, \dots, 1) - \nu_1(0, \dots, 0)}$
<b>12S1C3.1.5</b>	$n = 1, k = 1, \alpha_1 = 0,$ $\nu_1(\cdot)(x) = m_1(1, \dots, 1),$ $\mu_1(\cdot)(x) = +\infty, \ell_1(\cdot)(x) = -\infty,$ $f(t) = \frac{1}{m_1(1, \dots, 1) - m_1(0, \dots, 0)} \mathbf{e} m$ $[m_1(0, \dots, 0), m_1(1, \dots, 1)]$	$H_{G_1, \dots, G_m}(x) = \frac{m_1(\cdot)(x) - m_1(0, \dots, 0)}{m_1(1, \dots, 1) - m_1(0, \dots, 0)}$



<b>13S1C3.1.5</b>	$n = 1, k = 1, \alpha_1 = 0,$	$H_{G_1, \dots, G_m}(x) = \int_{\ell_1(\cdot)(x)}^{\mu_1(\cdot)(x)} dF(t) - \int_{m_1(\cdot)(x)}^{v_1(\cdot)(x)} dF(t)$
<b>14S1C3.1.5</b>	$n = 1, k = 1, \alpha_1 = 0,$ $f(t) = \frac{1}{\mu_1(1, \dots, 1) - \ell_1(1, \dots, 1) - v_1(1, \dots, 1) + m_1(1, \dots, 1)},$ em $[\ell_1(1, \dots, 1) + v_1(1, \dots, 1), m_1(1, \dots, 1) + \mu_1(1, \dots, 1)].$	$H_{G_1, \dots, G_m}(x) = \frac{\mu_1(\cdot)(x) - \ell_1(\cdot)(x) - v_1(\cdot)(x) + m_1(\cdot)(x)}{\mu_1(1, \dots, 1) - \ell_1(1, \dots, 1) - v_1(1, \dots, 1) + m_1(1, \dots, 1)}$
<b>15S1C3.1.5</b>	$\mu_1(\cdot)(x) = \mu((1 - \gamma)u_{k+1}(\cdot)(x) + \gamma),$ $\ell_1(\cdot)(x) = \ell((1 - \gamma)u_{k+1}(\cdot)(x) + \gamma),$ $v_1(\cdot)(x) = \mu(\gamma v_{k+1}(\cdot)(x)),$ $m_1(\cdot)(x) = \ell(\gamma v_{k+1}(\cdot)(x)),$ $n = 1, \alpha_i > 0 \text{ e } 0 \leq \gamma \leq 1.$	$H_{G_1, \dots, G_m}(x) = \prod_{i=1}^k ((1 - \theta_i)u_i(\cdot)(x) + \theta_i)^{\alpha_i} \int_{\ell_1(\cdot)(x)}^{\mu_1(\cdot)(x)} dF(t) - \prod_{i=n+1}^{n+k} (\theta_i v_i(\cdot)(x))^{\alpha_i} \int_{m_1(\cdot)(x)}^{v_1(\cdot)(x)} dF(t)$
<b>16S1C3.1.5</b>	$\mu_1(\cdot)(x) = \mu((1 - \gamma)u_{k+1}(\cdot)(x) + \gamma),$ $\ell_1(\cdot)(x) = -\infty,$ $v_1(\cdot)(x) = \mu(\gamma v_1(\cdot)(x)),$ $m_1(\cdot)(x) = -\infty,$ $n = 1 \text{ e } 0 \leq \gamma \leq 1.$	$H_{G_1, \dots, G_m}(x) = \prod_{i=1}^k ((1 - \theta_i)u_i(\cdot)(x) + \theta_i)^{\alpha_i} \int_{-\infty}^{\mu_1(\cdot)(x)} dF(t) - \prod_{i=1}^k (\theta_i v_i(\cdot)(x))^{\alpha_i} \int_{-\infty}^{v_1(\cdot)(x)} dF(t)$
<b>17S1C3.1.5</b>	$\mu_1(\cdot)(x) = +\infty,$ $\ell_1(\cdot)(x) = \ell((1 - \gamma)u_{k+1}(\cdot)(x) + \gamma),$ $v_1(\cdot)(x) = +\infty,$ $m_1(\cdot)(x) = \ell(\gamma v_{k+1}(\cdot)(x)),$ $n = 1 \text{ e } 0 \leq \gamma \leq 1.$	$H_{G_1, \dots, G_m}(x) = \prod_{i=1}^k ((1 - \theta_i)u_i(\cdot)(x) + \theta_i)^{\alpha_i} \int_{\ell_1(\cdot)(x)}^{+\infty} dF(t) - \prod_{i=1}^k (\theta_i v_i(\cdot)(x))^{\alpha_i} \int_{m_1(\cdot)(x)}^{+\infty} dF(t)$

<b>18S1C3.1.5</b>	$\begin{aligned}\mu_1(\cdot)(x) &= v(\gamma v_{k+1}(\cdot)(x)), \\ \ell_1(\cdot)(x) &= m(\gamma v_{k+1}(\cdot)(x)), \\ v_1(\cdot)(x) &= v((1-\gamma)u_{k+1}(\cdot)(x) + \gamma), \\ m_1(\cdot)(x) &= m((1-\gamma)u_{k+1}(\cdot)(x) + \gamma), \\ n &= 1, \alpha_i > 0 \text{ e } 0 \leq \gamma \leq 1.\end{aligned}$	$\begin{aligned}H_{G_1, \dots, G_m}(x) &= \prod_{i=1}^k ((1-\theta_i)u_i(\cdot)(x) + \theta_i)^{\alpha_i} \int_{\ell_1(\cdot)(x)}^{\mu_1(\cdot)(x)} dF(t) \\ &\quad - \prod_{i=n+1}^{n+k} (\theta_i v_i(\cdot)(x))^{\alpha_i} \int_{m_1(\cdot)(x)}^{v_1(\cdot)(x)} dF(t)\end{aligned}$
<b>19S1C3.1.5</b>	$\begin{aligned}\mu_1(\cdot)(x) &= v(\gamma v_{k+1}(\cdot)(x)), \\ \ell_1(\cdot)(x) &= -\infty, \\ v_1(\cdot)(x) &= v((1-\gamma)u_{k+1}(\cdot)(x) + \gamma), \\ m_1(\cdot)(x) &= -\infty, \\ n &= 1 \text{ e } 0 \leq \gamma \leq 1.\end{aligned}$	$\begin{aligned}H_{G_1, \dots, G_m}(x) &= \prod_{i=1}^k ((1-\theta_i)u_i(\cdot)(x) + \theta_i)^{\alpha_i} \int_{-\infty}^{\mu_1(\cdot)(x)} dF(t) \\ &\quad - \prod_{i=1}^k (\theta_i v_i(\cdot)(x))^{\alpha_i} \int_{-\infty}^{v_1(\cdot)(x)} dF(t)\end{aligned}$
<b>20S1C3.1.5</b>	$\begin{aligned}\mu_1(\cdot)(x) &= +\infty, \\ \ell_1(\cdot)(x) &= m(\gamma v_{k+1}(\cdot)(x)), \\ v_1(\cdot)(x) &= +\infty, \\ m_1(\cdot)(x) &= m((1-\gamma)u_{k+1}(\cdot)(x) + \gamma), \\ n &= 1 \text{ e } 0 \leq \gamma \leq 1.\end{aligned}$	$\begin{aligned}H_{G_1, \dots, G_m}(x) &= \prod_{i=1}^k ((1-\theta_i)u_i(\cdot)(x) + \theta_i)^{\alpha_i} \int_{\ell_1(\cdot)(x)}^{+\infty} dF(t) \\ &\quad - \prod_{i=1}^k (\theta_i v_i(\cdot)(x))^{\alpha_i} \int_{m_1(\cdot)(x)}^{+\infty} dF(t)\end{aligned}$
<b>21S1C3.1.5</b>	$n = 1.$	$\begin{aligned}H_{G_1, \dots, G_m}(x) &= \prod_{i=1}^k ((1-\theta_i)u_i(\cdot)(x) + \theta_i)^{\alpha_i} \int_{\ell_1(\cdot)(x)}^{\mu_1(\cdot)(x)} dF(t) \\ &\quad - \prod_{i=1}^k (\theta_i v_i(\cdot)(x))^{\alpha_i} \int_{m_1(\cdot)(x)}^{v_1(\cdot)(x)} dF(t)\end{aligned}$
<b>22S1C3.1.5</b>	$\begin{aligned}\mu_1(\cdot)(x) &= +\infty, \\ \ell_1(\cdot)(x) &= -\infty, \\ v_1(\cdot)(x) &= +\infty, \\ m_1(\cdot)(x) &= -\infty, \\ n &= 1 \text{ e } \alpha_i > 0.\end{aligned}$	$H_{G_1, \dots, G_m}(x) = \prod_{i=1}^k ((1-\theta_i)u_i(\cdot)(x) + \theta_i)^{\alpha_i} - \prod_{i=1}^k (\theta_i v_i(\cdot)(x))^{\alpha_i}$

O Corolário 3.1.6 mostra um método alternativo para obtenção de classes de distribuições probabilísticas a partir do Corolário 3.1.1. Ele mostra que hipóteses sobre  $\mathcal{U}$ ,  $\vartheta$ ,  $\mu_j$ ,  $\ell_j$ ,  $\nu_j$  e  $m_j$  devem satisfazer para que as funções  $\mathcal{U}(x)$ ,  $\mathcal{W}(x)$ ,  $\mathcal{U}_j(x)$ ,  $\mathcal{L}_j(x)$ ,  $\mathcal{M}_j(x)$  e  $\mathcal{V}_j(x)$ , satisfaçam as condições apresentadas no Corolário 3.1.1 e possamos obter classes de distribuições probabilísticas.

**Corolário 3.1.6 (C3.1.6): Método complementar gerador de classes de distribuições probabilísticas**

Sejam  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mu_j: [0,1]^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ,  $\ell_j: [0,1]^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  e  $\mathcal{U}: [0,1]^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\nu_j: [0,1]^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ,  $m_j: [0,1]^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  e  $\vartheta: [0,1]^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\forall j = 1, 2, 3, \dots, \eta$ , funções monotônicas e contínuas à direita tais que:

[cd3.1]  $\varphi$  é uma fda e  $\mathcal{U}$  e  $\vartheta$  são não negativas;

[cd3.2]  $\mu_j$ ,  $m_j$  e  $\mathcal{U}$  são não decrescentes e  $\ell_j$ ,  $\nu_j$  e  $\vartheta$  são não crescentes,  $\forall j = 1, 2, 3, \dots, \eta$ , em cada uma das suas variáveis;

[cd3.3] Se  $\mathcal{U}(1, \dots, 1) \neq \vartheta(1, \dots, 1)$ , então  $\vartheta(1, \dots, 1) = 0$  ou  $m_j(1, \dots, 1) = \nu_j(1, \dots, 1)$ ,  $\forall j = 1, 2, 3, \dots, \eta$ , e  $\mathcal{U}(1, \dots, 1) = 0$  ou  $\ell_j(1, \dots, 1) = \mu_j(1, \dots, 1)$ ,  $\forall j = 1, 2, 3, \dots, \eta$ ;

[cd3.4] Se  $\mathcal{U}(1, \dots, 1) = \vartheta(1, \dots, 1) \neq 0$ , então  $\mu_j(1, \dots, 1) = \nu_j(1, \dots, 1)$ ,  $\forall j = 1, 2, 3, \dots, \eta$ , e  $m_j(1, \dots, 1) = \ell_j(1, \dots, 1)$ ,  $\forall j = 1, 2, 3, \dots, \eta$ ;

[cd3.5]  $\ell_j(0, \dots, 0) \leq \mu_j(0, \dots, 0)$  e se  $\vartheta(1, \dots, 1) \neq 0$ , então  $m_j(1, \dots, 1) \leq \nu_j(1, \dots, 1)$ ,  $\forall j = 1, 2, 3, \dots, \eta$ ;

[cd3.6]  $\nu_\eta(0, \dots, 0) \geq \sup\{x \in \mathbb{R}: F(x) < 1\}$  e  $m_1(0, \dots, 0) \leq \inf\{x \in \mathbb{R}: F(x) > 0\}$ ;

[cd3.7]  $\vartheta(0, \dots, 0) = 1$ ;

[cd3.8]  $\mathcal{U}(0, \dots, 0) = 0$  ou  $\ell_j(0, \dots, 0) = \mu_j(0, \dots, 0)$ ,  $\forall j = 1, 2, 3, \dots, \eta - 1$  e  $\eta \geq 1$ ;

[cd3.9]  $\nu_j(0, \dots, 0) = m_{j+1}(0, \dots, 0)$ ,  $\forall j = 1, 2, 3, \dots, \eta - 1$  e  $\eta \geq 2$ ;

[cd3.10]  $\varphi$  é uma fda sem pontos de descontinuidade ou todas as funções  $\ell_j(\cdot)(x)$  e  $\nu_j(\cdot)(x)$  são constantes à direita na vizinhança dos pontos cujas imagens são pontos de descontinuidades de  $\varphi$ , sendo também contínuas em tais pontos e  $\varphi$  não possui pontos de descontinuidade no conjunto  $\{\ell_j(0, \dots, 0), \mu_j(0, \dots, 0), m_j(0, \dots, 0), \nu_j(0, \dots, 0), \ell_j(1, \dots, 1), \mu_j(1, \dots, 1), m_j(1, \dots, 1), \nu_j(1, \dots, 1)\}$ , para algum  $j = 1, 2, \dots, \eta$ .

Então  $H_{G_1, \dots, G_m}(x) = 1 - \vartheta(\cdot)(x) \sum_{j=1}^{\eta} \int_{m_j(\cdot)(x)}^{\nu_j(\cdot)(x)} d\varphi(t) + \mathcal{U}(\cdot)(x) \sum_{j=1}^{\eta} \int_{\ell_j(\cdot)(x)}^{\mu_j(\cdot)(x)} d\varphi(t)$

é um funcional gerador de classes de distribuições de probabilidades, onde  $(\cdot)(x) = (G_1, \dots, G_m)(x)$ .

**Demonstração:**

No Corolário 3.1.1, faça  $\mathcal{U}(x) = \mathcal{U}(\cdot)(x)$ ,  $\mathcal{W}(x) = \mathcal{W}(\cdot)(x)$ ,  $\mathcal{U}_j(x) = \mu_j(\cdot)(x)$ ,  $\mathcal{L}_j(x) = \ell_j(\cdot)(x)$ ,  $\mathcal{M}_j(x) = m_j(\cdot)(x)$  e  $\mathcal{V}_j(x) = \nu_j(\cdot)(x)$ , e note que a condição [cd3.i] implica a condição [cc3.i] do Corolário 3.1.1 para  $i = 1, 2, \dots, 10$ . ■

Vejamos um caso especial do Corolário 3.1.6, que de fato é um funcional construtor de classes de distribuições que pode ser mais facilmente utilizado:

**1º Caso especial do Corolário 3.1.6 (1C3.1.6): Método complementar construtor de classes de distribuições probabilísticas podem ser mais facilmente utilizado.**

Sejam  $u_i: [0,1]^m \rightarrow [0,1]$  e  $v_i: [0,1]^m \rightarrow [0,1]$  funções monotônicas e contínuas à direita tais que  $u_i$  são não decrescentes  $v_i$  são não crescentes em cada uma das suas variáveis, com  $u_i(0, \dots, 0) = 0$ ,  $u_i(1, \dots, 1) = 1$ ,  $v_i(0, \dots, 0) = 1$  e  $v_i(1, \dots, 1) = 0$  para todo  $i = 1, \dots, k$ . Se no Corolário 3.1.6,  $\mathcal{V}(\cdot)(x) = \prod_{i=1}^k ((1 - \theta_i)v_i(\cdot)(x) + \theta_i)^{\alpha_i}$  e  $\mathcal{U}(\cdot)(x) = \prod_{i=1}^k (\theta_i u_i(\cdot)(x))^{\alpha_i}$ , com  $\alpha_i \geq 0$  e  $0 \leq \theta_i \leq 1$ , então  $H_{G_1, \dots, G_m}(x) = 1 - \prod_{i=1}^k ((1 - \theta_i)v_i(\cdot)(x) + \theta_i)^{\alpha_i} \sum_{j=1}^n \int_{m_j(\cdot)(x)}^{v_j(\cdot)(x)} d\varphi(t) + \prod_{i=1}^k (\theta_i u_i(\cdot)(x))^{\alpha_i} \sum_{j=1}^n \int_{\ell_j(\cdot)(x)}^{\mu_j(\cdot)(x)} d\varphi(t)$ , é um funcional gerador de classes de distribuições de probabilidades, onde  $(\cdot)(x) = (G_1, \dots, G_m)(x)$ .

A seguir, a Tabela 3.3.2 mostra a obtenção de alguns funcionais especiais construtores de classes de distribuições probabilísticas do funcional  $H_{G_1, \dots, G_m}(x) = 1 - \prod_{i=1}^k ((1 - \theta_i)v_i(\cdot)(x) + \theta_i)^{\alpha_i} \sum_{j=1}^n \int_{m_j(\cdot)(x)}^{v_j(\cdot)(x)} d\varphi(t) + \prod_{i=1}^k (\theta_i u_i(\cdot)(x))^{\alpha_i} \sum_{j=1}^n \int_{\ell_j(\cdot)(x)}^{\mu_j(\cdot)(x)} d\varphi(t)$ , que podem ser mais facilmente utilizados nas gerações de classes de distribuições. Considere nas expressões de **15S1C3.1.5 a 20S1C3.1.5**, as seguintes funções  $\mu: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ,  $\ell: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ,  $\nu: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ,  $m: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , tais que  $\mu$  e  $m$  são não decrescentes e contínuas à direita, e  $\nu$  e  $\ell$  são não crescentes e contínuas à direita.

Tabela 3.3.2 – Alguns funcionais construtores de classes de distribuições probabilísticas obtidos a partir do **1C3.1.6**.

Alguns sub-casos do 1C3.1.6	Condições especiais sobre funções monotônicas e parâmetros	Funcionais construtores obtidos
<b>1S1C3.1.6</b>	$k = 1, \alpha_1 = 0 \text{ e}$ $\sum_{j=1}^{\eta} \int_{m_j(\cdot)(x)}^{v_j(\cdot)(x)} d\varphi(t) = 1.$	$H_{G_1, \dots, G_m}(x) = \sum_{j=1}^{\eta} \int_{\ell_j(\cdot)(x)}^{\mu_j(\cdot)(x)} d\varphi(t)$
<b>2S1C3.1.6</b>	$\eta = 1, \theta_i = 1,$ $v_1(\cdot)(x) = +\infty \text{ e}$ $m_1(\cdot)(x) = -\infty$	$H_{G_1, \dots, G_m}(x) = \prod_{i=1}^k u_i^{\alpha_i(\cdot)(x)} \int_{\ell_1(\cdot)(x)}^{\mu_1(\cdot)(x)} d\varphi(t)$
<b>3S1C3.1.6</b>	$\eta = 1, k = 1, \alpha_1 = 0,$ $v_1(\cdot)(x) = +\infty \text{ e}$ $m_1(\cdot)(x) = -\infty$	$H_{G_1, \dots, G_m}(x) = \int_{\ell_1(\cdot)(x)}^{\mu_1(\cdot)(x)} d\varphi(t)$
<b>4S1C3.1.6</b>	$\eta = 1, k = 1, \alpha_1 = 0,$ $v_1(\cdot)(x) = +\infty, m_1(\cdot)(x) = -\infty \text{ e}$ $\varphi'(t) = \frac{1}{\mu_1(1, \dots, 1) - \ell_1(1, \dots, 1)} \text{ em}$ $[\ell_1(1, \dots, 1), \mu_1(1, \dots, 1)]$	$H_{G_1, \dots, G_m}(x) = \frac{\mu_1(\cdot)(x) - \ell_1(\cdot)(x)}{\mu_1(1, \dots, 1) - \ell_1(1, \dots, 1)}$
<b>5S1C3.1.6</b>	$\eta = 1, k = 1, \alpha_1 = 0,$ $\ell_1(\cdot)(x) = \mu_1(0, \dots, 0),$ $v_1(\cdot)(x) = +\infty, m_1(\cdot)(x) = -\infty \text{ e}$ $\varphi'(t) = \frac{1}{\mu_1(1, \dots, 1) - \mu_1(0, \dots, 0)} \text{ em}$ $[\mu_1(0, \dots, 0), \mu_1(1, \dots, 1)]$	$H_{G_1, \dots, G_m}(x) = \frac{\mu_1(\cdot)(x) - \mu_1(0, \dots, 0)}{\mu_1(1, \dots, 1) - \mu_1(0, \dots, 0)}$
<b>6S1C3.1.6</b>	$\eta = 1, k = 1, \alpha_1 = 0,$ $\mu_1(\cdot)(x) = \ell_1(0, \dots, 0),$ $v_1(\cdot)(x) = +\infty, m_1(\cdot)(x) = -\infty \text{ e}$ $\varphi'(t) = \frac{1}{\ell_1(0, \dots, 0) - \ell_1(1, \dots, 1)} \text{ em}$ $[\ell_1(1, \dots, 1), \ell_1(0, \dots, 0)]$	$H_{G_1, \dots, G_m}(x) = \frac{\ell_1(\cdot)(x) - \ell_1(0, \dots, 0)}{\ell_1(1, \dots, 1) - \ell_1(0, \dots, 0)}$

<b>7S1C3.1.6</b>	$k = 1, \alpha_1 = 0 \text{ e}$ $\mu_j(1, \dots, 1) = \ell_j(1, \dots, 1)$	$H_{G_1, \dots, G_m}(x) = 1 - \sum_{j=1}^{\eta} \int_{m_j(\cdot)(x)}^{v_j(\cdot)(x)} d\varphi(t)$
<b>8S1C3.1.6</b>	$\eta = 1, \theta_i = 0 \text{ e}$ $\mu_1(1, \dots, 1) = \ell_1(1, \dots, 1)$	$H_{G_1, \dots, G_m}(x) = 1 - \prod_{i=1}^k (v_i(\cdot)(x))^{\alpha_i} \int_{m_1(\cdot)(x)}^{v_1(\cdot)(x)} d\varphi(t)$
<b>9S1C3.1.6</b>	$\eta = 1, k = 1, \alpha_1 = 0 \text{ e}$ $\mu_1(1, \dots, 1) = \ell_1(1, \dots, 1)$	$H_{G_1, \dots, G_m}(x) = 1 - \int_{m_1(\cdot)(x)}^{v_1(\cdot)(x)} d\varphi(t)$
<b>10S1C3.1.6</b>	$\eta = 1, k = 1, \alpha_1 = 0,$ $\mu_1(1, \dots, 1) = \ell_1(1, \dots, 1) \text{ e}$ $\varphi'(t) = \frac{1}{v_1(0, \dots, 0) - m_1(0, \dots, 0)} \text{ em}$ $[m_1(0, \dots, 0), v_1(0, \dots, 0)]$	$H_{G_1, \dots, G_m}(x) = 1 - \frac{v_1(\cdot)(x) - m_1(\cdot)(x)}{v_1(0, \dots, 0) - m_1(0, \dots, 0)}$
<b>11S1C3.1.6</b>	$\eta = 1, k = 1, \alpha_1 = 0,$ $m_1(\cdot)(x) = v_1(1, \dots, 1),$ $\mu_1(1, \dots, 1) = \ell_1(1, \dots, 1) \text{ e}$ $\varphi'(t) = \frac{1}{v_1(0, \dots, 0) - v_1(1, \dots, 1)} \text{ em}$ $[v_1(1, \dots, 1), v_1(0, \dots, 0)]$	$H_{G_1, \dots, G_m}(x) = \frac{v_1(\cdot)(x) - v_1(0, \dots, 0)}{v_1(0, \dots, 0) - v_1(1, \dots, 1)}$
<b>12S1C3.1.6</b>	$\eta = 1, k = 1, \alpha_1 = 0,$ $v_1(\cdot)(x) = m_1(0, \dots, 0),$ $\mu_1(1, \dots, 1) = \ell_1(1, \dots, 1) \text{ e}$ $\varphi'(t) = \frac{1}{m_1(1, \dots, 1) - m_1(0, \dots, 0)} \text{ em}$ $[m_1(0, \dots, 0), m_1(1, \dots, 1)]$	$H_{G_1, \dots, G_m}(x) = \frac{m_1(\cdot)(x) - m_1(0, \dots, 0)}{m_1(1, \dots, 1) - m_1(0, \dots, 0)}$
<b>13S1C3.1.5</b>	$\eta = 1, k = 1, \alpha_1 = 0,$	$H_{G_1, \dots, G_m}(x) = 1 - \int_{m_1(\cdot)(x)}^{v_1(\cdot)(x)} dF(t) + \int_{\ell_1(\cdot)(x)}^{\mu_1(\cdot)(x)} dF(t)$

<b>14S1C3.1.5</b>	$\eta = 1, k = 1, \alpha_1 = 0 \text{ e}$ $f(t) = \frac{1}{v_1(0, \dots, 0) - m_1(0, \dots, 0) - \mu_1(0, \dots, 0) + \ell_1(0, \dots, 0)}$ $\text{em } [m_1(0, \dots, 0) + \mu_1(0, \dots, 0), \ell_1(0, \dots, 0) + v_1(0, \dots, 0)]$	$H_{G_1, \dots, G_m}(x) = 1 - \frac{v_1(\cdot)(x) - m_1(\cdot)(x) - \mu_1(\cdot)(x) + \ell_1(\cdot)(x)}{v_1(0, \dots, 0) - m_1(0, \dots, 0) - \mu_1(0, \dots, 0) + \ell_1(0, \dots, 0)}$
<b>15S1C3.1.6</b>	$\mu_1(\cdot)(x) = \mu(\gamma u_{k+1}(\cdot)(x)),$ $\ell_1(\cdot)(x) = \ell(\gamma u_{k+1}(\cdot)(x)),$ $v_1(\cdot)(x) = \mu((1 - \gamma)v_{k+1}(\cdot)(x) + \gamma),$ $m_1(\cdot)(x) = \ell((1 - \gamma)v_{k+1}(\cdot)(x) + \gamma),$ $\eta = 1 \text{ e } 0 \leq \gamma \leq 1.$	$H_{G_1, \dots, G_m}(x) = 1 - \prod_{i=1}^k ((1 - \theta_i)v_i(\cdot)(x) + \theta_i)^{\alpha_i} \int_{m_1(\cdot)(x)}^{v_1(\cdot)(x)} d\varphi(t)$ $+ \prod_{i=1}^k (\theta_i u_i(\cdot)(x))^{\alpha_i} \int_{\ell_1(\cdot)(x)}^{\mu_1(\cdot)(x)} d\varphi(t)$
<b>16S1C3.1.6</b>	$\mu_1(\cdot)(x) = \mu(\gamma u_{k+1}(\cdot)(x)),$ $\ell_1(\cdot)(x) = -\infty,$ $v_1(\cdot)(x) = \mu((1 - \gamma)v_{k+1}(\cdot)(x) + \gamma),$ $m_1(\cdot)(x) = -\infty,$ $\eta = 1 \text{ e } 0 \leq \gamma \leq 1.$	$H_{G_1, \dots, G_m}(x) = 1 - \prod_{i=1}^k ((1 - \theta_i)v_i(\cdot)(x) + \theta_i)^{\alpha_i} \int_{-\infty}^{v_1(\cdot)(x)} d\varphi(t)$ $+ \prod_{i=1}^k (\theta_i u_i(\cdot)(x))^{\alpha_i} \int_{-\infty}^{\mu_1(\cdot)(x)} d\varphi(t)$
<b>17S1C3.1.6</b>	$\mu_1(\cdot)(x) = +\infty,$ $\ell_1(\cdot)(x) = \ell(\gamma u_{k+1}(\cdot)(x)),$ $v_1(\cdot)(x) = +\infty,$ $m_1(\cdot)(x) = \ell((1 - \gamma)v_{k+1}(\cdot)(x) + \gamma),$ $\eta = 1 \text{ e } 0 \leq \gamma \leq 1.$	$H_{G_1, \dots, G_m}(x) = 1 - \prod_{i=1}^k ((1 - \theta_i)v_i(\cdot)(x) + \theta_i)^{\alpha_i} \int_{m_1(\cdot)(x)}^{+\infty} d\varphi(t)$ $+ \prod_{i=1}^k (\theta_i u_i(\cdot)(x))^{\alpha_i} \int_{\ell_1(\cdot)(x)}^{+\infty} d\varphi(t)$
<b>18S1C3.1.6</b>	$\mu_1(\cdot)(x) = m(\gamma u_{k+1}(\cdot)(x)),$ $\ell_1(\cdot)(x) = v(\gamma u_{k+1}(\cdot)(x)),$ $v_1(\cdot)(x) = m((1 - \gamma)v_{k+1}(\cdot)(x) + \gamma),$ $m_1(\cdot)(x) = v((1 - \gamma)v_{k+1}(\cdot)(x) + \gamma),$ $\eta = 1 \text{ e } 0 \leq \gamma \leq 1.$	$H_{G_1, \dots, G_m}(x) = 1 - \prod_{i=1}^k ((1 - \theta_i)v_i(\cdot)(x) + \theta_i)^{\alpha_i} \int_{m_1(\cdot)(x)}^{v_1(\cdot)(x)} d\varphi(t)$ $+ \prod_{i=1}^k (\theta_i u_i(\cdot)(x))^{\alpha_i} \int_{\ell_1(\cdot)(x)}^{\mu_1(\cdot)(x)} d\varphi(t)$

<b>19S1C3.1.6</b>	$\begin{aligned}\mu_1(\cdot)(x) &= m(\gamma u_{k+1}(\cdot)(x)), \\ \ell_1(\cdot)(x) &= -\infty, \\ v_1(\cdot)(x) &= m((1-\gamma)v_{k+1}(\cdot)(x) + \gamma), \\ m_1(\cdot)(x) &= -\infty, \\ \eta &= 1 \text{ e } 0 \leq \gamma \leq 1.\end{aligned}$	$\begin{aligned}H_{G_1, \dots, G_m}(x) &= 1 - \prod_{i=1}^k ((1-\theta_i)v_i(\cdot)(x) + \theta_i)^{\alpha_i} \int_{-\infty}^{v_1(\cdot)(x)} d\varphi(t) \\ &\quad + \prod_{i=1}^k (\theta_i u_i(\cdot)(x))^{\alpha_i} \int_{-\infty}^{\mu_1(\cdot)(x)} d\varphi(t)\end{aligned}$
<b>20S1C3.1.6</b>	$\begin{aligned}\mu_1(\cdot)(x) &= +\infty, \\ \ell_1(\cdot)(x) &= v(\gamma u_{k+1}(\cdot)(x)), \\ v_1(\cdot)(x) &= +\infty, \\ m_1(\cdot)(x) &= v((1-\gamma)v_{k+1}(\cdot)(x) + \gamma), \\ \eta &= 1 \text{ e } 0 \leq \gamma \leq 1.\end{aligned}$	$\begin{aligned}H_{G_1, \dots, G_m}(x) &= 1 - \prod_{i=1}^k ((1-\theta_i)v_i(\cdot)(x) + \theta_i)^{\alpha_i} \int_{m_1(\cdot)(x)}^{+\infty} d\varphi(t) \\ &\quad + \prod_{i=1}^k (\theta_i u_i(\cdot)(x))^{\alpha_i} \int_{\ell_1(\cdot)(x)}^{+\infty} d\varphi(t)\end{aligned}$
<b>21S1C3.1.6</b>	$\eta = 1.$	$\begin{aligned}H_{G_1, \dots, G_m}(x) &= 1 - \prod_{i=1}^k ((1-\theta_i)v_i(\cdot)(x) + \theta_i)^{\alpha_i} \int_{m_1(\cdot)(x)}^{v_1(\cdot)(x)} d\varphi(t) \\ &\quad + \prod_{i=1}^k (\theta_i u_i(\cdot)(x))^{\alpha_i} \int_{\ell_1(\cdot)(x)}^{\mu_1(\cdot)(x)} d\varphi(t)\end{aligned}$
<b>22S1C3.1.6</b>	$\begin{aligned}\mu_1(\cdot)(x) &= +\infty, \\ \ell_1(\cdot)(x) &= -\infty, \\ v_1(\cdot)(x) &= +\infty, \\ m_1(\cdot)(x) &= -\infty, \\ \eta &= 1 \text{ e } \alpha_i > 0.\end{aligned}$	$H_{G_1, \dots, G_m}(x) = 1 - \prod_{i=1}^k ((1-\theta_i)v_i(\cdot)(x) + \theta_i)^{\alpha_i} + \prod_{i=1}^k (\theta_i u_i(\cdot)(x))^{\alpha_i}$



O Corolário 3.1.7 mostra outra alternativa para obtermos classes de distribuições probabilísticas a partir do Teorema 3.1.

**Corolário 3.1.7 (C3.1.7): Método normalizado gerador de classes de distribuições probabilísticas**

Sejam  $\mathfrak{F}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $w: [0,1]^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  e  $z: [0,1]^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  funções monotônicas e contínuas à direita tais que:

[e3.1]  $\mathfrak{F}$  é uma *fda*;

[e3.2]  $w$  é não decrescente e  $z$  é não crescente;

[e3.3]  $\mathfrak{F}$  é uma *fda* sem pontos de descontinuidade ou a função  $z(\cdot)(x)$  é constante à direita na vizinhança dos pontos cujas imagens são pontos de descontinuidades de  $\mathfrak{F}$ , sendo também contínuas em tais pontos e  $\mathfrak{F}$  não possui pontos de descontinuidade no conjunto  $\{z(0, \dots, 0), z(1, \dots, 1), w(0, \dots, 0), w(1, \dots, 1)\}$ .

Então, temos que  $H_{G_{1,\dots,m}}(x) = \frac{\int_{w(0,\dots,0)}^{w(\cdot)(x)} d\mathfrak{F}(t) - \int_{z(0,\dots,0)}^{z(\cdot)(x)} d\mathfrak{F}(t)}{\int_{w(0,\dots,0)}^{w(1,\dots,1)} d\mathfrak{F}(t) - \int_{z(0,\dots,0)}^{z(1,\dots,1)} d\mathfrak{F}(t)}$  é um funcional gerador de

classes de distribuições de probabilísticas.

**Demonstração:**

No Teorema 3.1, considere  $n = 1$ ,  $U(x) = 1$ ,  $V(x) = 0$ ,  $U_1(x) = \frac{\int_{w(0,\dots,0)}^{w(\cdot)(x)} d\mathfrak{F}(t) - \int_{z(0,\dots,0)}^{z(\cdot)(x)} d\mathfrak{F}(t)}{\int_{w(0,\dots,0)}^{w(1,\dots,1)} d\mathfrak{F}(t) - \int_{z(0,\dots,0)}^{z(1,\dots,1)} d\mathfrak{F}(t)}$  e

$L_1(x) = 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , e  $F$  uma *fda* da uniforme  $[0,1]$ . Note que  $U_1(x)$  e  $L_1(x)$  satisfazem

as hipóteses do Teorema 3.1, pois:  $U_1(x)$  é não decrescente e  $L_1(x)$  é não

crescente, com  $\lim_{x \rightarrow -\infty} U_1(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} L_1(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} U_1(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} L_1(x) = 0$ ,

ambas são contínuas à direita e  $F$  é uma *fda* sem pontos de descontinuidade.

Logo, como todas as condições do Teorema 3.1 são satisfeitas, temos que:

$$H_{G_{1,\dots,m}}(x) = \frac{\int_{w(0,\dots,0)}^{w(\cdot)(x)} d\mathfrak{F}(t) - \int_{z(0,\dots,0)}^{z(\cdot)(x)} d\mathfrak{F}(t)}{\int_{w(0,\dots,0)}^{w(1,\dots,1)} d\mathfrak{F}(t) - \int_{z(0,\dots,0)}^{z(1,\dots,1)} d\mathfrak{F}(t)}$$

é um funcional gerador de classes de distribuições de probabilidades. ■

**1º Caso especial do Corolário 3.1.7 (1C3.1.7):**

Se, no Corolário 3.1.7,  $w(\cdot)(x) = \mathcal{U}(\cdot)(x) \sum_{j=1}^n \int_{\ell_j(\cdot)(x)}^{\mu_j(\cdot)(x)} dF(t)$  e  $z(\cdot)(x) = \vartheta(\cdot)(x) \sum_{j=1}^n \int_{m_j(\cdot)(x)}^{\nu_j(\cdot)(x)} dF(t)$  satisfazendo as condições [d3.1] a [d3.10] do Corolário 3.1.5 e  $\mathfrak{F}$  for uma *fda* da uniforme [0,1], então temos que  $H_{G_1, \dots, G_m}(x) = \mathcal{U}(\cdot)(x) \sum_{j=1}^n \int_{\ell_j(\cdot)(x)}^{\mu_j(\cdot)(x)} dF(t) - \vartheta(\cdot)(x) \sum_{j=1}^n \int_{m_j(\cdot)(x)}^{\nu_j(\cdot)(x)} dF(t)$  que é o mesmo funcional gerador de classes de distribuições de probabilidades do Corolário 3.1.5.

**2º Caso especial do Corolário 3.1.7 (2C3.1.7):**

Se, no Corolário 3.1.7,  $w(\cdot)(x) = \mathcal{U}(\cdot)(x) \sum_{j=1}^n \int_{\ell_j(\cdot)(x)}^{\mu_j(\cdot)(x)} d\varphi(t)$  e  $z(\cdot)(x) = \vartheta(\cdot)(x) \sum_{j=1}^n \int_{m_j(\cdot)(x)}^{\nu_j(\cdot)(x)} d\varphi(t)$  satisfazendo as condições [cd3.1] a [cd3.10] do Corolário 3.1.6 e  $\mathfrak{F}$  for uma *fda* da uniforme [0,1], então temos que  $H_{G_1, \dots, G_m}(x) = 1 - \vartheta(\cdot)(x) \sum_{j=1}^n \int_{m_j(\cdot)(x)}^{\nu_j(\cdot)(x)} d\varphi(t) + \mathcal{U}(\cdot)(x) \sum_{j=1}^n \int_{\ell_j(\cdot)(x)}^{\mu_j(\cdot)(x)} d\varphi(t)$  que é o mesmo funcional gerador de classes de distribuições de probabilidades do Corolário 3.1.6.

O teorema a seguir, mostra que o Teorema 3.1 e os seus corolários são todos equivalentes entre si, ou seja, o Teorema 3.1 e todos os seus corolários geram exatamente as mesmas distribuições probabilísticas.

**Teorema 3.2 (T3.2): Equivalência entre o Teorema 3.1 e os seus corolários.**

O Teorema 3.1 e todos os seus corolários geram exatamente as mesmas distribuições probabilísticas.

**Demonstração:**

Para demonstrarmos o Teorema 3.5, iremos mostrar que o C3.1.1 é corolário de T3.1, que o C3.1.2 é corolário de C3.1.1, e assim sucessivamente até que o T3.1 é corolário de C3.1.7. Então vejamos:

(1) C3.1.1 é colário de T3.1: Óbvio, pois já foi demonstrado.

(2) C3.1.2 é colário de C3.1.1: No Corolário 3.1.1, faça  $\eta = 1$ ,  $\mathcal{W}(x) = 1$ ,  $\mathbb{V}_1(x) = 1$ ,  $\mathbb{M}_1(x) = 0$ ,  $\mathbb{U}(x) = 1$ ,  $\mathbb{U}_1(x) = \frac{h(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)}$ ,  $\mathbb{L}_1(x) = 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , e  $\varphi$  a fda da uniforme  $[0,1]$ . Logo teremos a expressão do C3.1.2, conforme desenvolvimento abaixo:

$$H(x) = 1 - \mathcal{W}(x) \sum_{j=1}^{\eta} \int_{\mathbb{M}_j(x)}^{\mathbb{V}_j(x)} d\varphi(t) + \mathbb{U}(x) \sum_{j=1}^{\eta} \int_{\mathbb{L}_j(x)}^{\mathbb{U}_j(x)} d\varphi(t)$$

$$H(x) = \frac{h(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)}$$

Portanto, o C3.1.2 é colário de C3.1.1.

(3) C3.1.3 é colário de C3.1.2: No Corolário 3.1.2, faça  $h(x) = h_1(x) - h_2(x)$ .

(4) C3.1.4 é colário de C3.1.3: Considere a expressão  $H(x) = \frac{w_1(x) - w_2(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (w_1(x) - w_2(x))}$ , para o Corolário 3.1.3, faça  $w_1(x) = 1$ ,  $w_2(x) = \frac{h_2(x) - h_1(x)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} (h_2(x) - h_1(x))}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Logo teremos a expressão do C3.1.4, conforme desenvolvimento abaixo:

$$H(x) = \frac{w_1(x) - w_2(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (w_1(x) - w_2(x))}$$

$$H(x) = 1 - \frac{h_2(x) - h_1(x)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} (h_2(x) - h_1(x))}$$

Portanto, o C3.1.4 é colário de C3.1.3.

(5) C3.1.5 é colário de C3.1.4: No Corolário 3.1.4, faça  $h_2(x) = 1$ ,  $h_1(x) = \mathcal{U}(\cdot)(x) \sum_{j=1}^n \int_{\ell_j(\cdot)(x)}^{\mu_j(\cdot)(x)} dF(t) - \vartheta(\cdot)(x) \sum_{j=1}^n \int_{m_j(\cdot)(x)}^{\nu_j(\cdot)(x)} dF(t)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Logo teremos a expressão do C3.1.5, conforme desenvolvimento abaixo:

$$H(x) = 1 - \frac{h_2(x) - h_1(x)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} (h_2(x) - h_1(x))}$$

$$H_{G_1, \dots, G_m}(x) = \mathcal{U}(\cdot)(x) \sum_{j=1}^n \int_{\ell_j(\cdot)(x)}^{\mu_j(\cdot)(x)} dF(t) - \vartheta(\cdot)(x) \sum_{j=1}^n \int_{m_j(\cdot)(x)}^{\nu_j(\cdot)(x)} dF(t)$$

Portanto, o C3.1.5 é corolário de C3.1.4.

(6) C3.1.6 é corolário de C3.1.5: No Corolário 3.1.5, faça  $n = 1$ ,  $\mathcal{U}(\cdot)(x) = 1$ ,  $L_1(\cdot)(x) = \vartheta(\cdot)(x) \sum_{j=1}^{\eta} \int_{m_j(\cdot)(x)}^{\nu_j(\cdot)(x)} d\varphi(t) - \mathcal{U}(\cdot)(x) \sum_{j=1}^{\eta} \int_{\ell_j(\cdot)(x)}^{\mu_j(\cdot)(x)} d\varphi(t)$ ,  $U_1(\cdot)(x) = 1$ ,  $V(\cdot)(x) = 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  e  $F$  a *fda* da uniforme  $[0,1]$ . Logo teremos a expressão do C3.1.6, conforme desenvolvimento abaixo:

$$H_{G_1, \dots, G_m}(x) = \mathcal{U}(\cdot)(x) \sum_{j=1}^n \int_{L_j(\cdot)(x)}^{U_j(\cdot)(x)} dF(t) - V(\cdot)(x) \sum_{j=1}^n \int_{M_j(\cdot)(x)}^{V_j(\cdot)(x)} dF(t)$$

$$H_{G_1, \dots, G_m}(x) = 1 - \vartheta(\cdot)(x) \sum_{j=1}^{\eta} \int_{m_j(\cdot)(x)}^{\nu_j(\cdot)(x)} d\varphi(t) + \mathcal{U}(\cdot)(x) \sum_{j=1}^{\eta} \int_{\ell_j(\cdot)(x)}^{\mu_j(\cdot)(x)} d\varphi(t)$$

Portanto, o C3.1.6 é corolário de C3.1.5.

(7) C3.1.7 é corolário do C3.1.6: No Corolário 3.1.6, faça  $\eta = 1$ ,  $\mathcal{U}(\cdot)(x) = 1$ ,  $\vartheta(\cdot)(x) = 1$ ,  $\nu_1(\cdot)(x) = 1$ ,  $m_j(\cdot)(x) = 0$ ,  $\mu_1(\cdot)(x) = \frac{\int_{w(0, \dots, 0)}^{w(\cdot)(x)} d\mathfrak{F}(t) - \int_{z(0, \dots, 0)}^{z(\cdot)(x)} d\mathfrak{F}(t)}{\int_{w(0, \dots, 0)}^{w(1, \dots, 1)} d\mathfrak{F}(t) - \int_{z(0, \dots, 0)}^{z(1, \dots, 1)} d\mathfrak{F}(t)}$ ,  $\ell_j(\cdot)(x) = 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , e  $\varphi$  a *fda* da uniforme  $[0,1]$ . Logo teremos a expressão do C3.1.7, conforme desenvolvimento abaixo:

$$H_{G_1, \dots, G_m}(x) = 1 - \vartheta(\cdot)(x) \sum_{j=1}^{\eta} \int_{m_j(\cdot)(x)}^{\nu_j(\cdot)(x)} d\varphi(t) + \mathcal{U}(\cdot)(x) \sum_{j=1}^{\eta} \int_{\ell_j(\cdot)(x)}^{\mu_j(\cdot)(x)} d\varphi(t)$$

$$H_{G_1, \dots, G_m}(x) = \frac{\int_{w(0, \dots, 0)}^{w(\cdot)(x)} d\mathfrak{F}(t) - \int_{z(0, \dots, 0)}^{z(\cdot)(x)} d\mathfrak{F}(t)}{\int_{w(0, \dots, 0)}^{w(1, \dots, 1)} d\mathfrak{F}(t) - \int_{z(0, \dots, 0)}^{z(1, \dots, 1)} d\mathfrak{F}(t)}$$

Portanto, o C3.1.7 é corolário de C3.1.6.

(8) T3.1 é corolário de C3.1.7: No Corolário 3.1.7, faça  $w(\cdot)(x) = \mathcal{U}(x) \sum_{j=1}^n \int_{L_j(x)}^{U_j(x)} dF(t)$ ,  $z(\cdot)(x) = V(x) \sum_{j=1}^n \int_{M_j(x)}^{V_j(x)} dF(t)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , e  $\mathfrak{F}$  a *fda* da uniforme  $[0,1]$ . Logo teremos a expressão do T3.1, conforme desenvolvimento abaixo:

$$H_{G_1, \dots, G_m}(x) = \frac{\int_{w(0, \dots, 0)}^{w(\cdot)(x)} d\mathfrak{F}(t) - \int_{z(0, \dots, 0)}^{z(\cdot)(x)} d\mathfrak{F}(t)}{\int_{w(0, \dots, 0)}^{w(1, \dots, 1)} d\mathfrak{F}(t) - \int_{z(0, \dots, 0)}^{z(1, \dots, 1)} d\mathfrak{F}(t)}$$

$$H(x) = U(x) \sum_{j=1}^n \int_{L_j(x)}^{U_j(x)} dF(t) - V(x) \sum_{j=1}^n \int_{M_j(x)}^{V_j(x)} dF(t)$$

Portanto, o T3.1 é corolário do C3.1.7.

De (1) a (8), concluímos que o Teorema 3.1 e todos os seus Corolários geram exatamente as mesmas distribuições probabilísticas. ■

### 3.4. Suportes para as Classes de Distribuições Probabilísticas.

Com base na proposta do método gerador de distribuições de probabilidades, um estudo mais detalhado sobre os suportes das classes e das distribuições geradas por elas se faz necessário, em virtude de pouca abrangência na literatura. A seguir apresentamos um estudo detalhado dos conjuntos suportes das classes e das distribuições geradas pelos funcionais dos Corolários 3.1.5 e 3.1.6 do Teorema 3.1.

Primeiro observemos que por definição de suporte de distribuição de probabilidade, teremos que para qualquer distribuição  $F$ , o seu suporte,  $S_F$  é dado por  $S_F = \{x \in \mathbb{R}: F(x) - F(x - \varepsilon) > 0, \forall \varepsilon > 0\}$ . O Teorema 3.3 mostra que o suporte da distribuição gerada está contido na união dos suportes das distribuições  $G_i$ 's.

#### Teorema 3.3 (T3.3): Teorema geral dos suportes.

Seja  $H_{G_1, \dots, G_m}(x)$  a função de distribuição gerada a partir do Corolário 3.1.5 (respectivamente, 3.1.6). Então  $S_{H_{G_1, \dots, G_m}} \subset \bigcup_{j=1}^m S_{G_j}$ .

#### **Demonstração:**

Sem perda de generalidade, considere o funcional do Corolário 3.1.5 (respectivamente, 3.1.6) do Teorema 3.1, ou seja,  $H_{G_1, \dots, G_m}(x) = u(\cdot)(x) \sum_{j=1}^n \int_{\ell_j(\cdot)(x)}^{\mu_j(\cdot)(x)} dF(t) - \vartheta(\cdot)(x) \sum_{j=1}^n \int_{m_j(\cdot)(x)}^{v_j(\cdot)(x)} dF(t)$ .

Logo, temos que:

$$\begin{aligned}
 H_{G_1, \dots, G_m}(x) - H_{G_1, \dots, G_m}(x - \varepsilon) &= \mathcal{U}(\cdot)(x) \sum_{j=1}^n \int_{\ell_j(\cdot)(x)}^{\mu_j(\cdot)(x)} dF(t) - \vartheta(\cdot)(x) \sum_{j=1}^n \int_{m_j(\cdot)(x)}^{\nu_j(\cdot)(x)} dF(t) \\
 -\mathcal{U}(\cdot)(x - \varepsilon) \sum_{j=1}^n \int_{\ell_j(\cdot)(x - \varepsilon)}^{\mu_j(\cdot)(x - \varepsilon)} dF(t) &+ \vartheta(\cdot)(x - \varepsilon) \sum_{j=1}^n \int_{m_j(\cdot)(x - \varepsilon)}^{\nu_j(\cdot)(x - \varepsilon)} dF(t)
 \end{aligned}$$

Vamos supor que  $x \notin \bigcup_{j=1}^m S_{G_j}$ , então existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $G_j(x) - G_j(x - \varepsilon) = 0$ , para todo  $j = 1, 2, \dots, m$ . Portanto, temos

$$\begin{aligned}
 H_{G_1, \dots, G_m}(x) - H_{G_1, \dots, G_m}(x - \varepsilon) &= \mathcal{U}(\cdot)(x) \sum_{j=1}^n \int_{\ell_j(\cdot)(x)}^{\mu_j(\cdot)(x)} dF(t) - \vartheta(\cdot)(x) \sum_{j=1}^n \int_{m_j(\cdot)(x)}^{\nu_j(\cdot)(x)} dF(t) \\
 -\mathcal{U}(\cdot)(x - \varepsilon) \sum_{j=1}^n \int_{\ell_j(\cdot)(x)}^{\mu_j(\cdot)(x)} dF(t) &+ \vartheta(\cdot)(x - \varepsilon) \sum_{j=1}^n \int_{m_j(\cdot)(x)}^{\nu_j(\cdot)(x)} dF(t) \\
 +\mathcal{U}(\cdot)(x - \varepsilon) \sum_{j=1}^n \int_{\ell_j(\cdot)(x)}^{\mu_j(\cdot)(x)} dF(t) &- \vartheta(\cdot)(x - \varepsilon) \sum_{j=1}^n \int_{m_j(\cdot)(x)}^{\nu_j(\cdot)(x)} dF(t) \\
 -\mathcal{U}(\cdot)(x - \varepsilon) \sum_{j=1}^n \int_{\ell_j(\cdot)(x - \varepsilon)}^{\mu_j(\cdot)(x - \varepsilon)} dF(t) &+ \vartheta(\cdot)(x - \varepsilon) \sum_{j=1}^n \int_{m_j(\cdot)(x - \varepsilon)}^{\nu_j(\cdot)(x - \varepsilon)} dF(t)
 \end{aligned}$$

Ainda podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 H_{G_1, \dots, G_m}(x) - H_{G_1, \dots, G_m}(x - \varepsilon) &= (\mathcal{U}(\cdot)(x) - \mathcal{U}(\cdot)(x - \varepsilon)) \sum_{j=1}^n \int_{\ell_j(\cdot)(x)}^{\mu_j(\cdot)(x)} dF(t) \\
 -(\vartheta(\cdot)(x) - \vartheta(\cdot)(x - \varepsilon)) \sum_{j=1}^n \int_{m_j(\cdot)(x)}^{\nu_j(\cdot)(x)} dF(t) \\
 +\mathcal{U}(\cdot)(x - \varepsilon) \left( \sum_{j=1}^n \int_{\ell_j(\cdot)(x)}^{\mu_j(\cdot)(x)} dF(t) - \sum_{j=1}^n \int_{\ell_j(\cdot)(x - \varepsilon)}^{\mu_j(\cdot)(x - \varepsilon)} dF(t) \right) \\
 -\vartheta(\cdot)(x - \varepsilon) \left( \sum_{j=1}^n \int_{m_j(\cdot)(x)}^{\nu_j(\cdot)(x)} dF(t) - \sum_{j=1}^n \int_{m_j(\cdot)(x - \varepsilon)}^{\nu_j(\cdot)(x - \varepsilon)} dF(t) \right)
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
H_{G_1, \dots, G_m}(x) - H_{G_1, \dots, G_m}(x - \varepsilon) &= (\mathcal{U}(\cdot)(x) - \mathcal{U}(\cdot)(x - \varepsilon)) \sum_{j=1}^n \int_{\ell_j(\cdot)(x)}^{\mu_j(\cdot)(x)} dF(t) \\
&- (\mathfrak{V}(\cdot)(x) - \mathfrak{V}(\cdot)(x - \varepsilon)) \sum_{j=1}^n \int_{m_j(\cdot)(x)}^{\nu_j(\cdot)(x)} dF(t) \\
&+ \mathcal{U}(\cdot)(x - \varepsilon) \left( \sum_{j=1}^n \left( \int_{\mu_j(\cdot)(x-\varepsilon)}^{\mu_j(\cdot)(x)} dF(t) - \int_{\ell_j(\cdot)(x-\varepsilon)}^{\ell_j(\cdot)(x)} dF(t) \right) \right) \\
&- \mathfrak{V}(\cdot)(x - \varepsilon) \left( \sum_{j=1}^n \left( \int_{\nu_j(\cdot)(x-\varepsilon)}^{\nu_j(\cdot)(x)} dF(t) - \int_{m_j(\cdot)(x-\varepsilon)}^{\nu_j(\cdot)(x)} dF(t) \right) \right).
\end{aligned}$$

Assim, como  $\mathcal{U}(\cdot)(x) = \mathcal{U}(\cdot)(x - \varepsilon)$ ,  $\mathfrak{V}(\cdot)(x) = \mathfrak{V}(\cdot)(x - \varepsilon)$ ,  $\mu_j(\cdot)(x) = \mu_j(\cdot)(x - \varepsilon)$ ,  $\ell_j(\cdot)(x) = \ell_j(\cdot)(x - \varepsilon)$ ,  $m_j(\cdot)(x) = m_j(\cdot)(x - \varepsilon)$  e  $\nu_j(\cdot)(x) = \nu_j(\cdot)(x - \varepsilon)$ , temos que

$$H_{G_1, \dots, G_m}(x) - H_{G_1, \dots, G_m}(x - \varepsilon) = 0.$$

Logo teremos  $x \notin S_{H_{G_1, \dots, G_m}}$ . Então, se  $x \in S_{H_{G_1, \dots, G_m}}$ , temos que  $x \in \bigcup_{j=1}^m S_{G_j}$  e, portanto,  $S_{H_{G_1, \dots, G_m}} \subset \bigcup_{j=1}^m S_{G_j}$ . ■

O Corolário 3.3.1 do Teorema 3.3 mostra um caso especial em que a distribuição  $H_{G_1, \dots, G_m}(x)$  é discreta.

**Corolário 3.3.1 (C3.3.1):** **Baselines discretas geram distribuições discretas.**

Se todas as  $G_j$ 's são discretas, então  $H_{G_1, \dots, G_m}(x)$  é discreta.

### **Demonstração:**

Sendo todas as  $G_j$ 's discretas, então  $\bigcup_{j=1}^m S_{G_j}$  tem uma quantidade enumerável de valores. Como  $S_{H_{G_1, \dots, G_m}} \subset \bigcup_{j=1}^m S_{G_j}$  pelo **Teorema 3.3**, logo  $S_{H_{G_1, \dots, G_m}}$  tem uma quantidade enumerável de valores e, portanto, também  $H_{G_1, \dots, G_m}(x)$  é uma *fda* de *v. a.* discreta. ■

O Teorema 3.4 mostra condições em que  $S_{H_{G_1, \dots, G_m}} = \bigcup_{j=1}^m S_{G_j}$ .

**Teorema 3.4 (T3.4): Suporte da distribuição é a união dos suportes das baselines.**

Se no corolário 3.1.5 (respectivamente, 3.1.6)

[f3.1]  $S_F$  for um conjunto convexo;

[f3.2]  $\mu_n(1, \dots, 1) = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\}$ ,  $\ell_1(1, \dots, 1) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) > 0\}$ ,

$\mathcal{U}(\cdot)(x) > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , e  $\mu_j(\cdot)(x)$  ou  $\ell_j(\cdot)(x)$ , para algum  $j = 1, 2, \dots, n$ , forem

estritamente monotônicas ou  $\nu_n(0, \dots, 0) = \sup\{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) < 1\}$ ,  $m_1(0, \dots, 0) =$

$\inf\{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) > 0\}$ ,  $\vartheta(\cdot)(x) > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , e  $\nu_j(\cdot)(x)$  ou  $m_j(\cdot)(x)$ , para algum  $j =$

$1, 2, \dots, n$ , forem estritamente monotônicas.

Então  $S_{H_{G_1, \dots, G_m}} = \bigcup_{j=1}^m S_{G_j}$ .

**Demonstração:**

(1)  $S_{H_{G_1, \dots, G_m}} \subset \bigcup_{j=1}^m S_{G_j}$ . Óbvio, pois é o resultado do Teorema 3.3.

(2)  $S_{H_{G_1, \dots, G_m}} \supset \bigcup_{j=1}^m S_{G_j}$ .

Sem perda de generalidade, considere o funcional do Corolário 3.1.5 (respectivamente 3.1.6) e mais todas as condições do corolário, ou seja,  $H_{G_1, \dots, G_m}(x) =$

$$\mathcal{U}(\cdot)(x) \sum_{j=1}^n \int_{\ell_j(\cdot)(x)}^{\mu_j(\cdot)(x)} dF(t) - \vartheta(\cdot)(x) \sum_{j=1}^n \int_{m_j(\cdot)(x)}^{\nu_j(\cdot)(x)} dF(t).$$

Logo, temos que:

$$\begin{aligned} H_{G_1, \dots, G_m}(x) - H_{G_1, \dots, G_m}(x - \varepsilon) &= \mathcal{U}(\cdot)(x) \sum_{j=1}^n \int_{\ell_j(\cdot)(x)}^{\mu_j(\cdot)(x)} dF(t) - \vartheta(\cdot)(x) \sum_{j=1}^n \int_{m_j(\cdot)(x)}^{\nu_j(\cdot)(x)} dF(t) \\ &- \mathcal{U}(\cdot)(x - \varepsilon) \sum_{j=1}^n \int_{\ell_j(\cdot)(x - \varepsilon)}^{\mu_j(\cdot)(x - \varepsilon)} dF(t) + \vartheta(\cdot)(x - \varepsilon) \sum_{j=1}^n \int_{m_j(\cdot)(x - \varepsilon)}^{\nu_j(\cdot)(x - \varepsilon)} dF(t). \end{aligned}$$

Vamos supor que  $x \in \bigcup_{j=1}^m S_{G_j}$ , então existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $G_j(x) - G_j(x - \varepsilon) > 0$ , para algum  $j = 1, 2, \dots, m$ . De maneira inteiramente análoga, obteremos a expressão desenvolvida na dedução do Teorema 3.2, portanto temos:



$$\begin{aligned}
H_{G_1, \dots, G_m}(x) - H_{G_1, \dots, G_m}(x - \varepsilon) &= (\mathcal{U}(\cdot)(x) - \mathcal{U}(\cdot)(x - \varepsilon)) \sum_{j=1}^n \int_{\ell_j(\cdot)(x)}^{\mu_j(\cdot)(x)} dF(t) \\
&- (\vartheta(\cdot)(x) - \vartheta(\cdot)(x - \varepsilon)) \sum_{j=1}^n \int_{m_j(\cdot)(x)}^{\nu_j(\cdot)(x)} dF(t) \\
&+ \mathcal{U}(\cdot)(x - \varepsilon) \left( \sum_{j=1}^n \left( \int_{\mu_j(\cdot)(x-\varepsilon)}^{\mu_j(\cdot)(x)} dF(t) - \int_{\ell_j(\cdot)(x-\varepsilon)}^{\ell_j(\cdot)(x)} dF(t) \right) \right) \\
&- \vartheta(\cdot)(x - \varepsilon) \left( \sum_{j=1}^n \left( \int_{\nu_j(\cdot)(x-\varepsilon)}^{\nu_j(\cdot)(x)} dF(t) - \int_{m_j(\cdot)(x-\varepsilon)}^{\nu_j(\cdot)(x)} dF(t) \right) \right).
\end{aligned}$$

As condições [f3.1] e [f3.2] implicam que pelo menos uma das integrais da forma  $\int_{h(\cdot)(x-\varepsilon)}^{h(\cdot)(x)} dF(t)$  é diferente de zero para  $h = \mu_j$ ,  $h = \ell_j$ ,  $h = \nu_j$  ou  $h = m_j$ , para algum  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Isto por sua vez, junto com o fato que  $\mathcal{U}$  ou  $\vartheta$  são estritamente monotônicas, implica que:

$$H_{G_1, \dots, G_m}(x) - H_{G_1, \dots, G_m}(x - \varepsilon) > 0$$

Assim,

$$x \in S_{H_{G_1, \dots, G_m}}.$$

Portanto,

$$S_{H_{G_1, \dots, G_m}} \supset \bigcup_{j=1}^m S_{G_j}.$$

De (1) e (2), concluímos que  $S_{H_{G_1, \dots, G_m}} = \bigcup_{j=1}^m S_{G_j}$ . ■

O Teorema 3.5 mostra condições em que a *fda*  $H_{G_1, \dots, G_m}(x)$  é contínua.

**Teorema 3.5 (T3.5): Distribuições de funções contínuas geram distribuições de funções contínuas.**

Se  $F(x)$ ,  $G_1, \dots, G_m$  são *fda's* contínuas no Corolário 3.1.5 (respectivamente 3.1.6),  $\mu_j$ ,  $\ell_j$ ,  $\mathcal{U}$ ,  $\nu_j$ ,  $m_j$  e  $\vartheta$  são funções contínuas, então  $H_{G_1, \dots, G_m}(x)$  é uma *fda* contínua.

**Demonstração:**

Sem perda de generalidade, considere o funcional do Corolário 3.1.5, ou seja,

$$H_{G_1, \dots, G_m}(x) = \mathcal{U}(\cdot)(x) \sum_{j=1}^n \int_{\ell_j(\cdot)(x)}^{\mu_j(\cdot)(x)} dF(t) - \vartheta(\cdot)(x) \sum_{j=1}^n \int_{m_j(\cdot)(x)}^{\nu_j(\cdot)(x)} dF(t).$$

Logo, temos que:

$$\begin{aligned} H_{G_1, \dots, G_m}(x) - H_{G_1, \dots, G_m}(x^-) &= \mathcal{U}(\cdot)(x) \sum_{j=1}^n \int_{\ell_j(\cdot)(x)}^{\mu_j(\cdot)(x)} dF(t) - \vartheta(\cdot)(x) \sum_{j=1}^n \int_{m_j(\cdot)(x)}^{\nu_j(\cdot)(x)} dF(t) \\ &- \mathcal{U}(\cdot)(x^-) \sum_{j=1}^n \int_{\ell_j(\cdot)(x^-)}^{\mu_j(\cdot)(x^-)} dF(t) + \vartheta(\cdot)(x^-) \sum_{j=1}^n \int_{m_j(\cdot)(x^-)}^{\nu_j(\cdot)(x^-)} dF(t). \end{aligned}$$

Logo, utilizando o desenvolvimento similar ao da prova do Teorema 3.3, obtemos

$$\begin{aligned} H_{G_1, \dots, G_m}(x) - H_{G_1, \dots, G_m}(x^-) &= (\mathcal{U}(\cdot)(x) - \mathcal{U}(\cdot)(x^-)) \sum_{j=1}^n \int_{\ell_j(\cdot)(x)}^{\mu_j(\cdot)(x)} dF(t) \\ &- (\vartheta(\cdot)(x) - \vartheta(\cdot)(x^-)) \sum_{j=1}^n \int_{m_j(\cdot)(x)}^{\nu_j(\cdot)(x)} dF(t) \\ &+ \mathcal{U}(\cdot)(x^-) \left( \sum_{j=1}^n \left( \int_{\mu_j(\cdot)(x^-)}^{\mu_j(\cdot)(x)} dF(t) - \int_{\ell_j(\cdot)(x^-)}^{\ell_j(\cdot)(x)} dF(t) \right) \right) \\ &- \vartheta(\cdot)(x^-) \left( \sum_{j=1}^n \int_{\nu_j(\cdot)(x^-)}^{\nu_j(\cdot)(x)} dF(t) - \sum_{j=1}^n \int_{m_j(\cdot)(x^-)}^{\nu_j(\cdot)(x)} dF(t) \right). \end{aligned}$$

Como todas as funções contidas na expressão anterior são contínuas, temos que:

$$H_{G_1, \dots, G_m}(x) - H_{G_1, \dots, G_m}(x^-) = 0.$$

Portanto, concluímos que  $H_{G_1, \dots, G_m}(x)$  é uma função contínua. ■

O Teorema 3.6 mostra condições em que a distribuição  $H_{G_1, \dots, G_m}(x)$  será uma *fda* de *v. a.* contínua.

**Teorema 3.6 (T3.6):** Distribuições de variáveis aleatórias contínuas geram distribuições de variáveis aleatórias contínuas.

Se  $F(x)$ ,  $G_1, \dots, G_m$  forem *fda's* de *v.a.'s* contínuas no Corolário 3.1.5 (respectivamente, 3.1.6),  $\mu_j$ ,  $\ell_j$ ,  $\mathcal{U}$ ,  $\nu_j$ ,  $m_j$  e  $\vartheta$  forem funções contínuas e diferenciáveis, então  $H_{G_1, \dots, G_m}(x)$  será uma *fda* de *v.a.* contínua.

**Demonstração:**

Sem perda de generalidade, considere o funcional do Corolário 3.1.5, ou seja,  $H_{G_1, \dots, G_m}(x) = \mathcal{U}(\cdot)(x) \sum_{j=1}^n \int_{\ell_j(\cdot)(x)}^{\mu_j(\cdot)(x)} dF(t) - \vartheta(\cdot)(x) \sum_{j=1}^n \int_{m_j(\cdot)(x)}^{\nu_j(\cdot)(x)} dF(t)$ .

Como  $F(x)$ ,  $G_1, \dots, G_m$  são *fda's* de *v.a.'s* contínuas e  $\mu_j$ ,  $\ell_j$ ,  $\mathcal{U}$ ,  $\nu_j$ ,  $m_j$  e  $\vartheta$  são funções contínuas e diferenciáveis, então  $H_{G_1, \dots, G_m}(x)$  será uma *fda* de *v.a.* contínua com densidade dada por:

$$\begin{aligned} h_{G_1, \dots, G_m}(x) &= \left( \sum_{z=1}^m \frac{\partial \mathcal{U}(\cdot)(x)}{\partial G_z} g_z(x) \right) \left( \sum_{j=1}^n \int_{\ell_j(\cdot)(x)}^{\mu_j(\cdot)(x)} dF(t) \right) \\ &+ \mathcal{U}(\cdot)(x) \left( \sum_{j=1}^n \left( F(\mu_j(\cdot)(x)) \sum_{z=1}^m \frac{\partial \mu_j(\cdot)(x)}{\partial G_z} g_z(x) - F(\ell_j(\cdot)(x)) \sum_{z=1}^m \frac{\partial \ell_j(\cdot)(x)}{\partial G_z} g_z(x) \right) \right) \\ &- \left( \sum_{z=1}^m \frac{\partial \vartheta(\cdot)(x)}{\partial G_z} g_z(x) \right) \left( \sum_{j=1}^n \int_{m_j(\cdot)(x)}^{\nu_j(\cdot)(x)} dF(t) \right) \\ &- \vartheta(\cdot)(x) \left( \sum_{j=1}^n \left( F(\nu_j(\cdot)(x)) \sum_{z=1}^m \frac{\partial \nu_j(\cdot)(x)}{\partial G_z} g_z(x) - F(m_j(\cdot)(x)) \sum_{z=1}^m \frac{\partial m_j(\cdot)(x)}{\partial G_z} g_z(x) \right) \right) \end{aligned}$$

onde  $(\cdot)(x) = (G_1, \dots, G_m)(x)$ . ■

O Teorema 3.7 mostra condições em que a distribuição  $H_{G_1, \dots, G_m}(x)$  é discreta.

**Teorema 3.7 (T3.7):** Integrais de diferenciais de distribuições discretas geram distribuições discretas.

Seja  $H_{G_1, \dots, G_m}(x)$  a função de distribuição gerada a partir do Corolário 3.1.5 (respectivamente, 3.1.6). Se a distribuição de probabilidade  $F(x)$  for discreta e  $\mathcal{U}(\cdot)(x) = \vartheta(\cdot)(x) = 1$ , então a distribuição  $H_{G_1, \dots, G_m}(x)$  será discreta independente das funções monotônicas usadas como limites de integração.

