



## PRODUTO FUNCIONAL DE GRAFOS: PROPRIEDADES E APLICAÇÕES

Sergio Ricardo Pereira de Mattos

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Produção.

Orientador: Samuel Jurkiewicz

Rio de Janeiro  
Setembro de 2017

# PRODUTO FUNCIONAL DE GRAFOS: PROPRIEDADES E APLICAÇÕES

Sergio Ricardo Pereira de Mattos

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO.

Examinada por:

---

Prof. Samuel Jurkiewicz, D.Sc

---

Prof. Abel Rodolfo Garcia Lozano, D.Sc.

---

Prof. Lilian Markenzon, D.Sc.

---

Prof. Laura Silvia Bahiense da Silva Leite, D.Sc.

---

Prof. Christina Fraga Esteves Maciel Waga, D.Sc

---

Prof. Fábio Silva de Souza, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

SETEMBRO DE 2017

Mattos, Sergio Ricardo Pereira de

Produto Funcional de Grafos: Propriedades e Aplicações/Sergio Ricardo Pereira de Mattos. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2017.

XVII, 66 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Samuel Jurkiewicz

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Produção, 2017.

Referências Bibliográficas: p. 61 – 64.

1. Produto funcional de grafos.    2. Propriedades.
3. Grafos Harmônicos.            I. Jurkiewicz, Samuel.  
II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE,  
Programa de Engenharia de Produção. III. Título.

*A minha mãe (Cidéa), minhas  
irmãs (Danielle e Andréia), meu  
filho (Gustavo) e, em especial, a  
minha esposa Gabriela.*

# Agradecimentos

Antes de tudo, agradeço a Deus que me deu saúde, força e sustentou-me a cada dia. Sem Ele, nada disso seria possível.

Ao Prof. Abel Rodolfo Garcia Lozano pela excelente orientação recebida, por confiar em mim mais uma vez, proporcionando-me caminhos com muitas oportunidades, e acima de tudo, pela amizade construída ao longo desses anos.

Ao Prof. Samuel Jurkiewicz por aceitar me orientar e permitir que tudo isso fosse possível.

Ao Prof. Angelo Santos Siqueira, grande amigo, que sempre me apoiou e muito contribuiu na realização dessa pesquisa.

A todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da COPPE - UFRJ pelos conhecimentos tão necessários a minha formação.

Aos meus amigos do trabalho (MB), em especial ao 1º AV-HV Correia, que sempre me ajudaram na conciliação do trabalho e os estudos.

À minhas irmãs, meu filho e demais familiares que sempre torceram por mim.

A minha mãe, por todo amor e dedicação, pelo exemplo de determinação e persistência na luta pelos objetivos.

A minha esposa Gabriela, a quem dedico especialmente esse trabalho, que muito me ajudou e incentivou na sua realização, e foi companheira nos momentos difíceis, paciente e compreensiva durante minhas ausências.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

## PRODUTO FUNCIONAL DE GRAFOS: PROPRIEDADES E APLICAÇÕES

Sergio Ricardo Pereira de Mattos

Setembro/2017

Orientador: Samuel Jurkiewicz

Programa: Engenharia de Produção

Nesta tese, abordamos o produto funcional de grafos, suas propriedades e aplicações. Estudamos a associatividade e mostramos que, no conjunto dos grafos, a relação “ter a mesma sequência de graus” é uma relação de equivalência e o produto funcional é associativo nas classes de equivalência. No tocante a invariante conexidade, apresentamos condições em que o produto funcional de grafos bipartidos gera um grafo desconexo e generalizamos esse resultado para grafos  $k$ -partidos. Além disso, melhoramos o resultado apresentado por Lozano *et al.* [33], que garante a conexidade do grafo produto funcional, quando os grafos fatores são conexos. Em trabalho conjunto com Lozano e Siqueira, mostramos que o produto funcional de grafos permite construir grafos harmônicos, a partir de qualquer grafo regular. Inicialmente, provamos que para todo grafo regular  $G$  e seu complemento  $G'$ , existem aplicações de ligação tais que o grafo produto funcional é harmônico. Em seguida, mostramos que dado um grafo regular  $G$  e seu complemento  $G'$ , se  $\Delta(G')$  é par, então para qualquer grafo  $H$  tal que  $\Delta(G') = \Delta(H)$ , existem aplicações de ligação tais que o grafo produto funcional é harmônico. Por fim, provamos que para  $n$  e  $k \in \mathbb{N}$ , se  $(k + 1) | n$ , existe um grafo conexo harmônico  $k$ -regular com  $n$  vértices.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

## FUNCTIONAL PRODUCT OF GRAPHS: PROPERTIES AND APPLICATIONS

Sergio Ricardo Pereira de Mattos

September/2017

Advisor: Samuel Jurkiewicz

Department: Production Engineering

In this thesis, we approach the functional product of graphs, their properties, and applications. We study associativity, and show that, in the set of graphs, the relation “to have the same sequence of degrees” is an equivalence relation and the functional product is associative in the equivalence classes. With regard to the invariant connectivity, we present conditions in which the functional product of bipartite graphs generates a disconnected graph, and we generalize this result to  $k$ -partite graphs. Therefore, we improved the result reported by Lozano *et al.* [33], which ensures the connectivity of the functional product graph, when the factor graphs are connected. Together with Lozano and Siqueira, we show that the functional product of graphs allows to construct harmonic graphs from any regular graph. Initially, we prove that for every regular graph  $G$  and its complement  $G'$ , there are linking applications such that the functional product graph is harmonic. After that, we show that given a regular graph  $G$  and its complement  $G'$ , if  $\Delta(G')$  is even, then for any graph  $H$  such that  $\Delta(G') = \Delta(H)$ , there are linking applications such that the functional product graph is harmonic. Finally, we prove that for  $n$  and  $k \in \mathbb{N}$ , if  $(k+1)|n$ , there is a harmonic connected  $k$ -regular graph with  $n$  vertices.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>x</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>xv</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Motivações e Objetivos do Trabalho . . . . .	1
1.2 Organização do Trabalho . . . . .	5
<b>2 Definições Básicas da Teoria de Grafos</b>	<b>7</b>
2.1 Introdução . . . . .	7
2.2 Definições Básicas . . . . .	8
2.3 Coloração em Grafos . . . . .	11
2.4 Produto Cartesiano de Grafos . . . . .	15
<b>3 Produto Funcional de Grafos</b>	<b>19</b>
3.1 Introdução . . . . .	19
3.2 Produto Funcional de Grafos . . . . .	20



3.3	Propriedades do Produto Funcional de Grafos . . . . .	29
3.4	Novos Resultados . . . . .	30
3.4.1	Associatividade do Produto Funcional de Grafos . . . . .	30
3.4.2	Conexidade do Produto Funcional de Grafos . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Grafos Harmônicos</b>	<b>41</b>
4.1	Introdução . . . . .	41
4.2	Novos Resultados . . . . .	43
4.2.1	Outra Construção . . . . .	54
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>57</b>
5.1	Conclusões . . . . .	57
5.2	Continuidade do Trabalho . . . . .	59
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>61</b>
	<b>Índice Remissivo</b>	<b>65</b>

# Lista de Figuras

2.1	Coloração com folga de ordem 1, 2, 3 e $6 = \Delta(G)$ , respectivamente. . . . .	13
2.2	Grade: produto cartesiano de $P_3 \square P_4$ . . . . .	15
2.3	Prisma: produto cartesiano de $P_3 \square C_4$ . . . . .	15
2.4	Toro: produto cartesiano de $C_3 \square C_4$ . . . . .	16
3.1	Grafos $G_1$ e $G_2$ , os respectivos digrafos e as bijeções associadas $r_1$ e $r_2$ . . . . .	22
3.2	Produto funcional entre os digrafos $D(G_1)$ e $D(G_2)$ segundo $f_1$ e $f_2$ . Foram desenhados somente os arcos que partem do vértice $(u_0, v_0)$ . . . . .	23
3.3	Produto funcional entre os digrafos $D(G_1)$ e $D(G_2)$ segundo $f_1$ e $f_2$ . Foram desenhados somente os arcos que partem dos vértices $(u_0, v_0)$ e $(u_0, v_1)$ . . . . .	23
3.4	Produto funcional entre os digrafos $D(G_1)$ e $D(G_2)$ segundo $f_1$ e $f_2$ . Foram desenhados somente os arcos que partem dos vértices $(u_0, v_0)$ , $(u_0, v_1)$ e $(u_1, v_2)$ . . . . .	24
3.5	Produto funcional entre os digrafos $D(G_1)$ e $D(G_2)$ segundo $f_1$ e $f_2$ . . . . .	24
3.6	Produto funcional entre os grafos $G_1$ e $G_2$ segundo $f_1$ e $f_2$ . . . . .	25
3.7	Grafos $G_1$ e $G_2$ , os respectivos digrafos e as bijeções associadas $I_d$ e $I_d$ . . . . .	25

3.8	Produto funcional (ou cartesiano) entre os grafos $G_1$ e $G_2$ segundo $f_1$ e $f_2$ . . . . .	26
3.9	Três bijeções distintas de $F(V_1) = r_1, r_2$ e $r_3$ . . . . .	26
3.10	Duas bijeções distintas de $F(V_2) = h_1$ e $h_2$ . . . . .	26
3.11	Grafos $G_1$ e $G_2$ , seus respectivos digrafos e as bijeções associadas. . .	27
3.12	Produto funcional entre os digrafos $D(G_1)$ e $D(G_2)$ , segundo $f_1$ e $f_2$ . . .	27
3.13	Produto funcional entre os grafos $G_1$ e $G_2$ , segundo $f_1$ e $f_2$ . . . . .	27
3.14	Grafos $P_2$ e $C_5$ com suas respectivas bijeções associadas $f$ e $g$ . . . . .	28
3.15	Grafo Peterson gerado pelo produto funcional de $P_2$ e $C_5$ . . . . .	28
3.16	Grafos bipartidos $G_1$ e $G_2$ com suas respectivas bijeções associadas $g$ e $h$ . . . . .	33
3.17	Grafo desconexo $G^*(V^*, E^*)$ resultante do produto funcional entre os grafos $G_1$ e $G_2$ segundo $f_1$ e $f_2$ . . . . .	33
3.18	Grafos 3-partidos $G_1$ e $G_2$ com suas respectivas bijeções associadas $g$ e $h$ . . . . .	35
3.19	Grafo desconexo $G^*(V^*, E^*)$ resultante do produto funcional entre os grafos $G_1$ e $G_2$ segundo $f_1$ e $f_2$ . . . . .	36
3.20	Grafo $G_1(V_1, E_1)$ desconexo e a bijeção associada $r_1$ . . . . .	36
3.21	Grafo $G_2(V_2, E_2)$ conexo e a bijeção associada $r_2$ . . . . .	36
3.22	Produto Funcional de entre os grafos $G_1$ e $G_2$ segundo $f_1$ e $f_2$ . . . . .	37
3.23	Produto Funcional de entre os grafos $G_1$ e $G_2$ segundo $f_1$ e $f_2$ . . . . .	37
3.24	Produto Funcional de entre os grafos $G_1$ e $G_2$ segundo $f_1$ e $f_2$ . . . . .	38

3.25	Grafo conexo resultante do produto funcional entre um grafo desconexo e um grafo conexo. . . . .	38
3.26	Componente conexa do centroide $y$ e um vértice arbitrário de $G^*$ . . .	40
3.27	Caminho $xu_{i_0}x_1u_{i_1}x_2u_{i_2}\dots x_pu_{i_p}$ que une o vértice $xu_{i_0}$ com a componente conexa do centroide $y$ . . . . .	40
4.1	Toro: produto cartesiano entre um $C_3$ e um $C_5$ não é harmônico. . . .	42
4.2	Grafo $G$ (3-regular) e seu complemento $G'$ . . . . .	44
4.3	Ciclos obtidos da decomposição em 2-fatores do grafo complementar $G'$ com uma orientação arbitrária. . . . .	44
4.4	Bijeções associadas aos ciclos da figura 4.3. . . . .	44
4.5	Início do processo de construção do grafo harmônico. A aplicação $f_1$ associa a identidade a todos os pares de arcos associados às arestas de $G$ . . . . .	45
4.6	A aplicação $f_2$ associa as bijeções da figura 4.4 a todo arco do ciclo, no ciclo em sentido inverso associamos a bijeção inversa. Foram desenhadas somente as ligações dos vértices $(v_0, v_0)$ , $(v_1, v_0)$ e $(v_7, v_0)$ . . . . .	46
4.7	Grafo $G$ (4-regular), seu complemento $G'$ e o grafo $H$ . . . . .	47
4.8	Ciclos obtidos pela decomposição em 2-fatores dos grafos $G'$ e $H$ com orientação arbitrária. . . . .	47
4.9	Bijeção associada ao ciclo da figura 4.8. . . . .	48
4.10	Grafo harmônico (6-regular) colorido com folga 6 com 7 cores. . . . .	48
4.11	Grafo $G$ (4-regular) e seu complemento $G'$ . . . . .	48
4.12	Ciclo obtido pela decomposição em 2-fator de $G'$ e sua bijeção associada. . . . .	49

4.13	Grafo harmônico (6-regular) colorido com folga 6 com 7 cores. . . . .	49
4.14	Grafo $G$ (3-regular), seu complemento $G'$ e o grafo $H$ . . . . .	50
4.15	Ciclos obtidos pela decomposição em 2-fatores dos grafos $G'$ e $H$ com orientação arbitrária. . . . .	50
4.16	Bijeção associada ao ciclo da figura 4.15. . . . .	50
4.17	Grafo harmônico (5-regular) colorido com folga 5 com 6 cores. . . . .	51
4.18	Grafo $G$ e seu complemento $G'$ . . . . .	51
4.19	Ciclo obtido pela decomposição em 2-fator de $G'$ e sua bijeção associada.	51
4.20	Grafo harmônico (4-regular) colorido com folga 4 com 5 cores. . . . .	52
4.21	Coloração total equilibrada de um grafo harmônico (4-regular) com 5 cores. . . . .	52
4.22	Grafo $G$ , seu complemento $G'$ e o grafo $H$ . . . . .	53
4.23	Ciclos obtidos pela decomposição em 2-fatores dos grafos $G'$ e $H$ com orientação arbitrária. . . . .	53
4.24	Bijeção associada ao ciclo da figura 4.23. . . . .	53
4.25	Grafo harmônico (4-regular) colorido com folga 4 com 5 cores. . . . .	53
4.26	Coloração total equilibrada de um grafo harmônico (4-regular) com 5 cores. . . . .	54
4.27	Conjunto de Vértices $V = \{v_{10}, \dots, v_{14}, v_{20}, \dots, v_{24}, \dots, v_{t0}, \dots, v_{34}\}$ . . .	55
4.28	Conjunto de arestas de $G(V, E)$ , de acordo com a primeira condição. . .	55
4.29	Conjunto de arestas de $G(V, E)$ , de acordo com a primeira e a segunda condição. . . . .	55

4.30 Grafo harmônico (4-regular) colorido com folga 4 com 5 cores. . . . .	56
4.31 Coloração total equilibrada do Grafo harmônico resultante. . . . .	56

# Lista de Símbolos

$(G_1, f_1) \times (G_2, f_2)$	Produto funcional de $G_1$ e $G_2$ segundo as aplicações $f_1$ e $f_2$ , p. 21
$(d_1, d_2, \dots, d_n)$	Denota a sequência de graus de um grafo, p. 8
$(u, v)$	Denota o arco $uv$ , p. 20
$A \setminus B$	Elementos do conjunto $A$ menos os elementos do conjunto $B$ , p. 10
$C_n$	Ciclo com $n$ vértices, p. 9
$D(G)$	Digrafo obtido pela substituição de cada aresta $uv$ do grafo $G$ pelos arcos $(u, v)$ e $(v, u)$ , mantendo o mesmo conjunto de vértices, p. 20
$Diam(G)$	A maior distância entre todos os pares de vértices de um grafo $G$ , p. 9
$E(G)$	Conjunto de arestas do grafo $G$ , p. 8
$F(X)$	Denota o conjunto de todas as bijeções $f : X \rightarrow X$ , p. 20
$G \square H$	Produto cartesiano de $G$ e $H$ , p. 2
$G(\vec{G})$	Grafo obtido pela substituição de cada par de arcos $(u, v)$ e $(v, u)$ do digrafo $\vec{G}$ pela aresta $uv$ , mantendo o mesmo conjunto de vértices, p. 20
$G_1 \sim G_2$	Denota que existe uma relação entre os grafos $G_1$ e $G_2$ , p. 30

$K_n$	Grafo completo com $n$ vértices, p. 8
$K_{m,n}$	Grafo bipartido completo, p. 10
$N(v)$	Conjunto dos vértices adjacentes ao vértice $v$ , p. 8
$O(n^4)$	A notação O-grande é usada para classificar algoritmos pela forma como eles respondem a mudanças no tamanho da entrada, p. 16
$P_n$	Caminho com $n$ vértices, p. 9
$V(G)$	Conjunto de vértices do grafo $G$ , p. 8
$\Delta(G)$ ou $\Delta$	Grau máximo do grafo $G$ , p. 3
$\beta(G)$	Número de cobertura do grafo $G$ , p. 10
$\chi''(G)$	Número cromático total do grafo $G$ , p. 12
$\chi'(G)$	Índice cromático do grafo $G$ , p. 11
$\chi(G)$	Número cromático do grafo $G$ , p. 11
$\chi_f^k(G)$	Número cromático com folga de ordem $k$ do grafo $G$ , p. 13
$\chi_e''(G)$	Número cromático total equilibrado do grafo $G$ , p. 12
$\delta(G)$	Grau mínimo do grafo $G$ , p. 8
$\gamma(G)$	Número de dominância do grafo $G$ , p. 10
$\kappa'(G)$	Conectividade de arestas do grafo $G$ , p. 11
$\kappa(G)$	Conectividade de vértices do grafo $G$ , p. 11
$\mathcal{D}$	Conjunto dos digrafos que satisfazem as seguintes condições: $(u, v)$ é o arco do digrafo se, e somente se, $(v, u)$ também é um arco do digrafo e não existem dois arcos iguais, p. 20
$\overline{G}$	Denota a classe de equivalência de um grafo $G$ pela relação “ter a mesma sequência de graus”, p. 31



$\vec{G}$	Digrafo ou Grafo orientado, p. 20
$ c(N(v)) $	Cardinalidade do conjunto de cores da vizinhança de $v$ , p. 13
$\{u, v\}$	Denota a aresta formada pelos vértices $u$ e $v$ , p. 8
$d(v)$	Denota o grau do vértice $v$ , p. 8
$f : E \rightarrow F(V)$	Denota uma aplicação do conjunto $E$ no conjunto de todas as bijeções $f : V \rightarrow V$ , p. 21
$n(G)$	Número de vértices do grafo $G$ , p. 8

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Motivações e Objetivos do Trabalho

Diversos campos da Matemática empregam, de alguma forma, a noção de produto, conceito que permite a combinação ou a decomposição de suas estruturas elementares. Na teoria de grafos existem vários tipos de produtos, e entre eles destacamos o produto cartesiano, o produto forte, o produto direto e o produto lexicográfico, cada um com sua própria interpretação teórica. Além do mais, os grafos produtos possuem inúmeras aplicações em diversas áreas, como Matemática, Ciência da Computação, Química e Biologia [24].

O produto cartesiano de grafos foi definido, pela primeira vez, por SABIDUSSI [38] e VIZING [43] na década de 1960 e, desde então, muitos trabalhos foram realizados sobre os mais variados tópicos. Para IMRICH *et al.* [24], o produto cartesiano apresenta propriedades algébricas e estruturais singulares. SABIDUSSI [38] e VIZING [43], de forma independente, mostraram que o produto cartesiano é comutativo, associativo e tem a unidade, que consiste em um único vértice sem arestas (grafo trivial). Provaram ainda que em relação ao produto cartesiano, todo grafo conexo finito possui uma decomposição em fatores primos que é única a não ser pela permutação dos fatores [38, 43].

