ANALISIS KINERJA SOLVER PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA PADA MATLAB UNTUK PERSOALAN NILAI AWAL NONSTIFF DAN STIFF

Yudhi Purwananto dan Rully Soelaiman
Fakultas Teknologi Informasi, Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Kampus ITS, Jl.Raya ITS – Sukolilo, Surabaya 60111, Indonesia
Telp. (031) 5939214, Fax. (031) 5939363
Email: {yudhi, rully}@its-sby.edu

ABSTRAK

Makalah ini membahas analisis kinerja dari solver persamaan diferensial biasa pada perangkat lunak MATLAB. Persoalan persamaan diferensial biasa yang akan diselesaikan oleh solver MATLAB dan selanjutnya dianalisis kinerjanya tersebut akan meliputi persoalan nilai awal (Initial Value Problem) dengan karakteristik nonstiff dan stiff.

Penyelesaian persoalan nilai awal nonstiff yang akan dianalisis kinerjanya akan menggunakan metode Runge-Kutta eksplisit, yang diimplementasikan dengan fungsi ode23 dan ode45. Sedangkan untuk persoalan nilai awal stiif akan menggunakan metode implisit yang disebut Numerical Differentiation Formulas (NDF) dan metode one-step implisit Modified Rosenbrock. Kedua metode untuk persoalan stiff tersebut diimplementasikan dalam fungsi ode15s dan ode23s.

Analisis kinerja pada solver PDB MATLAB untuk persoalan nilai awal yang dilakukan terhadap setiap fungsi tersebut akan meliputi kinerja terhadap tolerasi galat (error) dan biaya komputasi yang dibutuhkan yang dinyatakan dengan komponen succesful step, failed attempts dan function evaluation.

Kata kunci: Initial Value Problem, Nonstiff, Ordinary Differential Equation, Stiff .

1. PENDAHULUAN

Suatu persamaan diferensial adalah persamaan yang didalamnya terdapat turunan-turunan. Jika terdapat variabel bebas yang tunggal (single independent variable), maka turunannya merupakan turunan biasa dan persamaannya disebut persamaan diferensial biasa (Ordinary Differential Equation-ODE) [1][3]. Derajat (order) persamaan diferensial adalah derajat tertinggi turunan yang timbul. Permasalahan pada penyelesaian persamaan diferensial biasa (PDB) dapat diklasifikasikan menjadi persoalan nilai awal (*Initial Value Problem*), jika setiap kondisi dinyatakan hanya pada titik awal, dan persoalan nilai batas (*Boundary Value Problem*),jika kondisi yang dispesifikasikan terletak antara nilai awal dan nilai akhir[2][3].

Pada makalah berikut, akan dibahas mengenai analisis kinerja solver PDB pada MATLAB untuk persoalan nilai awal. Persoalan nilai awal berderajat satu (First-Order ODE) tersebut dapat dinyatakan dengan formulasi :

$$y'(t) = F(t, y) \qquad (1)$$

pada suatu interval [t_0, t_f] dengan nilai awal $y(t_0) = y_0$. Sedangkan untuk persoalan nilai awal dengan karakteristik *stiff* mempunyai bentuk yang lebih umum sebagai berikut :

$$M(t)y' = f(t, y) \qquad (2)$$

dengan *M(t)* merupakan mass matriks yang non-singular dan biasanya sparse[4].

Penyelesaian persoalan nilai awal nonstiff yang akan dianalisis kinerjanya akan menggunakan metode Runge-Kutta eksplisit, yang diimplementasikan dengan fungsi **ode23** dan **ode45**[8]. Sedangkan untuk persoalan nilai awal stiif akan menggunakan metode implisit yang disebut Numerical Differentiation Formulas (NDF) dan metode one-step implisit Modified Rosenbrock [8]. Kedua metode untuk persoalan stiff tersebut diimplementasikan pada MATLAB dalam fungsi **ode15s** dan **ode23s**[8].

Analisis kinerja pada solver PDB MATLAB untuk persoalan nilai awal yang dilakukan terhadap fungsi ode23, ode45, ode15s dan ode23s akan meliputi kinerja terhadap tolerasi galat (error) dan biaya komputasi yang dibutuhkan yang dinyatakan dengan komponen *succesful step, failed attempts dan function evaluation*[5].

2. PENYELESAIAN PERSOALAN PDB NONSTIFF PADA MATLAB

Penyelesaian persoalan nilai awal berderajat satu dengan metode Runge-Kutta bertahap *s* (*s-stage Runge-Kutta method*) yang mendasari implementasi MATLAB ODE Solver dapat diformulasi sebagai berikut :

$$\left.\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h\sum_{i=1}^{s} b_i k_i \\ k_i &= f(x_n + c_i h, y_n + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_j), i = 1,2,...,s \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Untuk menyatakan koefisien-koefisien pada digunakan format yang disebut Array Butcher sebagai berikut :

c_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1s}
c_2	b_{21}	b_{22}	…	b_{2s}
…				
c_s	a_{s1}	a_{s2}	…	a_{ss}
	b_1	b_2	…	b_s

Matlab ODE Solver menyediakan beberapa fungsi untuk menyelesaikan persamaan diferensial Nonstiff. Fungsi-fungsi tersebut adalah :

- ODE23, yang merupakan implementasi dari pasangan eksplisit Runge-Kutta (2,3) Bogacki dan Shampine yang disebut BS23[8].
- ODE45, yang merupakan implementasi dari pasangan eksplisit Runge-Kutta (4,5) Dormand dan Prince yang biasa juga disebut RK5(4)7FM, DOPRI5, DP(4,5) atau DP54[3][8].