**Demonstração:**

$$H_{G_1, \dots, G_m}(x) = \sum_{j=1}^n \int_{\ell_j(\cdot)(x)}^{\mu_j(\cdot)(x)} dF(t) - \sum_{j=1}^n \int_{m_j(\cdot)(x)}^{\nu_j(\cdot)(x)} dF(t)$$

$$H_{G_1, \dots, G_m}(x) = \sum_{j=1}^n \left( F(\mu_j(\cdot)(x)) - F(\ell_j(\cdot)(x)) \right) - \sum_{j=1}^n \left( F(\nu_j(\cdot)(x)) - F(m_j(\cdot)(x)) \right)$$

Como  $F(t)$  é uma *fda* de uma *v. a.* discreta,  $F(t)$  assume uma quantidade enumerável de valores distintos. Portanto, como  $H_{G_1, \dots, G_m}(x)$  é dado por uma soma de diferenças de  $F(t)$  avaliada em  $4n$  pontos distintos,  $H_{G_1, \dots, G_m}(x)$  também só assume uma quantidade enumerável de valores e, portanto, também é uma *fda* de uma *v. a.* discreta. ■

### 3.5. Nomenclatura para as Classes de Distribuições Probabilísticas e para as distribuições de probabilidades, caso univariado.

Com base na proposta do método gerador de distribuições de probabilidades, nas classes de distribuições probabilísticas e nas distribuições geradas por elas, sentimos a necessidade de uma sistematização no que diz respeito à nomenclatura das expressões encontradas, ou seja, um conjunto de regras para nomear as mesmas, coerentemente com o que já existe na literatura. Ainda para ajudar na justificativa dessa sistematização, note que há necessidade de uma padronização e diferenciação para classes diferentes geradas pela mesma distribuição. Como exemplo, citamos a classe gama-G definida por Zografos (2008) e a gama-G definida por Cordeiro, Alizadeh e Silva (2013) que são duas expressões diferentes com o mesmo nome (gama-G). Desta forma, nós propomos uma forma geral de nomeação.

Para as distribuições geradas pelo Teorema 3.1, dividimos em duas categorias: a primeira nomeia as classes de distribuições probabilísticas e a segunda às distribuições de probabilidades geradas pelas classes.

A seguir temos as regras de nomeação das classes e das distribuições geradas pelo funcional do Corolário 3.1.5:

- a) Quando da classe de distribuições probabilísticas será: Classe + nome da expressão  $(\mathcal{U})(\vartheta)F(t)(\ell_1, \dots, \ell_n)(\mu_1, \dots, \mu_n)(m_1, \dots, m_n)(v_1, \dots, v_n)$ , ou seja, classe + nome do vetor  $\mathcal{U}(\cdot)(x)$  + nome do vetor  $\vartheta(\cdot)(x)$  + nome da distribuição de  $F(t)$  + nome do vetor  $(\ell_1(\cdot), \dots, \ell_n(\cdot))(x)$  + nome do vetor  $(\mu_1(\cdot), \dots, \mu_n(\cdot))(x)$  + nome do vetor  $(m_1(\cdot), \dots, m_n(\cdot))(x)$  + nome do vetor  $(v_1(\cdot), \dots, v_n(\cdot))(x)$ .
- b) Quando da distribuição probabilística gerada pela classe será: nome da classe + a substituição do vetor  $(G_1, \dots, G_m)(x)$  pelo vetor de nomes das distribuições representadas.

Regras de nomeação das classes e das distribuições geradas pelo funcional do Corolário 3.1.6:

- a) Quando da classe de distribuições probabilísticas será: Classe complementar + nome da expressão  $(\vartheta)(\mathcal{U})\varphi(t)(m_1, \dots, m_n)(v_1, \dots, v_n)(\ell_1, \dots, \ell_n)(\mu_1, \dots, \mu_n)$ , ou seja, classe complementar + nome do vetor de  $\vartheta(\cdot)(x)$  + nome do vetor  $\mathcal{U}(\cdot)(x)$  + nome da distribuição de  $\varphi(t)$  + nome do vetor  $(m_1(\cdot), \dots, m_n(\cdot))(x)$  + nome do vetor  $(v_1(\cdot), \dots, v_n(\cdot))(x)$  + nome do vetor  $(\ell_1(\cdot), \dots, \ell_n(\cdot))(x)$  + nome do vetor  $(\mu_1(\cdot), \dots, \mu_n(\cdot))(x)$ .
- b) Quando da distribuição probabilística gerada pela classe será: nome da classe + a substituição do vetor  $(G_1, \dots, G_m)(x)$  pelo vetor de nomes das distribuições representadas.

Regras de nomeação das classes e das distribuições geradas pelo funcional do Corolário 3.1.7:

- a) Quando da classe de distribuições probabilísticas será: Classe normalizada + nome da expressão  $(w)\varphi(t)(z)$ , ou seja, classe normalizada + nome do vetor de  $w(\cdot)(x)$  + nome da distribuição de  $\varphi(t)$  + nome do vetor de  $z(\cdot)(x)$ .
- b) Quando da distribuição probabilística gerada pela classe será: nome da classe + a substituição do vetor  $(G_1, \dots, G_m)(x)$  pelo vetor de nomes das distribuições representadas.

### **3.6. Obtenções de generalizações de modelos de classes já existentes**

Neste tópico faremos algumas aplicações para obtenção de casos bem especiais de funcional gerador de classes de distribuições probabilísticas, obtendo as classes de distribuições de probabilidade já existentes na literatura.

A seguir, teremos a Tabela 3.6.1 que mostra a obtenção de classes de distribuições probabilísticas de modelos já existentes com o uso de alguns corolários do Teorema 3.1.

Tabela 3.6.1 – Generalizações de modelos de classes já existentes

Sub-casos do 1C3.1.5 Utilizado	Distribuições Utilizadas $f(t)$	Funções Monotônicas	Alguns valores especiais para os parâmetros	Classe Obtida
3S1C3.1.5	$\frac{1}{B(a,b)} t^{a-1}(1-t)^{b-1}$	$\ell_1(\cdot)(x) = \theta \prod_{i=1}^m (1 - G_i^{\alpha_i}(x))^{\delta_i}$ $\mu_1(\cdot)(x) = (1 - \theta) \prod_{j=1}^m G_j^{\beta_j}(x) + \theta$	$\theta = 0, m = 1$ e $\beta_1 = 1$	beta1 $G_1$ definida por Eugene <i>et al</i> (2002)
			$\theta = 0$ e $m = 1$	Mc1 $G_1$ definida por McDonald (1984)
9S1C3.1.5	$\frac{1}{B(a,b)} t^{a-1}(1-t)^{b-1}$	$m_1(\cdot)(x) = \theta \prod_{j=1}^m G_j^{\beta_j}(x)$ $v_1(\cdot)(x) = (1 - \theta) \prod_{i=1}^m (1 - G_i^{\alpha_i}(x))^{\delta_i} + \theta$	$\theta = 1, m = 1$ e $\beta_1 = 1$	beta1 $G_1$ definida por Eugene <i>et al</i> (2002)
			$\theta = 1$ e $m = 1$	Mc1 $G_1$ definida por McDonald (1984)
3S1C3.1.5	$bt^{b-1}$	$\ell_1(\cdot)(x) = \theta \prod_{i=1}^m (1 - G_i^{\alpha_i}(x))^{\delta_i}$ $\mu_1(\cdot)(x) = (1 - \theta) \prod_{j=1}^m G_j^{\beta_j}(x) + \theta$	$\theta = 0, m = 1$ e $\beta_1 = 1$	exponenciada $G_1$ definida por Mudholkar <i>et al</i> (1995)
9S1C3.1.5	$bt^{b-1}$	$m_1(\cdot)(x) = \theta \prod_{j=1}^m G_j^{\beta_j}(x)$ $v_1(\cdot)(x) = (1 - \theta) \prod_{i=1}^m (1 - G_i^{\alpha_i}(x))^{\delta_i} + \theta$	$\theta = 1, m = 1$ e $\beta_1 = 1$	exponenciada $G_1$ definida por Mudholkar <i>et al</i> (1995)

3S1C3.1.5	$bt^{b-1}$	$\ell_1(\cdot)(x) = \theta \prod_{i=1}^m (1 - G_i^{\alpha_i}(x))^{\delta_i}$ $\mu_1(\cdot)(x) = (1 - \theta) \prod_{j=1}^m G_j^{\beta_j}(x) + \theta$	$\theta = 0$ e $m = 1$	exponenciada $G_1$ definida por Mudholkar <i>et al</i> (1995)
5S1C3.1.5	-----	$\mu_1(\cdot)(x) = \prod_{i=1}^m (b_i + G_i^{\alpha_i}(x))^{\beta_i}$	$\theta = 0$ e $\beta = 1$	exponenciada $G_1$ definida por Mudholkar <i>et al</i> (1995)
3S1C3.1.5	$abt^{a-1}(1 - t^a)^{b-1}$	$\ell_1(\cdot)(x) = \theta \prod_{i=1}^m (1 - G_i^{\alpha_i}(x))^{\delta_i}$ $\mu_1(\cdot)(x) = (1 - \theta) \prod_{j=1}^m G_j^{\beta_j}(x) + \theta$	$\theta = 0$ , $m = 1$ e $\beta_1 = 1$	Kumaraswamy $G_1$ definida por definida por Cordeiro e Castro (2011)
9S1C3.1.5	$abt^{a-1}(1 - t^a)^{b-1}$	$m_1(\cdot)(x) = \theta \prod_{j=1}^m G_j^{\beta_j}(x)$ $v_1(\cdot)(x) = (1 - \theta) \prod_{i=1}^m (1 - G_i^{\alpha_i}(x))^{\delta_i} + \theta$	$\theta = 1$ , $m = 1$ e $\beta_1 = 1$	Kumaraswamy $G_1$ definida por definida por Cordeiro e Castro (2011)
6S1C3.1.5	-----	$\ell_1(\cdot)(x) = \prod_{i=1}^m (b_i - G_i^{\alpha_i}(x))^{\beta_i}$	$m = 1$ , $b_1 = 1$ , $\beta_1 = \beta$ e $\alpha_1 = \alpha$	Kumaraswamy $G_1$ definida por definida por Cordeiro e Castro (2011)



<b>3S1C3.1.5</b>	$\frac{t^{a-1}(1-t)^{b-1}}{B(a,b)(1+t)^{a+b}}$	$\ell_1(\cdot)(x) = \theta \prod_{i=1}^m (1 - G_i^{\alpha_i}(x))^{\delta_i}$ $\mu_1(\cdot)(x) = (1 - \theta) \prod_{j=1}^m G_j^{\beta_j}(x) + \theta$	$\theta = 0, m = 1$ e $\beta_1 = 1$	beta3 $G_1$ definida por Thair e Nadarajah (2013)
			$\theta = 0$ e $m = 1$	Mc3 $G_1$ definida por Thair e Nadarajah (2013)
<b>9S1C3.1.5</b>	$\frac{t^{a-1}(1-t)^{b-1}}{B(a,b)(1+t)^{a+b}}$	$m_1(\cdot)(x) = \theta \prod_{j=1}^m G_j^{\beta_j}(x)$ $v_1(\cdot)(x) = (1 - \theta) \prod_{i=1}^m (1 - G_i^{\alpha_i}(x))^{\delta_i} + \theta$	$\theta = 1, m = 1$ e $\beta_1 = 1$	beta1 $G_1$ definida por Eugene <i>et al</i> (2002)
			$\theta = 1$ e $m = 1$	Mc3 $G_1$ definida por Thair e Nadarajah (2013)
<b>3S1C3.1.5</b>	$\frac{t^{a-1}(1-t)^{b-1} \exp(-ct)}{B(a,b)}$	$\ell_1(\cdot)(x) = \theta \prod_{i=1}^m (1 - G_i^{\alpha_i}(x))^{\delta_i}$ $\mu_1(\cdot)(x) = (1 - \theta) \prod_{j=1}^m G_j^{\beta_j}(x) + \theta$	$\theta = 0, m = 1$ e $\beta_1 = 1$	beta Kummer $G_1$ definida por Pescim <i>et al</i> (2012)
<b>9S1C3.1.5</b>	$\frac{t^{a-1}(1-t)^{b-1} \exp(-ct)}{B(a,b)}$	$m_1(\cdot)(x) = \theta \prod_{j=1}^m G_j^{\beta_j}(x)$ $v_1(\cdot)(x) = (1 - \theta) \prod_{i=1}^m (1 - G_i^{\alpha_i}(x))^{\delta_i} + \theta$	$\theta = 1, m = 1$ e $\beta_1 = 1$	beta Kummer $G_1$ definida por Pescim <i>et al</i> (2012)
<b>3S1C3.1.5</b>	$\frac{b^a}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-bt}$	$\ell_1(\cdot)(x) = \theta \prod_{j=1}^m (1 - G_j^{\beta_j}(x))^{\gamma_j}$ $\mu_1(\cdot)(x) = \theta + \left( -\ln \left( \prod_{i=1}^m (1 - G_i^{\alpha_i}(x))^{\delta_i} \right)^\lambda \right)^r$	$\theta = 0, m = 1,$ $\alpha_1 = 1, \lambda = 1,$ $r = 1$ e $\delta_1 = 1$	Gama $-\ln(1 - G_1)$ definida por Zografos (2008)

<b>3S1C3.1.5</b>	$\frac{b^a}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-bt}$	$\ell_1(\cdot)(x) = \theta \prod_{j=1}^m \left(1 - G_j^{\beta_j}(x)\right)^{\gamma_j}$ $\mu_1(\cdot)(x) = \theta + \left(-\ln \left(1 - \prod_{i=1}^m G_i^{\alpha_i}(x)\right)\right)^{\lambda_r}$	$\theta = 0, m = 1,$ $\alpha_1 = 1, \lambda = 1$ e $r = 1$	Gama $-\ln(1 - G_1)$ definida por Zografos (2008)
<b>3S1C3.1.5</b>	$\frac{b^a}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-bt}$	$\ell_1(\cdot)(x) = \rho \prod_{i=1}^m \left(1 - G_i^{\omega_i}(x)\right)^{s_i}$ $\mu_1(\cdot)(x) = \rho - \ln \left(1 - \prod_{l=1}^m G_l^{\lambda_l}(x)\right)$	$\rho = 0, m = 1,$ $\alpha = 0$ e $\lambda_1 = 1$	Gama $-\ln(1 - G_1)$ definida por Zografos (2008)
<b>3S1C3.1.5</b>	$\frac{b^a}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-bt}$	$\ell_1(\cdot)(x) = \rho \prod_{i=1}^m \left(1 - G_i^{\lambda_i}(x)\right)^{s_i}$ $\mu_1(\cdot)(x) = \rho + \left(-\ln \left(\prod_{i=1}^m \left(1 - G_i^{\alpha_i}(x)\right)^{\omega_i}\right)\right)^{\lambda_r}$	$m = 1, \alpha_1 = 1,$ $\rho = 0, \omega_1 = 1,$ $\lambda = 1$ e $r = 1$	gama $-\ln(1 - G_1)$ definida por Zografos (2008)
<b>9S1C3.1.5</b>	$\frac{b^a}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-bt}$	$m_1(\cdot)(x) = \rho \prod_{i=1}^m \left(1 - G_i^{\omega_i}(x)\right)^{s_i}$ $v_1(\cdot)(x) = \rho - \ln \left(1 - \prod_{l=1}^m G_l^{\lambda_l}(x)\right)$	$\rho = 0, m = 1$ e $\lambda_1 = 1$	gama $-\ln(1 - G_1)$ definida por Zografos (2008)
<b>9S1C3.1.5</b>	$\frac{b^a}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-bt}$	$m_1(\cdot)(x) = \rho \prod_{i=1}^m \left(1 - G_i^{\lambda_i}(x)\right)^{s_i}$ $v_1(\cdot)(x) = \rho + \left(-\ln \left(\prod_{i=1}^m \left(1 - G_i^{\alpha_i}(x)\right)^{\beta_i}\right)\right)^{\lambda_r}$	$m = 1, \alpha_1 = 0,$ $\rho = 0$ e $\beta_1 = 1$	gama $-\ln(1 - G_1)$ definida por Zografos (2008)

<b>9S1C3.1.5</b>	$\frac{b^a}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-bt}$	$m_1(\cdot)(x) = \theta \prod_{j=1}^m \left(1 - G_j^{\beta_j}(x)\right)^{\gamma_j}$ $v_1(\cdot)(x) = \theta + \left(-\ln \left(\prod_{i=1}^m G_i^{\alpha_i}(x)\right)\right)^{\delta}$	$\theta = 0, m = 1,$ $\alpha_1 = 1$ e $\delta = 1$	Complementar gama $-\ln(G_1)$ definida por Cordeiro, Alizadeh e Silva (2013)
<b>9S1C3.1.5</b>	$\frac{b^a}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-bt}$	$m_1(\cdot)(x) = \theta \left(1 - \prod_{j=1}^m G_j^{\alpha_j}(x)\right)^{\lambda}$ $v_1(\cdot)(x) = \theta + \left(-\ln \left(1 - \prod_{i=1}^m \left(1 - G_i^{\beta_i}(x)\right)^{\gamma_i}\right)^r\right)^s$	$\theta = 0, m = 1,$ $\beta_1 = 1, \gamma_1 = 1,$ $r = 1$ e $s = 1$	Complementar gama $-\ln(G_1)$ definida por Cordeiro, Alizadeh e Silva (2013)
<b>3S1C3.1.5</b>	$\frac{b^a}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-bt}$	$\ell_1(\cdot)(x) = \rho \prod_{i=1}^m G_i^{\omega_i}(x)$ $\mu_1(\cdot)(x) = \rho - \ln \left(\prod_{l=1}^m G_l^{\lambda_l}(x)\right)$	$\rho = 0, m = 1$ e $\lambda_1 = 1$	Complementar gama $-\ln(G_1)$ definida por Cordeiro, Alizadeh e Silva (2013)

<b>3S1C3.1.5</b>	$\frac{b^a}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-bt}$	$\ell_1(.) (x) = \rho \prod_{i=1}^m G_i^{\lambda_i}(x)$ $\mu_1(.) (x) = \rho + \left( -\ln \left( 1 - \prod_{i=1}^m (1 - G_i^{\alpha_i}(x))^{\omega_i} \right)^{\lambda} \right)^r$	$m = 1, \rho = 0,$ $\alpha_1 = 1, \delta_1 = 1,$ $\lambda = 1 \text{ e } r = 1$	Complementar gama $-\ln(G_1)$ definida por Cordeiro, Alizadeh e Silva (2013)
<b>9S1C3.1.5</b>	$\frac{b^a}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-bt}$	$m_1(.) (x) = \rho \prod_{i=1}^m G_i^{\omega_i}(x)$ $v_1(.) (x) = \rho - \ln \left( \prod_{l=1}^m G_l^{\lambda_l}(x) \right)$	$\rho = 0, m = 1,$ $\alpha = 0 \text{ e } \lambda_1 = 1$	Complementar gama $-\ln(G_1)$ definida por Cordeiro, Alizadeh e Silva (2013)
<b>9S1C3.1.5</b>	$\frac{b^a}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-bt}$	$m_1(.) (x) = \rho \prod_{i=1}^m G_i^{\lambda_i}(x)$ $v_1(.) (x) = \rho + \left( -\ln \left( 1 - \prod_{i=1}^m (1 - G_i^{\alpha_i}(x))^{\omega_i} \right)^{\lambda} \right)^r$	$m = 1, \rho = 0,$ $\alpha_1 = 1, \omega_1 = 1,$ $\lambda = 1 \text{ e } r = 1$	Complementar gama $-\ln(G_1)$ definida por Cordeiro, Alizadeh e Silva (2013)
<b>12S1C3.1.5</b>	-----	$m_1(.) (x) = \left( \frac{b (1 - G_2^\beta(x))^\gamma}{G_1^\alpha(x) + b (1 - G_2^\beta(x))^\gamma} \right)^\theta$	$G_1(x) = G_2(x),$ $\alpha = 1, \beta = 1 \text{ e}$ $\theta = 1$	Marshall e Olkin definida por Marshall e Olkin (1997)
			$G_1(x) = G_2(x),$ $\alpha = 1 \text{ e } \beta = 1$	Marshall e Olkin $G_1$ definida por Jayakumar e Mathew (2008)

5S1C3.1.5	-----	$\mu_1(.) (x) = \left( \frac{G_1^\alpha(x)}{G_1^\alpha(x) + b(1 - G_2^\beta(x))^Y} \right)^\theta$	$G_1(x) = G_2(x),$ $\alpha = 1, \beta = 1$ e $\theta = 1$	Marshall e Olkin definida por Marshall e Olkin (1997)
			$G_1(x) = G_2(x),$ $\alpha = 1$ e $\beta = 1$	Marshall e Olkin $G_1$ definida por Thair e Nadarajah (2013)
12S1C3.1.5	-----	$m_1(.) (x) = \exp\left(-\lambda \prod_{l=1}^m G_l^{\alpha_l}(x)\right)$	$m = 1$ e $\alpha_1 = 1$	Kumaraswamy $G_1$ Poisson definida por Ramos (2014)
12S1C3.1.5	-----	$m_1(.) (x) = \exp\left(-\lambda - \lambda \prod_{l=1}^m (1 - G_l^{\alpha_l}(x))^{\beta_l}\right)$	$m = 1, \alpha_1 = 1$ e $\beta_1 = 1$	Kumaraswamy $G_1$ Poisson definida por Ramos (2014)
12S1C3.1.5	-----	$m_1(.) (x) = \exp\left(-\lambda - \lambda \left(1 - \prod_{l=1}^m G_l^{\alpha_l}(x)\right)^\beta\right)$	$m = 1, \alpha_1 = 1$ e $\beta = 1$	Kumaraswamy $G_1$ Poisson definida por Ramos (2014)

2S1C3.1.5	$\gamma t^{\gamma-1}$	$u_1(.) (x) = \frac{e^{\lambda e^{-\beta x^\alpha}} - e^\lambda}{1 - e^\lambda}$ $u_2(.) (x) = \frac{e^{-\frac{\lambda}{\alpha} W(-\alpha e^{-\alpha})} - e^{-\frac{\lambda}{\alpha} W(\psi(x))}}{e^{-\frac{\lambda}{\alpha} W(-\alpha e^{-\alpha})} - 1}$ $W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^{n-2}}{(n-1)!} x^n$ $\psi(x) = -\alpha e^{-\alpha - bx^a}$ $\ell_1(.) (x) = \theta \left( 1 - \frac{(1-\beta)^{-s} - \{1 - \beta[1 - G(x)]\}^{-s}}{(1-\beta)^{-s} - 1} \right)$ $\mu_1(.) (x) = (1 - \theta) \left( \frac{\zeta(s) - Li_s[1 - G(x)]}{\zeta(s)} \right)^\delta + \theta,$ $Li_s(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j^s}$ $\zeta(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^s}$	$k = 2, \alpha_1 = 1,$ $\alpha_2 = 0, \theta = 0$ e $\delta = 0$	Família Beta Weibull Poisson definida por Paixão (2014)
			$k = 2, \alpha_1 = 0,$ $\alpha_2 = 1, \theta = 0$ e $\delta = 0$	Classe Weibull Generalizada Poisson definida por Paixão (2014)
			$k = 2, \alpha_1 = 0,$ $\alpha_2 = 0$ e $\theta = 1$	Classe Binomial Negativa Generalizada definida por Paixão (2014)
			$k = 2, \alpha_1 = 0,$ $\alpha_2 = 0$ e $\theta = 0$	Classe Zeta-G definida por Paixão (2014)
2S1C3.1.5	$bt^{b-1}$	$u_1(.) (x) = \sum_{j=0}^x \frac{C^{(j)}(a)}{j! C(\lambda)} (\lambda - a)^j$ $u_2(.) (x) = \sum_{j=1}^x \frac{1}{j!} [(C(0))^j]^{(j-1)}$ $\ell_1(.) (x) = \theta \left( 1 - \sum_{j=n}^x \frac{n}{(j-n)! j} [(C(0))^j]^{(j-n)} \right)$ $\mu_1(.) (x) = (1 - \theta) \left( \sum_{j=0}^x P(X = j) \right)^\delta + \theta$ $P(X = j) = \begin{cases} w(0), & j = 0 \\ [(C(0))^j w^{(1)}(0)]^{(j-1)}, & j = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$	$k = 2, \alpha_1 = 1,$ $\alpha_2 = 0, \theta = 0$ e $\delta = 0$	Família série de potências (CONSUL e FAMOYE, 2006)
			$k = 2, \alpha_1 = 0,$ $\alpha_2 = 1, \theta = 0$ e $\delta = 0$	Família Lagrangiana básica (CONSUL e FAMOYE, 2006)
			$k = 2, \alpha_1 = 0,$ $\alpha_2 = 0$ e $\theta = 1$	Família Lagrangiana delta (CONSUL e FAMOYE, 2006)
			$k = 2, \alpha_1 = 0,$ $\alpha_2 = 0$ e $\theta = 0$	Família Lagrangiana generalizada (CONSUL e FAMOYE, 2006)

2S1C3.1.5	$bt^{b-1}$	$u_1(.) (x) = \int_{-\infty}^x e^{\int \frac{a_0 + a_1 t + \dots + a_s t^s}{b_0 + b_1 t + \dots + b_r t^r} f(t) dt} dt$ $\ell_1(.) (x) = \theta \left( 1 - \int_{-\infty}^x e^{\int \frac{a_0 + a_1 t + \dots + a_s t^s}{b_0 + b_1 t + \dots + b_r t^r} dt} dt \right)$ $\mu_1(.) (x) = (1 - \theta) \left( \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \left( \sum_{i=1}^2 \alpha_i(t) f^{\beta_i}(t) \right) dt dy \right)^\delta + \theta$	$k = 1, \alpha_1 = 1,$ $\theta = 0$ e $\delta = 0$	Família generalizada da generalizada de Pearson na forma de E.D.O. (SHAKIL et al (2010))
			$k = 1, \alpha_1 = 0$ e $\theta = 1$	Família generalizada de Pearson na forma de E.D.O. (SHAKIL et al (2010))
			$k = 1, \alpha_1 = 0,$ $\theta = 0$ e $\delta = 1$	Família generalizada na forma de E.D.O. (VODA, 2009)

### 3.7. Modelo proposto

#### 3.7.1 Obtenção de uma classe de distribuições a partir do Teorema 3.1

##### 3.7.1.1 Modelo funcional classe gama $(1-G_1)/G_1$

Considerando e as funções monotônicas  $\ell_1(G_1, \dots, G_m)(x) = \frac{1-G_1(x)}{G_1(x)}$ ,  $\mu_1(G_1, \dots, G_m)(x) = +\infty$  e a *fdp* da gama e fazendo uso do **3S1C3.1.5**, teremos a classe gama  $\frac{1-G_1}{G_1}$  conforme desenvolvimento abaixo:

$$H_{G_1}(x) = \int_{\frac{1-G_1(x)}{G_1(x)}}^{+\infty} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\beta t} dt$$

$$H_{G_1}(x) = 1 - \int_0^{\frac{1-G_1(x)}{G_1(x)}} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\beta t} dt$$

$$h_{G_1}(x) = \frac{g_1(x)}{G_1^2(x)} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left( \frac{1-G_1(x)}{G_1(x)} \right)^{\alpha-1} \exp \left( -\beta \left( \frac{1-G_1(x)}{G_1(x)} \right) \right)$$

##### 3.7.1.2 Função Risco usando a classe gama $(1-G_1)/G_1$

Podemos obter a função risco usando a classe gama  $\frac{1-G_1}{G_1}$  da seguinte forma:

$$\mathcal{R}_{G_1}(x) = \frac{h_{G_1}(x)}{1 - H_{G_1}(x)}$$

$$\mathcal{R}_{G_1}(x) = \frac{\frac{g_1(x)}{G_1^2(x)} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left( \frac{1-G_1(x)}{G_1(x)} \right)^{\alpha-1} \exp \left( -\beta \left( \frac{1-G_1(x)}{G_1(x)} \right) \right)}{\int_0^{\frac{1-G_1(x)}{G_1(x)}} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\beta t} dt}.$$

■

##### 3.7.1.3 Expansões da Função de Distribuição e da Densidade da Classe gama $(1-G_1)/G_1$

A seguir, veremos os cálculos do desenvolvimento da expansão da função geradora de densidade de probabilidade da classe gama  $\frac{1-G_1}{G_1}$ :

Como



$$\exp\left(-\beta \frac{1 - G_1(x)}{G_1(x)}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta^k}{k!} G_1^{-k} (1 - G_1(x))^k$$

Logo

$$h_{G_1}(x) = (g_1(x)) \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta^k}{k!} G_1^{-\alpha-k-1} (1 - G_1(x))^{\alpha+k-1}$$

Como

$$(1 - G_1(x))^{\alpha+k-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha+k-1}{j} (-1)^j G_1^j(x)$$

Logo temos

$$h_{G_1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j} \beta^{\alpha+k}}{k! \Gamma(\alpha)} \binom{\alpha+k-1}{j} g_1(x) G_1^{j-\alpha-k-1}(x)$$

Como  $H_{G_1}(x) = \int_{-\infty}^x h_{G_1}(t) dt$ , logo teremos que:

$$H_{G_1}(x) = \int_{-\infty}^x \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j} \beta^{\alpha+k}}{k! \Gamma(\alpha)} \binom{\alpha+k-1}{j} g_1(t) G_1^{j-\alpha-k-1}(t) dt$$

$$H_{G_1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j} \beta^{\alpha+k}}{k! \Gamma(\alpha)} \binom{\alpha+k-1}{j} \int_{-\infty}^x g_1(t) G_1^{j-\alpha-k-1}(t) dt.$$

Portanto,

$$H_{G_1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j} \beta^{\alpha+k}}{k! (j - \alpha - k) \Gamma(\alpha)} \binom{\alpha+k-1}{j} G_1^{j-\alpha-k}(x).$$

Caso a distribuição  $G_1(x)$  seja discreta, teremos  $P(X = x_l) = F(x_l) - F(x_{l-1})$ .

Portanto,

$$P(X = x_l) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j} \beta^{\alpha+k}}{k! (j - \alpha - k) \Gamma(\alpha)} \binom{\alpha+k-1}{j} (G_1^{j-\alpha-k}(x_l) - G_1^{j-\alpha-k}(x_{l-1})). \blacksquare$$

### 3.7.1.4 Expansão para os momentos de ordem $m$ para a classe gama (1- $G_1$ )/ $G_1$

A seguir introduzimos a expressão dos momentos probabilisticamente ponderados e em seguida veremos o desenvolvimento dos cálculos da expansão para os momentos de ordem  $m$  para a classe gama  $\frac{1-G_1}{G_1}$ .

Como

$$\mu_m = E(X^m) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m dF(x)$$

Logo, teremos:

$$\mu_m = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j} \beta^{\alpha+k}}{k! \Gamma(\alpha)} \binom{k+\alpha-1}{j} g_1(x) G_1^{j-\alpha-k-1}(x) dx$$

Portanto,

$$\mu_m = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j} \beta^{\alpha+k}}{k! \Gamma(\alpha)} \binom{k+\alpha-1}{j} \tau_{m,0,j-\alpha-k-1}$$

onde

$$\tau_{m,\eta,r} = E(X^m f(X)^\eta F(X)^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m f(x)^\eta F(x)^r dF(x)$$

■

Em particular, temos a seguinte expansão para a média para a classe gama  $\frac{1-G_1}{G_1}$ :

Como  $\mu = \mu_1$ , então teremos:

$$\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j} \beta^{\alpha+k}}{k! \Gamma(\alpha)} \binom{k+\alpha-1}{j} \tau_{1,0,j-\alpha-k-1}$$

■

### 3.7.1.5 Expansão para a função geradora de momentos para a classe gama $(1-G_1)/G_1$

A seguir veremos o desenvolvimento dos cálculos da expansão para a função geradora de momentos para a para a classe gama  $\frac{1-G_1}{G_1}$ :

Como

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} dF(x)$$

Temos

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j} \beta^{\alpha+k}}{k! \Gamma(\alpha)} \binom{k+\alpha-1}{j} g_1(x) G_1^{j-\alpha-k-1}(x) dx$$

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j} \beta^{\alpha+k}}{k! \Gamma(\alpha)} \binom{k+\alpha-1}{j} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} g_1(x) G_1^{j-\alpha-k-1}(x) dx$$

Como

$$e^{tx} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m x^m}{m!}$$

Logo, termos que:

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j} \beta^{\alpha+k}}{k! \Gamma(\alpha)} \binom{k+\alpha-1}{j} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m x^m}{m!} g_1(x) G_1^{j-\alpha-k-1}(x) dx$$

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j} \beta^{\alpha+k} t^m}{k! m! \Gamma(\alpha)} \binom{k+\alpha-1}{j} \int_{-\infty}^{+\infty} x^m g_1(x) G_1^{j-\alpha-k-1}(x) dx$$

Portanto,

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j} \beta^{\alpha+k} t^m}{k! m! \Gamma(\alpha)} \binom{k+\alpha-1}{j} \tau_{m,0,j-\alpha-k-1}$$

■

### 3.7.1.6 Expansão para a função característica para a classe gama $(1-G_1)/G_1$

A seguir veremos o desenvolvimento dos cálculos da expansão para a função característica para a classe gama  $\frac{1-G_1}{G_1}$ :

Como

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x)$$

Logo teremos que:

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j} \beta^{\alpha+k}}{k! \Gamma(\alpha)} \binom{k+\alpha-1}{j} g_1(x) G_1^{j-\alpha-k-1}(x) dx$$

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j} \beta^{\alpha+k}}{k! \Gamma(\alpha)} \binom{k+\alpha-1}{j} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} g_1(x) G_1^{j-\alpha-k-1}(x) dx$$

Como

$$e^{itx} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m t^m x^m}{m!}$$

Logo, teremos que:

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j} \beta^{\alpha+k}}{k! \Gamma(\alpha)} \binom{k+\alpha-1}{j} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m t^m x^m}{m!} g_1(x) G_1^{j-\alpha-k-1}(x) dx$$

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j} \beta^{\alpha+k} i^m t^m}{k! m! \Gamma(\alpha)} \binom{k+\alpha-1}{j} \int_{-\infty}^{+\infty} x^m g_1(x) G_1^{j-\alpha-k-1}(x) dx$$

Portanto,

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j} \beta^{\alpha+k} i^m t^m}{k! m! \Gamma(\alpha)} \binom{k+\alpha-1}{j} \tau_{m,0,j-\alpha-k-1}. \blacksquare$$

### 3.7.1.7 Expansão para os momentos centrais de ordem $m$ para a Classe Gama $(1-G_1)/G_1$

A seguir veremos o desenvolvimento dos cálculos da expansão para os momentos centrais de ordem  $m$  para a classe gama  $\frac{1-G_1}{G_1}$ :

Como

$$\mu'_m = E[(X - \mu)^m] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^m dF(x)$$

Temos

$$\mu'_m = \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} (-1)^r \mu^r \mu_{m-r}$$

Como

$$\mu_{m-r} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j} \beta^{\alpha+k}}{k! \Gamma(\alpha)} \binom{k+\alpha-1}{j} \tau_{m-r,0,j-\alpha-k-1},$$

temos

$$\mu'_m = \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} (-1)^r \mu^r \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j} \beta^{\alpha+k}}{k! \Gamma(\alpha)} \binom{k+\alpha-1}{j} \tau_{m-r,0,j-\alpha-k-1}$$

Portanto,

$$\mu'_m = \sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j+r} \beta^{\alpha+k} \mu^r}{k! \Gamma(\alpha)} \binom{m}{r} \binom{k+\alpha-1}{j} \tau_{m-r,0,j-\alpha-k-1}$$

■

Em particular, temos que a expansão da variância para a classe gama  $\frac{1-G_1}{G_1}$  é dada por:

$$\sigma^2 = \mu'_2 = \sum_{r=0}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j+r} \beta^{\alpha+k} \mu^r}{k! \Gamma(\alpha)} \binom{2}{r} \binom{k+\alpha-1}{j} \tau_{2-r,0,j-\alpha-k-1}$$

■

### 3.7.1.8 Expansão para o coeficiente geral para a Classe gama $(1-G_1)/G_1$

A seguir veremos o desenvolvimento dos cálculos da expansão para o coeficiente geral para a classe gama  $\frac{1-G_1}{G_1}$ :

Como  $C_g(m) = \frac{E[(X-\mu)^m]}{\sqrt{\{E[(X-\mu)^2]\}^m}} = \frac{E[(X-\mu)^m]}{\sigma^m}$ , então teremos:

$$C_g(m) = \frac{\mu'_m}{\sigma^m}$$

Portanto,

$$C_g(m) = \frac{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j+r} \beta^{\alpha+k} \mu^r}{k! \Gamma(\alpha)} \binom{m}{r} \binom{k+\alpha-1}{j} \tau_{m-r,0,j-\alpha-k-1}}{\left( \sum_{r=0}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j+r} \beta^{\alpha+k} \mu^r}{k! \Gamma(\alpha)} \binom{2}{r} \binom{k+\alpha-1}{j} \tau_{2-r,0,j-\alpha-k-1} \right)^{\frac{m}{2}}}$$

■

Em particular, como  $C_a = C_g(3)$  teremos que a expansão para o coeficiente geral para a classe gama  $\frac{1-G_1}{G_1}$  é dada por:

$$C_a = \frac{\sum_{r=0}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j+r} \beta^{\alpha+k} \mu^r}{k! \Gamma(\alpha)} \binom{3}{r} \binom{k+\alpha-1}{j} \tau_{3-r,0,j-\alpha-k-1}}{\left( \sum_{r=0}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j+r} \beta^{\alpha+k} \mu^r}{k! \Gamma(\alpha)} \binom{2}{r} \binom{k+\alpha-1}{j} \tau_{2-r,0,j-\alpha-k-1} \right)^{\frac{3}{2}}}$$

■

Similarmente, como  $C_c = C_g(4)$  teremos que a expansão para o coeficiente de curtose para a classe gama  $\frac{1-G_1}{G_1}$ :

$$C_c = \frac{\sum_{r=0}^4 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j+r} \beta^{\alpha+k} \mu^r}{k! \Gamma(\alpha)} \binom{4}{r} \binom{k+\alpha-1}{j} \tau_{4-r,0,j-\alpha-k-1}}{\left( \sum_{r=0}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j+r} \beta^{\alpha+k} \mu^r}{k! \Gamma(\alpha)} \binom{2}{r} \binom{k+\alpha-1}{j} \tau_{2-r,0,j-\alpha-k-1} \right)^2}$$

■

### 3.7.1.9 Expansão para o Desvio Médio e Desvio Quantílico para a Classe gama $(1-G_1)/G_1$

Duas estatísticas que medem a dispersão da variável aleatória  $X$  são o desvio em relação à média ( $\mu$ ) e o desvio em relação ao quantil ( $q$ ) definidos por

$d_1(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x - \mu| dG(x)$  e  $d_2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x - q| dG(x)$ . As medidas  $d_1(X)$  e  $d_2(X)$  são expressas em (CORDEIRO; LEMONTE, 2012) por  $d_1(X) = 2\mu G(\mu) - 2J(\mu)$  e  $d_2(X) = 2qJ(q) - q + \mu - 2J(q)$  em que  $J(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} x dG(x)$ . Quando  $q = m$  for a mediana, teremos  $d_2(X) = \mu - 2J(m)$ .

Como  $F_{G_1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j} \beta^{\alpha+k}}{k!(j-\alpha-k)\Gamma(\alpha)} \binom{k+\alpha-1}{j} G_1^{j-\alpha-k}(x)$ , logo aplicando as expressões dos desvios acima teremos:

$$d_1(X) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j} \beta^{\alpha+k}}{k!(j-\alpha-k)\Gamma(\alpha)} \binom{k+\alpha-1}{j} \left( \mu^{(j-\alpha-k)} G(\mu^{(j-\alpha-k)}) - J(\mu^{(j-\alpha-k)}) \right)$$

$$d_2(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j} \beta^{\alpha+k}}{k!(j-\alpha-k)\Gamma(\alpha)} \binom{k+\alpha-1}{j} \left( q^{(j-\alpha-k)} J(q^{(j-\alpha-k)}) - q^{(j-\alpha-k)} + \mu^{(j-\alpha-k)} - 2J(q^{(j-\alpha-k)}) \right)$$

Onde  $\mu^{(j-\alpha-k)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x dG_1^{j-\alpha-k}(x)$  e  $J(q^{(j-\alpha-k)}) = \int_{-\infty}^{q^{(j-\alpha-k)}} x dG_1^{j-\alpha-k}(x)$ . Quando  $q^{(j-\alpha-k)} = m^{(j-\alpha-k)}$  for a mediana, teremos

$$d_2(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j} \beta^{\alpha+k}}{k!(j-\alpha-k)\Gamma(\alpha)} \binom{k+\alpha-1}{j} \left( \mu^{(j-\alpha-k)} - 2J(m^{(j-\alpha-k)}) \right). \blacksquare$$

### 3.7.1.10 Derivadas da função log-verossimilhança em relação aos parâmetros para a Classe gama $(1-G_1)/G_1$

A seguir, veremos os cálculos do desenvolvimento das derivadas função log-verossimilhança em relação aos parâmetros para a classe gama  $\frac{1-G_1}{G_1}$ :

Como

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \text{Log} h_{G_1}(x_i; \alpha, \beta, \underline{\theta}) &= n \text{Log} \left( \frac{\lambda \beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \right) + \sum_{i=1}^n \text{Log} \left( \frac{g_1(x_i; \underline{\theta})}{G_1^2(x_i; \underline{\theta})} \right) + \\ &+ (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \text{Log} \left( \frac{1 - G_1(x_i; \underline{\theta})}{G_1(x_i; \underline{\theta})} \right) - \beta \sum_{i=1}^n \left( \frac{1 - G_1(x_i; \underline{\theta})}{G_1(x_i; \underline{\theta})} \right) \end{aligned}$$

Logo teremos que:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \text{Log} h_{G_1}(x_i; \alpha, \beta, \underline{\theta})}{\partial \alpha} = n \text{Log} \beta - \frac{n \Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + \sum_{i=1}^n \text{Log} \left( \frac{1 - G_1(x_i; \underline{\theta})}{G_1(x_i; \underline{\theta})} \right)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \text{Log} h_{G_1}(x_i; \alpha, \beta, \underline{\theta})}{\partial \beta} = \frac{n \alpha}{\beta} - \sum_{i=1}^n \left( \frac{1 - G_1(x_i; \underline{\theta})}{G_1(x_i; \underline{\theta})} \right)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \text{Log} h_{G_1}(x_i; \alpha, \beta, \underline{\theta})}{\partial \theta_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \text{Log} \left( \frac{g_1(x_i; \underline{\theta})}{G_1^2(x_i; \underline{\theta})} \right)}{\partial \theta_j} + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{\partial \text{Log} \left( \frac{1 - G_1(x_i; \underline{\theta})}{G_1(x_i; \underline{\theta})} \right)}{\partial \theta_j} - \beta \sum_{i=1}^n \frac{\partial \left( \frac{1 - G_1(x_i; \underline{\theta})}{G_1(x_i; \underline{\theta})} \right)}{\partial \theta_j}.$$

■

### 3.7.1.11 Entropia de Rényi usando a Classe gama $(1-G_1)/G_1$

A entropia é uma medida de incerteza, no sentido que se maior o valor da entropia menor a informação e maior a incerteza, ou seja, maior a aleatoriedade ou desordem.

A seguir veremos o desenvolvimento dos cálculos da expansão da entropia para a classe gama  $\frac{1-G_1}{G_1}$ , usando a entropia de Rényi:

$$\mathcal{L}_R(\eta) = \frac{1}{1 - \eta} \log \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f^{\eta-1}(x) dF(x) \right)$$

$$\mathcal{L}_R(\eta) = \frac{1}{1 - \eta} \log \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{g_1(x)}{G_1^2(x)} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left( \frac{1 - G_1(x)}{G_1(x)} \right)^{\alpha-1} \exp \left( -\beta \left( \frac{1 - G_1(x)}{G_1(x)} \right) \right) \right)^\eta dx \right)$$

Como

$$\exp\left(-\eta\beta\frac{1-G_1(x)}{G_1(x)}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \eta^k \beta^k}{k!} G_1^{-k} (1-G_1(x))^k$$

Logo

$$h_{G_1}^{\eta}(x) = g_1^{\eta}(x) \frac{\beta^{\eta\alpha}}{\Gamma^{\eta}(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \eta^k \beta^k}{k!} G_1^{-\eta(\alpha+1)-k}(x) (1-G_1(x))^{\eta(\alpha-1)+k}$$

Como

$$(1-G_1(x))^{\eta(\alpha-1)+k} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\eta(\alpha-1)+k}{j} (-1)^j G_1^j(x)$$

Logo temos

$$h_{G_1}^{\eta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j} \eta^k \beta^{\eta\alpha+k}}{k! \Gamma^{\eta}(\alpha)} \binom{\eta(\alpha-1)+k}{j} g_1^{\eta}(x) G_1^{-\eta(\alpha+1)-k+j}$$

Assim,

$$\mathcal{L}_R(\eta) = \frac{1}{1-\eta} \log \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j} \eta^k \beta^{\eta\alpha+k}}{k! \Gamma^{\eta}(\alpha)} \binom{\eta(\alpha-1)+k}{j} g_1^{\eta}(x) G_1^{-\eta(\alpha+1)-k+j} dx \right)$$

$$\mathcal{L}_R(\eta) = \frac{1}{1-\eta} \log \left( \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j} \eta^k \beta^{\eta\alpha+k}}{k! \Gamma^{\eta}(\alpha)} \binom{\eta(\alpha-1)+k}{j} \int_{-\infty}^{+\infty} g_1^{\eta}(x) G_1^{-\eta(\alpha+1)-k+j} dx \right)$$

Portanto,

$$\mathcal{L}_R(\eta) = \frac{1}{1-\eta} \log \left( \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j} \eta^k \beta^{\eta\alpha+k}}{k! \Gamma^{\eta}(\alpha)} \binom{\eta(\alpha-1)+k}{j} \tau_{0,\eta-1,-\eta(\alpha+1)-k+j} \right).$$

■

### 3.7.2 Construção de uma distribuição da Classe gama $(1-G_1)/G_1$

Como já vimos anteriormente, Zografos (2008) propôs a classe da gama  $-\ln(1-G_1)$  e Cordeiro, Alizadeh e Silva (2013) propuseram a classe complementar gama  $-\ln(G_1)$ , e no corpo deste trabalho propomos um método gerador de distribuições e classes de distribuições, onde geramos uma classe da distribuição gama, em que iremos aplicá-las considerando  $G_1(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ .



### 3.7.2.1 Distribuição Gama (1-Exp)/Exp

Considerando  $G_1(x)$  a *fda* da distribuição exponencial de parâmetro  $\lambda$  no funcional gerador da classe gama  $\frac{1-G_1}{G_1}$ , teremos a distribuição gama  $\frac{1-Exp}{Exp}$ :

$$H(x) = 1 - \int_0^{\frac{e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda x}}} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\beta t} dt, \quad \lambda, x > 0$$

$$H(x) = \int_{\frac{e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda x}}}^{+\infty} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\beta t} dt, \quad \lambda, x > 0$$

Derivando  $H(x)$ , teremos a função densidade da distribuição gama  $\frac{1-Exp}{Exp}$ :

$$h(x) = \frac{\lambda \beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{e^{-\lambda x}}{(1-e^{-\lambda x})^2} \left( \frac{e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda x}} \right)^{\alpha-1} e^{-\beta \left( \frac{e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda x}} \right)}. \blacksquare$$

As Figuras 3.7.2.1.1 a 3.7.2.1.6 mostram os gráficos das funções densidade de probabilidade e da distribuição acumulada do modelo proposto da distribuição gama  $\frac{1-Exp}{Exp}$  gerado pela classe gama  $\frac{1-G_1}{G_1}$ , para alguns valores dos parâmetros, visualizando a variação de um deles em função dos outros dois fixos.

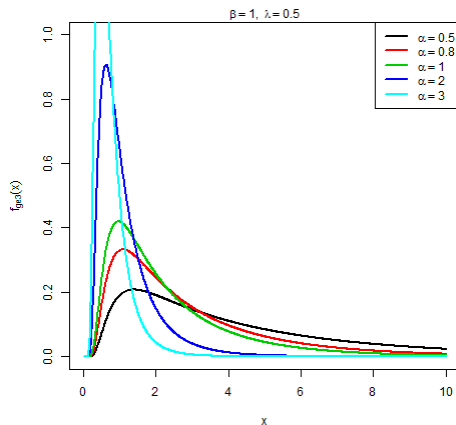


Figura 3.7.2.1.1 – *fdp* da distribuição gama  $\frac{1-Exp}{Exp}$  com  $\alpha$  variando

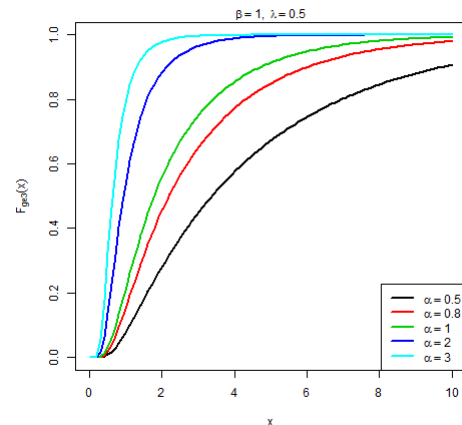


Figura 3.7.2.1.4 – *fda* da distribuição gama  $\frac{1-Exp}{Exp}$  com  $\alpha$  variando

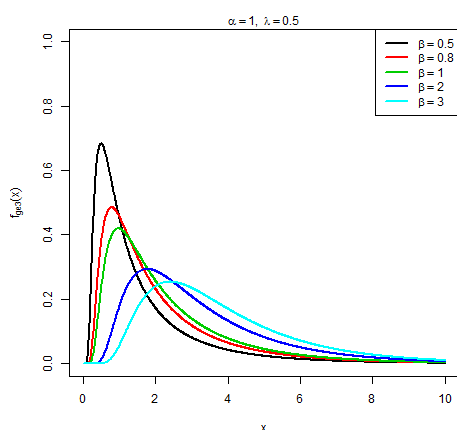


Figura 3.7.2.1.2 – *fdp* da distribuição gama  $\frac{1-Exp}{Exp}$  com  $\beta$  variando

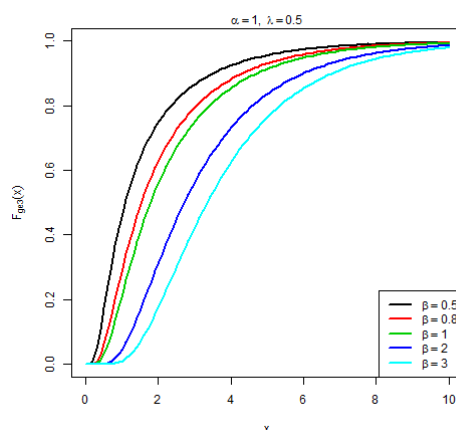


Figura 3.7.2.1.5 – *fda* da distribuição gama  $\frac{1-Exp}{Exp}$  com  $\beta$  variando

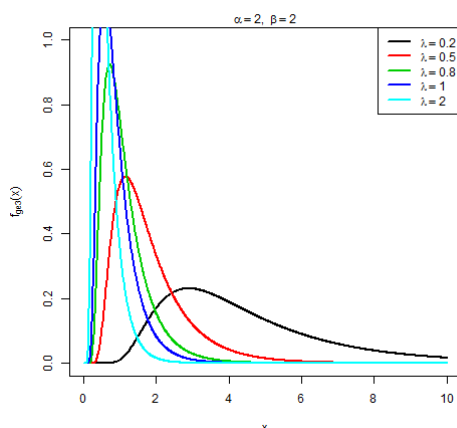


Figura 3.7.2.1.3 – *fdp* da distribuição gama  $\frac{1-Exp}{Exp}$  com  $\lambda$  variando

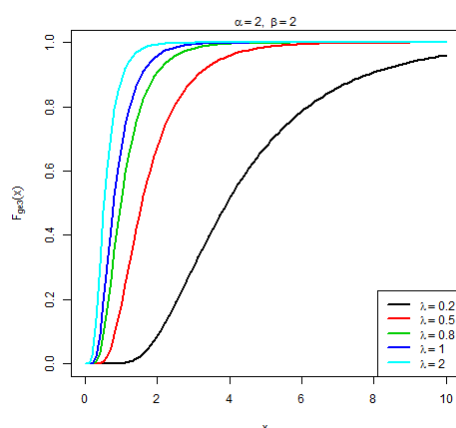


Figura 3.7.2.1.6 – *fda* da distribuição gama  $\frac{1-Exp}{Exp}$  com  $\lambda$  variando

O comportamento dos gráficos obtidos anteriormente nos mostram que o modelo proposto são *fdp* e *Fda* da distribuição gama  $\frac{1-Exp}{Exp}$ , obtidos em que foram colocados alguns valores aleatórios para os parâmetros deste modelo.

### 3.7.2.2 Função Risco usando a distribuição gama (1-Exp)/Exp

Podemos ainda obter a função risco usando a distribuição gama  $\frac{1-Exp}{Exp}$  da seguinte forma:

$$\mathcal{R}(x) = \frac{h(x)}{1 - H(x)}$$

$$\mathcal{R}(x) = \frac{\frac{\lambda\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{e^{-\lambda x}}{(1-e^{-\lambda x})^2} \left(\frac{e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda x}}\right)^{\alpha-1} e^{-\beta\left(\frac{e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda x}}\right)}}{1 - \int_{\frac{e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda x}}}^{+\infty} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\beta t} dt}$$

Portanto,

$$\mathcal{R}(x) = \frac{\frac{\lambda\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{e^{-\lambda x}}{(1-e^{-\lambda x})^2} \left(\frac{e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda x}}\right)^{\alpha-1} e^{-\beta\left(\frac{e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda x}}\right)}}{\int_0^{\frac{e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda x}}} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\beta t} dt}$$



As Figuras 3.7.2.2.1 a 3.7.2.2.3 mostram os gráficos da função de risco usando a distribuição gama  $\frac{1-Exp}{Exp}$  gerados a partir de alguns valores atribuídos aos parâmetros.

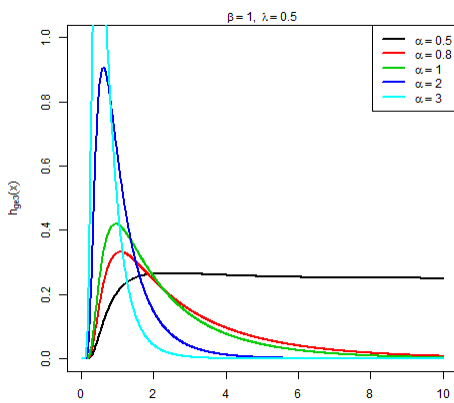


Figura 3.7.2.2.1 –  $\mathcal{R}(x)$  da distribuição gama  $\frac{1-Exp}{Exp}$  com  $\alpha$  variando

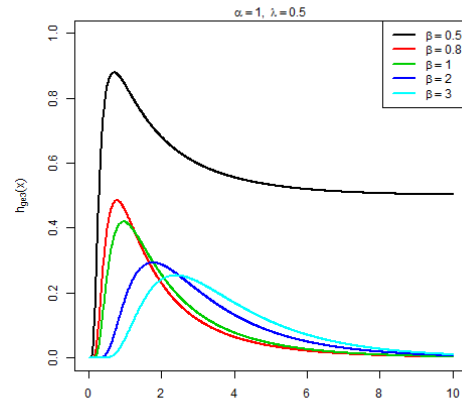


Figura 3.7.2.2.2 –  $\mathcal{R}(x)$  da distribuição gama  $\frac{1-Exp}{Exp}$  com  $\beta$  variando

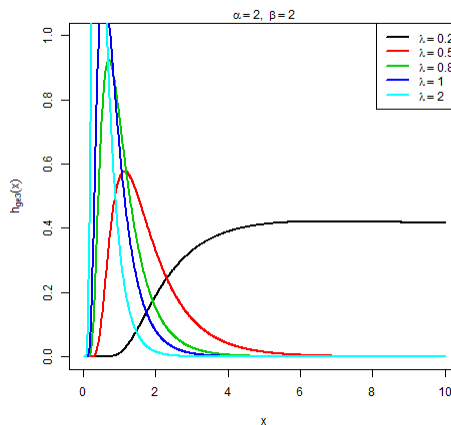


Figura 3.7.2.2.3 –  $\mathcal{R}(x)$  da distribuição gama  $\frac{1-Exp}{Exp}$  com  $\lambda$  variando

### 3.7.2.3 Expansões da Função de Distribuição e da Densidade da distribuição Gama (1-Exp)/Exp

Podemos obter a expansão da função densidade de probabilidade da distribuição gama  $\frac{1-Exp}{Exp}$ , da seguinte maneira.

Como

$$\exp\left(-\beta\left(\frac{e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda x}}\right)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta^k}{k!} e^{-k\lambda x} (1-e^{-\lambda x})^{-k}$$

Logo

$$h(x) = \frac{\lambda \beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{e^{-\lambda x}}{(1-e^{-\lambda x})^2} \left(\frac{e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda x}}\right)^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta^k}{k!} e^{-k\lambda x} (1-e^{-\lambda x})^{-k}$$

$$h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda \beta^{k+\alpha}}{k! \Gamma(\alpha)} e^{-\lambda(k+\alpha)x} (1-e^{-\lambda x})^{-k-\alpha-1}$$

Como

$$(1-e^{-\lambda x})^{-k-\alpha-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-k-\alpha-1}{j} (-1)^j e^{-j\lambda x}$$

Temos,

$$h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda \beta^{k+\alpha}}{k! \Gamma(\alpha)} e^{-\lambda(k+\alpha)x} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-k-\alpha-1}{j} (-1)^j e^{-j\lambda x}$$

Portanto,

$$h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-k-\alpha-1}{j} \frac{(-1)^{k+j} \lambda \beta^{k+\alpha}}{k! \Gamma(\alpha)} e^{-\lambda(k+\alpha+j)x}$$

Utilizando a relação

$$H(x) = \int_0^x h(t) dt$$

Podemos obter a expansão para *fda* da distribuição gama  $\frac{1-Exp}{Exp}$ .

$$H(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-k-\alpha-1}{j} \frac{(-1)^{k+j} \lambda \beta^{k+\alpha}}{k! \Gamma(\alpha)} \int_0^x e^{-\lambda(k+\alpha+j)t} dt$$

Portanto,

$$H(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-k-\alpha-1}{j} \frac{(-1)^{k+j+1} \beta^{k+\alpha}}{k! (k+\alpha+j) \Gamma(\alpha)} (e^{-\lambda(k+\alpha+j)x} - 1).$$

■

### 3.7.2.4 Expansão para os momentos de ordem $m$ da distribuição Gama (1-Exp)/Exp

Utilizando a expansão da  $fda$ , podemos obter a expansão para os momentos de ordem  $m$  da distribuição gama  $\frac{1-Exp}{Exp}$ :

$$\begin{aligned} \mu_m &= \int_0^{+\infty} x^m \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-k-\alpha-1}{j} \frac{(-1)^{k+j} \lambda \beta^{k+\alpha}}{k! \Gamma(\alpha)} e^{-\lambda(k+\alpha+j)x} dx \\ \mu_m &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-k-\alpha-1}{j} \frac{(-1)^{k+j} \lambda \beta^{k+\alpha}}{k! \Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} x^m e^{-\lambda(k+\alpha+j)x} dx \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mu_m = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-k-\alpha-1}{j} \frac{(-1)^{k+j} \lambda \beta^{k+\alpha}}{k! \Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(m+1)}{(\lambda(k+\alpha+j))^{m+1}}$$

■

Em particular temos que a média da distribuição complementar gama  $\frac{1-Exp}{Exp}$ :

$$\mu_1 = \mu = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-k-\alpha-1}{j} \frac{(-1)^{k+j} \lambda \beta^{k+\alpha}}{k! \Gamma(\alpha)} \frac{1}{(\lambda(k+\alpha+j))^2}$$

■

### 3.7.2.5 Expansão para a função geradora de momentos da distribuição Gama (1-Exp)/Exp

A expansão para a função geradora de momentos da distribuição gama  $\frac{1-Exp}{Exp}$  pode ser obtida da seguinte maneira:

$$M_X(t) = \int_0^{+\infty} e^{tx} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-k-\alpha-1}{j} \frac{(-1)^{k+j} \lambda \beta^{k+\alpha}}{k! \Gamma(\alpha)} e^{-\lambda(k+\alpha+j)x} dx$$

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-k-\alpha-1}{j} \frac{(-1)^{k+j} \lambda \beta^{k+\alpha}}{k! \Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} e^{tx-\lambda(k+\alpha+j)x} dx$$

Portanto,

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-k-\alpha-1}{j} \frac{(-1)^{k+j} \lambda \beta^{k+\alpha}}{k! \Gamma(\alpha)} \frac{1}{\lambda(k+\alpha+j)-t}, \text{ se } t < \lambda(k+\alpha+j).$$

■

### 3.7.2.6 Expansão para a função característica da distribuição Gama (1-Exp)/Exp

Similarmente a expansão para a função característica da distribuição gama  $\frac{1-Exp}{Exp}$  pode ser obtida como a seguir:

Como

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_0^{+\infty} e^{itx} f_{ge3}(x) dx$$

teremos

$$\varphi_X(t) = \int_0^{+\infty} e^{itx} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-k-\alpha-1}{j} \frac{(-1)^{k+j} \lambda \beta^{k+\alpha}}{k! \Gamma(\alpha)} e^{-\lambda(k+\alpha+j)x} dx$$

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-k-\alpha-1}{j} \frac{(-1)^{k+j} \lambda \beta^{k+\alpha}}{k! \Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} e^{itx-\lambda(k+\alpha+j)x} dx.$$

Portanto,

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-k-\alpha-1}{j} \frac{(-1)^{k+j} \lambda \beta^{k+\alpha}}{k! \Gamma(\alpha)} \frac{1}{\lambda(k+\alpha+j)-it}$$

■

### 3.7.2.7 Expansão para os momentos centrais de ordem $m$ da distribuição Gama (1-Exp)/Exp

Podemos ainda obter a expansão para os momentos centrais de ordem  $m$  da distribuição gama  $\frac{1-Exp}{Exp}$  da seguinte forma:

Como  $\mu'_m = E[(X - \mu)^m] = \int_0^{+\infty} (x - \mu)^m f_{ge3}(x) dx$ , teremos

$$\mu'_m = \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} (-1)^r \mu^r \mu_{m-r}.$$

Logo, utilizando a expansão do  $(n - r)$ -ésimo momento, teremos:

$$\mu'_m = \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} (-1)^r \mu^r \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-k - \alpha - 1}{j} \frac{(-1)^{k+j} \lambda \beta^{k+\alpha}}{k! \Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(m - r + 1)}{(\lambda(k + \alpha + j))^{m-r+1}}.$$

Portanto,

$$\mu'_m = \sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-k - \alpha - 1}{j} \binom{m}{r} \frac{(-1)^{k+j+r} \lambda \beta^{k+\alpha}}{k! \Gamma(\alpha)} \frac{\mu^r \Gamma(m - r + 1)}{(\lambda(k + \alpha + j))^{m-r+1}}.$$

■

Em particular a expansão para a variância da distribuição gama  $\frac{1-Exp}{Exp}$  é dado

por:

$$\sigma^2 = \mu'_2 = \sum_{r=0}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-k - \alpha - 1}{j} \binom{2}{r} \frac{(-1)^{k+j+r} \lambda \beta^{k+\alpha}}{k! \Gamma(\alpha)} \frac{\mu^r \Gamma(3 - r)}{(\lambda(k + \alpha + j))^{3-r}}.$$

■

### 3.7.2.8 Expansão para o coeficiente geral da distribuição Gama (1-Exp)/Exp

Pode-se ainda calcular a expansão para o coeficiente geral da distribuição gama  $\frac{1-Exp}{Exp}$  da seguinte maneira:

Como  $C_g(m) = \frac{E[(X-\mu)^m]}{\sqrt{\{E[(X-\mu)^2]\}^m}} = \frac{E[(X-\mu)^m]}{\sigma^m}$ , logo teremos:

$$C_g(m) = \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} (-1)^r \frac{\mu^r}{\sigma^m}.$$

Portanto,

$$C_g(m) = \frac{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-k-\alpha-1}{j} \binom{m}{r} \frac{(-1)^{k+j+r} \lambda \beta^{k+\alpha}}{k! \Gamma(\alpha)} \frac{\mu^r \Gamma(m-r+1)}{(\lambda(k+\alpha+j))^{m-r+1}}}{\left( \sum_{r=0}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-k-\alpha-1}{j} \binom{2}{r} \frac{(-1)^{k+j+r} \lambda \beta^{k+\alpha}}{k! \Gamma(\alpha)} \frac{\mu^r \Gamma(3-r)}{(\lambda(k+\alpha+j))^{3-r}} \right)^{\frac{m}{2}}}.$$

■

Em particular a expansão para o coeficiente de assimetria da distribuição gama  $\frac{1-Exp}{Exp}$ ,  $C_a = C_g(3)$ , é dado por:

$$C_a = \frac{\sum_{r=0}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-k-\alpha-1}{j} \binom{3}{r} \frac{(-1)^{k+j+r} \lambda \beta^{k+\alpha}}{k! \Gamma(\alpha)} \frac{\mu^r \Gamma(4-r)}{(\lambda(k+\alpha+j))^{4-r}}}{\left( \sum_{r=0}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-k-\alpha-1}{j} \binom{2}{r} \frac{(-1)^{k+j+r} \lambda \beta^{k+\alpha}}{k! \Gamma(\alpha)} \frac{\mu^r \Gamma(3-r)}{(\lambda(k+\alpha+j))^{3-r}} \right)^{\frac{3}{2}}}.$$

■

Enquanto a expansão para o coeficiente de curtose da distribuição gama  $\frac{1-Exp}{Exp}$ ,  $C_c = C_g(4)$ , é dado por:

$$C_c = \frac{\sum_{r=0}^4 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-k-\alpha-1}{j} \binom{4}{r} \frac{(-1)^{k+j+r} \lambda \beta^{k+\alpha}}{k! \Gamma(\alpha)} \frac{\mu^r \Gamma(5-r)}{(\lambda(k+\alpha+j))^{5-r}}}{\left( \sum_{r=0}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-k-\alpha-1}{j} \binom{2}{r} \frac{(-1)^{k+j+r} \lambda \beta^{k+\alpha}}{k! \Gamma(\alpha)} \frac{\mu^r \Gamma(3-r)}{(\lambda(k+\alpha+j))^{3-r}} \right)^2}.$$

■

### 3.7.2.9 Função Quantílica da distribuição gama (1-Exp)/Exp

Podemos ainda obter a função quantílica da distribuição gama  $\frac{1-Exp}{Exp}$  da seguinte forma:

Invertendo a função distribuição gama  $\frac{1-Exp}{Exp}$ , teremos a função quantílica para a distribuição gama  $\frac{1-Exp}{Exp}$ , conforme expressão abaixo:



$$q = Q(p) = H^{-1}(q)$$

Onde

$$p = H(q) = \int_0^q \frac{\lambda \beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{e^{-\lambda x}}{(1 - e^{-\lambda x})^2} \left( \frac{e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda x}} \right)^{\alpha-1} e^{-\beta \left( \frac{e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda x}} \right)} dx$$

Em particular para  $p = 0,5$ , teremos a mediana ( $m$ ) da distribuição gama  $\frac{1-Exp}{Exp}$ .