Posteriormente, vários estudos foram realizados sobre como o produto cartesiano se comporta em relação aos principais invariantes de grafos [2, 5, 8, 12, 24, 27, 36, 37, 42, 49]. As noções de coloração total e de número cromático total foram introduzidas, independentemente, por BEHZAD [4] e VIZING [45, 46] por volta de 1965. A coloração total consiste em associar cores aos vértices e as arestas de um grafo, de maneira que nenhum par de elementos incidentes ou adjacentes tenha associada a mesma cor. O número mínimo de cores necessárias para uma coloração total é o *número cromático total* de  $G$ . Neste mesmo ano, BEHZAD [4] e VIZING [45, 46] conjecturaram que dado um grafo simples  $G$  e  $\Delta(G)$  seu grau máximo, então  $\Delta(G) + 2$  cores são suficientes para conseguir uma coloração total do grafo. Até os dias de hoje, essa conjectura não foi comprovada nem refutada para grafos em geral.

A coloração total do produto cartesiano de grafos foi investigada por diferentes autores [26, 34, 39, 40, 51, 52]. KEMNITZ e MARANGIO [26] pesquisaram o *número cromático total* do produto cartesiano de grafos completos ( $K_m \square K_n$ ), de ciclos ( $C_m \square C_n$ ), de grafos completos e grafos bipartidos ( $K_m \square H$ , no qual  $H$  é um grafo bipartido), e de ciclos e grafos bipartidos ( $C_m \square H$ ). Em [39, 40], foram determinados o *número total cromático* do produto cartesiano para alguns casos específicos, de dois caminhos ( $P_m \square P_n$ ), de um caminho e um ciclo ( $P_m \square C_n$ ), de um caminho e uma estrela ( $P_m \square W$ , no qual  $W$  é um grafo estrela) e de um ciclo e uma estrela ( $C_m \square W$ ). Alguns resultados parciais sobre a coloração total do produto cartesiano entre vários caminhos e diversos ciclos são encontrados em [51]. Em [52], ZMAZEK e ZEROVNIK generalizaram o resultado encontrado em [34], determinando um limite superior para o *número cromático total* de um grafo.

Recentemente, LOZANO *et al.* [32] apresentaram algumas relações entre coloração total equilibrada e coloração com folga em famílias de grafos regulares. O conceito de coloração total equilibrada foi introduzido em [17], enquanto o de coloração com folga foi apresentado, pela primeira vez, por LOZANO *et al.* em [30].

Em 2011, FRIEDMANN *et al.* [16] mostraram que se um grafo  $G(V, E)$  possui uma coloração de vértices com folga de ordem  $\Delta$  com  $k$  cores, então essa coloração

pode ser estendida para uma coloração total de  $G$  com no máximo  $k + 1$  cores. Posteriormente, LOZANO, SIQUEIRA e JURKIEWICZ [41] provaram que se um grafo regular admite uma coloração com folga de ordem  $\Delta$  com  $\Delta + 1$  cores, então a coloração de vértices pode ser completada para uma coloração total equilibrada com no máximo  $\Delta + 2$  cores. Esse resultado serviu de motivação para que os autores investigassem a possibilidade de se construir famílias de grafos com as características mencionadas.

Nessa tese, o assunto central abordado foi o produto funcional de grafos, uma generalização do produto cartesiano de grafos. O conceito de produto funcional foi introduzido, em 2011, por LOZANO, SIQUEIRA e JURKIEWICZ [41] para auxiliar na construção de uma família de grafos regulares, que podem ser coloridos com folga  $\Delta$  com  $\Delta + 1$  cores, denominados *grafos harmônicos*. Em seguida, os autores provaram que esta família pode ser estendida infinitamente preservando a regularidade e a coloração com folga  $\Delta$  com  $\Delta + 1$  cores [33].

O produto funcional, assim como outras operações em grafos, gera um novo grafo a partir de seus fatores. Por conseguinte, pode ser utilizado como ferramenta para construção de novas estruturas. Sob essa perspectiva, surgem, imediatamente, dois questionamentos sobre o novo produto:

1. Quais as propriedades algébricas do produto funcional de grafos?
2. Como o produto funcional de grafos se comporta em relação aos principais invariantes de grafos, isto é, qual a relação entre um determinado invariante no grafo produto com esse mesmo invariante nos grafos fatores?

Quanto ao primeiro questionamento, LOZANO *et al.* [33] mostraram que o produto funcional é comutativo e possui a unidade (elemento neutro), que consiste em um único vértice sem arestas (grafo trivial). Quanto ao segundo, LOZANO *et al.* [33] provaram que o grau máximo do grafo produto é a soma dos graus máximos dos grafos fatores e apresentaram uma condição que garante a conexidade do produto funcional, quando os grafos fatores são conexos. Nesse sentido, o produto funcional de grafos, além de ser uma generalização do produto cartesiano, possui algumas

propriedades em comum, como a comutatividade, existência da unidade (elemento neutro) e o fato de que o grau máximo do grafo produto é a soma dos graus máximos dos grafos fatores.

Conduzidos pelos questionamentos acima, investigamos a associatividade do produto funcional de grafos e o seu comportamento em relação a invariante conexidade. Em geral, o produto funcional não é associativo, por conseguinte estudamos a associatividade nas classes de equivalência. Mostramos que, considerando o conjunto dos grafos, a relação “ter a mesma sequência de graus” é uma relação de equivalência e o produto funcional é associativo nas classes de equivalência.

Em relação a invariante conexidade, o produto funcional de grafos conexos não é necessariamente conexo, pois é possível obter um grafo desconexo a partir do produto funcional entre dois grafos conexos. Nesse sentido, apresentamos condições em que o produto funcional de grafos bipartidos gera um grafo desconexo e, em seguida, generalizamos esse resultado para grafos  $k$ -partidos. Mostramos que é possível obter grafos conexos como resultado do produto funcional, mesmo quando um dos grafos fatores é desconexo. Ademais, melhoramos o resultado apresentado em [33], que garante a conexidade do grafo produto funcional, quando os grafos fatores são conexos.

Por outro lado, o produto funcional mostra-se bastante útil na construção dos *grafos harmônicos* e vem apresentando resultados significativos no estudo de suas aplicações com destaque para os problemas de coloração total equilibrada [32, 33]. Em [33], LOZANO *et al.* utilizam o conceito do produto funcional de grafos e de grafos  $k$ -suporte, um tipo de grafo regular que tem como objetivo principal servir como gerador dos grafos harmônicos, para auxiliar na construção da família dos grafos harmônicos. Em [32], LOZANO *et al.* provaram que o produto cartesiano de um ciclo por seu complemento é um grafo harmônico e mostraram que os grafos harmônicos, além de satisfazerem a conjectura de Vizing-Behzad, satisfazem uma conjectura mais restritiva, a conjectura de Wang [47], que diz que todo grafo possui uma coloração total e equilibrada com no máximo  $\Delta + 2$  cores.

Em trabalho conjunto com Lozano e Siqueira, mostramos que o produto funcional de grafos permite construir grafos harmônicos a partir de qualquer grafo regular. Primeiramente, provamos que para todo grafo regular  $G$  e seu complemento  $G'$ , existem aplicações de ligação tais que o grafo produto funcional é harmônico. Em seguida, mostramos que dado um grafo regular  $G$  e seu complemento  $G'$ , se  $\Delta(G')$  é par, então para qualquer grafo  $H$  tal que  $\Delta(G') = \Delta(H)$ , existem aplicações de ligação tais que o grafo produto funcional é harmônico. Vale destacar que esses resultados generalizam os apresentados em [33], pois os grafos  $k$ -suporte são um tipo de grafo regular.

Por fim, mostramos que o produto funcional de grafos não é a única forma de gerar grafos harmônicos. Provamos que para  $n$  e  $k \in \mathbb{N}$ , se  $(k+1)|n$ , existe um grafo conexo harmônico  $k$ -regular com  $n$  vértices. Esse resultado mostra que existe uma relação entre a regularidade e o número de vértices do grafo que garante a existência de grafos harmônicos.

## 1.2 Organização do Trabalho

Esta tese está organizada em cinco capítulos. O capítulo 2 contém definições básicas e terminologias da teoria de grafos essenciais para o entendimento do texto, bem como alguns resultados disponíveis na literatura que estão relacionados ao tema desta tese. Os resultados teóricos são apresentados nos capítulos 3 e 4.

No Capítulo 3, apresentamos resultados relacionados as propriedades do produto funcional de grafos. Investigamos a associatividade e a invariante conexidade, mostramos que nas classes de equivalência o produto funcional é associativo, apresentamos condições em que o produto funcional de grafos bipartidos gera um grafo desconexo, estendemos esse resultado para grafos  $k$ -partidos e melhoramos o resultado apresentado em [33], que garante a conexidade do grafo produto funcional quando os grafos fatores são conexos,

O Capítulo 4 aborda a construção dos grafos harmônicos. Nele, provamos

alguns resultados que permitem gerar uma família de grafos regulares, que podem ser coloridos com folga  $\Delta$  com  $\Delta + 1$  cores, a partir de qualquer grafo regular. Os resultados desse capítulo nasceram da interação com os professores Dr. Abel Rodolfo Lozano Garcia e o Dr. Angelo Santos Siqueira, pesquisadores da Escola de Ciências e Matemática da UNIGRANRIO. O foco do nosso trabalho é investigar as propriedades e as aplicações do produto funcional de grafos. Os capítulos 3 e 4 exibem os resultados formalizados até o momento.

No Capítulo 5, apresentamos as conclusões seguidas de algumas sugestões para trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## Definições Básicas da Teoria de Grafos

### 2.1 Introdução

Este capítulo, que foi dividido em quatro seções, tem como objetivo descrever conceitos básicos da teoria de grafos, bem como apresentar de forma preliminar alguns resultados importantes para melhor compreensão desse trabalho. Na seção 2.2, apresentamos definições e terminologias essenciais para o desenvolvimento desta tese, baseadas em referências clássicas da teoria [6, 11, 35]. Na seção 2.3, apresentamos as definições de coloração de vértices, arestas, coloração total, total equilibrada e a ideia mais recente de coloração com folga. Esses conceitos, assim como propriedades e resultados referentes a essas colorações, podem ser encontrados com detalhes em [29, 30, 50]. Ainda nesta seção, mostramos alguns resultados referentes à coloração com folga de ordem  $\Delta$ , que garantem uma extensão natural para coloração total (grafo qualquer) e total equilibrada (grafos regulares) [16, 41]. Na seção 2.4, discutimos os principais resultados relacionados ao produto cartesiano de grafos, que também podem ser encontrados em [3, 24–26, 36–38, 42, 43].



## 2.2 Definições Básicas

Um grafo  $G$  é um tripla ordenada  $(V(G), E(G), \Psi_G)$  formada por um conjunto  $V(G)$  de *vértices*, um conjunto  $E(G)$  de *arestas* e uma *função de incidência*  $\Psi_G$  (função que associa um par não ordenado de vértices a cada aresta de  $G$ ). Deste ponto em diante, a função  $\Psi_G$  será omitida e o grafo  $G$  será denotado por  $G(V(G), E(G))$  ou  $G(V, E)$  ou simplesmente por  $G$ , quando não houver necessidade de destacar o conjunto de vértices ou arestas.

Dados  $u$  e  $v$  vértices quaisquer de  $G(V, E)$  se existir a aresta  $e = uv$ , escrevemos  $uv$  ou  $\{u, v\}$ . Se  $\{u, v\} \in E(G)$ , então dizemos que  $u$  e  $v$  são *adjacentes* ou que  $u$  é vizinho de  $v$ . Duas arestas são adjacentes se elas possuem um vértice em comum. A *ordem* de um grafo é dada pelo seu número de vértices e é denotada por  $n(G)$ . O tamanho de um grafo  $G$  corresponde ao seu número de arestas. Uma aresta com ambas as extremidades incidentes a um mesmo vértice é chamada de *laço*. Duas arestas associadas ao mesmo par de vértices são ditas *paralelas*. Um grafo é *simples* quando a função de incidência  $\Psi_G$  é injetiva e associa a cada aresta de  $G$  um par não ordenado de vértices distintos de  $G$ , isto é, não possui arestas paralelas nem laços. Um grafo  $G$  é *finito*, se seus conjuntos de vértices e arestas são ambos finitos. Neste trabalho, consideramos apenas grafos simples e finitos.

Para cada vértice  $v$ , o número de arestas incidentes em  $v$  é dito *grau do vértice* e é representado por  $d(v)$ . Um vértice de grau um é chamado *folha*. O conjunto de vizinhos de um vértice  $v$  de  $G$  é denotado por  $N_G(v)$  ou simplesmente  $N(v)$ . O número  $\delta(G) = \min\{d_G(v) : v \in V\}$  é o grau mínimo de  $G$  e o número  $\Delta(G) = \max\{d_G(v) : v \in V\}$  é o seu grau máximo. A sequência de graus de  $G$  é uma sequência não crescente  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$  formada pelos valores que representam os graus de cada vértice. Se todos os vértices de um grafo  $G$  tem o mesmo grau  $k$ , então  $G$  é *k-regular* ou simplesmente *regular*. Se um grafo  $G$  com  $n$  vértices é  $(n-1)$ -regular, então ele é denominado *grafo completo de ordem n* e denotado por  $K_n$ .

Dados dois grafos  $G(V, E)$  e  $H(V', E')$ , dizemos que  $H$  é um *subgrafo* de  $G$ ,

se  $V(H) \subseteq V(G)$  e  $E(H) \subseteq E(G)$ . Um subgrafo completo de  $G(V, E)$  é chamado de *clique*. Um subgrafo  $H(V', E')$  de  $G(V, E)$  é dito *subgrafo induzido* de  $G$ , se  $uv \in E$  implicar em  $uv \in E'$ . Um subgrafo  $H(V', E')$  de  $G(V, E)$  é dito *subgrafo gerador* de  $G$  se, e somente se,  $V(G) = V(H)$ . Um subgrafo gerador *k-regular* de  $G$  é chamado *k-fator*. Dizemos que um grafo  $G$  é *k-fatorizável* se ele pode ser decomposto em grafos *k-fator*.

O complemento de um grafo  $G$  é o grafo denotado por  $G'$ , obtido pela substituição de todas as arestas de  $G$  por todas as arestas possíveis que não estão em  $G$ , ou seja, é o grafo definido por  $V(G') = V(G)$  e  $E(G') = \{\{u, v\} \mid u, v \in V(G), u \neq v \text{ e } uv \notin E(G)\}$ .

Um *caminho* em um grafo  $G$  é uma sequência finita e não nula  $S = v_0e_1v_1e_2 \dots e_kv_k$  cujos os termos são alternativamente vértices e arestas, tais que os extremos de  $e_i$  são  $v_{i-1}$  e  $v_i$  com  $i = 1 \dots k$ , e nenhum elemento de  $S$  se repete. Neste caso, dizemos que o caminho  $S$  liga ou conecta  $v_0$  e  $v_k$ . Se uma sequência satisfaz as condições acima e, além disso,  $v_0 = v_k$ , então a sequência é denominada *ciclo*. O número de vértices de um caminho ou ciclo é o seu *tamanho*. O caminho de tamanho  $k$  é denotado por  $P_k$ . O ciclo de tamanho  $k$  é denotado por  $C_k$ .

A *distância*  $dist_G(x, y)$  em  $G$  de dois vértices  $x, y$  é o tamanho do menor caminho entre  $x$  e  $y$  em  $G$ ; se tal caminho não existe, fazemos  $dist_G(x, y) = \infty$ . Um grafo  $G(V, E)$  é dito *conexo* se para todo par de vértices  $x, y \in V$ , existe um caminho que liga  $x$  e  $y$ . Caso contrário, dizemos que  $G$  é *desconexo*. Se para cada par de vértices  $x, y \in V$ , existem pelo menos  $k$  caminhos disjuntos ligando  $x$  com  $y$ , então  $G(V, E)$  é dito *k-conexo*. Uma *componente conexa* de um grafo é o subgrafo induzido por qualquer subconjunto do seu conjunto de vértices. A maior distância entre todos os pares de vértices de um grafo  $G(V, E)$  é denominado *diâmetro* e denotado por  $Diam(G)$ . O tamanho do menor ciclo em um grafo  $G$  é chamado *cintura* de  $G$ . Um grafo sem ciclo tem cintura infinita. Uma *árvore* é um grafo conexo sem ciclos. Um grafo *centopeia* é uma árvore, cuja remoção de todos os vértices folha resulta em um grafo caminho.

Um *emparelhamento* de um grafo  $G(V, E)$  é um subconjunto de arestas  $M \subset$

$E$ , tal que nenhum vértice  $v \in V$  seja incidente a mais de uma aresta de  $M$ . Um vértice  $v \in V$  se diz *M-saturado* se alguma aresta de  $M$  é incidente a  $v$ , caso contrário  $v$  é dito *M-insaturado*. Um emparelhamento que satura todos os vértices de  $G$  é chamado de *emparelhamento perfeito*. Um subconjunto  $S \subset V$  em um grafo  $G(V, E)$  é dito *independente* se, para todo par de vértices  $u, v \in S$  tem-se  $\{u, v\} \notin E$  ou, equivalentemente,  $S \cap N(S) = \emptyset$ . Um conjunto  $S$  de  $G(V, E)$  é *maximal* se todo vértice  $u$  em  $V(G) \setminus S$  tem um vizinho em  $S$ . Um conjunto independente  $S$  é *máximo* se  $G$  não tem conjunto independente  $W$  tal que a cardinalidade de  $|W| > |S|$ . O tamanho do maior conjunto independente é chamado *número de independência* e denotado por  $\alpha(G)$ .

Um grafo  $G(V, E)$  é chamado *k-partido* se  $V(G)$  admite uma partição em  $k$  subconjuntos independentes disjuntos,  $V(G) = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_k$ , para algum inteiro  $k \leq |V|$ . Um grafo 2-partido é chamado de *bipartido*. Um grafo *k-partido*, tal que  $N(v) = V \setminus P_i$  para cada vértice  $v \in P_i$  com  $1 \leq i \leq k$ , é chamado *k-partido completo*. Um grafo *bipartido completo* com partições  $m$  e  $n$  será aqui denotado por  $K_{m,n}$ . Um grafo bipartido completo do tipo  $K_{1,n}$ , ou seja, uma árvore com um nó interno e  $n$  folhas é chamado de *estrela*.

Uma *cobertura* de um grafo  $G(V, E)$  é um subconjunto de vértices  $K \subset V$  tal que cada aresta de  $G$  é incidente em pelo menos um vértice de  $K$ . Uma cobertura  $K$  é uma *cobertura mínima*, se  $G$  não possui cobertura  $C$  com  $|C| < |K|$ . O número de vértices de uma cobertura mínima de  $G(V, E)$  é dito *número de cobertura* e denotado por  $\beta(G)$ . Vale destacar que se  $M$  é um emparelhamento de um grafo  $G$  e  $K$  é uma cobertura de  $G$ , então pelo menos uma extremidade de cada aresta de  $M$  pertence a  $K$ . Uma vez que todas as extremidades das arestas de  $M$  são distintas, tem-se  $|M| \leq |K|$ . Além disso, se a igualdade for observada, então  $M$  é um emparelhamento máximo e  $K$  uma cobertura mínima.

Um subconjunto  $D$  de vértices de um grafo  $G(V, E)$  é *dominante*, se  $N_G(D) \cup D = V(G)$ . O *número de dominância* de  $G(V, E)$  é a cardinalidade do menor conjunto dominante e é denotado por  $\gamma(G)$ . Observe que se o menor conjunto dominante de  $G$  for independente, então ele também é um conjunto independente

maximal de cardinalidade mínima.

A *conectividade*  $\kappa(G)$  de um grafo  $G(V, E)$  é o menor número de vértices cuja remoção o torna desconexo ou o reduz a um único vértice. Grafos completos possuem por definição  $\kappa(G) = n - 1$ . A *conectividade de arestas*  $\kappa'(G)$  de um grafo conexo  $G(V, E)$  é o número mínimo de arestas, cuja remoção resulta em um grafo desconexo.

Dizemos que dois grafos  $G(V, E)$  e  $H(V', E')$  são *isomorfos* e escrevemos  $G \cong H$  se há uma bijeção  $\phi : V \rightarrow V'$  com  $xy \in E \iff \phi(x)\phi(y) \in E'$  para quaisquer  $x, y \in V$ . Este mapeamento é chamado *isomorfismo*. Uma propriedade preservada por isomorfismo de grafos é chamada de *invariante* do grafo. O *automorfismo* de um grafo  $G(V, E)$  é um isomorfismo de  $G$  sobre ele mesmo.