Pada pembahasan berikut akan dijelaskan terlebih dahulu karakteristik dari tiap fungsi tersebut.

2.1. ODE45

Metode DOPRI5 merupakan penyelesaian terhadap ODE dengan pendekatan Embedded Runge Kutta. Dengan pendekatan tersebut diharapkan estimasi error dapat diperoleh dari dua komputasi Runge Kutta dengan order berbeda. Hasil dari kedua komputasi tersebut selanjutnya dapat saling dikurangkan untuk menghasilkan Local Truncation Error (LTE). Selanjutnya, dengan pendekatan embedded akan diperoleh untuk prediksi order 4 dan 5 yang seharusnya memerlukan 10 fungsi evaluasi dapat dilakukan hanya dengan menggunakan 6 fungsi evaluasi saja.

Metode DOPRI5 memenuhi penyelesaian order 5 dengan kondisi sebagai berikut.

(1). $\sum b_i = 1$

(2). $\sum b_i c_i = 1/2$

(3). $\sum b_i c_i^2 = 1/3$

(4). $\sum b_i a_{ij} c_j = 1/6$

(5). $\sum b_i c_i^3 = 1/3$

(6). $\sum b_i c_i a_{ij} c_j = 1/8$

(7). $\sum b_i a_{ij} c_j^2 = 1/12$

(8). $\sum b_i a_{ij} a_{jk} c_k = 1/24$

(9). $\sum b_i c_i^4 = 1/5$

(10). $\sum b_i c_i^2 a_{ij} c_j = 1/10$

(11). $\sum b_i c_i a_{ij} c_j^2 = 1/15$

(12). $\sum b_i c_i a_{ij} a_{jk} c_k = 1/30$

(13). $\sum b_i (\sum a_{ij} c_j)^2 = 1/20$

(14). $\sum b_i a_{ij} c_j^3 = 1/20$

(15). $\sum b_i a_{ij} c_j a_{jk} c_k = 1/40$

(16). $\sum b_i a_{ij} a_{jk} c_k^2 = 1/60$

(17). $\sum b_i a_{ij} a_{jk} a_{km} c_m = 1/120$

Konfigurasi Array Butcher untuk DOPRI(5,4) yang memenuhi order 5 tersebut dapat dilihat pada tabel 1.

2.2. ODE23

ODE23, yang merupakan implementasi dari pasangan eksplisit Runge-Kutta (2,3) Bogacki dan Shampine yang disebut BS23. Konfigurasi Array Butcher untuk BS23 ditunjukkan dalam tabel 2 berikut.

Tabel 1. Konfigurasi Array Butcher untuk DOPRI(5,4)

0							
1/5	1/5						
3/10	3/40	9/40					
4/5	44/45	-56/15	32/9				
8/9	19372/6561	-25360/2187	64448/6561	-212/729			
1	9017/3168	-355/33	46732/5247	49/176	-5103/18656		
1	35/384	0	500/1113	125/192	-2187/6784	11/84	
y1	35/384	0	500/1113	125/192	-2187/6784	11/84	0
y^1	5179/57600	0	7571/16695	393/640	-92097/339200	187/2100	1/40

Tabel 2. Konfigurasi Array Butcher untuk BS23

0				
½	½			
¾	0	¾		
1	2/9	1/3	4/9	
y1	2/9	1/3	4/9	0
y^1	-5/72	1/12	1/9	-1/8

Metode BS23 memenuhi penyelesaian order 3 dengan kondisi sebagai berikut

1. $b_1+b_2+b_3 = 1$,
   pada array Butcher BS23= 2/9+1/3+4/9=1
2. $b_2c_2+b_3c_3=1/2$,
   pada array Butcher BS23= 1/3*1/2+4/9*3/4=3/6
3. $b_2c_2^2+b_3c_3^2=1/3$,
   pada array Butcher BS23=
   1/3*1/4+4/9*9/16=1/3
4. $b_3c_2a_{32}=1/6$
   pada array Butcher BS23 : 4/9*1/2*3/4=1/6.

3. PENYELESAIAN PERSOALAN PDB STIFF PADA MATLAB

Metode Backward Differentiation Formula (BDF), merupakan pendekatan yang banyak digunakan dalam penyelesaian permasalahan stiff. Jika digunakan step size yang berukuran konstan h dan backward difference, maka formulasi untuk BDF order k pada step antara (t_n,y_n) sampai (t_{n+1},y_{n+1}) adalah sebagai berikut [4][7]:

$$\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m}\nabla^m y_{n+1}-hF(t_{n+1},y_{n+1})=0 \qquad (4)$$

Persamaan aljabar untuk y_{n+1} dapat diselesaikan dengan iterasi Simplified Newton. Iterasi tersebut dimulai dengan prediksi nilai

$$y_{n+1}^{(0)}=\sum_{m=0}^{k}\nabla^m y_n \qquad (5)$$

suku truncation error pada BDF order k dapat diaproksimasikan sebagai berikut

$$\frac{1}{k+1}h^{k+1}y^{(k+1)}\approx\frac{1}{k+1}\nabla^{k+1}y_{n+1} \qquad (6)$$