■

### 3.7.2.10 Expansão para o Desvio Médio e Desvio Quantílico da distribuição gama (1-Exp)/Exp

Podemos ainda obter a expansão para os desvios médios e quantílicos da distribuição gama  $\frac{1-Exp}{Exp}$  da seguinte forma:

Como  $h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-k-\alpha-1}{j} \frac{(-1)^{k+j} \lambda \beta^{k+\alpha}}{k! \Gamma(\alpha)} e^{-\lambda(k+\alpha+j)x}$ , logo para o desvio médio teremos:

$$d_1(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j} \beta^{\alpha+k}}{k! (j - \alpha - k) \Gamma(\alpha)} \binom{k + \alpha - 1}{j} \int_0^{+\infty} |x - \mu| e^{-\lambda(k+\alpha+j)x} dx$$

Como  $\int_0^{+\infty} |x - \mu| e^{-\lambda(k+\alpha+j)x} dx = \frac{2e^{-\lambda(k+\alpha+j)\mu} + \mu - 1}{\lambda^2(k+\alpha+j)^2}$ , teremos:

$$d_1(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j} \beta^{\alpha+k}}{k! (j - \alpha - k) \Gamma(\alpha)} \binom{k + \alpha - 1}{j} \frac{2e^{-\lambda(k+\alpha+j)\mu} + \mu - 1}{\lambda^2(k + \alpha + j)^2}$$

Similarmente, para o desvio quantílico teremos:

$$d_2(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j} \beta^{\alpha+k}}{k! (j - \alpha - k) \Gamma(\alpha)} \binom{k + \alpha - 1}{j} \int_0^{+\infty} |x - q| e^{-\lambda(k+\alpha+j)x} dx$$

Como  $\int_0^{+\infty} |x - q| e^{-\lambda(k+\alpha+j)x} dx = \frac{2e^{-\lambda(k+\alpha+j)q} + q - 1}{\lambda^2(k+\alpha+j)^2}$ , teremos:

$$d_2(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j} \beta^{\alpha+k}}{k! (j - \alpha - k) \Gamma(\alpha)} \binom{k + \alpha - 1}{j} \frac{2e^{-\lambda(k+\alpha+j)q} + q - 1}{\lambda^2(k + \alpha + j)^2}$$

■

### 3.7.2.11 Derivadas da função log-verossimilhança em relação aos parâmetros da distribuição Gama (1-Exp)/Exp

A seguir, veremos as derivadas da função log-verossimilhança em relação aos parâmetros da distribuição gama  $\frac{1-Exp}{Exp}$ :

Como

$$\sum_{i=1}^n \text{Logh}(x_i; \alpha, \beta, \lambda) = n \text{Log} \left( \frac{\lambda \beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \right) - n\alpha\lambda - (\alpha + 1) \sum_{i=1}^n \text{Log}(1 - e^{-\lambda x_i}) - \beta \sum_{i=1}^n \left( \frac{e^{-\lambda x_i}}{1 - e^{-\lambda x_i}} \right)$$

Logo temos que:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \text{Logh}(x_i; \alpha, \beta, \lambda)}{\partial \alpha} = n \text{Log} \beta - \frac{n\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} - n\lambda - \sum_{i=1}^n \text{Log}(1 - e^{-\lambda x_i})$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \text{Logh}(x_i; \alpha, \beta, \lambda)}{\partial \beta} = \frac{n\alpha}{\beta} - \sum_{i=1}^n \left( \frac{e^{-\lambda x_i}}{1 - e^{-\lambda x_i}} \right)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \text{Logh}(x_i; \alpha, \beta, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - n\alpha - (\alpha + 1) \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i e^{-\lambda x_i}}{1 - e^{-\lambda x_i}} \right) + \beta \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i e^{-\lambda x_i}}{(1 - e^{-\lambda x_i})^2} \right).$$

■

### 3.7.2.12 Entropia Rényi usando a distribuição gama (1-Exp)/Exp

A seguir veremos o desenvolvimento dos cálculos da expansão da entropia para a distribuição gama  $\frac{1-Exp}{Exp}$ , usando a entropia de Rényi:

$$\mathcal{L}_R(\eta) = \frac{1}{1-\eta} \log \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f^{\eta-1}(x) dF(x) \right)$$

$$\mathcal{L}_R(\eta) = \frac{1}{1-\eta} \log \left( \int_0^{+\infty} \left( \frac{\lambda \beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{e^{-\lambda x}}{(1 - e^{-\lambda x})^2} \left( \frac{e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda x}} \right)^{\alpha-1} e^{-\beta \left( \frac{e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda x}} \right)} \right)^\eta dx \right)$$

Como

$$\exp \left( -\eta \beta \frac{e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda x}} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \eta^k \beta^k}{k!} e^{-k\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^k$$

Logo

$$h_{G_1}^{\eta}(x) = \frac{\lambda^{\eta} \beta^{\eta \alpha}}{\Gamma^{\eta}(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \eta^k \beta^k}{k!} e^{-\lambda(\alpha+k)x} (1 - e^{-\lambda x})^{\eta(\alpha-1)+k}$$

Como

$$(1 - e^{-\lambda x})^{\eta(\alpha-1)+k} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\eta(\alpha-1)+k}{j} (-1)^j e^{-\lambda j x}$$

Logo temos

$$h_{G_1}^{\eta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j} \lambda^{\eta} \eta^k \beta^{\eta \alpha + k}}{k! \Gamma^{\eta}(\alpha)} \binom{\eta(\alpha-1)+k}{j} e^{-\lambda(\alpha+k+j)x}$$

Assim,

$$\mathcal{L}_R(\eta) = \frac{1}{1-\eta} \log \left( \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j} \lambda^{\eta} \eta^k \beta^{\eta \alpha + k}}{k! \Gamma^{\eta}(\alpha)} \binom{\eta(\alpha-1)+k}{j} e^{-\lambda(\alpha+k+j)x} dx \right)$$

$$\mathcal{L}_R(\eta) = \frac{1}{1-\eta} \log \left( \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j} \lambda^{\eta} \eta^k \beta^{\eta \alpha + k}}{k! \Gamma^{\eta}(\alpha)} \binom{\eta(\alpha-1)+k}{j} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda(\alpha+k+j)x} dx \right)$$

Portanto,

$$\mathcal{L}_R(\eta) = \frac{1}{1-\eta} \log \left( \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j} \lambda^{\eta} \eta^k \beta^{\eta \alpha + k}}{k! \Gamma^{\eta}(\alpha)} \binom{\eta(\alpha-1)+k}{j} \frac{1}{\lambda(\alpha+k+j)} \right)$$

### 3.7.2.13 Aplicação

Nesta seção apresentaremos os resultados obtidos, na forma de gráficos para melhor análise e discussão dos resultados a serem obtidos pelo mesmo, podendo assim, compará-lo com outros existentes na literatura.

Os dados utilizados nesta pesquisa são provenientes dos excessos de picos de cheias (em m<sup>3</sup>/s) do Rio Wheaton perto Carcross no território de Yukon, no Canadá, os mesmos são importantes para o estudo de controle de fluxo de enchentes. Foram registrados 72 excedências dos anos de 1958 a 1984, com arredondamento para uma casa decimal. Estes dados foram analisados por Choulakian e Stephens (2001) sendo apresentados na Tabela 3.7.2.13.1.

Tabela 3.7.2.13.1: excessos de picos de cheias em m<sup>3</sup>/s do Rio Wheaton

Excesso de picos de cheias do Rio Wheaton (m <sup>3</sup> /s)											
1,7	2,2	14,4	1,1	0,4	20,6	5,3	0,7	1,9	13,0	12,0	9,3
1,4	18,7	8,5	25,5	11,6	14,1	22,1	1,1	2,5	14,4	1,7	37,6
0,6	2,2	39,0	0,3	15,0	11,0	7,3	22,9	1,7	0,1	1,1	0,6
9,0	1,7	7,0	20,1	0,4	2,8	14,1	9,9	10,4	10,7	30,0	3,6
5,6	30,8	13,3	4,2	25,5	3,4	11,9	21,5	27,6	36,4	2,7	64,0
1,5	2,5	27,4	1,0	27,1	20,2	16,8	5,3	9,7	27,5	2,5	27,0

Vale salientar que esse conjunto de dados foi analisado por meio das distribuições de Pareto, de Weibull de três parâmetros, da generalizada de Pareto e da beta-Pareto (AKINSETE, FAMOYE e LEE, 2008).

### Teste de Wald Wolfowitz para avaliação de autocorrelação em séries temporais

Considerando  $X_i$  os valores da Tabela 3.7.2.13.1, ou seja, ( $X_1 = 1,7$ ;  $X_2 = 2,2$ ; ...;  $X_{72} = 27,0$ ), e calculando a média ( $\bar{X}$ ), o desvio-padrão ( $S_X$ ), normalizando a série temporal pela expressão  $Z_i = \frac{X_i - \bar{X}}{S_X}$  e em seguida estimando a estatística de teste

$u$  pela Equação  $u = \frac{1+(n-1)(\sum_{i=1}^n z_i \cdot z_{i+1} / \sum_{i=1}^n z_i^2)}{\sqrt{n-1}}$ , teremos:

$\bar{X} = 12,2041667$ ,  $S_X = 12,2972164$  e  $u = -1,93809458$ .

Assim, aplicando o teste que estabelece a condição de que na hipótese nula de autocorrelação nula ( $\rho = 0$ ) a variável de teste  $u$  segue uma distribuição normal padrão com média zero e desvio padrão um, e que para um dado nível de confiança  $\alpha$  a hipótese nula será rejeitada se  $P(z < u) > \alpha$ . Então temos que  $P(z < -1,93809458) = 0,026305842 < 0,05 = \alpha$ .

Logo, não rejeita-se a hipótese nula de que a autocorrelação da série temporal seja nula.

Na Tabela 3.7.2.13.2 podemos ver as estimativas de máxima verossimilhança, obtidas pelo método de Newton-Raphson implementados no software estatísticos SAS 9.1, dos parâmetros, erros padrões, critérios de informação de Akaike (AIC), Akaike corrigido (AICc), Bayesiano (BIC), Hannan-Quinn (HQIC) e as estatísticas de Anderson-Darling (A) e Cramér von Mises (W) para as distribuições gama

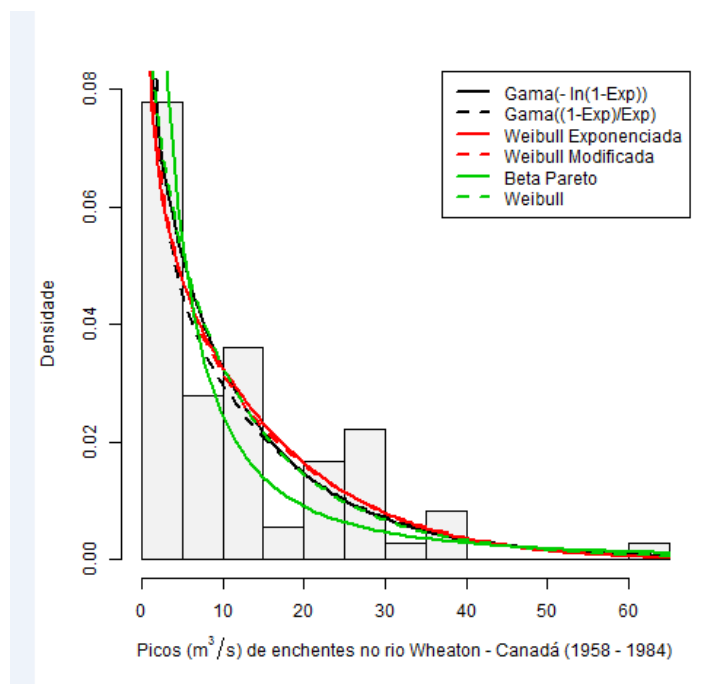
$-\ln(1 - Exp)$  (M3.1), gama  $\frac{1-Exp}{Exp}$  (modelo proposto, M3.2), Weibull exponenciada (M3.3), Weibull modificada (M3.4) (LAI *et al.*, 2003), beta Pareto (M3.5) e Weibull (M3.6).

Tabela 3.7.2.13.2 – estimativa de máxima verossimilhança dos parâmetros, dos erros (erros padrões em parênteses) e cálculos das estatísticas AIC, AICc, BIC, HQIC, testes A e W para as distribuições M3.1 a M3.6.

Modelos	Estatísticas				Estatísticas					
	$\alpha$	$\beta$	$\lambda$	$\theta$	AIC	AICc	BIC	HQIC	A	W
M3.1	0,838 (0,121)	0,035 (0,007)	1,96 (<E-3)	----	508,689	509,042	515,519	511,408	0.7519	0.1306
M3.2	0,131 (0,053)	0,179 (0,07)	0,539 (0,251)	----	505,030	505,383	511,860	507,749	0.4516	0.0757
M3.3	1,387 (0,59)	0,519 (0,312)	0,05 (0,021)	----	508,050	508,403	514,880	510,769	1.4137	0.2534
M3.4	0,776 (0,124)	0,124 (0,035)	0,01 (0,008)	----	507,343	507,696	514,173	510,062	0.5938	0.0978
M3.5	84,682 (<E-3)	65,574 (<E-3)	0,063 (0,005)	0,01 (<E-3)	524,398	524,995	533,504	528,023	2.0412	0.3516
M3.6	0,901 (0,086)	0,086 (0,012)	----	----	506,997	507,171	511,551	508,810	0.7855	0.1380

Para as seis distribuições mostradas na Tabela 3.7.2.13.2, aplicada aos dados de enchentes do Rio Wheaton, foi observado que o modelo beta-Pareto (M5) descrito em 2008 por Akinsete, Famoye e Lee, como sendo o melhor modelo ajustado aos mesmos, teve em nossos estudos um desempenho inferior com AIC = 524,398, AICc = 524,995, BIC = 533,504, HQIC = 528,023, A=2,0412 e W=0,3516 ao modelo proposto gama  $\frac{1-Exp}{Exp}$  (M3.2) com AIC = 505,030, AICc = 505,383, BIC = 511,860, HQIC = 507,749, A = 0,4516 e W = 0,0757. Ainda de acordo com a Tabela 3.7.2.13.2, a distribuição proposta M3.2 é o melhor modelo testado uma vez que os menores valores de AIC, AICc, HQIC, A e W são desta distribuição, sendo superada apenas no critério BIC pelo modelo M3.6.

A seguir tem-se os gráficos das funções densidades dos modelos M3.1 a M3.6 ajustados aos dados, bem como o histograma do mesmo.



### 3.7.2.13.1 $Fdp$ 's ajustados a massa de dados dos picos de enchentes no rio Wheaton

O gráfico mostra que a distribuição gama  $\frac{1-Exp}{Exp}$  possui o mesmo comportamento das demais distribuições, exceto da beta Pareto que distancia-se das outras.

### 3.7.2.14 Etapas para identificação de modelos univariados para modelagens

A seguir apresentaremos as etapas para identificação de modelos univariados para modelagens.

**Primeiro passo:** Identificar o conjunto suporte para a situação.

**Segundo passo:** Caracterizar o comportamento dos dados coletados baseado no histograma, considerando os seguintes itens.

- 2.1 Média;
- 2.2 Variância;
- 2.3 Assimetria;
- 2.4 Curtose;

## 2.5 Números de modas mais o teste multimodalidade.

**Terceiro passo:** Com os passos anteriores, devem-se identificar as classes de distribuições e as distribuições de probabilidades, considerando os itens 3.1 ou 3.2 ou ambas:

3.1 identificar as classes de distribuições e as distribuições de probabilidades conhecidas na literatura que possam se ajustar aos dados;

3.2 propor uma nova classe de distribuições ou uma nova distribuição de probabilidade que melhor se ajuste aos dados.

**Quarto passo:** Escolher algumas distribuições e avaliar comparativamente, usando os indicadores e os testes estatísticos.

### 3.8. Conclusão

Como observações finais para este capítulo, podemos notar que o método gerador de distribuições de probabilidades desenvolvido neste trabalho, nos permite criar além de distribuições de probabilidades, classes de distribuições podendo trabalhar com qualquer domínio, ampliando assim as possibilidades de trabalhar com qualquer distribuição e generalizando-as.

Nota-se ainda a importância da equivalência entre o Teorema 3.1 com seus corolários que geram exatamente as mesmas distribuições probabilísticas, que conseqüentemente proporciona várias possibilidades de gerar uma mesma distribuição ou classe de distribuição probabilística. De igual modo apresentamos o Teorema Geral do Suporte que nos permite obter os suportes das distribuições a partir do suporte das distribuições que alimentam o funcional gerador de classes de distribuições probabilísticas, mostrando quando a distribuição gerada será discreta ou contínua. É apresentado ainda uma proposta de nomenclatura que nomeia as distribuições de forma mais precisa diferenciando-as entre si, além de ser uma forma sistemática.

Podemos ainda observar que o método gerador de distribuições de probabilidades apresentado neste trabalho gera uma grande quantidade, de funcionais geradoras de classes de distribuições, para cada distribuição dada e conseqüentemente, o mesmo para modelos probabilísticos, que poderão ser aplicados em trabalhos futuros em diversas áreas. Para este trabalho utilizamos alguns casos particulares que convieram ao mesmo. Acrescente-se que não esgotamos as possibilidades dos resultados que podem ser obtidos, ficando como continuação, não só a obtenção de tais novas distribuições, bem como suas aplicações nas diversas áreas de conhecimento.



## **4. MÉTODO GERADOR DE DISTRIBUIÇÕES E CLASSES DE DISTRIBUIÇÕES PROBABILÍSTICAS, CASO MULTIVARIADO.**

### **4.1 Introdução**

O objetivo deste capítulo é estender os resultados do capítulo anterior para o caso multivariado, isto é, o método anteriormente estudado será generalizado para funções de várias variáveis ou multivariadas.

Este capítulo está organizado da seguinte maneira. Na Seção 4.1, temos uma breve introdução, trazendo o objetivo; na Seção 4.2, apresentamos a definição dos operadores-diferença e mostramos que as composições de operadores-diferença são lineares; na Seção 4.3, temos o método proposto que se baseia no uso de funções monotônicas multivariadas para gerar distribuições probabilísticas e alguns corolários; na Seção 4.4 particularizamos para o caso de funções monotônicas multivariadas que são composições de distribuições de probabilidade já conhecidas, obtendo assim classes de distribuições probabilísticas e apresentamos também outros corolários do método proposto; na Seção 4.5, estudam-se os suportes dos funcionais geradores de classes de distribuições probabilísticas; na Seção 4.6 sistematizamos no que se diz respeito à nomenclatura das expressões encontradas; na Seção 4.7 mostramos como obter os modelos já existentes na literatura a partir dos corolários apresentados nas seções anteriores; na Seção 4.8 utilizando o Corolário 4.1.5 encontramos o modelo proposto a classe Weibull bivariada e suas propriedades de caracterização bem como os resultados de aplicações, tabelas e gráficos; na Seção 4.9 trazemos a conclusão deste capítulo.

### **4.2. Operadores-diferença**

Nesta seção, enunciaremos os operadores-diferença e provaremos um resultado que será utilizado na demonstração do Teorema 4.1. Vejamos a seguir, a definição dos operadores-diferença:

### Operadores-diferença:

Seja o intervalo  $I_k = (a_k, b_k]$ , com  $a_k < b_k$  e  $\mathcal{F}^n$  o conjunto de todas as funções de  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Então,  $\Delta_{k,I_k}: \mathcal{F}^n \rightarrow \mathcal{F}^n$  tal que  $\Delta_{k,I_k}F(x_1, \dots, x_n) = F(x_1, \dots, x_{k-1}, b_k, x_{k+1}, \dots, x_n) - F(x_1, \dots, x_{k-1}, a_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$ , para todo  $k = 1, 2, \dots, n$ .

A notação que definiremos a seguir será utilizada tanto para enunciarmos, como para demonstrarmos o Lema 4.1.

Definição:  $(\alpha F + \beta G)(x_1, \dots, x_n) = \alpha F(x_1, \dots, x_n) + \beta G(x_1, \dots, x_n)$ .

O Lema 4.1 a seguir mostra que as composições de operadores-diferença são lineares.

### Lema 4.1: As composições de operadores-diferença são lineares.

Se  $k \neq j$ , então  $\Delta_{k,I_k}\Delta_{j,I_j}[(\alpha F + \beta G)(x_1, \dots, x_n)] = (\alpha\Delta_{k,I_k}\Delta_{j,I_j}F + \beta\Delta_{k,I_k}\Delta_{j,I_j}G)(x_1, \dots, x_n)$ , onde  $\alpha$  e  $\beta$  são números reais.

### Demonstração:

Vamos primeiro provar a linearidade de um único operador de diferença.

$$\begin{aligned} \Delta_{k,I_k}[(\alpha F + \beta G)(x_1, \dots, x_n)] &= (\alpha F + \beta G)(x_1, \dots, b_k, \dots, x_n) - (\alpha F + \beta G)(x_1, \dots, a_k, \dots, x_n) \\ &= \alpha F(x_1, \dots, b_k, \dots, x_n) + \beta G(x_1, \dots, b_k, \dots, x_n) \\ &\quad - \alpha F(x_1, \dots, a_k, \dots, x_n) - \beta G(x_1, \dots, a_k, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\Delta_{k,I_k}[(\alpha F + \beta G)(x_1, \dots, x_n)] = (\alpha\Delta_{k,I_k}F + \beta\Delta_{k,I_k}G)(x_1, \dots, x_n).$$

Agora considere a composição de operadores-diferença.

$$\begin{aligned} \Delta_{k,I_k}\Delta_{j,I_j}[(\alpha F + \beta G)(x_1, \dots, x_n)] &= \Delta_{k,I_k}[\Delta_{j,I_j}(\alpha F + \beta G)(x_1, \dots, x_n)] \\ &= \Delta_{k,I_k}[(\alpha\Delta_{j,I_j}F + \beta\Delta_{j,I_j}G)(x_1, \dots, x_n)] = (\alpha\Delta_{k,I_k}\Delta_{j,I_j}F + \beta\Delta_{k,I_k}\Delta_{j,I_j}G)(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

$$= \alpha \Delta_{k,I_k} \Delta_{j,I_j} F(x_1, \dots, x_n) + \beta \Delta_{k,I_k} \Delta_{j,I_j} G(x_1, \dots, x_n).$$

Portanto,

$$\Delta_{k,I_k} \Delta_{j,I_j} [(\alpha F + \beta G)(x_1, \dots, x_n)] = (\alpha \Delta_{k,I_k} \Delta_{j,I_j} F + \beta \Delta_{k,I_k} \Delta_{j,I_j} G)(x_1, \dots, x_n). \blacksquare$$

Salientamos que pode-se facilmente mostrar que a composição de qualquer quantidade  $m \leq n$  de operadores diferença é linear usando a indução matemática e comutativa.

### 4.3. Método proposto

Nesta seção, apresentaremos o método gerador de distribuições multivariado, também fazendo uso de funções monotônicas e contínuas a direita  $U: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U_{i,l}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ,  $L_{i,l}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ,  $M_{i,l}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  e  $V_{i,l}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  e de uma distribuição de probabilidade multivariada  $F$ , com  $i \in \{1, \dots, k\}$  e  $l \in \{1, \dots, \eta_i\}$ . A ideia do método é gerar uma distribuição de probabilidade integrando  $F$  nas regiões de  $L_{i,l}(x_1, \dots, x_n)$  a  $U_{i,l}(x_1, \dots, x_n)$  e  $M_{i,l}(x_1, \dots, x_n)$  a  $V_{i,l}(x_1, \dots, x_n)$  para qualquer  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . O Teorema 4.1, a seguir, demonstra condições suficientes que as funções  $U(x_1, \dots, x_n)$ ,  $V(x_1, \dots, x_n)$ ,  $L_{i,l}(x_1, \dots, x_n)$ ,  $U_{i,l}(x_1, \dots, x_n)$ ,  $M_{i,l}(x_1, \dots, x_n)$  e  $V_{i,l}(x_1, \dots, x_n)$  devem satisfazer de modo a garantir que o método proposto gera uma função de distribuição de probabilidade multivariada.

**Teorema 4.1 (T4.1): Método gerador de distribuições e classes de distribuições probabilísticas multivariadas.**

Sejam  $F: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U_{i,l}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ,  $L_{i,l}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ,  $M_{i,l}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  e  $V_{i,l}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , para  $i \in \{1, \dots, k\}$  e  $l \in \{1, \dots, \eta_i\}$ , funções multivariadas monotônicas e contínuas à direita em cada uma de sua variáveis tais que:

[c4.1]  $F$  uma *fda* multivariada e  $U$  e  $V$  são não negativas;

[c4.2]  $U(x_1, \dots, x_n)$ ,  $U_{i,l}(x_1, \dots, x_n)$  e  $M_{i,l}(x_1, \dots, x_n)$  são não decrescentes e

$V(x_1, \dots, x_n)$ ,  $L_{i,l}(x_1, \dots, x_n)$  e  $V_{i,l}(x_1, \dots, x_n)$  são não crescentes,  $\forall i \in \{1, \dots, k\}$  e  $\forall l \in \{1, \dots, \eta_i\}$ ;

[c4.3] Para todo  $s \in \{1, \dots, n\}$ , se  $\lim_{x_s \rightarrow -\infty} U(x_1, \dots, x_n) \neq \lim_{x_s \rightarrow -\infty} V(x_1, \dots, x_n)$ , então

$\lim_{x_s \rightarrow -\infty} U(x_1, \dots, x_n) = 0$  ou  $\lim_{x_s \rightarrow -\infty} U_{i,l}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{x_s \rightarrow -\infty} L_{i,l}(x_1, \dots, x_n)$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, k\}$  e  $\forall l \in \{1, \dots, \eta_i\}$ , e  $\lim_{x_s \rightarrow -\infty} V(x_1, \dots, x_n) = 0$  ou  $\lim_{x_s \rightarrow -\infty} M_{i,l}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{x_s \rightarrow -\infty} V_{i,l}(x_1, \dots, x_n)$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, k\}$  e  $\forall l \in \{1, \dots, \eta_i\}$ ;

[c4.4] Para todo  $s \in \{1, \dots, n\}$ , se  $\lim_{x_s \rightarrow -\infty} U(x_1, \dots, x_n) = \lim_{x_s \rightarrow -\infty} V(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ , então

$\lim_{x_s \rightarrow -\infty} U_{i,l}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{x_s \rightarrow -\infty} V_{i,l}(x_1, \dots, x_n)$  e  $\lim_{x_s \rightarrow -\infty} M_{i,l}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{x_s \rightarrow -\infty} L_{i,l}(x_1, \dots, x_n)$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, k\}$  e  $\forall l \in \{1, \dots, \eta_i\}$ ;

[c4.5]  $\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (-\infty, \dots, -\infty)} L_{i,l}(x_1, \dots, x_n) \leq \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (-\infty, \dots, -\infty)} U_{i,l}(x_1, \dots, x_n)$  e se

$\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (-\infty, \dots, -\infty)} V(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ , então  $\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} M_{i,l}(x_1, \dots, x_n) \leq \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} V_{i,l}(x_1, \dots, x_n)$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, k\}$  e  $\forall l \in \{1, \dots, \eta_i\}$ ;

[c4.6]  $\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} U_{i,\eta_i}(x_1, \dots, x_n) \geq \sup\{t \in \mathbb{R}: (t_1, \dots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \dots, t_n) \in S_F\}$  e

$\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} L_{i,1}(x_1, \dots, x_n) \leq \inf\{t \in \mathbb{R}: (t_1, \dots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \dots, t_n) \in S_F\}$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ ;

[c4.7]  $\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} U(x_1, \dots, x_n) = 1$ ;

[c4.8]  $\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} V(x_1, \dots, x_n) = 0$  ou  $\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} M_{i,l}(x_1, \dots, x_n) =$

$\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} V_{i,l}(x_1, \dots, x_n)$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, k\}$  e  $\forall l \in \{1, \dots, \eta_i\}$  para  $\eta_i \geq 1$ ;

[c4.9]  $\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} U_{i,l}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} L_{i,l+1}(x_1, \dots, x_n)$ ,  $\forall i \in$

$\{1, \dots, k\}$  e  $\forall l = 1, 2, 3, \dots, \eta_i - 1$  para  $\eta_i \geq 2$ ;

[c4.10]  $F$  é uma *fda* sem pontos de descontinuidade ou todas as funções

$L_{i,l}(x_1, \dots, x_n)$  e  $V_{i,l}(x_1, \dots, x_n)$  são constantes à direita na vizinhança dos pontos cujas imagens são pontos de descontinuidades de  $F$ , sendo também contínuas em tais pontos e  $F$  não possui pontos de descontinuidade no conjunto

$\{ \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (\pm\infty, \dots, \pm\infty)} U_{j,i_j}(x_1, \dots, x_n), \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (\pm\infty, \dots, \pm\infty)} L_{j,i_j}(x_1, \dots, x_n),$

$\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (\pm\infty, \dots, \pm\infty)} M_{j,i_j}(x_1, \dots, x_n), \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (\pm\infty, \dots, \pm\infty)} V_{j,i_j}(x_1, \dots, x_n),$  para algum  $i_j =$

$1, 2, \dots, \eta_j$ , com  $j = 1, 2, \dots, k\} \cup \{ \lim_{x_s \rightarrow \pm\infty} U_{j,i_j}(x_1, \dots, x_s, \dots, x_n) : s \in \{1, \dots, n\} \} \cup$

$\{ \lim_{x_s \rightarrow \pm\infty} L_{j,i_j}(x_1, \dots, x_s, \dots, x_n) : s \in \{1, \dots, n\} \} \cup \{ \lim_{x_s \rightarrow \pm\infty} M_{j,i_j}(x_1, \dots, x_s, \dots, x_n) : s \in$

$\{1, \dots, n\} \} \cup \{ \lim_{x_s \rightarrow \pm\infty} V_{j,i_j}(x_1, \dots, x_s, \dots, x_n) : s \in \{1, \dots, n\} \}$ ;

$$[c4.11] \quad \Delta_{1,I_1} \dots \Delta_{n,I_n} U(x_1, \dots, x_n) \sum_{i_k=1}^{\eta_k} \dots \sum_{i_1=1}^{\eta_1} \int_{L_{k,i_k}(x_1, \dots, x_n)}^{U_{k,i_k}(x_1, \dots, x_n)} \dots \int_{L_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)}^{U_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)} dF(t_1, \dots, t_k) \geq \\ \Delta_{1,I_1} \dots \Delta_{n,I_n} V(x_1, \dots, x_n) \sum_{i_k=1}^{\eta_k} \dots \sum_{i_1=1}^{\eta_1} \int_{M_{k,i_k}(x_1, \dots, x_n)}^{V_{k,i_k}(x_1, \dots, x_n)} \dots \int_{M_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)}^{V_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)} dF(t_1, \dots, t_k).$$

Então  $H(x_1, \dots, x_n) = U(x_1, \dots, x_n) \sum_{i_k=1}^{\eta_k} \dots \sum_{i_1=1}^{\eta_1} \int_{L_{k,i_k}(x_1, \dots, x_n)}^{U_{k,i_k}(x_1, \dots, x_n)} \dots \int_{L_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)}^{U_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)} dF(t_1, \dots, t_k) \\ - V(x_1, \dots, x_n) \sum_{i_k=1}^{\eta_k} \dots \sum_{i_1=1}^{\eta_1} \int_{M_{k,i_k}(x_1, \dots, x_n)}^{V_{k,i_k}(x_1, \dots, x_n)} \dots \int_{M_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)}^{V_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)} dF(t_1, \dots, t_k)$  é uma *fda* multivariada.

### Demonstração:

$$(i) \quad \lim_{x_s \rightarrow -\infty} H(x_1, \dots, x_s, \dots, x_n) = 0, \quad \forall s \in \{1, \dots, n\}.$$

$$\lim_{x_s \rightarrow -\infty} H(x_1, \dots, x_n) = \left( \lim_{x_s \rightarrow -\infty} U(x_1, \dots, x_n) \right) \\ \left( \lim_{x_s \rightarrow -\infty} \sum_{i_k=1}^{\eta_k} \dots \sum_{i_1=1}^{\eta_1} \int_{L_{k,i_k}(x_1, \dots, x_n)}^{U_{k,i_k}(x_1, \dots, x_n)} \dots \int_{L_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)}^{U_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)} dF(t_1, \dots, t_k) \right) \\ - \left( \lim_{x_s \rightarrow -\infty} V(x_1, \dots, x_n) \right) \\ \left( \lim_{x_s \rightarrow -\infty} \sum_{i_k=1}^{\eta_k} \dots \sum_{i_1=1}^{\eta_1} \int_{M_{k,i_k}(x_1, \dots, x_n)}^{V_{k,i_k}(x_1, \dots, x_n)} \dots \int_{M_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)}^{V_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)} dF(t_1, \dots, t_k) \right) \\ = \lim_{x_s \rightarrow -\infty} U(x_1, \dots, x_n) \\ \sum_{i_k=1}^{\eta_k} \dots \sum_{i_1=1}^{\eta_1} \int_{\lim_{x_s \rightarrow -\infty} L_{k,i_k}(x_1, \dots, x_n)}^{\lim_{x_s \rightarrow -\infty} U_{k,i_k}(x_1, \dots, x_n)} \dots \int_{\lim_{x_s \rightarrow -\infty} L_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)}^{\lim_{x_s \rightarrow -\infty} U_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)} dF(t_1, \dots, t_k) \\ - \lim_{x_s \rightarrow -\infty} V(x_1, \dots, x_n) \\ \sum_{i_k=1}^{\eta_k} \dots \sum_{i_1=1}^{\eta_1} \int_{\lim_{x_s \rightarrow -\infty} M_{k,i_k}(x_1, \dots, x_n)}^{\lim_{x_s \rightarrow -\infty} V_{k,i_k}(x_1, \dots, x_n)} \dots \int_{\lim_{x_s \rightarrow -\infty} M_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)}^{\lim_{x_s \rightarrow -\infty} V_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)} dF(t_1, \dots, t_k),$$

onde a última igualdade decorre do fato que  $F$  é contínua em

$$\left\{ \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (\pm\infty, \dots, \pm\infty)} U_{j,i_j}(x_1, \dots, x_n), \quad \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (\pm\infty, \dots, \pm\infty)} L_{j,i_j}(x_1, \dots, x_n), \right. \\ \left. \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (\pm\infty, \dots, \pm\infty)} M_{j,i_j}(x_1, \dots, x_n), \quad \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (\pm\infty, \dots, \pm\infty)} V_{j,i_j}(x_1, \dots, x_n), \text{ para algum } i_j = \right. \\ \left. 1, 2, \dots, \eta_j, \text{ com } j = 1, 2, \dots, k \right\} \cup \left\{ \lim_{x_s \rightarrow \pm\infty} U_{j,i_j}(x_1, \dots, x_s, \dots, x_n) : s \in \{1, \dots, n\} \right\} \cup$$

$$\left\{ \lim_{x_s \rightarrow \pm\infty} L_{j,i_j}(x_1, \dots, x_s, \dots, x_n) : s \in \{1, \dots, n\} \right\} \cup \left\{ \lim_{x_s \rightarrow \pm\infty} M_{j,i_j}(x_1, \dots, x_s, \dots, x_n) : s \in \{1, \dots, n\} \right\} \cup \left\{ \lim_{x_s \rightarrow \pm\infty} V_{j,i_j}(x_1, \dots, x_s, \dots, x_n) : s \in \{1, \dots, n\} \right\}.$$

Condições [c4.3] e [c4.4] garantem que

$$\lim_{x_s \rightarrow -\infty} H(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

$$(ii) \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} F(x_1, \dots, x_n) = 1.$$

$$\begin{aligned} \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} F(x_1, \dots, x_n) &= \left( \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} U(x_1, \dots, x_n) \right) \\ &\left( \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} \sum_{i_k=1}^{\eta_k} \dots \sum_{i_1=1}^{\eta_1} \int_{L_{k,i_k}(x_1, \dots, x_n)}^{U_{k,i_k}(x_1, \dots, x_n)} \dots \int_{L_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)}^{U_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)} dF(t_1, \dots, t_k) \right) \\ &- \left( \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} V(x_1, \dots, x_n) \right) \\ &\left( \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} \sum_{i_k=1}^{\eta_k} \dots \sum_{i_1=1}^{\eta_1} \int_{M_{k,i_k}(x_1, \dots, x_n)}^{V_{k,i_k}(x_1, \dots, x_n)} \dots \int_{M_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)}^{V_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)} dF(t_1, \dots, t_k) \right) \\ &= \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} U(x_1, \dots, x_n) \\ &\sum_{i_k=1}^{\eta_k} \dots \sum_{i_1=1}^{\eta_1} \int_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} U_{k,i_k}(x_1, \dots, x_n) \dots \int_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} U_{k,i_1}(x_1, \dots, x_n) \\ &\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} L_{k,i_k}(x_1, \dots, x_n) \dots \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} L_{k,i_1}(x_1, \dots, x_n) dF(t_1, \dots, t_k) \\ &- \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} V(x_1, \dots, x_n) \\ &\sum_{i_k=1}^{\eta_k} \dots \sum_{i_1=1}^{\eta_1} \int_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} V_{k,i_k}(x_1, \dots, x_n) \dots \int_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} V_{k,i_1}(x_1, \dots, x_n) \\ &\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} M_{k,i_k}(x_1, \dots, x_n) \dots \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} M_{k,i_1}(x_1, \dots, x_n) dF(t_1, \dots, t_k), \end{aligned}$$

em que a última igualdade decorre do fato que  $F$  é contínua em

$$\left\{ \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} U_{j,i_j}(x_1, \dots, x_n), \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} L_{j,i_j}(x_1, \dots, x_n), \right. \\ \left. \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} M_{j,i_j}(x_1, \dots, x_n), \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} V_{j,i_j}(x_1, \dots, x_n) \right\}$$

Deste modo, as condições [c4.1], [c4.6], [c4.7] [c4.8] e [c4.9] garantem que

$$\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} H(x_1, \dots, x_n) = 1.$$

$$(iii) \text{ Se } x_{j,1} \leq x_{j,2}, \text{ então } F(x_{1,1}, \dots, x_{n,1}) \leq F(x_{1,2}, \dots, x_{n,2}).$$

Seja  $x_{j,1} \leq x_{j,2}$ , [c4.2] implica que:  $U_{i,l}(x_{1,1}, \dots, x_{n,1}) \leq U_{i,l}(x_{1,2}, \dots, x_{n,2})$ ,  
 $L_{i,l}(x_{1,1}, \dots, x_{n,1}) \geq L_{i,l}(x_{1,2}, \dots, x_{n,2})$ ,  $V_{i,l}(x_{1,1}, \dots, x_{n,1}) \geq V_{i,l}(x_{1,2}, \dots, x_{n,2})$ ,  
 $M_{i,l}(x_{1,1}, \dots, x_{n,1}) \geq M_{i,l}(x_{1,2}, \dots, x_{n,2})$ ,  $U(x_{1,1}, \dots, x_{n,1}) \leq U(x_{1,2}, \dots, x_{n,2})$  e  
 $V(x_{1,1}, \dots, x_{n,1}) \geq V(x_{1,2}, \dots, x_{n,2})$ . Além disso, [c4.2] e [c4.5] implica que

$$\sum_{i_k=1}^{\eta_k} \dots \sum_{i_1=1}^{\eta_1} \int_{L_{k,i_k}(x_{1,1}, \dots, x_{n,1})}^{U_{k,i_k}(x_{1,1}, \dots, x_{n,1})} \dots \int_{L_{1,i_1}(x_{1,1}, \dots, x_{n,1})}^{U_{1,i_1}(x_{1,1}, \dots, x_{n,1})} dF(t_1, \dots, t_k) \geq 0,$$

$$\sum_{i_k=1}^{\eta_k} \dots \sum_{i_1=1}^{\eta_1} \int_{M_{k,i_k}(x_{1,1}, \dots, x_{n,1})}^{V_{k,i_k}(x_{1,1}, \dots, x_{n,1})} \dots \int_{M_{1,i_1}(x_{1,1}, \dots, x_{n,1})}^{V_{1,i_1}(x_{1,1}, \dots, x_{n,1})} dF(t_1, \dots, t_k) \geq 0,$$

$$\sum_{i_k=1}^{\eta_k} \dots \sum_{i_1=1}^{\eta_1} \int_{L_{k,i_k}(x_{1,2}, \dots, x_{n,2})}^{U_{k,i_k}(x_{1,2}, \dots, x_{n,2})} \dots \int_{L_{1,i_1}(x_{1,2}, \dots, x_{n,2})}^{U_{1,i_1}(x_{1,2}, \dots, x_{n,2})} dF(t_1, \dots, t_k) \geq 0 \text{ e}$$

$$\sum_{i_k=1}^{\eta_k} \dots \sum_{i_1=1}^{\eta_1} \int_{M_{k,i_k}(x_{1,2}, \dots, x_{n,2})}^{V_{k,i_k}(x_{1,2}, \dots, x_{n,2})} \dots \int_{M_{1,i_1}(x_{1,2}, \dots, x_{n,2})}^{V_{1,i_1}(x_{1,2}, \dots, x_{n,2})} dF(t_1, \dots, t_k) \geq 0.$$

Como por [c4.1], U e V são não negativas, temos que

$$\begin{aligned} H(x_{1,1}, \dots, x_{n,1}) &= U(x_{1,1}, \dots, x_{n,1}) \sum_{i_k=1}^{\eta_k} \dots \sum_{i_1=1}^{\eta_1} \int_{L_{k,i_k}(x_{1,1}, \dots, x_{n,1})}^{U_{k,i_k}(x_{1,1}, \dots, x_{n,1})} \dots \int_{L_{1,i_1}(x_{1,1}, \dots, x_{n,1})}^{U_{1,i_1}(x_{1,1}, \dots, x_{n,1})} dF(t_1, \dots, t_k) \\ &\quad - V(x_{1,1}, \dots, x_{n,1}) \sum_{i_k=1}^{\eta_k} \dots \sum_{i_1=1}^{\eta_1} \int_{M_{k,i_k}(x_{1,1}, \dots, x_{n,1})}^{V_{k,i_k}(x_{1,1}, \dots, x_{n,1})} \dots \int_{M_{1,i_1}(x_{1,1}, \dots, x_{n,1})}^{V_{1,i_1}(x_{1,1}, \dots, x_{n,1})} dF(t_1, \dots, t_k) \\ &\leq U(x_{1,2}, \dots, x_{n,2}) \sum_{i_k=1}^{\eta_k} \dots \sum_{i_1=1}^{\eta_1} \int_{L_{k,i_k}(x_{1,2}, \dots, x_{n,2})}^{U_{k,i_k}(x_{1,2}, \dots, x_{n,2})} \dots \int_{L_{1,i_1}(x_{1,2}, \dots, x_{n,2})}^{U_{1,i_1}(x_{1,2}, \dots, x_{n,2})} dF(t_1, \dots, t_k) \\ &\quad - V(x_{1,2}, \dots, x_{n,2}) \sum_{i_k=1}^{\eta_k} \dots \sum_{i_1=1}^{\eta_1} \int_{M_{k,i_k}(x_{1,2}, \dots, x_{n,2})}^{V_{k,i_k}(x_{1,2}, \dots, x_{n,2})} \dots \int_{M_{1,i_1}(x_{1,2}, \dots, x_{n,2})}^{V_{1,i_1}(x_{1,2}, \dots, x_{n,2})} dF(t_1, \dots, t_k) = H(x_{1,2}, \dots, x_{n,2}). \end{aligned}$$

$$(iv) \quad \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_{1,0}^+, \dots, x_{n,0}^+)} H(x_1, \dots, x_n) = H(x_{1,0}, \dots, x_{n,0}).$$

$$\begin{aligned} \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_{1,0}^+, \dots, x_{n,0}^+)} H(x_1, \dots, x_n) &= \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_{1,0}^+, \dots, x_{n,0}^+)} U(x_1, \dots, x_n) \\ &\quad - \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_{1,0}^+, \dots, x_{n,0}^+)} V(x_1, \dots, x_n) \\ &= \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_{1,0}^+, \dots, x_{n,0}^+)} \sum_{i_k=1}^{\eta_k} \dots \sum_{i_1=1}^{\eta_1} \int_{L_{k,i_k}(x_1, \dots, x_n)}^{U_{k,i_k}(x_1, \dots, x_n)} \dots \int_{L_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)}^{U_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)} dF(t_1, \dots, t_k) \\ &\quad - \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_{1,0}^+, \dots, x_{n,0}^+)} \sum_{i_k=1}^{\eta_k} \dots \sum_{i_1=1}^{\eta_1} \int_{M_{k,i_k}(x_1, \dots, x_n)}^{V_{k,i_k}(x_1, \dots, x_n)} \dots \int_{M_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)}^{V_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)} dF(t_1, \dots, t_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_{1,0}^+, \dots, x_{n,0}^+)} U(x_1, \dots, x_n) \\
&\sum_{i_k=1}^{\eta_k} \dots \sum_{i_1=1}^{\eta_1} \int_{\substack{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_{1,0}^+, \dots, x_{n,0}^+) \\ (x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_{1,0}^+, \dots, x_{n,0}^+)}}^{U_{k,i_k}(x_1, \dots, x_n)} \dots \int_{\substack{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_{1,0}^+, \dots, x_{n,0}^+) \\ (x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_{1,0}^+, \dots, x_{n,0}^+)}}^{U_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)} dF(t_1, \dots, t_k) \\
&- \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_{1,0}^+, \dots, x_{n,0}^+)} V(x_1, \dots, x_n) \\
&\sum_{i_k=1}^{\eta_k} \dots \sum_{i_1=1}^{\eta_1} \int_{\substack{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_{1,0}^+, \dots, x_{n,0}^+) \\ (x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_{1,0}^+, \dots, x_{n,0}^+)}}^{V_{k,i_k}(x_1, \dots, x_n)} \dots \int_{\substack{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_{1,0}^+, \dots, x_{n,0}^+) \\ (x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_{1,0}^+, \dots, x_{n,0}^+)}}^{V_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)} dF(t_1, \dots, t_k)
\end{aligned}$$

$$\text{Como } \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_{1,0}^+, \dots, x_{n,0}^+)} U(x_1, \dots, x_n) = U(x_{1,0}, \dots, x_{n,0}), \quad \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_{1,0}^+, \dots, x_{n,0}^+)} V(x_1, \dots, x_n) =$$

$$V(x_{1,0}, \dots, x_{n,0}), \quad \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_{1,0}^+, \dots, x_{n,0}^+)} U_{i,l}(x_1, \dots, x_n) = U_{i,l}(x_{1,0}, \dots, x_{n,0}),$$

$$\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_{1,0}^+, \dots, x_{n,0}^+)} L_{i,l}(x_1, \dots, x_n) = L_{i,l}(x_{1,0}, \dots, x_{n,0}), \quad \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_{1,0}^+, \dots, x_{n,0}^+)} V_{i,l}(x_1, \dots, x_n) =$$

$$V_{i,l}(x_{1,0}, \dots, x_{n,0}) \text{ e } \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_{1,0}^+, \dots, x_{n,0}^+)} M_{i,l}(x_1, \dots, x_n) = M_{i,l}(x_{1,0}, \dots, x_{n,0}) \text{ temos que:}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_{1,0}^+, \dots, x_{n,0}^+)} H(x_1, \dots, x_n) = U(x_{1,0}, \dots, x_{n,0}) \\
&\sum_{i_k=1}^{\eta_k} \dots \sum_{i_1=1}^{\eta_1} \int_{L_{k,i_k}(x_{1,0}, \dots, x_{n,0})}^{U_{k,i_k}(x_{1,0}, \dots, x_{n,0})} \dots \int_{L_{1,i_1}(x_{1,0}, \dots, x_{n,0})}^{U_{1,i_1}(x_{1,0}, \dots, x_{n,0})} dF(t_1, \dots, t_k) - \\
&V(x_{1,0}, \dots, x_{n,0}) \sum_{i_k=1}^{\eta_k} \dots \sum_{i_1=1}^{\eta_1} \int_{M_{k,i_k}(x_{1,0}, \dots, x_{n,0})}^{V_{k,i_k}(x_{1,0}, \dots, x_{n,0})} \dots \int_{M_{1,i_1}(x_{1,0}, \dots, x_{n,0})}^{V_{1,i_1}(x_{1,0}, \dots, x_{n,0})} dF(t_1, \dots, t_k).
\end{aligned}$$

As igualdades decorrem pelo fato de que  $U(x_1, \dots, x_n)$ ,  $V(x_1, \dots, x_n)$ ,  $U_{i,l}(x_1, \dots, x_n)$ ,  $M_{i,l}(x_1, \dots, x_n)$ ,  $L_{i,l}(x_1, \dots, x_n)$  e  $V_{i,l}(x_1, \dots, x_n)$  são contínuas à direita e por [c4.10].

Portanto,

$$\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_{1,0}^+, \dots, x_{n,0}^+)} H(x_1, \dots, x_n) = H(x_{1,0}, \dots, x_{n,0}).$$

$$(v) \Delta_{1,I_1} \dots \Delta_{n,I_n} H(x_1, \dots, x_n) \geq 0.$$

Como a composição dos operadores-diferença é linear pelo Lema 4.1, logo temos:

$$\begin{aligned}
\Delta_{1,I_1} \dots \Delta_{n,I_n} H(x_1, \dots, x_n) &= \Delta_{1,I_1} \dots \Delta_{n,I_n} U(x_1, \dots, x_n) \sum_{i_k=1}^{\eta_k} \dots \sum_{i_1=1}^{\eta_1} \int_{L_{k,i_k}(x_1, \dots, x_n)}^{U_{k,i_k}(x_1, \dots, x_n)} \dots \int_{L_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)}^{U_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)} dF(t_1, \dots, t_k) \\
&- \Delta_{1,I_1} \dots \Delta_{n,I_n} V(x_1, \dots, x_n) \sum_{i_k=1}^{\eta_k} \dots \sum_{i_1=1}^{\eta_1} \int_{M_{k,i_k}(x_1, \dots, x_n)}^{V_{k,i_k}(x_1, \dots, x_n)} \dots \int_{M_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)}^{V_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)} dF(t_1, \dots, t_k).
\end{aligned}$$



Como por [c4.11]  $\Delta_{1,I_1} \dots \Delta_{n,I_n} U(x_1, \dots, x_n) \sum_{i_k=1}^{\eta_k} \dots \sum_{i_1=1}^{\eta_1} \int_{L_{k,i_k}(x_1, \dots, x_n)}^{U_{k,i_k}(x_1, \dots, x_n)} \dots \int_{L_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)}^{U_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)} dF(t_1, \dots, t_k)$   
 $\geq \Delta_{1,I_1} \dots \Delta_{n,I_n} V(x_1, \dots, x_n) \sum_{i_k=1}^{\eta_k} \dots \sum_{i_1=1}^{\eta_1} \int_{M_{k,i_k}(x_1, \dots, x_n)}^{V_{k,i_k}(x_1, \dots, x_n)} \dots \int_{M_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)}^{V_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)} dF(t_1, \dots, t_k)$ , temos  
que

$$\Delta_{1,I_1} \dots \Delta_{n,I_n} H(x_1, \dots, x_n) \geq 0.$$

De (i), (ii), (iii), (iv) e (v), concluímos que  $H(x_1, \dots, x_n) =$

$$U(x_1, \dots, x_n) \sum_{i_k=1}^{\eta_k} \dots \sum_{i_1=1}^{\eta_1} \int_{L_{k,i_k}(x_1, \dots, x_n)}^{U_{k,i_k}(x_1, \dots, x_n)} \dots \int_{L_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)}^{U_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)} dF(t_1, \dots, t_k) -$$

$$V(x_1, \dots, x_n) \sum_{i_k=1}^{\eta_k} \dots \sum_{i_1=1}^{\eta_1} \int_{M_{k,i_k}(x_1, \dots, x_n)}^{V_{k,i_k}(x_1, \dots, x_n)} \dots \int_{M_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)}^{V_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)} dF(t_1, \dots, t_k)$$
 é uma distribuição

de probabilidade multivariada. ■

O Corolário 4.1.1 apresenta um método alternativo de gerar distribuições e classes de distribuições probabilísticas multivariadas.

**Corolário 4.1.1 (C4.1.1): Método complementar gerador de distribuições e classes de distribuições probabilísticas multivariadas.**

Sejam  $\varphi: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{U}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{W}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{U}_{j,s}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ,  $\mathcal{L}_{j,s}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ,  $\mathbb{M}_{j,s}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  e  $\mathbb{V}_{j,s}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , para  $j \in \{1, \dots, r\}$  e  $s \in \{1, \dots, n_j\}$ , funções multivariada monotônicas e contínuas à direita em cada uma de sua variáveis tais que:

[cc4.1]  $\varphi$  é uma fda e  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{W}$  são não negativas;

[cc4.2]  $\mathcal{U}(x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathcal{U}_{j,s}(x_1, \dots, x_n)$  e  $\mathbb{M}_{j,s}(x_1, \dots, x_n)$  são não decrescentes e

$\mathcal{W}(x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbb{V}_{j,s}(x_1, \dots, x_n)$  e  $\mathbb{L}_{j,s}(x_1, \dots, x_n)$  são não crescentes,  $\forall j \in \{1, \dots, r\}$  e  $\forall s \in \{1, \dots, n_j\}$ ;

[cc4.3] Para todo  $z \in \{1, \dots, n\}$ , se  $\lim_{x_z \rightarrow +\infty} \mathcal{W}(x_1, \dots, x_n) \neq \lim_{x_z \rightarrow +\infty} \mathcal{U}(x_1, \dots, x_n)$ , então

$$\lim_{x_z \rightarrow +\infty} \mathcal{U}(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ ou } \lim_{x_z \rightarrow +\infty} \mathbb{L}_{j,s}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{x_z \rightarrow +\infty} \mathcal{U}_{j,s}(x_1, \dots, x_n), \forall j \in \{1, \dots, r\} \text{ e}$$

$$\forall s \in \{1, \dots, n_j\}, \text{ e } \lim_{x_z \rightarrow +\infty} \mathcal{W}(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ ou } \lim_{x_z \rightarrow +\infty} \mathbb{M}_{j,s}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{x_z \rightarrow +\infty} \mathbb{V}_{j,s}(x_1, \dots, x_n),$$

$\forall j \in \{1, \dots, r\}$  e  $\forall s \in \{1, \dots, n_j\}$ ;

[cc4.4] Para todo  $z \in \{1, \dots, n\}$ , se  $\lim_{x_z \rightarrow +\infty} \mathcal{W}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{x_z \rightarrow +\infty} \mathcal{U}(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ , então

$$\lim_{x_z \rightarrow +\infty} \mathbb{U}_{j,s}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{x_z \rightarrow +\infty} \mathbb{V}_{j,s}(x_1, \dots, x_n) \text{ e } \lim_{x_z \rightarrow +\infty} \mathbb{M}_{j,s}(x_1, \dots, x_n) = \\ \lim_{x_z \rightarrow +\infty} \mathbb{L}_{j,s}(x_1, \dots, x_n), \forall j \in \{1, \dots, r\} \text{ e } \forall s \in \{1, \dots, n_j\};$$

[cc4.5]  $\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} \mathbb{M}_{j,s}(x_1, \dots, x_n) \leq \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} \mathbb{V}_{j,s}(x_1, \dots, x_n)$  e se

$$\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} \mathcal{U}(x_1, \dots, x_n) \neq 0, \text{ então } \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (-\infty, \dots, -\infty)} \mathbb{L}_{j,s}(x_1, \dots, x_n) \leq$$

$$\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (-\infty, \dots, -\infty)} \mathbb{U}_{j,s}(x_1, \dots, x_n), \forall j \in \{1, \dots, r\} \text{ e } \forall s \in \{1, \dots, n_j\};$$

[cc4.6]  $\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (-\infty, \dots, -\infty)} \mathbb{V}_{j,n_j}(x_1, \dots, x_n) \geq \sup\{t \in \mathbb{R}: (t_1, \dots, t_{j-1}, t, t_{j+1}, \dots, t_r) \in S_\varphi\}$  e

$$\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (-\infty, \dots, -\infty)} \mathbb{L}_{j,1}(x_1, \dots, x_n) \leq \inf\{t \in \mathbb{R}: (t_1, \dots, t_{j-1}, t, t_{j+1}, \dots, t_r) \in S_\varphi\}, \forall j \in$$

$\{1, \dots, r\}$  para  $n_j \geq 1$ ;

[cc4.7]  $\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (-\infty, \dots, -\infty)} \mathcal{W}(x_1, \dots, x_n) = 1$ ;

[cc4.8]  $\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (-\infty, \dots, -\infty)} \mathcal{U}(x_1, \dots, x_n) = 0$  ou  $\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (-\infty, \dots, -\infty)} \mathbb{U}_{j,s}(x_1, \dots, x_n) =$

$$\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (-\infty, \dots, -\infty)} \mathbb{L}_{j,s}(x_1, \dots, x_n), \forall j \in \{1, \dots, r\} \text{ e } \forall s \in \{1, \dots, n_j\} \text{ para } n_j \geq 1$$

[cc4.9]  $\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} \mathbb{V}_{j,s}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} \mathbb{M}_{j,s+1}(x_1, \dots, x_n), \forall j \in$

$\{1, \dots, r\}$  e  $\forall s = 1, 2, 3, \dots, n_j - 1$  para  $n_j \geq 2$ ;

[cc4.10]  $\varphi$  é uma *fda* sem pontos de descontinuidade ou todas as funções

$\mathbb{V}_{j,s_j}(x_1, \dots, x_n)$  e  $\mathbb{L}_{j,s_j}(x_1, \dots, x_n)$  são constantes à direita na vizinhança dos pontos

cujas imagens são pontos de descontinuidades de  $\varphi$ , sendo também contínuas em

tais pontos e  $\varphi$  não possui pontos de descontinuidade no conjunto

$$\left\{ \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (\pm\infty, \dots, \pm\infty)} \mathbb{U}_{j,s_j}(x_1, \dots, x_n), \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (\pm\infty, \dots, \pm\infty)} \mathbb{L}_{j,s_j}(x_1, \dots, x_n), \right.$$

$$\left. \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (\pm\infty, \dots, \pm\infty)} \mathbb{M}_{j,s_j}(x_1, \dots, x_n), \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (\pm\infty, \dots, \pm\infty)} \mathbb{V}_{j,s_j}(x_1, \dots, x_n), \text{ para algum, } i_j = \right.$$

$$1, 2, \dots, n_j, \text{ com } j = 1, 2, \dots, r \} \cup \left\{ \lim_{x_z \rightarrow \pm\infty} \mathbb{U}_{j,s_j}(x_1, \dots, x_z, \dots, x_n) : z \in \{1, \dots, n\} \right\} \cup$$

$$\left\{ \lim_{x_z \rightarrow \pm\infty} \mathbb{L}_{j,s_j}(x_1, \dots, x_z, \dots, x_n) : z \in \{1, \dots, n\} \right\} \cup \left\{ \lim_{x_z \rightarrow \pm\infty} \mathbb{M}_{j,s_j}(x_1, \dots, x_z, \dots, x_n) : z \in \right.$$

$$\left. \{1, \dots, n\} \right\} \cup \left\{ \lim_{x_z \rightarrow \pm\infty} \mathbb{V}_{j,s_j}(x_1, \dots, x_z, \dots, x_n) : z \in \{1, \dots, n\} \right\};$$

[cc4.11]  $\Delta_{1,I_1} \dots \Delta_{n,I_n} \mathcal{U}(x_1, \dots, x_n) \sum_{i_r=1}^{n_r} \dots \sum_{i_1=1}^{n_1} \int_{\mathbb{L}_{r,i_r}(x_1, \dots, x_n)}^{\mathbb{U}_{r,i_r}(x_1, \dots, x_n)} \dots \int_{\mathbb{L}_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)}^{\mathbb{U}_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)} d\varphi(t_1, \dots, t_r) \geq$

$$\Delta_{1,I_1} \dots \Delta_{n,I_n} \mathcal{W}(x_1, \dots, x_n) \sum_{i_r=1}^{n_r} \dots \sum_{i_1=1}^{n_1} \int_{\mathbb{M}_{r,i_r}(x_1, \dots, x_n)}^{\mathbb{V}_{r,i_r}(x_1, \dots, x_n)} \dots \int_{\mathbb{M}_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)}^{\mathbb{V}_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)} d\varphi(t_1, \dots, t_r).$$

Então  $H(x_1, \dots, x_n) = 1 - \mathcal{W}(x_1, \dots, x_n) \sum_{i_r=1}^{n_r} \dots \sum_{i_1=1}^{n_1} \int_{\mathbb{M}_{r,i_r}(x_1, \dots, x_n)}^{\mathbb{V}_{r,i_r}(x_1, \dots, x_n)} \dots \int_{\mathbb{M}_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)}^{\mathbb{V}_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)} d\varphi(t_1, \dots, t_r)$   
 $+ \mathcal{U}(x_1, \dots, x_n) \sum_{i_r=1}^{n_r} \dots \sum_{i_1=1}^{n_1} \int_{\mathbb{L}_{r,i_r}(x_1, \dots, x_n)}^{\mathbb{U}_{r,i_r}(x_1, \dots, x_n)} \dots \int_{\mathbb{L}_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)}^{\mathbb{U}_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)} d\varphi(t_1, \dots, t_r)$  é uma *fda* multivariada.

### Demonstração:

No Teorema 4.1, considere  $\eta_1 = 1$ ,  $k = 1$ ,  $U_{1,1}(x_1, \dots, x_n) = 1$ ,  $U(x_1, \dots, x_n) = 1$ ,

$$L_{1,1}(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{W}(x_1, \dots, x_n) \sum_{i_r=1}^{n_r} \dots \sum_{i_1=1}^{n_1} \int_{\mathbb{M}_{r,i_r}(x_1, \dots, x_n)}^{\mathbb{V}_{r,i_r}(x_1, \dots, x_n)} \dots \int_{\mathbb{M}_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)}^{\mathbb{V}_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)} d\varphi(t_1, \dots, t_r) -$$

$$\mathcal{U}(x_1, \dots, x_n) \sum_{i_r=1}^{n_r} \dots \sum_{i_1=1}^{n_1} \int_{\mathbb{L}_{r,i_r}(x_1, \dots, x_n)}^{\mathbb{U}_{r,i_r}(x_1, \dots, x_n)} \dots \int_{\mathbb{L}_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)}^{\mathbb{U}_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)} d\varphi(t_1, \dots, t_r) \text{ e } V(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

$\forall(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  e  $F$  a *fda* da uniforme  $[0,1]$ . Note que  $U_{1,1}(x_1, \dots, x_n)$  e

$L_{1,1}(x_1, \dots, x_n)$  satisfazem as hipóteses do Teorema 4.1, pois:  $L_{1,1}(x_1, \dots, x_n) =$

$$\mathcal{W}(x_1, \dots, x_n) \sum_{i_r=1}^{n_r} \dots \sum_{i_1=1}^{n_1} \int_{\mathbb{M}_{r,i_r}(x_1, \dots, x_n)}^{\mathbb{V}_{r,i_r}(x_1, \dots, x_n)} \dots \int_{\mathbb{M}_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)}^{\mathbb{V}_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)} d\varphi(t_1, \dots, t_r) -$$

$$\mathcal{U}(x_1, \dots, x_n) \sum_{i_r=1}^{n_r} \dots \sum_{i_1=1}^{n_1} \int_{\mathbb{L}_{r,i_r}(x_1, \dots, x_n)}^{\mathbb{U}_{r,i_r}(x_1, \dots, x_n)} \dots \int_{\mathbb{L}_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)}^{\mathbb{U}_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)} d\varphi(t_1, \dots, t_r) \text{ devido às condições}$$

[cc4.1], [cc4.2] e [cc4.5] é não crescente,  $U_{1,1}(x_1, \dots, x_n) = 1$  e  $U(x_1, \dots, x_n) = 1$  são

não decrescentes satisfazendo as condições [c4.2] e [c4.5]. Condições [cc4.3] e

[cc4.4] garantem que:  $\sup\{t \in \mathbb{R}: t \in S_F\} = 1 = \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (-\infty, \dots, -\infty)} U_{1,1}(x_1, \dots, x_n) =$

$$\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (-\infty, \dots, -\infty)} L_{1,1}(x_1, \dots, x_n), \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} L_{1,1}(x_1, \dots, x_n) = 0 = \inf\{t \in \mathbb{R}: t \in$$

$S_F\}$ , e ambas são contínuas à direita e  $F$  é uma *fda* sem pontos de

descontinuidade.

Além disso, por [cc4.11],  $\Delta_{1,l_1} \dots \Delta_{n,l_n} H(x_1, \dots, x_n) =$

$$-\Delta_{1,l_1} \dots \Delta_{n,l_n} \mathcal{W}(x_1, \dots, x_n) \sum_{i_r=1}^{n_r} \dots \sum_{i_1=1}^{n_1} \int_{\mathbb{M}_{r,i_r}(x_1, \dots, x_n)}^{\mathbb{V}_{r,i_r}(x_1, \dots, x_n)} \dots \int_{\mathbb{M}_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)}^{\mathbb{V}_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)} d\varphi(t_1, \dots, t_r)$$

$$+\Delta_{1,l_1} \dots \Delta_{n,l_n} \mathcal{U}(x_1, \dots, x_n) \sum_{i_r=1}^{n_r} \dots \sum_{i_1=1}^{n_1} \int_{\mathbb{L}_{r,i_r}(x_1, \dots, x_n)}^{\mathbb{U}_{r,i_r}(x_1, \dots, x_n)} \dots \int_{\mathbb{L}_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)}^{\mathbb{U}_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)} d\varphi(t_1, \dots, t_r) \geq 0.$$

Logo, todas as condições do Teorema 4.1 estão satisfeitos e temos que:

$$H(x_1, \dots, x_n) = \int_{L_{1,1}(x_1, \dots, x_n)}^{U_{1,1}(x_1, \dots, x_n)} 1 dy$$

$$H(x_1, \dots, x_n) = 1 - \mathcal{W}(x_1, \dots, x_n) \sum_{i_r=1}^{n_r} \dots \sum_{i_1=1}^{n_1} \int_{\mathbb{M}_{r,i_r}(x_1, \dots, x_n)}^{\mathbb{V}_{r,i_r}(x_1, \dots, x_n)} \dots \int_{\mathbb{M}_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)}^{\mathbb{V}_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)} d\varphi(t_1, \dots, t_r)$$

$$+\mathcal{U}(x_1, \dots, x_n) \sum_{i_r=1}^{n_r} \dots \sum_{i_1=1}^{n_1} \int_{\mathbb{L}_{r,i_r}(x_1, \dots, x_n)}^{\mathbb{U}_{r,i_r}(x_1, \dots, x_n)} \dots \int_{\mathbb{L}_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)}^{\mathbb{U}_{1,i_1}(x_1, \dots, x_n)} d\varphi(t_1, \dots, t_r)$$

é uma distribuição de probabilidade multivariada. ■

O próximo corolário mostra que a normalização de qualquer função multivariada monotônica não constante gera uma distribuição de probabilidade multivariada.

**Corolário 4.1.2 (C4.1.2): Normalização de funções multivariadas monotônicas não constantes**

Seja  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função multivariada monotônica não constante, contínua à direita em cada uma de suas variáveis e com conjunto imagem limitado. Se  $\Delta_{1,I_1} \dots \Delta_{n,I_n} h(x_1, \dots, x_n) \geq 0$  para  $h(x_1, \dots, x_n)$  não decrescente e  $\Delta_{1,I_1} \dots \Delta_{n,I_n} h(x_1, \dots, x_n) \leq 0$  para  $h(x_1, \dots, x_n)$  não crescente, então

$$H(x_1, \dots, x_n) = \frac{h(x_1, \dots, x_n) - \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (-\infty, \dots, -\infty)} h(x_1, \dots, x_n)}{\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} h(x_1, \dots, x_n) - \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (-\infty, \dots, -\infty)} h(x_1, \dots, x_n)}$$

é uma *fda* multivariada.

**Demonstração:**

No Teorema 4.1, considere  $\eta_1 = 1$ ,  $r = 1$ ,  $L_{1,1}(x_1, \dots, x_n) = 0$ ,  $U(x_1, \dots, x_n) = 1$ ,

$$U_{1,1}(x_1, \dots, x_n) = \frac{h(x_1, \dots, x_n) - \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (-\infty, \dots, -\infty)} h(x_1, \dots, x_n)}{\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} h(x_1, \dots, x_n) - \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (-\infty, \dots, -\infty)} h(x_1, \dots, x_n)} \text{ e } V(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , e  $F$  a *fda* da uniforme  $[0,1]$ . Note que  $U(x_1, \dots, x_n) = 1$ ,

$V(x_1, \dots, x_n) = 0$ ,  $U_{1,1}(x_1, \dots, x_n)$  e  $L_{1,1}(x_1, \dots, x_n) = 0$  satisfazem as hipóteses do

Teorema 4.1, pois:  $U_{1,1}(x_1, \dots, x_n)$  e  $U(x_1, \dots, x_n) = 1$  são não decrescentes e

$L_{1,1}(x_1, \dots, x_n) = 0$  e  $V(x_1, \dots, x_n) = 0$  são não crescentes, com

$$\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (-\infty, \dots, -\infty)} U_{1,1}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (-\infty, \dots, -\infty)} L_{1,1}(x_1, \dots, x_n),$$

$$\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} U_{1,1}(x_1, \dots, x_n) \geq \sup\{t \in \mathbb{R}: t \in S_F\} = 1,$$

$$\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} L_{1,1}(x_1, \dots, x_n) \leq \inf\{t \in \mathbb{R}: t \in S_F\} = 0, \text{ sendo todas funções}$$

contínuas à direita e  $F$  uma *fda* sem pontos de descontinuidades. Além disso,

$$\Delta_{1,I_1} \dots \Delta_{n,I_n} H(x_1, \dots, x_n) = \frac{\Delta_{1,I_1} \dots \Delta_{n,I_n} h(x_1, \dots, x_n)}{\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} h(x_1, \dots, x_n) - \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (-\infty, \dots, -\infty)} h(x_1, \dots, x_n)} \geq 0.$$

Logo, todas as condições do Teorema 4.1 estão satisfeitos e temos que:

$$H(x_1, \dots, x_n) = \int_{L_{1,1}(x_1, \dots, x_n)}^{U_{1,1}(x_1, \dots, x_n)} dt$$

$$H(x_1, \dots, x_n) = \frac{h(x_1, \dots, x_n) - \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (-\infty, \dots, -\infty)} h(x_1, \dots, x_n)}{\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} h(x_1, \dots, x_n) - \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (-\infty, \dots, -\infty)} h(x_1, \dots, x_n)}.$$

■

O próximo corolário mostra outra alternativa para obter distribuições de probabilidade multivariadas normalizando diferença de funções multivariadas monotônicas.