## 2.3 Coloração em Grafos

A *coloração* é um problema tradicional em teoria dos grafos. Dado um grafo  $G(V, E)$ , uma *coloração de vértices* é uma aplicação do conjunto de vértices  $V$  em um conjunto de cores  $C = \{c_1, c_2, c_3, \dots, c_k\}$  com  $k \in \mathbb{N}$ , tal que dois vértices adjacentes possuem sempre cores distintas. Uma coloração de vértices com  $k$  cores é chamada de *k-coloração de vértices*. O menor número de cores para o qual  $G$  admite uma coloração de vértices é chamado de *número cromático* e denotado por  $\chi(G)$  ou simplesmente  $\chi$  se não existir ambiguidade. Uma *coloração de arestas* de um grafo  $G(V, E)$  é uma aplicação do conjunto de arestas  $E$  em um conjunto de cores  $C = \{c_1, c_2, c_3, \dots, c_k\}$  com  $k \in \mathbb{N}$  tal que nenhum par de arestas adjacentes tem associada a mesma cor. Uma coloração de arestas com  $k$  cores é chamada de *k-coloração de arestas*. Define-se o menor número de cores para o qual  $G$  admite uma coloração de arestas por *índice cromático*  $\chi'(G)$  ou simplesmente  $\chi'$  se não existir ambiguidade.

Independentemente, VIZING [43] e GUPTA [20] provaram que para qualquer grafo simples  $G$ ,  $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ . Quando  $\chi' = \Delta(G)$ ,  $G$  é chamado de *classe*

1, caso contrário *classe 2*. Em 1981, HOLYER [23] provou que determinar se um grafo simples é classe 1 ou classe 2 é um problema de complexidade computacional *NP-completo* [18].

Dado um grafo  $G(V, E)$ , uma *coloração total* de  $G$  é uma aplicação do conjunto  $V \cup E$  em um conjunto de cores  $C = \{c_1, c_2, c_3, \dots, c_k\}$  com  $k \in \mathbb{N}$ , tal que nenhum par de elementos incidentes ou adjacentes tem associada a mesma cor. Uma coloração com  $k$  cores é chamada de *k-coloração total*. O menor número de cores que permite construir uma coloração total de  $G$  é chamado *número cromático total* e denotado por  $\chi''(G)$  ou simplesmente  $\chi''$  se não existir ambiguidade. As noções de coloração total e de número cromático total  $\chi''(G)$  de um grafo foram introduzidas por BEHZAD [4] e VIZING [45, 46] em trabalhos independentes por volta de 1965. Neste mesmo ano, eles conjecturaram que  $\chi''(G) \leq \Delta + 2$ . Até hoje, essa conjectura não foi comprovada para grafos em geral. Entretanto, a resposta positiva foi verificada para várias classes de grafos [9, 10, 15, 21].

Uma coloração total de  $G(V, E)$  com as cores de  $C = \{c_1, c_2, c_3, \dots, c_k\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  é *equilibrada* se, para todo par de cores  $c_i$  e  $c_j$ , tal que  $i \neq j$ , tem-se  $|a(c_i) - a(c_j)| \leq 1$  com  $i, j = 1, \dots, k$  e  $a(c_i)$  e  $a(c_j)$  representam, respectivamente, os números de aparições das cores  $c_i$  e  $c_j$  na coloração. O menor número de cores que permite construir uma coloração total equilibrada de  $G$  é chamado *número cromático total equilibrado* e denotado por  $\chi_e''(G)$  ou simplesmente  $\chi_e''$  se não existir ambiguidade.

Em 2009, LOZANO *et al.* [30] introduziram o conceito de *coloração de vértices com folga de ordem k*, no qual  $k$  é um inteiro positivo. Seja um grafo  $G(V, E)$  e um conjunto de cores  $C = \{c_1, c_2, c_3, \dots, c_p\}$  com  $p \in \mathbb{N}$ , seja ainda  $|c(N(v))|$  a cardinalidade do conjunto de cores da vizinhança de  $v$ , uma aplicação  $f : V \rightarrow C$  é uma *coloração de vértices com folga de ordem k* de  $G$  se para todo  $v \in V$ :

- se  $d(v) < k$ , então  $|c(N(v))| = d(v)$ ;
- se  $d(v) \geq k$ , então  $|c(N(v))| \geq k$ .

Dizemos que  $G(V, E)$  é  $t$ -colorível com folga de ordem  $k$  se  $|c(V)| = t \leq |C|$ . O menor valor de  $t$  para o qual existe uma coloração com folga de ordem  $k$  é chamado número cromático com folga de ordem  $k$  de  $G$  e é denotado por  $\chi_f^k(G)$ .

Observe que na coloração de vértices com folga de ordem  $k$ , os vértices com grau menor que a folga exigida devem ter todos os vizinhos coloridos com cores distintas; já os de grau igual ou maior do que  $k$  devem utilizar pelo menos  $k$  cores na coloração de sua vizinhança. Para  $k = 1$ , temos a coloração usual de vértices e  $\Delta(G)$  é a cota superior para ordem da folga.

A figura 2.1 apresenta exemplos de colorações com folga de ordem 1 e  $\chi_f^1(G) = \chi(G) = 2$ , com folga de ordem 2 e  $\chi_f^2(G) = 3$ , com folga de ordem 3 e  $\chi_f^3(G) = 4$  e coloração com folga de ordem 6 e  $\chi_f^6(G) = 7$ .

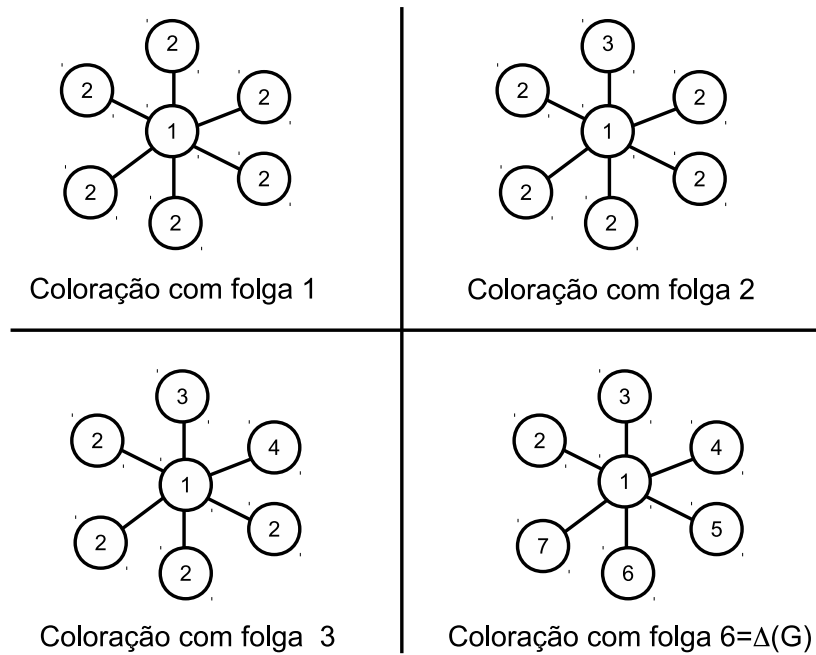


Figura 2.1: Coloração com folga de ordem 1, 2, 3 e  $6 = \Delta(G)$ , respectivamente.

Uma coloração 2-distante de um grafo  $G(V, E)$  é uma coloração  $c : V \rightarrow C$  tal que os vértices com distância 1 ou 2 têm cores distintas [7]. Na sequência, apresentamos alguns resultados relacionados a coloração de vértices com folga de ordem  $k$ .

No Teorema 2.1, LOZANO *et al.* [30] mostraram que as colorações com folga  $\Delta$  e 2-distante são equivalentes, ou seja, provaram que a coloração 2-distante é um caso particular da coloração com folga.

**Teorema 2.1.** [30] *Seja o grafo  $G(V, E)$ , uma coloração  $c : V \rightarrow C$  é uma coloração com folga de ordem  $\Delta$  se, e somente se, é uma coloração 2-distante.*

No Teorema 2.2, FRIEDMANN *et al.* [16] provaram que se um grafo  $G(V, E)$  possui uma coloração de vértices com folga de ordem  $\Delta$  com  $k$  cores, então essa coloração pode ser estendida para uma coloração total de  $G$  com no máximo  $k + 1$  cores.

**Teorema 2.2.** [16] *Sejam  $G(V, E)$  um grafo com grau máximo  $\Delta$  e  $c : V \rightarrow C = \{1, 2, 3, \dots, k\}$  uma coloração com folga  $\Delta$  de  $G$ , então existe uma coloração total de  $G$  com no máximo  $k + 1$  cores.*

Os autores denominaram a coloração total obtida, pela técnica utilizada na demonstração do Teorema 2.2, de *extensão natural da coloração com folga de ordem  $\Delta$* . A partir deste resultado, LOZANO, SIQUEIRA e JURKIEWICZ [41] mostraram que se um grafo regular  $G$  pode ser colorido com folga  $\Delta$  com  $\Delta + 1$  cores, sua extensão natural é uma coloração total e equilibrada.

**Teorema 2.3.** [41] *Sejam  $G(V, E)$  um grafo regular e  $c : V \rightarrow C = \{1, 2, 3, \dots, \Delta + 1\}$  uma coloração com folga  $\Delta$  dos vértices de  $G$ , então existe uma coloração total equilibrada de  $G$  com no máximo  $\Delta + 2$  cores.*

O Teorema 2.3 serviu de motivação para que LOZANO *et al.* [33], posteriormente, conseguissem mostrar que é possível gerar uma subfamília de grafos regulares, que podem ser coloridos de forma total e equilibrada com no máximo  $\Delta + 2$  cores. Para auxiliar nesta construção, os autores introduziram o conceito de *produto funcional de grafos*, que é o assunto principal deste trabalho e será discutido no capítulo seguinte. Na próxima seção, destacamos alguns resultados referentes ao comportamento do produto cartesiano em relação aos principais invariantes de grafos.

## 2.4 Produto Cartesiano de Grafos

O produto cartesiano de dois grafos  $G(V, E)$  e  $H(V, E)$  é o grafo  $G \square H$  cujo conjunto de vértices é o produto cartesiano  $V(G) \times V(H)$  e dois vértices do grafo produto  $(u, v)$  e  $(u', v')$  são adjacentes se, e somente se:

- $u = u'$  e a aresta  $\{v, v'\} \in E(H)$  ou
- $v = v'$  e a aresta  $\{u, u'\} \in E(G)$ .

Os grafos  $G$  e  $H$  do produto cartesiano  $G \square H$  são ditos os *fatores* do produto.

As figuras 2.2, 2.3 e 2.4 ilustram alguns grafos resultantes de produtos cartesianos, a figura 2.2 mostra uma grade  $P_3 \square P_4$ , a figura 2.3 um prisma  $P_3 \square C_4$  e a figura 2.4 um toro  $C_3 \square C_4$ :

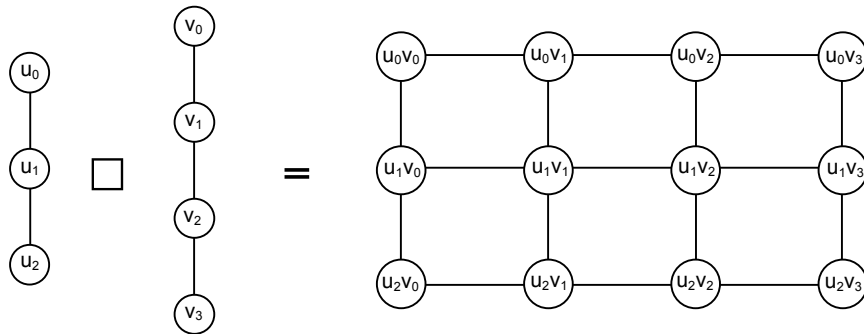


Figura 2.2: Grade: produto cartesiano de  $P_3 \square P_4$ .

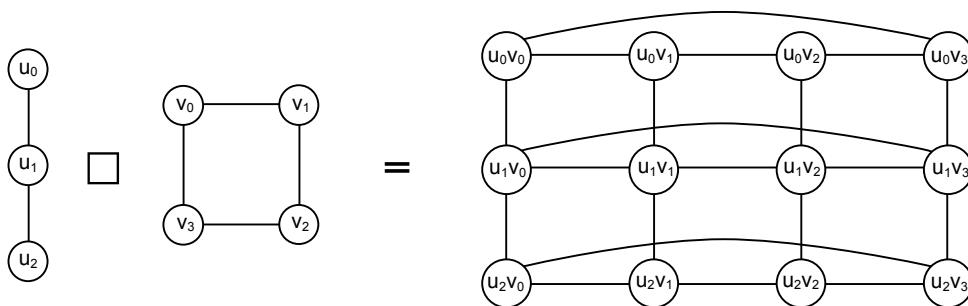


Figura 2.3: Prisma: produto cartesiano de  $P_3 \square C_4$ .



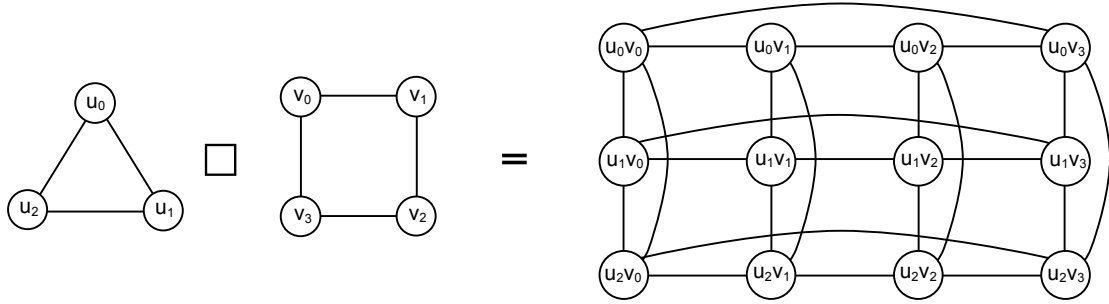


Figura 2.4: Toro: produto cartesiano de  $C_3 \square C_4$ .

O conceito de *produto cartesiano de grafos* foi definido, primeiramente, por SABIDUSSI [38] em 1960 e, mas tarde, por VIZING [43]. A partir daí, muitos estudos foram realizados sobre vários temas relacionados ao produto cartesiano de grafos. O produto cartesiano de grafos é associativo, comutativo e possui a unidade (elemento neutro), que consiste em um único vértice sem arestas (grafo trivial) [38].

SABIDUSSI [38] e VIZING [43] mostraram que todo grafo conexo pode ser decomposto em fatores primos com relação ao produto cartesiano e essa decomposição é única a não ser pela permutação dos fatores. Um grafo  $G$  é dito primo em relação ao produto cartesiano, se  $G$  não é um grafo trivial e  $G$  é isomorfo a  $Y \square Z$ , então  $Y$  ou  $Z$  é trivial [38].

Baseado no método usado por Sabidussi, FEIGENBAUM *et al.* [14] desenvolveram um algoritmo com tempo polinomial  $O(n^{4.5})$ , no qual  $n$  é o número de vértices do grafo, para determinar essa fatoração. Independentemente, WINKLER [48] apresentou um algoritmo polinomial  $O(n^4)$  baseado no método da isometria do produto cartesiano de grafos, proposto por GRAHAM e WINKLER [19]. O algoritmo consiste em representar, inicialmente, o grafo como um subgrafo isométrico (que preserva as distâncias) do grafo produto e, em seguida, procura-se encontrar uma partição adequada para os fatores.

Posteriormente, consideráveis simplificações no tempo de execução e melhoramentos dos algoritmos foram obtidos por FEDER [13], HOCHSTRASSER [22] e AURENHAMMER *et al.* [1], culminando em um algoritmo de tempo linear

apresentado por IMRICH e PETERIN [25].

Por outro lado, vários estudos foram realizados a respeito de como o produto cartesiano se comporta em relação aos principais invariantes de grafos [3, 24, 26, 36, 37, 40, 42–44], isto é, qual a relação entre um determinado invariante no grafo produto com esse mesmo invariante nos grafos fatores.

Em [37], SABIDUSSI mostrou que o produto cartesiano de grafos conexos é conexo, que o produto de um grafo qualquer por um grafo desconexo é desconexo e que o grau máximo do grafo produto é igual a soma dos graus máximos dos grafos fatores.

Quanto ao número cromático, SABIDUSSI [37] provou que  $\chi(G \square H) = \max(\chi(G), \chi(H))$ . Em 1997, SEOUD *et al.* [40] determinaram o número cromático total para diferentes grafos produtos, em particular, do produto cartesiano de um caminho e uma estrela, um ciclo e uma estrela, um caminho e um ciclo, e, para certos casos entre dois ciclos. Em 2003, KEMNITZ e MARANGIO [26] estudaram o número cromático total do produto cartesiano entre grafos completos, entre ciclos, de um grafo completo com um grafo bipartido, e entre um ciclo e um grafo bipartido.

SABIDUSSI [37] provou também que dados dois grafos  $G$  e  $H$ , se  $|V(G)| \leq (n + 2)/2$ , então  $G \square H$  é hamiltoniano. Um resultado mais forte foi obtido por ROSENFELD e BARNETTE [36] que mostraram que se  $\Delta(G) \leq n$ , então  $G \square H$  é hamiltoniano. BATAGELJ e PISANSKI [3] mostraram que, no caso de  $G$  ser uma árvore,  $\Delta(G) \leq n$  é necessário e suficiente para que  $G \square H$  seja hamiltoniano.

O resultado referente a conectividade do produto cartesiano de grafos possui um interesse histórico, pois foi anunciado por LIOUVILLE em 1978 apud [24]. “*Sejam  $G$  e  $H$  grafos com ao menos dois vértices, então  $\kappa(G \square H) = \min\{\kappa(G)|V(H)|, \kappa(H)|V(G)|, \delta(G) + \delta(H)\}$ ”.* Entretanto, a prova não foi apresentada. Nas décadas seguintes, foram obtidos vários resultados parciais, mas somente trinta anos depois, SPACAPAN [42] encerrou a história fornecendo a demonstração do resultado anunciado por Liouville. Esse resultado tem como consequência que  $\kappa(G \square H) \geq \kappa(G) + \kappa(H)$ .

Quanto ao número de independência do produto cartesiano VIZING [43] mostrou que *para qualquer grafo  $G$  e  $H$*  tem-se:

- $\alpha(G \square H) \leq \min\{\alpha(G)|V(H)|, \alpha(H)|V(G)|\}$  e
- $\alpha(G \square H) \geq \alpha(G)\alpha(H) + \min\{|V(G)| - \alpha(G), |V(H)| - \alpha(H)\}$ .

Em 2011, ABAY-ASMERON *et al.* apud [24] provaram que  $\alpha(G \square H) \geq 2r(G)r(H)$ , no qual  $r(G)$  é o raio de  $G$ .

O número de dominação do produto cartesiano é uma questão em aberto. Em 1968, VIZING [44] conjecturou que o número de dominação do produto cartesiano de dois grafos é sempre maior ou igual ao produto entre os números de dominação dos dois fatores. Em 2008, IMRICH *et al.* [24] provaram que  $\gamma(G \square H) \geq \frac{1}{2}(\gamma(G)\gamma(H))$ . Em 2011, NANDY *et al.* apud [24] estabeleceram resultados relativos ao número de dominação do produto cartesiano de caminhos e ciclos (grades cilíndricas). Os autores mostraram a validade da Conjectura de Vizing para estes produtos.

# Capítulo 3

## Produto Funcional de Grafos

### 3.1 Introdução

Este capítulo tem como objetivo apresentar um estudo sobre o produto funcional de grafos e provar algumas propriedades desse novo produto. O produto funcional de grafos foi introduzido, em 2011, por LOZANO, SIQUEIRA e JURKIEWICZ [41] motivados por alguns trabalhos anteriores. Em 2008, LOZANO *et al.* [31] apresentaram um algoritmo de transmissão de dados para troca completa de informações baseado na coloração total que independe da topologia de rede utilizada. Estudaram as topologias mais comuns e mostraram que suas colorações satisfaziam a Conjectura de Vizing-Behzad. Em 2011, FRIEDMANN *et al.* [16] mostraram que se um grafo  $G(V, E)$  possui uma coloração de vértices com folga de ordem  $\Delta$  com  $k$  cores, então essa coloração pode ser estendida para uma coloração total de  $G$  com no máximo  $k + 1$  cores. Posteriormente, LOZANO, SIQUEIRA e JURKIEWICZ [41] provaram que se um grafo regular  $G$  pode ser colorido com folga  $\Delta$  com  $\Delta + 1$  cores, então existe uma extensão da coloração com no máximo  $\Delta + 2$  cores e essa coloração é total equilibrada. A partir desses resultados, os autores introduziram o conceito do produto funcional de grafos para auxiliar na construção da família dos *grafos harmônicos*.