Dalam implementasi General Purpose BDF digunakan pendekatan quasi-constant step size. Berdasarkan kenyataan bahwa tahapan predictor (5) membutuhkan memory yang lebih besar dibandingkan (4), maka Klopfenstein [7] mengusulkan metode yang memiliki stabilitas yang lebih baik dengan formulasi

$$\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m}\nabla^m y_{n+1}-hF(t_{n+1},y_{n+1})-\kappa\gamma_k(y_{n+1}-y_{n+1}^{(0)})=0 \qquad (7)$$

Formulasi diatas disebut Numerical Differentiation Formula (NDF). Dimana κ merupakan parameter skalar dan koefisien γ_κ dirumuskan

$$\gamma_k=\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j} \qquad (8)$$

Prosedur **ODE15s** merupakan implementasi dari NDF dengan quasi-constant step size dengan range order antara k=1 sampai k=5.

Alternatif lain untuk penyelesaian permasalahan stiff adalah dengan menggunakan metode Rosenbrock. Formulasi berikut mendiskripsikan step dari (t_n,y_n) menuju $t_{n+1}=t_n+h$ dengan menggunakan Modified Rosenbrock dengan perbaikan FSAL (first evaluation of F for the next step the same as the last of the current step) untuk mereduksi perkalian matriks yang tidak perlu.

$$\begin{aligned}
F_0&=F(t_n,y_n)\\
k_1&=W^{-1}(F_0+hdT)\\
F_1&=F(t_n+0.5h,y_n+0.5hk_1)\\
k_2&=W^{-1}(F_1-k_1)+k_1\\
y_{n+1}&=y_n+hk_2\\
F_2&=F(t_{n+1},y_{n+1})\\
k_3&=W^{-1}[F_2-e_{32}(k_2-F_1)-2(k_1-F_0)+hdT]\\
error&\approx\frac{h}{6}(k_1-2k_2+k_3)
\end{aligned} \qquad (9)$$

dimana $W=I-hdJ$, dengan

$d=1/(2+\sqrt{2})$, $e_{32}=6+\sqrt{2}$, $J\approx\frac{\partial F}{\partial y}(tn,yn)$ dan

$T\approx\frac{\partial F}{\partial y}(tn,yn)$.

Jika suatu step berhasil, maka F2 dari current step merupakan F0 pada step selanjutnya. Jika J=∂F/∂y, maka rumus order kedua adalah L-stable. Pendekatan diatas digunakan pada prosedur **ODE23s**, khususnya pada komputasi yang memiliki karakteristik tolerasi yang rendah, alokasi memory yang lebih efisien karena metode tersebut merupakan metode one-step, serta efektif jika Jacobian memiliki eigenvalue dekat dengan sumbu imajiner [6].

4. METODE UJICOBA

Agar dapat dilakukan analisis kinerja terhadap setiap fungsi MATLAB untuk persoalan nilai awal PDB nonstiff dan stiff, maka perlu ditetapkan persoalan standard sebagai benchmark. Pada makalah berikut, digunakan persoalan-persoalan PDB yang dideskripsikan pada ALGORITHM 648 dan dipublikasikan oleh ACM pada Transactions On Mathematical Software, Vol.13, No.1, p.28.

Persoalan PDB pada ALGORITHM 648 meliputi persoalan nonstiff dan stiff yang ditulis dalam bahasa FORTRAN. Agar persoalan tersebut dapat diselesaikan oleh perangkat lunak MATLAB, maka perlu dilakukan penulisan ulang terhadap program asal. Mekanisme konversi yang dilakukan adalah sebagai berikut :

- Untuk persoalan nilai awal PDB yang akan dikerjakan, dilakukan konversi terhadap subrutin FCN dengan parameter X,Y,YP yang menyatakan persamaan

$$YP = \frac{dY}{dX} = F(X, Y) \tag{10}$$

- Untuk penyelesaian dititik awal, dilakukan konversi terhadap subrutin IVALU.
- Untuk penyelesaiana dititik akhir, dilakukan konversi terhadap subrutin EVALU.

Contoh persoalan pada ALGORITMA 648 untuk kelas A1, adalah sebagai berikut.