**Corolário 4.1.3 (C4.1.3): Normalização de diferenças de funções multivariadas monotônicas**

Sejam  $h_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $h_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funções multivariadas contínuas à direita e limitadas, monotônicas não decrescente e não crescente, respectivamente. Se

$$\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (-\infty, \dots, -\infty)} h_1(x_1, \dots, x_n) = \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (-\infty, \dots, -\infty)} h_2(x_1, \dots, x_n),$$

$$\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} h_1(x_1, \dots, x_n) \neq \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} h_2(x_1, \dots, x_n) \text{ e}$$

$\Delta_{1, I_1} \dots \Delta_{n, I_n} h_1(x_1, \dots, x_n) \geq \Delta_{1, I_1} \dots \Delta_{n, I_n} h_2(x_1, \dots, x_n)$ , então

$$H(x) = \frac{h_1(x_1, \dots, x_n) - h_2(x_1, \dots, x_n)}{\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} (h_1(x_1, \dots, x_n) - h_2(x_1, \dots, x_n))}$$

é uma função distribuição de probabilidade multivariada.

**Demonstração:**

Faça  $h(x_1, \dots, x_n) = h_1(x_1, \dots, x_n) - h_2(x_1, \dots, x_n)$ , no Corolário 4.1.2. ■

O próximo corolário traz outra alternativa para obter distribuições de probabilidades multivariadas normalizando diferença de funções multivariadas monotônicas.

**Corolário 4.1.4 (C4.1.4): Normalização complementares de diferenças de funções monotônicas multivariadas**

Sejam  $h_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $h_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funções multivariadas contínuas à direita e limitadas, monotônicas não decrescente e não crescente respectivamente, com conjuntos imagens limitadas. Se  $\Delta_{1,I_1} \dots \Delta_{n,I_n} h_1(x_1, \dots, x_n) \geq \Delta_{1,I_1} \dots \Delta_{n,I_n} h_2(x_1, \dots, x_n)$ ,

$$\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} h_1(x_1, \dots, x_n) = \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} h_2(x_1, \dots, x_n) \text{ e}$$

$$\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (-\infty, \dots, -\infty)} h_1(x_1, \dots, x_n) \neq \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (-\infty, \dots, -\infty)} h_2(x_1, \dots, x_n), \text{ então}$$

$H(x_1, \dots, x_n) = 1 - \frac{h_2(x_1, \dots, x_n) - h_1(x_1, \dots, x_n)}{\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (-\infty, \dots, -\infty)} (h_2(x_1, \dots, x_n) - h_1(x_1, \dots, x_n))}$  é uma função distribuição de probabilidade.

**Demonstração:**

Faça  $h(x_1, \dots, x_n) = h_1(x_1, \dots, x_n) - h_2(x_1, \dots, x_n) + \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (-\infty, \dots, -\infty)} (h_2(x_1, \dots, x_n) - h_1(x_1, \dots, x_n))$ , no Corolário 4.1.2. ■

Na próxima Seção, vamos ver alguns corolários do Teorema 4.1, em que as funções monotônicas multivariadas  $U(x_1, \dots, x_n)$ ,  $V(x_1, \dots, x_n)$ ,  $U_{i,l}(x_1, \dots, x_n)$ ,  $L_{i,l}(x_1, \dots, x_n)$ ,  $M_{i,l}(x_1, \dots, x_n)$  e  $V_{i,l}(x_1, \dots, x_n)$  serão composições de funções de distribuições multivariadas conhecidas.

**4.4 Funções monotônicas envolvendo distribuições de probabilidades multivariadas.**

Nesta seção, apresentamos métodos geradores de classes de distribuições probabilísticas multivariados a partir de funções monotônicas.

Formalmente, considere  $\mathcal{U}: [0,1]^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{V}: [0,1]^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mu_{i,l}: [0,1]^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ,  $\ell_{i,l}: [0,1]^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ,  $\nu_{i,l}: [0,1]^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  e  $m_{i,l}: [0,1]^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  funções multivariadas monotônicas e contínuas à direita em cada uma de suas variáveis. A ideia desta técnica é fazer com que  $U(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{U}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)$ ,  $V(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{V}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)$ ,  $U_{i,l}(x_1, \dots, x_n) = \mu_{i,l}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)$ ,  $L_{i,l}(x_1, \dots, x_n) = \ell_{i,l}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)$ ,  $M_{i,l}(x_1, \dots, x_n) = m_{i,l}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)$  e  $V_{i,l}(x_1, \dots, x_n) = \nu_{i,l}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)$ .

Utilizaremos a abreviação  $(.) (\vec{x}) = (.) (x_1, \dots, x_n) = (G_1, \dots, G_m) (x_1, \dots, x_n) = (G_1(x_1, \dots, x_n), \dots, G_m(x_1, \dots, x_n))$  para representa o vetor formado por  $m$  distribuições multivariadas, calculadas no mesmo ponto  $(x_1, \dots, x_n)$  do domínio.

O Corolário 4.1.5 mostra que condições  $\mathcal{U}$ ,  $\vartheta$ ,  $\mu_{i,l}$ ,  $\ell_{i,l}$ ,  $\nu_{i,l}$  e  $m_{i,l}$  devem satisfazer para que  $U(x)$ ,  $V(x)$ ,  $U_{i,l}$ ,  $L_{i,l}$ ,  $V_{i,l}$  e  $M_{i,l}$  satisfaçam as hipóteses do Teorema 4.1 e possamos obter classes de distribuições probabilísticas multivariadas.

**Corolário 4.1.5 (C4.1.5): Método gerador de classes de distribuições probabilísticas multivariadas.**

Sejam  $F: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{U}: [0,1]^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\vartheta: [0,1]^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mu_{i,l}: [0,1]^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ,

$\ell_{i,l}: [0,1]^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ,  $m_{i,l}: [0,1]^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  e  $\nu_{i,l}: [0,1]^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, k\}$  e  $\forall l \in \{1, \dots, \eta_i\}$ , funções monotônicas e contínuas a direita tais que:

[d4.1]  $F$  é uma *fda* e  $\mathcal{U}$  e  $\vartheta$  são não negativas;

[d4.2]  $\mathcal{U}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mu_{i,l}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)$  e  $m_{i,l}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)$  são não decrescentes e  $\vartheta(\cdot)(x_1, \dots, x_n)$ ,  $\ell_{i,l}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)$  e  $\nu_{i,l}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)$  são não crescentes,  $\forall i \in \{1, \dots, k\}$  e  $\forall l \in \{1, \dots, \eta_i\}$ , em cada uma das suas variáveis;

[d4.3] Para todo  $s \in \{1, \dots, n\}$ , se  $\lim_{x_s \rightarrow -\infty} \mathcal{U}(\cdot)(x_1, \dots, x_n) \neq \lim_{x_s \rightarrow -\infty} \vartheta(\cdot)(x_1, \dots, x_n)$ , então

$\lim_{x_s \rightarrow -\infty} \mathcal{U}(\cdot)(x_1, \dots, x_n) = 0$  ou  $\lim_{x_s \rightarrow -\infty} \mu_{i,l}(\cdot)(x_1, \dots, x_n) = \lim_{x_s \rightarrow -\infty} \ell_{i,l}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)$ ,  $\forall i \in$

$\{1, \dots, k\}$  e  $\forall l \in \{1, \dots, \eta_i\}$ , e  $\lim_{x_s \rightarrow -\infty} \vartheta(\cdot)(x_1, \dots, x_n) = 0$  ou  $\lim_{x_s \rightarrow -\infty} m_{i,l}(\cdot)(x_1, \dots, x_n) =$

$\lim_{x_s \rightarrow -\infty} \nu_{i,l}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, k\}$  e  $\forall l \in \{1, \dots, \eta_i\}$ ;

[d4.4] Para todo  $s \in \{1, \dots, n\}$ , se  $\lim_{x_s \rightarrow -\infty} \mathcal{U}(\cdot)(x_1, \dots, x_n) = \lim_{x_s \rightarrow -\infty} \vartheta(\cdot)(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ ,

então  $\lim_{x_s \rightarrow -\infty} \mu_{i,l}(\cdot)(x_1, \dots, x_n) = \lim_{x_s \rightarrow -\infty} \nu_{i,l}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, k\}$  e  $\forall l \in$

$\{1, \dots, \eta_i\}$ , e  $\lim_{x_s \rightarrow -\infty} m_{i,l}(\cdot)(x_1, \dots, x_n) = \lim_{x_s \rightarrow -\infty} \ell_{i,l}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, k\}$  e  $\forall l \in$

$\{1, \dots, \eta_i\}$ ;

[d4.5]  $\ell_{i,l}(0, \dots, 0) \leq \mu_{i,l}(0, \dots, 0)$  e se  $\vartheta(0, \dots, 0) \neq 0$ , então  $m_{i,l}(1, \dots, 1) \leq$

$\nu_{i,l}(1, \dots, 1)$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, k\}$  e  $\forall l \in \{1, \dots, \eta_i\}$ ;

[d4.6]  $\mu_{i,\eta_i}(1, \dots, 1) \geq \sup\{t \in \mathbb{R}: t \in \mathbb{R}: (t_1, \dots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \dots, t_k) \in S_F\}$  e  $\ell_{i,1}(1, \dots, 1) \leq$

$\inf\{t \in \mathbb{R}: (t_1, \dots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \dots, t_k) \in S_F\}$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, k\}$  para  $\eta_i \geq 1$ ;

$$[d4.7] \mathcal{U}(1, \dots, 1) = 1;$$

$$[d4.8] \vartheta(1, \dots, 1) = 0 \text{ ou } m_{i,l}(1, \dots, 1) = v_{i,l}(1, \dots, 1), \forall i \in \{1, \dots, k\} \text{ e } \forall l \in \{1, \dots, \eta_i\},$$

para  $\eta_i \geq 1$ ;

$$[d4.9] \mu_{i,l}(1, \dots, 1) = \ell_{i,l+1}(1, \dots, 1), \forall i \in \{1, \dots, k\} \text{ e } \forall l = 1, 2, 3, \dots, \eta_i - 1, \text{ para } \eta_i \geq 2;$$

[d4.10]  $F$  é uma *fda* sem pontos de descontinuidade ou todas as funções

$\ell_{i,l}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)$  e  $v_{i,l}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)$  são constantes à direita na vizinhança dos pontos cujas imagens são pontos de descontinuidades de  $F$ , sendo também contínuas em tais pontos e  $F$  não possuir pontos de descontinuidade no conjunto

$$\{\mu_{i,l}(0, \dots, 0), \mu_{i,l}(1, \dots, 1), \ell_{i,l}(0, \dots, 0), \ell_{i,l}(1, \dots, 1), m_{i,l}(0, \dots, 0), m_{i,l}(1, \dots, 1), v_{i,l}(0, \dots, 0), v_{i,l}(1, \dots, 1), \text{ para algum } l = 1, 2, \dots, \eta_i, \text{ com } i = 1, 2, \dots, k\} \cup$$

$$\left\{ \lim_{x_s \rightarrow -\infty} \mu_{i,l}(\cdot)(x_1, \dots, x_n) : s \in \{1, \dots, n\} \right\} \cup \left\{ \lim_{x_s \rightarrow -\infty} \ell_{i,l}(\cdot)(x_1, \dots, x_n) : s \in \{1, \dots, n\} \right\} \cup$$

$$\left\{ \lim_{x_s \rightarrow -\infty} m_{i,l}(\cdot)(x_1, \dots, x_n) : s \in \{1, \dots, n\} \right\} \cup \left\{ \lim_{x_s \rightarrow -\infty} v_{i,l}(\cdot)(x_1, \dots, x_n) : s \in \{1, \dots, n\} \right\};$$

$$[d4.11] \Delta_{1,l_1} \dots \Delta_{n,l_n} \mathcal{U}(\cdot)(\vec{x}) \sum_{i_k=1}^{\eta_k} \dots \sum_{i_1=1}^{\eta_1} \int_{\ell_{k,i_k}(\cdot)(\vec{x})}^{\mu_{k,i_k}(\cdot)(\vec{x})} \dots \int_{\ell_{1,i_1}(\cdot)(\vec{x})}^{\mu_{1,i_1}(\cdot)(\vec{x})} dF(t_1, \dots, t_k) \geq$$

$$\Delta_{1,l_1} \dots \Delta_{n,l_n} \vartheta(\cdot)(\vec{x}) \sum_{i_k=1}^{\eta_k} \dots \sum_{i_1=1}^{\eta_1} \int_{m_{k,i_k}(\cdot)(\vec{x})}^{v_{k,i_k}(\cdot)(\vec{x})} \dots \int_{m_{1,i_1}(\cdot)(\vec{x})}^{v_{1,i_1}(\cdot)(\vec{x})} dF(t_1, \dots, t_k).$$

$$\text{Então } H_{G_1, \dots, G_m}(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{U}(\cdot)(\vec{x}) \sum_{i_k=1}^{\eta_k} \dots \sum_{i_1=1}^{\eta_1} \int_{\ell_{k,i_k}(\cdot)(\vec{x})}^{\mu_{k,i_k}(\cdot)(\vec{x})} \dots \int_{\ell_{1,i_1}(\cdot)(\vec{x})}^{\mu_{1,i_1}(\cdot)(\vec{x})} dF(t_1, \dots, t_k)$$

$-\vartheta(\cdot)(\vec{x}) \sum_{i_k=1}^{\eta_k} \dots \sum_{i_1=1}^{\eta_1} \int_{m_{k,i_k}(\cdot)(\vec{x})}^{v_{k,i_k}(\cdot)(\vec{x})} \dots \int_{m_{1,i_1}(\cdot)(\vec{x})}^{v_{1,i_1}(\cdot)(\vec{x})} dF(t_1, \dots, t_k)$  é um funcional gerador de classes de distribuições probabilísticas multivariadas, onde  $(\cdot)(\vec{x}) = (\cdot)(x_1, \dots, x_n)$ .

### **Demonstração:**

No Teorema 4.1, faça  $U(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{U}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)$ ,  $V(x_1, \dots, x_n) = \vartheta(\cdot)(x_1, \dots, x_n)$ ,  $U_{i,l}(x_1, \dots, x_n) = \mu_{i,l}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)$ ,  $L_{i,l}(x_1, \dots, x_n) = \ell_{i,l}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)$ ,  $M_{i,l}(x_1, \dots, x_n) = m_{i,l}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)$  e  $V(x_1, \dots, x_n) = v_{i,l}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)$ , e note que a condição [d4. j] implica a condição [c4. j] do Teorema 4.1 para  $j = 1, 2, \dots, 11$ . ■

Vejamos um caso especial do Corolário 4.1.5, que de fato é um funcional construtor de classes de distribuições probabilísticas que podem ser mais facilmente utilizado.



**1º Caso especial do Corolário 4.1.5 (1C4.1.5): Método construtor de classes de distribuições probabilísticas multivariadas que podem ser mais facilmente utilizados.**

Sejam  $u_z: [0,1]^m \rightarrow [0,1]$  e  $v_z: [0,1]^m \rightarrow [0,1]$  funções monotônicas e contínuas à direita tais que  $u_i$  são não decrescentes  $v_i$  são não crescentes em cada uma das suas variáveis, com  $u_z(0, \dots, 0) = 0$ ,  $u_z(1, \dots, 1) = 1$ ,  $v_z(0, \dots, 0) = 1$  e  $v_z(1, \dots, 1) = 0$  para todo  $z = 1, \dots, m$ . Se no Corolário 4.1.5,  $\mathcal{U}(\cdot)(\vec{x}) = \prod_{z=1}^m ((1 - \theta_z)u_z(\cdot)(\vec{x}) + \theta_z)^{\alpha_z}$  e  $\mathcal{V}(\cdot)(\vec{x}) = \prod_{z=1}^m (\theta_z v_z(\cdot)(\vec{x}))^{\alpha_z}$ , com  $\alpha_z \geq 0$  e  $0 \leq \theta_z \leq 1$ , então  $H_{G_1, \dots, G_m}(\vec{x}) = \prod_{z=1}^m ((1 - \theta_z)u_z(\cdot)(\vec{x}) + \theta_z)^{\alpha_z} \sum_{i_r=1}^{\eta_r} \dots \sum_{i_1=1}^{\eta_1} \int_{\ell_{r,i_r}(\cdot)(\vec{x})}^{\mu_{r,i_r}(\cdot)(\vec{x})} \dots \int_{\ell_{1,i_1}(\cdot)(\vec{x})}^{\mu_{1,i_1}(\cdot)(\vec{x})} dF(t_1, \dots, t_k) - \prod_{z=1}^m (\theta_z v_z(\cdot)(\vec{x}))^{\alpha_z} \sum_{i_r=1}^{\eta_r} \dots \sum_{i_1=1}^{\eta_1} \int_{m_{r,i_r}(\cdot)(\vec{x})}^{v_{r,i_r}(\cdot)(\vec{x})} \dots \int_{m_{1,i_1}(\cdot)(\vec{x})}^{v_{1,i_1}(\cdot)(\vec{x})} dF(t_1, \dots, t_k)$  é um funcional gerador de classes de distribuições de probabilidades, onde  $(\cdot)(\vec{x}) = (\cdot)(x_1, \dots, x_n) = (G_1, \dots, G_m)(x_1, \dots, x_n) = (G_1(x_1, \dots, x_n), \dots, G_m(x_1, \dots, x_n))$ .

A seguir, a Tabela 4.3.1 mostra a obtenção de alguns funcionais especiais construtores de classes de distribuições probabilísticas multivariada do funcional  $H_{G_1, \dots, G_m}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{z=1}^m ((1 - \theta_z)u_z(\cdot)(x_1, \dots, x_n) + \theta_z)^{\alpha_z} \sum_{i_k=1}^{\eta_k} \dots \sum_{i_1=1}^{\eta_1} \int_{\ell_{k,i_k}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)}^{\mu_{k,i_k}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)} \dots \int_{\ell_{1,i_1}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)}^{\mu_{1,i_1}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)} dF(t_1, \dots, t_k) - \prod_{z=1}^m (\theta_z v_z(\cdot)(x_1, \dots, x_n))^{\alpha_z} \sum_{i_k=1}^{\eta_k} \dots \sum_{i_1=1}^{\eta_1} \int_{m_{k,i_k}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)}^{v_{k,i_k}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)} \dots \int_{m_{1,i_1}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)}^{v_{1,i_1}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)} dF(t_1, \dots, t_k)$ , que podem ser mais facilmente utilizados nas gerações de classes de distribuições, onde  $(\cdot)(\vec{x}) = (\cdot)(x_1, \dots, x_n) = (G_1, \dots, G_m)(x_1, \dots, x_n) = (G_1(x_1, \dots, x_n), \dots, G_m(x_1, \dots, x_n))$ . Considere nas expressões de **13S1C4.1.5 a 18S1C4.1.5**, as seguintes funções monotônicas  $\mu^i: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ,  $\ell^i: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ,  $v^i: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  e  $m^i: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , tais que  $\mu^i$  e  $m^i$  são não decrescentes e contínuas à direita para  $i = 1, 2, \dots, k$ , e  $v^i$  e  $\ell^i$  são não crescentes e contínuas à direita para  $i = 1, 2, \dots, k$ .

Tabela 4.3.1 – Alguns funcionais construtores de classes de distribuições probabilísticas obtidos a partir do **1C4.1.5**.

Sub-casos do <b>1C4.1.5</b>	Condições especiais sobre as funções monotônicas	Funcionais construtores obtidos
<b>1S1C4.1.5</b>	$m = 1, \alpha_1 = 0$ e $v_{i,l}(1, \dots, 1) = m_{i,l}(1, \dots, 1)$	$H_{G_1, \dots, G_m}(\vec{x}) = \sum_{i_k=1}^{\eta_k} \dots \sum_{i_1=1}^{\eta_1} \int_{\ell_{k,i_k}(\cdot)(\vec{x})}^{\mu_{k,i_k}(\cdot)(\vec{x})} \dots \int_{\ell_{1,i_1}(\cdot)(\vec{x})}^{\mu_{1,i_1}(\cdot)(\vec{x})} dF(t_1, \dots, t_K)$
<b>2S1C4.1.5</b>	$\eta_i = 1, \theta_z = 0$ e $v_{i,l}(1, \dots, 1) = m_{i,l}(1, \dots, 1)$	$H_{G_1, \dots, G_m}(\vec{x}) = \prod_{z=1}^m u_z^{\alpha_z}(\cdot)(\vec{x}) \int_{\ell_{k,1}(\cdot)(\vec{x})}^{\mu_{k,1}(\cdot)(\vec{x})} \dots \int_{\ell_{1,1}(\cdot)(\vec{x})}^{\mu_{1,1}(\cdot)(\vec{x})} dF(t_1, \dots, t_K)$
<b>3S1C4.1.5</b>	$\eta_i = 1, m = 1, \alpha_1 = 0$ e $v_{i,1}(1, \dots, 1) = m_{i,1}(1, \dots, 1)$	$H_{G_1, \dots, G_m}(\vec{x}) = \int_{\ell_{k,1}(\cdot)(\vec{x})}^{\mu_{k,1}(\cdot)(\vec{x})} \dots \int_{\ell_{1,1}(\cdot)(\vec{x})}^{\mu_{1,1}(\cdot)(\vec{x})} dF(t_1, \dots, t_K)$
<b>4S1C4.1.5</b>	$\eta_i = 1, m = 1, \alpha_1 = 0,$ $v_{i,1}(1, \dots, 1) = m_{i,1}(1, \dots, 1)$ e $f(t_1, \dots, t_k) = \frac{1}{\prod_{i=1}^k (\mu_{i,1}(1, \dots, 1) - \ell_{i,1}(1, \dots, 1))}$ $p/t_i \in [\ell_{i,1}(1, \dots, 1), \mu_{i,1}(1, \dots, 1)],$ $\forall i \in \{1, \dots, k\}$	$H_{G_1, \dots, G_m}(\vec{x}) = \frac{\prod_{i=1}^k (\mu_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) - \ell_{i,1}(\cdot)(\vec{x}))}{\prod_{i=1}^k (\mu_{i,1}(1, \dots, 1) - \ell_{i,1}(1, \dots, 1))}$
<b>5S1C4.1.5</b>	$\eta_i = 1, m = 1, \alpha_1 = 0,$ $\ell_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) = \mu_{i,1}(0, \dots, 0),$ $v_{i,1}(1, \dots, 1) = m_{i,1}(1, \dots, 1)$ e $f(t_1, \dots, t_k) = \frac{1}{\prod_{i=1}^k (\mu_{i,1}(1, \dots, 1) - \mu_{i,1}(0, \dots, 0))}$ $p/t_i \in [\mu_{i,1}(0, \dots, 0), \mu_{i,1}(1, \dots, 1)],$ $\forall i \in \{1, \dots, k\}$	$H_{G_1, \dots, G_m}(\vec{x}) = \frac{\prod_{i=1}^k (\mu_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) - \mu_{i,1}(0, \dots, 0))}{\prod_{i=1}^k (\mu_{i,1}(1, \dots, 1) - \mu_{i,1}(0, \dots, 0))}$

<b>6S1C4.1.5</b>	$\eta_i = 1, m = 1, \alpha_1 = 0,$ $\mu_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) = \ell_{i,1}(0, \dots, 0),$ $v_{i,1}(1, \dots, 1) = m_{i,1}(1, \dots, 1) \text{ e}$ $f(t_1, \dots, t_k) = \frac{1}{\prod_{i=1}^k (\ell_{i,1}(0, \dots, 0) - \ell_{i,1}(1, \dots, 1))}$ $p/t_i \in [\ell_{i,1}(1, \dots, 1), \ell_{i,1}(0, \dots, 0)],$ $\forall i \in \{1, \dots, k\}$	$H_{G_1, \dots, G_m}(\vec{x}) = \frac{\prod_{i=1}^k (\ell_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) - \ell_{i,1}(0, \dots, 0))}{\prod_{i=1}^k (\ell_{i,1}(1, \dots, 1) - \ell_{i,1}(0, \dots, 0))}$
<b>7S1C4.1.5</b>	$m = 1, \alpha_1 = 0 \text{ e}$ $\sum_{i_k=1}^{\eta_k} \dots \sum_{i_1=1}^{\eta_1} \int_{\ell_{k,i_k}(\cdot)(\vec{x})}^{\mu_{k,i_k}(\cdot)(\vec{x})} \dots \int_{\ell_{1,i_1}(\cdot)(\vec{x})}^{\mu_{1,i_1}(\cdot)(\vec{x})} dF(t_1, \dots, t_k) = 1$	$H_{G_1, \dots, G_m}(\vec{x}) = 1 - \sum_{i_k=1}^{\eta_k} \dots \sum_{i_1=1}^{\eta_1} \int_{m_{k,i_k}(\cdot)(\vec{x})}^{v_{k,i_k}(\cdot)(\vec{x})} \dots \int_{m_{1,i_1}(\cdot)(\vec{x})}^{v_{1,i_1}(\cdot)(\vec{x})} dF(t_1, \dots, t_k)$
<b>8S1C4.1.5</b>	$\eta_i = 1, \theta_i = 1,$ $\mu_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) = +\infty \text{ e}$ $\ell_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) = -\infty$	$H_{G_1, \dots, G_m}(\vec{x})$ $= 1 - \prod_{z=1}^m (v_z(\cdot)(\vec{x}))^{\alpha_z} \int_{m_{k,1}(\cdot)(\vec{x})}^{v_{k,1}(\cdot)(\vec{x})} \dots \int_{m_{1,1}(\cdot)(\vec{x})}^{v_{1,1}(\cdot)(\vec{x})} dF(t_1, \dots, t_k)$
<b>9S1C4.1.5</b>	$\eta_i = 1, m = 1, \alpha_1 = 0,$ $\mu_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) = +\infty \text{ e } \ell_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) = -\infty$	$H_{G_1, \dots, G_m}(\vec{x}) = 1 - \int_{m_{k,1}(\cdot)(\vec{x})}^{v_{k,1}(\cdot)(\vec{x})} \dots \int_{m_{1,1}(\cdot)(\vec{x})}^{v_{1,1}(\cdot)(\vec{x})} dF(t_1, \dots, t_k)$
<b>10S1C4.1.5</b>	$\eta_i = 1, m = 1, \alpha_1 = 0,$ $\mu_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) = +\infty, \ell_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) = -\infty,$ $f(t_1, \dots, t_k) = \frac{1}{\prod_{i=1}^k (v_{i,1}(0, \dots, 0) - m_{i,1}(0, \dots, 0))}$ $p/t_i \in [m_{i,1}(0, \dots, 0), v_{i,1}(0, \dots, 0)],$ $\forall i \in \{1, \dots, k\}$	$H_{G_1, \dots, G_m}(\vec{x}) = 1 - \frac{\prod_{i=1}^k (v_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) - m_{i,1}(\cdot)(\vec{x}))}{\prod_{i=1}^k (v_{i,1}(0, \dots, 0) - m_{i,1}(0, \dots, 0))}$

<b>11S1C4.1.5</b>	$\eta_i = 1, m = 1, \alpha_1 = 0,$ $m_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) = v_{i,1}(0, \dots, 0),$ $\mu_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) = +\infty, \ell_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) = -\infty \text{ e}$ $f(t_1, \dots, t_k) = \frac{1}{\prod_{i=1}^k (v_{i,1}(0, \dots, 0) - v_{i,1}(1, \dots, 1))}$ $p/t_i \in [v_{i,1}(1, \dots, 1), v_{i,1}(0, \dots, 0)],$ $\forall i \in \{1, \dots, k\}$	$H_{G_1, \dots, G_m}(\vec{x}) = \frac{\prod_{i=1}^k (v_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) - v_{i,1}(0, \dots, 0))}{\prod_{i=1}^k (v_{i,1}(1, \dots, 1) - v_{i,1}(0, \dots, 0))}$
<b>12S1C4.1.5</b>	$\eta_i = 1, m = 1, \alpha_1 = 0,$ $v_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) = m_{i,1}(0, \dots, 0),$ $\mu_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) = +\infty, \ell_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) = -\infty \text{ e}$ $f(t_1, \dots, t_k) = \frac{1}{\prod_{i=1}^k (m_{i,1}(1, \dots, 1) - m_{i,1}(0, \dots, 0))}$ $p/t_i \in [m_{i,1}(0, \dots, 0), m_{i,1}(1, \dots, 1)],$ $\forall i \in \{1, \dots, k\}$	$H_{G_1, \dots, G_m}(\vec{x}) = \frac{\prod_{i=1}^k (m_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) - m_{i,1}(0, \dots, 0))}{\prod_{i=1}^k (m_{i,1}(1, \dots, 1) - m_{i,1}(0, \dots, 0))}$
<b>13S1C4.1.5</b>	$\eta_i = 1, m = 1 \text{ e } \alpha_1 = 0.$	$H_{G_1, \dots, G_m}(\vec{x}) = \int_{\ell_{k,1}(\cdot)(\vec{x})}^{\mu_{k,1}(\cdot)(\vec{x})} \dots \int_{\ell_{1,1}(\cdot)(\vec{x})}^{\mu_{1,1}(\cdot)(\vec{x})} dF(t_1, \dots, t_k) - \int_{m_{k,1}(\cdot)(\vec{x})}^{v_{k,1}(\cdot)(\vec{x})} \dots \int_{m_{1,1}(\cdot)(\vec{x})}^{v_{1,1}(\cdot)(\vec{x})} dF(t_1, \dots, t_k)$
<b>14S1C4.1.5</b>	$\eta_i = 1, m = 1, \alpha_1 = 0 \text{ e}$ $f(t) = \frac{1}{\prod_{i=1}^k (\mu_{i,1}(1, \dots, 1) - \ell_{i,1}(1, \dots, 1))}$ $p/t_i \in [\ell_{i,1}(1, \dots, 1), \mu_{i,1}(1, \dots, 1)],$ $\forall i \in \{1, \dots, k\}$	$H_{G_1, \dots, G_m}(\vec{x}) = \frac{\prod_{i=1}^k (\mu_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) - \ell_{i,1}(\cdot)(\vec{x})) - \prod_{i=1}^k (v_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) - m_{i,1}(\cdot)(\vec{x}))}{\prod_{i=1}^k (\mu_{i,1}(1, \dots, 1) - \ell_{i,1}(1, \dots, 1))}$
<b>15S1C4.1.5</b>	$\mu_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) = \mu^i \left( (1 - \gamma_i) u_{m+i}(\cdot)(\vec{x}) + \gamma_i \right),$ $\ell_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) = \ell^i \left( (1 - \gamma_i) u_{m+i}(\cdot)(\vec{x}) + \gamma_i \right),$ $v_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) = \mu^i \left( \gamma_i v_{m+i}(\cdot)(\vec{x}) \right),$ $m_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) = \ell^i \left( \gamma_i v_{m+i}(\cdot)(\vec{x}) \right),$ $\eta_i = 1, \alpha_z > 0 \text{ e } 0 \leq \gamma_i \leq 1.$	$H_{G_1, \dots, G_m}(\vec{x}) = \prod_{z=1}^m \left( (1 - \theta_z) u_z(\cdot)(\vec{x}) + \theta_z \right)^{\alpha_z} \int_{\ell_{k,1}(\cdot)(\vec{x})}^{\mu_{k,1}(\cdot)(\vec{x})} \dots \int_{\ell_{1,1}(\cdot)(\vec{x})}^{\mu_{1,1}(\cdot)(\vec{x})} dF(t_1, \dots, t_k)$ $- \prod_{z=1}^m \left( \theta_z v_z(\cdot)(\vec{x}) \right)^{\alpha_z} \int_{m_{k,1}(\cdot)(\vec{x})}^{v_{k,1}(\cdot)(\vec{x})} \dots \int_{m_{1,1}(\cdot)(\vec{x})}^{v_{1,1}(\cdot)(\vec{x})} dF(t_1, \dots, t_k)$

<b>16S1C4.1.5</b>	$\begin{aligned}\mu_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) &= \mu^i((1 - \gamma_i)u_{m+i}(\cdot)(\vec{x}) + \gamma_i), \\ \ell_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) &= -\infty, \\ \nu_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) &= \mu^i(\gamma_i \nu_{m+i}(\cdot)(\vec{x})), \\ m_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) &= -\infty, \\ \eta_i &= 1 \text{ e } 0 \leq \gamma_i \leq 1.\end{aligned}$	$\begin{aligned}H_{G_1, \dots, G_m}(\vec{x}) &= \prod_{z=1}^m \left( (1 - \theta_z) u_z(\cdot)(\vec{x}) + \theta_z \right)^{\alpha_z} \int_{-\infty}^{\mu_{k,1}(\cdot)(\vec{x})} \dots \int_{-\infty}^{\mu_{1,1}(\cdot)(\vec{x})} dF(t_1, \dots, t_k) \\ &\quad - \prod_{z=1}^m \left( \theta_z \nu_z(\cdot)(\vec{x}) \right)^{\alpha_z} \int_{-\infty}^{\nu_{k,1}(\cdot)(\vec{x})} \dots \int_{-\infty}^{\nu_{1,1}(\cdot)(\vec{x})} dF(t_1, \dots, t_k)\end{aligned}$
<b>17S1C4.1.5</b>	$\begin{aligned}\mu_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) &= +\infty, \\ \ell_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) &= \ell^i((1 - \gamma_i)u_{m+i}(\cdot)(\vec{x}) + \gamma_i), \\ \nu_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) &= +\infty, \\ m_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) &= \ell^i(\gamma_i \nu_{m+i}(\cdot)(\vec{x})), \\ \eta_i &= 1 \text{ e } 0 \leq \gamma_i \leq 1.\end{aligned}$	$\begin{aligned}H_{G_1, \dots, G_m}(\vec{x}) &= \prod_{z=1}^m \left( (1 - \theta_z) u_z(\cdot)(\vec{x}) + \theta_z \right)^{\alpha_z} \int_{\ell_{k,1}(\cdot)(\vec{x})}^{+\infty} \dots \int_{\ell_{1,1}(\cdot)(\vec{x})}^{+\infty} dF(t_1, \dots, t_k) \\ &\quad - \prod_{z=1}^m \left( \theta_z \nu_z(\cdot)(\vec{x}) \right)^{\alpha_z} \int_{m_{k,1}(\cdot)(\vec{x})}^{+\infty} \dots \int_{m_{1,1}(\cdot)(\vec{x})}^{+\infty} dF(t_1, \dots, t_k)\end{aligned}$
<b>18S1C4.1.5</b>	$\begin{aligned}\mu_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) &= \nu^i(\gamma_i \nu_{m+i}(\cdot)(\vec{x})), \\ \ell_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) &= m^i(\gamma_i \nu_{m+i}(\cdot)(\vec{x})), \\ \nu_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) &= \nu^i((1 - \gamma_i)u_{m+i}(\cdot)(\vec{x}) + \gamma_i), \\ m_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) &= m^i((1 - \gamma_i)u_{m+i}(\cdot)(\vec{x}) + \gamma_i), \\ \eta_i &= 1, \alpha_i > 0 \text{ e } 0 \leq \gamma_i \leq 1.\end{aligned}$	$\begin{aligned}H_{G_1, \dots, G_m}(\vec{x}) &= \prod_{z=1}^m \left( (1 - \theta_z) u_z(\cdot)(\vec{x}) + \theta_z \right)^{\alpha_z} \int_{\ell_{k,1}(\cdot)(\vec{x})}^{\mu_{k,1}(\cdot)(\vec{x})} \dots \int_{\ell_{1,1}(\cdot)(\vec{x})}^{\mu_{1,1}(\cdot)(\vec{x})} dF(t_1, \dots, t_k) \\ &\quad - \prod_{z=1}^m \left( \theta_z \nu_z(\cdot)(\vec{x}) \right)^{\alpha_z} \int_{m_{k,1}(\cdot)(\vec{x})}^{\nu_{k,1}(\cdot)(\vec{x})} \dots \int_{m_{1,1}(\cdot)(\vec{x})}^{\nu_{1,1}(\cdot)(\vec{x})} dF(t_1, \dots, t_k)\end{aligned}$
<b>19S1C4.1.5</b>	$\begin{aligned}\mu_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) &= \nu^i(\gamma_i \nu_{m+i}(\cdot)(\vec{x})), \\ \ell_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) &= -\infty, \\ \nu_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) &= \nu^i((1 - \gamma_i)u_{m+i}(\cdot)(\vec{x}) + \gamma_i), \\ m_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) &= -\infty, \\ \eta_i &= 1 \text{ e } 0 \leq \gamma_i \leq 1.\end{aligned}$	$\begin{aligned}H_{G_1, \dots, G_m}(\vec{x}) &= \prod_{z=1}^m \left( (1 - \theta_z) u_z(\cdot)(\vec{x}) + \theta_z \right)^{\alpha_z} \int_{-\infty}^{\mu_{k,1}(\cdot)(\vec{x})} \dots \int_{-\infty}^{\mu_{1,1}(\cdot)(\vec{x})} dF(t_1, \dots, t_k) \\ &\quad - \prod_{z=1}^m \left( \theta_z \nu_z(\cdot)(\vec{x}) \right)^{\alpha_z} \int_{-\infty}^{\nu_{k,1}(\cdot)(\vec{x})} \dots \int_{-\infty}^{\nu_{1,1}(\cdot)(\vec{x})} dF(t_1, \dots, t_k)\end{aligned}$

<b>20S1C4.1.5</b>	$\begin{aligned} \mu_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) &= +\infty, \\ \ell_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) &= m^i(\gamma_i v_{m+i}(\cdot)(\vec{x})), \\ \nu_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) &= +\infty, \\ m_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) &= m^i((1 - \gamma_i)u_{m+i}(\cdot)(\vec{x}) + \gamma_i), \\ \eta_i &= 1 \text{ e } 0 \leq \gamma_i \leq 1. \end{aligned}$	$\begin{aligned} H_{G_1, \dots, G_m}(\vec{x}) &= \prod_{z=1}^m \left( (1 - \theta_z)u_z(\cdot)(\vec{x}) + \theta_z \right)^{\alpha_z} \int_{\ell_{k,1}(\cdot)(\vec{x})}^{+\infty} \dots \int_{\ell_{1,1}(\cdot)(\vec{x})}^{+\infty} dF(t_1, \dots, t_k) \\ &\quad - \prod_{z=1}^m \left( \theta_z v_z(\cdot)(\vec{x}) \right)^{\alpha_z} \int_{m_{k,1}(\cdot)(\vec{x})}^{+\infty} \dots \int_{m_{1,1}(\cdot)(\vec{x})}^{+\infty} dF(t_1, \dots, t_k) \end{aligned}$
<b>21S1C3.1.5</b>	$\eta_i = 1.$	$\begin{aligned} H_{G_1, \dots, G_m}(\vec{x}) &= \prod_{z=1}^m \left( (1 - \theta_z)u_z(\cdot)(\vec{x}) + \theta_z \right)^{\alpha_z} \int_{\ell_{k,1}(\cdot)(\vec{x})}^{\mu_{k,1}(\cdot)(\vec{x})} \dots \int_{\ell_{1,1}(\cdot)(\vec{x})}^{\mu_{1,1}(\cdot)(\vec{x})} dF(t_1, \dots, t_k) \\ &\quad - \prod_{z=1}^m \left( \theta_z v_z(\cdot)(\vec{x}) \right)^{\alpha_z} \int_{m_{k,1}(\cdot)(\vec{x})}^{\nu_{k,1}(\cdot)(\vec{x})} \dots \int_{m_{1,1}(\cdot)(\vec{x})}^{\nu_{1,1}(\cdot)(\vec{x})} dF(t_1, \dots, t_k) \end{aligned}$
<b>22S1C3.1.5</b>	$\begin{aligned} \mu_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) &= +\infty, \\ \ell_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) &= -\infty, \\ \nu_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) &= +\infty, \\ m_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) &= -\infty \text{ e } \eta_i = 1. \end{aligned}$	$\begin{aligned} H_{G_1, \dots, G_m}(\vec{x}) &= \prod_{z=1}^m \left( (1 - \theta_z)u_z(\cdot)(\vec{x}) + \theta_z \right)^{\alpha_z} \\ &\quad - \prod_{z=1}^m \left( \theta_z v_z(\cdot)(\vec{x}) \right)^{\alpha_z} \end{aligned}$

O Corolário 4.1.6 mostra um método alternativo para obtenção de classes de distribuições probabilísticas multivariadas a partir do Corolário 4.1.1. Ele mostra que hipóteses sobre  $\mathcal{U}$ ,  $\vartheta$ ,  $\mu_{j,s}$ ,  $\ell_{j,s}$ ,  $\nu_{j,s}$  e  $m_{j,s}$  devem satisfazer para que as funções  $\mathcal{U}(x)$ ,  $\mathcal{W}(x)$ ,  $\mathbb{U}_{j,s}(x)$ ,  $\mathbb{L}_{j,s}(x)$ ,  $\mathbb{M}_{j,s}(x)$  e  $\mathbb{V}_{j,s}(x)$ , satisfaçam as condições apresentadas no Corolário 4.1.1 e possamos obter classes de distribuições probabilísticas multivariadas.

**Corolário 4.1.6 (C4.1.6): Método Complementar gerador de classes de distribuições probabilísticas multivariadas.**

Sejam  $\varphi: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{U}: [0,1]^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\vartheta: [0,1]^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mu_{j,s}: [0,1]^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ,  $\ell_{j,s}: [0,1]^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ,  $m_{j,s}: [0,1]^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  e  $\nu_{j,s}: [0,1]^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ,  $\forall j \in \{1, \dots, r\}$  e  $\forall s \in \{1, \dots, n_j\}$ , funções monotônicas e contínuas a direita tais que:

[cd4.1]  $\varphi$  uma fda e  $\mathcal{U}$  e  $\vartheta$  são não negativas;

[cd4.2]  $\mathcal{U}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mu_{j,s}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)$  e  $m_{j,s}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)$  são não decrescentes e  $\vartheta(\cdot)(x_1, \dots, x_n)$ ,  $\ell_{j,s}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)$  e  $\nu_{j,s}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)$  são não crescentes,  $\forall j \in \{1, \dots, r\}$  e  $\forall s \in \{1, \dots, n_j\}$ , para cada uma de suas variáveis;

[cd4.3] Para todo  $z \in \{1, \dots, n\}$ , se  $\lim_{x_z \rightarrow +\infty} \mathcal{U}(\cdot)(x_1, \dots, x_n) \neq \lim_{x_z \rightarrow +\infty} \vartheta(\cdot)(x_1, \dots, x_n)$ , então

$\lim_{x_z \rightarrow +\infty} \mathcal{U}(\cdot)(x_1, \dots, x_n) = 0$  ou  $\lim_{x_z \rightarrow +\infty} \mu_{j,s}(\cdot)(x_1, \dots, x_n) = \lim_{x_z \rightarrow +\infty} \ell_{j,s}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)$ ,  $\forall j \in \{1, \dots, r\}$  e  $\forall s \in \{1, \dots, n_j\}$ , e  $\lim_{x_z \rightarrow +\infty} \vartheta(\cdot)(x_1, \dots, x_n) = 0$  ou  $\lim_{x_z \rightarrow +\infty} m_{j,s}(\cdot)(x_1, \dots, x_n) = \lim_{x_z \rightarrow +\infty} \nu_{j,s}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)$ ,  $\forall j \in \{1, \dots, r\}$  e  $\forall s \in \{1, \dots, n_j\}$ ;

[cd4.4] Para todo  $z \in \{1, \dots, n\}$ , se  $\lim_{x_z \rightarrow +\infty} \mathcal{U}(\cdot)(x_1, \dots, x_n) = \lim_{x_z \rightarrow +\infty} \vartheta(\cdot)(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ ,

então  $\lim_{x_z \rightarrow +\infty} \mu_{j,s}(\cdot)(x_1, \dots, x_n) = \lim_{x_z \rightarrow +\infty} \nu_{j,s}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)$  e  $\lim_{x_z \rightarrow +\infty} m_{j,s}(\cdot)(x_1, \dots, x_n) = \lim_{x_z \rightarrow +\infty} \ell_{j,s}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)$ ,  $\forall j \in \{1, \dots, r\}$  e  $\forall s \in \{1, \dots, n_j\}$ ;

[cd4.5]  $m_{j,s}(1, \dots, 1) \leq \nu_{j,s}(1, \dots, 1)$  e se  $\mathcal{U}(1, \dots, 1) \neq 0$ , então  $\mu_{j,s}(0, \dots, 0) \leq \ell_{j,s}(0, \dots, 0)$ ,  $\forall j \in \{1, \dots, r\}$  e  $\forall s \in \{1, \dots, n_j\}$ ;

[cd4.6]  $\nu_{j,n_j}(0, \dots, 0) \geq \sup\{t \in \mathbb{R}: (t_1, \dots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \dots, t_s) \in S_\varphi\}$  e  $\ell_{j,1}(0, \dots, 0) \leq \inf\{t \in \mathbb{R}: (t_1, \dots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \dots, t_s) \in S_\varphi\}$ ,  $\forall j \in \{1, \dots, r\}$ ;

[cd4.7]  $\vartheta(0, \dots, 0) = 1$ ;

[cd4.8]  $\mathcal{U}(0, \dots, 0) = 0$  ou  $\mu_{j,s}(0, \dots, 0) = \ell_{j,s}(0, \dots, 0), \forall j \in \{1, \dots, r\}$  e  $\forall s \in \{1, \dots, \pi_j\}$ , para  $\pi_j \geq 1$ ;

[cd4.9]  $\nu_{j,s}(1, \dots, 1) = m_{j,s+1}(1, \dots, 1), \forall j \in \{1, \dots, r\}$  e  $\forall s = 1, 2, 3, \dots, \pi_j - 1$ , para  $\pi_j \geq 2$ ;

[cd4.10]  $\varphi$  é uma fda sem pontos de descontinuidade ou todas as funções  $\nu_{j,s}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)$  e  $\ell_{j,s}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)$  são constantes à direita na vizinhança dos pontos cujas imagens são pontos de descontinuidades de  $\varphi$ , sendo também contínuas em tais pontos e  $\varphi$  não possuir pontos de descontinuidade no conjunto  $\{\mu_{j,s}(0, \dots, 0), \mu_{j,s}(1, \dots, 1), \ell_{j,s}(0, \dots, 0), \ell_{j,s}(1, \dots, 1), m_{j,s}(0, \dots, 0), m_{j,s}(1, \dots, 1), \nu_{j,s}(0, \dots, 0), \nu_{j,s}(1, \dots, 1),$  para algum  $s = 1, 2, \dots, \pi_j$ , com  $j = 1, 2, \dots, r\} \cup$

$\{\lim_{x_z \rightarrow \pm\infty} \mu_{j,s}(\cdot)(x_1, \dots, x_n) : z \in \{1, \dots, n\}\} \cup \{\lim_{x_z \rightarrow \pm\infty} \mu_{j,s}(\cdot)(x_1, \dots, x_n) : z \in \{1, \dots, n\}\} \cup \{\lim_{x_z \rightarrow \pm\infty} \mu_{j,s}(\cdot)(x_1, \dots, x_n) : z \in \{1, \dots, n\}\} \cup \{\lim_{x_z \rightarrow \pm\infty} \mu_{j,s}(\cdot)(x_1, \dots, x_n) : z \in \{1, \dots, n\}\}$ ;

[cd4.11]  $\Delta_{1,I_1} \dots \Delta_{n,I_n} \mathcal{U}(\cdot)(x_1, \dots, x_n) \sum_{i_r=1}^{n_r} \dots \sum_{i_1=1}^{n_1} \int_{\ell_{r,i_r}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)}^{\mu_{r,i_r}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)} \dots \int_{\ell_{1,i_1}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)}^{\mu_{1,i_1}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)} d\varphi(t_1, \dots, t_r)$   
 $\geq \Delta_{1,I_1} \dots \Delta_{n,I_n} \vartheta(\cdot)(x_1, \dots, x_n) \sum_{i_r=1}^{n_r} \dots \sum_{i_1=1}^{n_1} \int_{m_{r,i_r}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)}^{\nu_{r,i_r}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)} \dots \int_{m_{1,i_1}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)}^{\nu_{1,i_1}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)} d\varphi(t_1, \dots, t_r).$

Então temos que  $H_{G_1, \dots, G_m}(x_1, \dots, x_n) = 1 - \vartheta(\cdot)(x_1, \dots, x_n)$

$\sum_{i_r=1}^{n_r} \dots \sum_{i_1=1}^{n_1} \int_{m_{k,i_k}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)}^{\nu_{k,i_k}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)} \dots \int_{m_{1,i_1}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)}^{\nu_{1,i_1}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)} dF(t_1, \dots, t_r) + \mathcal{U}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)$

$\sum_{i_k=1}^{n_r} \dots \sum_{i_1=1}^{n_1} \int_{\ell_{k,i_k}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)}^{\mu_{k,i_k}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)} \dots \int_{\ell_{1,i_1}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)}^{\mu_{1,i_1}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)} dF(t_1, \dots, t_r)$  é um funcional gerador de classes de distribuições probabilísticas multivariadas.

### **Demonstração:**

No Corolário 4.1.1, faça  $\mathcal{U}(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{U}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathcal{W}(x_1, \dots, x_n) = \vartheta(\cdot)(x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbb{U}_{j,s}(x_1, \dots, x_n) = \mu_{j,s}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbb{L}_{j,s}(x_1, \dots, x_n) = \ell_{j,s}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbb{M}_{j,s}(x_1, \dots, x_n) = m_{j,s}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)$  e  $\mathbb{V}_{j,s}(x_1, \dots, x_n) = \nu_{j,s}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)$ , e note que a condição [cd4. i] implica a condição [cc4. i] do Corolário 4.1.1 para  $i = 1, 2, \dots, 11$ . ■

Vejamos um caso especial do Corolário 4.1.6, que de fato é um funcional construtor de classes de distribuições probabilísticas que pode ser mais facilmente utilizados:



**1º Caso especial do Corolário 4.1.6 (1C4.1.6): Método complementar construtor de classes de distribuições probabilísticas multivariadas que podem ser mais facilmente utilizados.**

Sejam  $u_z: [0,1]^m \rightarrow [0,1]$  e  $v_z: [0,1]^m \rightarrow [0,1]$  funções monotônicas e contínuas à direita tais que  $u_i$  são não decrescentes  $v_i$  são não crescentes em cada uma das suas variáveis, com  $u_z(0, \dots, 0) = 0$ ,  $u_z(1, \dots, 1) = 1$ ,  $v_z(0, \dots, 0) = 1$  e  $v_z(1, \dots, 1) = 0$  para todo  $z = 1, \dots, m$ . Se no Corolário 4.1.5 do Teorema 4.1,  $U(\cdot)(\vec{x}) =$

$\prod_{z=1}^m (\theta_z u_z(\cdot)(\vec{x}))^{\alpha_z}$  e  $\vartheta(\cdot)(\vec{x}) = \prod_{z=1}^m ((1 - \theta_z) v_z(\cdot)(\vec{x}) + \theta_z)^{\alpha_z}$ , com  $\alpha_z \geq 0$  e  $0 \leq \theta_z \leq 1$ , então  $H_{G_1, \dots, G_m}(\vec{x}) = 1 - \prod_{z=1}^m ((1 - \theta_z) v_z(\cdot)(\vec{x}) + \theta_z)^{\alpha_z}$

$\sum_{j_r=1}^{n_r} \dots \sum_{j_1=1}^{n_1} \int_{m_{r,j_r}(\cdot)(\vec{x})}^{v_{r,j_r}(\cdot)(\vec{x})} \dots \int_{m_{1,j_1}(\cdot)(\vec{x})}^{v_{1,j_1}(\cdot)(\vec{x})} d\varphi(t_1, \dots, t_r) + \prod_{z=1}^m (\theta_z u_z(\cdot)(\vec{x}))^{\alpha_z}$

$\sum_{j_r=1}^{n_r} \dots \sum_{j_1=1}^{n_1} \int_{\ell_{r,j_r}(\cdot)(\vec{x})}^{\mu_{r,j_r}(\cdot)(\vec{x})} \dots \int_{\ell_{1,j_1}(\cdot)(\vec{x})}^{\mu_{1,j_1}(\cdot)(\vec{x})} d\varphi(t_1, \dots, t_r)$  é um funcional gerador de

classes de distribuições de probabilidades, onde  $(\cdot)(\vec{x}) = (\cdot)(x_1, \dots, x_n) =$

$(G_1, \dots, G_m)(x_1, \dots, x_n) = (G_1(x_1, \dots, x_n), \dots, G_m(x_1, \dots, x_n))$ .

A seguir, teremos a Tabela 4.3.2 que mostra a obtenção de alguns funcionais especiais construtores de classes de distribuições probabilísticas multivariada do

funcional  $H_{G_1, \dots, G_m}(x_1, \dots, x_n) = 1 - \prod_{z=1}^m ((1 - \theta_z) v_z(\cdot)(\vec{x}) + \theta_z)^{\alpha_z}$

$\sum_{j_r=1}^{n_r} \dots \sum_{j_1=1}^{n_1} \int_{m_{r,j_r}(\cdot)(\vec{x})}^{v_{r,j_r}(\cdot)(\vec{x})} \dots \int_{m_{1,j_1}(\cdot)(\vec{x})}^{v_{1,j_1}(\cdot)(\vec{x})} d\varphi(t_1, \dots, t_r) - \prod_{z=1}^m (\theta_z u_z(\cdot)(\vec{x}))^{\alpha_z}$

$\sum_{j_r=1}^{n_r} \dots \sum_{j_1=1}^{n_1} \int_{\ell_{r,j_r}(\cdot)(\vec{x})}^{\mu_{r,j_r}(\cdot)(\vec{x})} \dots \int_{\ell_{1,j_1}(\cdot)(\vec{x})}^{\mu_{1,j_1}(\cdot)(\vec{x})} d\varphi(t_1, \dots, t_r)$ , que podem ser mais facilmente

utilizados nas gerações de classes de distribuições, onde  $(\cdot)(\vec{x}) = (\cdot)(x_1, \dots, x_n) =$

$(G_1, \dots, G_m)(x_1, \dots, x_n) = (G_1(x_1, \dots, x_n), \dots, G_m(x_1, \dots, x_n))$ . Considere nas expressões de

**13S1C4.1.6 a 18S1C4.1.6**, as seguintes funções  $\mu^j: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ,  $\ell^j: [0,1] \rightarrow$

$\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ,  $v^j: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  e  $m^j: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , tais que  $\mu^j$  e  $m^j$  são não

decrescentes e contínuas à direita para  $j = 1, 2, \dots, r$ , e  $v^j$  e  $\ell^j$  são não crescentes e

contínuas à direita para  $j = 1, 2, \dots, r$ .

Tabela 4.3.2 – Alguns funcionais construtores de classes de distribuições probabilísticas obtidos a partir do **1C4.1.6**.

Sub-casos do 1C4.1.6	Condições especiais sobre as funções monotônicas	Funcionais construtores obtidos
<b>1S1C4.1.6</b>	$\mathfrak{m} = 1, \alpha_1 = 0 \text{ e}$ $\sum_{j_r=1}^{n_r} \dots \sum_{j_1=1}^{n_1} \int_{m_{r,j_r}(\vec{x})}^{v_{r,j_r}(\vec{x})} \dots \int_{m_{1,j_1}(\vec{x})}^{v_{1,j_1}(\vec{x})} d\varphi(t_1, \dots, t_r) = 1$	$H_{G_1, \dots, G_m}(\vec{x}) = \sum_{i_r=1}^{n_r} \dots \sum_{i_1=1}^{n_1} \int_{\ell_{r,j_r}(\vec{x})}^{\mu_{r,j_r}(\vec{x})} \dots \int_{\ell_{1,j_1}(\vec{x})}^{\mu_{1,j_1}(\vec{x})} d\varphi(t_1, \dots, t_r)$
<b>2S1C4.1.6</b>	$n_j = 1, \theta_z = 1,$ $v_{r,1}(\cdot)(\vec{x}) = +\infty \text{ e}$ $m_{r,1}(\cdot)(\vec{x}) = -\infty$	$H_{G_1, \dots, G_m}(\vec{x}) = \prod_{z=1}^{\mathfrak{m}} (\theta_z u_z(\cdot)(\vec{x}))^{\alpha_z} \int_{\ell_{r,1}(\vec{x})}^{\mu_{r,1}(\vec{x})} \dots \int_{\ell_{1,1}(\vec{x})}^{\mu_{1,1}(\vec{x})} d\varphi(t_1, \dots, t_r)$
<b>3S1C4.1.6</b>	$n_j = 1, \mathfrak{m} = 1, \alpha_1 = 0,$ $v_{r,1}(\cdot)(\vec{x}) = +\infty \text{ e}$ $m_{r,1}(\cdot)(\vec{x}) = -\infty$	$H_{G_1, \dots, G_m}(\vec{x}) = \int_{\ell_{r,1}(\vec{x})}^{\mu_{r,1}(\vec{x})} \dots \int_{\ell_{1,1}(\vec{x})}^{\mu_{1,1}(\vec{x})} d\varphi(t_1, \dots, t_r)$
<b>4S1C4.1.6</b>	$n_j = 1, \mathfrak{m} = 1, \alpha_1 = 0,$ $v_{j,1}(0, \dots, 0) = \sup\{t \in$ $\mathbb{R}: (t_1, \dots, t_{j-1}, t, t_{j+1}, \dots, t_s) \in S_\varphi\},$ $m_{j,1}(0, \dots, 0) = \inf\{t \in$ $\mathbb{R}: (t_1, \dots, t_{j-1}, t, t_{j+1}, \dots, t_s) \in S_\varphi\} \text{ e}$ $\varphi'(t_1, \dots, t_k) = \frac{1}{\prod_{i=1}^k (\mu_{i,1}(1, \dots, 1) - \ell_{i,1}(1, \dots, 1))},$ $p/t_j \in [\ell_{j,1}(1, \dots, 1), \mu_{j,1}(1, \dots, 1)],$ $\forall j \in \{1, \dots, r\}$	$H_{G_1, \dots, G_m}(\vec{x}) = \frac{\prod_{i=1}^k (\mu_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) - \ell_{i,1}(\cdot)(\vec{x}))}{\prod_{i=1}^k (\mu_{i,1}(1, \dots, 1) - \ell_{i,1}(1, \dots, 1))}$

<b>5S1C4.1.6</b>	$n_j = 1, m = 1, \alpha_1 = 0,$ $\ell_{j,1}(\cdot)(\vec{x}) = \mu_{j,1}(0, \dots, 0),$ $v_{j,1}(0, \dots, 0) = \sup\{t \in$ $\mathbb{R}: (t_1, \dots, t_{j-1}, t, t_{j+1}, \dots, t_s) \in S_\varphi\},$ $m_{j,1}(0, \dots, 0) = \inf\{t \in$ $\mathbb{R}: (t_1, \dots, t_{j-1}, t, t_{j+1}, \dots, t_s) \in S_\varphi\} \mathbf{e}$ $\varphi'(t_1, \dots, t_r) = \frac{1}{\prod_{j=1}^r (\mu_{j,1}(1, \dots, 1) - \mu_{j,1}(0, \dots, 0))},$ $p/t_j \in [\mu_{j,1}(0, \dots, 0), \mu_{j,1}(1, \dots, 1)],$ $\forall j \in \{1, \dots, r\}$	$H_{G_1, \dots, G_m}(\vec{x}) = \frac{\prod_{i=1}^k (\mu_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) - \mu_{i,1}(0, \dots, 0))}{\prod_{i=1}^k (\mu_{i,1}(1, \dots, 1) - \mu_{i,1}(0, \dots, 0))}$
<b>6S1C4.1.6</b>	$n_j = 1, m = 1, \alpha_1 = 0,$ $\mu_{j,1}(\cdot)(\vec{x}) = \ell_{j,1}(0, \dots, 0),$ $v_{j,1}(0, \dots, 0) = \sup\{t \in$ $\mathbb{R}: (t_1, \dots, t_{j-1}, t, t_{j+1}, \dots, t_s) \in S_\varphi\},$ $m_{j,1}(0, \dots, 0) = \inf\{t \in$ $\mathbb{R}: (t_1, \dots, t_{j-1}, t, t_{j+1}, \dots, t_s) \in S_\varphi\} \mathbf{e}$ $\varphi'(t_1, \dots, t_r) = \frac{1}{\prod_{j=1}^r (\ell_{j,1}(1, \dots, 1) - \ell_{j,1}(0, \dots, 0))},$ $p/t_j \in [\ell_{j,1}(0, \dots, 0), \ell_{j,1}(1, \dots, 1)],$ $\forall j \in \{1, \dots, r\}$	$H_{G_1, \dots, G_m}(\vec{x}) = \frac{\prod_{j=1}^r (\ell_{j,1}(\cdot)(\vec{x}) - \ell_{j,1}(0, \dots, 0))}{\prod_{j=1}^r (\ell_{j,1}(1, \dots, 1) - \ell_{j,1}(0, \dots, 0))}$
<b>7S1C4.1.6</b>	$m = 1, \alpha_1 = 0 \mathbf{e}$ $\mu_{j,1}(1, \dots, 1) = \ell_{j,1}(1, \dots, 1)$	$H_{G_1, \dots, G_m}(\vec{x}) = 1 - \sum_{j_r=1}^{n_r} \dots \sum_{j_1=1}^{n_1} \int_{m_{r,j_r}(\cdot)(\vec{x})}^{v_{r,j_r}(\cdot)(\vec{x})} \dots \int_{m_{1,j_1}(\cdot)(\vec{x})}^{v_{1,j_1}(\cdot)(\vec{x})} d\varphi(t_1, \dots, t_r)$
<b>8S1C4.1.6</b>	$n_j = 1, \theta_i = 1, \mathbf{e}$ $\mu_{j,1}(1, \dots, 1) = \ell_{j,1}(1, \dots, 1)$	$H_{G_1, \dots, G_m}(\vec{x}) = 1 - \prod_{z=1}^m (v_z(\cdot)(\vec{x}))^{\alpha_z} \int_{m_{r,1}(\cdot)(\vec{x})}^{v_{r,1}(\cdot)(\vec{x})} \dots \int_{m_{1,1}(\cdot)(\vec{x})}^{v_{1,1}(\cdot)(\vec{x})} d\varphi(t_1, \dots, t_r)$
<b>9S1C4.1.6</b>	$n_j = 1, m = 1, \alpha_1 = 0,$ $\mu_{j,1}(1, \dots, 1) = \ell_{j,1}(1, \dots, 1)$	$H_{G_1, \dots, G_m}(\vec{x}) = 1 - \int_{m_{r,1}(\cdot)(\vec{x})}^{v_{r,1}(\cdot)(\vec{x})} \dots \int_{m_{1,1}(\cdot)(\vec{x})}^{v_{1,1}(\cdot)(\vec{x})} d\varphi(t_1, \dots, t_r)$

<b>10S1C4.1.6</b>	$\begin{aligned} n_j &= 1, m = 1, \alpha_1 = 0, \\ \mu_{j,1}(1, \dots, 1) &= \ell_{j,1}(1, \dots, 1) \mathbf{e} \\ \varphi'(t_1, \dots, t_r) &= \frac{1}{\prod_{j=1}^r (\nu_{j,1}(0, \dots, 0) - m_{j,1}(0, \dots, 0))}, \\ \rho/t_j &\in [m_{j,1}(0, \dots, 0), \nu_{j,1}(0, \dots, 0)], \\ &\forall j \in \{1, \dots, r\} \end{aligned}$	$H_{G_1, \dots, G_m}(\vec{x}) = 1 - \frac{\prod_{j=1}^r (\nu_{j,1}(\cdot)(\vec{x}) - m_{j,1}(\cdot)(\vec{x}))}{\prod_{j=1}^r (\nu_{j,1}(0, \dots, 0) - m_{j,1}(0, \dots, 0))}$
<b>11S1C4.1.6</b>	$\begin{aligned} n_j &= 1, m = 1, \alpha_1 = 0, \\ m_{j,1}(\cdot)(\vec{x}) &= \nu_{j,1}(0, \dots, 0), \\ \mu_{j,1}(1, \dots, 1) &= \ell_{j,1}(1, \dots, 1) \mathbf{e} \\ \varphi'(t_1, \dots, t_r) &= \frac{1}{\prod_{j=1}^r (\nu_{j,1}(0, \dots, 0) - \nu_{j,1}(1, \dots, 1))}, \\ \rho/t_j &\in [\nu_{j,1}(0, \dots, 0), \nu_{j,1}(0, \dots, 0)], \\ &\forall j \in \{1, \dots, r\} \end{aligned}$	$H_{G_1, \dots, G_m}(\vec{x}) = \frac{\prod_{j=1}^r (\nu_{j,1}(\cdot)(\vec{x}) - \nu_{j,1}(0, \dots, 0))}{\prod_{j=1}^r (\nu_{j,1}(1, \dots, 1) - \nu_{j,1}(0, \dots, 0))}$
<b>12S1C4.1.6</b>	$\begin{aligned} n_j &= 1, m = 1, \alpha_1 = 0, \\ \nu_{j,1}(\cdot)(\vec{x}) &= m_{j,1}(0, \dots, 0), \\ \mu_{j,1}(1, \dots, 1) &= \ell_{j,1}(1, \dots, 1) \mathbf{e} \\ \varphi'(t_1, \dots, t_r) &= \frac{1}{\prod_{j=1}^r (m_{j,1}(1, \dots, 1) - m_{j,1}(0, \dots, 0))}, \\ \rho/t_j &\in [m_{j,1}(0, \dots, 0), m_{j,1}(1, \dots, 1)], \\ &\forall j \in \{1, \dots, r\} \end{aligned}$	$H_{G_1, \dots, G_m}(\vec{x}) = \frac{\prod_{j=1}^r (m_{j,1}(\cdot)(\vec{x}) - m_{j,1}(0, \dots, 0))}{\prod_{j=1}^r (m_{j,1}(1, \dots, 1) - m_{j,1}(0, \dots, 0))}$
<b>13S1C3.1.6</b>	$n_j = 1, m = 1 \mathbf{e} \alpha_1 = 0.$	$H_{G_1, \dots, G_m}(\vec{x}) = 1 - \int_{m_{r,1}(\cdot)(\vec{x})}^{\nu_{r,1}(\cdot)(\vec{x})} \dots \int_{m_{1,1}(\cdot)(\vec{x})}^{\nu_{1,1}(\cdot)(\vec{x})} d\varphi(t_1, \dots, t_r) + \int_{\ell_{r,1}(\cdot)(\vec{x})}^{\mu_{r,1}(\cdot)(\vec{x})} \dots \int_{\ell_{1,1}(\cdot)(\vec{x})}^{\mu_{1,1}(\cdot)(\vec{x})} d\varphi(t_1, \dots, t_r)$
<b>14S1C3.1.6</b>	$\begin{aligned} n_j &= 1, m = 1, \alpha_1 = 0 \mathbf{e} \\ \varphi'(t_1, \dots, t_r) &= \frac{1}{\prod_{i=1}^k (\nu_{j,1}(0, \dots, 0) - m_{j,1}(0, \dots, 0))}, \\ \rho/t_i &\in [m_{j,1}(0, \dots, 0), \nu_{j,1}(0, \dots, 0)], \\ &\forall j \in \{1, \dots, r\} \end{aligned}$	$H_{G_1, \dots, G_m}(\vec{x}) = 1 - \frac{\prod_{i=1}^k (\nu_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) - m_{i,1}(\cdot)(\vec{x})) - \prod_{i=1}^k (\mu_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) - \ell_{i,1}(\cdot)(\vec{x}))}{\prod_{i=1}^k (\nu_{j,1}(0, \dots, 0) - m_{j,1}(0, \dots, 0))}$

<b>15S1C4.1.6</b>	$\mu_{j,1}(\cdot)(\vec{x}) = \mu^j \left( (1 - \gamma_j)u_{m+j}(\cdot)(\vec{x}) + \gamma_j \right),$ $\ell_{j,1}(\cdot)(\vec{x}) = \ell^j \left( (1 - \gamma_j)u_{m+j}(\cdot)(\vec{x}) + \gamma_j \right),$ $v_{j,1}(\cdot)(\vec{x}) = \mu^j \left( \gamma_j v_{m+j}(\cdot)(\vec{x}) \right),$ $m_{j,1}(\cdot)(\vec{x}) = \ell^j \left( \gamma_j v_{m+j}(\cdot)(\vec{x}) \right),$ $n_j = 1, \alpha_z > 0 \text{ e } 0 \leq \gamma_j \leq 1.$	$H_{G_1, \dots, G_m}(\vec{x}) = 1 - \prod_{z=1}^m \left( (1 - \theta_z)v_z(\cdot)(\vec{x}) + \theta_z \right)^{\alpha_z} \int_{m_{r,1}(\cdot)(\vec{x})}^{v_{r,1}(\cdot)(\vec{x})} \dots \int_{m_{1,1}(\cdot)(\vec{x})}^{v_{1,1}(\cdot)(\vec{x})} d\varphi(t_1, \dots, t_r)$ $+ \prod_{z=1}^m \left( \theta_z u_z(\cdot)(\vec{x}) \right)^{\alpha_z} \int_{\ell_{r,1}(\cdot)(\vec{x})}^{\mu_{r,1}(\cdot)(\vec{x})} \dots \int_{\ell_{1,1}(\cdot)(\vec{x})}^{\mu_{1,1}(\cdot)(\vec{x})} d\varphi(t_1, \dots, t_r)$
<b>16S1C4.1.6</b>	$\mu_{i,1}(\cdot)(\vec{x}) = \mu^i \left( (1 - \gamma_j)u_{m+j}(\cdot)(\vec{x}) + \gamma_j \right),$ $\ell_{j,1}(\cdot)(\vec{x}) = -\infty,$ $v_{j,1}(\cdot)(\vec{x}) = \mu^j \left( \gamma_j v_{m+j}(\cdot)(\vec{x}) \right),$ $m_{j,1}(\cdot)(\vec{x}) = -\infty,$ $n_j = 1 \text{ e } 0 \leq \gamma_j \leq 1.$	$H_{G_1, \dots, G_m}(\vec{x}) = 1 - \prod_{z=1}^m \left( (1 - \theta_z)v_z(\cdot)(\vec{x}) + \theta_z \right)^{\alpha_z} \int_{-\infty}^{v_{r,1}(\cdot)(\vec{x})} \dots \int_{-\infty}^{v_{1,1}(\cdot)(\vec{x})} d\varphi(t_1, \dots, t_r)$ $+ \prod_{z=1}^m \left( \theta_z u_z(\cdot)(\vec{x}) \right)^{\alpha_z} \int_{-\infty}^{\mu_{r,1}(\cdot)(\vec{x})} \dots \int_{-\infty}^{\mu_{1,1}(\cdot)(\vec{x})} d\varphi(t_1, \dots, t_r)$
<b>17S1C4.1.6</b>	$\mu_{j,1}(\cdot)(\vec{x}) = +\infty,$ $\ell_{j,1}(\cdot)(\vec{x}) = \ell^j \left( (1 - \gamma_j)u_{m+j}(\cdot)(\vec{x}) + \gamma_j \right),$ $v_{j,1}(\cdot)(\vec{x}) = +\infty,$ $m_{j,1}(\cdot)(\vec{x}) = \ell^j \left( \gamma_j v_{m+j}(\cdot)(\vec{x}) \right),$ $n_j = 1 \text{ e } 0 \leq \gamma_j \leq 1.$	$H_{G_1, \dots, G_m}(\vec{x}) = 1 - \prod_{z=1}^m \left( (1 - \theta_z)v_z(\cdot)(\vec{x}) + \theta_z \right)^{\alpha_z} \int_{m_{r,1}(\cdot)(\vec{x})}^{+\infty} \dots \int_{m_{1,1}(\cdot)(\vec{x})}^{+\infty} d\varphi(t_1, \dots, t_r)$ $+ \prod_{z=1}^m \left( \theta_z u_z(\cdot)(\vec{x}) \right)^{\alpha_z} \int_{\ell_{r,1}(\cdot)(\vec{x})}^{+\infty} \dots \int_{\ell_{1,1}(\cdot)(\vec{x})}^{+\infty} d\varphi(t_1, \dots, t_r)$
<b>18S1C4.1.6</b>	$\mu_{j,1}(\cdot)(\vec{x}) = v^j \left( \gamma_j v_{m+j}(\cdot)(\vec{x}) \right),$ $\ell_{j,1}(\cdot)(\vec{x}) = m^j \left( \gamma_j v_{m+j}(\cdot)(\vec{x}) \right),$ $v_{j,1}(\cdot)(\vec{x}) = v^j \left( (1 - \gamma_j)u_{m+j}(\cdot)(\vec{x}) + \gamma_j \right),$ $m_{j,1}(\cdot)(\vec{x}) = m^j \left( (1 - \gamma_j)u_{m+j}(\cdot)(\vec{x}) + \gamma_j \right),$ $n_j = 1, \alpha_z > 0 \text{ e } 0 \leq \gamma_j \leq 1.$	$H_{G_1, \dots, G_m}(\vec{x}) = 1 - \prod_{z=1}^m \left( (1 - \theta_z)v_z(\cdot)(\vec{x}) + \theta_z \right)^{\alpha_z} \int_{m_{r,1}(\cdot)(\vec{x})}^{v_{r,1}(\cdot)(\vec{x})} \dots \int_{m_{1,1}(\cdot)(\vec{x})}^{v_{1,1}(\cdot)(\vec{x})} d\varphi(t_1, \dots, t_r)$ $+ \prod_{z=1}^m \left( \theta_z u_z(\cdot)(\vec{x}) \right)^{\alpha_z} \int_{\ell_{r,1}(\cdot)(\vec{x})}^{\mu_{r,1}(\cdot)(\vec{x})} \dots \int_{\ell_{1,1}(\cdot)(\vec{x})}^{\mu_{1,1}(\cdot)(\vec{x})} d\varphi(t_1, \dots, t_r)$

<b>19S1C4.1.6</b>	$\mu_{j,1}(\cdot)(\vec{x}) = v^j \left( \gamma_j v_{m+j}(\cdot)(\vec{x}) \right),$ $\ell_{j,1}(\cdot)(\vec{x}) = -\infty,$ $v_{j,1}(\cdot)(\vec{x}) = v^j \left( (1 - \gamma_j) u_{m+j}(\cdot)(\vec{x}) + \gamma_j \right),$ $m_{j,1}(\cdot)(\vec{x}) = -\infty,$ $n_j = 1 \text{ e } 0 \leq \gamma_j \leq 1.$	$H_{G_1, \dots, G_m}(\vec{x}) = 1 - \prod_{z=1}^m \left( (1 - \theta_z) v_z(\cdot)(\vec{x}) + \theta_z \right)^{\alpha_z} \int_{-\infty}^{v_{r,1}(\cdot)(\vec{x})} \dots \int_{-\infty}^{v_{1,1}(\cdot)(\vec{x})} d\varphi(t_1, \dots, t_r)$ $+ \prod_{z=1}^m \left( \theta_z u_z(\cdot)(\vec{x}) \right)^{\alpha_z} \int_{-\infty}^{\mu_{r,1}(\cdot)(\vec{x})} \dots \int_{-\infty}^{\mu_{1,1}(\cdot)(\vec{x})} d\varphi(t_1, \dots, t_r)$
<b>20S1C4.1.6</b>	$\mu_{j,1}(\cdot)(\vec{x}) = +\infty,$ $\ell_{j,1}(\cdot)(\vec{x}) = m^j \left( \gamma_j v_{m+j}(\cdot)(\vec{x}) \right),$ $v_{j,1}(\cdot)(\vec{x}) = +\infty,$ $m_{j,1}(\cdot)(\vec{x}) = m^j \left( (1 - \gamma_j) u_{m+j}(\cdot)(\vec{x}) + \gamma_j \right),$ $n_j = 1 \text{ e } 0 \leq \gamma_j \leq 1.$	$H_{G_1, \dots, G_m}(\vec{x}) = 1 - \prod_{z=1}^m \left( (1 - \theta_z) v_z(\cdot)(\vec{x}) + \theta_z \right)^{\alpha_z} \int_{m_{r,1}(\cdot)(\vec{x})}^{+\infty} \dots \int_{m_{1,1}(\cdot)(\vec{x})}^{+\infty} d\varphi(t_1, \dots, t_r)$ $+ \prod_{z=1}^m \left( \theta_z u_z(\cdot)(\vec{x}) \right)^{\alpha_z} \int_{\ell_{r,1}(\cdot)(\vec{x})}^{+\infty} \dots \int_{\ell_{1,1}(\cdot)(\vec{x})}^{+\infty} d\varphi(t_1, \dots, t_r)$
<b>21S1C3.1.6</b>	$n_j = 1.$	$H_{G_1, \dots, G_m}(\vec{x}) = 1 - \prod_{z=1}^m \left( (1 - \theta_z) v_z(\cdot)(\vec{x}) + \theta_z \right)^{\alpha_z} \int_{m_{r,1}(\cdot)(\vec{x})}^{v_{r,1}(\cdot)(\vec{x})} \dots \int_{m_{1,1}(\cdot)(\vec{x})}^{v_{1,1}(\cdot)(\vec{x})} d\varphi(t_1, \dots, t_r)$ $+ \prod_{z=1}^m \left( \theta_z u_z(\cdot)(\vec{x}) \right)^{\alpha_z} \int_{\ell_{r,1}(\cdot)(\vec{x})}^{\mu_{r,1}(\cdot)(\vec{x})} \dots \int_{\ell_{1,1}(\cdot)(\vec{x})}^{\mu_{1,1}(\cdot)(\vec{x})} d\varphi(t_1, \dots, t_r)$
<b>22S1C3.1.6</b>	$\mu_{j,1}(\cdot)(\vec{x}) = +\infty,$ $\ell_{j,1}(\cdot)(\vec{x}) = -\infty,$ $v_{j,1}(\cdot)(\vec{x}) = +\infty,$ $m_{j,1}(\cdot)(\vec{x}) = -\infty$ $\text{e } n_j = 1.$	$H_{G_1, \dots, G_m}(\vec{x}) = 1 - \prod_{z=1}^m \left( (1 - \theta_z) v_z(\cdot)(\vec{x}) + \theta_z \right)^{\alpha_z}$ $+ \prod_{z=1}^m \left( \theta_z u_z(\cdot)(\vec{x}) \right)^{\alpha_z}$

O Corolário 4.1.7 mostra outra alternativa para obtermos classes de distribuições probabilísticas multivariadas a partir do Teorema 4.1.