O capítulo 3 foi dividido em quatro seções. Na seção 3.2, apresentamos

algumas definições iniciais e o conceito do produto funcional de grafos descritos em [33, 41]. Na seção 3.3, trazemos alguns resultados do produto funcional de grafos encontrados em [33]. Na seção 3.4, apresentamos os resultados desse capítulo, mostramos que nas classes de equivalência o produto funcional é associativo, apresentamos condições em que o produto funcional de grafos bipartidos gera um grafo desconexo, estendemos esse resultado para grafos  $k$ -partidos e melhoramos o resultado apresentado em [33], que garante a conexidade do grafo produto funcional quando os grafos fatores são conexos.

## 3.2 Produto Funcional de Grafos

Para melhor entendimento desta seção, se fazem necessárias algumas definições e notações iniciais.

- Seja  $X$  um conjunto finito,  $F(X)$  denota o conjunto de todas as bijeções  $f : X \rightarrow X$ ;
- Dado um grafo  $G(V, E)$ , o digrafo  $D(G)$  é obtido a partir de  $G$ , substituindo cada aresta  $\{u, v\} \in E$  por dois arcos  $(u, v)$  e  $(v, u)$  em  $D(G)$ ;
- $\mathcal{D}$  denota o conjunto dos digrafos que satisfazem as seguintes condições:
  1.  $(u, v)$  é um arco do digrafo se, e somente se,  $(v, u)$  também é um arco do digrafo;
  2. Não existem dois arcos iguais.
- Se  $\vec{G} \in \mathcal{D}$ ,  $G(\vec{G})$  denota o grafo obtido pela substituição de cada par de arcos  $(u, v)$  e  $(v, u)$  de  $\vec{G}$  pela aresta  $uv$ , mantendo o mesmo conjunto de vértices;

**Definição 3.1.** Os digrafos  $\vec{G}_1(V_1, E_1)$  e  $\vec{G}_2(V_2, E_2)$  são ditos **funcionalmente ligados** pelas aplicações  $f_1 : E_1 \rightarrow F(V_2)$  e  $f_2 : E_2 \rightarrow F(V_1)$  se  $f_1$  e  $f_2$  são tais que:

1. Para todo arco  $(u, v) \in E_1$ , se  $(v, u) \in E_1$ , então  $f_1((u, v)) = (f_1((v, u)))^{-1}$ ;

2. Para todo arco  $(x, y) \in E_2$ , se  $(y, x) \in E_2$ , então  $f_2((x, y)) = (f_2((y, x)))^{-1}$ ;
3. Para todo par de arcos  $(u, v) \in E_1$  e  $(x, y) \in E_2$ , tem-se que  $f_2((x, y))(u) \neq v$  ou  $f_1((u, v))(x) \neq y$ .

As aplicações  $f_1$  e  $f_2$  são denominadas **aplicações de ligação**. Se uma aplicação de ligação associa a mesma bijeção a todos os arcos do digrafo correspondente, dizemos que ela é **constante**.

**Definição 3.2.** Sejam dois grafos  $G_1(V_1, E_1)$  e  $G_2(V_2, E_2)$ . Se  $D(G_1)$  e  $D(G_2)$  são funcionalmente ligados pelas aplicações  $f_1 : E(D(G_1)) \rightarrow F(V_2)$  e  $f_2 : E(D(G_2)) \rightarrow F(V_1)$ , então os grafos  $G_1(V_1, E_1)$  e  $G_2(V_2, E_2)$  são ditos **funcionalmente ligados** pelas mesmas aplicações.

**Definição 3.3.** Sejam  $\vec{G}_1(V_1, E_1)$  e  $\vec{G}_2(V_2, E_2)$  digrafos funcionalmente ligados pelas aplicações  $f_1 : E_1 \rightarrow F(V_2)$  e  $f_2 : E_2 \rightarrow F(V_1)$ . O **produto funcional** do digrafo  $\vec{G}_1$  pelo digrafo  $\vec{G}_2$  segundo as aplicações  $f_1$  e  $f_2$ , denotado por  $(\vec{G}_1, f_1) \times (\vec{G}_2, f_2)$ , é o digrafo  $\vec{G}^*(V^*, E^*)$  definido por:

- $V^* = V_1 \times V_2$ .
- $((u, x), (v, y)) \in E^*$  se, e somente se, uma das seguintes condições for verdadeira:
  1.  $(u, v) \in E_1$  e  $f_1((u, v))(x) = y$
  2.  $(x, y) \in E_2$  e  $f_2((x, y))(u) = v$ .

**Definição 3.4.** Sejam  $G_1(V_1, E_1)$  e  $G_2(V_2, E_2)$  grafos funcionalmente ligados pelas aplicações  $f_1 : E(D(G_1)) \rightarrow F(V_2)$  e  $f_2 : E(D(G_2)) \rightarrow F(V_1)$ . O **produto funcional** do grafo  $G_1$  pelo grafo  $G_2$ , denotado por  $(G_1, f_1) \times (G_2, f_2)$ , é o grafo  $G(\vec{G}^*(V^*, E^*))$ , sendo  $\vec{G}^*(V^*, E^*) = (D(G_1), f_1) \times (D(G_2), f_2)$ .

As condições 1 e 2 da definição 3.1 permitem que o grafo produto  $G(\vec{G}^*(V^*, E^*))$  seja obtido pela substituição de cada par de arcos  $((u, x), (v, y))$  e  $((v, y), (u, x))$  do digrafo  $\vec{G}^*(V^*, E^*)$  pela aresta  $\{(u, x), (v, y)\}$ , mantendo o mesmo

conjunto de vértices. Já a condição 3 da definição 3.1 garante que o grafo produto  $G(\vec{G}^*(V^*, E^*))$  não possui arestas múltiplas.

As figuras 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 e 3.6 ilustram o passo a passo do produto funcional entre dois caminhos  $P_3$  associados a duas diferentes aplicações de ligação. As aplicações de ligação  $f_1$  e  $f_2$  são definidas por  $f_1(x) = r_2$  para toda aresta  $x \in E_1$  e  $f_2(y) = r_1$  para toda aresta  $y \in E_2$ , no qual  $r_1(v_i) = v_{i+1(mod3)}$  e  $r_2(v_i) = v_{i+2(mod3)}$  com  $i \in \{1, 2, 3\}$ . A figura 3.1 faz referência as definições 3.1 e 3.2, as figuras 3.2, 3.3, 3.4 e 3.5 se referem a definição 3.3 e a figura 3.6 ilustra a definição 3.4.

A partir dos grafos originais  $G_1$  e  $G_2$ , geram-se os digrafos correspondentes  $D(G_1)$  e  $D(G_2)$ , substituindo cada aresta  $\{u, v\}$  de  $G_1$  pelos arcos  $(u, v)$  e  $(v, u)$  em  $D(G_1)$  e cada aresta  $\{x, y\}$  de  $G_2$  pelos arcos  $(x, y)$  e  $(y, x)$  em  $D(G_2)$ , mantendo o mesmo conjunto de vértices.

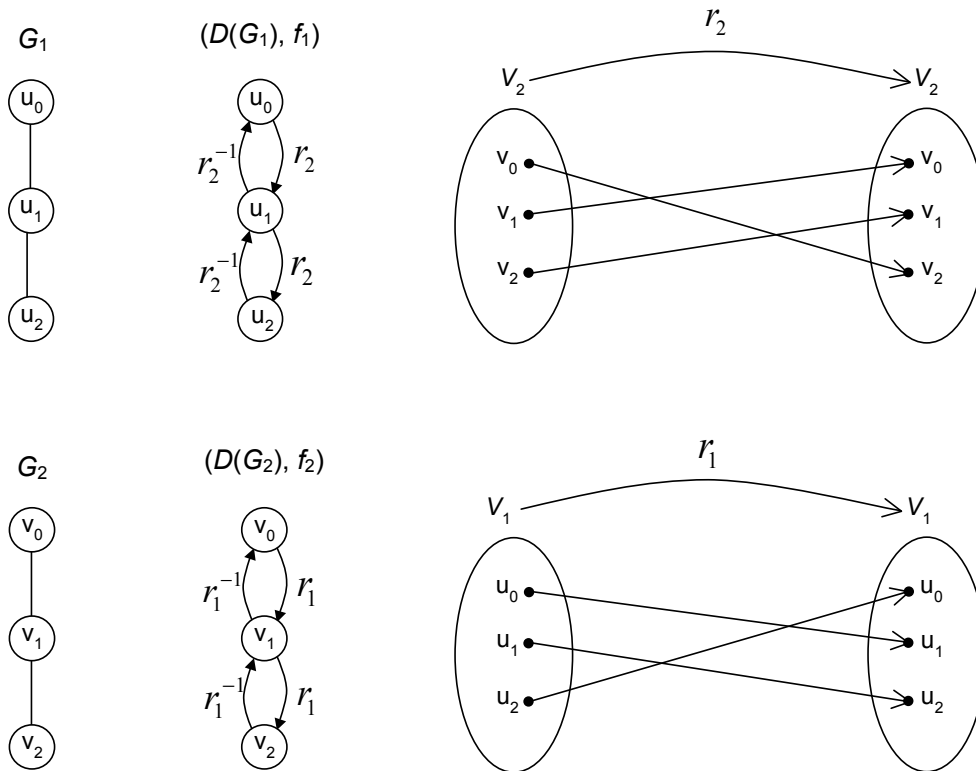


Figura 3.1: Grafos  $G_1$  e  $G_2$ , os respectivos digrafos e as bijeções associadas  $r_1$  e  $r_2$ .

Em seguida, realiza-se o produto funcional entre estes digrafos de acordo com a definição 3.3. Por exemplo, iniciamos pelo vértice  $(u_0, v_0) \in V^*$ , o arco  $(v_0, v_1) \in E(D(G_2))$ ,  $f_2((v_0, v_1)) = r_1$  e  $r_1(u_0) = u_1$ , logo  $f_2((v_0, v_1))(u_0) = u_1$

e o arco  $((u_0, v_0), (u_1, v_1)) \in E^*$ . Da mesma forma, o arco  $(u_0, u_1) \in E(D(G_1))$ ,  $f_1((u_0, u_1)) = r_2$  e  $r_2(v_0) = v_2$ , logo  $f_1((u_0, u_1))(v_0) = v_2$  e o arco  $((u_0, v_0), (u_1, v_2)) \in E^*$ . Deste ponto em diante, as aplicações  $f_1$  e  $f_2$  serão omitidas, faremos referência apenas as bijeções  $r_1$  e  $r_2$ .

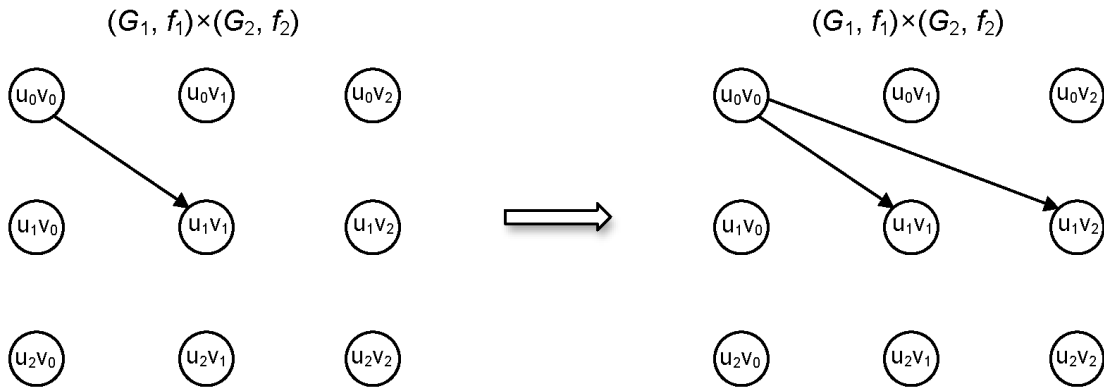


Figura 3.2: Produto funcional entre os digrafos  $D(G_1)$  e  $D(G_2)$  segundo  $f_1$  e  $f_2$ . Foram desenhados somente os arcos que partem do vértice  $(u_0, v_0)$ .

Seguimos com o vértice  $(u_0, v_1)$ , o arco  $(v_1, v_2) \in E(D(G_2))$  e  $r_1(u_0) = u_1$ , logo o arco  $((u_0, v_1), (u_1, v_2)) \in E^*$ . O arco  $(u_0, u_1) \in E(D(G_1))$  e  $r_2(v_1) = v_0$ , logo  $((u_0, v_1), (u_1, v_0)) \in E^*$ . E o arco  $(v_1, v_0) \in E(D(G_2))$  e  $r_1^{-1}(u_0) = u_2$ , logo  $((u_0, v_1), (u_2, v_0)) \in E^*$ .

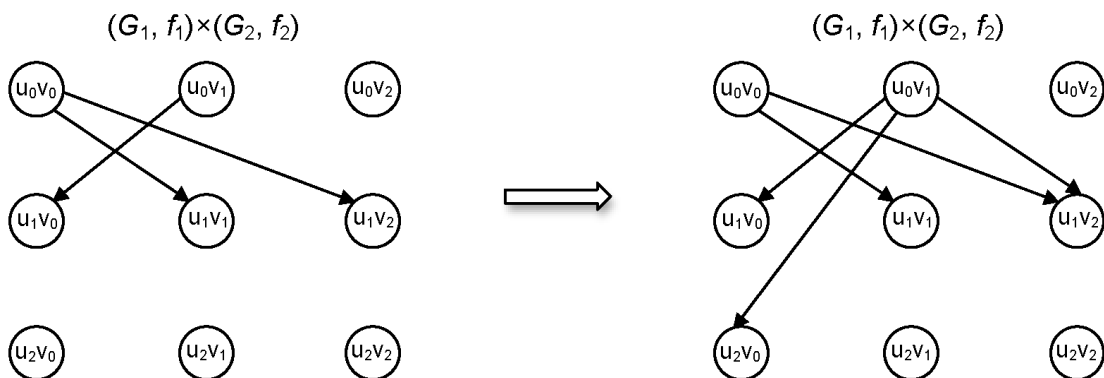


Figura 3.3: Produto funcional entre os digrafos  $D(G_1)$  e  $D(G_2)$  segundo  $f_1$  e  $f_2$ . Foram desenhados somente os arcos que partem dos vértices  $(u_0, v_0)$  e  $(u_0, v_1)$ .



Prosseguimos com o vértice  $(u_1, v_2)$ , o arco  $(u_1, u_0) \in E(D(G_1))$  e  $r_2^{-1}(v_2) = v_0$ , logo  $((u_1, v_2), (u_0, v_0)) \in E^*$ . O arco  $(v_2, v_1) \in E(D(G_2))$  e  $r_1^{-1}(u_1) = u_0$ , logo  $((u_1, v_2), (u_0, v_1)) \in E^*$ . E o arco  $(u_1, u_2) \in E(D(G_1))$  e  $r_2(v_2) = v_1$ , logo  $((u_1, v_2), (u_2, v_1)) \in E^*$ .

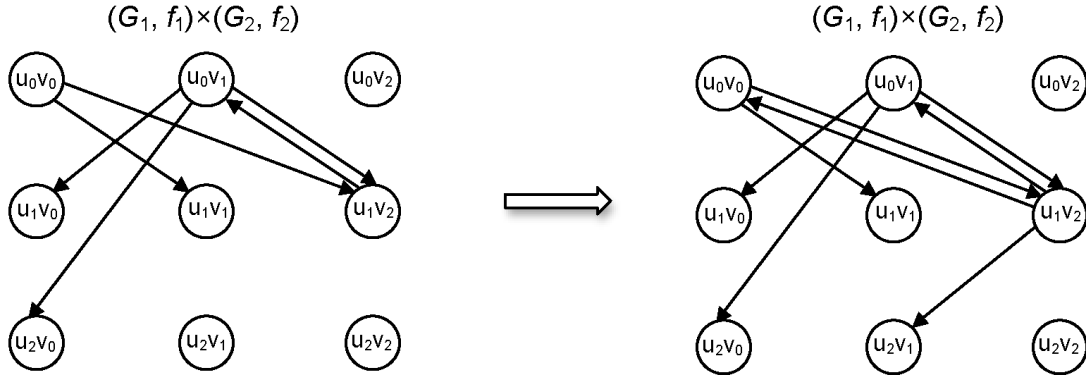


Figura 3.4: Produto funcional entre os digrafos  $D(G_1)$  e  $D(G_2)$  segundo  $f_1$  e  $f_2$ . Foram desenhados somente os arcos que partem dos vértices  $(u_0, v_0)$ ,  $(u_0, v_1)$  e  $(u_1, v_2)$ .

Repetindo o processo em todos os vértices restantes de  $\vec{G}^*(V^*, E^*)$ , obtemos o digrafo da figura 3.5. Por fim, obtém-se o grafo produto a partir da substituição de todos os arcos  $((u, x), (v, y))$  e  $((v, y), (u, x))$  pelas arestas  $\{(u, x), (v, y)\}$ , conforme ilustra a figura 3.6.

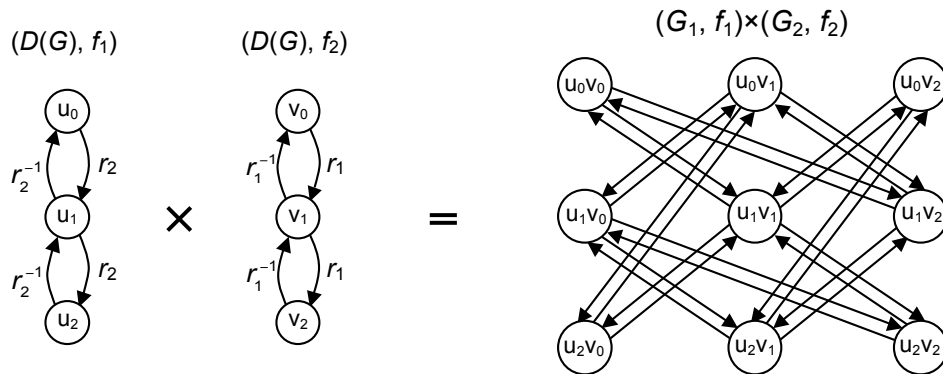


Figura 3.5: Produto funcional entre os digrafos  $D(G_1)$  e  $D(G_2)$  segundo  $f_1$  e  $f_2$ .

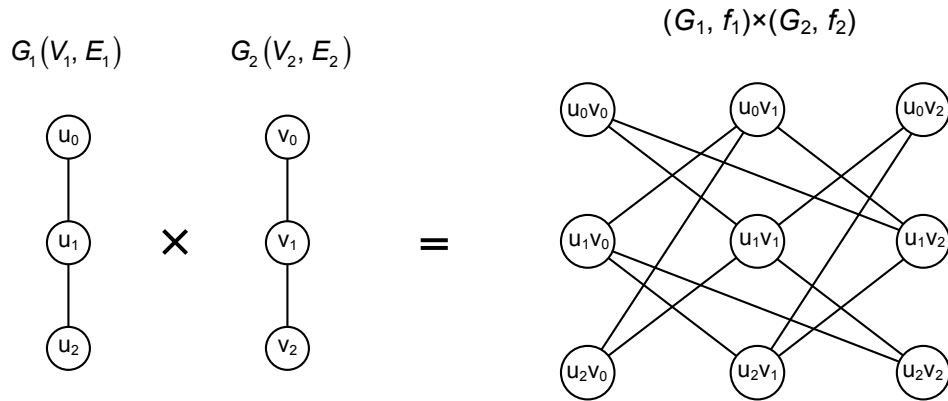


Figura 3.6: Produto funcional entre os grafos  $G_1$  e  $G_2$  segundo  $f_1$  e  $f_2$ .

É interessante notar que o produto cartesiano de grafos é um caso particular do produto funcional de grafos definido acima, quando  $f_1$  e  $f_2$  são constantes e atribuem a função identidade a todos os arcos dos digrafos correspondentes. As figuras 3.7 e 3.8 exemplificam essa relação.