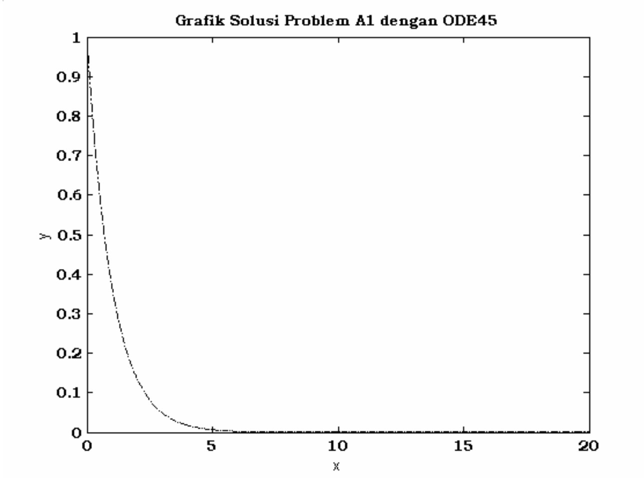
```
C     Non-Stiff DETEST problems, taken
from  C     648 toms of netlib
SUBROUTINE  IVALU(N,XSTART,XEND,HBEGIN,
                  HMAX,Y,FCNTIM,W,IWT,ID)
C     PROBLEM CLASS A
CP    PROBLEM A1
      FCNTIM = 0.0
      N = 1
      W(1) = 0.100D+01
      Y(1) = 1.D0
      GO TO 740
   60 CONTINUE
……
SUBROUTINE EVALU(Y,N,W,IWT,ID)
C     PROBLEM CLASS A
C     1:
C        PROBLEM A1
   20 Y(1) = 2.061153353012535D-09
      GO TO 620
……
SUBROUTINE FCN(X,Y,YP)
C     PROBLEM CLASS A
C     1:
C        PROBLEM A1
   60 YP(1) = -Y(1)
      GO TO 860
```

Gambar 1. Persoalan pada ALGORITMA 648 untuk kelas A1

Selanjutnya berdasarkan langkah konversi yang telah disebutkan, maka script MATLAB untuk metode ode45 yang dihasilkan berdasarkan persoalan A1 tersebut adalah sebagai berikut.

```
function [A, B] = driverA1
options = odeset('RelTol',1e-13,'AbsTol',
                 1e-13);
tspan =[0,20]';
y = 1.0;
[A, B]=ode45('nstestA1',tspan,y,options);
end;
function yp = nstestA1(x,y)
yp = -y;
```

Gambar 2. Script MATLAB persoalan A1.



Grafik yang menggambarkan penyelesaian persoalan A1 tersebut adalah sebagai berikut.

Gambar 3. Grafik penyelesaian persoalan A1

5. ANALISIS HASIL UJICOBA

Setelah dilakukan konversi terhadap seluruh persoalan PDB yang dideskripsikan pada ALGORITHM 648 kedalam script MATLAB, maka dilakukan analisis terhadap kinerja fungsi ode23, ode45, ode15s dan ode23s akan meliputi kinerja terhadap tolerasi galat (error) dan biaya komputasi yang dibutuhkan yang dinyatakan dengan komponen *succesful step, failed attempts dan function evaluation*.

5.1. Analisis Kinerja ODE45 dan ODE23

Dalam melakukan perbandingan kinerja antara fungsi ode45 dan ode23, digunakan dua nilai toleransi galat yaitu 1.E-5 dan 1.E-13. Berikut adalah tabel perbandingan kinerja fungsi ode45 dan ode23.

Tabel 3. Perbandingan kinerja ode45 dan ode23 (1.E-5)

Soal	ODE45(1.E-5)				ODE23(1.E-5)			
	SD	SS	FA	FE	SD	SS	FA	FE
A1	8.46	22.00	0.00	133.00	7.58	54.00	1.00	166
A2	5.94	16.00	0.00	97.00	5.28	51.00	0.00	154
A3	6.11	49.00	11.00	361.00	3.53	283.00	18.00	904
A4	5.09	12.00	0.00	73.00	3.63	45.00	3.00	145
A5	4.58	12.00	0.00	73.00	3.31	45.00	1.00	139
B1	3.87	93.00	12.00	631.00	2.89	511.00	0.00	1534

Soal	ODE45(1.E-5)				ODE23(1.E-5)			
	SD	SS	FA	FE	SD	SS	FA	FE
	6.09	93.00	12.00	631.00	4.53	511.00	0.00	1534
B2	6.28	33.00	1.00	205.00	5.46	71.00	1.00	217
	5.98	33.00	1.00	205.00	5.16	71.00	1.00	217
	6.28	33.00	1.00	205.00	5.46	71.00	1.00	217
B3	8.42	25.00	0.00	151.00	8.72	69.00	0.00	208
	6.84	25.00	0.00	151.00	5.22	69.00	0.00	208
	6.83	25.00	0.00	151.00	5.22	69.00	0.00	208
B4	4.50	74.00	1.00	451.00	6.22	458.00	0.00	1375
	5.44	74.00	1.00	451.00	4.60	458.00	0.00	1375
	5.25	74.00	1.00	451.00	5.09	458.00	0.00	1375
B5	5.05	53.00	0.00	319.00	3.83	276.00	5.00	844
	4.68	53.00	0.00	319.00	4.26	276.00	5.00	844
	6.41	53.00	0.00	319.00	4.52	276.00	5.00	844
D1	2.55	60.00	0.00	361.00	2.80	329.00	0.00	988
	3.20	60.00	0.00	361.00	3.38	329.00	0.00	988
	3.03	60.00	0.00	361.00	3.35	329.00	0.00	988
	2.53	60.00	0.00	361.00	2.79	329.00	0.00	988
D2	2.52	65.00	3.00	409.00	2.80	385.00	0.00	1156
	3.87	65.00	3.00	409.00	4.12	385.00	0.00	1156
	3.72	65.00	3.00	409.00	3.62	385.00	0.00	1156
	2.46	65.00	3.00	409.00	2.80	385.00	0.00	1156
D3	2.74	78.00	8.00	517.00	2.91	455.00	0.00	1366
	3.30	78.00	8.00	517.00	3.72	455.00	0.00	1366
	3.08	78.00	8.00	517.00	3.22	455.00	0.00	1366
	2.73	78.00	8.00	517.00	3.01	455.00	0.00	1366
D4	2.83	100.00	18.00	709.00	3.32	569.00	0.00	1708
	3.24	100.00	18.00	709.00	3.78	569.00	0.00	1708
	2.96	100.00	18.00	709.00	3.51	569.00	0.00	1708
	2.97	100.00	18.00	709.00	3.67	569.00	0.00	1708
D5	2.85	142.00	34.00	1057.00	2.81	819.00	0.00	2458
	3.24	142.00	34.00	1057.00	3.47	819.00	0.00	2458
	2.86	142.00	34.00	1057.00	2.87	819.00	0.00	2458
	3.23	142.00	34.00	1057.00	3.32	819.00	0.00	2458
E1	4.76	46.00	0.00	277.00	3.93	196.00	0.00	589
	5.42	46.00	0.00	277.00	3.98	196.00	0.00	589
E2	5.97	115.00	23.00	829.00	5.60	620.00	5.00	1876
	4.21	115.00	23.00	829.00	4.99	620.00	5.00	1876
E3	3.86	89.00	15.00	625.00	5.62	708.00	6.00	2143
	5.69	89.00	15.00	625.00	5.40	708.00	6.00	2143
E4	5.79	10.00	0.00	61.00	4.00	20.00	1.00	64
	7.21	10.00	0.00	61.00	4.89	20.00	1.00	64
E5	5.31	11.00	1.00	73.00	4.20	55.00	0.00	166
	6.39	11.00	1.00	73.00	5.01	55.00	0.00	166