**Corolário 4.1.7 (C4.1.7): Método normalizado gerador de classes de distribuições probabilísticas multivariadas.**

Sejam  $\mathfrak{F}: \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $w_{j,1}: [0,1]^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  e  $z_{j,1}: [0,1]^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , funções monotônicas, contínuas e deriváveis tais que:

[e4.1]  $\mathfrak{F}$  é uma *fda*;

[e4.2]  $w_{j,1}$  são não decrescentes e  $z_{j,1}$  são não crescentes,  $\forall j \in \{1, \dots, s\}$ ;

[e4.3]  $\mathfrak{F}$  é uma *fda* sem pontos de descontinuidade ou a função  $z_{j,1}(\cdot)(x_1, \dots, x_n)$  são constantes à direita na vizinhança dos pontos cujas imagens são pontos de descontinuidades de  $\mathfrak{F}$ , sendo também contínuas em tais pontos e  $\mathfrak{F}$  não possui pontos de descontinuidade no conjunto  $\{z_{j,1}(0, \dots, 0), z_{j,1}(1, \dots, 1), w_{j,1}(0, \dots, 0), w_{j,1}(1, \dots, 1)\}$ .

$$\text{Então, } H_{G_{1,\dots,m}}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\int_{w_{s,1}(0,\dots,0)}^{w_{s,1}(\cdot)(x_1,\dots,x_n)} \dots \int_{w_{1,1}(0,\dots,0)}^{w_{1,1}(\cdot)(x_1,\dots,x_n)} d\mathfrak{F}(t_1,\dots,t_s) - \int_{z_{s,1}(0,\dots,0)}^{z_{s,1}(\cdot)(x_1,\dots,x_n)} \dots \int_{z_{1,1}(0,\dots,0)}^{z_{1,1}(\cdot)(x_1,\dots,x_n)} d\mathfrak{F}(t_1,\dots,t_s)}{\int_{w_{s,1}(0,\dots,0)}^{w_{s,1}(1,\dots,1)} \dots \int_{w_{1,1}(0,\dots,0)}^{w_{1,1}(1,\dots,1)} d\mathfrak{F}(t_1,\dots,t_s) - \int_{z_{s,1}(0,\dots,0)}^{z_{s,1}(1,\dots,1)} \dots \int_{z_{1,1}(0,\dots,0)}^{z_{1,1}(1,\dots,1)} d\mathfrak{F}(t_1,\dots,t_s)}$$

é um funcional gerador de classes de distribuições de probabilísticas.

**Demonstração:**

No Teorema 4.1, considere  $k = 1$ ,  $\eta_i = 1$ ,  $F$  a *fda* da uniforme  $[0,1]$ ,  $U_{1,1}(x_1, \dots, x_n) =$

$$\frac{\int_{w_{s,1}(0,\dots,0)}^{w_{s,1}(\cdot)(x_1,\dots,x_n)} \dots \int_{w_{1,1}(0,\dots,0)}^{w_{1,1}(\cdot)(x_1,\dots,x_n)} d\mathfrak{F}(t_1,\dots,t_s) - \int_{z_{s,1}(0,\dots,0)}^{z_{s,1}(\cdot)(x_1,\dots,x_n)} \dots \int_{z_{1,1}(0,\dots,0)}^{z_{1,1}(\cdot)(x_1,\dots,x_n)} d\mathfrak{F}(t_1,\dots,t_s)}{\int_{w_{s,1}(0,\dots,0)}^{w_{s,1}(1,\dots,1)} \dots \int_{w_{1,1}(0,\dots,0)}^{w_{1,1}(1,\dots,1)} d\mathfrak{F}(t_1,\dots,t_s) - \int_{z_{s,1}(0,\dots,0)}^{z_{s,1}(1,\dots,1)} \dots \int_{z_{1,1}(0,\dots,0)}^{z_{1,1}(1,\dots,1)} d\mathfrak{F}(t_1,\dots,t_s)} =$$

e  $L_{1,1}(x_1, \dots, x_n) = 0$ ,  $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Note que  $U_{1,1}(x_1, \dots, x_n)$  e  $L_{1,1}(x_1, \dots, x_n)$  satisfazem as hipóteses do Teorema 4.1, pois:  $U_{1,1}(x_1, \dots, x_n)$  é não decrescente e

$L_{1,1}(x_1, \dots, x_n)$  é não crescente, com  $\lim_{(x_1,\dots,x_n) \rightarrow (+\infty,\dots,+\infty)} U_{1,1}(x_1, \dots, x_n) = 1$ ,

$$\lim_{(x_1,\dots,x_n) \rightarrow (-\infty,\dots,-\infty)} U_{1,1}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{(x_1,\dots,x_n) \rightarrow (-\infty,\dots,-\infty)} L_{1,1}(x_1, \dots, x_n),$$

$\lim_{(x_1,\dots,x_n) \rightarrow (+\infty,\dots,+\infty)} L_{1,1}(x_1, \dots, x_n) = 0$ , ambas são contínuas à direita e  $F$  é uma *fda*

sem pontos de descontinuidade.

Então, como as hipóteses do Teorema 4.1 são satisfeitas, temos que

$$H_{G_{1,\dots,m}}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\int_{w_{S,1}(0,\dots,0)}^{w_{S,1}(\cdot)(x_1,\dots,x_n)} \dots \int_{w_{1,1}(0,\dots,0)}^{w_{1,1}(\cdot)(x_1,\dots,x_n)} d\mathfrak{F}(t_1,\dots,t_s) - \int_{z_{S,1}(0,\dots,0)}^{z_{S,1}(\cdot)(x_1,\dots,x_n)} \dots \int_{z_{1,1}(0,\dots,0)}^{z_{1,1}(\cdot)(x_1,\dots,x_n)} d\mathfrak{F}(t_1,\dots,t_s)}{\int_{w_{S,1}(0,\dots,0)}^{w_{S,1}(1,\dots,1)} \dots \int_{w_{1,1}(0,\dots,0)}^{w_{1,1}(1,\dots,1)} d\mathfrak{F}(t_1,\dots,t_s) - \int_{z_{S,1}(0,\dots,0)}^{z_{S,1}(1,\dots,1)} \dots \int_{z_{1,1}(0,\dots,0)}^{z_{1,1}(1,\dots,1)} d\mathfrak{F}(t_1,\dots,t_s)}$$

é um funcional gerador de classes de distribuições de probabilidades. ■

O Teorema 4.2 mostra que o Teorema 4.1 e os seus corolários são todos equivalentes entre si.

#### **Teorema 4.2 (T4.2): Equivalência entre o Teorema 4.1 e os seus corolários.**

O Teorema 4.1 e todos os seus corolários geram exatamente as mesmas distribuições probabilísticas multivariadas.

#### ***Demonstração:***

A demonstração deste teorema é análoga a apresentada na prova do Teorema 3.2, sendo assim a mesma será omitida. ■

#### **4.5. Suportes para as Classes de Distribuições Probabilísticas para o caso multivariado.**

A seguir apresentamos um estudo detalhado dos conjuntos suportes das classes e das distribuições geradas pelos funcionais dos Corolários 4.1.5 a 4.1.7 1.

Primeiro observemos que por definição de suporte de distribuição de probabilidade, teremos que para qualquer distribuição  $F$ , o seu suporte,  $S_F$  é dado por  $S_F = \{x \in \mathbb{R}: F(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - F(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i - \varepsilon, x_{i+1}, \dots, x_n) > 0, \forall \varepsilon > 0, \text{ para algum } i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$ . Vejamos então a seguinte proposição:

#### **Teorema 4.3 (T4.3): Teorema geral dos suportes para o caso multivariado.**

Seja  $H_{G_{1,\dots,G_m}}(x_1, \dots, x_n)$  a função de distribuição gerada a partir do Corolário 4.1.5 (respectivamente, 4.1.6). Então  $S_{H_{G_{1,\dots,G_m}}} \subset \cup_{j=1}^m S_{G_j}$ .



**Demonstração:**

Por ser de forma análoga à demonstração apresentada na versão univariada do Teorema 3.3 já apresentado, omitiremos a mesma. ■

O Corolário 4.3.1 mostra um caso especial em que a distribuição  $H_{G_1, \dots, G_m}(x_1, \dots, x_n)$  é discreta.

**Corolário 4.3.1 (C4.3.1): Baseline discreta multivariada gera distribuição discreta multivariada.**

Se todas as  $G_j$ 's são discretas multivariada, então  $H_{G_1, \dots, G_m}(x_1, \dots, x_n)$  é discreta multivariada.

**Demonstração:**

A demonstração é análoga à apresentada no Corolário 3.3.1. ■

O Teorema 4.4 mostra condições em que  $S_{H_{G_1, \dots, G_m}} = \bigcup_{j=1}^m S_{G_j}$ .

**Teorema 4.4 (T4.4): Suporte de distribuição multivariada é a união dos suportes da baseline multivariadas.**

Se no Corolário 4.1.5 (respectivamente, 4.1.6)

[f4.1]  $S_F$  for um conjunto convexo;

[f4.2]  $\mu_{i, n_i}(1, \dots, 1) = \sup\{t \in \mathbb{R}: (t_1, \dots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \dots, t_n) \in S_F\}$  e  $\ell_{i, 1}(1, \dots, 1) = \inf\{t \in \mathbb{R}: (t_1, \dots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \dots, t_n) \in S_F\}$ ,  $\mathcal{U}(\cdot)(\vec{x}) > 0$ ,  $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ , e  $\mu_{i, l}(\cdot)(\vec{x})$  ou  $\ell_{i, l}(\cdot)(\vec{x})$ , para algum  $l \in \{1, \dots, \eta_i\}$  e  $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ , forem estritamente monotônicas ou  $\nu_{i, n_i}(0, \dots, 0) = \sup\{t \in \mathbb{R}: (t_1, \dots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \dots, t_n) \in S_F\}$  e  $m_{i, 1}(0, \dots, 0) = \inf\{t \in \mathbb{R}: (t_1, \dots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \dots, t_n) \in S_F\}$ ,  $\vartheta(\cdot)(\vec{x}) > 0$ ,  $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ , e  $\nu_{i, l}(\cdot)(\vec{x})$  ou  $m_{i, l}(\cdot)(\vec{x})$ , para algum  $l \in \{1, \dots, \eta_i\}$  e  $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ , forem estritamente monotônicas.

Então  $S_{H_{G_1, \dots, G_m}} = \bigcup_{j=1}^m S_{G_j}$ .

**Demonstração:**

Esta demonstração será omitida por ser análoga a realizada no Teorema 3.4. ■

O Teorema 4.5 mostra condições em que a distribuição  $H_{G_1, \dots, G_m}(x_1, \dots, x_n)$  é contínua.

**Teorema 4.5 (T4.5): Distribuições de funções contínuas multivariadas geram distribuições de funções contínuas multivariadas.**

Se  $F(t_1, \dots, t_k)$ ,  $G_1, \dots, G_m$  são *fda's* contínuas no Corolário 4.1.5 (respectivamente, 4.1.6),  $\mu_{i,l}$ ,  $\ell_{i,l}$ ,  $\mathcal{U}$ ,  $\nu_{i,l}$ ,  $m_{i,l}$  e  $\vartheta$  são funções contínuas, então  $H_{G_1, \dots, G_m}(x_1, \dots, x_n)$  será uma *fda* contínua.

**Demonstração:**

A demonstração deste teorema é análoga ao Teorema 3.5, sendo desnecessária sua apresentação. ■

O Teorema 4.6 mostra condições em que a distribuição  $H_{G_1, \dots, G_m}(x_1, \dots, x_n)$  será uma *fda* de *v. a.* contínua.

**Teorema 4.6 (T4.6): Distribuições de variáveis aleatórias contínuas multivariadas geram distribuições de variáveis aleatórias contínuas multivariadas.**

Se  $F(t_1, \dots, t_k)$ ,  $G_1, \dots, G_m$  forem *fda's* de *v. a.'s* contínuas no Corolário 4.1.5 (respectivamente, 4.1.6),  $\mu_{i,l}$ ,  $\ell_{i,l}$ ,  $\mathcal{U}$ ,  $\nu_{i,l}$ ,  $m_{i,l}$  e  $\vartheta$  forem funções contínuas e diferenciáveis, então  $H_{G_1, \dots, G_m}(x_1, \dots, x_n)$  será uma *fda* de *v. a.* contínua.

**Demonstração:**

A demonstração deste teorema é análoga ao Teorema 3.6, sendo desnecessária sua apresentação. ■

O Teorema 4.7 mostra condições em que a distribuição  $H_{G_1, \dots, G_m}(x_1, \dots, x_n)$  é discreta.

**Teorema 4.7 (T4.7):** **Integrais de diferenciais de distribuições discretas multivariadas geram distribuições discretas multivariadas.**

Seja  $H_{G_1, \dots, G_m}(x_1, \dots, x_n)$  a função de distribuição gerada a partir do Corolário 4.1.5 (respectivamente, 4.1.6). Se a distribuição de probabilidade  $F(t_1, \dots, t_k)$  for discreta e  $\mathcal{U}(\cdot)(x_1, \dots, x_n) = \vartheta(\cdot)(x_1, \dots, x_n) = 1, \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , então a distribuição  $H_{G_1, \dots, G_m}(x_1, \dots, x_n)$  será discreta independente das funções monotônicas usadas como limites de integração.

***Demonstração:***

De igual modo às anteriores, a demonstração deste teorema é análoga ao Teorema 3.7 já apresentada no capítulo anterior. ■

**4.6. Nomenclatura para as Classes de Distribuições Probabilísticas e para as distribuições de probabilidades, caso multivariado.**

A partir da proposta do método gerador de distribuições de probabilidades, classes de distribuições de probabilísticas e das distribuições geradas por elas, da mesma forma que fizemos anteriormente notamos a necessidade da sistematização das nomenclaturas das expressões encontradas. Desta forma, segue a proposta por nós elaborada para uma forma geral de nomeação.

Para as distribuições geradas pelo Teorema 4.1, dividimos em duas categorias: a primeira nomeia as classes de distribuições probabilísticas e a segunda às distribuições de probabilidades geradas pelas classes.

A seguir temos as regras de nomeação das classes e das distribuições geradas pelo funcional do Corolário 4.1.5:

- a) Quando da classe de distribuições probabilísticas será: Classe + nome da expressão  $(\mathcal{U})(\vartheta)F(t_1, \dots, t_k)(\ell_{1,i_1}, \dots, \ell_{k,i_k})(\mu_{1,i_1}, \dots, \mu_{k,i_k})(m_{1,i_1}, \dots, m_{k,i_k})(\nu_{1,i_1}, \dots, \nu_{k,i_k})$ , ou seja, classe + nome do vetor  $\mathcal{U}(\cdot)(\vec{x})$  + nome do vetor  $\vartheta(\cdot)(\vec{x})$  + nome da

distribuição de  $F(t_1, \dots, t_k)$  + nome do vetor  $(\ell_{1,i_1}(\cdot), \dots, \ell_{k,i_k}(\cdot))(\vec{x})$  + nome do vetor  $(\mu_{1,i_1}(\cdot), \dots, \mu_{k,i_k}(\cdot))(\vec{x})$  + nome do vetor de  $(m_{1,i_1}(\cdot), \dots, m_{k,i_k}(\cdot))(\vec{x})$  + nome do vetor  $(v_{1,i_1}(\cdot), \dots, v_{k,i_k}(\cdot))(\vec{x})$ .

- b) Quando da distribuição probabilística gerada pela classe será: nome da classe + a substituição do vetor  $(\cdot)(\vec{x})$  pelo vetor de nomes das distribuições representadas.

Regras de nomeação das classes e das distribuições geradas pelo funcional do Corolário 4.1.6:

- a) Quando da classe de distribuições probabilísticas será: Classe complementar + nome da expressão

$$(\vartheta)(\mathcal{U})\varphi(t_1, \dots, t_r)(m_{1,i_1}, \dots, m_{r,i_r})(v_{1,i_1}, \dots, v_{r,i_r})(\ell_{1,i_1}, \dots, \ell_{r,i_r})(\mu_{1,i_1}, \dots, \mu_{r,i_r}),$$

ou seja, classe complementar + nome do vetor de  $\vartheta(\cdot)(\vec{x})$  + nome do vetor de  $\mathcal{U}(\cdot)(\vec{x})$  + nome da distribuição de  $\varphi(t_1, \dots, t_r)$  + nome do vetor de

$$(m_{1,i_1}(\cdot), \dots, m_{r,i_r}(\cdot))(\vec{x}) + \text{nome do vetor } (v_{1,i_1}(\cdot), \dots, v_{r,i_r}(\cdot))(\vec{x}) + \text{nome do vetor } (\ell_{1,i_1}(\cdot), \dots, \ell_{r,i_r}(\cdot))(\vec{x}) + \text{nome do vetor } (\mu_{1,i_1}(\cdot), \dots, \mu_{r,i_r}(\cdot))(\vec{x}).$$

- b) Quando da distribuição probabilística gerada pela classe será: nome da classe + a substituição do vetor  $(\cdot)(\vec{x})$  pelo vetor de nomes das distribuições representadas.

Regras de nomeação das classes e das distribuições geradas pelo funcional do Corolário 4.1.7:

- a) Quando da classe de distribuições probabilísticas será: Classe normalizada + nome da expressão  $(w_{1,1}, \dots, w_{s,1})\mathfrak{F}(z_{1,1}, \dots, z_{s,1})$ , ou seja, classe normalizada

+ nome do vetor de  $(w_{1,1}(\cdot), \dots, w_{s,1}(\cdot))(\vec{x})$  + nome da distribuição de

$$\mathfrak{F}(t_1, \dots, t_s) + \text{nome do vetor de } (z_{1,1}(\cdot), \dots, z_{s,1}(\cdot))(\vec{x}).$$

- b) Quando da distribuição probabilística gerada pela classe será: nome da classe + a substituição do vetor  $(\cdot)(\vec{x})$  pelo vetor de nomes das distribuições representadas.

#### **4.7. Obtenções de generalizações de modelos de classes já existentes**

Neste tópico faremos algumas aplicações para obtenção de casos bem especiais da função generalizada geradora de distribuições probabilísticas, ou seja, fazendo uso de alguns corolários do Teorema 4.1 denominado método gerador de distribuições de probabilidades e de alguns de seus casos particulares.

A seguir, a Tabela 4.5.1 mostra a obtenção de classes de distribuições probabilísticas de modelos já existentes com o uso de alguns corolários do Teorema 4.1.

Tabela 4.5.1 – Generalizações de modelos de classes já existentes

Sub-casos do 1C3.1.5 Utilizado	Distribuições Utilizadas $\varphi'(t_1, t_2)$	Funções Monotônicas	Alguns valores especiais para os parâmetros	Classe Obtida
<b>3S1C4.1.5</b>	$\frac{\alpha(1-\alpha)}{(1+t_1+t_2)^{\alpha+2}}$	$\mu_1(\cdot)(x, y) = a + \frac{G_1^{\beta_1}(x)}{1 - G_2^{\alpha_1}(x)}$ $\ell_1(\cdot)(x, y) = b \left(1 - G_3^{\theta_1}(y)\right)^{\gamma_1}$ $\mu_2(\cdot)(x, y) = b + \frac{G_4^{\beta_2}(y)}{1 - G_5^{\alpha_2}(y)}$ $\ell_2(\cdot)(x, y) = b \left(1 - G_6^{\theta_2}(y)\right)^{\gamma_2}$	$a = 0$ $b = 0$	Debasis Kundu · Rameshwar D. Gupta bivariada -G definida por Kundu e Gupta (2011)
			$G_1(x) = G_2(x) = 1 - e^{-\lambda_1 x}$ $G_4(y) = G_5(y) = 1 - e^{-\lambda_2 y}$ $\alpha_1 = \beta_1$ $\alpha_2 = \beta_2$	Distribuição exponencial bivariada generalizada definida por Kundu e Gupta (2011)
<b>9S1C4.1.5</b>	$\frac{\alpha(1-\alpha)}{(1+t_1+t_2)^{\alpha+2}}$	$v_1(\cdot)(x, y) = a + \frac{1 - G_1^{\beta_1}(x)}{G_2^{\alpha_1}(x)}$ $m_1(\cdot)(x, y) = a G_3^{\theta_1}(x)$ $v_2(\cdot)(x, y) = b + \frac{1 - G_4^{\beta_2}(y)}{G_5^{\alpha_2}(y)}$ $m_2(\cdot)(x, y) = b G_6^{\theta_2}(y)$	$a = 0$ $b = 0$	Debasis Kundu · Rameshwar D. Gupta bivariada -G definida por Kundu e Gupta (2011)
			$G_1(x) = G_2(x) = 1 - e^{-\lambda_1 x}$ $G_4(y) = G_5(y) = 1 - e^{-\lambda_2 y}$ $\alpha_1 = \beta_1$ $\alpha_2 = \beta_2$	Distribuição exponencial bivariada generalizada definida por Kundu e Gupta (2011)

## 4.8. Modelo proposto

### 4.8.1 Obtenção de uma classe de distribuições a partir do Teorema 4.1

#### 4.8.1.1 Modelo Weibull bivariada ( $G_2(y)/(1-G_2(y)), G_1(x)/(1-G_1(x))$ )

Considerando as funções monotônicas  $\mu_1(G_1, G_2)(x, y) = \frac{G_1(x)}{1-G_1(x)}$ ,  $\mu_2(G_1, G_2)(x, y) = \frac{G_2(y)}{1-G_2(y)}$ ,  $\ell_1(G_1, G_2)(x, y) = 0$ ,  $\ell_2(G_1, G_2)(x, y) = 0$  e  $f$  a  $fdp$  da distribuição conjunta Weibull bivariada  $f(t_1, t_2) = a_1 a_2 b_1 b_2 t_1^{a_1-1} t_2^{a_2-1} e^{-b_1 t_1^{a_1} - b_2 t_2^{a_2}}$  e fazendo uso do Corolário 4.1.5, teremos a classe Weibull bivariada  $\left(\frac{G_2(y)}{1-G_2(y)}, \frac{G_1(x)}{1-G_1(x)}\right)$ , conforme desenvolvimento abaixo:

$$H_{G_1, G_2}(x, y) = \int_{\ell_2(G_1, G_2)(x, y)}^{\mu_2(G_1, G_2)(x, y)} \int_{\ell_1(G_1, G_2)(x, y)}^{\mu_1(G_1, G_2)(x, y)} f(t_1, t_2) dt_1 dt_2$$

$$H_{G_1, G_2}(x, y) = \int_0^{\frac{G_2(y)}{1-G_2(y)}} \int_0^{\frac{G_1(x)}{1-G_1(x)}} a_1 a_2 b_1 b_2 t_1^{a_1-1} t_2^{a_2-1} e^{-b_1 t_1^{a_1} - b_2 t_2^{a_2}} dt_1 dt_2$$

$$H_{G_1, G_2}(x, y) = \int_0^{\frac{G_1(x)}{1-G_1(x)}} a_1 b_1 t_1^{a_1-1} e^{-b_1 t_1^{a_1}} dt_1 \int_0^{\frac{G_2(y)}{1-G_2(y)}} a_2 b_2 t_2^{a_2-1} e^{-b_2 t_2^{a_2}} dt_2$$

$$H_{G_1, G_2}(x, y) = \left(1 - e^{-b_1 \left(\frac{G_1(x)}{1-G_1(x)}\right)^{a_1}}\right) \left(1 - e^{-b_2 \left(\frac{G_2(y)}{1-G_2(y)}\right)^{a_2}}\right)$$

Derivando  $H_{G_1, G_2}(x, y)$ , teremos:

$$h_{G_1, G_2}(x, y) = a_1 a_2 b_1 b_2 \frac{g_1(x)}{(1-G_1(x))^2} \left(\frac{G_1(x)}{1-G_1(x)}\right)^{a_1-1} \exp\left(-b_1 \left(\frac{G_1(x)}{1-G_1(x)}\right)^{a_1}\right)$$

$$\frac{g_2(y)}{(1-G_2(y))^2} \left(\frac{G_2(y)}{1-G_2(y)}\right)^{a_2-1} \exp\left(-b_2 \left(\frac{G_2(y)}{1-G_2(y)}\right)^{a_2}\right)$$

#### 4.8.1.2 Função Risco usando a Classe Weibull bivariada ( $G_2(y)/(1-G_2(y)), G_1(x)/(1-G_1(x))$ )

Podemos obter a função risco  $\mathcal{R}_{G_1, \dots, G_4}(x, y)$  usando a classe Weibull bivariada  $\left(\frac{G_2(y)}{1-G_2(y)}, \frac{G_1(x)}{1-G_1(x)}\right)$ , substituindo as expressões de  $h_{G_1, \dots, G_4}(x, y)$  e de  $H_{G_1, \dots, G_4}(x, y)$  na fórmula abaixo:

$$\mathcal{R}_{G_1, \dots, G_4}(x, y) = \frac{h_{G_1, \dots, G_4}(x, y)}{1 - H_{G_1, \dots, G_4}(x, y)}$$

■

#### 4.8.1.3 Expansões da Função de Distribuição e da Densidade da Classe Weibull bivariada ( $G_2(y)/(1-G_2(y)), G_1(x)/(1-G_1(x))$ )

A seguir, veremos os cálculos do desenvolvimento da expansão da função geradora de densidade de probabilidade da classe Weibull bivariada

$$\left(\frac{G_2(y)}{1-G_2(y)}, \frac{G_1(x)}{1-G_1(x)}\right):$$

Como

$$\exp\left(-b_1 \left(\frac{G_1(x)}{1-G_1(x)}\right)^{a_1}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k b_1^k}{k!} G_1^{a_1 k}(x) (1-G_1(x))^{-a_1 k}$$

$$\exp\left(-b_2 \left(\frac{G_2(y)}{1-G_2(y)}\right)^{a_2}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j b_2^j}{j!} G_2^{a_2 j}(y) (1-G_2(y))^{-a_2 j}$$

Logo

$$h_{G_1, \dots, G_4}(x, y) = a_1 a_2 b_1 b_2$$

$$\frac{g_1(x)}{(1-G_1(x))^2} \left(\frac{G_1(x)}{1-G_1(x)}\right)^{a_1-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k b_1^k}{k!} G_1^{a_1 k}(x) (1-G_1(x))^{-a_1 k}$$

$$\frac{g_2(y)}{(1-G_2(y))^2} \left(\frac{G_2(y)}{1-G_2(y)}\right)^{a_2-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j b_2^j}{j!} G_2^{a_2 j}(y) (1-G_2(y))^{-a_2 j}$$

$$h_{G_1, G_2}(x, y) = a_1 a_2 b_1 b_2 g_1(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k b_1^k}{k!} G_1^{a_1(k+1)-1}(x) (1-G_1(x))^{-a_1(k+1)-1}$$

$$g_2(y) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j b_2^j}{j!} G_2^{a_2(j+1)}(y) (1-G_2(y))^{-a_2(j+1)-1}$$

Como



$$(1 - G_1(x))^{-a_1(k+1)-1} = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{-a_1(k+1)-1}{l} (-1)^l G_1^l(x)$$

$$(1 - G_2(y))^{-a_2(j+1)-1} = \sum_{s=0}^{\infty} \binom{-a_2(j+1)-1}{s} (-1)^s G_2^s(y)$$

Logo temos

$$h_{G_1, G_2}(x, y) = a_1 a_2 b_1 b_2 g_1(x) g_2(y)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k b_1^k}{k!} G_1^{a_1(k+1)-1}(x) \sum_{l=0}^{\infty} \binom{-a_1(k+1)-1}{l} (-1)^l G_1^l(x)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j b_2^j}{j!} G_2^{a_2(j+1)}(y) \sum_{s=0}^{\infty} \binom{-a_2(j+1)-1}{s} (-1)^s G_2^s(y)$$

$$h_{G_1, G_2}(x, y) = a_1 a_2 b_1 b_2 g_1(x) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{-a_1(k+1)-1}{l} \frac{(-1)^{k+l} b_1^k}{k!} G_1^{a_1(k+1)-1}(x) G_1^l(x)$$

$$g_2(y) \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{-a_2(j+1)-1}{s} \frac{(-1)^{j+s} b_2^j}{j!} G_2^{a_2(j+1)-1}(y) G_2^s(y)$$

$$h_{G_1, G_2}(x, y) = a_1 a_2 b_1 b_2 g_1(x) g_2(y) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{-a_1(k+1)-1}{l} \frac{(-1)^{k+l} b_1^k}{k!} G_1^{a_1(k+1)+l-1}(x)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{-a_2(j+1)-1}{s} \frac{(-1)^{j+s} b_2^j}{j!} G_2^{a_2(j+1)+s-1}(y)$$

$$h_{G_1, G_2}(x, y) = a_1 a_2 b_1 b_2 g_1(x) g_2(y) \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-a_1(k+1)-1}{l} \binom{-a_2(j+1)-1}{s}$$

$$\frac{(-1)^{k+j+i+s} b_1^k b_2^j}{k! j!} G_1^{a_1(k+1)+l-1}(x) G_2^{a_2(j+1)+s-1}(y)$$

Como

$$H_{G_1, G_2}(x, y) = \int_0^y \int_0^x f_{G_1, G_2}(t_1, t_2) dt_1 dt_2$$

Logo teremos:

$$H_{G_1, G_2}(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{-a_1(k+1)-1}{l} \binom{-a_2(j+1)-1}{s} \frac{(-1)^{k+j+j+s} a_1 a_2 b_1^{k+1} b_2^{j+1}}{(a_1(k+1)+l)(a_2(j+1)+s)k!j!} G_1^{a_1(k+1)+l}(x) G_2^{a_2(j+1)+s}(y)$$

■

#### 4.8.1.4 Expansão para os momentos bivariados de ordens $m_1$ e $m_2$ para a Classe Weibull bivariada ( $G_2(y)/(1-G_2(y)), G_1(x)/(1-G_1(x))$ )

Utilizando a expansão da *fdp*, podemos obter a expansão para os momentos bivariados de ordens  $m_1$  e  $m_2$  para a classe Weibull bivariada  $\left(\frac{G_2(y)}{1-G_2(y)}, \frac{G_1(x)}{1-G_1(x)}\right)$ :

Como

$$\mu_{m_1, m_2} = E[X_1^{m_1} X_2^{m_2}] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^{m_1} x_2^{m_2} dF(x_1, x_2)$$

Logo, teremos:

$$\mu_{m_1, m_2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{m_1} y^{m_2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{-a_1(k+1)-1}{l} \binom{-a_2(j+1)-1}{s} \frac{(-1)^{k+j+j+s} a_1 a_2 b_1^{k+1} b_2^{j+1}}{k!j!} g_1(x) g_2(y) G_1^{a_1(k+1)+l-1}(x) G_2^{a_2(j+1)+s-1}(y) dx dy$$

$$\mu_{m_1, m_2} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{-a_1(k+1)-1}{l} \binom{-a_2(j+1)-1}{s} \frac{(-1)^{k+j+j+s} a_1 a_2 b_1^{k+1} b_2^{j+1}}{k!j!} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{m_1} y^{m_2} g_1(x) g_2(y) G_1^{a_1(k+1)+l-1}(x) G_2^{a_2(j+1)+s-1}(y) dx dy$$

Portanto,

$$\mu_{m_1, m_2} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{-a_1(k+1)-1}{l} \binom{-a_2(j+1)-1}{s} \frac{(-1)^{k+j+j+s} a_1 a_2 b_1^{k+1} b_2^{j+1}}{k!j!}$$

$$\tau_{m_1, 0, a_1(k+1)+l-1, 1} \tau_{m_2, 0, a_2(j+1)+s-1, 2}$$

onde

$$\tau_{m,\eta,r,v} = E(z^m f_v(z)^\eta F_v(z)^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} z^m f_v(z)^\eta F_v(z)^r dF_v(z)$$

■

Em particular, para  $m_1 = 1$  e  $m_2 = 1$ , teremos a expansão para a média bivariada  $\mu_{1,1}$  para a classe Weibull bivariada  $\left(\frac{G_2(y)}{1-G_2(y)}, \frac{G_1(x)}{1-G_1(x)}\right)$

$$\mu_{1,1} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{-a_1(k+1)-1}{l} \binom{-a_2(j+1)-1}{s} \frac{(-1)^{k+j+j+s} a_1 a_2 b_1^{k+1} b_2^{j+1}}{k! j!}$$

$$\tau_{1,0,a_1(k+1)+l-1,1} \tau_{1,0,a_2(j+1)+s-1,2}$$

■

#### 4.8.1.5 Expansão para a função geradora de momentos bivariados para a Classe Weibull bivariada $(G_2(y)/(1-G_2(y)), G_1(x)/(1-G_1(x)))$

A seguir veremos o desenvolvimento dos cálculos da expansão para a função geradora de momentos bivariados para a classe Weibull bivariada  $\left(\frac{G_2(y)}{1-G_2(y)}, \frac{G_1(x)}{1-G_1(x)}\right)$ :

Como

$$M_{X_1 X_2}(t_1, t_2) = E(e^{t_1 X_1} e^{t_2 X_2}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t_1 x_1} e^{t_2 x_2} dF(x_1, x_2)$$

Logo, teremos:

$$M_{XY}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t_1 x} e^{t_2 y} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{-a_1(k+1)-1}{l} \binom{-a_2(j+1)-1}{s}$$

$$\frac{(-1)^{k+j+j+s} b_1^k b_2^j}{k! j!} a_1 a_2 b_1 b_2 g_1(x) g_2(y) G_1^{a_1(k+1)+l-1}(x) G_2^{a_2(j+1)+s-1}(y) dx dy$$

$$M_{XY}(t_1, t_2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{-a_1(k+1)-1}{l} \binom{-a_2(j+1)-1}{s} \frac{(-1)^{k+j+j+s} a_1 a_2 b_1^{k+1} b_2^{j+1}}{k! j!}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t_1 x} e^{t_2 y} g_1(x) g_2(y) G_1^{a_1(k+1)+l-1}(x) G_2^{a_2(j+1)+s-1}(y) dx dy$$

Como

$$e^{t_1 x} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t_1^m x^m}{m!} \quad e^{t_2 y} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t_2^r y^r}{r!}$$

Portanto,

$$M_{XY}(t_1, t_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-a_1(k+1)-1}{l} \binom{-a_2(j+1)-1}{s} \\ \frac{(-1)^{k+j+j+s} a_1 a_2 b_1^{k+1} b_2^{j+1} t_1^m t_2^r}{k! j! m! r!} \tau_{m,0,a_1(k+1)+l-1,1} \tau_{r,0,a_2(j+1)+s-1,2}$$

onde  $\tau_{m,\eta,r,v} = E(z^m f_v(z)^\eta F_v(z)^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} z^m f_v(z)^\eta F_v(z)^r dF_v(z)$ . ■

#### 4.8.1.6 Expansão para a função característica bivariada para a Classe Weibull bivariada ( $G_2(y)/(1-G_2(y)), G_1(x)/(1-G_1(x))$ )

A seguir veremos o desenvolvimento dos cálculos da expansão para a função característica bivariada para a classe Weibull bivariada  $\left(\frac{G_2(y)}{1-G_2(y)}, \frac{G_1(x)}{1-G_1(x)}\right)$ :

Como

$$\varphi_{X_1 X_2}(t_1, t_2) = E(e^{it_1 X_1} e^{it_2 X_2}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it_1 x_1} e^{it_2 x_2} dF(x_1, x_2)$$

Logo, teremos:

$$\varphi_{XY}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it_1 x} e^{it_2 y} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{-a_1(k+1)-1}{l} \binom{-a_2(j+1)-1}{s} \\ \frac{(-1)^{k+j+j+s} b_1^k b_2^j}{k! j!} a_1 a_2 b_1 b_2 g_1(x) g_2(y) G_1^{a_1(k+1)+l-1}(x) G_2^{a_2(j+1)+s-1}(y) dx dy$$

$$\varphi_{XY}(t_1, t_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{-a_1(k+1)-1}{l} \binom{-a_2(j+1)-1}{s} \frac{(-1)^{k+j+j+s} a_1 a_2 b_1^{k+1} b_2^{j+1}}{k! j!} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it_1 x} e^{it_2 y} g_1(x) g_2(y) G_1^{a_1(k+1)+l-1}(x) G_2^{a_2(j+1)+s-1}(y) dx dy$$

Como  $e^{t_1 x} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m t_1^m x^m}{m!}$  e  $e^{t_2 y} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{i^r t_2^r y^r}{r!}$ .

Portanto,

$$\varphi_{XY}(t_1, t_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-a_1(k+1)-1}{l} \binom{-a_2(j+1)-1}{s}$$

$$\frac{(-1)^{k+j+j+s} i^{m+r} a_1 a_2 b_1^{k+1} b_2^{j+1} t_1^m t_2^r}{k! j! m! r!} \tau_{m,0,a_1(k+1)+l-1,1} \tau_{r,0,a_2(j+1)+s-1,2}$$

Onde  $\tau_{m,\eta,r,v} = E(z^m f_v(z)^\eta F_v(z)^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} z^m f_v(z)^\eta F_v(z)^r dF_v(z)$ . ■

#### 4.8.1.7 Expansão para os momentos centrais bivariados de ordens $m_1$ e $m_2$ para a Classe Weibull bivariada $(G_2(y)/(1-G_2(y)), G_1(x)/(1-G_1(x)))$

A seguir veremos o desenvolvimento dos cálculos da expansão para os momentos centrais bivariados de ordens  $m_1$  e  $m_2$  para a classe Weibull bivariada

$$\left( \frac{G_2(y)}{1-G_2(y)}, \frac{G_1(x)}{1-G_1(x)} \right):$$

Como

$$\mu'_{m_1, m_2} = E \left[ (X_1 - \mu_{1,0})^{m_1} (X_2 - \mu_{0,1})^{m_2} \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - \mu_{1,0})^{m_1} (x_2 - \mu_{0,1})^{m_2} dF(x_1, x_2)$$

Temos

$$\mu'_{m_1, m_2} = \sum_{r_1=0}^{m_1} \sum_{r_2=0}^{m_2} \binom{m_1}{r_1} \binom{m_2}{r_2} (-1)^{r_1+r_2} \mu_{1,0}^{r_1} \mu_{0,1}^{r_2} \mu_{m_1-r_1, m_2-r_2}$$

Como

$$\mu_{m_1-r_1, m_2-r_2} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{-a_1(k+1)-1}{l} \binom{-a_2(j+1)-1}{s}$$

$$\frac{(-1)^{k+j+j+s} a_1 a_2 b_1^{k+1} b_2^{j+1}}{k! j!} \tau_{m_1-r_1,0,a_1(k+1)+l-1,1} \tau_{m_2-r_2,0,a_2(j+1)+s-1,2}$$

Portanto,

$$\mu'_{m_1, m_2} = \sum_{r_1=0}^{m_1} \sum_{r_2=0}^{m_2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{m_1}{r_1} \binom{m_2}{r_2} \binom{-a_1(k+1)-1}{l} \binom{-a_2(j+1)-1}{s}$$

$$\frac{(-1)^{r_1+r_2+k+j+j+s} a_1 a_2 b_1^{k+1} b_2^{j+1}}{k! j!} \mu_{1,0}^{r_1} \mu_{0,1}^{r_2} \tau_{m_1-r_1,0,a_1(k+1)+l-1,1} \tau_{m_2-r_2,0,a_2(j+1)+s-1,2}$$

■

Em particular, para  $m_1 = 1$  e  $m_2 = 1$ , teremos a expansão da covariância para a classe Weibull bivariada  $\left( \frac{G_2(y)}{1-G_2(y)}, \frac{G_1(x)}{1-G_1(x)} \right)$ , é dada por:

$$\mu'_{1,1} = \sum_{r_1=0}^1 \sum_{r_2=0}^1 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{1}{r_1} \binom{1}{r_2} \binom{-a_1(k+1)-1}{l} \binom{-a_2(j+1)-1}{s} \\ \frac{(-1)^{r_1+r_2+k+j+s} a_1 a_2 b_1^{k+1} b_2^{j+1}}{k! j!} \mu_{1,0}^{r_1} \mu_{0,1}^{r_2} \tau_{1-r_1,0,a_1(k+1)+l-1,1} \tau_{1-r_2,0,a_2(j+1)+s-1,2}$$

■

#### 4.8.1.8 Expansão para o coeficiente geral bivariado para a Classe Weibull bivariada ( $G_2(y)/(1-G_2(y)), G_1(x)/(1-G_1(x))$ )

A seguir veremos o desenvolvimento dos cálculos da expansão para o coeficiente geral para a classe Weibull bivariada  $\left(\frac{G_2(y)}{1-G_2(y)}, \frac{G_1(x)}{1-G_1(x)}\right)$ .

$$\text{Como } C_g(m_1, m_2) = \frac{E[(X_1 - \mu_{1,0})^{m_1} (X_2 - \mu_{0,1})^{m_2}]}{\mu_{2,0}^{m_1/2} \mu_{0,2}^{m_2/2}} = \frac{E[(X_1 - \mu_{1,0})^{m_1} (X_2 - \mu_{0,1})^{m_2}]}{\sigma_1^{m_1} \sigma_2^{m_2}}, \text{ então}$$

teremos:

$$C_g(m_1, m_2) = \frac{\mu'_{m_1, m_2}}{\sigma_1^{m_1} \sigma_2^{m_2}}$$

Portanto,

$$C_g(m) = \frac{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j+r} \beta^{\alpha+k} \mu^r}{k! \Gamma(\alpha)} \binom{m}{r} \binom{k+\alpha-1}{j} \tau_{m-r,0,j-\alpha-k-1,1}}{\left(\sum_{r=0}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+j+r} \beta^{\alpha+k} \mu^r}{k! \Gamma(\alpha)} \binom{2}{r} \binom{k+\alpha-1}{j} \tau_{2-r,0,j-\alpha-k-1,1}\right)^{\frac{m}{2}}}$$

Em particular, para  $m_1 = 3$  e  $m_2 = 3$ , teremos a expansão para o coeficiente de assimetria do caso particular da classe da distribuição Weibull bivariada

$\left(\frac{G_2(y)}{1-G_2(y)}, \frac{G_1(x)}{1-G_1(x)}\right)$ , é dada por:

$$C_a = C_g(3,3)$$

Similarmente, para  $m_1 = 4$  e  $m_2 = 4$ , teremos a expansão para o coeficiente de curtose do caso particular da classe da distribuição Weibull bivariada

$\left(\frac{G_2(y)}{1-G_2(y)}, \frac{G_1(x)}{1-G_1(x)}\right)$ , é dada por:  $C_c = C_g(4,4)$ . ■

#### 4.8.1.9 Derivadas da função log-verossimilhança em relação aos parâmetros para a classe Weibull bivariada ( $G_2(y)/(1-G_2(y)), G_1(x)/(1-G_1(x))$ )

A seguir, veremos os cálculos do desenvolvimento das funções escores em relação aos parâmetros para a classe Weibull bivariada  $\left(\frac{G_2(y)}{1-G_2(y)}, \frac{G_1(x)}{1-G_1(x)}\right)$ :

Como

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \text{Log} h_{G_1, G_2}(x_j, y_j; a_1, a_2, b_1, b_2, \underline{\beta}, \underline{\theta}) &= n \text{Log}(a_1 a_2 b_1 b_2) + \sum_{j=1}^n \text{Log} \left( \frac{g_1(x_j; \underline{\theta})}{(1 - G_1(x_j; \underline{\theta}))^2} \right) \\ &+ (a_1 - 1) \sum_{j=1}^n \text{Log} \left( \frac{G_1(x_j; \underline{\theta})}{1 - G_1(x_j; \underline{\theta})} \right) - b_1 \sum_{j=1}^n \left( \frac{G_1(x_j; \underline{\theta})}{1 - G_1(x_j; \underline{\theta})} \right)^{a_1} + \\ &\sum_{j=1}^n \text{Log} \left( \frac{g_2(y_j; \underline{\beta})}{(1 - G_2(y_j; \underline{\beta}))^2} \right) + (a_2 - 1) \sum_{j=1}^n \text{Log} \left( \frac{G_2(y_j; \underline{\beta})}{1 - G_2(y_j; \underline{\beta})} \right) - b_2 \sum_{j=1}^n \left( \frac{G_2(y_j; \underline{\beta})}{1 - G_2(y_j; \underline{\beta})} \right)^{a_2} \end{aligned}$$

Logo teremos que:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \text{Log} h_{G_1, G_2}(x_j, y_j; a_1, a_2, b_1, b_2, \underline{\beta}, \underline{\theta})}{\partial a_1} &= \frac{n}{a_1} + \sum_{j=1}^n \text{Log} \left( \frac{G_1(x_j; \underline{\theta})}{1 - G_1(x_j; \underline{\theta})} \right) - \\ &- a_1 b_1 \sum_{j=1}^n \left( \frac{G_1(x_j; \underline{\theta})}{1 - G_1(x_j; \underline{\theta})} \right)^{a_1 - 1} \log \left( \frac{G_1(x_j; \underline{\theta})}{1 - G_1(x_j; \underline{\theta})} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \text{Log} h_{G_1, G_2}(x_j, y_j; a_1, a_2, b_1, b_2, \underline{\beta}, \underline{\theta})}{\partial a_2} &= \frac{n}{a_2} + \sum_{j=1}^n \text{Log} \left( \frac{G_2(y_j; \underline{\beta})}{1 - G_2(y_j; \underline{\beta})} \right) - \\ &- a_1 b_1 \sum_{j=1}^n \left( \frac{G_2(y_j; \underline{\beta})}{1 - G_2(y_j; \underline{\beta})} \right)^{a_1 - 1} \log \left( \frac{G_2(y_j; \underline{\beta})}{1 - G_2(y_j; \underline{\beta})} \right) \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \text{Log} h_{G_1, G_2}(x_j, y_j; a_1, a_2, b_1, b_2, \underline{\beta}, \underline{\theta})}{\partial b_1} = \frac{n}{b_1} - \sum_{j=1}^n \left( \frac{G_1(x_j; \underline{\theta})}{1 - G_1(x_j; \underline{\theta})} \right)^{a_1}$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \text{Log} h_{G_1, G_2}(x_j, y_j; a_1, a_2, b_1, b_2, \underline{\beta}, \underline{\theta})}{\partial b_2} = \frac{n}{b_2} - \sum_{j=1}^n \left( \frac{G_2(y_j; \underline{\beta})}{1 - G_2(y_j; \underline{\beta})} \right)^{a_2}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \text{Log} h_{G_1, G_2}(x_j, y_j; a_1, a_2, b_1, b_2, \underline{\beta}, \underline{\theta})}{\partial \theta_k} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \text{Log} \left( \frac{g_1(x_j; \underline{\theta})}{(1 - G_1(x_j; \underline{\theta}))^2} \right)}{\partial \theta_k} + \\ &+ (a_1 - 1) \sum_{j=1}^n \frac{\partial \text{Log} \left( \frac{G_1(x_j; \underline{\theta})}{1 - G_1(x_j; \underline{\theta})} \right)}{\partial \theta_k} - b_1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial \left( \frac{G_1(x_j; \underline{\theta})}{1 - G_1(x_j; \underline{\theta})} \right)^{a_1}}{\partial \theta_k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \text{Log} h_{G_1, G_2}(x_j, y_j; a_1, a_2, b_1, b_2, \underline{\beta}, \underline{\theta})}{\partial \beta_l} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \text{Log} \left( \frac{g_1(x_j; \underline{\theta})}{(1 - G_1(x_j; \underline{\theta}))^2} \right)}{\partial \beta_l} + \\ &+ (a_2 - 1) \sum_{j=1}^n \frac{\partial \text{Log} \left( \frac{G_2(y_j; \underline{\beta})}{1 - G_2(y_j; \underline{\beta})} \right)}{\partial \beta_l} - b_2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial \left( \frac{G_2(y_j; \underline{\beta})}{1 - G_2(y_j; \underline{\beta})} \right)^{a_2}}{\partial \beta_l} \end{aligned}$$

#### 4.8.1.10 Entropia bivariada de Rényi usando a classe Weibull bivariada $(G_2(y)/(1-G_2(y)), G_1(x)/(1-G_1(x)))$

A entropia é uma medida de incerteza, no sentido que se maior o valor da entropia menor a informação e maior a incerteza, ou seja, maior a aleatoriedade ou desordem.

A seguir veremos o desenvolvimento dos cálculos da expansão da entropia bivariada para a classe Weibull bivariada  $\left(\frac{G_2(y)}{1-G_2(y)}, \frac{G_1(x)}{1-G_1(x)}\right)$ , usando a entropia de Rényi:

Como

$$\begin{aligned} \exp \left( -\eta b_1 \left( \frac{G_1(x)}{1 - G_1(x)} \right)^{a_1} \right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \eta^k b_1^k}{k!} G_1^{ka_1}(x) (1 - G_1(x))^{-ka_1} \\ \exp \left( -\eta b_2 \left( \frac{G_2(y)}{1 - G_2(y)} \right)^{a_2} \right) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \eta^j b_2^j}{j!} G_2^{ja_2}(y) (1 - G_2(y))^{-ja_2} \end{aligned}$$

Logo



$$h_{G_1}^\eta(x) = g_1^\eta(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \eta^k a_1^\eta b_1^{\eta+k}}{k!} G_1^{\eta(a_1-1)+ka_1}(x) (1 - G_1(x))^{-\eta(a_1-1)-ka_1}$$

$$h_{G_2}^\eta(y) = g_2^\eta(y) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \eta^j a_2^\eta b_2^{\eta+j}}{j!} G_2^{\eta(a_2-1)+ja_2}(y) (1 - G_2(y))^{-\eta(a_2-1)-ja_2}$$

Como

$$(1 - G_1(x))^{-\eta(a_1-1)-ka_1} = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{-\eta(a_1-1) - ka_1}{l} (-1)^l G_1^l(x)$$

$$(1 - G_2(y))^{-\eta(a_2-1)-ja_2} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-\eta(a_2-1) - ja_2}{r} (-1)^r G_2^r(y)$$

Logo temos

$$h_{G_1}^\eta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{-\eta(a_1-1) - ka_1}{l} \frac{(-1)^{k+l} \eta^k a_1^\eta b_1^{\eta+k}}{k!} g_1^\eta(x) G_1^{\eta(a_1-1)+ka_1+l}(x)$$

$$h_{G_2}^\eta(y) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-\eta(a_2-1) - ja_2}{r} \frac{(-1)^{j+r} \eta^j a_2^\eta b_2^{\eta+j}}{j!} g_2^\eta(y) G_2^{\eta(a_2-1)+ja_2+r}(y)$$

Logo temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_{G_1}^\eta(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{-\eta(a_1-1) - ka_1}{l} \frac{(-1)^{k+l} \eta^k a_1^\eta b_1^{\eta+k}}{k!} \int_{-\infty}^{+\infty} g_1^\eta(x) G_1^{\eta(a_1-1)+ka_1+l}(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_{G_1}^\eta(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{-\eta(a_1-1) - ka_1}{l} \frac{(-1)^{k+l} \eta^k a_1^\eta b_1^{\eta+k}}{k!} \tau_{0,\eta,\eta(a_1-1)+ka_1+l,1}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_{G_2}^\eta(y) dy = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-\eta(a_2-1) - ja_2}{r} \frac{(-1)^{j+r} \eta^j a_2^\eta b_2^{\eta+j}}{j!} \int_{-\infty}^{+\infty} g_2^\eta(y) G_2^{\eta(a_2-1)+ja_2+r}(y) dy$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_{G_2}^\eta(y) dy = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-\eta(a_2-1) - ja_2}{r} \frac{(-1)^{j+r} \eta^j a_2^\eta b_2^{\eta+j}}{j!} \tau_{0,\eta,\eta(a_2-1)+ja_2+r,2}$$

Como,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_{G_1, G_2}^\eta(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} h_{G_1}^\eta(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} h_{G_2}^\eta(y) dy$$

Assim,

$$\mathcal{L}_R(\eta) = \frac{1}{1-\eta} \log \left( \int_{-\infty}^{+\infty} h_{G_1}^\eta(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} h_{G_2}^\eta(y) dy \right)$$

Portanto,

$$\mathcal{L}_R(\eta) = \frac{1}{1-\eta} \log \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{-\eta(a_1-1) - ka_1}{l} \binom{-\eta(a_2-1) - ja_2}{r} \right. \\ \left. \frac{(-1)^{k+l+j+r} \eta^{k+j} a_1^\eta b_1^{\eta+k} a_2^\eta b_2^{\eta+j}}{k! j!} \tau_{0,\eta,\eta(a_1-1)+ka_1+l,1} \tau_{0,\eta,\eta(a_2-1)+ja_2+r,2} \right\}$$

Podemos escrever a função risco da seguinte maneira:

$$\mathcal{L}_R(\eta) = \frac{1}{1-\eta} \log \left( \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{-\eta(a_1-1) - ka_1}{l} \frac{(-1)^{k+l} \eta^k a_1^\eta b_1^{\eta+k}}{k!} \tau_{0,\eta,\eta(a_1-1)+ka_1+l,1} \right) \\ + \frac{1}{1-\eta} \log \left( \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-\eta(a_2-1) - ja_2}{r} \frac{(-1)^{j+r} \eta^j a_2^\eta b_2^{\eta+j}}{j!} \tau_{0,\eta,\eta(a_2-1)+ja_2+r,2} \right)$$

#### 4.8.2 Construção de uma distribuição da classe Weibull bivariada $(G_2(y)/(1-G_2(y)), G_1(x)/(1-G_1(x)))$

Como já vimos no início deste capítulo e no tópico anterior propomos um método gerador de distribuições e classes de distribuições, onde geramos uma classe denominada Weibull bivariada  $\left(\frac{G_2(y)}{1-G_2(y)}, \frac{G_1(x)}{1-G_1(x)}\right)$ , em que iremos aplicá-las considerando  $G_1(x) = 1 - e^{-\lambda_1 x}$  e  $G_2(y) = 1 - e^{-\lambda_2 y}$ .

##### 4.8.2.1 Distribuição Weibull bivariada $(Exp_2(y)/(1-Exp_2(y)), Exp_1(x)/(1-Exp_1(x)))$

Considerando  $G_1(x)$  e  $G_2(y)$  as *fda's* das distribuições exponenciais de parâmetros  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  no funcional gerador da classe Weibull bivariada  $\left(\frac{G_2(y)}{1-G_2(y)}, \frac{G_1(x)}{1-G_1(x)}\right)$ , teremos a distribuição Weibull bivariada  $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$ :

$$H(x, y) = \int_0^{e^{\lambda_2 y} - 1} \int_0^{e^{\lambda_1 x} - 1} a_1 a_2 b_1 b_2 t_1^{a_1 - 1} t_2^{a_2 - 1} e^{-b_1 t_1^{a_1} - b_2 t_2^{a_2}} dt_1 dt_2$$

$$H(x, y) = \left(1 - \exp(-b_1 (e^{\lambda_1 x} - 1)^{a_1})\right) \left(1 - \exp(-b_2 (e^{\lambda_2 y} - 1)^{a_2})\right)$$

Derivando  $H(x, y)$ , teremos a função densidade de probabilidade Weibull bivariada  $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$ :

$$h(x, y) = \lambda_1 \lambda_2 a_1 a_2 b_1 b_2 (e^{\lambda_1 x} - 1)^{a_1 - 1} (e^{\lambda_2 y} - 1)^{a_2 - 1} e^{\lambda_1 x + \lambda_2 y - b_1 (e^{\lambda_1 x} - 1)^{a_1} - b_2 (e^{\lambda_2 y} - 1)^{a_2}} \blacksquare$$

As figuras 4.8.2.1.1 a 4.8.2.1.2 mostram os gráficos da função densidade de probabilidade representada pelas superfícies e pelos contornos do modelo proposto denominado de distribuição Weibull bivariada  $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$  gerados a partir de alguns valores atribuídos aos parâmetros caracterizando algumas possíveis formas. Outros gráficos desta função está no apêndice B.

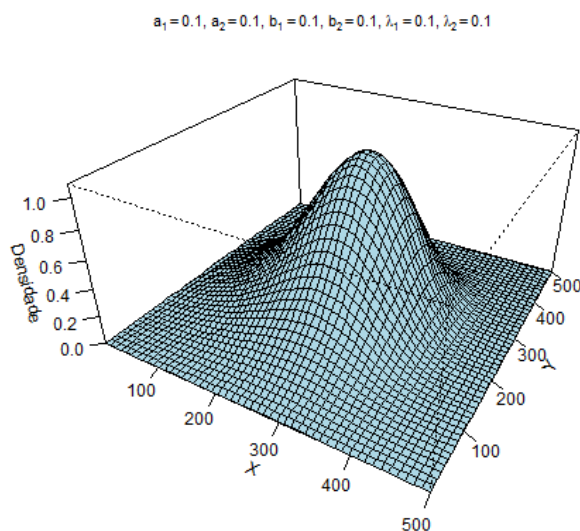


Figura 4.8.2.1.1 – Superfície da  $f_{dp}$  da Weibull bivariada  $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$

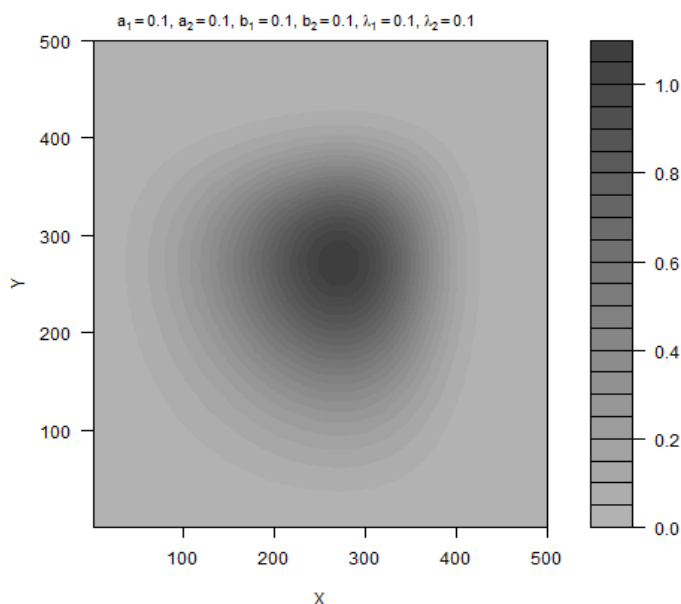


Figura 4.8.2.1.2 – Contorno da  $f_{dp}$  da Weibull bivariada  $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$

#### 4.8.2.2 Função de Risco bivariado usando a distribuição Weibull bivariada ( $\text{Exp}_2(y)/(1 - \text{Exp}_2(y))$ , $\text{Exp}_1(x)/(1 - \text{Exp}_1(x))$ )

Podemos ainda obter a função de risco usando a distribuição Weibull bivariada  $\left(\frac{\text{Exp}_2(y)}{1 - \text{Exp}_2(y)}, \frac{\text{Exp}_1(x)}{1 - \text{Exp}_1(x)}\right)$  da seguinte forma:

$$\mathcal{R}(x, y) = \frac{h(x, y)}{1 - H(x, y)}$$

Portanto,

$$\mathcal{R}(x, y) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 a_1 a_2 b_1 b_2 (e^{\lambda_1 x} - 1)^{a_1 - 1} (e^{\lambda_2 y} - 1)^{a_2 - 1} e^{\lambda_1 x + \lambda_2 y - b_1 (e^{\lambda_1 x} - 1)^{a_1} - b_2 (e^{\lambda_2 y} - 1)^{a_2}}}{1 - (1 - \exp(-b_1 (e^{\lambda_1 x} - 1)^{a_1})) (1 - \exp(-b_2 (e^{\lambda_2 y} - 1)^{a_2}))}$$

■

As figuras 4.8.2.2.1 a 4.8.2.2 mostram os gráficos da função risco representada pelas superfícies e pelos contornos do modelo proposto denominado de distribuição Weibull bivariada  $\left(\frac{\text{Exp}_2(y)}{1 - \text{Exp}_2(y)}, \frac{\text{Exp}_1(x)}{1 - \text{Exp}_1(x)}\right)$  gerados a partir de alguns valores atribuídos aos parâmetros. Outros gráficos desta função, encontram-se no apêndice B.