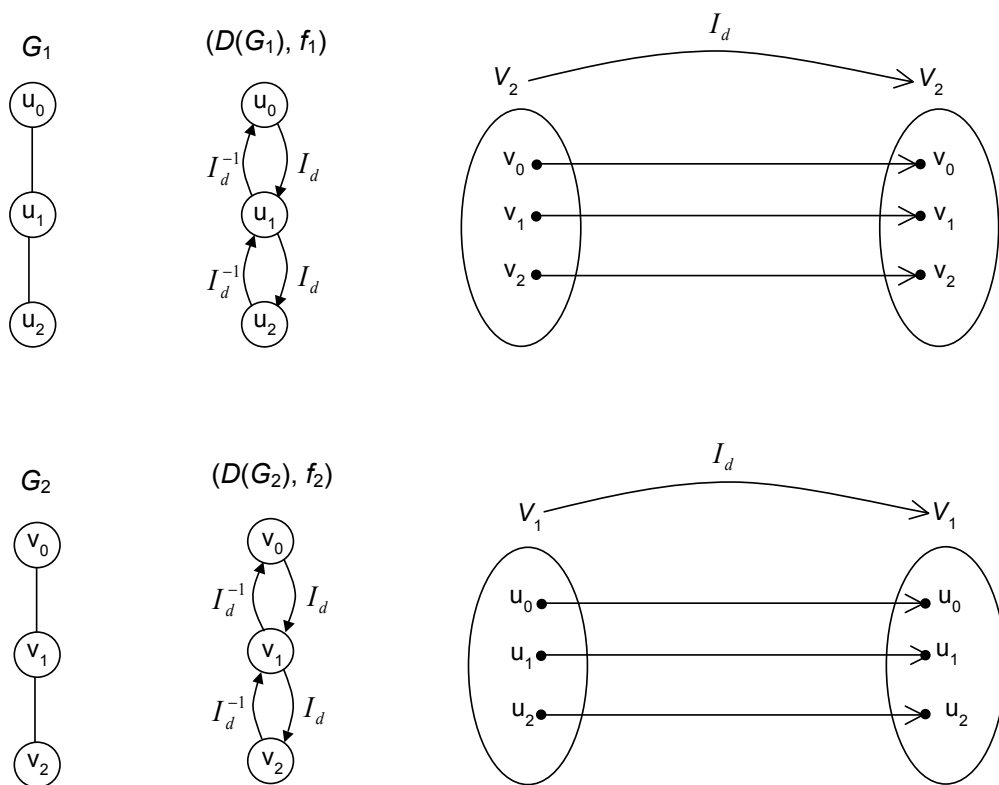


Figura 3.7: Grafos  $G_1$  e  $G_2$ , os respectivos digrafos e as bijeções associadas  $I_d$  e  $I_d$ .

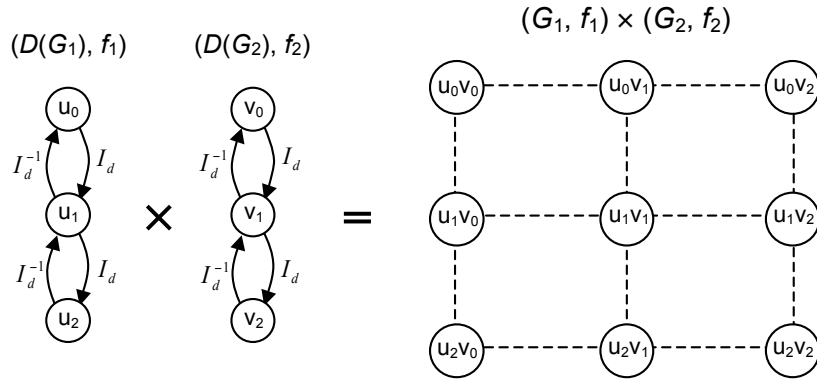


Figura 3.8: Produto funcional (ou cartesiano) entre os grafos  $G_1$  e  $G_2$  segundo  $f_1$  e  $f_2$ .

Nos exemplos apresentados até aqui, foram utilizadas aplicações de ligação constantes, ou seja, aplicações que associam a mesma bijeção a todos os arcos do digrafo correspondente. Entretanto, as aplicações de ligação podem associar bijeções diferentes a arcos distintos do digrafo. As figuras 3.9, 3.10, 3.11, 3.12 e 3.13 ilustram o produto funcional entre dois grafos  $G_1$  e  $G_2$ , tais que  $f_1$  e  $f_2$  associam bijeções distintas aos arcos dos digrafos correspondentes:  $f_1 : E(D(G_1)) \rightarrow F(V_2)$  com  $F(V_2) = h_1$  ou  $h_2$  e  $f_2 : E(D(G_2)) \rightarrow F(V_1)$  com  $F(V_1) = r_1, r_2$  ou  $r_3$ .

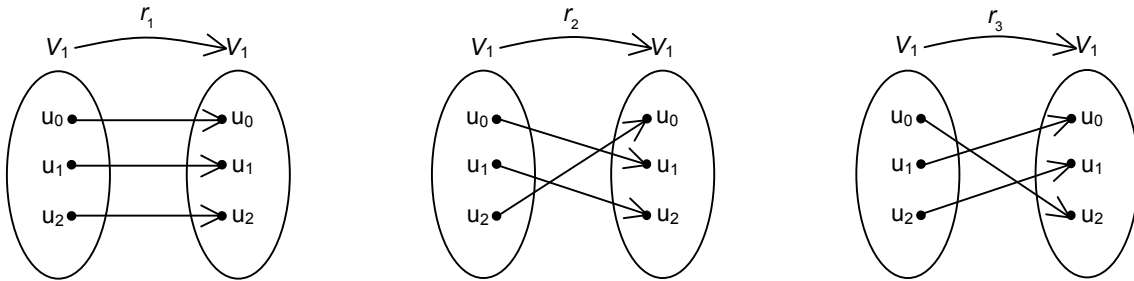


Figura 3.9: Três bijeções distintas de  $F(V_1) = r_1, r_2$  e  $r_3$ .

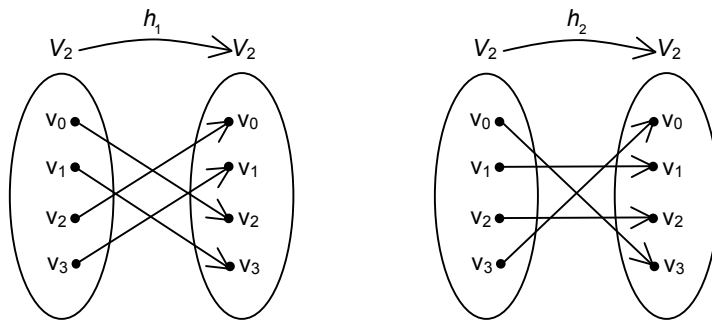


Figura 3.10: Duas bijeções distintas de  $F(V_2) = h_1$  e  $h_2$ .

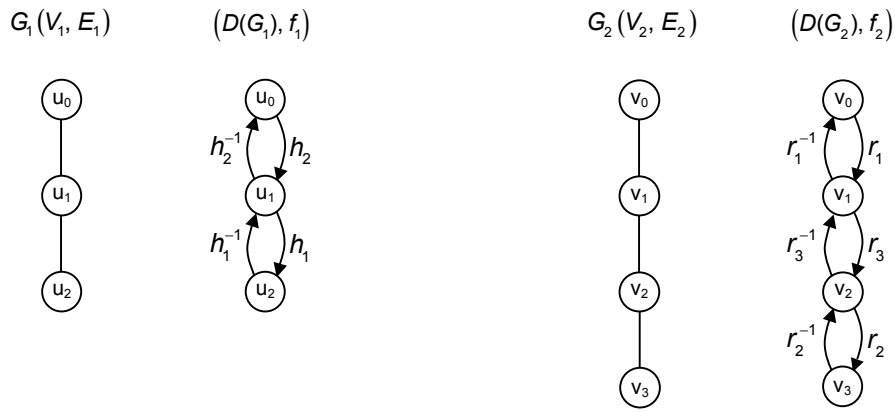


Figura 3.11: Grafos  $G_1$  e  $G_2$ , seus respectivos digrafos e as bijeções associadas.

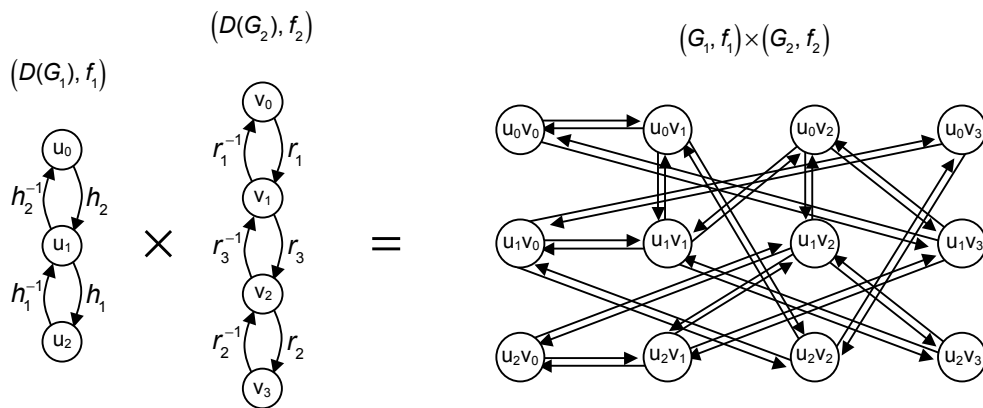


Figura 3.12: Produto funcional entre os digrafos  $D(G_1)$  e  $D(G_2)$ , segundo  $f_1$  e  $f_2$ .

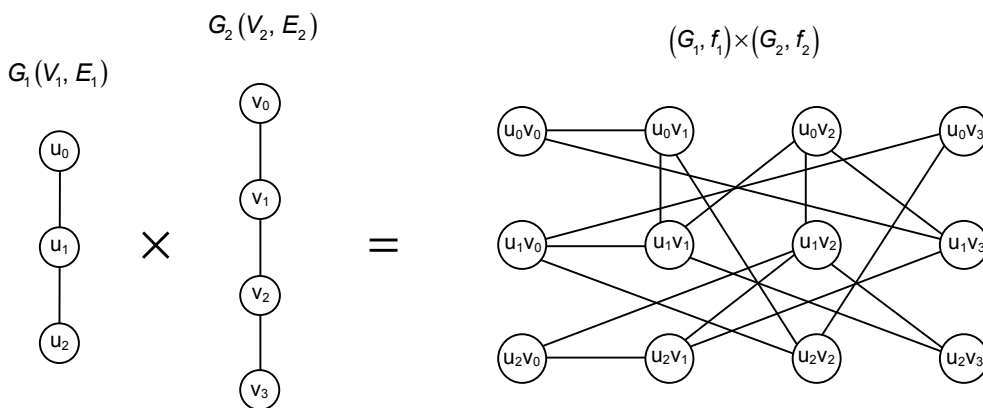


Figura 3.13: Produto funcional entre os grafos  $G_1$  e  $G_2$ , segundo  $f_1$  e  $f_2$ .

Para realizar o produto funcional, não é obrigatório transformar o grafo em digrafo, na prática, o importante é dar uma orientação arbitrária aos grafos fatores, isto é, dizer em que direção as bijeções direta e inversa serão associadas. Assim, dada uma aplicação de ligação bem definida, basta considerar um sentido arbitrário

e realizar o produto a partir da bijeção direta.

Por conseguinte, fica uma questão em aberto: como identificar os grafos que podem ser obtidos a partir do produto funcional entre dois ou mais grafos fatores, ou melhor, como caracterizar os grafos produtos. Por exemplo, as figuras 3.14 e 3.15 ilustram o **Grafo de Peterson** gerado pelo produto funcional de um  $P_2$  e um  $C_5$ . Em  $G_1$  associamos  $f$  ao arco  $(v_0, v_1) \in E(D(G_1))$  e  $f^{-1}$  ao arco  $(v_1, v_0) \in E(D(G_1))$ . Note que, neste exemplo, só é preciso orientar  $G_1$ , pois em  $G_2$  foi associado  $g$  (identidade) a todos os arcos de  $E(D(G_2))$ .

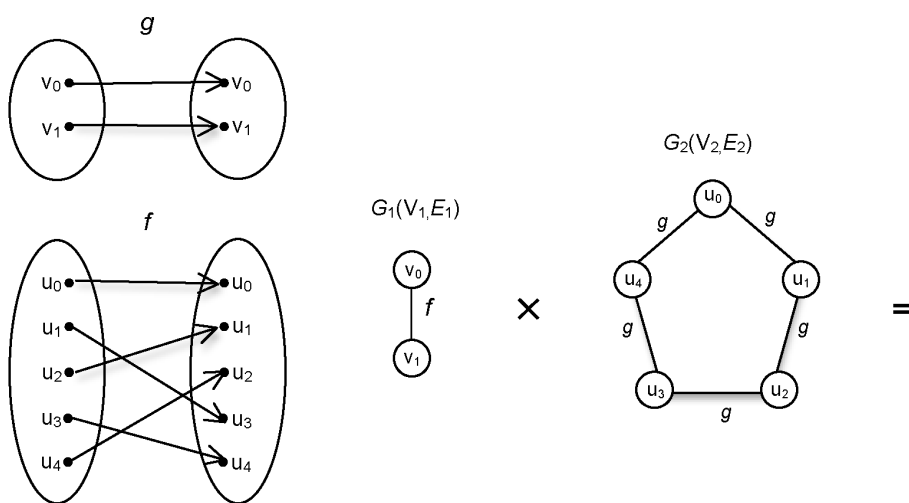


Figura 3.14: Grafos  $P_2$  e  $C_5$  com suas respectivas bijeções associadas  $f$  e  $g$ .

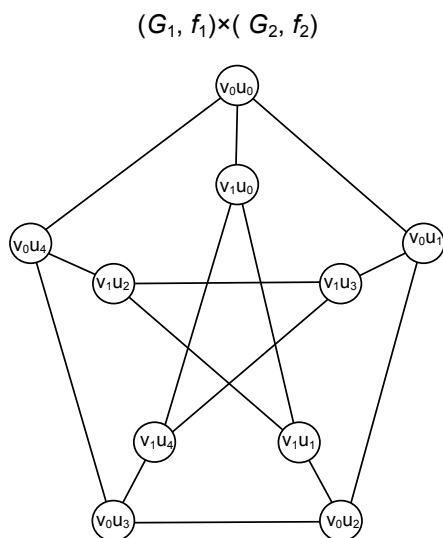


Figura 3.15: Grafo Peterson gerado pelo produto funcional de  $P_2$  e  $C_5$ .

### 3.3 Propriedades do Produto Funcional de Grafos

Nesta seção, apresentamos resultados encontrados em [33] que provam algumas propriedades do produto funcional de grafos. É imediato, a partir da definição 3.3, que o produto funcional possui a unidade (elemento neutro), que consiste em um único vértices sem arestas (grafo trivial). O Teorema 3.1 mostra que o produto funcional de grafos é comutativo.

**Teorema 3.1.** [33] *Sejam  $G_1(V_1, E_1)$  e  $G_2(V_2, E_2)$  grafos funcionalmente ligados pelas aplicações  $f_1 : E(D(G_1)) \rightarrow F(V_2)$  e  $f_2 : E(D(G_2)) \rightarrow F(V_1)$ . Então os grafos  $G^*(V^*, E^*) = (G_1, f_1) \times (G_2, f_2)$  e  $G^{**}(V^{**}, E^{**}) = (G_2, f_2) \times (G_1, f_1)$  são isomorfos. Neste sentido, o produto funcional de grafos é comutativo.*

O próximo resultado garante que o grau máximo do grafo produto funcional é igual a soma dos graus máximos dos grafos fatores.

**Teorema 3.2.** [33] *Sejam  $G_1 = (V_1, E_1)$  e  $G_2 = (V_2, E_2)$  grafos funcionalmente ligados pelas aplicações  $f_1 : E(D(G_1)) \rightarrow F(V_2)$  e  $f_2 : E(D(G_2)) \rightarrow F(V_1)$ . Para todo vértice  $(u, x)$  do grafo  $G^* = (V^*, E^*) = (G_1, f_1) \times (G_2, f_2)$  tem-se que:  $d_{G^*}((u, x)) = d_{G_1}(u) + d_{G_2}(x)$ .*

Do teorema 3.2, se obtém, de forma imediata, o corolário a seguir.

**Corolário 3.1.** [33] *Sejam  $G_1 = (V_1, E_1)$  e  $G_2 = (V_2, E_2)$  grafos funcionalmente ligados pelas aplicações  $f_1 : E(D(G_1)) \rightarrow F(V_2)$  e  $f_2 : E(D(G_2)) \rightarrow F(V_1)$ , então o grafo  $G^* = (V^*, E^*) = (G_1, f_1) \times (G_2, f_2)$  tem grau máximo  $\Delta(G^*) = \Delta(G_1) + \Delta(G_2)$ .*

O Teorema seguinte oferece uma condição que assegura a conexidade do grafo produto funcional quando os grafos fatores são conexos.

**Teorema 3.3.** [33] *Dados dois grafos  $G_1 = (V_1, E_1)$  e  $G_2 = (V_2, E_2)$  conexos e funcionalmente ligados pelas aplicações  $f_1 : E(D(G_1)) \rightarrow F(V_2)$  e  $f_2 : E(D(G_2)) \rightarrow F(V_1)$ , se  $f_1$  ou  $f_2$  atribui a identidade a todos os arcos do digrafo correspondente, então o produto funcional de  $G_1$  por  $G_2$  segundo  $f_1$  e  $f_2$  é conexo.*

## 3.4 Novos Resultados

Nesta seção, apresentamos os resultados desse capítulo.

### 3.4.1 Associatividade do Produto Funcional de Grafos

A sequência de graus é um invariante do grafo, uma vez que grafos isomorfos possuem a mesma sequência de graus. Em geral, esse invariante não identifica um grafo, pois existem grafos com a mesma sequência de graus que não são isomorfos.

A partir do Teorema 3.2, o produto funcional pode ser usado para gerar famílias de grafos não isomorfos com a mesma sequência de graus, basta notar que se alteramos as bijeções associadas pelas aplicações de ligação no produto funcional entre dois grafos, obtemos grafos distintos que compartilham a mesma sequência de graus. Por essa razão, estudamos a associatividade nas classes de equivalência e mostramos que, considerando o conjunto dos grafos, a relação “ter a mesma sequência de graus” é uma relação de equivalência e o produto funcional de grafos é associativo nas classes de equivalência.

**Definição 3.5.** Dizemos que  $G_1 \sim G_2$ , se  $G_1$  tem a mesma sequência de graus de  $G_2$ .

**Lema 3.1.** A relação  $\sim$  definida no conjunto dos grafos é uma relação de equivalência.

*Demonstração.* Devemos mostrar que a relação  $\sim$  é reflexiva, simétrica e transitiva.

- Reflexiva: É imediato que todo grafo  $G$  tem a mesma sequência de graus dele mesmo. Portanto, a relação  $\sim$  é reflexiva.
- Simétrica: Sejam  $G_1(V_1, E_1)$  e  $G_2(V_2, E_2)$  grafos,  $(d_1, d_2, \dots, d_m)$  e  $(d'_1, d'_2, \dots, d'_n)$  suas respectivas sequências de graus. Suponhamos que  $(d_1, d_2, \dots, d_m) = (d'_1, d'_2, \dots, d'_n)$ , então  $|m| = |n|$  e pela simetria da igualdade

$|n| = |m|$  e  $(d'_1, d'_2, \dots, d'_n) = (d_1, d_2, \dots, d_m)$ . Portanto, a relação  $\sim$  é simétrica.

- Transitiva: Sejam  $G_1(V_1, E_1)$ ,  $G_2(V_2, E_2)$  e  $G_3(V_3, E_3)$  grafos,  $(d_1, d_2, \dots, d_m)$ ,  $(d'_1, d'_2, \dots, d'_n)$  e  $(d''_1, d''_2, \dots, d''_p)$  suas respectivas seqüências de graus. Suponhamos que  $(d_1, d_2, \dots, d_m) = (d'_1, d'_2, \dots, d'_n)$  e  $(d'_1, d'_2, \dots, d'_n) = (d''_1, d''_2, \dots, d''_p)$ , então  $|m| = |n|$  e  $|n| = |p|$ . Pela transitividade da igualdade, tem-se  $|m| = |p|$  e  $(d_1, d_2, \dots, d_m) = (d''_1, d''_2, \dots, d''_p)$ . Portanto, a relação  $\sim$  é transitiva. □

Agora, se denotamos por  $\overline{G}$  a classe de equivalência de um grafo  $G$  pela relação “ter a mesma seqüência de graus”, o Teorema 3.2 garante que  $\overline{[(G_1, f_1) \times (G_2, f_2), f_4] \times (G_3, f_3)} = \overline{(G_1, f'_1) \times [(G_2, f'_2) \times (G_3, f'_3), f'_4]}$ , para quaisquer que sejam as aplicações de ligação  $f_1, f_2, f_3, f_4, f'_1, f'_2, f'_3$  e  $f'_4$ .