Tabel 4. Perbandingan kinerja ode45 dan ode23 (1.E-13)

Soal	ODE45(1.E-13)				ODE23(1.E-13)			
	SD	SS	FA	FE	SD	SS	FA	FE
A1	13.98	597.00	0.00	3583.00	13.98	22207.00	0.00	66622.00
A2	13.89	352.00	0.00	2113.00	13.24	21822.00	0.00	65467.00
A3	12.42	1678.00	17.00	10171.00	11.21	128402.00	20.00	385267.00
A4	13.00	340.00	2.00	2053.00	11.40	19789.00	3.00	59377.00
A5	12.24	307.00	0.00	1843.00	10.91	19987.00	1.00	59965.00
B1	12.96	3531.00	0.00	21187.00	10.89	237230.0	0.00	711691.00
	14.22	3531.00	0.00	21187.00	12.51	237230.0	0.00	711691.00
B2	14.00	790.00	0.00	4741.00	13.00	28460.00	0.00	85381.00
	15.00	790.00	0.00	4741.00	-	28460.00	0.00	85381.00
	14.00	790.00	0.00	4741.00	12.98	28460.00	0.00	85381.00
B3	15.37	706.00	0.00	4237.00	15.93	30216.00	0.00	90649.00
	14.05	706.00	0.00	4237.00	13.17	30216.00	0.00	90649.00
	14.00	706.00	0.00	4237.00	13.14	30216.00	0.00	90649.00
B4	12.78	2925.00	0.00	17551.00	N/A	N/A	N/A	N/A
	13.10	2925.00	0.00	17551.00	N/A	N/A	N/A	N/A
	13.41	2925.00	0.00	17551.00	N/A	N/A	N/A	N/A
B5	12.40	2039.00	0.00	12235.00	11.83	126545.0	0.00	379636.00
	12.30	2039.00	0.00	12235.00	12.20	126545.0	0.00	379636.00
	12.99	2039.00	0.00	12235.00	12.50	126545.0	0.00	379636.00
D1	11.12	2354.00	0.00	14125.00	10.78	152028.0	0.00	456085.00
	11.68	2354.00	0.00	14125.00	11.36	152028.0	0.00	456085.00
	11.69	2354.00	0.00	14125.00	11.33	152028.0	0.00	456085.00
	11.10	2354.00	0.00	14125.00	10.77	152028.0	0.00	456085.00
D2	11.11	2536.00	0.00	15217.00	N/A	N/A	N/A	N/A
	12.22	2536.00	0.00	15217.00	N/A	N/A	N/A	N/A
	11.84	2536.00	0.00	15217.00	N/A	N/A	N/A	N/A
	11.10	2536.00	0.00	15217.00	N/A	N/A	N/A	N/A
D3	11.33	2998.00	0.00	17989.00	N/A	N/A	N/A	N/A
	12.30	2998.00	0.00	17989.00	N/A	N/A	N/A	N/A
	11.59	2998.00	0.00	17989.00	N/A	N/A	N/A	N/A
	11.41	2998.00	0.00	17989.00	N/A	N/A	N/A	N/A
D4	11.47	3728.00	0.00	22369.00	N/A	N/A	N/A	N/A
	12.08	3728.00	0.00	22369.00	N/A	N/A	N/A	N/A
	11.59	3728.00	0.00	22369.00	N/A	N/A	N/A	N/A
	11.71	3728.00	0.00	22369.00	N/A	N/A	N/A	N/A
D5	11.14	5140.00	0.00	30841.00	N/A	N/A	N/A	N/A
	11.77	5140.00	0.00	30841.00	N/A	N/A	N/A	N/A
	11.21	5140.00	0.00	30841.00	N/A	N/A	N/A	N/A
	11.69	5140.00	0.00	30841.00	N/A	N/A	N/A	N/A
E1	12.97	1781.00	0.00	10687.00	11.97	90116.00	0.00	270349.00
	12.88	1781.00	0.00	10687.00	11.92	90116.00	0.00	270349.00
E2	13.52	4200.00	4.00	25225.00	13.70	288871.0	0.00	866614.00
	13.09	4200.00	4.00	25225.00	13.25	288871.0	0.00	866614.00
E3	12.73	3379.00	6.00	20311.00	N/A	N/A	N/A	N/A