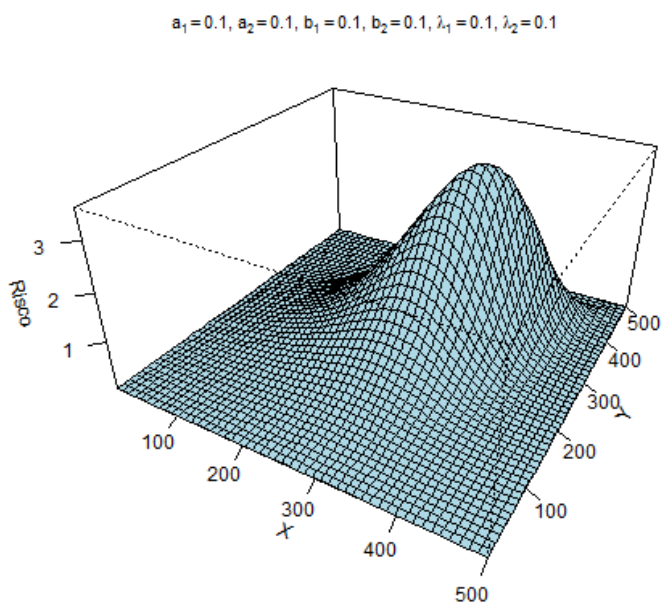


Figura 4.8.2.2.1 – Superfície da função de risco da Weibull bivariada

$$\left(\frac{\text{Exp}_2(y)}{1 - \text{Exp}_2(y)}, \frac{\text{Exp}_1(x)}{1 - \text{Exp}_1(x)}\right)$$

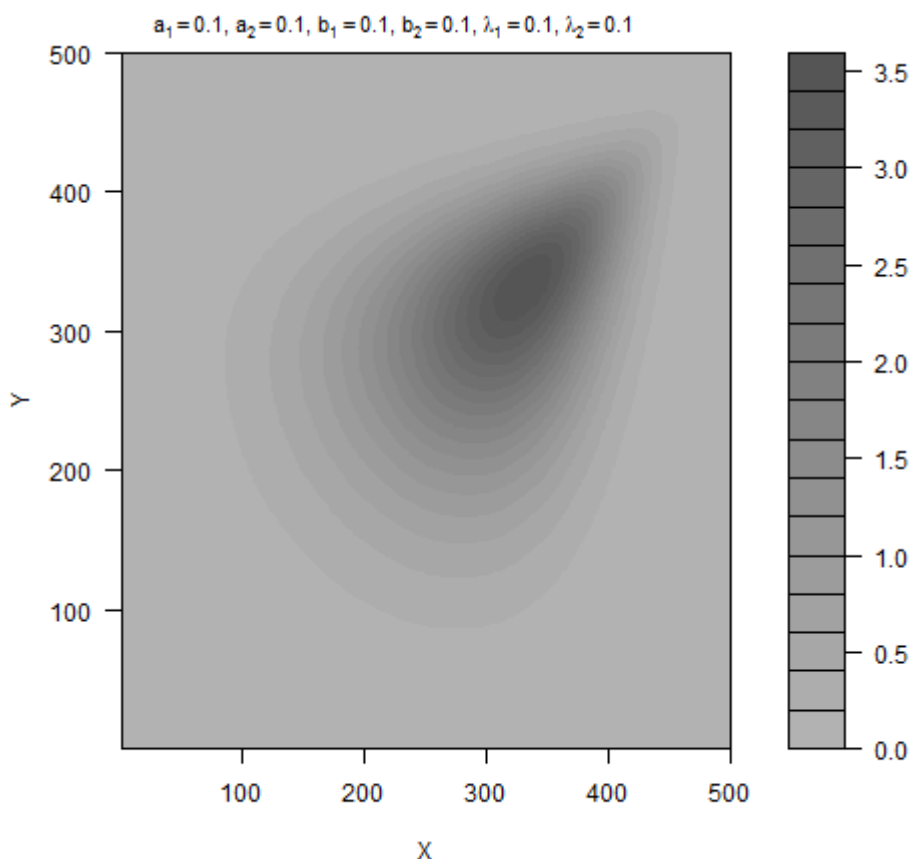


Figura 4.8.2.2.2 – Contorno da função de risco da Weibull bivariada

$$\left( \frac{\text{Exp}_2(y)}{1-\text{Exp}_2(y)}, \frac{\text{Exp}_1(x)}{1-\text{Exp}_1(x)} \right)$$

#### 4.8.2.3 Expansões das Funções de Distribuição e da Densidade da Weibull bivariada ( $\text{Exp}_2(y)/(1-\text{Exp}_2(y))$ , $\text{Exp}_1(x)/(1-\text{Exp}_1(x))$ )

Podemos obter a expansão da função densidade de probabilidade da Weibull bivariada  $\left( \frac{\text{Exp}_2(y)}{1-\text{Exp}_2(y)}, \frac{\text{Exp}_1(x)}{1-\text{Exp}_1(x)} \right)$ , da seguinte maneira.

Como

$$\exp(-b_1(e^{\lambda_1 x} - 1)^{a_1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k b_1^k}{k!} (e^{\lambda_1 x} - 1)^{ka_1}$$

$$\exp(-b_2(e^{\lambda_2 y} - 1)^{a_2}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l b_2^l}{l!} (e^{\lambda_2 y} - 1)^{la_2}$$

Logo

$$h(x, y) = \lambda_1 \lambda_2 a_1 a_2 b_1 b_2$$

$$(e^{\lambda_1 x} - 1)^{a_1 - 1} (e^{\lambda_2 y} - 1)^{a_2 - 1} e^{\lambda_1 x + \lambda_2 y} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k b_1^k}{k!} (e^{\lambda_1 x} - 1)^{ka_1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l b_2^l}{l!} (e^{\lambda_2 y} - 1)^{la_2}$$

$$h(x, y) = \lambda_1 \lambda_2 a_1 a_2 b_1 b_2$$

$$e^{\lambda_1 x + \lambda_2 y} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k b_1^k}{k!} (e^{\lambda_1 x} - 1)^{(k+1)a_1 - 1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l b_2^l}{l!} (e^{\lambda_2 y} - 1)^{(l+1)a_2 - 1}$$

Como

$$(e^{\lambda_1 x} - 1)^{(k+1)a_1 - 1} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{(k+1)a_1 - 1}{j} (-1)^j e^{\lambda_1((k+1)a_1 - j - 1)x}$$

$$(e^{\lambda_2 y} - 1)^{(l+1)a_2 - 1} = \sum_{s=0}^{\infty} \binom{(l+1)a_2 - 1}{s} (-1)^s e^{\lambda_2((l+1)a_2 - s - 1)y}$$

Temos,

$$h(x, y) = \lambda_1 \lambda_2 a_1 a_2 b_1 b_2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{(k+1)a_1 - 1}{j} \frac{(-1)^{k+j} b_1^k}{k!} e^{\lambda_1((k+1)a_1 - j)x}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{(l+1)a_2 - 1}{s} \frac{(-1)^{l+s} b_2^l}{l!} e^{\lambda_2((l+1)a_2 - s)y}$$

Portanto,

$$h(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{(k+1)a_1 - 1}{j} \binom{(l+1)a_2 - 1}{s}$$

$$\frac{(-1)^{k+j+l+s} \lambda_1 \lambda_2 a_1 a_2 b_1^{k+1} b_2^{l+1}}{k! l!} e^{\lambda_1((k+1)a_1 - j)x + \lambda_2((l+1)a_2 - s)y}$$

Como

$$H(x, y) = \int_0^y \int_0^x f_{web1}(t_1, t_2) dt_1 dt_2$$

Logo teremos

$$H(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{(k+1)a_1 - 1}{j} \binom{(l+1)a_2 - 1}{s}$$

$$\frac{\lambda_1 \lambda_2 a_1 a_2 (-1)^{k+j+l+s} b_1^{k+1} b_2^{l+1}}{(\lambda_1((k+1)a_1 - j))(\lambda_2((l+1)a_2 - s))k! l!} e^{\lambda_1((k+1)a_1 - j)x + \lambda_2((l+1)a_2 - s)y}$$

■

#### 4.8.2.4 Expansão para os momentos bivariados de ordens $m_1$ e $m_2$ da distribuição Weibull bivariada ( $\text{Exp}_2(y)/(1 - \text{Exp}_2(y))$ , $\text{Exp}_1(x)/(1 - \text{Exp}_1(x))$ )

Utilizando a expansão da  $f_{dp}$ , podemos obter a expansão para os momentos bivariados de ordens  $m_1$  e  $m_2$  da distribuição Weibull bivariada  $\left(\frac{\text{Exp}_2(y)}{1 - \text{Exp}_2(y)}, \frac{\text{Exp}_1(x)}{1 - \text{Exp}_1(x)}\right)$ :

Como

$$\mu_{m_1, m_2} = E[X_1^{m_1} X_2^{m_2}] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^{m_1} x_2^{m_2} dF(x_1, x_2)$$

Logo, teremos:

$$\mu_{m_1, m_2} = E(X^{m_1} Y^{m_2}) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^{m_1} y^{m_2} f_{web1}(x, y) dx dy$$

Assim,

$$\mu_{m_1, m_2} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{(k+1)a_1 - 1}{j} \binom{(l+1)a_2 - 1}{s} \frac{(-1)^{k+j+l+s} b_1^k b_2^l}{k! l!}$$

$$\frac{\lambda_1 \lambda_2 a_1 a_2 b_1 b_2 \Gamma(m_1 + 1) \Gamma(m_2 + 1)}{(\lambda_1 ((k+1)a_1 - j))^{m_1+1} (\lambda_2 ((l+1)a_2 - s))^{m_2+1}}$$

■

Em particular, para  $m_1 = 1$  e  $m_2 = 1$ , teremos a média bivariada da distribuição

Weibull bivariada  $\left(\frac{\text{Exp}_2(y)}{1 - \text{Exp}_2(y)}, \frac{\text{Exp}_1(x)}{1 - \text{Exp}_1(x)}\right)$ :

$$\mu_{1,1} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{(k+1)a_1 - 1}{j} \binom{(l+1)a_2 - 1}{s} \frac{(-1)^{k+j+l+s} b_1^k b_2^l}{k! l!}$$

$$\frac{\lambda_1 \lambda_2 a_1 a_2 b_1 b_2}{(\lambda_1 \lambda_2 ((k+1)a_1 - j)((l+1)a_2 - s))^2}$$

■

#### 4.8.2.5 Expansão para a função geradora de momentos da distribuição Weibull bivariada ( $\text{Exp}_2(y)/(1 - \text{Exp}_2(y))$ , $\text{Exp}_1(x)/(1 - \text{Exp}_1(x))$ )

A expansão para a função geradora de momentos da distribuição Weibull bivariada  $\left(\frac{\text{Exp}_2(y)}{1 - \text{Exp}_2(y)}, \frac{\text{Exp}_1(x)}{1 - \text{Exp}_1(x)}\right)$  pode ser obtida da seguinte maneira:

Como

$$M_{XY}(t_1, t_2) = E(e^{t_1 X + t_2 Y}) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{t_1 x + t_2 y} f_{web1}(x, y) dx dy$$

Temos

$$M_{XY}(t_1, t_2) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{(k+1)a_1 - 1}{j} \binom{(l+1)a_2 - 1}{s} \frac{(-1)^{k+j+l+s} \lambda_1 \lambda_2 a_1 a_2 b_1^{k+1} b_2^{l+1}}{k! l!}}{1 \quad 1} \\ \frac{1}{(\lambda_1(j - (k+1)a_1) - t_1)} \frac{1}{(\lambda_2(s - (l+1)a_2) - t_2)}$$

■

#### 4.8.2.6 Expansão para a função característica da distribuição Weibull bivariada ( $\text{Exp}_2(y)/(1 - \text{Exp}_2(y))$ , $\text{Exp}_1(x)/(1 - \text{Exp}_1(x))$ )

Similarmente a expansão para a função característica da distribuição Weibull bivariada  $\left(\frac{\text{Exp}_2(y)}{1 - \text{Exp}_2(y)}, \frac{\text{Exp}_1(x)}{1 - \text{Exp}_1(x)}\right)$  pode ser obtida como a seguir:

Como

$$\varphi_{XY}(t_1, t_2) = E(e^{it_1 X + it_2 Y}) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{it_1 x + it_2 y} f_{web1}(x, y) dx dy$$

Temos

$$\varphi_{XY}(t_1, t_2) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{(k+1)a_1 - 1}{j} \binom{(l+1)a_2 - 1}{s} \frac{(-1)^{k+j+l+s} \lambda_1 \lambda_2 a_1 a_2 b_1^{k+1} b_2^{l+1}}{k! l!}}{1 \quad 1} \\ \frac{1}{(\lambda_1(j - (k+1)a_1) - it_1)} \frac{1}{(\lambda_2(s - (l+1)a_2) - it_2)}$$

■

#### 4.8.2.7 Expansão para os momentos centrais bivariados de ordens $m_1$ e $m_2$ para a distribuição Weibull bivariada ( $\text{Exp}_2(y)/(1 - \text{Exp}_2(y))$ , $\text{Exp}_1(x)/(1 - \text{Exp}_1(x))$ )

Podemos ainda obter a expansão para os momentos centrais bivariados de ordens  $m_1$  e  $m_2$  da distribuição Weibull bivariada  $\left(\frac{\text{Exp}_2(y)}{1 - \text{Exp}_2(y)}, \frac{\text{Exp}_1(x)}{1 - \text{Exp}_1(x)}\right)$  da seguinte forma:



Como

$$\mu'_{m_1, m_2} = \sum_{r_1=0}^{m_1} \sum_{r_2=0}^{m_2} \binom{m_1}{r_1} \binom{m_2}{r_2} (-1)^{r_1+r_2} \mu_{1,0}^{r_1} \mu_{0,1}^{r_2} \mu_{m_1-r_1, m_2-r_2}$$

e

$$\begin{aligned} \mu_{m_1-r_1, m_2-r_2} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{(k+1)a_1-1}{j} \binom{(l+1)a_2-1}{s} \frac{(-1)^{k+j+l+s} b_1^k b_2^l}{k! l!} \\ &= \frac{\lambda_1 \lambda_2 a_1 a_2 b_1 b_2 \Gamma(m_1 - r_1 + 1) \Gamma(m_2 - r_2 + 1)}{(\lambda_1((k+1)a_1 - j))^{m_1-r_1+1} (\lambda_2((l+1)a_2 - s))^{m_2-r_2+1}} \end{aligned}$$

Logo teremos,

$$\begin{aligned} \mu'_{m_1, m_2} &= \sum_{r_1=0}^{m_1} \sum_{r_2=0}^{m_2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{m_1}{r_1} \binom{m_2}{r_2} \binom{-a_1(k+1)-1}{l} \binom{-a_2(j+1)-1}{s} \\ &\frac{(-1)^{r_1+r_2+k+j+l+s} a_1 a_2 b_1^{k+1} b_2^{j+1}}{k! j!} \frac{\mu_{1,0}^{r_1} \mu_{0,1}^{r_2} \lambda_1 \lambda_2 a_1 a_2 b_1 b_2 \Gamma(m_1 - r_1 + 1) \Gamma(m_2 - r_2 + 1)}{(\lambda_1((k+1)a_1 - j))^{m_1-r_1+1} (\lambda_2((l+1)a_2 - s))^{m_2-r_2+1}} \end{aligned}$$

■

Em particular, para  $m_1 = 1$  e  $m_2 = 1$ , teremos a expansão da covariância para a distribuição Weibull bivariada  $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$  dada por:

$$\begin{aligned} \mu'_{1,1} &= \sum_{r_1=0}^1 \sum_{r_2=0}^1 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{1}{r_1} \binom{1}{r_2} \binom{-a_1(k+1)-1}{l} \binom{-a_2(j+1)-1}{s} \\ &\frac{(-1)^{r_1+r_2+k+j+l+s} a_1 a_2 b_1^{k+1} b_2^{j+1}}{k! j!} \frac{\mu_{1,0}^{r_1} \mu_{0,1}^{r_2} \lambda_1 \lambda_2 a_1 a_2 b_1 b_2 \Gamma(2 - r_1) \Gamma(2 - r_2)}{(\lambda_1((k+1)a_1 - j))^{2-r_1} (\lambda_2((l+1)a_2 - s))^{2-r_2}} \end{aligned}$$

■

#### 4.8.2.8 Expansão para o coeficiente geral bivariado da distribuição Weibull bivariada $(Exp_2(y)/(1-Exp_2(y)), Exp_1(x)/(1-Exp_1(x)))$

Pode-se ainda calcular a expansão para o coeficiente geral bivariado da distribuição Weibull bivariada  $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$  da seguinte maneira:

$$\text{Como } C_g(m_1, m_2) = \frac{E[(X_1 - \mu_{1,0})^{m_1} (X_2 - \mu_{0,1})^{m_2}]}{\mu'_{2,0}{}^{m_1/2} \mu'_{0,2}{}^{m_2/2}} = \frac{E[(X_1 - \mu_{1,0})^{m_1} (X_2 - \mu_{0,1})^{m_2}]}{\sigma_1^{m_1} \sigma_2^{m_2}}, \text{ então}$$

teremos:

$$C_g(m_1, m_2) = \frac{\mu'_{m_1, m_2}}{\sigma_1^{m_1} \sigma_2^{m_2}}$$

Em particular, para  $m_1 = 3$  e  $m_2 = 3$ , teremos a expansão para o coeficiente de assimetria bivariada da distribuição Weibull bivariada  $\left(\frac{\text{Exp}_2(y)}{1 - \text{Exp}_2(y)}, \frac{\text{Exp}_1(x)}{1 - \text{Exp}_1(x)}\right)$ , é dada por:

$$C_a = C_g(3,3)$$

Similarmente, para  $m_1 = 4$  e  $m_2 = 4$ , teremos a expansão para o coeficiente de curtose bivariado da distribuição Weibull bivariada  $\left(\frac{\text{Exp}_2(y)}{1 - \text{Exp}_2(y)}, \frac{\text{Exp}_1(x)}{1 - \text{Exp}_1(x)}\right)$ , é dada por:

$$C_c = C_g(4,4)$$

■

#### 4.8.2.9 Derivadas da função log-verossimilhança em relação aos parâmetros da distribuição Weibull bivariada $(\text{Exp}_2(y)/(1 - \text{Exp}_2(y)), \text{Exp}_1(x)/(1 - \text{Exp}_1(x)))$

A seguir, veremos as derivadas função log-verossimilhança em relação aos parâmetros da distribuição Weibull bivariada  $\left(\frac{\text{Exp}_2(y)}{1 - \text{Exp}_2(y)}, \frac{\text{Exp}_1(x)}{1 - \text{Exp}_1(x)}\right)$ :

Como

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \text{Log} h_{G_1, G_2}(x_j, y_j; a_1, a_2, b_1, b_2, \lambda_1, \lambda_2) &= n \text{Log}(\lambda_1 \lambda_2 a_1 a_2 b_1 b_2) + \\ &+ (a_1 - 1) \sum_{j=1}^n \text{Log}(e^{\lambda_1 x_j} - 1) + (a_2 - 1) \sum_{j=1}^n \text{Log}(e^{\lambda_2 y_j} - 1) + \lambda_1 \sum_{j=1}^n x_j + \lambda_2 \sum_{j=1}^n y_j - \\ &- b_1 \sum_{j=1}^n (e^{\lambda_1 x_j} - 1)^{a_1} - b_2 \sum_{j=1}^n (e^{\lambda_2 y_j} - 1)^{a_2} \end{aligned}$$

Logo teremos que:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \text{Log} h_{G_1, G_2}(x_j, y_j; a_1, a_2, b_1, b_2, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial a_1} = \frac{n}{a_1} + \sum_{j=1}^n \text{Log}(e^{\lambda_1 x_j} - 1) - a_1 b_1 \sum_{j=1}^n (e^{\lambda_1 x_j} - 1)^{a_1} \log(e^{\lambda_1 x_j} - 1)$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \text{Log} h_{G_1, G_2}(x_j, y_j; a_1, a_2, b_1, b_2, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial a_2} = \frac{n}{a_2} + \sum_{j=1}^n \text{Log}(e^{\lambda_2 y_j} - 1) - a_2 b_2 \sum_{j=1}^n (e^{\lambda_2 y_j} - 1)^{a_2} \log(e^{\lambda_2 y_j} - 1)$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \text{Log} h_{G_1, G_2}(x_j, y_j; a_1, a_2, b_1, b_2, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial b_1} = \frac{n}{b_1} - \sum_{j=1}^n (e^{\lambda_1 x_j} - 1)^{a_1}$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \text{Log} h_{G_1, G_2}(x_j, y_j; a_1, a_2, b_1, b_2, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial b_2} = \frac{n}{b_2} - \sum_{j=1}^n (e^{\lambda_2 y_j} - 1)^{a_2}$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \text{Log} h_{G_1, G_2}(x_j, y_j; a_1, a_2, b_1, b_2, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_1} = \frac{n}{\lambda_1} + (a_1 - 1) \sum_{j=1}^n \frac{x_j e^{\lambda_1 x_j}}{(e^{\lambda_1 x_j} - 1)} + \sum_{j=1}^n x_j$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \text{Log} h_{G_1, G_2}(x_j, y_j; a_1, a_2, b_1, b_2, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_2} = \frac{n}{\lambda_2} + (a_2 - 1) \sum_{j=1}^n \frac{y_j e^{\lambda_2 y_j}}{(e^{\lambda_2 y_j} - 1)} + \sum_{j=1}^n y_j$$

#### 4.8.2.10 Entropia bivariada de Rényi usando a classe Weibull bivariada $(G_2(y)/(1 - G_2(y)), G_1(x)/(1 - G_1(x)))$

A seguir veremos o desenvolvimento dos cálculos da expansão da entropia para a distribuição gama- exponencial 3, usando a entropia de Rényi:

A seguir veremos o desenvolvimento dos cálculos da expansão da entropia bivariada para a distribuição Weibull bivariada  $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$ , usando a entropia de Rényi:

Como

$$\exp(-\eta b_1(e^{\lambda_1 x} - 1)^{a_1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \eta^k b_1^k}{k!} (e^{\lambda_1 x} - 1)^{ka_1}$$

$$\exp(-\eta b_2(e^{\lambda_2 y} - 1)^{a_2}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \eta^j b_2^j}{j!} (e^{\lambda_2 y} - 1)^{ja_2}$$

Logo teremos

$$h_{G_1}^{\eta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \eta^k \lambda_1^k a_1^k b_1^k}{k!} e^{\lambda_1 x} (e^{\lambda_1 x} - 1)^{(k+1)a_1 - 1}$$

$$h_{G_2}^{\eta}(y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \eta^j \lambda_2^j a_2^j b_2^j}{j!} e^{\lambda_2 y} (e^{\lambda_2 y} - 1)^{(j+1)a_1 - 1}$$

Como

$$(e^{\lambda_1 x} - 1)^{(k+1)a_1 - 1} = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{(k+1)a_1 - 1}{l} (-1)^l e^{\lambda_1((k+1)a_1 - l - 1)x}$$

$$(e^{\lambda_2 y} - 1)^{(j+1)a_1 - 1} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{(j+1)a_1 - 1}{r} (-1)^r e^{\lambda_2((j+1)a_1 - r - 1)y}$$

Então teremos

$$h_{G_1}^{\eta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{(k+1)a_1 - 1}{l} \frac{(-1)^{k+l} \eta^k \lambda_1^k a_1^k b_1^k}{k!} e^{\lambda_1((k+1)a_1 - l)x}$$

$$h_{G_2}^{\eta}(y) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{(j+1)a_1 - 1}{r} \frac{(-1)^{j+r} \eta^j \lambda_2^j a_2^j b_2^j}{j!} e^{\lambda_2((j+1)a_1 - r)y}$$

Temos

$$\int_0^{+\infty} h_{G_1}^{\eta}(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{(k+1)a_1 - 1}{l} \frac{(-1)^{k+l} \eta^k \lambda_1^k a_1^k b_1^k}{k!} \int_0^{+\infty} e^{\lambda_1((k+1)a_1 - l)x} dx$$

$$\int_0^{+\infty} h_{G_2}^{\eta}(y) dy = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{(j+1)a_1 - 1}{r} \frac{(-1)^{j+r} \eta^j \lambda_2^j a_2^j b_2^j}{j!} \int_0^{+\infty} e^{\lambda_2((j+1)a_1 - r)y} dy$$

Como,

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} h_{G_1, G_2}^\eta(x, y) dx dy = \int_0^{+\infty} h_{G_1}^\eta(x) dx \int_0^{+\infty} h_{G_2}^\eta(y) dy$$

Assim,

$$\mathcal{L}_R(\eta) = \frac{1}{1-\eta} \log \left( \int_0^{+\infty} h_{G_1}^\eta(x) dx \int_0^{+\infty} h_{G_2}^\eta(y) dy \right)$$

Portanto,

$$\mathcal{L}_R(\eta) = \frac{1}{1-\eta} \log \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{(k+1)a_1-1}{l} \binom{(j+1)a_1-1}{r} \frac{(-1)^{k+l+j+r} \eta^{k+j} \lambda_1^\eta a_1^\eta b_1^{\eta+k} \lambda_2^\eta a_2^\eta b_2^{\eta+j}}{k! j!} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{\lambda_1((k+1)a_1-l)x + \lambda_2((j+1)a_1-r)y} dx dy \right\}$$

Podemos escrever a função risco da seguinte maneira:

$$\mathcal{L}_R(\eta) = \frac{1}{1-\eta} \log \left( \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{(k+1)a_1-1}{l} \frac{(-1)^{k+l} \eta^k \lambda_1^\eta a_1^\eta b_1^{\eta+k}}{k!} \int_0^{+\infty} e^{\lambda_1((k+1)a_1-l)x} dx \right) + \frac{1}{1-\eta} \log \left( \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{(j+1)a_1-1}{r} \frac{(-1)^{j+r} \eta^j \lambda_2^\eta a_2^\eta b_2^{\eta+j}}{j!} \int_0^{+\infty} e^{\lambda_2((j+1)a_1-r)y} dy \right)$$

#### 4.8.2.11 Aplicação

Neste tópico mostraremos resultados obtidos, bem como os gráficos para melhor análise e discussão dos resultados a serem obtidos pelo mesmo, podendo assim, compará-lo com outros existentes na literatura.

Escolhemos a largamente utilizada base de dados da Flor Iris para este estudo, uma vez que a base de dados aqui utilizada é a mesma que exposta no trabalho de Fisher (1936) e citada por centenas de trabalhos, entre eles: Duda & Hart (1973), Zhong & Fukushima (2007), Tung, Xu & Ooi (2005); este conjunto de dados contém três tipos de Iris: *Iris Setosa*, *Iris Versicolor* e *Iris Virginica*; com 50 medidas de partes diferentes dessas Iris (comprimento e largura da sépala em cm; comprimento e largura da pétala em cm), que neste estudo escolhemos apenas as 50 medidas da largura e as 50 medidas do comprimento da pétala. Normalmente as Iris crescem em colônias contendo muitas plantas particulares; uma peculiaridade que facilita a localização e estudo de grandes números de indivíduos (ANDERSON, 1936). A partir da técnica de discriminante linear introduzida no mesmo artigo de 1936, os dados se tornaram uma

referência para testes de classificação em Aprendizado de Máquina (KOTSIANTIS e PINTELAS, 2005; FISCHER e POLAND, 2005). Os dados encontram-se no Apêndice G.

As Figuras 4.8.2.11.1(a) e (b) abaixo representam os histogramas dos dados das pétalas da Flor Iris em duas perspectivas.

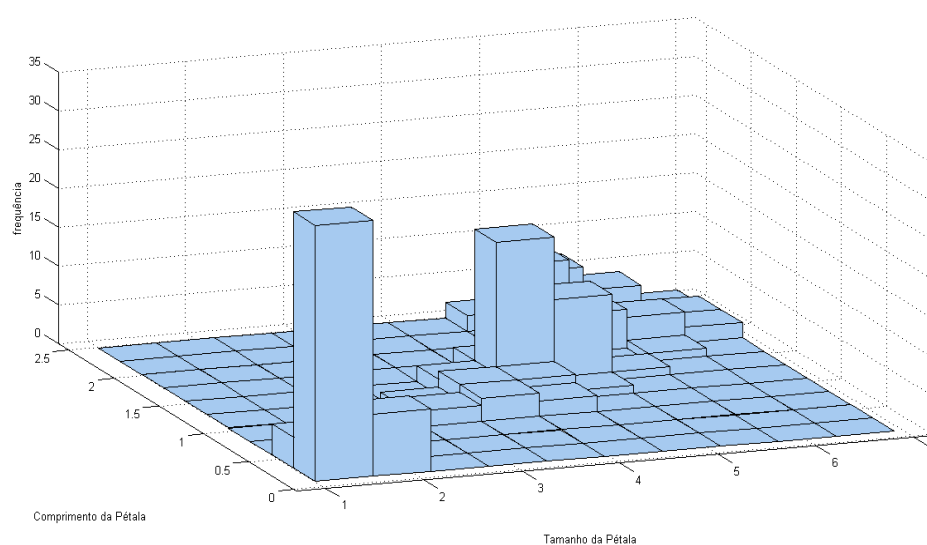


Figura 4.8.2.11.1 (a) – Histograma dos dados das pétalas da Flor Iris em perspectiva (a)

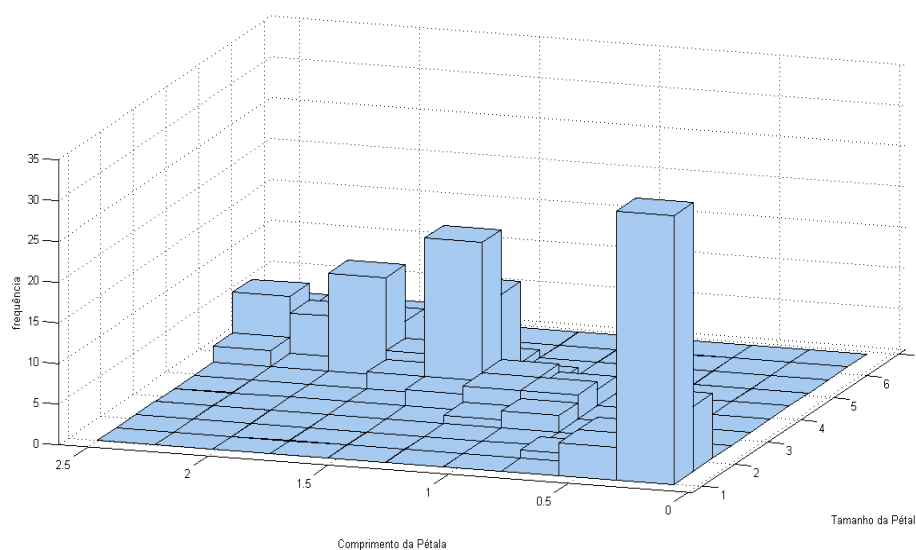


Figura 4.8.2.11.1 (b) – Histograma dos dados das pétalas da Flor Iris em perspectiva (b)

Na Tabela 4.8.2.11.1 podemos ver as estimativas dos parâmetros, erros padrões, para as distribuições Weibull bivariada  $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$  (M4.1), gama exponencial bivariado (M4.2), Kumaraswamy exponencial bivariado (M4.3), Weibull modificado bivariado (M4.4), beta Pareto bivariado (M4.5) e Weibull bivariado (M4.6).

Tabela 4.8.2.11.1 – Estimativa dos parâmetros, dos erros para as distribuições M4.1 a M4.6

Modelos	Estatísticas							
	$\alpha_1$	$\beta_1$	$\lambda_1$	$\alpha_2$	$\beta_2$	$\lambda_2$	$\theta_1$	$\theta_2$
M4.1	1,088 (0,245)	0,091 (0,044)	0,514 (0,171)	0,695 (0,116)	0,182 (0,051)	1,703 (0,413)	----	----
M4.2	3,523 (0,389)	0,474 (0,053)	1,98 (0,013)	1,542 (0,162)	0,629 (0,071)	2,043 (0,022)	----	----
M4.3	2,34 (0,166)	7729,3 ( $<10^{-6}$ )	0,005 (0,001)	1,439 (0,1)	2709,536 ( $<10^{-6}$ )	0,003 (0,001)	----	----
M4.4	1,071 (0,324)	0,038 (0,01)	0,373 (0,096)	0,699 (0,139)	0,241 (0,055)	0,79 (0,145)	----	----
M4.5	92,38 ( $<10^{-5}$ )	60,88 ( $<10^{-4}$ )	0,164 (0,009)	97,657 ( $<10^{-6}$ )	73,33 ( $<10^{-4}$ )	0,086 (0,005)	0,114 (0,004)	4,17E-5 ( $<10^{-4}$ )
M4.6	2,329 (0,163)	----	0,235 (0,009)	1,439 (0,102)	----	0,763 (0,045)	----	----

A seguir temos as Figuras 4.8.2.11.1 a 4.8.2.11.12 apresentando os gráficos de contornos e de superfície ajustados para cada modelo.

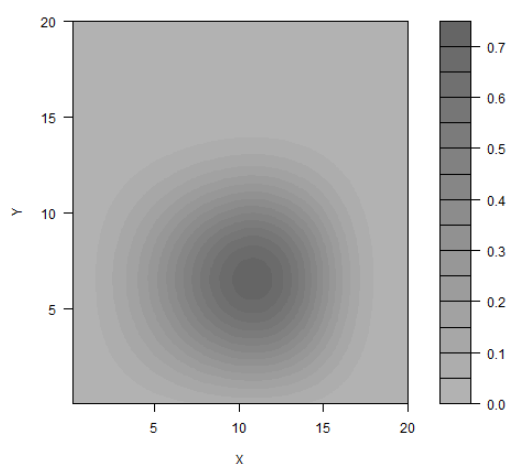


Figura 4.8.2.11.1 – Gráfico de contorno ajustado ao modelo M4.1

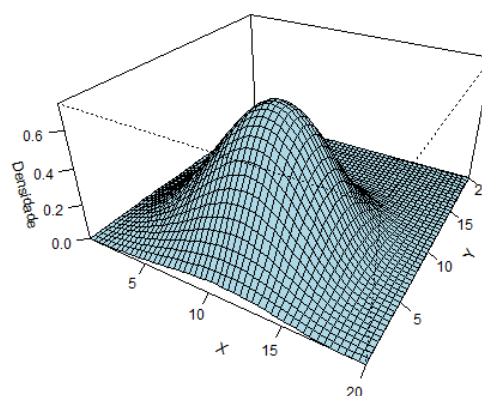


Figura 4.8.2.11.2 – Gráfico de superfície ajustado ao modelo M4.1

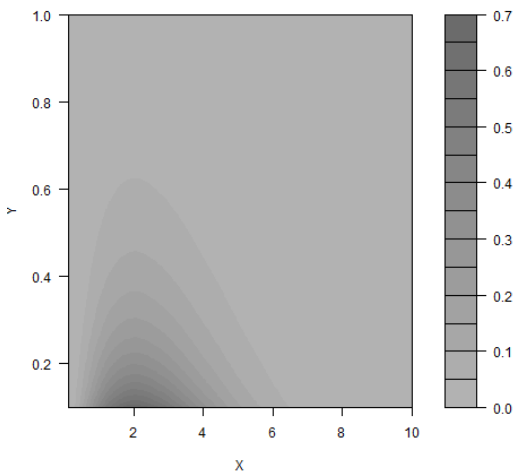


Figura 4.8.2.11.3 – Gráfico de contorno ajustado ao modelo M4.2

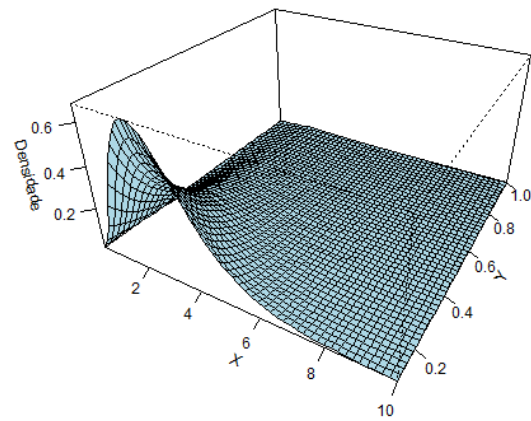


Figura 4.8.2.11.4 – Gráfico de superfície ajustado ao modelo M4.2

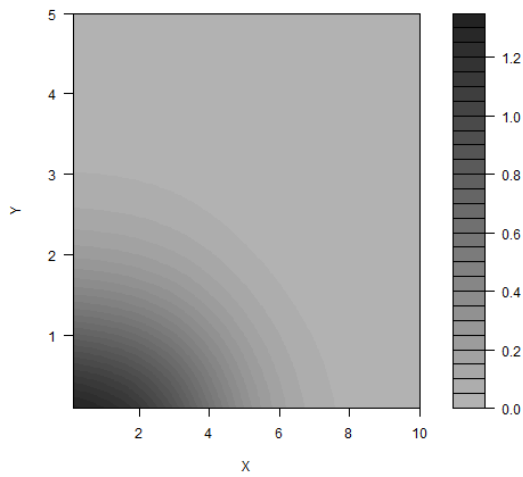


Figura 4.8.2.11.5 – Gráfico de contorno ajustado ao modelo M4.3

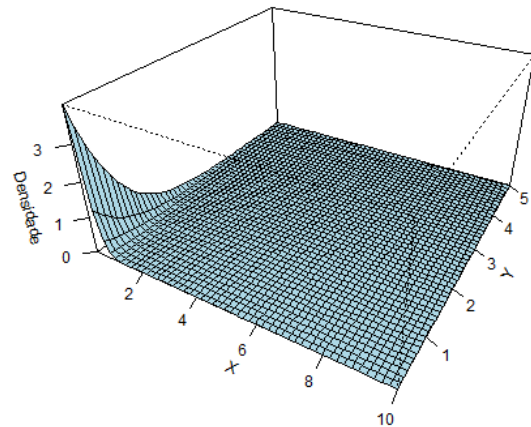


Figura 4.8.2.11.6 – Gráfico de superfície ajustado ao modelo M4.3

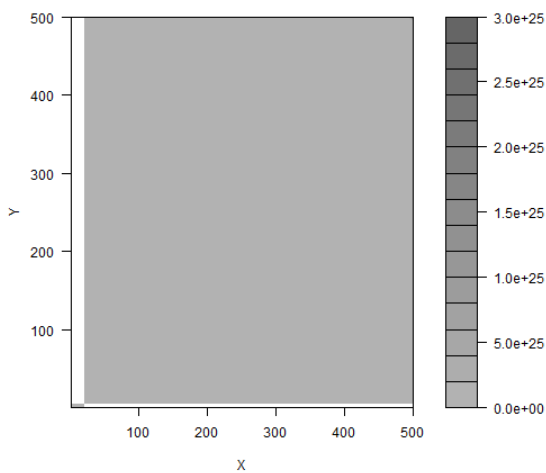


Figura 4.8.2.11.7 – Gráfico de contorno ajustado ao modelo M4.4

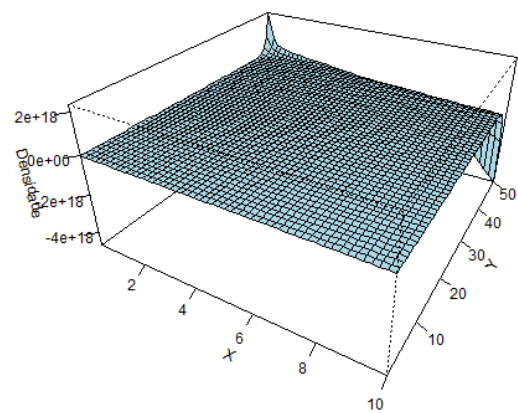


Figura 4.8.2.11.8 – Gráfico de superfície ajustado ao modelo M4.4



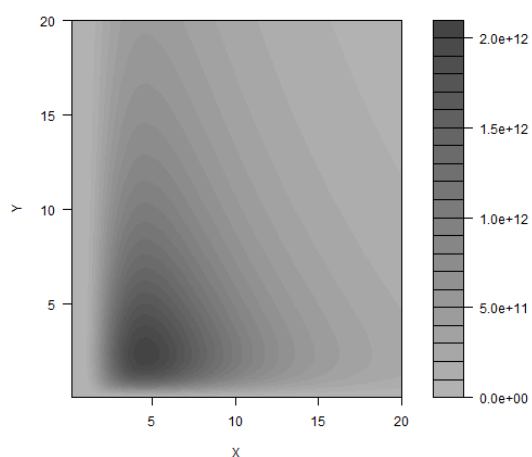


Figura 4.8.2.11.9 – Gráfico de contorno ajustado ao modelo M4.5

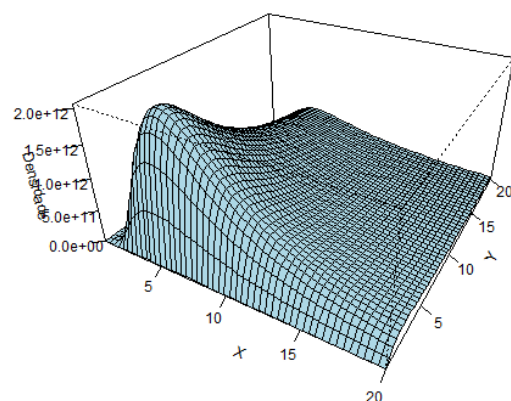


Figura 4.8.2.11.10 – Gráfico de superfície ajustado ao modelo M4.5

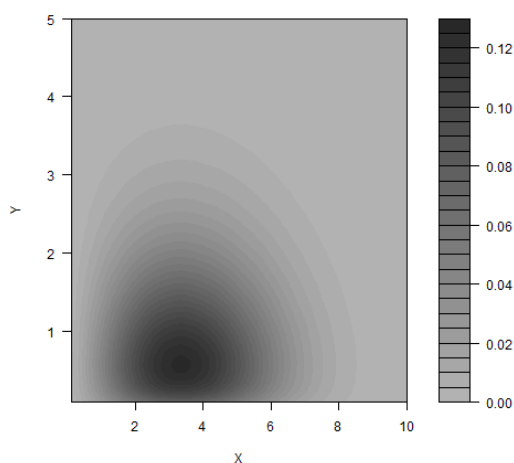


Figura 4.8.2.11.11 – Gráfico de contorno ajustado ao modelo M4.6

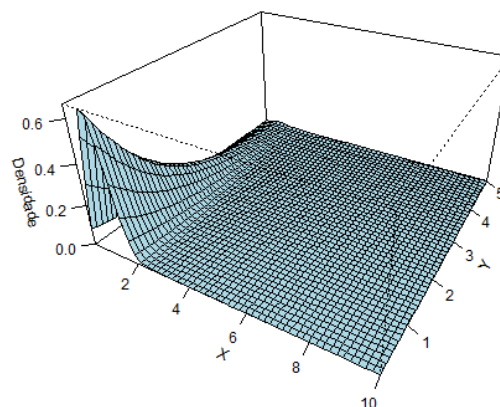


Figura 4.8.2.11.12 – Gráfico de superfície ajustado ao modelo M4.6

Na Tabela 4.8.2.11.2 podemos ver as estimativas, obtidas pelo método de Newton-Raphson implementados no software estatísticos SAS 9.1, dos parâmetros, erros padrões, critério de informação de Akaike, critério de informação de Akaike corrigido, critério de informação Bayesiano e critério de informação de Hannan-Quinn para as distribuições Weibull bivariada  $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$  (M4.1), gama exponencial bivariado (M4.2), Kumaraswamy exponencial birariado (M4.3), Weibull modificado bivariado (M4.4), beta Pareto bivariado (M4.5) e Weibull bivariado (M4.6),

Tabela 4.8.2.11.2 – cálculos das estatísticas AIC, AICc, BIC e HQIC para as distribuições M4.1 a M4.6

Modelos	Estatísticas			
	AIC	AICc	BIC	HQIC
M4.1	878,553	879,140	896,616	885,891
M4.2	954,856	955,444	972,920	962,195
M4.3	932,272	932,859	950,336	939,611
M4.4	887,102	887,689	905,165	894,44
M4.5	1018,353	1019,374	1042,438	1028,138
M4.6	927,654	927,930	939,696	932,546

Para as seis distribuições mostradas na Tabela 4.8.2.11.2, aplicada a base de dados da Flor Iris para este estudo, foi observado que o modelo Weibull bivariada  $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$  (M4.1) foi o de melhor ajuste em função de ter obtido os menores valores nos critérios de informação como AIC = 878,553, AICc = 879,140, BIC = 896,616 e HQIC = 885,891.

#### 4.8.2.12 Etapas para identificação de modelos multivariados para modelagens

A seguir temos as etapas para identificação de modelos multivariados para modelagens.

**Primeiro passo:** Identificar o conjunto suporte para a situação.

**Segundo passo:** Fazer os diagramas de dispersão de duas dimensões e de três dimensões.

**Segundo passo:** Caracterizar o comportamento dos dados coletados baseado nos diagramas de dispersão de duas dimensões e de três dimensões, considerando os seguintes itens.

2.1 Média;

2.2 Variância;

2.3 Assimetria;

2.4 Curtose;

2.5 Números de modas mais o teste multimodalidade.

**Terceiro passo:** Fazer um estudo da redução da dimensionalidade.

**Quarto passo:** Com os passos anteriores, deve-se identificar as classes de distribuições e as distribuições de probabilidades, considerando os itens 4.1 ou 4.2 ou ambos:

4.1 identificar as classes de distribuições e as distribuições de probabilidades conhecidas na literatura que possam se ajustar aos dados;

4.2 propor uma nova classe de distribuições ou uma nova distribuição de probabilidade que melhor se ajuste aos dados.

**Quinto passo:** Escolher algumas distribuições e avaliar comparativamente, usando os indicadores e os testes estatísticos.

## 4.9. Conclusão

Neste capítulo podemos perceber que o método gerador aqui desenvolvido permite criar as distribuições de probabilidades multivariadas e também as classes de distribuições multivariadas em qualquer domínio, o que amplia as possibilidades de trabalhar, novamente, como no capítulo anterior, em dimensões superiores de qualquer distribuição e generalizá-las.

Nota-se a importância da equivalência do Teorema 4.1 com seus corolários que geram as mesmas distribuições probabilísticas multivariadas, o que proporciona diversas maneiras de gerar a mesma distribuição ou classe de distribuição probabilística. Também de grande importância temos o Teorema Geral do Suporte permitindo obter os suportes das distribuições multivariadas a partir dos suportes das distribuições multivariadas que alimentam o funcional gerador de classes de distribuições probabilísticas multivariadas, indicando quando a distribuição gerada será discreta ou contínua. Apresenta-se uma proposta de nomenclatura que permite nomear as distribuições multivariadas de forma precisa diferenciando-as entre si, além de ser uma forma sistemática.

Observemos ainda que o método gerador aqui apresentado generaliza o método do capítulo anterior e gerando também uma grande quantidade de classes de distribuições multivariadas, e conseqüentemente, como era de se esperar, o mesmo para modelos probabilísticos multivariados, que poderão ser aplicados em trabalhos futuros em várias áreas do conhecimento. Neste trabalho foram utilizados, para alguns corolários, casos particulares convenientes aos mesmos para gerar a classe proposta e algumas classes já existentes na literatura. Notemos que não há esgotamento das possibilidades dos resultados obtidos, o que fica como continuação, a obtenção de novas distribuições multivariadas e suas aplicações nas mais variadas áreas do conhecimento.

## 5. CONCLUSÕES, CONTRIBUIÇÕES E TRABALHOS FUTUROS.

Este capítulo apresenta as conclusões da tese, bem como as principais contribuições. Ao final, alguns trabalhos futuros que podem dar prosseguimento a esta pesquisa de doutoramento que são apresentados nas listas de classes de distribuições probabilísticas apresentadas no Apêndice D.

### 5.1 Conclusões

Como observações finais, podemos notar que o método gerador de distribuições de probabilidades desenvolvido nesta tese, representa uma abordagem unificada para desenvolvimento de distribuições de probabilidades e classes de distribuições permitindo atuar em qualquer domínio e dimensão, ampliando assim as possibilidades de trabalhar as distribuições e suas generalizações.

Podemos ainda observar que o método aqui apresentado gera uma quantidade não enumerável de funções geradoras de classes de distribuições, e conseqüentemente, o mesmo para modelos probabilísticos, que poderão ser aplicados em trabalhos futuros em diversas áreas. Vale salientar que nesta tese utilizamos alguns casos particulares que convieram ao mesmo. Acrescente-se que não esgotamos as possibilidades dos resultados obtidos, ficando como continuação, não só a ampliação tais novas distribuições, bem como suas aplicações nas diversas áreas de conhecimento.

Muito tem sido apresentado na literatura como proposta de generalizações e extensões, como os trabalhos de Mudholkar *et al* (1995), Gupta e Kundu (1999), Nadarajah (2011), Adamski, Human e Bekker (2012), Nadarajah e Kotz (2006), Thair e Nadarajah (2013), McDonald (1984), Cordeiro e Castro (2011), Marshall e Olkin (1997), Jayakumar e Mathew (2008), Zografos (2008), Zografos e Balakrishnan (2009), Alizadeh e Silva (2013) e Silva (2013), Pescim *et al* 2012), Eugene *et al* (2002), Mudholkar *et al* (1995), entre outros, mas, nessa tese, propomos uma metodologia universal que particulariza todas as descritas até hoje<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Dada uma distribuição  $G(x)$  qualquer que seja o método gerador, ela poderá ser escrita pelo nosso método gerador da seguinte forma:  $\int_0^{G(x)} dt$ .

## 5.2 Contribuições

A partir desta tese, notamos que há várias contribuições e apontamos as seguintes:

Para a primeira contribuição podemos apontar o desenvolvimento dos teoremas denominados de método gerador de distribuições de probabilidades e de classes de distribuições probabilísticas, bem como suas construções, gerando tanto novas distribuições propostas como novas classes.

Como segunda contribuição, apontamos as funções monotônicas envolvendo distribuições. De fato, acreditamos que ambas contribuições são importantes, pois são essenciais para a criação de funcionais geradores de classes de distribuições probabilísticas.

Já para a terceira contribuição desta tese, podemos apontar a criação da classe gama  $\frac{1-G_1(x)}{G_1(x)}$  e a sua aplicação que gera, entre outras, a distribuição complementar gama  $\frac{1-Exp}{Exp}$  desenvolvidos no terceiro capítulo.

Como quarta contribuição desta tese, podemos apontar a criação da classe Weibull bivariada  $\left(\frac{G_2(y)}{1-G_2(y)}, \frac{G_1(x)}{1-G_1(x)}\right)$  e a sua aplicação que gera, entre outras, a distribuição Weibull bivariada  $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$  desenvolvidos no quarto capítulo.

A quinta contribuição desta tese aponta-se o conjunto de regras sistemáticas para nomear tanto as distribuições como as classes de distribuições probabilísticas geradas pelos teoremas propostos, em consonância com o já existente na literatura.

Como sexta contribuição desta tese, aponta-se os Teoremas 3.2 a 3.7 para o caso univariado e os Teoremas 4.2 a 4.7 para o caso multivariado, que trazem a importância da equivalência dos Teorema 3.1 e 4.1 com seus corolários que geram as mesmas distribuições probabilísticas uni ou multivariadas, o que proporciona diversas possibilidades de obter a mesma distribuição ou classe de distribuições probabilísticas. Também de grande importância temos o Teorema Geral do Suporte permitindo obter os suportes das distribuições uni ou multivariadas a partir dos suportes das distribuições uni ou multivariadas, respectivamente, que alimentam o funcional gerador de classes de distribuições probabilísticas, indicando quando a distribuição gerada será discreta ou contínua.

A sétima contribuição desta tese podemos apontar o compêndio no apêndice D, com uma grande quantidade de classes de distribuições probabilísticas.

Na sequência são apresentadas algumas alternativas de trabalhos futuros que podem ser realizados a partir desta pesquisa de doutoramento.

### **5.3 Trabalhos futuros**

Como trabalho futuro, entendemos que é um trabalho que pode vir a sobrepor a maioria das limitações encontradas nos trabalhos existentes, explicando melhor as situações ou fenômenos modelados.

Como sugestão, acreditamos que se pode desenvolver não apenas as classes de distribuições de probabilidades que são apresentados nas listas do Apêndice D, mas também desenvolver novas classes de distribuições com suas propriedades.

Outra sugestão é que podemos fazer aplicações das classes de distribuições de probabilidades que são apresentados nas listas do Apêndice D para futuras publicações.

Pode-se ainda utilizar as funções monotônicas construídas nos Apêndices B e C para construção e estudo de novas classes de distribuições de probabilidades.

Espera-se ainda a criação de um *software* semi-automático para ajudar o “modelador” a encontrar a classe e a distribuição que “melhor” modele os dados. Este *software* conteria bibliotecas com várias funções monotônicas e distribuições conhecidas que seriam utilizadas para alimentar os funcionais geradores de classes de distribuições aqui propostos. Para isto, seria preciso alguma técnica de inteligência artificial (IA) e/ou o auxílio do próprio modelador na busca pelas distribuições que melhor se ajustem aos dados levando em consideração critérios de bondade de ajuste.

## REFERÊNCIAS

- ADAMSKI, K. *et al.* Noncentral generalized multivariate beta type II distribution. **REVSTAT – Statistical Journal**. Volume 11, Number 1, March 2013, 17–43.
- ADAMSKI, K.; HUMAN, S.W. e BEKKER, A. A generalized multi-variate beta distribution: control charting when the measurements are from a n exponential distribution, **Statistical Papers**, 53, 1045–1064. (2012).
- ADEMOLA, A. J. e AHAMEFULA, M. U. Multivariate Generalized Poisson Distribution for Interference on Selected Non-Communicable Diseases in Lagos State, Nigeria. **Journal of Modern Applied Statistical Methods**. November 2012, Vol. 11, No. 2, 524-529.
- AKAIKE, H. Use of an information theoretic quantity for statistical model identification. IN: HAWAII INTERNATIONAL CONFERENCE ON SYSTEM SCIENCES, 5th, 1972, Hawaii. **Proceedings...**, Hawaii, Western Periodicals Co., p 249-250.
- AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v. 19, n. 6, p. 716-723, 1974.
- AKINSETE, A.; FAMOYE, F.; LEE, C. (2008). The beta-Pareto distribution. **Statistics** 42 (6), 547-563.
- ANDERSON, E. The species problem in *Iris*. **Annals of the Missouri Botanical Garden** 23. (3): 457–509, 1936.
- ANDERSON, T.W. & DARLING, D.A. (1952). Asymptotic theory of certain goodness-of-fit criteria based on stochastic processes. **Annals of Mathematical Statistics**, 23, 193–212
- ARSLAN, O. Family of multivariate generalized t distributions. **Journal of Multivariate Analysis**. 89 (2004) 329–337.
- BARROS, K. N. N. O. **Abordagem clássica e Bayesiana em modelos simétricos transformados aplicados à estimativa de crescimento em altura de *Eucalyptus urophylla* no Polo Gesseiro do Araripe-PE**. 2010. 84f. Dissertação (Mestrado em Biometria e Estatística Aplicada). Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife.
- BOX, G. E. P., e DRAPER, N. R., (1987), **Empirical Model Building and Response Surfaces**, John Wiley & Sons, New York, NY.
- BRITO, C. C. R. **Correção de Bartlett nos modelos não-lineares simétricos heteroscedásticos**. 2009. 160 p. Dissertação (Mestrado em Estatística) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife.
- BURNHAM, K. P.; ANDERSON, D. R. Model selection and multi-model inference: a practical information-theoretic approach. [S.l.]: Springer, 2002.



- CARDEÑO, L.; NAGAR, D. K. e SÁNCHEZ, L. E. Beta Type 3 Distribution and Its Multivariate Generalization. **Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences**. 21(2). (2005). 225-241.
- CHEN, G.; BALAKRISHNAN, N. A general purpose approximate goodness-of-fit test. **Journal of Quality Technology**, v. 27, p. 154-161, 1995.
- CHOULAKIAN, V.; STEPHENS, M.A. Goodness-of-fit for the generalized Pareto distribution, **Technometrics**. 43(4) (2001), pp. 478–484.
- CONSUL, P. C. FAMOYE, F. **Lagrangian Probability Distributions** (Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2006).
- CORDEIRO, G. M. Introdução à teoria Assintótica. IN: COLÓQUIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA, 22o, 1999, Rio de Janeiro. **Anais...**, Rio de Janeiro: IMPA, 1999. p. 3-97.
- CORDEIRO, G. M.; CASTRO, M. A new family of generalized distributions. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, v. 81, n. 7, p. 883–898, 2011. Disponível em <<http://www.producao.usp.br/handle/BDPI/28896>>. Acesso em 02/03/2014
- CORDEIRO, G.M.; ALIZADEH, M. e SILVA, R.B. A New Wider Family of Continuous Models: The Extended Cordeiro and de Castro Family. **Statistical Methodology**. 2013.
- CORDEIRO, G. M. ; LEMONTE, A. J. The McDonald inverted beta distribution. **Journal of the Franklin Institute**, v. 349, p. 1174-1197, 2012.
- CYSNEIROS, F. J. A. *et al.* **Modelos Simétricos Aplicados**. Águas de São Pedro: 2005. Disponível em: < [http://www.de.ufpe.br/~cysneiros/texto\\_final.pdf](http://www.de.ufpe.br/~cysneiros/texto_final.pdf) >. Acesso em: 01 abr. 2012).
- DARLING, D.A. (1957). The Kolmogorov-Smirnov, Cramer-von Mises Tests. **Annals of Mathematical Statistics**, 28(4 (Dec.)), 823–838.
- DUDA, R.O., & HART,P.E. **Pattern Classification and Scene Analysis**. (Q327.D83) John Wiley & Sons. ISBN 0-471-22361-1. See page 218. 1973.
- Dunning K, Hanson JN. Generalized Pearson distributions and nonlinear programming. *J Stat Comput Simul* 1977, 6:115–128.
- EUGENE, N.; *et al.* (2002). Beta-normal Distribution and its applications. **Communication in Statistics – Theory and Methods**, 31: 497-512.
- FISCHER, I.; POLAND, J. **Amplifying the Block Matrix Structure for Spectral Clustering**. Telecommunications Lab. 2005
- FISHER, R. A. The use of multiple measurements in taxonomic problems. **Annals of Eugenics** 7. (2): 179–188, 1936.

FUNG, T. e SENETA, E. Extending the multivariate generalised t and generalised VG distributions. **Journal of Multivariate Analysis**. 101 (2010) 154-164.

GUPTA, R. D.; KUNDU, D. Generalized exponential distributions. **Australian and New Zealand Journal of Statistics**, 1999.

HANNAN, E. J.; QUINN, B. G. The determination of the order of an autoregression. **Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)**, JSTOR, p. 190–195, 1979.

JAYAKUMAR, K; MATHEW, T. On a generalization to Marshall-Olkin scheme and its application to Burr type XII distribution. **Statistical Papers**, 49, 421–439, 2008.

JAYAKUMAR, D. G.S. S.; SOLAIRAJU, A. e SULTHAN. A. A New Generalisation of Sam-Solai's Multivariate Additive Beta Distribution of Kind-2 of Type-A. **Research Journal of Management Sciences**. Vol. 1 (2), 15-23, September (2012).

KOTSIANTIS, S. B.; PINTELAS, P. E. **Logitboost of Simple Bayesian Classifier**. Informática. 2005

KUNDU, D.; BALAKRISHNAN, N., JAMALIZADEH, A. (2011). **Generalized multivariate Birnbaum-Saunders distributions and related inferential issues**, Submitted.

LAI, C. D., XIE, M., MURTHY, D. N. P. (2003). **A modified Weibull distribution**. Transaction on Reliability, v. 52, n.1, p. 33-37

LEE, C., FAMOYE, F. & ALZAATREH, A. (2013). Methods for generating families of continuous distributions in the recent decades. **WIREs Computational Statistics**. 5, 219–238.

LIN, J. LI, X. **Multivariate Generalized Marshall–Olkin Distributions and Copulas**. Springer Science. 2012. Disponível em < <http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs11009-012-9297-4>>. Acesso em 01/12/2013.

MARSHALL, A. W.; OLKIN, I. A new method for adding a parameter to a family of distributions with application to the exponential and weibull families. **Biometrika**, v. 84, n. 3, p. 641–652, 1997.

McDONALD, J.B. Some generalized functions for the size distribution of income. **Econometrica**, 52, 647–663, 1984.

MITCHELL, J.M., DZERDZEEVSKII, B.; FLOTHN, H.; HOFMEYR, W.L.; LAMB, H.; RAO, K.N.; WALLÉN, C.C. (1966). "Climate Change." **W.M.O. Technical Note 79**.

MUDHOLKAR, G. S; *et al*. The exponentiated weibull family. **Technometrics**, v. 37, p. 436–45, 1995.

MUINO, J.M., VOIT, E.O., SORRIBAS, A. GS-distributions: a new family of distributions for continuous unimodal variables. **Comput Stat Data Anal.** 2006, 50:2769–2798.

MUIRHEAD, R. J. **Aspects of multivariate statistical Theory.** John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey. 673 p. 2005.

NADARAJAH, S. The exponentiated exponential distribution: a survey. **AStA - Advances in Statistical Analysis**, 2011.

NADARAJAH, S.; KOTZ, S. The beta exponential distribution. **Reliability Engineering and System Safety**, 2006.

PESCIM, R.R.; *et al.* **The new class of Kummer beta generalized distribution.** 2012.

RAMOS, M. W. A. **Some new extended distributions: theory and applications.** 2014. 88 f. Tese (Doutorado em Matemática Computacional). Universidade Federal de Pernambuco. Recife.

ROOTZÉN, H. TAJVIDI, N. **Multivariate generalized Pareto distributions.** Bernoulli 12(5), 2006, 917–930.

SARABIA, J.M.; GÓMEZ-DÉNIZ, E. Construction of multivariate distributions: **A review of some recent results**, SORT 32 (1) (2008) 3 - 36.

SCHMIDT, R.; HRYCEJ, T. e STÜTZLE, E. Multivariate distribution models with generalized hyperbolic margins. **Computational Statistics & Data Analysis.** Volume 50, Issue 8, 2006, Pages 2065–2096.

SCHWARZ, G. Estimating the dimensional of a model. **Annals of Statistics**, Hayward, v.6, n.2, p.461-464, Mar. 1978.

SERRANO, A., V.L. MATEOS, AND J.A. GARCIA. (1999). Trend Analysis of monthly precipitation over the Iberian Peninsula for the period 1921-1995. **Phys. Chem. Earth (8).**

SILVA, R. B. **Essays on distribution theory and a modified moment estimator for the precision parameter in a class of regression models.** 2013. 101 f. Tese (Doutorado em Estatística). Universidade Federal de Pernambuco. Recife.

SILVA, R. B. *et al.* The compound class of extended Weibull power series distributions. **Computational Statistical and Data Analysis.** 58, p. 352-367, 2013.

SILVA, R. V. **Some new lifetime models: properties and applications.** 2014. 106 f. Tese (Doutorado em Matemática Computacional). Universidade Federal de Pernambuco. Recife.

SILVA, G. O. *et al.* The Beta Modified Weibull Distribution. **Lifetime Data Analysis**, 2010. Aceito para publicação.

SHAKIL, M., KIBRIA, B. M., and SINGH, J. N. (2010). A new family of distributions based on the generalized Pearson differential equation with some applications. **Austrian Journal of Statistics**, 39, 259-278.

SNEYERS, R. Sur la determination de la stabilité des series climatologiques. Changes of Climate. **Arid Zone Research XX**. UNESCO. Paris, 37-44, 1963.

PAIXÃO, A. C. P. **New Extended Lifetime Distributions**. 2014. 116 p. Tese (Doutorado em Matemática Computacional) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

THAIR, M. H.; NADARAJAH, S. Parameter induction in continuous univariate distributions—Part I: Well-established G—classes. **Communications in Statistic – Theory and Methods**. Submetido em 14/11/2013.

TUNG, A. K. H., XU, X. & OOI, C. B. CURLER: Finding and visualizing nonlinear correlated clusters. *In*: **Proc. SIGMOD**, 2005.

VODA, V.G., A method constructing density functions: the case of a generalized Rayleigh variable. **Applications of Mathematics**, 54, No. 5, 417-431, (2009).

VOIT, E. O. The S-distribution: a tool for approximation and classification of univariate, unimodal probability distributions. **Biometrical Journal**. 1992, 7:855–878.

ZHONG P., & FUKUSHIMA M., A Regularized Nonsmooth Newton Method for Multi-class Support Vector Machines, **Optimization Methods and Software**. 2007, pp. 225 – 36.

ZOGRAFOS, K. On some beta generated distributions and their maximum entropy characterization: The beta-Weibull distribution, in: **N.S. Barnett, S.S. Dragomir** (Eds.), *Advances in Inequalities from Probability Theory & Statistics*, Nova Science Publishers, New Jersey, 2008, pp. 237-260.

ZOGRAFOS, K.; BALAKRISHNAN, N. On the families of beta-and generalized gamma-generated distribution and associated inference, **Stat. Methodol.** 6 (2009), pp. 344–362

## APÊNDICE

### Apêncide A: Gráficos das funções densidade e funções de risco para Weibull exponencial bivariada ( $\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}$ )

Gráficos das funções densidade para Weibull exponencial bivariada

$$\left( \frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)} \right)$$

Apresentamos aqui as figuras 4.8.2.1.1 a 4.8.2.1.14 mostram os gráficos da função densidade de probabilidade representada pelas superfícies e pelos contornos do modelo proposto denominado de distribuição Weibull exponencial bivariada

$\left( \frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)} \right)$  gerados a partir de alguns valores atribuídos aos parâmetros caracterizando algumas possíveis formas, apresentados no capítulo 4.