O estudo da associatividade fora das classes de equivalência mostrou ser de difícil tratamento, pois dependendo da cardinalidade do conjunto de vértices dos grafos fatores e da ordem em que se realiza o produto, é preciso lidar com diferentes domínios nas aplicações de ligação, fato que dificulta a escolha das bijeções adequadas. Em geral, o produto funcional não é associativo, mas o produto cartesiano é associativo e poder ser obtido por meio do produto funcional, sempre que as aplicações de ligação atribuem a função identidade a todos os arcos dos digrafos correspondentes. Em razão disso, no futuro pretendemos investigar em que condições a associatividade pode ser verificada no produto funcional de grafos.

### 3.4.2 Conexidade do Produto Funcional de Grafos

Em relação a conexidade, o produto funcional de grafos conexos não é necessariamente conexo, pois é possível obter um grafo desconexo a partir do produto funcional entre dois grafos conexos. O Teorema 3.4 apresenta condições em que o produto funcional de grafos bipartidos gera um grafo desconexo.



**Teorema 3.4.** *Sejam  $G_1(V_1, E_1)$  e  $G_2(V_2, E_2)$  grafos bipartidos tais que  $V_1 = V_{11} \cup V_{12}$ ,  $V_2 = V_{21} \cup V_{22}$  com  $|V_{11}| = |V_{12}|$  e  $|V_{21}| = |V_{22}|$ . Sejam  $f_1 : E(D(G_1)) \rightarrow F(V_2)$  e  $f_2 : E(D(G_2)) \rightarrow F(V_1)$  as respectivas aplicações de ligação tais que se  $f_1(e)(u) = v$ , então  $u$  e  $v$  são de diferentes partições em  $G_2$  e se  $f_2(e)(u) = v$ , então  $u$  e  $v$  são de diferentes partições em  $G_1$ . Consequentemente, o produto funcional  $G^*(V^*, E^*) = (G_1, f_1) \times (G_2, f_2)$  é desconexo e  $G^*$  possui 2 componentes conexas de mesma cardinalidade.*

*Demonstração.* Sejam  $V_1 = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ ;  $V_2 = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ ;  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$  e  $j = 0, 1, 2, \dots, m-1$ . Sem perder a generalidade, suponhamos que  $V_{11} = \{0, 2, 4, \dots, n-2\}$ ;  $V_{12} = \{1, 3, 5, \dots, n-1\}$ ;  $V_{21} = \{0, 2, 4, \dots, m-2\}$  e  $V_{22} = \{1, 3, 5, \dots, m-1\}$ . Seja  $G^*(V^*, E^*) = (G_1, f_1) \times (G_2, f_2)$  o grafo produto funcional. Sejam  $i$  e  $i' \in V_1$ ,  $j$  e  $j' \in V_2$ , provaremos que o arco  $((i, j), (i'j')) \in E^*$  se, e somente se,  $i+j$  e  $i'+j'$  têm a mesma paridade. Por definição de produto funcional o arco  $((i, j), (i'j')) \in E^*$  se, e somente se, uma das condições for verdadeira:

- $(i, i') \in E(D(G_1))$  e  $f_2(j) = j'$  ou  $f_2^{-1}(j) = j'$ ;
- $(j, j') \in E(D(G_2))$  e  $f_1(i) = i'$  ou  $f_1^{-1}(i) = i'$ .

No caso 1, temos:

Se  $i$  é par e  $j$  é par, então  $i'$  é ímpar e  $j'$  é ímpar.

Se  $i$  é par e  $j$  é ímpar, então  $i'$  é ímpar e  $j'$  é par.

Se  $i$  é ímpar e  $j$  é par, então  $i'$  é par e  $j'$  é ímpar.

Se  $i$  é ímpar e  $j$  é ímpar, então  $i'$  é par e  $j'$  é par.

Em todos os casos a soma tem a mesma paridade.

No caso 2, basta proceder de forma semelhante para conseguir o resultado desejado.

Logo,  $G^*(V^*, E^*) = (G_1, f_1) \times (G_2, f_2)$  é desconexo e  $G^*$  possui 2 componentes conexas de mesma cardinalidade.

□

As figuras 3.16 e 3.17 ilustram o produto funcional de dois grafos bipartidos com suas respectivas aplicações de ligação satisfazendo as condições do teorema 3.4.

Observe que as aplicações de ligação  $f_1$  e  $f_2$  são definidas por  $f_1(x) = h$  para toda aresta  $x \in E_1$  e  $f_2(y) = g$  para toda aresta  $y \in E_2$ .

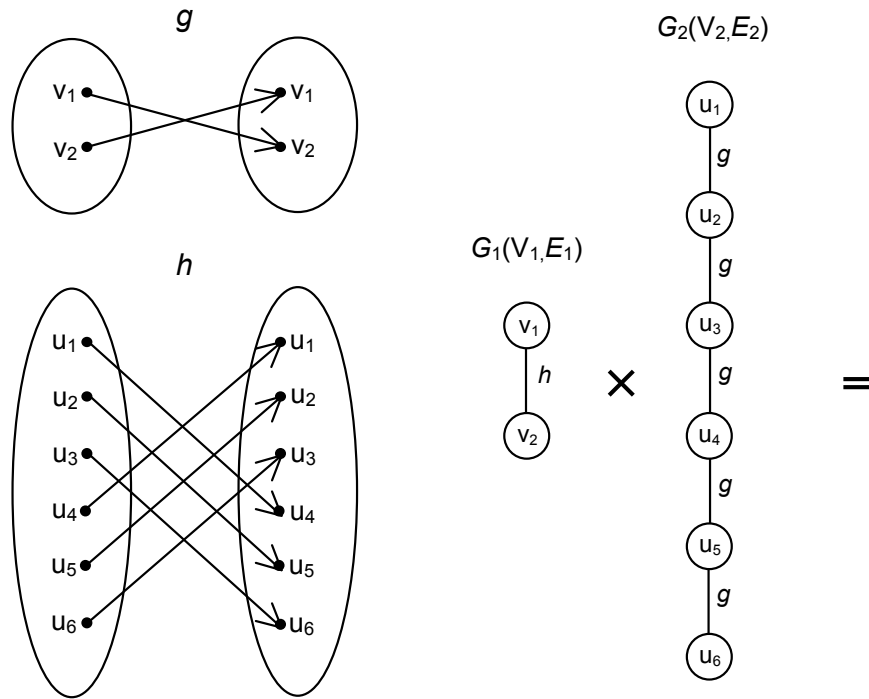


Figura 3.16: Grafos bipartidos  $G_1$  e  $G_2$  com suas respectivas bijeções associadas  $g$  e  $h$ .

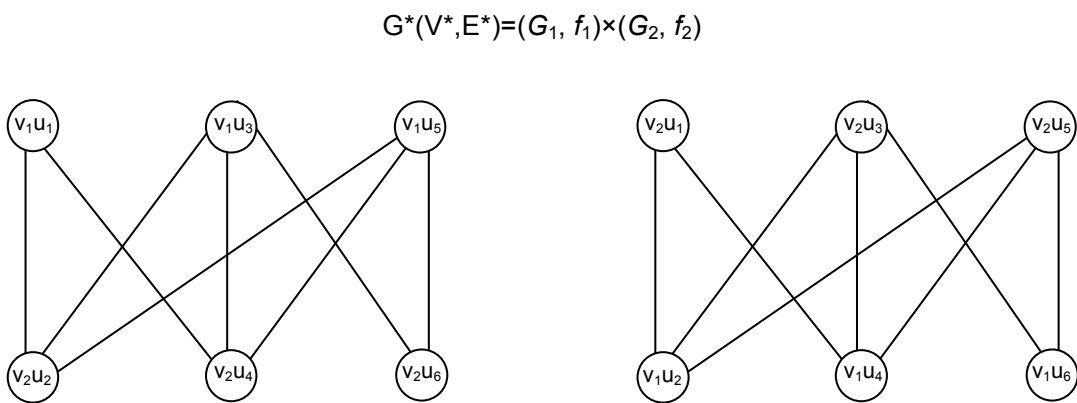


Figura 3.17: Grafo desconexo  $G^*(V^*, E^*)$  resultante do produto funcional entre os grafos  $G_1$  e  $G_2$  segundo  $f_1$  e  $f_2$ .

O Teorema 3.5 generaliza o resultado anterior para grafos  $k$ -partidos.

**Teorema 3.5.** *Sejam  $G_1(V_1, E_1)$  e  $G_2(V_2, E_2)$  grafos  $k$ -partidos, tais que  $V_1 = P_0 \cup P_1 \cup \dots \cup P_{k-1}$  e  $V_2 = Q_0 \cup Q_1 \cup \dots \cup Q_{k-1}$ ; com  $|P_i| = |P_j|$  e  $|Q_i| = |Q_j|$ ;  $\forall i, j = 0, 1, 2, \dots, k-1$ . Para toda aresta  $\{u, v\} \in E_1$  se  $u \in P_i$ , então  $v \in P_{i+1(\text{mod } k)}$ . Da mesma forma, para toda aresta  $\{x, y\} \in E_2$  se  $x \in Q_i$ , então  $y \in Q_{i+1(\text{mod } k)}$ . Sejam  $f_a : V_1 \rightarrow V_1$  e  $f_b : V_2 \rightarrow V_2$  funções definidas por  $f_a(u) = v$ , com  $u \in P_i \rightarrow v \in P_{i+(k-1)(\text{mod } k)}$  e  $f_b(x) = y$ , com  $x \in Q_i \rightarrow y \in Q_{i+(k-1)(\text{mod } k)}$ . Se  $f_1 : E(D(G_1)) \rightarrow F(V_2)$  associa  $f_b$  a todas as arestas de  $E_1$  e  $f_2 : E(D(G_2)) \rightarrow F(V_1)$  associa  $f_a$  a todas as arestas de  $E_2$ , então o produto funcional  $G^*(V^*, E^*) = (G_1, f_1) \times (G_2, f_2)$  é desconexo e  $G^*$  possui  $k$  componentes conexas de mesma cardinalidade.*

*Demonstração.* Sejam  $V_1 = 0, 1, 2, \dots, n-1$  e  $V_2 = 0, 1, 2, \dots, m-1$ , tais que  $n = p \cdot k$  e  $m = q \cdot k$ . Sejam  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$  e  $j = 0, 1, 2, \dots, m-1$ .

Sem perder a generalidade, suponhamos que  $P_0 = \{0, k, 2k, \dots, (p-1) \cdot k\}$ ;

$P_1 = \{1, k+1, 2k+1, \dots, (p-1) \cdot k+1\}$ ;  $P_2 = \{2, k+2, 2k+2, \dots, (p-1) \cdot k+2\}$ ;  
 $\dots$   $P_{k-1} = \{k-1, 2k-1, 3k-1, \dots, pk-1\}$ ;

$Q_0 = \{0, k, 2k, \dots, (q-1) \cdot k\}$ ;  $Q_1 = \{1, k+1, 2k+1, \dots, (q-1) \cdot k+1\}$ ;

$Q_2 = \{2, k+2, 2k+2, \dots, (q-1) \cdot k+2\}$ ;  $\dots$   $Q_{k-1} = \{k-1, 2k-1, 3k-1, \dots, qk-1\}$ .

Seja  $G^*(V^*, E^*) = (G_1, f_1) \times (G_2, f_2)$  o grafo produto funcional.

Provaremos que o arco  $((i, j), (i'j')) \in E^*$  se, e somente se,  $i + j \equiv i' + j' \pmod{k}$ .

Pela definição de produto funcional o arco  $((i, j), (i'j')) \in E^*$  se, e somente se, uma das condições for verdadeira:

- $(i, i') \in E(D(G_1))$  e  $f_b(j) = j'$  ou  $f_b^{-1}(j) = j'$ ;
- $(j, j') \in E(D(G_2))$  e  $f_a(i) = i'$  ou  $f_a^{-1}(i) = i'$ .

No caso 1, temos:

Se  $i \in P_i$  e  $j \in Q_j$ , então  $i' \in P_{i+1(\text{mod } k)}$  e  $j' \in Q_{j+(k-1)(\text{mod } k)}$ .

Daí

$$i + j \equiv i + 1 + j + (k-1)(\text{mod } k)$$

$$i + j \equiv i + j + k(\text{mod } k)$$

$$i + j \equiv i + j \pmod{k}.$$

No caso 2, temos:

Se  $j \in Q_j$  e  $i \in P_i$ , então  $j' \in Q_{j+1 \pmod{k}}$  e  $i' \in P_{i+(k-1) \pmod{k}}$ .

Daí

$$j + i \equiv j + 1 + i + (k - 1) \pmod{k}$$

$$j + i \equiv j + i + k \pmod{k}$$

$$j + i \equiv j + i \pmod{k}.$$

Logo,  $G^*(V^*, E^*) = (G_1, f_1) \times (G_2, f_2)$  é desconexo e  $G^*$  possui  $k$  componentes conexas de mesma cardinalidade.

□

A figura 3.18 mostra dois grafos 3-partidos com suas respectivas bijeções associadas  $g$  e  $h$ , satisfazendo as condições do teorema 3.5. Na figura 3.19, apresentamos um grafo desconexo obtido como resultado do produto funcional entre os grafos fatores (3-partidos).

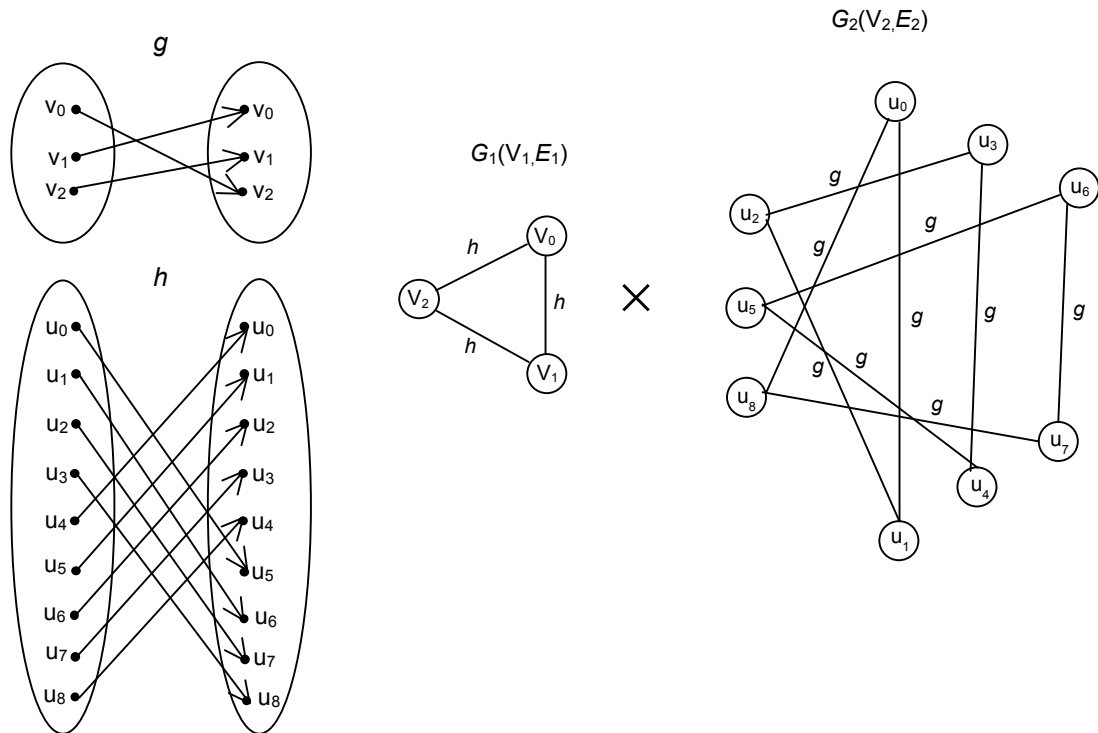


Figura 3.18: Grafos 3-partidos  $G_1$  e  $G_2$  com suas respectivas bijeções associadas  $g$  e  $h$ .

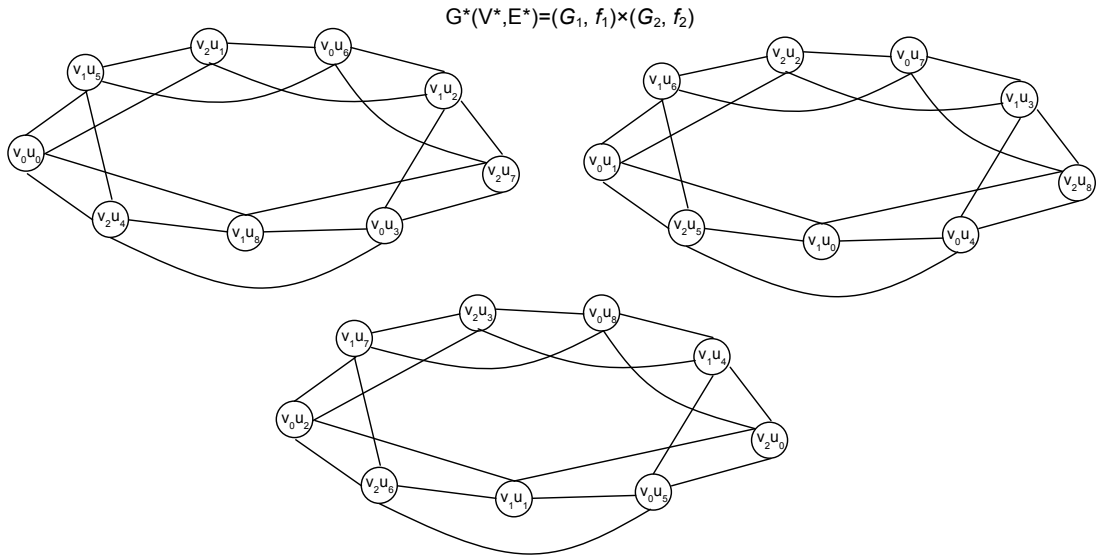


Figura 3.19: Grafo desconexo  $G^*(V^*, E^*)$  resultante do produto funcional entre os grafos  $G_1$  e  $G_2$  segundo  $f_1$  e  $f_2$ .

Ainda em relação à conexidade, é possível obter um grafo conexo como resultado do produto funcional, mesmo quando um dos grafos fatores é desconexo, como mostram as figuras 3.20, 3.21, 3.22, 3.23, 3.24 e 3.25. Neste exemplo, as aplicações de ligação  $f_1$  e  $f_2$  são definidas por  $f_1(x) = r_1$  para toda aresta  $x \in E_1$  e  $f_2(y) = r_2$  para toda aresta  $y \in E_2$ .

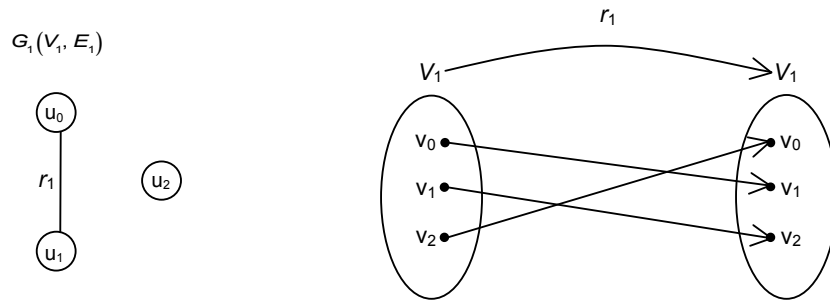


Figura 3.20: Grafo  $G_1(V_1, E_1)$  desconexo e a bijeção associada  $r_1$ .