Soal	ODE45(1.E-13)				ODE23(1.E-13)			
	SD	SS	FA	FE	SD	SS	FA	FE
	13.06	3379.00	6.00	20311.00	N/A	N/A	N/A	N/A
E4	12.97	219.00	0.00	1315.00	11.96	9037.00	0.00	27112.00
	13.96	219.00	0.00	1315.00	12.95	9037.00	0.00	27112.00
E5	13.00	319.00	0.00	1915.00	12.30	25895.00	0.00	77686.00
	14.01	319.00	0.00	1915.00	13.10	25895.00	0.00	77686.00

Keterangan:
SD=Significant Digit,SS=Succesful Step
FA=Failed Attempts,FE=Function Evaluation
Kondisi N/A menyatakan komputasi tidak memberikan hasil karena keterbatasan sumberdaya (*out of memory*).

5.2. Analisis Kinerja ODE15s dan ODE23s

Dalam perbandingan kinerja antara fungsi ode15s dan ode23s, digunakan nilai toleransi galat yaitu 1.E-7.

Tabel 5. Perbandingan kinerja ode15s dan ode23s (1.E-7)

Soal	ODE23s(1.E-7)				ODE15s(1.E-7)			
	SD	SS	FA	FE	SD	SS	FA	FE
A1	6.62	614.00	0.00	4300.00	7.31	219.00	0.00	444.00
	10.05				9.60			
	55.55				29.67			
	51.28				28.43			
A2	7.59	732.00	132.00	9059.00	8.11	273.00	0.00	344.00
	7.29				7.81			
	7.15				7.66			
	7.07				7.59			
	7.05				7.57			
	7.07				7.59			
	7.15				7.66			
	7.29				7.81			
	7.59				8.11			
A3	7.99	890.00	1.00	6234.00	9.96	303.00	0.00	612.00
	6.99				8.96			
	4.96				6.92			
	6.00				7.94			
B1	9.23	5333.00	28.00	37391.00	8.54	1169.00	38.0	1511.0
	7.23				8.43			
	-				73.09			
	78.22				70.07			
B2	30.21	609.00	0.00	5483.00	16.55	200.00	0.00	408.00
	30.05				15.27			
	26.56				26.57			
	10.54				9.60			
	7.10				7.32			
	5.73				8.24			
B3	27.97	667.00	0.00	6005.00	11.59	218.00	0.00	444.00
	27.26				11.63			
	26.56				14.44			
	10.54				9.69			
	7.10				7.42			
	5.73				8.33			
B4	21.88	1062.00	0.00	9560.00	10.84	372.00	1.00	754.00
	21.63				11.27			
	35.08				24.76			
	10.54				9.77			
	7.10				7.14			
	5.73				7.42			
B5	13.51	3248.00	0.00	29234.00	5.96	2685.00	11.0	5400.0
	13.41				13.41			
	34.95				38.18			
	10.54				14.45			
	7.10				11.31			
	5.73				10.63			
F5	14.50	70.00	0.00	492.00	16.00	109.00	19.0	255.00
	10.15				11.66			
	9.93				11.43			
	14.50				16.00			

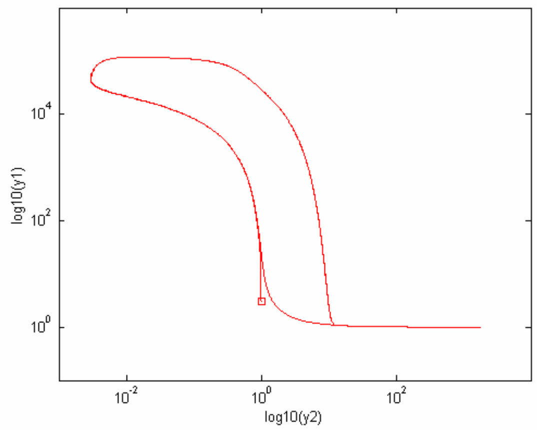
5.3. Analisis Kinerja ODE15s pada persoalan PDB Stiff Klasik

Untuk melakukan analisis kinerja ODE15s pada PDB yang lebih kompleks digunakan studi kasus klasik yaitu Oregonator dan Brusselator [4].