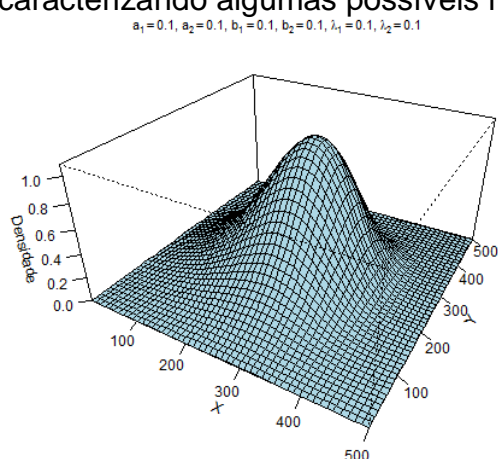


Figura 4.8.2.1.1 – Superfície da *fdp* da Weibull bivariada  $\left( \frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)} \right)$

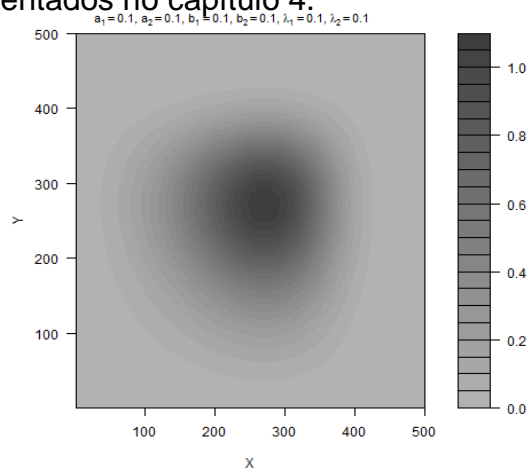


Figura 4.8.2.1.2 – Contorno da *fdp* da Weibull bivariada  $\left( \frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)} \right)$

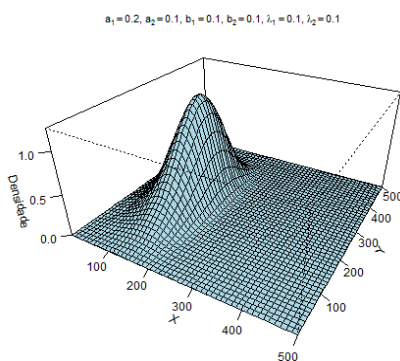


Figura 4.8.2.1.3 – Superfície da *fdp* da Weibull bivariada  $\left( \frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)} \right)$  com  $a_1$  variando

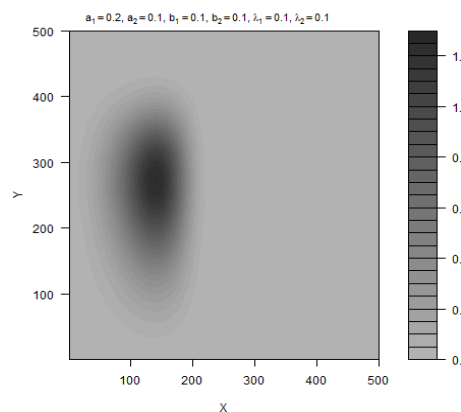


Figura 4.8.2.1.4 – Contorno da *fdp* da Weibull bivariada  $\left( \frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)} \right)$  com  $a_1$  variando

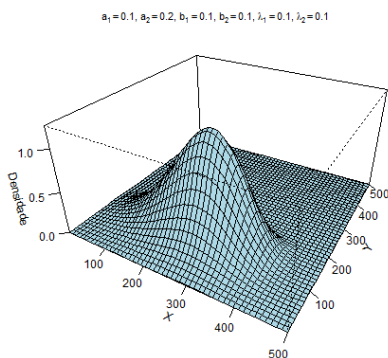


Figura 4.8.2.1.5 – Superfície da *f<sub>dp</sub>* da Weibull bivariada  $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$  com  $a_2$  variando

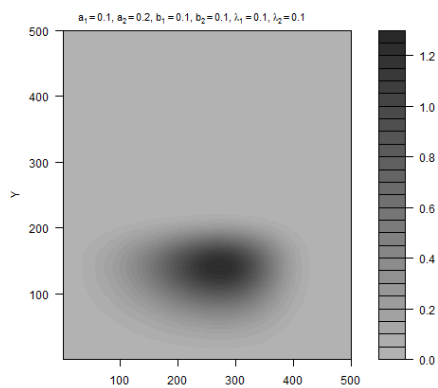


Figura 4.8.2.1.6 – Contorno da *f<sub>dp</sub>* da Weibull bivariada  $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$  com  $a_2$  variando

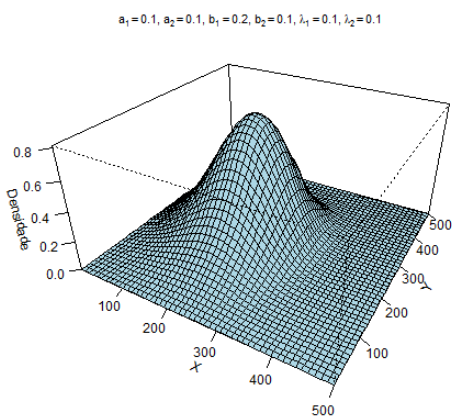


Figura 4.8.2.1.7 – Superfície da *f<sub>dp</sub>* da Weibull bivariada  $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$  com  $b_1$  variando

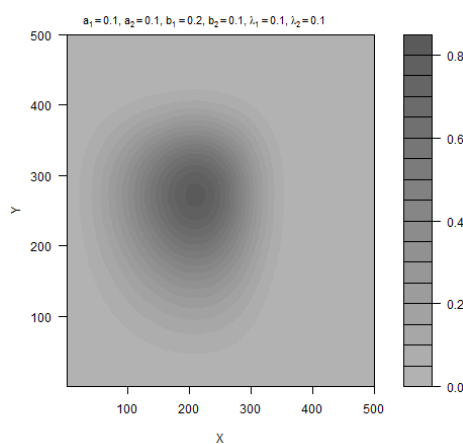


Figura 4.8.2.1.8 – Contorno da *f<sub>dp</sub>* da Weibull bivariada  $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$  com  $b_1$  variando

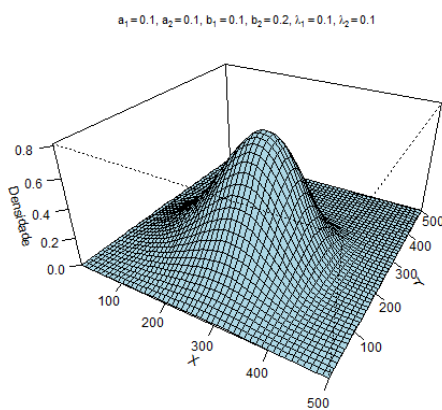


Figura 4.8.2.1.9 – Superfície da *f<sub>dp</sub>* da Weibull bivariada  $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$  com  $b_2$  variando

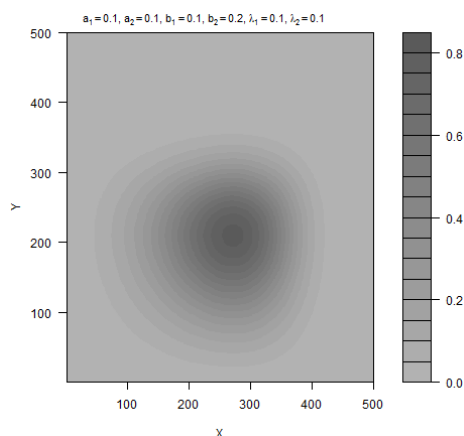


Figura 4.8.2.1.10 – Contorno da *f<sub>dp</sub>* da Weibull bivariada  $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$  com  $b_2$  variando

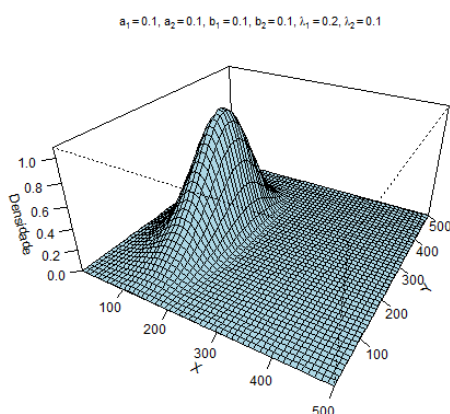


Figura 4.8.2.1.11 – Superfície da *fdp* da Weibull bivariada  $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$  com  $\lambda_1$  variando

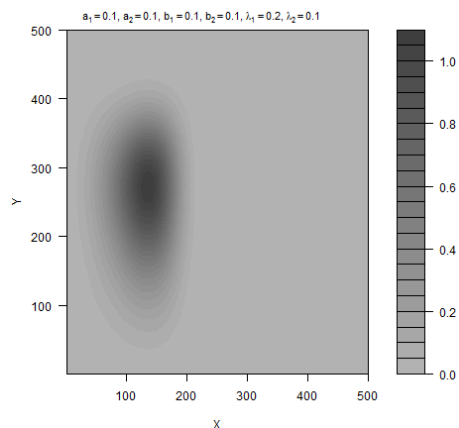


Figura 4.8.2.1.12 – Contorno da *fdp* da Weibull bivariada  $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$  com  $\lambda_1$  variando

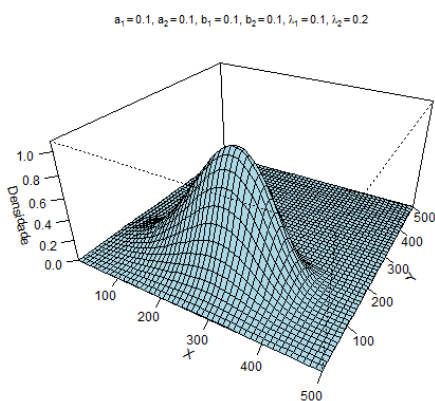


Figura 4.8.2.1.13 – Superfície da *fdp* da Weibull bivariada  $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$  com  $\lambda_2$  variando

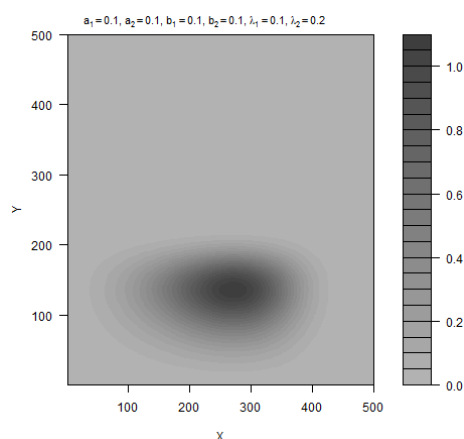


Figura 4.8.2.1.14 – Contorno da *fdp* da Weibull bivariada  $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$  com  $\lambda_2$  variando

### Função de Risco bivariado usando a distribuição Weibull exponencial bivariada $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$

Apresentamos aqui as figuras 4.6.2.2.1 a 4.6.2.2.14 mostram os gráficos da função risco representada pelas superfícies e pelos contornos do modelo proposto denominado de distribuição Weibull exponencial bivariada  $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$  gerados a partir de alguns valores atribuídos aos parâmetros, já apresentados no capítulo 4.

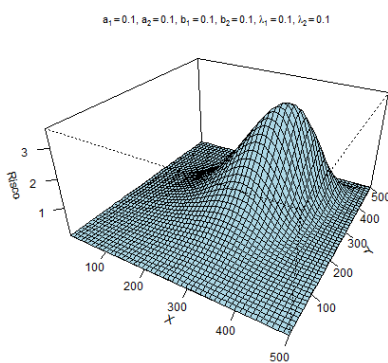


Figura 4.8.2.2.1 – Superfície da função de risco da Weibull bivariada  $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$

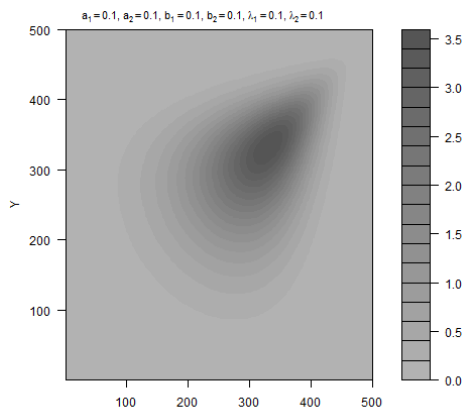


Figura 4.8.2.2.2 – Contorno da *fdp* da Weibull bivariada  $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$

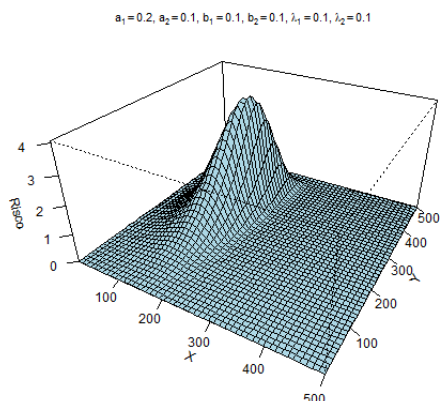


Figura 4.8.2.2.3 – Superfície da função de risco da Weibull bivariada  $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$  com  $a_1$  variando

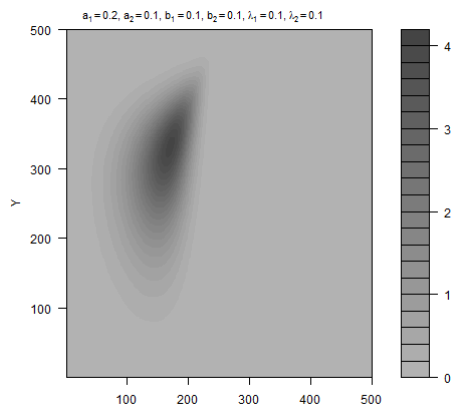


Figura 4.8.2.2.4 – Contorno da *fdp* da Weibull bivariada  $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$  com  $a_1$  variando

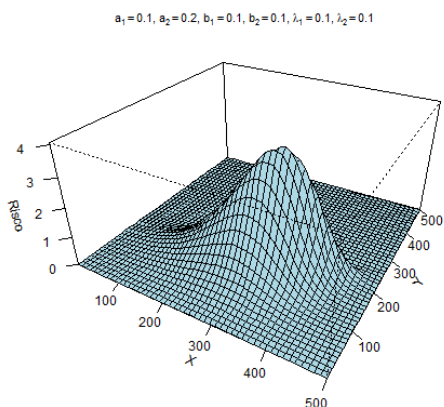


Figura 4.8.2.2.5 – Superfície da função de risco da Weibull bivariada  $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$  com  $a_2$  variando

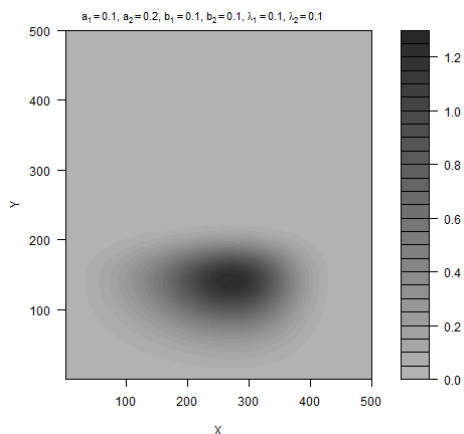


Figura 4.8.2.2.6 – Contorno da *fdp* da Weibull bivariada  $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$  com  $a_2$  variando



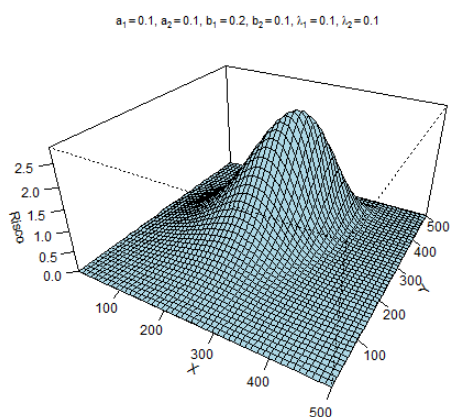


Figura 4.8.2.2.7 – Superfície da função de risco da Weibull bvariada  $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$  com  $b_1$  variando

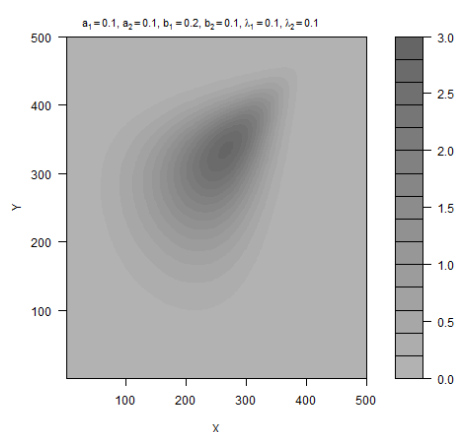


Figura 4.8.2.2.8 – Contorno da  $f_{dp}$  da Weibull bvariada  $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$  com  $b_1$  variando

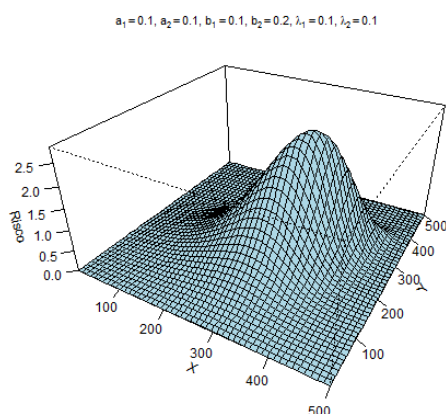


Figura 4.8.2.2.9 – Superfície da função de risco da Weibull bvariada  $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$  com  $b_2$  variando

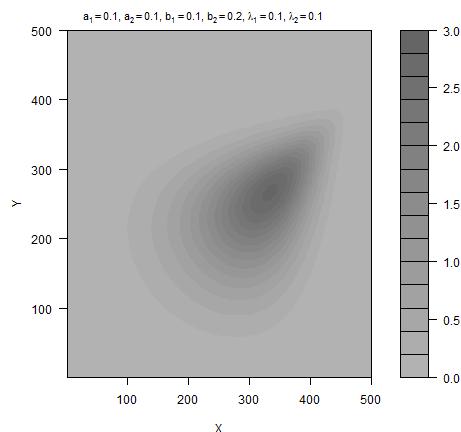


Figura 4.8.2.2.10 – Contorno da  $f_{dp}$  da Weibull bvariada  $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$  com  $b_2$  variando

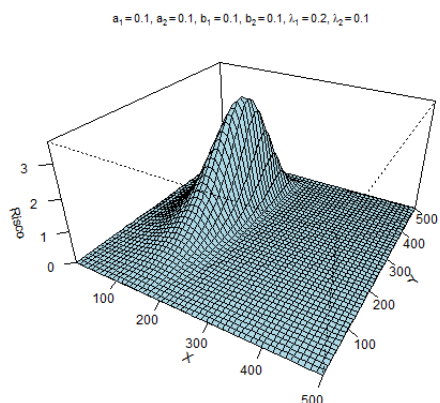


Figura 4.8.2.2.11 – Superfície da função de risco da Weibull bvariada  $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$  com  $\lambda_1$  variando

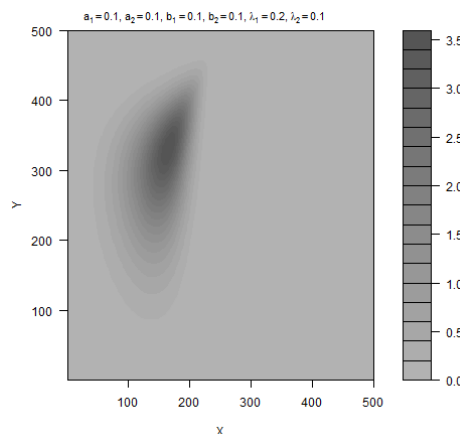


Figura 4.8.2.2.12 – Contorno da  $f_{dp}$  da Weibull bvariada  $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$  com  $\lambda_1$  variando

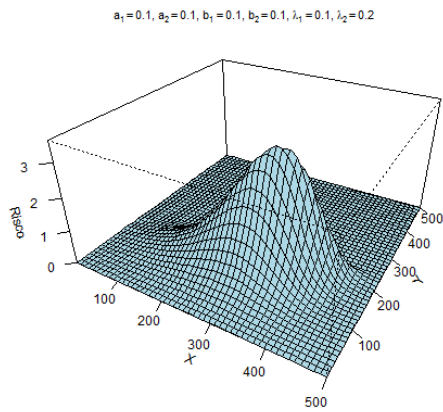


Figura 4.8.2.2.13 – Superfície da função de risco da Weibull bivariada  $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$  com  $\lambda_2$  variando

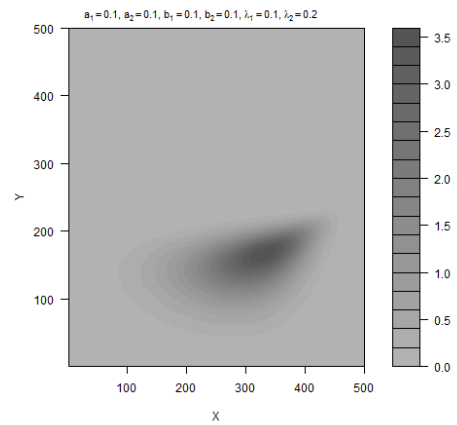


Figura 4.8.2.2.14 – Contorno da  $f_{dp}$  da Weibull bivariada  $\left(\frac{Exp_2(y)}{1-Exp_2(y)}, \frac{Exp_1(x)}{1-Exp_1(x)}\right)$  com  $\lambda_2$  variando

## Apêndice B: Listas de funções monotônicas envolvendo distribuições

De fato, queremos crer que na noção de construções de funções monotônicas envolvendo distribuições está num dos principais ganhos desta tese. Como modo de organizar suas aplicações, delineamos uma tipologia deste conceito.

As listas apresentadas a seguir, são funções monotônicas envolvendo distribuições, que alimentam os funcionais geradores de classes de distribuições para os corolários 3.1.5 a 3.1.7.

### Relação de funções monotônicas com conjuntos imagens limitadas:

#### 1. Relação de funções monotônicas não decrescentes $u_j$ com conjuntos imagens que vai de 0 a 1:

- 1)  $u_j(\cdot)(x) = \prod_{i=1}^m G_i^{\beta_i}(x)$ , com  $m = 1, 2, 3, \dots$  e  $\beta_i > 0$ .
- 2)  $u_j(\cdot)(x) = \sum_{i=1}^m p_i G_i^{\beta_i}(x)$ , com  $0 \leq p_i \leq 1$ ,  $\sum_{i=1}^m p_i = 1$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$  e  $\beta_i > 0$ .
- 3)  $u_j(\cdot)(x) = 1 - \sum_{i=1}^m p_i (1 - G_i^{\beta_i}(x))^{\gamma_i}$ , com  $0 \leq p_i \leq 1$ ,  $\sum_{i=1}^m p_i = 1$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$ ,  $\beta_i > 0$  e  $\gamma_i > 0$ .
- 4)  $u_j(\cdot)(x) = \ln(1 + (e - 1) \cdot \prod_{i=1}^m G_i^{\beta_i}(x))$ , com  $m = 1, 2, 3, \dots$  e  $\beta_i > 0$ .
- 5)  $u_j(\cdot)(x) = \ln(e - (e - 1) \cdot \prod_{i=1}^m (1 - G_i^{\beta_i}(x))^{\gamma_i})$ , com  $m = 1, 2, 3, \dots$ ,  $\beta_i > 0$  e  $\gamma_i > 0$ .
- 6)  $u_j(\cdot)(x) = \ln(e - (e - 1) \cdot (1 - \prod_{i=1}^m G_i^{\beta_i}(x))^{\gamma})$ , com  $m = 1, 2, 3, \dots$ ,  $\beta_i > 0$  e  $\gamma > 0$ .
- 7)  $u_j(\cdot)(x) = 1 - \prod_{i=1}^m (1 - G_i^{\beta_i}(x))^{\gamma_i}$ , com  $m = 1, 2, 3, \dots$ ,  $\beta_i > 0$  e  $\gamma_i > 0$ .
- 8)  $u_j(\cdot)(x) = 1 - (1 - \prod_{i=1}^m G_i^{\beta_i}(x))^{\gamma}$ , com  $m = 1, 2, 3, \dots$ ,  $\beta_i > 0$  e  $\gamma > 0$ .
- 9)  $u_j(\cdot)(x) = \exp\left(-\frac{v_i(\cdot)(x)}{u_i(\cdot)(x)}\right)$ , com  $j \neq i$ .
- 10)  $u_j(\cdot)(x) = 1 - \exp\left(-\frac{u_i(\cdot)(x)}{v_i(\cdot)(x)}\right)$ , com  $j \neq i$ .
- 11)  $u_j(\cdot)(x) = \left(1 - \left(1 - \left(1 - \dots \left(1 - \left(1 - u_i^{\alpha_0}(\cdot)(x)\right)^{\alpha_1}\right)^{\alpha_2}\right)^{\alpha_{n-2}}\right)^{\alpha_{n-1}}\right)^{\alpha_n}$ ,  
com  $j \neq i$ ,  $\alpha_k > 0$  e  $n$  par.

$$12) u_j(.) (x) = \left( 1 - \left( 1 - \left( 1 - \dots \left( 1 - \left( 1 - v_i^{\alpha_0} (.) (x) \right)^{\alpha_1} \right)^{\alpha_2} \right)^{\alpha_{n-2}} \right)^{\alpha_{n-1}} \right)^{\alpha_n},$$

com  $j \neq i$ ,  $\alpha_i > 0$  e  $n$  ímpar.

$$13) u_j(.) (x) = 1 - v_i(.) (x).$$

$$14) u_j(.) (x) = \left( \frac{u_1(.) (x)}{1+v_1(.) (x)} \right)^\theta, \text{ com } \theta > 0.$$

$$15) u_j(.) (x) = \frac{\left( \frac{1+u_1(.) (x)}{1+v_1(.) (x)} \right)^\theta - 2^{-\theta}}{2^\theta - 2^{-\theta}}, \text{ com } \theta > 0.$$

$$16) u_j(.) (x) = \frac{(1+v_1(.) (x))^{-\theta} - 2^{-\theta}}{1 - 2^{-\theta}}, \text{ com } \theta > 0.$$

$$17) u_j(.) (x) = \frac{(1+u_1(.) (x))^{-\theta} - 1}{2^{-\theta} - 1}, \text{ com } \theta > 0.$$

$$18) u_j(.) (x) = \left( \frac{u_1(.) (x)}{u_1(.) (x) + b v_1(.) (x)} \right)^\theta, \text{ com } b > 0 \text{ e } \theta > 0.$$

$$19) u_j(.) (x) = \frac{\exp(u_1(.) (x)) - 1}{e - 1}.$$

$$20) u_j(.) (x) = (u_1(.) (x))^{v_1(G_1, \dots, G_m)(x)}.$$

$$21) u_j(.) (x) = (u_1(.) (x) + 1)^{u_2(G_1, \dots, G_m)(x)} - 1.$$

$$22) u_j(.) (x) = \frac{\ln(1+u_1(.) (x))}{\ln 2}.$$

$$23) u_j(.) (x) = (u_1(.) (x))^{\frac{v_1(.) (x)}{u_2(.) (x)}}.$$

$$24) u_j(.) (x) = \frac{\exp\left(\frac{1+u_1(.) (x)}{1+v_1(.) (x)}\right) - \exp\left(\frac{1}{2}\right)}{\exp(2) - \exp\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

$$25) u_j(.) (x) = \frac{\exp\left(\frac{1+v_1(.) (x)}{1+u_1(.) (x)}\right) - \exp(2)}{\exp\left(\frac{1}{2}\right) - \exp(2)}.$$

$$26) u_j(.) (x) = \frac{\exp\left(\frac{v_1(.) (x)}{1+u_1(.) (x)}\right) - e}{1 - e}.$$

$$27) u_j(.) (x) = \frac{\exp\left(\frac{u_1(.) (x)}{1+v_1(.) (x)}\right) - 1}{e - 1}.$$

$$28) u_j(.) (x) = \frac{\exp(u_1(.) (x) - v_1(.) (x)) - \exp(-1)}{\exp(1) - \exp(-1)}.$$

$$29) u_j(.) (x) = \frac{\exp(v_1(.) (x) - u_1(.) (x)) - \exp(1)}{\exp(-1) - \exp(1)}.$$

$$30) u_j(.) (x) = \frac{\ln\left(\frac{1+v_1(.) (x)}{1+u_1(.) (x)}\right) - \ln 2}{-2 \ln 2}.$$

$$31) u_j(.) (x) = \frac{\ln\left(\frac{1+u_1(.) (x)}{1+v_1(.) (x)}\right) + \ln 2}{2 \ln 2}.$$

**2. Relação de funções monotônicas não decrescentes  $v_j$  com conjuntos imagens que vai de 1 a 0:**

- 1)**  $v_j(\cdot)(x) = 1 - \prod_{i=1}^m G_i^{\alpha_i}(x)$ , com  $m = 1, 2, 3, \dots$  e  $\alpha_i > 0$ .
- 2)**  $v_j(\cdot)(x) = 1 - \sum_{i=1}^m p_i G_i^{\beta_i}(x)$ , com  $0 \leq p_i \leq 1$ ,  $\sum_{i=1}^m p_i = 1$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$  e  $\beta_i > 0$ .
- 3)**  $v_j(\cdot)(x) = \prod_{i=1}^m (1 - G_i^{\beta_i}(x))^{\gamma_i}$ , com  $m = 1, 2, 3, \dots$ ,  $\beta_i > 0$  e  $\gamma_i > 0$ .
- 4)**  $v_j(\cdot)(x) = \sum_{i=1}^m p_i (1 - G_i^{\beta_i}(x))^{\gamma_i}$ , com  $0 \leq p_i \leq 1$ ,  $\sum_{i=1}^m p_i = 1$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$ ,  $\beta_i > 0$  e  $\gamma_i > 0$ .
- 5)**  $v_j(\cdot)(x) = \ln \left( 1 + (e - 1) \cdot \prod_{i=1}^m (1 - G_i^{\alpha_i}(x))^{\lambda_i} \right)$ , com  $m = 1, 2, 3, \dots$ ,  $\alpha_i > 0$  e  $\lambda_i > 0$ .
- 6)**  $v_j(\cdot)(x) = \ln \left( 1 + (e - 1) \cdot (1 - \prod_{i=1}^m G_i^{\alpha_i}(x))^{\lambda} \right)$ , com  $m = 1, 2, 3, \dots$ ,  $\alpha_i > 0$  e  $\lambda > 0$ .
- 7)**  $v_j(\cdot)(x) = \ln(e - (e - 1) \cdot \prod_{i=1}^m G_i^{\alpha_i}(x))$ , com  $m = 1, 2, 3, \dots$  e  $\alpha_i > 0$
- 8)**  $v_j(\cdot)(x) = \exp \left( -\frac{u_i(\cdot)(x)}{v_i(\cdot)(x)} \right)$ , com  $j \neq i$ .
- 9)**  $v_j(\cdot)(x) = 1 - \exp \left( -\frac{v_i(\cdot)(x)}{u_i(\cdot)(x)} \right)$ , com  $j \neq i$ .
- 10)**  $v_j(\cdot)(x) = \left( 1 - \left( 1 - \left( 1 - \dots \left( 1 - \left( 1 - u_i^{\alpha_0}(\cdot)(x) \right)^{\alpha_1} \right)^{\alpha_2} \right)^{\alpha_{n-2}} \right)^{\alpha_{n-1}} \right)^{\alpha_n}$ ,  
com  $j \neq i$ ,  $\alpha_k > 0$  e  $n$  ímpar.
- 11)**  $v_j(\cdot)(x) = \left( 1 - \left( 1 - \left( 1 - \dots \left( 1 - \left( 1 - v_i^{\alpha_0}(\cdot)(x) \right)^{\alpha_1} \right)^{\alpha_2} \right)^{\alpha_{n-2}} \right)^{\alpha_{n-1}} \right)^{\alpha_n}$ ,  
com  $j \neq i$ ,  $\alpha_k > 0$  e  $n$  par.
- 12)**  $v_j(\cdot)(x) = 1 - u_i(\cdot)(x)$
- 13)**  $v_j(\cdot)(x) = \left( \frac{v_1(\cdot)(x)}{1+u_1(\cdot)(x)} \right)^{\theta}$ , com  $\theta > 0$ .
- 14)**  $v_j(\cdot)(x) = \frac{\left( \frac{1+v_1(\cdot)(x)}{1+u_1(\cdot)(x)} \right)^{\theta} - 2^{-\theta}}{2^{\theta} - 2^{-\theta}}$ , com  $\theta > 0$ .
- 15)**  $v_j(\cdot)(x) = \frac{(1+u_1(\cdot)(x))^{-\theta} - 2^{-\theta}}{1 - 2^{-\theta}}$ , com  $\theta > 0$ .
- 16)**  $v_j(\cdot)(x) = \frac{(1+v_1(\cdot)(x))^{-\theta} - 1}{2^{-\theta} - 1}$ , com  $\theta > 0$ .
- 17)**  $v_j(\cdot)(x) = \left( \frac{bv_1(\cdot)(x)}{u_1(\cdot)(x) + bv_1(\cdot)(x)} \right)^{\theta}$ , com  $b > 0$  e  $\theta > 0$ .

$$18) v_j(.) (x) = \frac{\exp(v_1(.) (x)) - 1}{e - 1}.$$

$$19) v_j(.) (x) = (v_1(.) (x))^{u_1(.) (x)}.$$

$$20) v_j(.) (x) = (1 + v_1(.) (x))^{v_2(.) (x)} - 1.$$

$$21) v_j(.) (x) = \frac{\ln(1 + v_1(.) (x))}{\ln 2}.$$

$$22) v_j(.) (x) = (v_1(.) (x))^{\frac{u_1(.) (x)}{v_2(.) (x)}}.$$

$$23) v_j(.) (x) = \frac{\exp\left(\frac{1 + v_1(.) (x)}{1 + u_1(.) (x)}\right) - \exp\left(\frac{1}{2}\right)}{\exp(2) - \exp\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

$$24) v_j(.) (x) = \frac{\exp\left(\frac{1 + u_1(.) (x)}{1 + v_1(.) (x)}\right) - \exp(2)}{\exp\left(\frac{1}{2}\right) - \exp(2)}.$$

$$25) v_j(.) (x) = \frac{\exp\left(\frac{v_1(.) (x)}{1 + u_1(.) (x)}\right) - 1}{e - 1}.$$

$$26) v_j(.) (x) = \frac{\exp\left(\frac{u_1(.) (x)}{1 + v_1(.) (x)}\right) - e}{1 - e}.$$

$$27) v_j(.) (x) = \frac{\exp(u_1(.) (x) - v_1(.) (x)) - \exp(1)}{\exp(-1) - \exp(1)}.$$

$$28) v_j(.) (x) = \frac{\exp(v_1(.) (x) - u_1(.) (x)) - \exp(-1)}{\exp(1) - \exp(-1)}.$$

$$29) v_j(.) (x) = \frac{\ln\left(\frac{1 + v_1(.) (x)}{1 + u_1(.) (x)}\right) + \ln 2}{2 \ln 2}.$$

$$30) v_j(.) (x) = \frac{\ln\left(\frac{1 + u_1(.) (x)}{1 + v_1(.) (x)}\right) - \ln 2}{-2 \ln 2}.$$

### 3. Relação de funções monotônicas não constantes $h$ 's com conjuntos imagens limitadas:

$$1) h(.) (x) = a + (b - a) \cdot u_1(.) (x), \text{ com } a \text{ e } b \in \mathbb{R} \text{ e } a < b$$

$$2) h(.) (x) = b - (b - a) \cdot v_1(.) (x), \text{ com } a \text{ e } b \in \mathbb{R} \text{ e } a < b$$

$$3) h(.) (x) = a + (b - a) \cdot v_1(.) (x), \text{ com } a \text{ e } b \in \mathbb{R} \text{ e } a < b$$

$$4) h(.) (x) = b - (b - a) \cdot u_1(.) (x), \text{ com } a \text{ e } b \in \mathbb{R} \text{ e } a < b$$

$$5) h(.) (x) = \prod_{i=1}^m (a_i + G_i^{\alpha_i}(x))^{\beta_i}, \text{ com } a_i \geq 0, \alpha_i > 0 \text{ e } \beta_i > 0.$$

$$6) h(.) (x) = \prod_{i=1}^m (a_i - G_i^{\alpha_i}(x))^{\beta_i}, \text{ com } a_i \geq 1, \alpha_i > 0 \text{ e } \beta_i > 0.$$

$$7) h(.) (x) = \left( a_{n-1} + \left( a_{n-2} + \left( a_{n-3} + \cdots \left( a_1 + \left( a_0 + u_1^{\alpha_0}(.)(x) \right)^{\alpha_1} \right)^{\alpha_2} \right)^{\alpha_{n-2}} \right)^{\alpha_{n-1}} \right)^{\alpha_n},$$

com  $a_i \geq 0$  e  $\alpha_i > 0$ .

$$8) h(\cdot)(x) = \left( a_{n-1} + \left( a_{n-2} + \left( a_{n-3} + \cdots \left( a_1 + \left( a_0 + v_1^{\alpha_0}(\cdot)(x) \right)^{\alpha_1} \right)^{\alpha_2} \right)^{\alpha_{n-2}} \right)^{\alpha_{n-1}} \right)^{\alpha_n},$$

com  $a_i \geq 0$  e  $\alpha_i > 0$ .

$$9) h(\cdot)(x) = \prod_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m \left( (a_{i,j} + G_i^{\alpha_{i,j}}(x))^{\beta_{i,j}} \right) \right), \text{ com } a_{i,j} \geq 0, \alpha_{i,j} > 0 \text{ e } \beta_{i,j} > 0.$$

$$10) h(\cdot)(x) = \prod_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m \left( (a_{i,j} - G_i^{\alpha_{i,j}}(x))^{\beta_{i,j}} \right) \right), \text{ com } a_{i,j} \geq 1, \alpha_{i,j} > 0 \text{ e } \beta_{i,j} > 0.$$

$$11) h(G_1, \dots, G_{m+n})(x) = \left( \frac{\sum_{j=1}^n \left( \prod_{i=1}^m \delta_{i,j} (a_{i,j} + G_i^{\alpha_{i,j}}(x))^{\beta_{i,j}} \right)}{\sum_{j=1}^n \left( \prod_{i=1}^m \delta_{i,j} (a_{i,j} + G_i^{\alpha_{i,j}}(x))^{\beta_{i,j}} \right) + \sum_{j=1}^r \left( \prod_{i=1}^n b_{i,j} (\theta_{i,j} - G_{m+i}^{\lambda_{i,j}}(x))^{\gamma_{i,j}} \right)} \right)^{\theta}, \text{ com } \theta_{i,j} \geq 1,$$

$a_{i,j} \geq 0$  e os demais parâmetros são positivos.

$$12) h(G_1, \dots, G_{m+n})(x) = \left( \frac{\sum_{j=1}^r \left( \prod_{i=1}^n b_{i,j} (\theta_{i,j} - G_{m+i}^{\lambda_{i,j}}(x))^{\gamma_{i,j}} \right)}{\sum_{j=1}^n \left( \prod_{i=1}^m \delta_{i,j} (a_{i,j} + G_i^{\alpha_{i,j}}(x))^{\beta_{i,j}} \right) + \sum_{j=1}^r \left( \prod_{i=1}^n b_{i,j} (\theta_{i,j} - G_{m+i}^{\lambda_{i,j}}(x))^{\gamma_{i,j}} \right)} \right)^{\theta}, \text{ com } \theta_{i,j} \geq 1,$$

$a_{i,j} \geq 0$  e os demais parâmetros são positivos

$$13) h(\cdot)(x) = \left( \sum_{j=1}^n \left( \prod_{i=1}^m \delta_{i,j} (a_{i,j} + G_i^{\alpha_{i,j}}(x))^{\beta_{i,j}} \right) \right)^{\theta}, \text{ com } a_{i,j} \geq 0 \text{ e os demais parâmetros são positivos.}$$

$$14) h(\cdot)(x) = \left( \sum_{j=1}^n \left( \prod_{i=1}^m b_{i,j} (\theta_{i,j} - G_i^{\lambda_{i,j}}(x))^{\gamma_{i,j}} \right) \right)^{\theta}, \text{ com } \theta_{i,j} \geq 1 \text{ e os demais parâmetros são positivos.}$$

$$15) h(\cdot)(x) = \left( \frac{u_1(\cdot)(x)}{1+v_1(\cdot)(x)} \right)^{\theta}, \text{ com } \theta > 0.$$

$$16) h(\cdot)(x) = \left( \frac{v_1(\cdot)(x)}{1+u_1(\cdot)(x)} \right)^{\theta}, \text{ com } \theta > 0.$$

$$17) h(\cdot)(x) = \left( \frac{1+u_1(\cdot)(x)}{1+v_1(\cdot)(x)} \right)^{\theta}, \text{ com } \theta > 0.$$

$$18) h(\cdot)(x) = \left( \frac{1+v_1(\cdot)(x)}{1+u_1(\cdot)(x)} \right)^{\theta}, \text{ com } \theta > 0.$$

$$19) h(\cdot)(x) = \left( \frac{1}{1+v_1(\cdot)(x)} \right)^{\theta}, \text{ com } \theta > 0.$$

$$20) h(\cdot)(x) = \left( \frac{1}{1+u_1(\cdot)(x)} \right)^{\theta}, \text{ com } \theta > 0.$$

$$21) h(\cdot)(x) = \left( \frac{u_1(\cdot)(x)}{u_1(\cdot)(x)+bv_1(\cdot)(x)} \right)^{\theta}, \text{ com } b > 0 \text{ e } \theta > 0.$$

$$22) h(\cdot)(x) = \left( \frac{bv_1(\cdot)(x)}{u_1(\cdot)(x)+bv_1(\cdot)(x)} \right)^{\theta}, \text{ com } b > 0 \text{ e } \theta > 0.$$

$$23) h(\cdot)(x) = \exp(u_1(\cdot)(x)).$$

$$24) h(\cdot)(x) = \exp(v_1(\cdot)(x)).$$

$$25) h(\cdot)(x) = (u_1(\cdot)(x))^{v_1(G_1, \dots, G_m)(x)}.$$

$$26) h(\cdot)(x) = (u_1(\cdot)(x) + 1)^{u_2(\cdot)(x)}$$

$$27) h(\cdot)(x) = (v_1(\cdot)(x))^{u_1(\cdot)(x)}.$$

$$28) h(\cdot)(x) = (1 + v_1(\cdot)(x))^{v_2(\cdot)(x)}.$$

$$29) h(\cdot)(x) = \ln(1 + u_1(\cdot)(x)).$$

$$30) h(\cdot)(x) = \ln(1 + v_1(\cdot)(x)).$$

$$31) h(\cdot)(x) = (v_1(\cdot)(x))^{\frac{u_1(\cdot)(x)}{v_2(\cdot)(x)}}.$$

$$32) h(\cdot)(x) = (u_1(\cdot)(x))^{\frac{v_1(\cdot)(x)}{u_2(\cdot)(x)}}.$$

$$33) h(\cdot)(x) = \exp\left(\frac{1+v_1(\cdot)(x)}{1+u_1(\cdot)(x)}\right).$$

$$34) h(\cdot)(x) = \exp\left(\frac{1+u_1(\cdot)(x)}{1+v_1(\cdot)(x)}\right)$$

$$35) h(\cdot)(x) = \exp\left(\frac{v_1(\cdot)(x)}{1+u_1(\cdot)(x)}\right).$$

$$36) h(\cdot)(x) = \exp\left(\frac{u_1(\cdot)(x)}{1+v_1(\cdot)(x)}\right)$$

$$37) h(\cdot)(x) = \exp(u_1(\cdot)(x)) - \exp(v_1(\cdot)(x))$$

$$38) h(\cdot)(x) = \exp(v_1(\cdot)(x)) - \exp(u_1(\cdot)(x))$$

$$39) h(\cdot)(x) = \exp(u_1(\cdot)(x) - v_1(\cdot)(x))$$

$$40) h(\cdot)(x) = \exp(v_1(\cdot)(x) - u_1(\cdot)(x))$$

$$41) h(\cdot)(x) = \ln\left(\frac{1+v_1(\cdot)(x)}{1+u_1(\cdot)(x)}\right)$$

$$42) h(\cdot)(x) = \ln\left(\frac{1+u_1(\cdot)(x)}{1+v_1(\cdot)(x)}\right)$$

#### 4. Relação de funções monotônicas $h$ 's com conjuntos imagens ilimitadas à direita:

##### 4.1 Relação de funções monotônicas não decrescentes $h_j$ 's com conjuntos imagens ilimitadas à direita:

Sejam  $h_j: [0,1]^m \rightarrow [0, +\infty[$  funções não decrescentes envolvendo distribuições, tais que  $h_j$ 's são sobrejetoras, veremos agora uma lista contendo algumas dessas funções:



- 1)  $h_j(\cdot)(x) = \left(\frac{u_2(\cdot)(x)}{v_1(\cdot)(x)}\right)^b$ , com  $b > 0$
- 2)  $h_j(\cdot)(x) = \left(-\ln(v_1(\cdot)(x))\right)^b$ , com  $b > 0$
- 3)  $h_j(\cdot)(x) = \exp\left(\frac{u_2(\cdot)(x)+u_3(\cdot)(x)-1}{u_4(\cdot)(x)\cdot v_1(\cdot)(x)}\right)$ , com  $b > 0$
- 4)  $h_j(\cdot)(x) = \left(\exp\left(\frac{u_2(\cdot)(x)}{v_1(\cdot)(x)}\right) - 1\right)^b$ , com  $b > 0$
- 5)  $h_j(\cdot)(x) = \left(\exp\left(\frac{1}{v_1(\cdot)(x)}\right) - e\right)^b$ , com  $b > 0$
- 6)  $h_j(\cdot)(x) = \left(\frac{u_1(\cdot)(x)}{\ln(1+v_1(\cdot)(x))}\right)^b$ , com  $b > 0$
- 7)  $h_j(\cdot)(x) = \left(-\frac{1+v_1(\cdot)(x)}{\ln(u_1(\cdot)(x))}\right)^b$ , com  $b > 0$
- 8)  $h_j(\cdot)(x) = \left(\frac{\ln(v_1(\cdot)(x))}{\ln(u_1(\cdot)(x))}\right)^b$ , com  $b > 0$ .
- 9)  $h_j(\cdot)(x) = \left(-\frac{u_1(\cdot)(x)}{\ln(u_2(\cdot)(x))}\right)^b$ , com  $b > 0$ .
- 10)  $h_j(\cdot)(x) = \left(-\frac{\ln(v_2(\cdot)(x))}{v_1(\cdot)(x)}\right)^b$ , com  $b > 0$ .
- 11)  $h_j(\cdot)(x) = \left(\left(\frac{1}{v_1(\cdot)(x)}\right)^\lambda - 1\right)^b$ , com  $b > 0$ .
- 12)  $h_j(\cdot)(x) = \left(-\frac{1}{\ln(u_2(\cdot)(x))}\right)^b$ , com  $b > 0$ .
- 13)  $h_j(\cdot)(x) = \left(-\frac{1}{\ln(v_2(\cdot)(x))}\right)^b$ , com  $b > 0$ .
- 14)  $h_j(\cdot)(x) = \left(\frac{u_1(\cdot)(x)}{v_1(\cdot)(x)}\right)^{1+u_2(\cdot)(x)}$ .
- 15)  $h_j(\cdot)(x) = \left(1 + u_1(\cdot)(x)\right)^{\frac{u_2(\cdot)(x)}{v_1(\cdot)(x)}}$ .
- 16)  $h_j(\cdot)(x) = \left(\frac{1+u_1(\cdot)(x)}{v_1(\cdot)(x)}\right)^{\frac{u_2(\cdot)(x)}{v_2(\cdot)(x)}}$ .
- 17)  $h_j(\cdot)(x) = \left(-\ln(v_1(\cdot)(x))\right)^b$ , com  $b > 0$ .
- 18)  $h_j(\cdot)(x) = \left(\ln\left(\frac{1+u_1(\cdot)(x)}{v_1(\cdot)(x)}\right)\right)^b$ , com  $b > 0$ .
- 19)  $h_j(\cdot)(x) = \left(\log_{(1+v_1(\cdot)(x))}(e) - \frac{1}{\ln 2}\right)^b$ , com  $b > 0$ .

$$20) h_j(\cdot)(x) = \left( -\log_{(u_1(\cdot)(x))} (e) \right)^b, \text{ com } b > 0.$$

$$21) h_j(\cdot)(x) = \left( \log_{\left(\frac{1+v_1(\cdot)(x)}{u_1(\cdot)(x)}\right)} (e) \right)^b, \text{ com } b > 0.$$

$$22) h_j(\cdot)(x) = \left( \log_{(1+v_1(\cdot)(x))} (1 + u_1(\cdot)(x)) \right)^b, \text{ com } b > 0.$$

$$23) h_j(\cdot)(x) = \left( \log_{(1+v_2(\cdot)(x))} \left( \frac{1+u_1(\cdot)(x)}{v_1(\cdot)(x)} \right) \right)^b, \text{ com } b > 0.$$

$$24) h_j(\cdot)(x) = \left( \ln \left( 1 - \ln(v_1(\cdot)(x)) \right) \right)^b, \text{ com } b > 0.$$

#### 4.2 Relação de funções monotônicas não decrescentes $z_j$ 's com conjuntos imagens ilimitadas à direita:

Sejam  $z_j: [0,1]^m \rightarrow [0, +\infty[$  funções não crescentes envolvendo distribuições, tais que  $z_j$ 's são sobrejetoras, veremos agora uma lista contendo algumas dessas funções:

$$1) z_j(\cdot)(x) = \left( \frac{v_1(\cdot)(x)}{u_1(\cdot)(x)} \right)^b, \text{ com } b > 0.$$

$$2) z_j(\cdot)(x) = \left( -\ln(u_1(\cdot)(x)) \right)^b, \text{ com } b > 0.$$

$$3) z_j(\cdot)(x) = \exp \left( \frac{1-u_2(\cdot)(x)-u_3(\cdot)(x)}{u_1(\cdot)(x) \cdot v_1(\cdot)(x)} \right), \text{ com } b > 0.$$

$$4) z_j(\cdot)(x) = \left( \exp \left( \frac{v_1(\cdot)(x)}{u_1(\cdot)(x)} \right) - 1 \right)^b, \text{ com } b > 0.$$

$$5) z_j(\cdot)(x) = \left( \exp \left( \frac{1}{u_2(\cdot)(x)} \right) - e \right)^b, \text{ com } b > 0.$$

$$6) z_j(\cdot)(x) = \left( \frac{\ln(u_1(\cdot)(x))}{\ln(v_1(\cdot)(x))} \right)^b, \text{ com } b > 0.$$

$$7) z_j(\cdot)(x) = \left( -\frac{v_1(\cdot)(x)}{\ln(v_2(\cdot)(x))} \right)^b, \text{ com } b > 0.$$

$$8) z_j(\cdot)(x) = \left( -\frac{\ln(u_2(\cdot)(x))}{u_1(\cdot)(x)} \right)^b, \text{ com } b > 0.$$

$$9) z_j(\cdot)(x) = \left( \left( \frac{1}{u_1(\cdot)(x)} \right)^\lambda - 1 \right)^b, \text{ com } b > 0.$$

- 10)  $z_j(\cdot)(x) = \left(\frac{v_1(\cdot)(x)}{u_1(\cdot)(x)}\right)^{1+v_2(\cdot)(x)}$ .
- 11)  $z_j(\cdot)(x) = (1 + v_1(\cdot)(x))^{\frac{v_2(\cdot)(x)}{u_1(\cdot)(x)}}$ .
- 12)  $z_j(\cdot)(x) = \left(\frac{v_1(\cdot)(x)}{u_1(\cdot)(x)}\right)^{\frac{1+v_2(\cdot)(x)}{u_2(\cdot)(x)}}$ .
- 13)  $z_j(\cdot)(x) = \left(\ln\left(\frac{1+v_1(\cdot)(x)}{u_1(\cdot)(x)}\right)\right)^b$ , com  $b > 0$ .
- 14)  $z_j(\cdot)(x) = \left(-\ln(u_1(\cdot)(x))\right)^b$ , com  $b > 0$ .
- 15)  $z_j(\cdot)(x) = \left(\log_{(1+u_1(\cdot)(x))} (e) - \frac{1}{\ln 2}\right)^b$ , com  $b > 0$ .
- 16)  $z_j(\cdot)(x) = \left(\log_{\left(\frac{1+u_1(\cdot)(x)}{v_1(\cdot)(x)}\right)} (e)\right)^b$ , com  $b > 0$ .
- 17)  $z_j(\cdot)(x) = \left(\log_{\left(\frac{1+u_1(\cdot)(x)}{v_1(\cdot)(x)}\right)} (1 + v_2(\cdot)(x))\right)^b$ , com  $b > 0$ .
- 18)  $z_j(\cdot)(x) = \left(\ln\left(1 - \ln(u_2(\cdot)(x))\right)\right)^b$ , com  $b > 0$ .

## Apêndice C: Listas de funções monotônicas crescentes e decrescentes

Delinearemos agora algumas listas de funções crescentes e decrescentes definidas  $\mu: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $m: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\nu: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\ell: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ , que alimentam os funcionais dos corolários 3.1.5 a 3.1.7.

### 1 Relação de funções crescentes com imagens limitadas

Sejam  $\mu(t)$  e  $m(t)$  funções crescentes, tais que  $\mu(0) = m(0) = 0$  e  $\mu(1) = m(1) = 1$ , veremos agora uma lista contendo algumas dessas funções:

- 1)  $\mu(t) = m(t) = t$
- 2)  $\mu(t) = m(t) = t^{2n+1}$ , com  $n = 0,1,2, \dots$

### 2 Relação de funções decrescentes com imagens limitadas

Sejam  $\nu(t)$  e  $\ell(t)$  funções decrescentes, tais que  $\nu(0) = \ell(0) = 1$  e  $\nu(1) = \ell(1) = 0$ , veremos agora uma lista contendo algumas dessas funções:

- 1)  $\nu(t) = \ell(t) = 1 - t$
- 2)  $\nu(t) = \ell(t) = (1 - t)^{2n+1}$ , com  $n = 0,1,2, \dots$

### 3 Relação de funções crescentes com imagens ilimitadas à direita

Sejam  $\mu(t)$  e  $m(t)$  funções crescentes, tais que  $\mu(0) = m(0) = 0$  e  $\mu(1) = m(1) = +\infty$ , veremos agora uma lista contendo algumas dessas funções:

- 1)  $\mu(t) = m(t) = \frac{t}{1-t}$
- 2)  $\mu(t) = m(t) = -\ln(1-t)$
- 3)  $\mu(t) = m(t) = \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$
- 4)  $\mu(t) = m(t) = \exp\left(\frac{2t-1}{t(1-t)}\right)$
- 5)  $\mu(t) = m(t) = \exp\left(\frac{t}{1-t}\right) - 1$
- 6)  $\mu(t) = m(t) = \ln(1 - \ln(1-t))$
- 7)  $\mu(t) = m(t) = \exp\left(\frac{1}{1-t}\right) - e$
- 8)  $\mu(t) = m(t) = \frac{1}{\exp\left(\frac{1}{t}\right) - e}$
- 9)  $\mu(t) = m(t) = \frac{1}{\exp\left(\frac{1-t}{t}\right) - 1}$

#### 4 Relação de funções decrescentes com imagens ilimitadas à direita

Sejam  $v(t)$  e  $\ell(t)$  funções decrescentes, tais que  $v(0) = \ell(0) = +\infty$  e  $v(1) = \ell(1) = 0$ , veremos agora uma lista contendo algumas dessas funções:

- 1)  $v(t) = \ell(t) = \frac{1-t}{t}$
- 2)  $v(t) = \ell(t) = -\ln(t)$
- 3)  $v(t) = \ell(t) = \exp\left(\frac{1-2t}{t(1-t)}\right)$
- 4)  $v(t) = \ell(t) = \exp\left(\frac{1-t}{t}\right) - 1$
- 5)  $v(t) = \ell(t) = \ln(1 - \ln(t))$
- 6)  $v(t) = \ell(t) = \exp\left(\frac{1}{t}\right) - e$
- 7)  $v(t) = \ell(t) = \frac{1}{\exp\left(\frac{1}{1-t}\right) - e}$
- 8)  $v(t) = \ell(t) = \frac{1}{\exp\left(\frac{t}{1-t}\right) - 1}$

#### 5 Relação de funções crescentes com imagens ilimitadas à esquerda

Sejam  $\mu(t)$  e  $m(t)$  funções crescentes, tais que  $\mu(0) = m(0) = -\infty$  e  $\mu(1) = m(1) = 0$ , veremos agora uma lista contendo algumas dessas funções:

- 1)  $\mu(t) = m(t) = -\frac{1-t}{t}$
- 2)  $\mu(t) = m(t) = \ln(t)$
- 3)  $\mu(t) = m(t) = -\exp\left(\frac{1-2t}{t(1-t)}\right)$
- 4)  $\mu(t) = m(t) = -\exp\left(\frac{1-t}{t}\right) + 1$
- 5)  $\mu(t) = m(t) = -\ln(1 - \ln(t))$
- 6)  $\mu(t) = m(t) = -\exp\left(\frac{1}{t}\right) + e$
- 7)  $\mu(t) = m(t) = -\frac{1}{\exp\left(\frac{1}{1-t}\right) - e}$
- 8)  $\mu(t) = m(t) = -\frac{1}{\exp\left(\frac{t}{1-t}\right) - 1}$

#### 6 Relação de funções decrescentes com imagens ilimitadas à esquerda

Sejam  $v(t)$  e  $\ell(t)$  funções decrescentes, tais que  $v(0) = \ell(0) = 0$  e  $v(1) = \ell(1) = -\infty$ , veremos agora uma lista contendo algumas dessas funções:

- 1)  $v(t) = \ell(t) = -\frac{t}{1-t}$
- 2)  $v(t) = \ell(t) = \ln(1 - t)$
- 3)  $v(t) = \ell(t) = -\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$

- 4)  $\nu(t) = \ell(t) = -\exp\left(\frac{2t-1}{t(1-t)}\right)$
- 5)  $\nu(t) = \ell(t) = -\exp\left(\frac{t}{1-t}\right) + 1$
- 6)  $\nu(t) = \ell(t) = -\ln(1 - \ln(1 - t))$
- 7)  $\nu(t) = \ell(t) = -\exp\left(\frac{1}{1-t}\right) + e$
- 8)  $\nu(t) = \ell(t) = -\frac{1}{\exp\left(\frac{1}{t}\right) - e}$
- 9)  $\nu(t) = \ell(t) = -\frac{1}{\exp\left(\frac{1-t}{t}\right) - 1}$

### 7 Relação de funções crescentes com imagens ilimitadas

Sejam  $\mu(t)$  e  $m(t)$  funções crescentes, tais que  $\mu(0) = m(0) = -\infty$  e  $\mu(1) = m(1) = +\infty$ , veremos agora uma lista contendo algumas dessas funções:

- 1)  $\mu(t) = m(t) = \frac{2t-1}{t(1-t)}$
- 2)  $\mu(t) = m(t) = \ln(-\ln(1 - t))$
- 3)  $\mu(t) = m(t) = \ln\left(\frac{t}{1-t}\right)$

### 8 Relação de funções decrescentes com imagens ilimitadas

Sejam  $\nu(t)$  e  $\ell(t)$  funções decrescentes, tais que  $\nu(0) = \ell(0) = +\infty$  e  $\nu(1) = \ell(1) = -\infty$ , veremos agora uma lista contendo algumas dessas funções:

- 1)  $\nu(t) = \ell(t) = -\frac{2t-1}{t(1-t)}$
- 2)  $\nu(t) = \ell(t) = -\ln(-\ln(1 - t))$
- 3)  $\nu(t) = \ell(t) = -\ln\left(\frac{t}{1-t}\right)$

## Apêndice D: Compêndio de classes de distribuições

A seguir indicamos algumas listas especiais com alguns bilhões de classes de distribuições de probabilidades já prontas para cada *fda* a partir dos Corolários 3.1.5 a 3.1.7.

### Lista de classes de distribuições oriundas da 2S1C3.1.5 da Tabela 3.3.1:

1º caso: Pode-se obter, fazendo uso do **2S1C3.1.5** da Tabela 3.3.1 e considerando  $\mu_1(\cdot)(x)$  e  $\ell_1(\cdot)(x)$ , listada abaixo, uma *fda* com suporte  $S_F = ]0,1[$ , e escolhendo  $u_i$  da lista 1 e  $v_i$  da lista 2 do apêndice C.

$$1) \ell_1(\cdot)(x) = \gamma v_{k+1}(\cdot)(x) \text{ e } \mu_1(\cdot)(x) = (1 - \gamma)u_{k+1}(\cdot)(x) + \gamma, \text{ com } 0 \leq \gamma \leq 1.$$

2º caso: Pode-se obter, fazendo uso do **2S1C3.1.5** da Tabela 3.3.1 e considerando  $\mu_1(\cdot)(x)$  e  $\ell_1(\cdot)(x)$  listada abaixo, uma *fda* com suporte  $S_F = ]a, +\infty[$ , e escolhendo  $h_j$  da lista 4.1,  $z_j$  da lista 4.2,  $u_i$  da lista 1 e  $v_i$  da lista 2 do apêndice C:

$$2) \ell_1(\cdot)(x) = (\theta - a)v_{k+1}(\cdot)(x) + a \text{ e } \mu_1(\cdot)(x) = \theta + h_j(\cdot)(x), \text{ com } a \leq \theta.$$

$$3) \mu_1(\cdot)(x) = +\infty \text{ e } \ell_1(\cdot)(x) = a + z_j(\cdot)(x), \text{ com } a \in \mathbb{R}.$$

3º caso: Pode-se obter, fazendo uso do **2S1C3.1.5** da Tabela 3.3.1 e considerando  $\mu_1(\cdot)(x)$  e  $\ell_1(\cdot)(x)$  listada abaixo, uma *fda* com suporte  $S_F = ]-\infty, a[$ , e escolhendo  $h_j$  da lista 4.1,  $z_j$  da lista 4.2,  $u_i$  da lista 1 e  $v_i$  da lista 2 do apêndice C:

$$1) \mu_1(\cdot)(x) = (a - \theta)u_{k+1}(\cdot)(x) + \theta \text{ e } \ell_1(\cdot)(x) = \theta - h_j(\cdot)(x), \text{ com } \theta \leq a.$$

$$2) \mu_1(\cdot)(x) = a - z_j(\cdot)(x) \text{ e } \ell_1(\cdot)(x) = -\infty, \text{ com } a \in \mathbb{R}.$$

4º caso: Pode-se obter, fazendo uso do **2S1C3.1.5** da Tabela 3.3.1 e considerando  $\mu_1(\cdot)(x)$  e  $\ell_1(\cdot)(x)$  listada abaixo, uma *fda* com suporte  $S_F = ]-\infty, +\infty[$ , e escolhendo  $h_j$  da lista 4.1,  $z_j$  da lista 4.2,  $u_i$  da lista 1 e  $v_i$  da lista 2 do apêndice C:

$$1) \mu_1(\cdot)(x) = \frac{u_{k+1}(\cdot)(x) + u_{k+2}(\cdot)(x) - 1}{u_{k+3}(\cdot)(x) \cdot v_{k+1}(\cdot)(x)} \text{ e } \ell_1(\cdot)(x) = -\infty.$$

$$2) \mu_1(\cdot)(x) = +\infty \text{ e } \ell_1(\cdot)(x) = \frac{1 - u_{k+1}(\cdot)(x) - u_{k+2}(\cdot)(x)}{u_{k+3}(\cdot)(x) \cdot v_{k+1}(\cdot)(x)}.$$

$$3) \mu_1(\cdot)(x) = \ln\left(-\ln(v_{k+1}(\cdot)(x))\right) \text{ e } \ell_1(\cdot)(x) = -\infty.$$

$$4) \mu_1(\cdot)(x) = +\infty \text{ e } \ell_1(\cdot)(x) = -\ln\left(-\ln(v_{k+1}(\cdot)(x))\right).$$

$$5) \mu_1(\cdot)(x) = a + h_j(\cdot)(x) \text{ e } \ell_1(\cdot)(x) = a - h_i(\cdot)(x), \text{ com } a \in \mathbb{R}.$$

### Lista de classes de distribuições oriundas da 8S1C3.1.5 da Tabela 3.3.1:

1º caso: Pode-se obter, fazendo uso do **8S1C3.1.5** da Tabela 3.3.1 e considerando  $v_1(\cdot)(x)$  e  $m_1(\cdot)(x)$ , listada abaixo, uma *fda* com suporte  $S_F = ]0,1[$ , e escolhendo  $u_i$  da lista 1 e  $v_i$  da lista 2 do apêndice C.

$$1) m_1(\cdot)(x) = \gamma u_{k+1}(\cdot)(x) \text{ e } v_1(\cdot)(x) = (1 - \gamma)v_{k+1}(\cdot)(x) + \gamma, \text{ com } 0 \leq \gamma \leq 1.$$

2º caso: Pode-se obter, fazendo uso do **8S1C3.1.5** da Tabela 3.3.1 e considerando  $v_1(G_1, \dots, G_m)(x)$  e  $m_1(G_1, \dots, G_m)(x)$  listada abaixo, uma *fda* com suporte  $S_F = ]a, +\infty[$ , e escolhendo  $h_j$  da lista 4.1,  $z_j$  da lista 4.2,  $u_i$  da lista 1 e  $v_i$  da lista 2 do apêndice C:

$$1) v_1(\cdot)(x) = \theta + z_j(\cdot)(x) \text{ e } m_1(\cdot)(x) = (\theta - a)u_{k+1}(\cdot)(x) + a, \text{ com } a \leq \theta.$$

$$2) v_1(\cdot)(x) = +\infty \text{ e } m_1(\cdot)(x) = a + h_j(\cdot)(x), \text{ com } a \in \mathbb{R}.$$

3º caso: Pode-se obter, fazendo uso do **8S1C3.1.5** da Tabela 3.3.1 e considerando  $v_1(\cdot)(x)$  e  $m_1(\cdot)(x)$  listada abaixo, uma *fda* com suporte  $S_F = ]-\infty, a[$ , e escolhendo  $u_i$  da lista 1 e  $v_i$  da lista 2 do apêndice C:

$$1) v_1(\cdot)(x) = (a - \theta)v_{k+1}(\cdot)(x) + \theta \text{ e } m_1(\cdot)(x) = \theta - z_j(\cdot)(x), \text{ com } \theta \leq a.$$

$$2) v_1(\cdot)(x) = (a - \theta)v_{k+1}(\cdot)(x) + \theta \text{ e } m_1(\cdot)(x) = \theta + \ln(u_{k+1}(\cdot)(x)), \text{ com } \theta \leq a.$$



4º caso: Pode-se obter, fazendo uso do **8S1C3.1.5** da Tabela 3.3.1 e considerando  $v_1(\cdot)(x)$  e  $m_1(\cdot)(x)$  listada abaixo, uma *fda* com suporte  $S_F = ]-\infty, +\infty[$ , e escolhendo  $u_i$  da lista 1 e  $v_i$  da lista 2 do apêndice C:

$$1) v_1(\cdot)(x) = \frac{1-u_{k+1}(\cdot)(x)-u_{k+2}(\cdot)(x)}{u_{k+3}(\cdot)(x) \cdot v_{k+1}(\cdot)(x)} \text{ e } m_1(\cdot)(x) = -\infty.$$

$$2) v_1(\cdot)(x) = +\infty \text{ e } m_1(\cdot)(x) = \frac{u_{k+1}(\cdot)(x)+u_{k+2}(\cdot)(x)-1}{u_{k+3}(\cdot)(x) \cdot v_{k+1}(\cdot)(x)}.$$

$$3) v_1(\cdot)(x) = -\ln\left(-\ln(v_{k+1}(\cdot)(x))\right) \text{ e } m_1(\cdot)(x) = -\infty.$$

$$4) m_1(\cdot)(x) = \ln\left(-\ln(v_{k+1}(\cdot)(x))\right) \text{ e } v_1(\cdot)(x) = +\infty.$$

$$5) v_1(\cdot)(x) = a + z_j(\cdot)(x) \text{ e } m_1(\cdot)(x) = a - z_i(\cdot)(x), \text{ com } a \in \mathbb{R}.$$

#### Lista de classes de distribuições oriundas da **21S1C3.1.5** da Tabela 3.3.1:

1º caso: Pode-se obter, fazendo uso do **21S1C3.1.5** da Tabela 3.3.1 e considerando  $\mu_1(\cdot)(x)$ ,  $\ell_1(\cdot)(x)$ ,  $v_1(\cdot)(x)$  e  $m_1(\cdot)(x)$  listada abaixo, uma *fda* com suporte  $S_F = ]0,1[$ , e escolhendo  $u_i$  da lista 1 e  $v_i$  da lista 2 do apêndice C.

$$1) \ell_1(\cdot)(x) = 0, m_1(\cdot)(x) = 0, v_1(\cdot)(x) = \gamma v_{k+1}(\cdot)(x) \text{ e } \mu_1(\cdot)(x) = (1 - \gamma)u_{k+1}(\cdot)(x) + \gamma, \text{ com } 0 \leq \gamma \leq 1.$$

$$2) \ell_1(\cdot)(x) = \gamma v_{k+1}(\cdot)(x), m_1(\cdot)(x) = (1 - \gamma)u_{k+1}(\cdot)(x) + \gamma, v_1(\cdot)(x) = 1 \text{ e } \mu_1(\cdot)(x) = 1, \text{ com } 0 \leq \gamma \leq 1.$$

$$3) \ell_1(\cdot)(x) = \lambda v_{k+1}(\cdot)(x), m_1(\cdot)(x) = (\gamma - \lambda)u_{k+1}(\cdot)(x) + \lambda, v_1(\cdot)(x) = (\theta - \gamma)v_{k+2}(\cdot)(x) + \gamma \text{ e } \mu_1(\cdot)(x) = (1 - \theta)u_{k+2}(\cdot)(x) + \theta, \text{ com } 0 \leq \lambda \leq \gamma \leq \theta \leq 1.$$

2º caso: Pode-se obter, fazendo uso do **21S1C3.1.5** da Tabela 3.3.1 e considerando  $\mu_1(\cdot)(x)$ ,  $\ell_1(\cdot)(x)$ ,  $v_1(\cdot)(x)$  e  $m_1(\cdot)(x)$  listada abaixo, uma *fda* com suporte  $S_F = ]a, +\infty[$ , e escolhendo  $h_j$  da lista 4.1,  $z_j$  da lista 4.2,  $u_i$  da lista 1 e  $v_i$  da lista 2 do apêndice C:

- 1)  $\ell_1(\cdot)(x) = a$ ,  $m_1(\cdot)(x) = a$ ,  $v_1(\cdot)(x) = (\theta - a)v_{k+1}(\cdot)(x) + a$  e  $\mu_1(\cdot)(x) = \theta + h_j(\cdot)(x)$ , com  $a \leq \theta$ .
- 2)  $\ell_1(\cdot)(x) = (\theta - a)v_{k+1}(\cdot)(x) + a$ ,  $m_1(\cdot)(x) = \theta + h_j(\cdot)(x)$ ,  $v_1(\cdot)(x) = +\infty$  e  $\mu_1(\cdot)(x) = +\infty$ , com  $a \leq \theta$ .
- 3)  $\ell_1(\cdot)(x) = (b - a)v_{k+1}(\cdot)(x) + a$ ,  $m_1(\cdot)(x) = (c - b)u_{k+1}(\cdot)(x) + b$ ,  $v_1(\cdot)(x) = (\theta - c)v_{k+1}(\cdot)(x) + c$  e  $\mu_1(\cdot)(x) = \theta + h_j(\cdot)(x)$ , com  $a \leq b \leq c \leq \theta$ .

3º caso: Pode-se obter, fazendo uso do **21S1C3.1.5** da Tabela 3.3.1 e considerando  $\mu_1(\cdot)(x)$ ,  $\ell_1(\cdot)(x)$ ,  $v_1(\cdot)(x)$  e  $m_1(\cdot)(x)$  listada abaixo, uma *fda* com suporte  $S_F = ]-\infty, a[$ , e escolhendo  $u_i$  da lista 1 e  $v_i$  da lista 2 do apêndice C:

- 1)  $\ell_1(\cdot)(x) = \theta - h_j(\cdot)(x)$ ,  $m_1(\cdot)(x) = (a - \theta)u_{k+1}(\cdot)(x) + \theta$ ,  $v_1(\cdot)(x) = a$  e  $\mu_1(\cdot)(x) = a$ , com  $a \geq \theta$ .
- 2)  $\ell_1(\cdot)(x) = -\infty$ ,  $m_1(\cdot)(x) = -\infty$ ,  $v_1(\cdot)(x) = \theta - h_j(\cdot)(x)$  e  $\mu_1(\cdot)(x) = (a - \theta)u_{k+1}(\cdot)(x) + \theta$ , com  $a \geq \theta$ .
- 3)  $\ell_1(\cdot)(x) = \theta - h_j(\cdot)(x)$ ,  $m_1(\cdot)(x) = (c - \theta)u_{k+1}(\cdot)(x) + \theta$ ,  $v_1(\cdot)(x) = (b - c)v_{k+1}(\cdot)(x) + c$  e  $\mu_1(\cdot)(x) = (a - b)u_{k+1}(\cdot)(x) + b$ , com  $a \geq b \geq c \geq \theta$ .