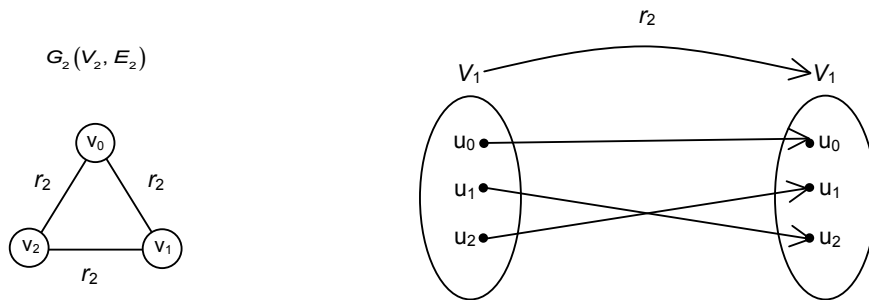


Figura 3.21: Grafo  $G_2(V_2, E_2)$  conexo e a bijeção associada  $r_2$ .

A partir da rotulação dos vértices de  $G_1$  e  $G_2$ , pode-se atribuir uma orientação arbitrária aos grafos fatores. Assim, para toda aresta  $\{u_i, u_j\} \in E_1$ , com  $i < j$ , associa-se  $r_1$  ao arco  $(u_i, u_j) \in E(D(G_1))$  e  $r_1^{-1}$  ao arco  $(u_j, u_i) \in E(D(G_1))$ . Igualmente, para toda aresta  $\{v_i, v_j\} \in E_2$ , com  $i < j$ , associa-se  $r_2$  ao arco  $(v_i, v_j) \in E(D(G_2))$  e  $r_2^{-1}$  ao arco  $(v_j, v_i) \in E(D(G_2))$ . Partindo do vértice  $(u_0, v_0) \in V^*$ , o arco  $(v_0, v_2) \in E(D(G_2))$  e  $r_2(u_0) = u_0$ , logo o arco  $((u_0, v_0), (u_0, v_2)) \in E^*$ . O vértice  $(u_0, v_2) \in V^*$ , o arco  $(v_2, v_1) \in E(D(G_2))$  e  $r_2^{-1}(u_0) = u_0$ , logo o arco  $((u_0, v_2), (u_0, v_1)) \in E^*$ . E o vértice  $(u_0, v_1) \in V^*$ , o arco  $(u_0, u_1) \in E(D(G_1))$  e  $r_1(v_1) = v_2$ , logo o arco  $((u_0, v_1), (u_1, v_2)) \in E^*$ .

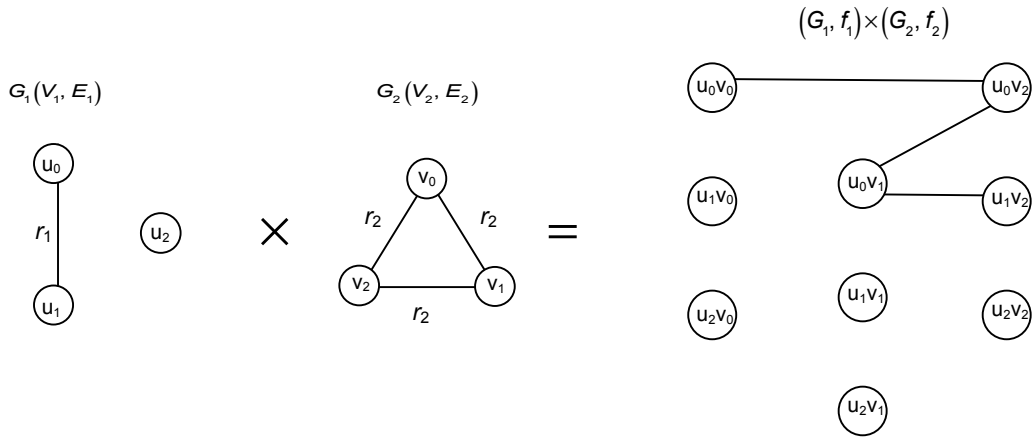


Figura 3.22: Produto Funcional de entre os grafos  $G_1$  e  $G_2$  segundo  $f_1$  e  $f_2$ .

Seguindo do vértice  $(u_1, v_2) \in V^*$ , o arco  $(v_2, v_1) \in E(D(G_2))$  e  $r_2^{-1}(u_1) = u_2$ , logo o arco  $((u_1, v_2), (u_2, v_1)) \in E^*$ . O vértice  $(u_2, v_1) \in V^*$ , o arco  $(v_1, v_0) \in E(D(G_2))$  e  $r_2^{-1}(u_2) = u_1$ , logo o arco  $((u_2, v_1), (u_1, v_0)) \in E^*$ . E o vértice  $(u_1, v_0) \in V^*$ , o arco  $(v_0, v_2) \in E(D(G_2))$  e  $r_2(u_1) = u_2$ , logo o arco  $((u_1, v_0), (u_2, v_2)) \in E^*$ .

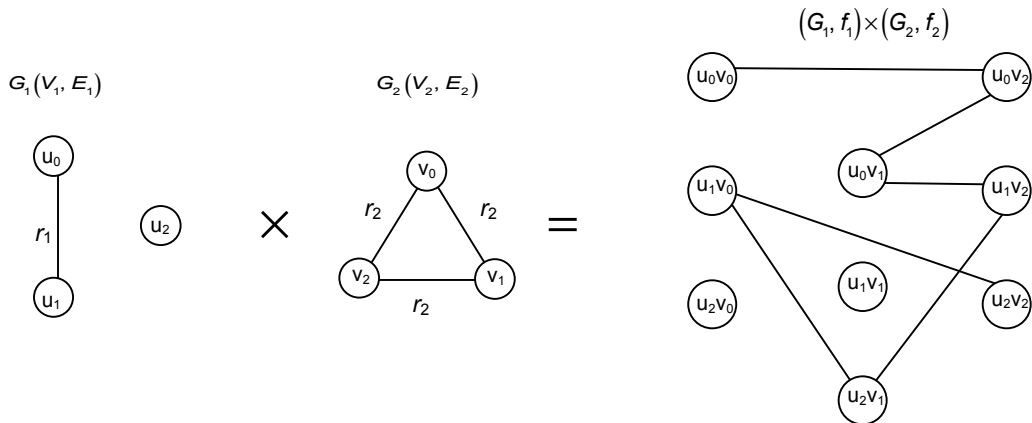


Figura 3.23: Produto Funcional de entre os grafos  $G_1$  e  $G_2$  segundo  $f_1$  e  $f_2$ .

Prosseguindo do vértice  $(u_2, v_2) \in V^*$ , o arco  $(v_2, v_1) \in E(D(G_2))$  e  $r_2^{-1}(u_2) = u_1$ , logo o arco  $((u_2, v_2), (u_1, v_1)) \in E^*$ . E o vértice  $(u_1, v_1) \in V^*$ , o arco  $(v_1, v_0) \in E(D(G_2))$  e  $r_2^{-1}(u_1) = u_2$ , logo o arco  $((u_1, v_1), (u_2, v_0)) \in E^*$ .

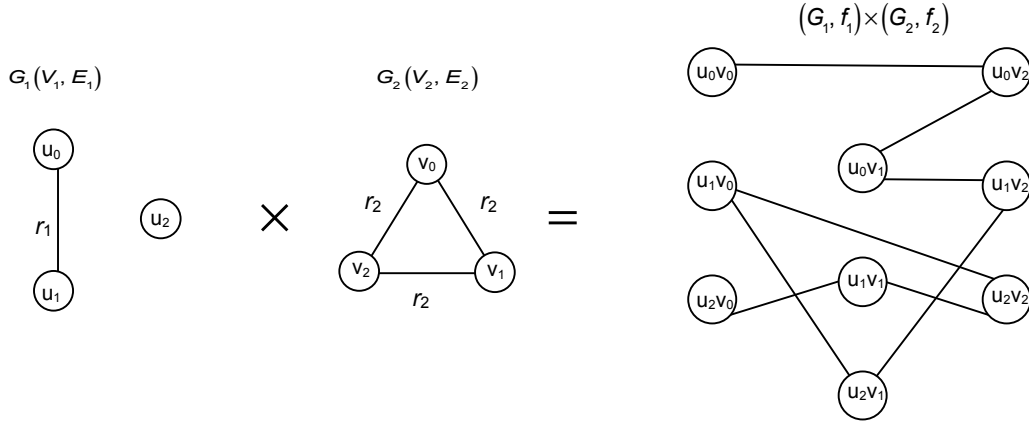


Figura 3.24: Produto Funcional de entre os grafos  $G_1$  e  $G_2$  segundo  $f_1$  e  $f_2$ .

O que já é suficiente para verificar a conexidade do grafo produto. Realizando o processo até o final, obtemos o grafo da figura 3.25.

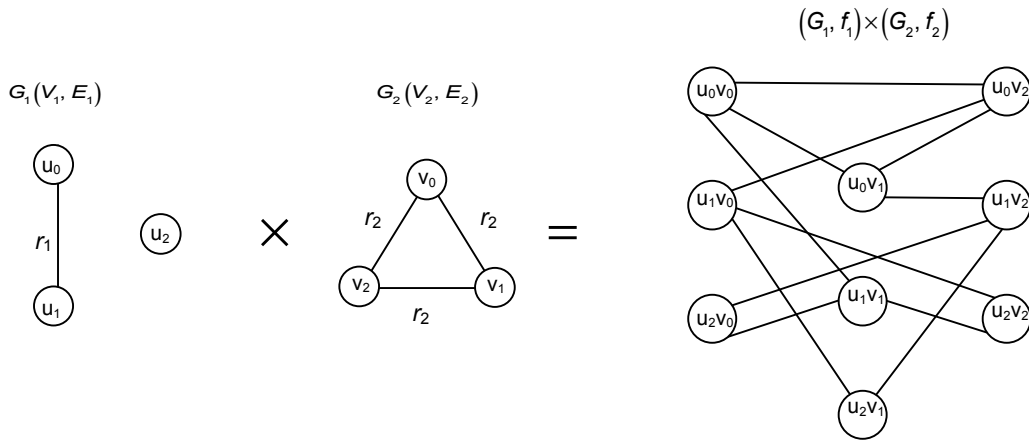


Figura 3.25: Grafo conexo resultante do produto funcional entre um grafo desconexo e um grafo conexo.

Convém ressaltar, que o produto cartesiano de dois grafos é conexo se, e somente se, os grafos fatores forem ambos conexos [38, 43]. Esse resultado é uma consequência do Teorema 3.3, pois o produto cartesiano pode ser obtido por meio do produto funcional, para isso basta que as aplicações de ligação  $f_1$  e  $f_2$  associem a função identidade a todos os arcos dos digrafos correspondentes. No entanto, consideramos que esse resultado impõe uma condição forte sobre uma das aplicações de ligação.

Por esse motivo, nos propomos a estudar condições mais fracas para garantir a conexidade do produto funcional quando os grafos fatores são conexos. O Teorema 3.6 melhora esse resultado, uma vez que relaxa consideravelmente a escolha das aplicações de ligação. Para melhor compreensão da demonstração faz-se necessário definir dois novos conceitos.

**Definição 3.6.** *Sejam  $G(V, E)$  um grafo,  $W$  um conjunto finito arbitrário e  $f : E(D(G)) \rightarrow F(W)$  uma aplicação. Diz-se que  $f$  é **centrada**, se existe  $x \in W$  tal que  $f(e)(x) = x$  para todo  $e \in E$ . Nesse caso,  $x$  será denominado **centroide** de  $f$ .*

**Teorema 3.6.** *Dados dois grafos  $G_1 = (V_1, E_1)$  e  $G_2 = (V_2, E_2)$  conexos e funcionalmente ligados pelas aplicações  $f_1 : E(D(G_1)) \rightarrow F(V_2)$  e  $f_2 : E(D(G_2)) \rightarrow F(V_1)$ , se uma das aplicações  $f_1$  ou  $f_2$  é centrada, então o produto funcional de  $G_1$  por  $G_2$  segundo  $f_1$  e  $f_2$  é conexo.*

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, suponhamos que  $f_2$  é centrada. Sejam  $y \in V_1$  o centroide de  $f_2$ ,  $G^*(V^*, E^*) = (G_1, f_1) \times (G_2, f_2)$  e  $V_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ . Como  $y$  é centroide de  $f_2$  e  $G_2$  é conexo, todos os vértices  $yu_i \in V^*$ , tal que  $i \in \{1, \dots, n\}$  estão na mesma componente conexa de  $G^*$ . Seja agora  $xu_{i_0} \in V^*$  arbitrário, como  $G_1$  é conexo existe um caminho  $xx_1x_2x_3 \dots x_p$  com  $x_p = y$  ligando  $x$  a  $y$  em  $G_1$ . Sejam  $u_{i_1} = f_2((x, x_1))(u_{i_0})$ ,  $u_{i_2} = f_2((x_1, x_2))(u_{i_1}) \dots u_{i_p} = f_2((x_{p-1}, x_p))(u_{i_{p-1}})$ . Logo o caminho  $xu_{i_0}x_1u_{i_1}x_2u_{i_2} \dots x_pu_{i_p}$  une o vértice  $xu_{i_0}$  com o vértice  $yu_{i_p}$ . Isso prova que todos os vértices de  $G^*(V^*, E^*) = (G_1, f_1) \times (G_2, f_2)$  estão na mesma componente conexa. Logo,  $G^*$  é conexo. □

As figuras 3.26 e 3.27 ilustram um esquema da prova do teorema 3.6. A figura 3.26 destaca a componente conexa do centroide  $y$  e um vértice arbitrário de  $G^*$ . Já a figura 3.27 mostra que existe um caminho  $xu_{i_0}x_1u_{i_1}x_2u_{i_2} \dots x_pu_{i_p}$  que une um vértice arbitrário  $xu_{i_0}$  com a componente conexa do centroide  $y$ .



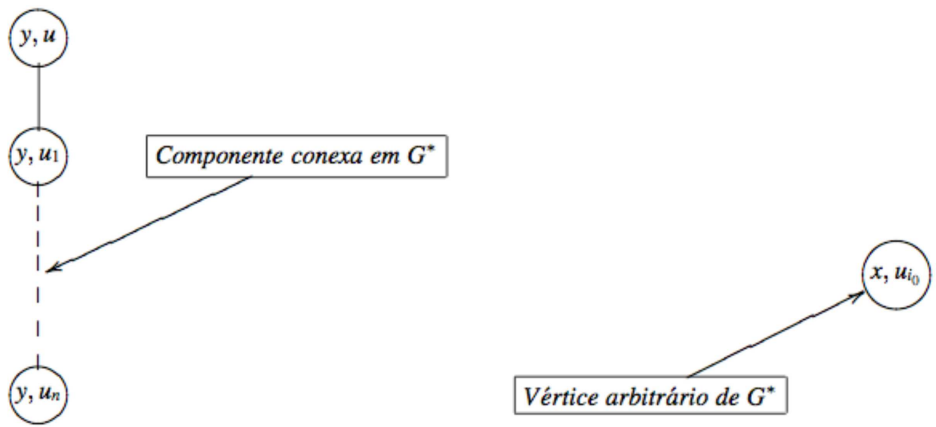


Figura 3.26: Componente conexa do centroide  $y$  e um vértice arbitrário de  $G^*$ .

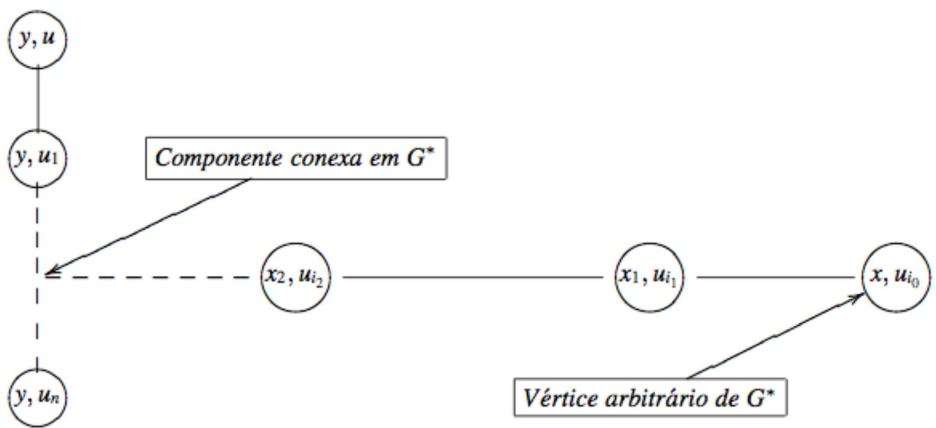


Figura 3.27: Caminho  $xu_{i_0}x_1u_{i_1}x_2u_{i_2} \dots x_pu_{i_p}$  que une o vértice  $xu_{i_0}$  com a componente conexa do centroide  $y$ .

# Capítulo 4

## Grafos Harmônicos

### 4.1 Introdução

Em [33, 41], LOZANO, SIQUEIRA e JURKIEWICZ introduziram o conceito do produto funcional e de grafos  $k$ -suporte, um tipo de grafo regular que tem como objetivo principal servir como gerador dos grafos harmônicos, para auxiliar na construção de uma família de grafos regulares que admitem uma coloração de vértices com folga de ordem  $\Delta$  com no máximo  $\Delta + 1$  cores. Além disso, os autores provaram alguns resultados que relacionam a coloração de vértices com folga de ordem  $\Delta$  e coloração total equilibrada. Dentre esses resultados, destacam-se a extensão de uma coloração com folga de ordem  $\Delta$  para uma coloração total equilibrada em grafos regulares [41], a prova de que o produto cartesiano de um ciclo por seu complemento é um grafo harmônico [32] e o fato de que a família dos grafos harmônicos pode ser estendida infinitamente preservando a regularidade e a coloração com folga  $\Delta$  com  $\Delta + 1$  cores [33].

Este capítulo tem como objetivo mostrar que o produto funcional permite gerar infinitos grafos harmônicos a partir de qualquer grafo regular. Em trabalho conjunto com Lozano e Siqueira publicado em [28], apresentamos duas formas distintas de se obter grafos harmônicos empregando o produto funcional de grafos que generalizam os resultados baseados nos grafos  $k$ -suporte [33, 41] e no produto

cartesiano [32]. Por fim, provamos que existe uma relação entre a regularidade e número de vértices do grafo que garante a existência de grafos harmônicos. Esse resultado revela uma condição necessária para existência dos grafos harmônicos.

**Definição 4.1** (Grafo  $k$ -suporte). [33, 41] Dado um número natural  $k$ ,  $k \geq 3$ , o grafo  $G = (V, E)$  é um  $k$ -suporte se satisfaz as seguintes condições:

1.  $G$  é um grafo regular de grau  $k - 3$ ;
2. Existe uma aplicação  $f : E(G) \rightarrow F(I_k)$  tal que  $G$  e  $C_k$  estão funcionalmente ligados por  $f$  e  $Id$ , no qual  $Id : E(C_k) \rightarrow F(I_{|V|})$  é a aplicação que a cada arco de  $D(C_k)$  faz corresponder a função identidade;
3. O grafo  $G^* = (f_1, G) \times (Id, C_k)$  pode ser colorido com folga  $\Delta(G^*)$  com  $\Delta(G^*) + 1$  cores.

**Definição 4.2.** [32] Um grafo  $G(V, E)$  regular é dito **harmônico**, se admite uma coloração de vértices com folga  $\Delta$  com  $\Delta + 1$  cores.

Nem todo grafo regular admite uma coloração com folga  $\Delta$  com  $\Delta + 1$  cores, como é o caso do toro  $C_3 \square C_5$  ilustrado na figura 4.1.

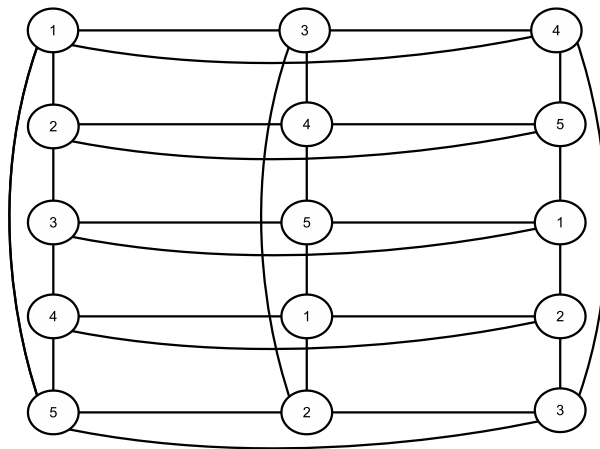


Figura 4.1: Toro: produto cartesiano entre um  $C_3$  e um  $C_5$  não é harmônico.

## 4.2 Novos Resultados

Para melhor compreensão dos resultados que se seguem enunciamos um Teorema de Petersen descrito em [50].