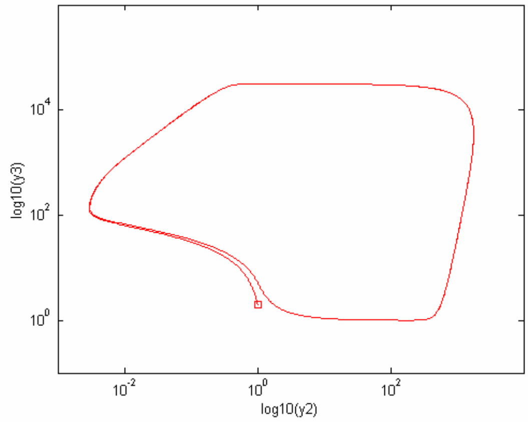
Masalah Oregonator merupakan model reaksi kimia antara $HBrO_2$, Br^- dan Ce(IV) yang solusi periodiknya dapat dinyatakan dengan reaksi Belusov-Zhabotinski (Field & Noyes, 1974) sebagai berikut :

$$\begin{aligned} y_1' &= 77.27(y_2 + y_1(1 - 8.375\times 10^{-6} y1 - y2)) \\ y_2' &= \frac{1}{77.27}(y_3 - (1 + y_1)y_2) \\ y_3' &= 0.161(y_1 - y_3) \\ y_1(0) &= 1, y_2(0) = 2, y_3(0) = 3, \quad x_{out} = 30, 60, 90, \Lambda, 360 \end{aligned} \tag{11}$$

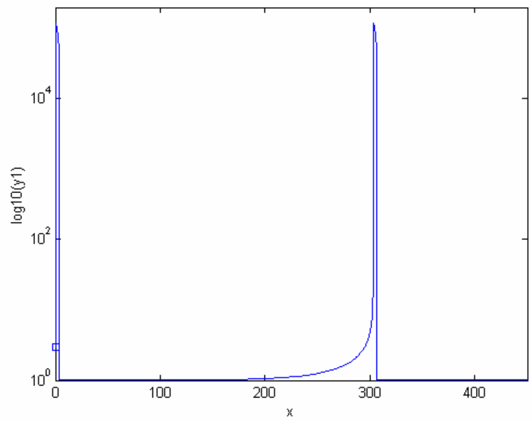
Grafik yang menggambarkan penyelesaian persoalan Oregonator tersebut ditunjukkan dalam gambar 4 sampai gambar 8 berikut ini.



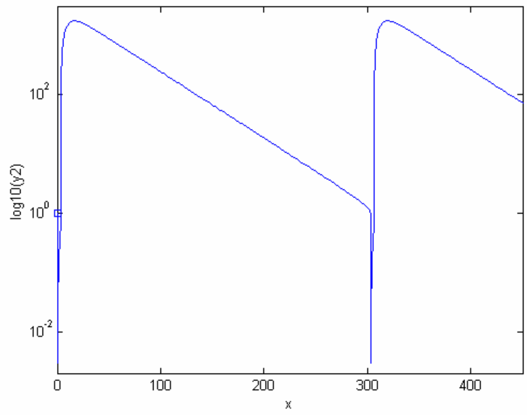
Gambar 4. Grafik y1 terhadap y2



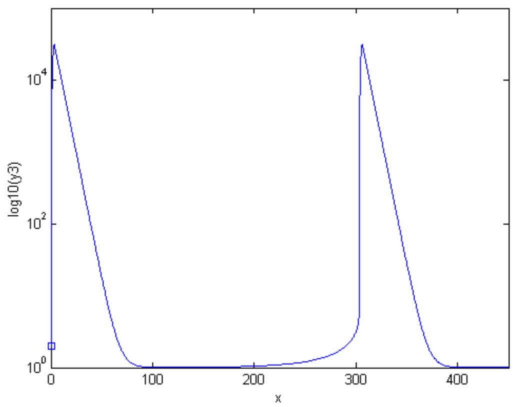
Gambar 5. Grafik y3 terhadap y2



Gambar 6. Grafik y1 terhadap x



Gambar 7. Grafik y2 terhadap x



Gambar 8. Grafik y3 terhadap x

Model Brusselator diajukan oleh Lefever dan Nicolis (1971) yang menyatakan reaksi yang terjadi antara enam buah substansi yaitu A, B, D, E, X, Y sebagai berikut :

$$A \xrightarrow{k_1} X$$

$$B + X \xrightarrow{k_2} Y + D, \textit{reaksi} \quad \textit{bimolekular}$$

$$2X + Y \xrightarrow{k_3} 3X, \textit{reaksi} \quad \textit{autocatalytic} \quad \textit{trimolecular}$$

$$X \xrightarrow{k_4} E$$

Jika diketahui bahwa A(t), B(t), D(t), E(t), X(t), Y(t) merupakan konsentrasi daripada A, B, D, E, X, Y sebagai fungsi waktu t, maka reaksi diatas berdasarkan hukum aksi masa (mass action law) dapat dinyatakan dengan persamaan diferensial sebagai berikut :

$$A' = -k_1 A$$
$$B' = -k_2 BX$$
$$D' = k_2 BX$$
$$E' = k_4 X$$
$$X' = k_1 A - k_2 BX + k_3 X^2 Y - k_4 X$$
$$Y' = k_2 BX - k_3 X^2 Y$$

Selanjutnya sistem akan disederhanakan sebagai berikut : substansi D dan E dapat diabaikan karena tidak mempengaruhi reaksi substansi lainnya; A dan B diberi harga konstan positif dan konstanta reaksi k_i diberi nilai 1. Sehingga persamaan diatas jika ditambahkan satu variabel spasial x dan X dinyatakan dengan u serta Y dinyatakan dengan v, akan menjadi :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A + u^2 v - (B+1)u + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (12)$$

dan

$$\frac{\partial v}{\partial t} = Bu - u^2 v + \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \qquad (13)$$