4º caso: Pode-se obter, fazendo uso do **21S1C3.1.5** da Tabela 3.3.1 e considerando  $\mu_1(\cdot)(x)$ ,  $\ell_1(\cdot)(x)$ ,  $v_1(\cdot)(x)$  e  $m_1(\cdot)(x)$  listada abaixo, uma *fda* com suporte  $S_F = ]-\infty, +\infty[$ , e escolhendo  $u_i$  da lista 1 e  $v_i$  da lista 2 do apêndice C:

- 1)  $\ell_1(\cdot)(x) = c - h_j(\cdot)(x)$ ,  $m_1(\cdot)(x) = (b - c)u_{k+1}(\cdot)(x) + c$ ,  $v_1(\cdot)(x) = (a - b)v_{k+1}(\cdot)(x) + b$  e  $\mu_1(\cdot)(x) = a + h_j(\cdot)(x)$ , com  $a \geq b \geq c$ .
- 2)  $v_1(\cdot)(x) = +\infty$  e  $m_1(\cdot)(x) = \frac{u_{k+1}(\cdot)(x) + u_{k+2}(\cdot)(x) - 1}{u_{k+3}(\cdot)(x) \cdot v_{k+1}(\cdot)(x)}$ .
- 3)  $m_1(\cdot)(x) = -\infty$  e  $v_1(\cdot)(x) = \frac{1 - u_{k+1}(\cdot)(x) - u_{k+2}(\cdot)(x)}{u_{k+3}(\cdot)(x) \cdot v_{k+1}(\cdot)(x)}$ .
- 4)  $v_1(\cdot)(x) = -\ln(-\ln(v_{k+1}(\cdot)(x)))$  e  $m_1(\cdot)(x) = -\infty$ .
- 5)  $m_1(\cdot)(x) = \ln(-\ln(v_{k+1}(\cdot)(x)))$  e  $v_1(\cdot)(x) = +\infty$ .

- 6)  $v_1(.) (x) = a + z_j(.) (x)$  e  $m_1(.) (x) = a - z_i(.) (x)$ , com  $a \in \mathbb{R}$ .
- 7)  $\mu_1(.) (x) = +\infty$  e  $\ell_1(.) (x) = \frac{1 - u_{k+1} (.) (x) - u_{k+2} (.) (x)}{u_{k+3} (.) (x) \cdot v_{k+1} (.) (x)}$ .
- 8)  $\ell_1(.) (x) = -\infty$  e  $\mu_1(.) (x) = \frac{u_{k+1} (.) (x) + u_{k+2} (.) (x) - 1}{u_{k+3} (.) (x) \cdot v_{k+1} (.) (x)}$ .
- 9)  $\mu_1(.) (x) = \ln \left( -\ln(v_{k+1} (.) (x)) \right)$  e  $\ell_1(.) (x) = -\infty$ .
- 10)  $\ell_1(.) (x) = -\ln \left( -\ln(v_{k+1} (.) (x)) \right)$  e  $\mu_1(.) (x) = +\infty$ .
- 11)  $\mu_1(.) (x) = a + h_j(.) (x)$  e  $\ell_1(.) (x) = a - h_l(.) (x)$ , com  $a \in \mathbb{R}$ .

### Lista de classes de distribuições oriundas da 21S1C3.1.6 da Tabela 3.3.2:

1º caso: Pode-se obter, fazendo uso do **21S1C3.1.6** da Tabela 3.3.2 e considerando  $\mu_1(.) (x)$ ,  $\ell_1(.) (x)$ ,  $v_1(.) (x)$  e  $m_1(.) (x)$  listada abaixo, uma *fda* com suporte  $S_F = ]0,1[$ , e escolhendo  $u_i$  da lista 1 e  $v_i$  da lista 2 do apêndice C.

- 1)  $\ell_1(.) (x) = 0$ ,  $m_1(.) (x) = 0$ ,  $v_1(.) (x) = (1 - \gamma)v_{k+1} (.) (x) + \gamma$  e  $\mu_1(.) (x) = \gamma u_{k+1} (.) (x)$ , com  $0 \leq \gamma \leq 1$ .
- 2)  $\ell_1(.) (x) = (1 - \gamma)v_{k+1} (.) (x) + \gamma$ ,  $m_1(.) (x) = \gamma u_{k+1} (.) (x)$ ,  $v_1(.) (x) = 1$  e  $\mu_1(.) (x) = 1$ , com  $0 \leq \gamma \leq 1$ .
- 3)  $\ell_1(.) (x) = (\gamma - \lambda)v_{k+1} (.) (x) + \lambda$ ,  $m_1(.) (x) = \lambda u_{k+1} (.) (x)$ ,  $v_1(.) (x) = (1 - \theta)v_{k+2} (.) (x) + \theta$  e  $\mu_1(.) (x) = (\theta - \gamma)u_{k+2} (.) (x) + \gamma$ , com  $0 \leq \lambda \leq \gamma \leq \theta \leq 1$ .

2º caso: Pode-se obter, fazendo uso do **21S1C3.1.6** da Tabela 3.3.2 e considerando  $\mu_1(.) (x)$ ,  $\ell_1(.) (x)$ ,  $v_1(.) (x)$  e  $m_1(.) (x)$  listada abaixo, uma *fda* com suporte  $S_F = ]a, +\infty[$ , e escolhendo  $h_j$  da lista 4.1,  $z_j$  da lista 4.2,  $u_i$  da lista 1 e  $v_i$  da lista 2 do apêndice C:

- 1)  $\ell_1(.) (x) = a$ ,  $m_1(.) (x) = a$ ,  $v_1(.) (x) = \theta + z_j(.) (x)$  e  $\mu_1(.) (x) = (\theta - a)u_{k+1} (.) (x) + a$ , com  $a \leq \theta$ .
- 2)  $\ell_1(.) (x) = \theta + z_j(.) (x)$ ,  $m_1(.) (x) = (\theta - a)u_{k+1} (.) (x) + a$ ,  $v_1(.) (x) = +\infty$  e  $\mu_1(.) (x) = +\infty$ , com  $a \leq \theta$ .

$$3) \ell_1(\cdot)(x) = (c - b)v_{k+1}(\cdot)(x) + b, m_1(\cdot)(x) = (b - a)u_{k+1}(\cdot)(x) + a, \\ v_1(\cdot)(x) = \theta + z_j(\cdot)(x) \text{ e } \mu_1(\cdot)(x) = (\theta - c)u_{k+1}(\cdot)(x) + c, \text{ com } a \leq b \leq \\ c \leq \theta.$$

3º caso: Pode-se obter, fazendo uso do **21S1C3.1.6** da Tabela 3.3.2 e considerando  $\mu_1(\cdot)(x)$ ,  $\ell_1(\cdot)(x)$ ,  $v_1(\cdot)(x)$  e  $m_1(\cdot)(x)$  listada abaixo, uma *fda* com suporte  $S_F = ]-\infty, a[$ , e escolhendo  $u_i$  da lista 1 e  $v_i$  da lista 2 do apêndice C:

$$1) \ell_1(\cdot)(x) = (a - \theta)v_{k+1}(\cdot)(x) + \theta, m_1(\cdot)(x) = \theta - z_j(\cdot)(x), v_1(\cdot)(x) = a \text{ e} \\ \mu_1(\cdot)(x) = a, \text{ com } a \geq \theta. \\ 2) \ell_1(\cdot)(x) = -\infty, m_1(\cdot)(x) = -\infty, v_1(\cdot)(x) = (a - \theta)v_{k+1}(\cdot)(x) + \theta \text{ e} \\ \mu_1(\cdot)(x) = \theta - h_j(\cdot)(x), \text{ com } a \geq \theta. \\ 3) \ell_1(\cdot)(x) = (c - \theta)v_{k+1}(\cdot)(x) + \theta, m_1(\cdot)(x) = \theta - z_j(\cdot)(x), v_1(\cdot)(x) = \\ (a - b)v_{k+1}(\cdot)(x) + b \text{ e } \mu_1(\cdot)(x) = (b - c)u_{k+1}(\cdot)(x) + c, \text{ com } a \geq b \geq c \geq \\ \theta.$$

4º caso: Pode-se obter, fazendo uso do **21S1C3.1.6** da Tabela 3.3.2 e considerando  $\mu_1(\cdot)(x)$ ,  $\ell_1(\cdot)(x)$ ,  $v_1(\cdot)(x)$  e  $m_1(\cdot)(x)$  listada abaixo, uma *fda* com suporte  $S_F = ]-\infty, +\infty[$ , e escolhendo  $u_i$  da lista 1 e  $v_i$  da lista 2 do apêndice C:

$$1) \ell_1(\cdot)(x) = (b - c)v_{k+1}(\cdot)(x) + c, m_1(\cdot)(x) = c - z_j(\cdot)(x), v_1(\cdot)(x) = a + \\ z_l(\cdot)(x) \text{ e } \mu_1(\cdot)(x) = (a - b)u_{k+1}(\cdot)(x) + b, \text{ com } a \geq b \geq c. \\ 2) v_1(\cdot)(x) = +\infty \text{ e } m_1(\cdot)(x) = \frac{u_{k+1}(\cdot)(x) + u_{k+2}(\cdot)(x) - 1}{u_{k+3}(\cdot)(x) \cdot v_{k+1}(\cdot)(x)}. \\ 3) m_1(\cdot)(x) = -\infty \text{ e } v_1(\cdot)(x) = \frac{1 - u_{k+1}(\cdot)(x) - u_{k+2}(\cdot)(x)}{u_{k+3}(\cdot)(x) \cdot v_{k+1}(\cdot)(x)}. \\ 4) v_1(\cdot)(x) = -\ln\left(-\ln(v_{k+1}(\cdot)(x))\right) \text{ e } m_1(\cdot)(x) = -\infty. \\ 5) m_1(\cdot)(x) = \ln\left(-\ln(v_{k+1}(\cdot)(x))\right) \text{ e } v_1(\cdot)(x) = +\infty. \\ 6) v_1(\cdot)(x) = a + z_j(\cdot)(x) \text{ e } m_1(\cdot)(x) = a - z_l(\cdot)(x), \text{ com } a \in \mathbb{R}. \\ 7) \mu_1(\cdot)(x) = +\infty \text{ e } \ell_1(\cdot)(x) = \frac{1 - u_{k+1}(\cdot)(x) - u_{k+2}(\cdot)(x)}{u_{k+3}(\cdot)(x) \cdot v_{k+1}(\cdot)(x)}. \\ 8) \ell_1(\cdot)(x) = -\infty \text{ e } \mu_1(\cdot)(x) = \frac{u_{k+1}(\cdot)(x) + u_{k+2}(\cdot)(x) - 1}{u_{k+3}(\cdot)(x) \cdot v_{k+1}(\cdot)(x)}. \\ 9) \mu_1(\cdot)(x) = \ln\left(-\ln(v_{k+1}(\cdot)(x))\right) \text{ e } \ell_1(\cdot)(x) = -\infty.$$

10)  $\ell_1(\cdot)(x) = -\ln\left(-\ln(v_{k+1}(\cdot)(x))\right)$  e  $\mu_1(\cdot)(x) = +\infty$ .

11)  $\mu_1(\cdot)(x) = a + h_j(\cdot)(x)$  e  $\ell_1(\cdot)(x) = a - h_l(\cdot)(x)$ , com  $a \in \mathbb{R}$ .

## Apêndice E: Algoritmos para o caso univariado

### 1. Algoritmo do esboço do gráfico da função densidade da distribuição gama (1-Exp)/Exp (M3.2)

```

setwd('C:\\Users\\ Cícero Carlos \\Dropbox\\Cícero\\Densidades Gama')

x=seq(0, 10, l=1000)

f2=function(a,b, lamb){

lamb*b^a/gamma (a)*exp (-lamb*a* x)/(1 - exp (-lamb*x))^(a + 1)*exp (-b*(exp (-lamb*x)/(1 - exp (-
lamb*x))))

}

##### Variando alpha #####

png('f2a.png')

plot(x,f2(.5,1,.5),type='l',lwd=2,col=1,lty=1,ylim=c(0,1),
ylab=expression(f[ge2](x)))

mtext(expression(paste(beta==1, ' ', ' ', lambda==0.5)))

lines(x,f2(.8,1,.5),lwd=2,col=2,lty=1)

lines(x,f2(1,1,.5),lwd=2,col=3,lty=1)

lines(x,f2(2,1,.5),lwd=2,col=4,lty=1)

lines(x,f2(3,1,.5),lwd=2,col=5,lty=1)

legend('topright', c(expression(
alpha==0.5,
alpha==0.8,
alpha==1,
alpha==2,
alpha==3
)),col=1:5,lwd=2)

dev.off()

```

```
##### Variando beta #####
```

```
png('f2b.png')
plot(x,f2(1,.5,.5),type='l',lwd=2,col=1,lty=1,ylim=c(0,1),
ylab=expression(f[ge2](x)))
mtext(expression(paste(alpha==1, ' ', lambda==0.5)))
lines(x,f2(1,.8,.5),lwd=2,col=2,lty=1)
lines(x,f2(1,1,.5),lwd=2,col=3,lty=1)
lines(x,f2(1,2,.5),lwd=2,col=4,lty=1)
lines(x,f2(1,3,.5),lwd=2,col=5,lty=1)

legend('topright', c(expression(
beta==0.5,
beta==0.8,
beta==1,
beta==2,
beta==3
)),col=1:5,lwd=2)
dev.off()
```

```
##### Variando lambda #####
```

```
png('f2lamb.png')
plot(x,f2(2,2,.2),type='l',lwd=2,col=1,lty=1,ylim=c(0,1),
ylab=expression(f[ge2](x)))
mtext(expression(paste(alpha==2, ' ', beta==2)))
lines(x,f2(2,2,.5),lwd=2,col=2,lty=1)
lines(x,f2(2,2,.8),lwd=2,col=3,lty=1)
lines(x,f2(2,2,1),lwd=2,col=4,lty=1)
lines(x,f2(2,2,1.5),lwd=2,col=5,lty=1)
```

```
legend('topright', c(expression(  
lambda==0.2,  
lambda==0.5,  
lambda==0.8,  
lambda==1,  
lambda==2  
)),col=1:5,lwd=2)  
dev.off()
```



## 2. Algoritmo do esboço do gráfico da função de distribuição acumulada da gama (1-Exp)/Exp (M3.2)

```

par(mfrow=c(1,3))
x=seq(0.001, 10, l=100)
aux=0
F2=function(a,b,lamb){
for(i in 1:length(x)){
integrand <- function(x) {lamb*b^a/gamma (a)*exp (-lamb*a* x)/(1 - exp (-lamb*x))^(a + 1)*exp (-b*(exp
(-lamb*x)/(1 - exp (-lamb*x))))}
aux[i]=integrate(integrand, lower = 0, upper = x[i])$value
}
return(aux)}

##### Variando alpha #####

png('Fd2a.png')
plot(x,F2(.5,1,.5),type='l',lwd=2,col=1,lty=1,ylim=c(0,1),
ylab=expression(F[ge2](x)))
mtext(expression(paste(beta==1, ' ', lambda==0.5)))
lines(x,F2(.8,1,.5),lwd=2,col=2,lty=1)
lines(x,F2(1,1,.5),lwd=2,col=3,lty=1)
lines(x,F2(2,1,.5),lwd=2,col=4,lty=1)
lines(x,F2(3,1,.5),lwd=2,col=5,lty=1)

legend('bottomright', c(expression(
alpha==0.5,
alpha==0.8,
alpha==1,
alpha==2,
alpha==3

```

```
)),col=1:5,lwd=2)
```

```
dev.off()
```

```
##### Variando beta #####
```

```
png('Fd2b.png')
```

```
plot(x,F2(1,.5,.5),type='l',lwd=2,col=1,lty=1,ylim=c(0,1),
```

```
ylab=expression(F[ge2](x)))
```

```
mtext(expression(paste(alpha==1, ', ', lambda==0.5)))
```

```
lines(x,F2(1,.8,.5),lwd=2,col=2,lty=1)
```

```
lines(x,F2(1,1,.5),lwd=2,col=3,lty=1)
```

```
lines(x,F2(1,2,.5),lwd=2,col=4,lty=1)
```

```
lines(x,F2(1,3,.5),lwd=2,col=5,lty=1)
```

```
legend('bottomright', c(expression(
```

```
beta==0.5,
```

```
beta==0.8,
```

```
beta==1,
```

```
beta==2,
```

```
beta==3
```

```
)),col=1:5,lwd=2)
```

```
dev.off()
```

```
##### Variando lambda #####
```

```
png('Fd2lambda.png')
```

```
plot(x,F2(2,2,.2),type='l',lwd=2,col=1,lty=1,ylim=c(0,1),
```

```
ylab=expression(F[ge2](x)))
```

```
mtext(expression(paste(alpha==2, ', ', beta==2)))
```

```
lines(x,F2(2,2,.5),lwd=2,col=2,lty=1)
```

```
lines(x,F2(2,2,.8),lwd=2,col=3,lty=1)
```

```
lines(x,F2(2,2,1),lwd=2,col=4,lty=1)
```

```
lines(x,F2(2,2,1.5),lwd=2,col=5,lty=1)
```

```
legend('bottomright', c(expression(  
lambda==0.2,  
lambda==0.5,  
lambda==0.8,  
lambda==1,  
lambda==2  
)),col=1:5,lwd=2)  
dev.off()
```

### 3. Algoritmo de estimação no sas da distribuição gama (1-Exp)/Exp

```

data artigo;
  input x @@;
datalines;
1.7 2.2 14.4 1.1 0.4 20.6 5.3 0.7 1.9 13.0 12.0 9.3
1.4 18.7 8.5 25.5 11.6 14.1 22.1 1.1 2.5 14.4 1.7 37.6
0.6 2.2 39.0 0.3 15.0 11.0 7.3 22.9 1.7 0.1 1.1 0.6
9.0 1.7 7.0 20.1 0.4 2.8 14.1 9.9 10.4 10.7 30.0 3.6
5.6 30.8 13.3 4.2 25.5 3.4 11.9 21.5 27.6 36.4 2.7 64.0
1.5 2.5 27.4 1.0 27.1 20.2 16.8 5.3 9.7 27.5 2.5 27.0
;
run;

*/PROC NLP Gama-exp1;
proc nlp data=artigo cov=2 pcov vardef=n covariance=h maxiter=10000;
  max loglik;
  parms a= 1, b= .5, lamb=2;
  bounds 0 < a , 0 < b , 0 < lamb;
  loglik = log((lamb*b)**a/gamma(a)) + (a-1)*log(x) - lamb*b*x;
  run;

*/PROC NLP Gama-exp2;
proc nlp data=artigo cov=2 pcov vardef=n covariance=h maxiter=10000;
  max loglik;
  parms a= 1, b= 1, lamb=1;
  bounds 0 < a , 0 < b , 0 < lamb;
  nuc = 1 - exp(-lamb*x);
  loglik = log(lamb*b**a/gamma(a)) - lamb*a*x -(a+1)*log(nuc) - b*(1-nuc)/nuc;
  run;

```

```

*/PROC NLP Kum-Exp;

*/ proc nlp data=artigo cov=2 pcov vardef=n covariance=h maxiter=10000;

*/  max loglik;

*/  parms a= 1.54, b= .13, lamb = 4;

*/      bounds 0 < a , 0 < b, 0 < lamb ;

*/      G = 1 - exp(-lamb*x);

*/      loglik = log(lamb*a*b) - lamb*x + (a-1)*log(G) + (b-1)*log(1-G**a);

*/      run;

*/PROC NLP Exp-Weib;

proc nlp data=artigo cov=2 pcov vardef=n covariance=h maxiter=10000;

  max loglik;

  parms a= 1, b= 1, lamb = 1;

      bounds 0 < a , 0 < b, 0 < lamb ;

      nuc = 1 - exp(-(lamb*x)**a);

      loglik = log(a*b*lamb) + (a-1)*log(lamb*x) - (lamb*x)**a + (b-1)*log(nuc);

      run;

*/PROC NLP Weibull Modificada;

proc nlp data=artigo cov=2 pcov vardef=n covariance=h maxiter=10000;

  max loglik;

  parms a= 1, b =1, lamb= 1;

      bounds 0 < a , 0 < b, 0.01 < lamb ;

      loglik = log(b) +(a-1)*log(x) +log(a+lamb*x) + lamb*x - b*x**a*exp(lamb*x);

      run;

*/PROC NLP Beta-Pareto;

proc nlp data=artigo cov=2 pcov vardef=n covariance=h maxiter=10000;

  max loglik;

  parms a= 1, b= 1, k=1, th= 0.05;

      bounds 0 < a , 0 < b , 0 < k, 0 < th <= .1 ;

```

```
beta = gamma(a)*gamma(b)/gamma(a+b);  
loglik = log(k/(th*beta)) + (a-1)*log(1-(th/x)**k) + (k*b+1)*log(th/x);  
run;  
*/PROC NLP Weibull;  
proc nlp data=artigo cov=2 pcov vardef=n covariance=h maxiter=10000;  
max loglik;  
parms a= 1, lamb= 1;  
bounds 0 < a , 0 < lamb;  
loglik = log(a*lamb) + (a-1)*log(lamb*x) - (lamb*x)**a;  
run;
```

#### 4. Algoritmo de ajuste das distribuições univariadas gama $\ln(1-\text{Exp})$ , gama $(1-\text{Exp})/\text{Exp}$ , weibull exponenciada, weibull modificada, beta pareto e weibull

```

x=c(1.7, 2.2, 14.4, 1.1, 0.4, 20.6, 5.3, 0.7, 1.9, 13.0, 12.0, 9.3,
1.4, 18.7, 8.5, 25.5, 11.6, 14.1, 22.1, 1.1, 2.5, 14.4, 1.7, 37.6,
0.6, 2.2, 39.0, 0.3, 15.0, 11.0, 7.3, 22.9, 1.7, 0.1, 1.1, 0.6,
9.0, 1.7, 7.0, 20.1, 0.4, 2.8, 14.1, 9.9, 10.4, 10.7, 30.0, 3.6,
5.6, 30.8, 13.3, 4.2, 25.5, 3.4, 11.9, 21.5, 27.6, 36.4, 2.7, 64.0,
1.5, 2.5, 27.4, 1.0, 27.1, 20.2, 16.8, 5.3, 9.7, 27.5, 2.5, 27.0)

setwd('C:\\Users\\ Cícero Carlos \\Dropbox\\Cícero\\Densidades Gama\\Ajuste')

png('hist_aj.png')

hist(x,breaks=12,freq=FALSE,
      ylab='Densidade',xlab=expression(paste('Picos (', m^3/s,') de enchentes no rio Wheaton - Canadá
(1958 - 1984)'),main="",ylim=c(0,0.08),col=rgb(.95, .95, .95))

n=length(x)

#----- GamaExp1 -----#

a<-      0.838269
b<-      0.035048
lamb<-   1.959796

estim1 = c(a,b,lamb)
erro1=c( 0.121066, 0.006778, 0.000121)

lik1 =   -251.3443595

density<-function(x){
(lamb*b)**a/gamma(a)*x^(a-1)*exp( - lamb*b*x)}
curve(density(x),add=TRUE,col=1,lwd=2,lty=1)

```

```

#----- GamaExp2 -----#
a=      0.131311
b=      0.179101
lamb=   0.538921

estim2 = c(a,b,lamb)
erro2=c( 0.053241, 0.069721, 0.250776)

lik2 = -249.5149722

density<-function(x){
nuc = 1 - exp(-lamb*x)
lamb*b^a/gamma(a)*exp(-a*lamb*x)/nuc^(a+1)*exp(-b*(1-nuc)/nuc)
}
curve(density(x),add=TRUE,col=1,lwd=2,lty=2)

#----- Weib Exponenciada -----#
a  =      1.386721
b  =      0.518546
lamb=     0.050204

estim3 = c(a,b,lamb)
erro3=c(0.589702, 0.311692, 0.020907)

lik3 = -251.0251108

density<-function(x){
nuc=exp(-(lamb*x)^a)

```



```

a*b*lamb*(lamb*x)^(a-1)*nuc*(1-nuc)^(b-1)
}
curve(density(x),add=TRUE,col=2,lwd=2,lty=1)

#----- Weib Modificada -----#
a =      0.775774
b =      0.124177
lamb=    0.010074

estim4 = c(a,b,lamb)
erro4=c(0.124171, 0.034872, 0.007901)

lik4 = -250.6715591

density<-function(x){
b*x^(a-1)*(a+lamb*x)*exp(lamb*x - b*x^a*exp(lamb*x))
}
curve(density(x),add=TRUE,col=2,lwd=2,lty=2)

#----- Beta Pareto -----#
a=      84.681920
b =     65.573790
k =     0.063190
th =    0.000011295

estim5 = c(a,b,k,lamb)
erro5=c(0.000000923, 0.000003560, 0.005157, 0.000011982)

lik5 = -258.1987546

```

```

density<-function(x){
k/(th*beta(a,b))*(1-(th/x)^k)^(a-1)*(th/x)^(k*b+1)
}
curve(density(x),add=TRUE,col=3,lwd=2,lty=1)

#----- Weibull -----#
a =      0.901166
lamb=    0.085968

estim6 = c(a, lamb)
erro6=c(0.085557, 0.011837)

lik6 = -251.4986404

density<-function(x){
lamb*a*(lamb*x)^(a-1)*exp(-(lamb*x)^a)
}
curve(density(x),add=TRUE,col=3,lwd=2,lty=2)

legend('topright',c('Gama Exponencial 1','Gama Exponencial 2','Weibull Exponenciada','Weibull
Modificada','Beta Pareto', 'Weibull'),
col=c(1,1,2,2,3,3), lty=c(1,2,1,2,1,2),lwd=2)

#----- Analises -----#

p=3
aic1=2*p-2*lik1
aicc1=-2*lik1 + 2*n*p/(n - p - 1)
bic1=-2*lik1+p*log(n)
hqic1 =2*p*log(log(n)) -2*lik1

```

$$p=3$$

$$\text{aic2}=2*p-2*\text{lik2}$$

$$\text{aicc2}=-2*\text{lik2} + 2*n*p/(n - p - 1)$$

$$\text{bic2}=-2*\text{lik2}+p*\log(n)$$

$$\text{hqic2} =2*p*\log(\log(n)) -2*\text{lik2}$$

$$p=3$$

$$\text{aic3}=2*p-2*\text{lik3}$$

$$\text{aicc3}=-2*\text{lik3} + 2*n*p/(n - p - 1)$$

$$\text{bic3}=-2*\text{lik3}+p*\log(n)$$

$$\text{hqic3} =2*p*\log(\log(n)) -2*\text{lik3}$$

$$p=3$$

$$\text{aic4}=2*p-2*\text{lik4}$$

$$\text{aicc4}=-2*\text{lik4} + 2*n*p/(n - p - 1)$$

$$\text{bic4}=-2*\text{lik4}+p*\log(n)$$

$$\text{hqic4} =2*p*\log(\log(n)) -2*\text{lik4}$$

$$p=4$$

$$\text{aic5}=2*p-2*\text{lik5}$$

$$\text{aicc5}=-2*\text{lik5} + 2*n*p/(n - p - 1)$$

$$\text{bic5}=-2*\text{lik5}+p*\log(n)$$

$$\text{hqic5} =2*p*\log(\log(n)) -2*\text{lik5}$$

$$p=2$$

$$\text{aic6}=2*p-2*\text{lik6}$$

$$\text{aicc6}=-2*\text{lik6} + 2*n*p/(n - p - 1)$$

$$\text{bic6}=-2*\text{lik6}+p*\log(n)$$

$$\text{hqic6} =2*p*\log(\log(n)) -2*\text{lik6}$$

```
#Tabelas
```

```
#Estimativas
```

```
estimativas=matrix(c(
round(estim1,3),NA,
round(estim2,3),NA,
round(estim3,3),NA,
round(estim4,3),NA,
round(estim5,3),
round(estim6,3),NA,NA),
6,4,byrow=T)
```

```
#Erros Padrão
```

```
erros=matrix(c(
round(erro1,3),NA,
round(erro2,3),NA,
round(erro3,3),NA,
round(erro4,3),NA,
round(erro5,3),
round(erro6,3),NA,NA),
6,4,byrow=T)
```

```
#AIC (Critério de Informação de Akaike)
```

```
aic=matrix(c(
round(aic1,3),
round(aic2,3),
round(aic3,3),
round(aic4,3),
```

```
round(aic5,3),  
round(aic6,3)))
```

```
#AIC (Critério de Informação de Akaike Corrigido)
```

```
aicc=matrix(c(  
round(aicc1,3),  
round(aicc2,3),  
round(aicc3,3),  
round(aicc4,3),  
round(aicc5,3),  
round(aicc6,3)))
```

```
#BIC
```

```
bic=matrix(c(  
round(bic1,3),  
round(bic2,3),  
round(bic3,3),  
round(bic4,3),  
round(bic5,3),  
round(bic6,3)))
```

```
#HQCI
```

```
hqic=matrix(c(  
round(hqic1,3),  
round(hqic2,3),  
round(hqic3,3),  
round(hqic4,3),  
round(hqic5,3),  
round(hqic6,3)))
```

```
adequa=cbind(aic,aicc,bic,hqic)
write.table(estimativas, "tabelas/estimativas.txt", sep = "\t", quote = F,
row.names = F,dec=',')
write.table(erros, "tabelas/erros.txt", sep = "\t", quote = F,
row.names = F,dec=',')
write.table(adequa, "tabelas/adequação.txt", sep = "\t", quote = F,
row.names = F,dec=',')

dev.off()
```

## 5. Algoritmo para o cálculo das estatísticas de Cramér von Mises e Anderson-Darling

```

setwd('~/.Dropbox/Cicero/Cramer-Von Mises')
data=source('dados')$value
source('cdf')
cdf= function(par,x) cdf_m3.6(par,x)
mle = c(0.838, 0.035, 1.96) # m3.1
mle = c(0.131, 0.179, 0.539) # m3.2
mle = c(1.387, 0.519, 0.05) # m3.3
mle = c(0.776, 0.124, 0.01) # m3.4
mle = c(84.682, 65.574, 0.063, 0.01) # m3.5
mle = c(0.901, 0.086) # m3.6

parameters = mle
data_orderdenados = sort(data)
v = cdf(as.vector(parameters), data_orderdenados)
n = length(data)
y = qnorm(v)
u = pnorm((y - mean(y))/sqrt(var(y)))
W_temp <- vector()
A_temp <- vector()
for (i in 1:n) {
  W_temp[i] = (u[i] - (2 * i - 1)/(2 * n))^2
  A_temp[i] = (2 * i - 1) * log(u[i]) + (2 * n + 1 - 2 * i) * log(1 - u[i])
}
A_2 = -n - mean(A_temp)
W_2 = sum(W_temp) + 1/(12 * n)
W_star = W_2 * (1 + 0.5/n)
A_star = A_2 * (1 + 0.75/n + 2.25/n^2)

p = length(parameters)
ks.testg = function(...) tryCatch(ks.test(...), warning = function(war) NA)
KS = ks.testg(x = jitter(data,.1), y = "cdf", par = as.vector(parameters))
W_star
A_star
KS
##### Gama -ln(1-exp) (M3.1) #####
cdf_m3.1 <- function(par,x){
  a = par[1]

```

```

b = par[2]
lamb = par[3]
integrand <- function(t) { b^a/gamma(a) * t^(a-1) * exp(-b*t) }
for (i in 1:length(x)) integral[i] = integrate(integrand, lower = 0, upper = lamb*x[i])$value
integral
}

##### Gama (1-exp)/exp (M3.2) #####
cdf_m3.2 <- function(par,x){
  a = par[1]
  b = par[2]
  lamb = par[3]
  integrand <- function(t) { b^a/gamma(a) * t^(a-1) * exp(-b*t) }
  for (i in 1:length(x)) integral[i] = 1 - integrate(integrand, lower = 0, upper = exp(-lamb*x[i])/(1-exp(-
lamb*x[i]))) $value
  integral
}

##### Weib-Exp (M3.3) #####
cdf_m3.3 <- function(par,x){
  a = par[1]
  b = par[2]
  lamb = par[3]
  (1 - exp(- (b*x) ^a))^lamb
}

##### Weib Modif (M3.4) #####
cdf_m3.4 <- function(par,x){
  a = par[1]
  b = par[2]
  lamb = par[3]
  integrand <- function(t) { b*t^(a-1)*(a+lamb*t)*exp(lamb*t - b*t^a*exp(lamb*t)) }
  for (i in 1:length(x)) integral[i] = integrate(integrand, lower = 0, upper = x[i] )$value
  integral
}

##### Beta Pareto (M3.5) #####
cdf_m3.5 <- function(par,x){
  a = par[1]
  b = par[2]
  lamb = par[3]
  th = par[4]
  integrand <- function(t) { lamb/(th*beta(a,b))*(1-(th/t)^lamb)^(a-1)*(th/t)^(lamb*b+1) }
  for (i in 1:length(x)) integral[i] = integrate(integrand, lower = 0.01, upper = x[i] )$value
  integral
}

##### Weib (M3.6) #####
cdf_m3.6 <- function(par,x){
  a = par[1]
  b = par[2]
  1 - exp(-(b*x)^a)
}

```



## Apêndice F: Algoritmos para o caso multivariado

### 1. Algoritmo implementado no software SAS 9.1 para estimação dos parâmetros dos modelos multivariados para o conjunto de dados íris.

```

data artigo;
input slen swid plen pwid;
cards;
5.1 3.5 1.4 0.2
4.9 3.0 1.4 0.2
4.7 3.2 1.3 0.2
4.6 3.1 1.5 0.2
.
.
.
6.2 3.4 5.4 2.3
5.9 3.0 5.1 1.8
;

*/PROC NLP Weib-exp;
proc nlp data=artigo cov=2 pcov vardef=n covariance=h maxiter=10000;
max loglik;
parms a1= 1, b1= 1, lamb1=1, a2= 1, b2= 1, lamb2=1;
bounds 0 < a1 , 0 < b1 , 0 < lamb1, 0 < a2 , 0 < b2 , 0 < lamb2;
x1= plen;
x2= pwid;
nuc1 = exp(lamb1*x1)-1;
nuc2 = exp(lamb2*x2)-1;
f1 = log(a1*b1*lamb1) - b1*nuc1**a1 + lamb1*x1 + (a1-1)*log(nuc1);
f2 = log(a2*b2*lamb2) - b2*nuc2**a2 + lamb2*x2 + (a2-1)*log(nuc2);
loglik = f1 + f2;
run;

*/PROC NLP Gama-exp1;
proc nlp data=artigo cov=2 pcov vardef=n covariance=h maxiter=10000;
max loglik;
parms a1= 1, a2=1, b1= .5, b2= .5, lamb1=2, lamb2=2;
bounds 0 < a1 , 0 < b1 , 0 < lamb1, 0 < a2 , 0 < b2 , 0 < lamb2;
x1= plen;
x2= pwid;
f1 = log((lamb1*b1)**a1/gamma(a1)) + (a1-1)*log(x1) - lamb1*b1*x1;
f2 = log((lamb2*b2)**a2/gamma(a2)) + (a2-1)*log(x2) - lamb2*b2*x2;
loglik = f1 + f2;
run;

*/PROC NLP Gama-exp3;
proc nlp data=artigo cov=2 pcov vardef=n covariance=h maxiter=10000;
max loglik;
parms a1= 1, b1= 1, lamb1=1, a2= 1, b2= 1, lamb2=1;
bounds 0 < a1 , 0 < b1 , 0 < lamb1, 0 < a2 , 0 < b2 , 0 < lamb2;
x1= plen;
x2= pwid;
nuc1 = 1 - exp(-lamb1*x1);
nuc2 = 1 - exp(-lamb2*x2);
f1 = log(lamb1*b1**a1/gamma(a1)) - lamb1*a1*x1 -(a1+1)*log(nuc1) - b1*(1-nuc1)/nuc1;
f2 = log(lamb2*b2**a2/gamma(a2)) - lamb2*a2*x2 -(a2+1)*log(nuc2) - b2*(1-nuc2)/nuc2;

```

```

loglik = f1 + f2;
run;

*/PROC NLP Kum-Exp;
proc nlp data=artigo cov=2 pcov vardef=n covariance=h maxiter=10000;
max loglik;
parms a1= 1, b1= 1, lamb1=1, a2= 1, b2= 1, lamb2=1;
bounds 0 < a1 , 0 < b1 , 0 < lamb1, 0 < a2 , 0 < b2 , 0 < lamb2;
x1= plen;
x2= pwid;
G1 = 1 - exp(-lamb1*x1);
G2 = 1 - exp(-lamb2*x2);
f1 = log(lamb1*a1*b1) - lamb1*x1 + (a1-1)*log(G1) + (b1-1)*log(1-G1**a1);
f2 = log(lamb2*a2*b2) - lamb2*x2 + (a2-1)*log(G2) + (b2-1)*log(1-G2**a2);
loglik = f1 + f2;
run;

*/PROC NLP Weibull Modificada;
proc nlp data=artigo cov=2 pcov vardef=n covariance=h maxiter=10000;
max loglik;
parms a1= 1, b1= 1, lamb1=1, a2= 1, b2= 1, lamb2=1;
bounds 0 < a1 , 0 < b1 , 0 < lamb1, 0 < a2 , 0 < b2 , 0 < lamb2;
x1= plen;
x2= pwid;
f1 = log(b1) +(a1-1)*log(x1) +log(a1+lamb1*x1) + lamb1*x1 - b1*x1**a1*exp(lamb1*x1);
f2 = log(b2) +(a2-1)*log(x2) +log(a2+lamb2*x2) + lamb2*x2 - b2*x2**a2*exp(lamb2*x2);
loglik = f1 + f2;
run;

*/PROC NLP Beta-Pareto;
proc nlp data=artigo cov=2 pcov vardef=n covariance=h maxiter=10000;
max loglik;
parms a1= 1, b1= 1, k1=1, th1= 0.05, a2= 1, b2= 1, k2=1, th2= 0.05;
bounds 0 < a1 , 0 < b1 , 0 < k1, 0 < th1 <= .1, 0 < a2 , 0 < b2 , 0 < k2, 0 < th2 <= .1 ;
x1= plen;
x2= pwid;
beta1 = gamma(a1)*gamma(b1)/gamma(a1+b1);
beta2 = gamma(a2)*gamma(b2)/gamma(a2+b2);
f1 = log(k1/(th1*beta1)) + (a1-1)*log(1-(th1/x1)**k1) + (k1*b1+1)*log(th1/x1);
f2 = log(k2/(th2*beta2)) + (a2-1)*log(1-(th2/x2)**k2) + (k2*b2+1)*log(th2/x2);
loglik = f1 + f2;
run;

*/PROC NLP Weibull;
proc nlp data=artigo cov=2 pcov vardef=n covariance=h maxiter=10000;
max loglik;
parms a1= 1, lamb1= 1, a2= 1, lamb2= 1;
bounds 0 < a1 , 0 < lamb1, 0 < a2 , 0 < lamb2;
x1= plen;
x2= pwid;
f1 = log(a1*lamb1) + (a1-1)*log(lamb1*x1) - (lamb1*x1)**a1;
f2 = log(a2*lamb2) + (a2-1)*log(lamb2*x2) - (lamb2*x2)**a2;
loglik = f1 + f2;
run;

```

## 2. Comandos implementados no software R 3.0.2 para construção da tabela com medidas de adequação: AIC, AICc, BIC e HQIC para o caso multivariado.

```
setwd('C:\\Users\\ Cícero Carlos \\Dropbox\\Cícero\\Ajuste Multivariado\\Bancos de dados
Multivariados\\Iris')
```

```
iris=as.data.frame(read.table('iris.txt',head=T))
```

```
#----- GamaExp1 -----#
```

```
a1 = 1.088037;
```

```
b1 = 0.090536;
```

```
lamb1 = 0.514420;
```

```
a2 = 0.694563;
```

```
b2 = 0.181539;
```

```
lamb2= 1.703419;
```

```
estim1 = c(a1,b1,lamb1,a2,b1,lamb2)
```

```
erro1=c( 0.245057, 0.043857, 0.170913, 0.116317, 0.051337, 0.412718)
```

```
lik1 = -433.2763437
```

```
#----- Analises -----#
```

```
p=6
```

```
aic1=2*p-2*lik1
```

```
aicc1=-2*lik1 + 2*n*p/(n - p -1)
```

```
bic1=-2*lik1+p*log(n)
```

```
hqic1 =2*p*log(log(n)) -2*lik1
```

### 3. Comandos implementados no software R 3.0.2 para construção dos gráficos de contorno bivariados da densidade do modelo proposto.

```
setwd('C:\\Users\\Cícero Carlos\\Dropbox\\Cícero\\Ajuste_Multivariado\\Graficos')
```

```
contorno = function(a1,a2,b1,b2,lamb1,lamb2){
  z = function(x1,x2){
    x1*lamb1*a1*b1*(exp(lamb1*x1)-1)^(a1-1)*exp(lamb1*x1-b1*exp(lamb1*x1-1)^a1)*
    x2*lamb2*a2*b2*(exp(lamb2*x2)-1)^(a2-1)*exp(lamb2*x2-b2*exp(lamb2*x2-1)^a2)}
  z = outer(x1,x2,z)
```

```
  mylevels <- seq(min(z),max(z),l=30)
  s=seq(0.7,.05,length=(length(mylevels)+1) )
  filled.contour(x1,x2,z,col=rgb(s,s,s),xlab=expression(X),ylab=expression(Y))
}
```

```
x1 <- seq(.1,500,l=100);x2 <- seq(.1,500,l=100)
png('contorno1.png')
contorno(.1,.1,.1,.1,.1,.1)
  mtext(expression(paste(a[1]==0.1,',', a[2]==0.1,',', b[1]==0.1,',',
b[2]==0.1,',', lambda[1]==0.1,',', lambda[2]==0.1))), side=3, line=0.35,
  outer=FALSE,cex=0.9, font=3,adj = 0)
dev.off()
```

```
png('contorno2.png')
contorno(.2,.1,.1,.1,.1,.1)
  mtext(expression(paste(a[1]==0.2,',', a[2]==0.1,',', b[1]==0.1,',',
b[2]==0.1,',', lambda[1]==0.1,',', lambda[2]==0.1))), side=3, line=0.35,
  outer=FALSE,cex=0.9, font=3,adj = 0)
dev.off()
```

```
png('contorno3.png')
contorno(.1,.2,.1,.1,.1,.1)
  mtext(expression(paste(a[1]==0.1,',', a[2]==0.2,',', b[1]==0.1,',',
b[2]==0.1,',', lambda[1]==0.1,',', lambda[2]==0.1))), side=3, line=0.35,
  outer=FALSE,cex=0.9, font=3,adj = 0)
dev.off()
```

```
png('contorno4.png')
contorno(.1,.1,.2,.1,.1,.1)
  mtext(expression(paste(a[1]==0.1,',', a[2]==0.1,',', b[1]==0.2,',',
b[2]==0.1,',', lambda[1]==0.1,',', lambda[2]==0.1))), side=3, line=0.35,
  outer=FALSE,cex=0.9, font=3,adj = 0)
dev.off()
```

```
png('contorno5.png')
contorno(.1,.1,.1,.2,.1,.1)
  mtext(expression(paste(a[1]==0.1,',', a[2]==0.1,',', b[1]==0.1,',',
b[2]==0.2,',', lambda[1]==0.1,',', lambda[2]==0.1))), side=3, line=0.35,
  outer=FALSE,cex=0.9, font=3,adj = 0)
dev.off()
```

```
png('contorno6.png')
contorno(.1,.1,.1,.1,.2,.1)
  mtext(expression(paste(a[1]==0.1,',', a[2]==0.1,',', b[1]==0.1,',',
b[2]==0.1,',', lambda[1]==0.2,',', lambda[2]==0.1))), side=3, line=0.35,
  outer=FALSE,cex=0.9, font=3,adj = 0)
dev.off()
```

```
png('contorno7.png')
contorno(.1,.1,.1,.1,.1,.2)
mtext(expression(paste(a[1]==0.1,' ', a[2]==0.1,' ', b[1]==0.1,' ',
b[2]==0.1,' ', lambda[1]==0.1,' ', lambda[2]==0.2)), side=3, line=0.35,
outer=FALSE,cex=0.9, font=3,adj = 0)
dev.off()
```

#### 4. Comandos implementados no software R 3.0.2 para construção dos gráficos de contorno bivariados da função de risco do modelo proposto.

```

setwd('C:\\Users\\Cícero Carlos\\Dropbox\\Cícero\\Ajuste_Multivariado\\Graficos')

#a1=a2=b1=b2=lamb1=lamb2=.1

contorno = function(a1,a2,b1,b2,lamb1,lamb2){
  risco = function(x1,x2){
    x1*lamb1*a1*b1*(exp(lamb1*x1)-1)^(a1-1)*exp(lamb1*x1-b1*exp(lamb1*x1-1)^a1)*
    x2*lamb2*a2*b2*(exp(lamb2*x2)-1)^(a2-1)*exp(lamb2*x2-b2*exp(lamb2*x2-1)^a2)/
    (1 - (1-exp(-b1*exp(lamb1*x1-1)^a1))*
    (1-exp(-b2*exp(lamb2*x2-1)^a2)))
  }

  z = outer(x1,x2,risco)

  mylevels <- seq(min(z),max(z),l=30)
  s=seq(0.7,.05,length=(length(mylevels)+1) )
  filled.contour(x1,x2,z,col=rgb(s,s,s),xlab=expression(X),ylab=expression(Y))
}

x1 <- seq(.1,500,l=100);x2 <- seq(.1,500,l=100)
png('ContornoRisco1.png')
contorno(.1,.1,.1,.1,.1,.1)
mtext(expression(paste(a[1]==0.1,', ', a[2]==0.1,', ', b[1]==0.1,', ',
b[2]==0.1,', ', lambda[1]==0.1,', ', lambda[2]==0.1)), side=3, line=0.35,
outer=FALSE,cex=0.9, font=3,adj = 0)
dev.off()

png('ContornoRisco2.png')

```

```
contorno(.2,.1,.1,.1,.1,.1)
mtext(expression(paste(a[1]==0.2,',', a[2]==0.1,',', b[1]==0.1,',',
b[2]==0.1,',', lambda[1]==0.1,',', lambda[2]==0.1))), side=3, line=0.35,
outer=FALSE,cex=0.9, font=3,adj = 0)
dev.off()
```

```
png('ContornoRisco3.png')
contorno(.1,.2,.1,.1,.1,.1)
mtext(expression(paste(a[1]==0.1,',', a[2]==0.2,',', b[1]==0.1,',',
b[2]==0.1,',', lambda[1]==0.1,',', lambda[2]==0.1))), side=3, line=0.35,
outer=FALSE,cex=0.9, font=3,adj = 0)
dev.off()
```

```
png('ContornoRisco4.png')
contorno(.1,.1,.2,.1,.1,.1)
mtext(expression(paste(a[1]==0.1,',', a[2]==0.1,',', b[1]==0.2,',',
b[2]==0.1,',', lambda[1]==0.1,',', lambda[2]==0.1))), side=3, line=0.35,
outer=FALSE,cex=0.9, font=3,adj = 0)
dev.off()
```

```
png('ContornoRisco5.png')
contorno(.1,.1,.1,.2,.1,.1)
mtext(expression(paste(a[1]==0.1,',', a[2]==0.1,',', b[1]==0.1,',',
b[2]==0.2,',', lambda[1]==0.1,',', lambda[2]==0.1))), side=3, line=0.35,
outer=FALSE,cex=0.9, font=3,adj = 0)
dev.off()
```

```
png('ContornoRisco6.png')
contorno(.1,.1,.1,.1,.2,.1)
mtext(expression(paste(a[1]==0.1,',', a[2]==0.1,',', b[1]==0.1,',',
```

```
b[2]==0.1,',', lambda[1]==0.2,',', lambda[2]==0.1)), side=3, line=0.35,  
outer=FALSE,cex=0.9, font=3,adj = 0)  
dev.off()
```

```
png('ContornoRisco7.png')
```

```
contorno(.1,.1,.1,.1,.1,.2)
```

```
mtext(expression(paste(a[1]==0.1,',', a[2]==0.1,',', b[1]==0.1,',',  
b[2]==0.1,',', lambda[1]==0.1,',', lambda[2]==0.2))), side=3, line=0.35,  
outer=FALSE,cex=0.9, font=3,adj = 0)  
dev.off()
```



## 5. Comandos implementados no software R 3.0.2 para construção dos gráficos de superfície bivariados da densidade do modelo proposto.

```

setwd('C:\\Users\\Cícero Carlos\\Dropbox\\Cícero\\Ajuste_Multivariado\\Graficos')

#a1=a2=b1=b2=lamb1=lamb2=.1
superficie = function(a1,a2,b1,b2,lamb1,lamb2){
  densidade = function(x1,x2){
    x1*lamb1*a1*b1*(exp(lamb1*x1)-1)^(a1-1)*exp(lamb1*x1-b1*exp(lamb1*x1-1)^a1)*
    x2*lamb2*a2*b2*(exp(lamb2*x2)-1)^(a2-1)*exp(lamb2*x2-b2*exp(lamb2*x2-1)^a2)
  }

  z = outer(x1,x2,densidade)

  persp(x1, x2, z, theta = 30, phi = 30, expand = .5, ticktype = "detailed", col =
  "lightblue",xlab='X',ylab='Y',zlab='Densidade')

}

x1 <- seq(.1,500,l=50);x2 <- seq(.1,500,l=50)
png('SuperficieDensidade1.png')
superficie(.1,.1,.1,.1,.1,.1)
mtext(expression(paste(a[1]==0.1,',', a[2]==0.1,',', b[1]==0.1,',',
b[2]==0.1,',', lambda[1]==0.1,',', lambda[2]==0.1))), side=3, line=0.35,
  outer=FALSE,cex=0.9, font=3,adj = .5)
dev.off()

png('SuperficieDensidade2.png')
superficie(.2,.1,.1,.1,.1,.1)
mtext(expression(paste(a[1]==0.2,',', a[2]==0.1,',', b[1]==0.1,',',
b[2]==0.1,',', lambda[1]==0.1,',', lambda[2]==0.1))), side=3, line=0.35,

```

```
outer=FALSE,cex=0.9, font=3,adj = .5)
```

```
dev.off()
```

```
png('SuperficieDensidade3.png')
```

```
superficie(.1,.2,.1,.1,.1,.1)
```

```
mtext(expression(paste(a[1]==0.1,',', a[2]==0.2,',', b[1]==0.1,',',  
b[2]==0.1,',', lambda[1]==0.1,',', lambda[2]==0.1))), side=3, line=0.35,
```

```
outer=FALSE,cex=0.9, font=3,adj = .5)
```

```
dev.off()
```

```
png('SuperficieDensidade4.png')
```

```
superficie(.1,.1,.2,.1,.1,.1)
```

```
mtext(expression(paste(a[1]==0.1,',', a[2]==0.1,',', b[1]==0.2,',',  
b[2]==0.1,',', lambda[1]==0.1,',', lambda[2]==0.1))), side=3, line=0.35,
```

```
outer=FALSE,cex=0.9, font=3,adj = .5)
```

```
dev.off()
```

```
png('SuperficieDensidade5.png')
```

```
superficie(.1,.1,.1,.2,.1,.1)
```

```
mtext(expression(paste(a[1]==0.1,',', a[2]==0.1,',', b[1]==0.1,',',  
b[2]==0.2,',', lambda[1]==0.1,',', lambda[2]==0.1))), side=3, line=0.35,
```

```
outer=FALSE,cex=0.9, font=3,adj = .5)
```

```
dev.off()
```

```
png('SuperficieDensidade6.png')
```

```
superficie(.1,.1,.1,.1,.2,.1)
```

```
mtext(expression(paste(a[1]==0.1,',', a[2]==0.1,',', b[1]==0.1,',',  
b[2]==0.1,',', lambda[1]==0.2,',', lambda[2]==0.1))), side=3, line=0.35,
```

```
outer=FALSE,cex=0.9, font=3,adj = .5)
```

```
dev.off()
```

```
png('SuperficieDensidade7.png')  
superficie(.1,.1,.1,.1,.1,.2)  
mtext(expression(paste(a[1]==0.1,',', a[2]==0.1,',', b[1]==0.1,',',  
b[2]==0.1,',', lambda[1]==0.1,',', lambda[2]==0.2))), side=3, line=0.35,  
outer=FALSE,cex=0.9, font=3,adj = .5)  
dev.off()
```

## 6. Comandos implementados no software R 3.0.2 para construção dos gráficos de superfície bivariados da função de risco do modelo proposto.

```
setwd('C:\\Users\\Cícero Carlos\\Dropbox\\Cícero\\Ajuste_Multivariado\\Graficos')

#a1=a2=b1=b2=lamb1=lamb2=.1
superficie = function(a1,a2,b1,b2,lamb1,lamb2){
  risco = function(x1,x2){
    x1*lamb1*a1*b1*(exp(lamb1*x1)-1)^(a1-1)*exp(lamb1*x1-b1*exp(lamb1*x1-1)^a1)*
    x2*lamb2*a2*b2*(exp(lamb2*x2)-1)^(a2-1)*exp(lamb2*x2-b2*exp(lamb2*x2-1)^a2)/
    (1 - (1-exp(-b1*exp(lamb1*x1-1)^a1))*
    (1-exp(-b2*exp(lamb2*x2-1)^a2)))
  }

  z = outer(x1,x2,risco)

  persp(x1, x2, z, theta = 30, phi = 30, expand = .5, ticktype = "detailed", col =
  "lightblue",xlab='X',ylab='Y',zlab='Risco')

}

x1 <- seq(.1,500,l=50);x2 <- seq(.1,500,l=50)
png('SuperficieRisco1.png')
superficie(.1,.1,.1,.1,.1,.1)
mtext(expression(paste(a[1]==0.1,',', a[2]==0.1,',', b[1]==0.1,',',
b[2]==0.1,',', lambda[1]==0.1,',', lambda[2]==0.1)), side=3, line=0.35,
outer=FALSE,cex=0.9, font=3,adj = .5)
dev.off()

png('SuperficieRisco2.png')
superficie(.2,.1,.1,.1,.1,.1)
mtext(expression(paste(a[1]==0.2,',', a[2]==0.1,',', b[1]==0.1,',',
b[2]==0.1,',', lambda[1]==0.1,',', lambda[2]==0.1)), side=3, line=0.35,
outer=FALSE,cex=0.9, font=3,adj = .5)
dev.off()

png('SuperficieRisco3.png')
superficie(.1,.2,.1,.1,.1,.1)
mtext(expression(paste(a[1]==0.1,',', a[2]==0.2,',', b[1]==0.1,',',
b[2]==0.1,',', lambda[1]==0.1,',', lambda[2]==0.1)), side=3, line=0.35,
outer=FALSE,cex=0.9, font=3,adj = .5)
dev.off()

png('SuperficieRisco4.png')
superficie(.1,.1,.2,.1,.1,.1)
mtext(expression(paste(a[1]==0.1,',', a[2]==0.1,',', b[1]==0.2,',',
b[2]==0.1,',', lambda[1]==0.1,',', lambda[2]==0.1)), side=3, line=0.35,
outer=FALSE,cex=0.9, font=3,adj = .5)
dev.off()

png('SuperficieRisco5.png')
superficie(.1,.1,.1,.2,.1,.1)
mtext(expression(paste(a[1]==0.1,',', a[2]==0.1,',', b[1]==0.1,',',
b[2]==0.2,',', lambda[1]==0.1,',', lambda[2]==0.1)), side=3, line=0.35,
outer=FALSE,cex=0.9, font=3,adj = .5)
dev.off()

png('SuperficieRisco6.png')
superficie(.1,.1,.1,.1,.2,.1)
```

```
mtext(expression(paste(a[1]==0.1,' ', a[2]==0.1,' ', b[1]==0.1,' ',  
b[2]==0.1,' ', lambda[1]==0.2,' ', lambda[2]==0.1)), side=3, line=0.35,  
outer=FALSE,cex=0.9, font=3,adj = .5)  
dev.off()
```

```
png('SuperficieRisco7.png')  
superficie(.1,.1,.1,.1,.1,.2)  
mtext(expression(paste(a[1]==0.1,' ', a[2]==0.1,' ', b[1]==0.1,' ',  
b[2]==0.1,' ', lambda[1]==0.1,' ', lambda[2]==0.2)), side=3, line=0.35,  
outer=FALSE,cex=0.9, font=3,adj = .5)  
dev.off()
```

## 7. Comandos implementados no software R 3.0.2 para construção dos gráficos de contorno estimado do modelo proposto.

```
setwd('C:\\Users\\Kleber\\Dropbox\\Cicero\\Ajuste_Multivariado\\Graficos - Estimados')
```

```
contornoM1 = function(a1,a2,b1,b2,lamb1,lamb2){
z = function(x1,x2){
x1*lamb1*a1*b1*(exp(lamb1*x1)-1)^(a1-1)*exp(lamb1*x1-b1*exp(lamb1*x1-1)^a1)*
x2*lamb2*a2*b2*(exp(lamb2*x2)-1)^(a2-1)*exp(lamb2*x2-b2*exp(lamb2*x2-1)^a2)}
z = outer(x1,x2,z)
```

```
mylevels <- seq(min(z),max(z),l=30)
s=seq(0.7,.05,length=(length(mylevels)+1) )
filled.contour(x1,x2,z,col=rgb(s,s,s),xlab=expression(X),ylab=expression(Y))
}
```

```
x1 <- seq(.1,20,l=100);x2 <- seq(.1,20,l=100)
png('contornoM1.png')
contornoM1(1.088 ,.099,.514,0.695,.182,1.703)
# mtext(expression(paste(a[1]==0.1,',', a[2]==0.1,',', b[1]==0.1,',',
#b[2]==0.1,',', lambda[1]==0.1,',', lambda[2]==0.1))), side=3, line=0.35,
# outer=FALSE,cex=0.9, font=3,adj = 0)
dev.off()
```

```
contornoM2 = function(a1,a2,b1,b2,lamb1,lamb2){
z = function(x1,x2){
b1^a1*lamb1^a1*x1^(a1-1)/gamma(a1)*exp(-b1*lamb1*x1)*
b2^a2*lamb2^a2*x2^(a2-1)/gamma(a2)*exp(-b2*lamb2*x2)
}
z = outer(x1,x2,z)
```

```
mylevels <- seq(min(z),max(z),l=30)
s=seq(0.7,.05,length=(length(mylevels)+1) )
filled.contour(x1,x2,z,col=rgb(s,s,s),xlab=expression(X),ylab=expression(Y))
}
```

```
x1 <- seq(.1,10,l=100);x2 <- seq(.1,1,l=100)
png('contornoM2.png')
contornoM2(3.523 ,.474,1.980,1.542,.629,2.043)
# mtext(expression(paste(a[1]==0.1,',', a[2]==0.1,',', b[1]==0.1,',',
#b[2]==0.1,',', lambda[1]==0.1,',', lambda[2]==0.1))), side=3, line=0.35,
# outer=FALSE,cex=0.9, font=3,adj = 0)
dev.off()
```

```
contornoM3 = function(a1,b1,lamb1,a2,b2,lamb2){
z = function(x1,x2){
lamb1*b1*exp(-lamb1*x1)/(1+(b1-1)*exp(-lamb1*x1))*
lamb2*b2*exp(-lamb2*x2)/(1+(b2-1)*exp(-lamb2*x2))
}
z = outer(x1,x2,z)
```

```
mylevels <- seq(min(z),max(z),l=30)
s=seq(0.7,.05,length=(length(mylevels)+1) )
filled.contour(x1,x2,z,col=rgb(s,s,s),xlab=expression(X),ylab=expression(Y))
}
```

```
x1 <- seq(.1,10,l=100);x2 <- seq(.1,5,l=100)
png('contornoM3.png')
contornoM3(1 , 23.208, 0.840, 1, 5.250, 1.631)
# mtext(expression(paste(a[1]==0.1,',', a[2]==0.1,',', b[1]==0.1,',',
#b[2]==0.1,',', lambda[1]==0.1,',', lambda[2]==0.1))), side=3, line=0.35,
# outer=FALSE,cex=0.9, font=3,adj = 0)
dev.off()
```

```
contornoM4 = function(a1,b1,lamb1,a2,b2,lamb2){
z = function(x1,x2){
b1*x1^(a1-1)*(a1+lamb1*x1)*(exp(lamb1*x1) - b1*x1^a1*exp(lamb1*x1))*
b2*x1^(a2-1)*(a2+lamb2*x2)*(exp(lamb2*x2) - b2*x2^a2*exp(lamb2*x2))
}
z = outer(x1,x2,z)
```

```
mylevels <- seq(min(z),max(z),l=30)
s=seq(0.7,.05,length=(length(mylevels)+1) )
filled.contour(x1,x2,z,col=rgb(s,s,s),xlab=expression(X),ylab=expression(Y))
}
```

```
x1 <- seq(.1,500,l=100);x2 <- seq(.1,500,l=100)
png('contornoM4.png')
contornoM4(1.071, 0.038, 0.373, 0.699, .241, 0.790)
# mtext(expression(paste(a[1]==0.1,',', a[2]==0.1,',', b[1]==0.1,',',
#b[2]==0.1,',', lambda[1]==0.1,',', lambda[2]==0.1))), side=3, line=0.35,
# outer=FALSE,cex=0.9, font=3,adj = 0)
dev.off()
```

```
contornoM5 = function(a1,b1,lamb1,th1,a2,b2,lamb2,th2){
z = function(x1,x2){
lamb1/(th1*beta(a1,b1))*(1-(th1/x1)^lamb1)^(a1-1)*(th1/x1)^(lamb1*b1-1)*
lamb2/(th2*beta(a2,b2))*(1-(th2/x2)^lamb2)^(a2-1)*(th2/x2)^(lamb2*b2-1)
}
z = outer(x1,x2,z)
```

```
mylevels <- seq(min(z),max(z),l=30)
s=seq(0.7,.05,length=(length(mylevels)+1) )
filled.contour(x1,x2,z,col=rgb(s,s,s),xlab=expression(X),ylab=expression(Y))
}
```

```
x1 <- seq(.1,20,l=100);x2 <- seq(.1,20,l=100)
png('contornoM5.png')
contornoM5(86.678, 57.035, 0.170, 0.014, 91.876, 69.667,0.088, 0.000055)
# mtext(expression(paste(a[1]==0.1,',', a[2]==0.1,',', b[1]==0.1,',',
#b[2]==0.1,',', lambda[1]==0.1,',', lambda[2]==0.1))), side=3, line=0.35,
# outer=FALSE,cex=0.9, font=3,adj = 0)
dev.off()
```

```
contornoM6 = function(a1,b1,lamb1,a2,b2,lamb2){
z = function(x1,x2){
a1*lamb1*(lamb1*x1)^(a1-1)*exp(-(lamb1*x1)^a1)*
a2*lamb2*(lamb2*x2)^(a2-1)*exp(-(lamb2*x2)^a2)
}
z = outer(x1,x2,z)
```

```
mylevels <- seq(min(z),max(z),l=30)
s=seq(0.7,.05,length=(length(mylevels)+1) )
filled.contour(x1,x2,z,col=rgb(s,s,s),xlab=expression(X),ylab=expression(Y))
}

x1 <- seq(.1,10,l=100);x2 <- seq(.1,5,l=100)
png('contornoM6.png')
contornoM6(2.329, 1, 0.235, 1.439, 1, 0.763)
# mtext(expression(paste(a[1]==0.1,',', a[2]==0.1,',', b[1]==0.1,',',
#b[2]==0.1,',', lambda[1]==0.1,',', lambda[2]==0.1))), side=3, line=0.35,
# outer=FALSE,cex=0.9, font=3,adj = 0)
dev.off()
```



## 8. Comandos implementados no software R 3.0.2 para construção dos gráficos de superfície-densidade estimados do modelo proposto.

```
setwd('C:\\Users\\Kleber\\Dropbox\\Cicero\\Ajuste_Multivariado\\Graficos - Estimados')

superficie = function(a1,a2,b1,b2,lamb1,lamb2){
  densidade = function(x1,x2){
    x1*lamb1*a1*b1*(exp(lamb1*x1)-1)^(a1-1)*exp(lamb1*x1-b1*exp(lamb1*x1-1)^a1)*
    x2*lamb2*a2*b2*(exp(lamb2*x2)-1)^(a2-1)*exp(lamb2*x2-b2*exp(lamb2*x2-1)^a2)
  }

  z = outer(x1,x2,densidade)

  persp(x1, x2, z, theta = 30, phi = 30, expand = .5, ticktype = "detailed", col =
  "lightblue",xlab='X',ylab='Y',zlab='Densidade')
}

x1 <- seq(.1,20,l=50);x2 <- seq(.1,20,l=50)
png('SuperficieM1.png')
superficie(1.088 ,.099,.514,0.695,.182,1.703)
mtext( 'Modelo M4.1 - Estimado', side=3, line=0.35,
  outer=FALSE,cex=0.9, font=3,adj = .5)
dev.off()

superficie = function(a1,a2,b1,b2,lamb1,lamb2){
  densidade = function(x1,x2){
    b1^a1*lamb1^a1*x1^(a1-1)/gamma(a1)*exp(-b1*lamb1*x1)*
    b2^a2*lamb2^a2*x2^(a2-1)/gamma(a2)*exp(-b2*lamb2*x2)
  }

  z = outer(x1,x2,densidade)

  persp(x1, x2, z, theta = 30, phi = 30, expand = .5, ticktype = "detailed", col =
  "lightblue",xlab='X',ylab='Y',zlab='Densidade')
}

x1 <- seq(.1,10,l=50);x2 <- seq(.1,1,l=50)
png('SuperficieM2.png')
superficie(3.523 ,.474,1.980,1.542,.629,2.043)
mtext( 'Modelo M4.2 - Estimado', side=3, line=0.35,
  outer=FALSE,cex=0.9, font=3,adj = .5)
dev.off()

superficie = function(a1,a2,b1,b2,lamb1,lamb2){
  densidade = function(x1,x2){
    lamb1*b1*exp(-lamb1*x1)/(1+(b1-1)*exp(-lamb1*x1))*
    lamb2*b2*exp(-lamb2*x2)/(1+(b2-1)*exp(-lamb2*x2))
  }

  z = outer(x1,x2,densidade)
```

```
persp(x1, x2, z, theta = 30, phi = 30, expand = .5, ticktype = "detailed", col =
"lightblue",xlab='X',ylab='Y',zlab='Densidade')
```

```
}
```

```
x1 <- seq(.1,10,l=50);x2 <- seq(.1,5,l=50)
png('SuperficieM3.png')
superficie(1, 23.208, 0.840, 1, 5.250, 1.631)
mtext('Modelo M4.3 - Estimado', side=3, line=0.35,
outer=FALSE,cex=0.9, font=3,adj = .5)
dev.off()
```

```
superficie = function(a1,a2,b1,b2,lamb1,lamb2){
  densidade = function(x1,x2){
    b1*x1^(a1-1)*(a1+lamb1*x1)*(exp(lamb1*x1) - b1*x1^a1*exp(lamb1*x1))*
    b2*x1^(a2-1)*(a2+lamb2*x2)*(exp(lamb2*x2) - b2*x2^a2*exp(lamb2*x2))
  }

  z = outer(x1,x2,densidade)
```

```
persp(x1, x2, z, theta = 30, phi = 30, expand = .5, ticktype = "detailed", col =
"lightblue",xlab='X',ylab='Y',zlab='Densidade')
```

```
}
```

```
x1 <- seq(.1,10,l=50);x2 <- seq(.1,50,l=50)
png('SuperficieM4.png')
superficie(1.071, 0.038, 0.373, 0.699, .241, 0.790)
mtext('Modelo M4.4 - Estimado', side=3, line=0.35,
outer=FALSE,cex=0.9, font=3,adj = .5)
dev.off()
```

```
superficie = function(a1,b1,lamb1,th1,a2,b2,lamb2,th2){
  densidade = function(x1,x2){
    lamb1/(th1*beta(a1,b1))*(1-(th1/x1)^lamb1)^(a1-1)*(th1/x1)^(lamb1*b1-1)*
    lamb2/(th2*beta(a2,b2))*(1-(th2/x2)^lamb2)^(a2-1)*(th2/x2)^(lamb2*b2-1)
  }

  z = outer(x1,x2,densidade)
```

```
persp(x1, x2, z, theta = 30, phi = 30, expand = .5, ticktype = "detailed", col =
"lightblue",xlab='X',ylab='Y',zlab='Densidade')
```

```
}
```

```
x1 <- seq(.1,20,l=50);x2 <- seq(.1,20,l=50)
png('SuperficieM5.png')
superficie(86.678, 57.035, 0.170, 0.014, 91.876, 69.667,0.088, 0.000055)
mtext('Modelo M4.5 - Estimado', side=3, line=0.35,
outer=FALSE,cex=0.9, font=3,adj = .5)
dev.off()
```

```
superficie = function(a1,a2,b1,b2,lamb1,lamb2){
  densidade = function(x1,x2){
    a1*lamb1*(lamb1*x1)^(a1-1)*exp(-(lamb1*x1)^a1)*
```

```
a2*lamb2*(lamb2*x2)^(a2-1)*exp(-(lamb2*x2)^a2)
}

z = outer(x1,x2,densidade)

persp(x1, x2, z, theta = 30, phi = 30, expand = .5, ticktype = "detailed", col =
"lightblue",xlab='X',ylab='Y',zlab='Densidade')

}

x1 <- seq(.1,10,l=50);x2 <- seq(.1,5,l=50)
png('SuperficieM6.png')
superficie(2.329, 1, 0.235, 1.439, 1, 0.763)
mtext( 'Modelo M4.6 - Estimado', side=3, line=0.35,
outer=FALSE,cex=0.9, font=3,adj = .5)
dev.off()
```