Selanjutnya diberikan nilai sebagai berikut

$$0 \le x \le 1, A = 1, B = 3, \alpha = 1/50,$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 1, v(0,t) = v(1,t) = 3, \qquad (14)$$
$$u(x,0) = 1 + \sin(2\pi x), v(x,0) = 3$$

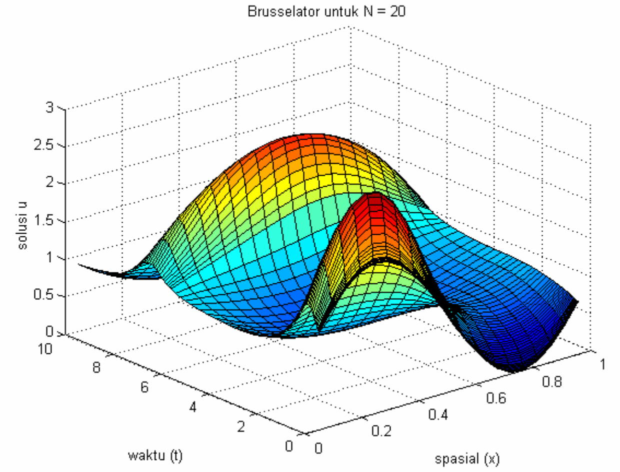
Derivatif spasial berderajat dua pada persamaan disubstitusi dengan beda hingga (finite difference) dengan grid berukur N titik, sehingga

$$x_i = i/(N+1), (1 \le i \le N), \Delta x = 1/(N+1) \qquad (15)$$

Persamaan reaksi dapat dinyatakan sebagai berikut

$$u_i' = 1 + u_i^2 v_i - 4u_i + \frac{\alpha}{(\Delta x)^2}(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}),$$
$$v_i' = 3u_i - u_i^2 v_i + \frac{\alpha}{(\Delta x)^2}(v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}),$$
$$u_0(t) = u_{N+1}(t) = 1, v_0(t) = v_{N+1}(t) = 3,$$
$$u_i(0) = 1 + \sin(2\pi x_i), v_i(0) = 3, i = 1, \ldots, N \qquad (16)$$

Grafik yang menggambarkan penyelesaian persoalan Brusselator dengan N=20 tersebut ditunjukkan dalam gambar 9 berikut.



Gambar 9. Grafik penyelesaian persoalan Brusselator dengan N=20.

6. KESIMPULAN

Makalah ini telah membahas analisis kinerja pada solver PDB MATLAB untuk persoalan nilai awal yang dilakukan terhadap fungsi ode23, ode45, ode15s dan ode23s, yang meliputi kinerja terhadap tolerasi galat (error) dan biaya komputasi yang dibutuhkan yang dinyatakan dengan komponen *succesful step, failed attempts dan function evaluation*.

Berdasarkan hasil uji coba perbandingan dapat diambil kesimpulan sebagai berikut :

1. ODE45 lebih optimal digunakan pada persamaan diferensial dengan toleransi error yang lebih tinggi dibandingkan dengan ODE23. Pada tabel analisis terlihat bahwa untuk beberapa persoalan dengan toleransi error 1.E-13, ODE23 tidak dapat memberikan solusi karena mengalami kondisi *out of memory*.
2. ODE45 memiliki biaya komputasi yang dalam analisis ini dinyatakan dengan komponen *succesful step, failed attempts dan function evaluation* yang lebih baik dibandingkan ODE23.
3. ODE15s lebih optimal digunakan pada persamaan diferensial dengan toleransi error yang lebih tinggi dibandingkan dengan ODE23s. Sementara prosedur ODE23s, digunakan pada komputasi yang memiliki karakteristik tolerasi yang rendah serta efektif jika Jacobian memiliki eigenvalue dekat dengan sumbu imajinair.
4. ODE15s dapat digunakan pada penyelesaian persoala PDB klasik yang kompleks seperti pada kasus Oregonator dan Brusselator.

7. DAFTAR PUSTAKA

1. C. William Gear, Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations, *Prentice-Hall*, 1971

2. E.Hairer, S.P.N∅rsett, G.Wanner, Solving Ordinary Differential Equations I : Nonstiff Problems, *Springer-Verlag*, 1987
3. J.D.Lambert, Numerical Methods for Ordinary Differential Systems, *John Wiley & Sons Ltd*., England, 1991
4. E.Hairer, G.Wanner, Solving Ordinary Differential Equations II : Stiff and Differential-Algebraic Problems, *Springer-Verlag*, 1991
5. Duane Hanselman, Bruce Littlefield, The Student Edition of MATLAB version 5, user's guide, The MathWorks, Inc., *Prentice Hall, Inc*., New Jersey, 1997
6. Steven C. Chapra, Raymond P. Canale, Numerical Methods for Engineers 3rd Edition, *McGraw-Hill*, 1998
7. Uri M.Ascher, Linda R. Petzold, Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations, *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 1998
8. Martin Golubitsky, Michael Dellnitz, Linear Algebra and Differential Equations Using MATLAB, *Brooks/Cole Publishing Co*. 1999