**Teorema 4.1.** (PETERSEN, 1891) *Se  $G(V, E)$  é um grafo  $2k$ -regular, então  $G$  é 2-fatorizável.*

O Teorema a seguir mostra como gerar um grafo harmônico a partir de um grafo regular qualquer e seu complemento.

**Teorema 4.2.** *Para todo grafo regular  $G$  e seu complemento  $G'$  existem aplicações de ligação  $f_1$  e  $f_2$ , tais que  $(G, f_1) \times (G', f_2)$  é um grafo harmônico.*

*Demonstração.* Inicialmente, observe que para todo grafo regular  $G$ , se  $n = |V(G)|$  é ímpar, então  $\Delta(G)$  e  $\Delta(G')$  são pares. Se  $n = |V(G)|$  é par, então  $\Delta(K_n)$  é ímpar e, como  $\Delta(K_n) = \Delta(G) + \Delta(G')$ , tem-se que  $\Delta(G)$  ou  $\Delta(G')$  é par. Suponhamos que  $\Delta(G')$  é par. Pelo Teorema 4.1, existe uma decomposição em 2-fatores de  $G'$ , sejam  $F_1, F_2, F_3, \dots, F_t$  os 2-fatores da decomposição de  $G'$ , cada 2-fator  $F_i$  é substituído por um ciclo orientado e definimos a aplicação  $b : V(F) \rightarrow V(F)$  tal que se  $(u, v) \in E(F)$ , então  $b(u) = v$ .

Claramente,  $b$  é uma bijeção e cada 2-fator tem associada uma bijeção de vértices de  $G$ . A aplicação  $f_1$  associa a identidade a todos os pares de arcos associados às arestas de  $G$ . A aplicação  $f_2$  associa a bijeção  $b$  a todo arco do ciclo. No ciclo em sentido inverso, associamos a bijeção inversa. Agora, se  $V(G) = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_p\}$ , damos a cada vértice na forma  $(x, v_p)$  a cor  $p$ . Por construção, a coloração obtida em  $(G, f_1) \times (G', f_2)$  é uma coloração com folga  $\Delta$  com  $\Delta + 1$  cores. Se  $\Delta(G')$  é ímpar, então  $\Delta(G)$  é par. Portanto, basta trocar as posições de  $G$  e  $G'$ , no raciocínio anterior, para obter o resultado desejado. Logo,  $(G, f_1) \times (G', f_2)$  é um grafo harmônico.

□

A sequência de figuras abaixo ilustra o passo a passo da prova do teorema 4.2. A figura 4.2 destaca um grafo  $G$  (3-regular) com 8 vértices e seu complemento  $G'$ . A figura 4.3 mostra os ciclos obtidos da decomposição em 2-fatores do grafo complementar  $G'$  com orientações arbitrárias. As bijeções apresentadas na figura 4.4 são obtidas a partir da orientação dos ciclos gerados pela decomposição em 2-fatores do grafo complementar  $G'$ .

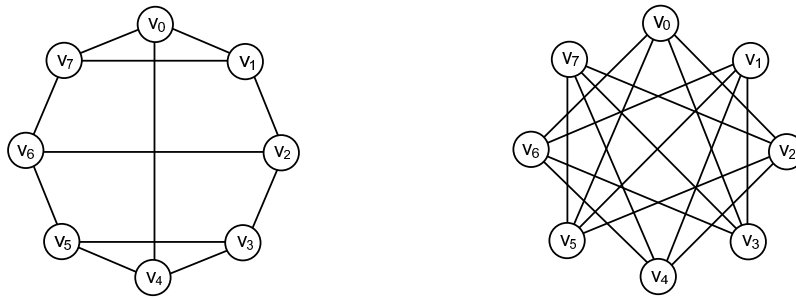


Figura 4.2: Grafo  $G$  (3-regular) e seu complemento  $G'$ .

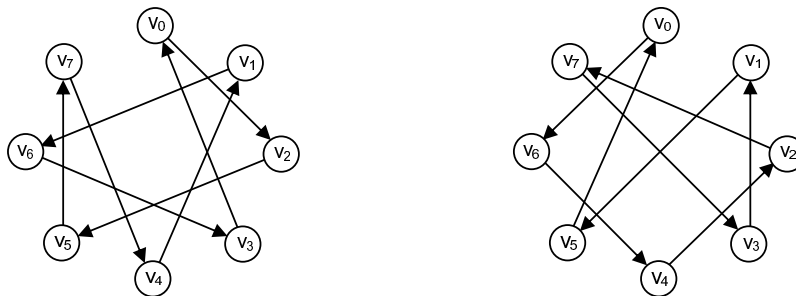


Figura 4.3: Ciclos obtidos da decomposição em 2-fatores do grafo complementar  $G'$  com uma orientação arbitrária.

$0 \rightarrow 2$	$0 \rightarrow 6$
$1 \rightarrow 6$	$1 \rightarrow 5$
$2 \rightarrow 5$	$2 \rightarrow 7$
$3 \rightarrow 0$	$3 \rightarrow 1$
$4 \rightarrow 1$	$4 \rightarrow 2$
$5 \rightarrow 7$	$5 \rightarrow 0$
$6 \rightarrow 3$	$6 \rightarrow 4$
$7 \rightarrow 4$	$7 \rightarrow 3$

Figura 4.4: Bijeções associadas aos ciclos da figura 4.3.

A figura 4.5 descreve o início do processo de construção do grafo harmônico, quando a aplicação  $f_1$  associa a identidade a todos os pares de arcos associados às arestas de  $G$ .

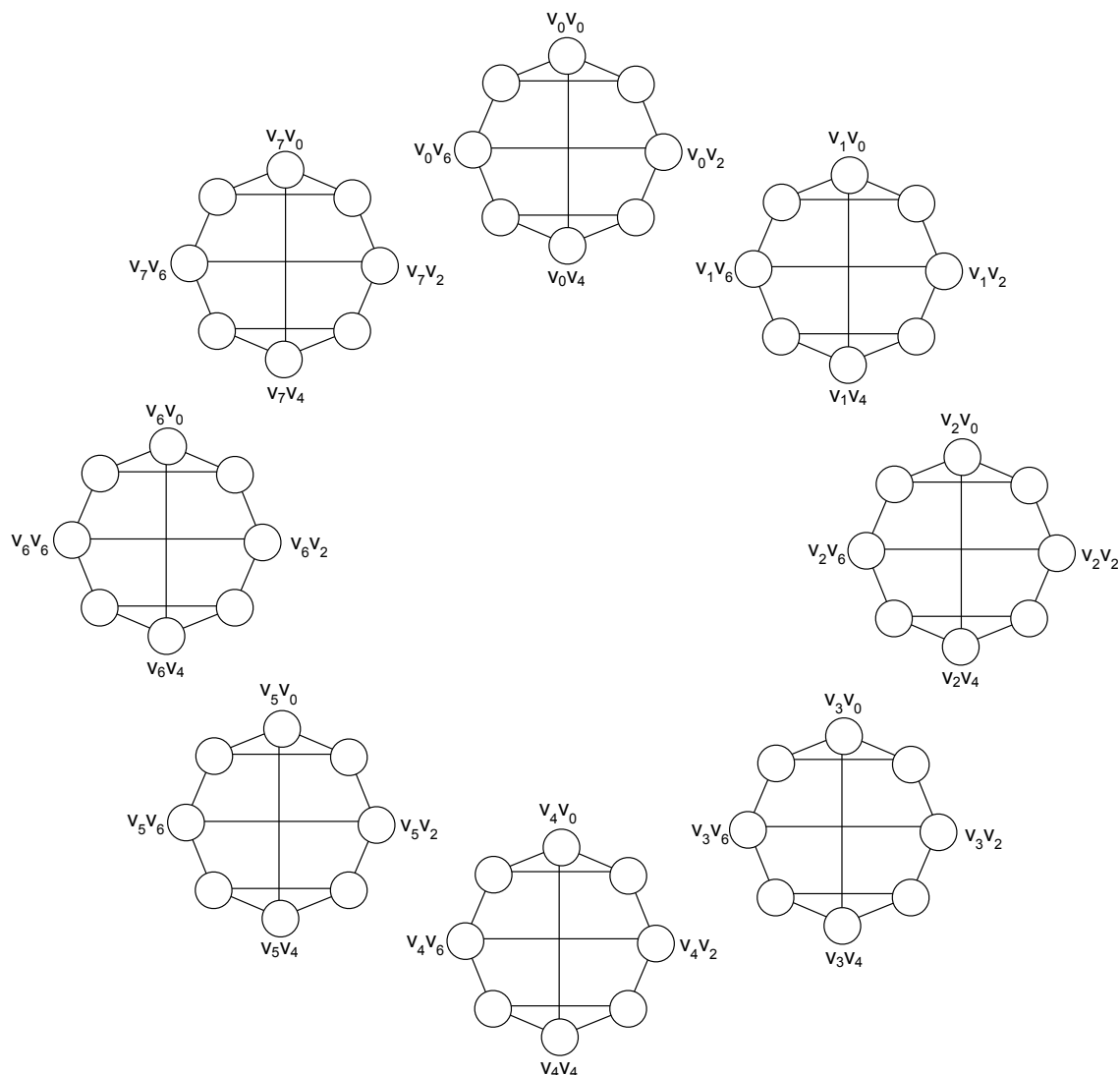


Figura 4.5: Início do processo de construção do grafo harmônico. A aplicação  $f_1$  associa a identidade a todos os pares de arcos associados às arestas de  $G$ .

Na figura 4.6, a aplicação  $f_2$  associa as bijeções da figura 4.4 a todo arco do ciclo, no ciclo em sentido inverso associa-se a bijeção inversa. Foram desenhadas somente as ligações dos vértices  $(v_0, v_0)$ ,  $(v_1, v_0)$  e  $(v_7, v_0)$ . Note que, se  $V(G) = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_p\}$  quando colorimos cada vértice da forma  $(x, v_p)$  com a cor  $p$ , a coloração obtida é uma coloração com folga  $\Delta$  com  $\Delta + 1$  cores.

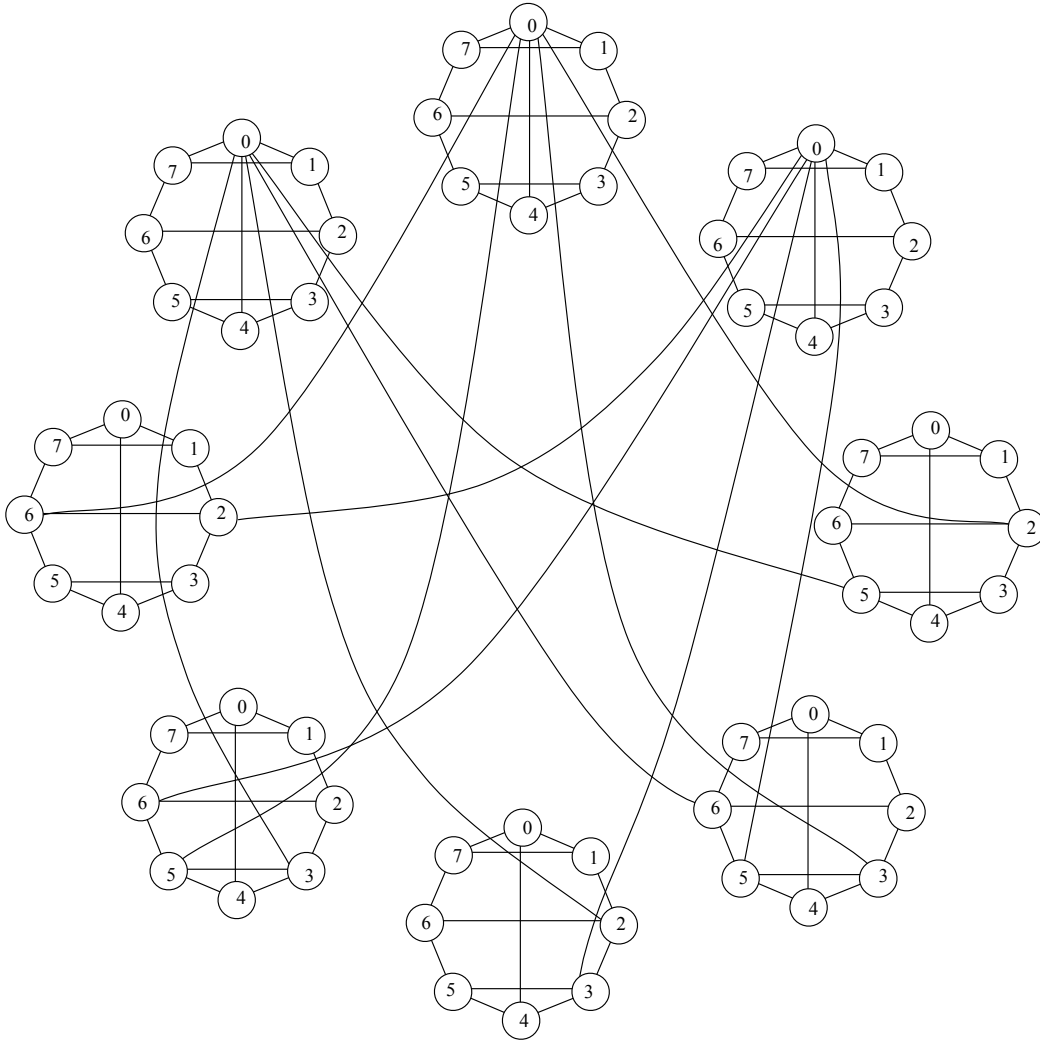


Figura 4.6: A aplicação  $f_2$  associa as bijeções da figura 4.4 a todo arco do ciclo, no ciclo em sentido inverso associamos a bijeção inversa. Foram desenhadas somente as ligações dos vértices  $(v_0, v_0)$ ,  $(v_1, v_0)$  e  $(v_7, v_0)$ .

**Teorema 4.3.** *Sejam  $G$  e  $G'$  um grafo regular e seu complemento. Se  $\Delta(G')$  é par, então para qualquer grafo  $H$  tal que  $\Delta(G') = \Delta(H)$  existem aplicações de ligação  $f_1$  e  $f_2$ , tais que  $(G, f_1) \times (H, f_2)$  é um grafo harmônico.*

*Demonstração.* Basta observar que tanto  $G'$  como  $H$  se decompõem na mesma quantidade de 2-fatores. Sejam  $F_1, F_2, F_3, \dots, F_t$  os 2-fatores da decomposição de  $G'$ ,  $r_1, r_2, \dots, r_t$  as bijeções associadas e  $K_1, K_2, \dots, K_t$  os 2-fatores da decomposição de  $H$  que serão substituídos pelos ciclos orientados  $O_1, O_2, \dots, O_t$ . A aplicação  $f_1$  faz

corresponder a identidade a todas as arestas de  $G$ . A aplicação  $f_2$  faz corresponder a cada arco orientado  $O_i$  a bijeção  $r_i$  e  $r_i^{-1}$  ao arco de sentido inverso, para todo  $i \in 1, 2, \dots, t$ . Agora, se  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ , damos a cada vértice na forma  $(x, v_p)$  a cor  $p$ . Novamente, por construção a coloração obtida em  $(G, f_1) \times (H, f_2)$  é uma coloração com folga  $\Delta$  com  $\Delta + 1$  cores. Logo,  $(G, f_1) \times (H, f_2)$  é um grafo harmônico.  $\square$

A sequência de figuras abaixo ilustra o passo a passo da prova do teorema 4.3. A figura 4.7 apresenta um grafo  $G$  (4-regular) com 7 vértices, seu complemento  $G'$  e um grafo  $H$  tal que  $\Delta(G') = \Delta(H)$ . A figura 4.8 mostra os ciclos obtidos da decomposição em 2-fatores do grafo complementar  $G'$  e do grafo  $H$  com orientações arbitrárias. A bijeção apresentada, na figura 4.9, é obtida a partir da orientação do ciclo gerado pela decomposição em 2-fator do grafo complementar  $G'$ . A figura 4.10 mostra o grafo harmônico resultante.

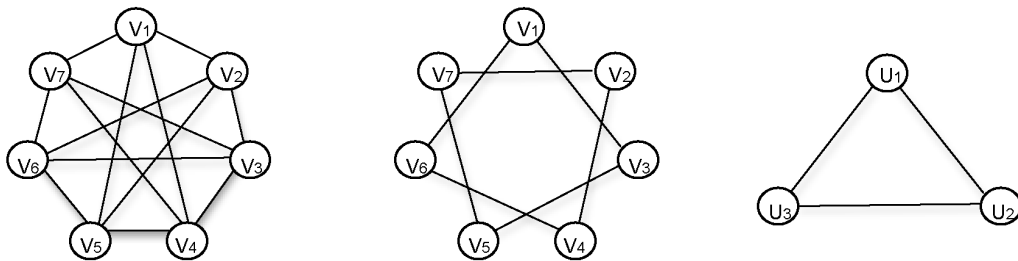


Figura 4.7: Grafo  $G$  (4-regular), seu complemento  $G'$  e o grafo  $H$ .

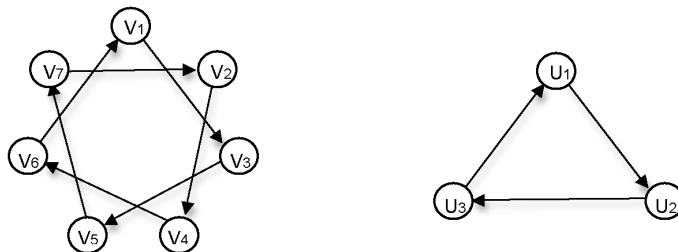


Figura 4.8: Ciclos obtidos pela decomposição em 2-fatores dos grafos  $G'$  e  $H$  com orientação arbitrária.



- $1 \rightarrow 3$
- $2 \rightarrow 4$
- $3 \rightarrow 5$
- $4 \rightarrow 6$
- $5 \rightarrow 7$
- $6 \rightarrow 1$
- $7 \rightarrow 2$

Figura 4.9: Bijeção associada ao ciclo da figura 4.8.

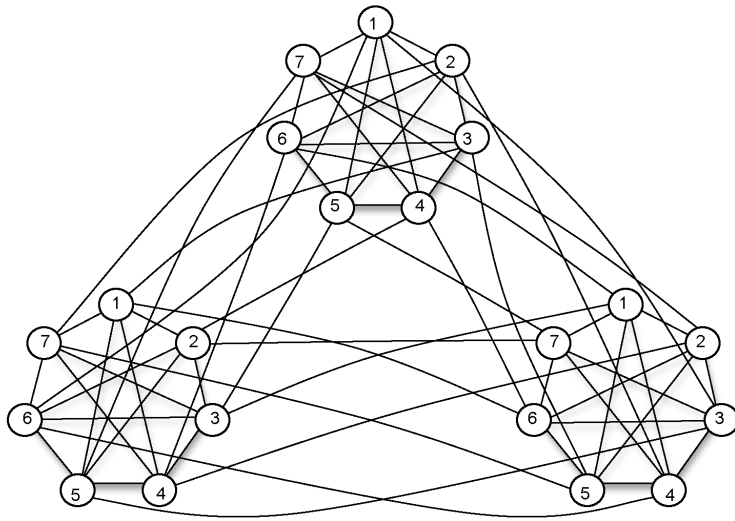
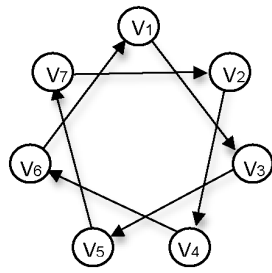


Figura 4.10: Grafo harmônico (6-regular) colorido com folga 6 com 7 cores.

Na sequência, apresentamos alguns exemplos de grafos harmônicos obtidos a partir dos Teoremas 4.2 e 4.3. As figuras 4.11, 4.12 e 4.13 ilustram um grafo harmônico gerado pela aplicação do Teorema 4.2 em um grafo 4-regular de ordem 7 e seu complemento.



Figura 4.11: Grafo  $G$  (4-regular) e seu complemento  $G'$ .



- $1 \rightarrow 3$
- $2 \rightarrow 4$
- $3 \rightarrow 5$
- $4 \rightarrow 6$
- $5 \rightarrow 7$
- $6 \rightarrow 1$
- $7 \rightarrow 2$

Figura 4.12: Ciclo obtido pela decomposição em 2-fator de  $G'$  e sua bijeção associada.

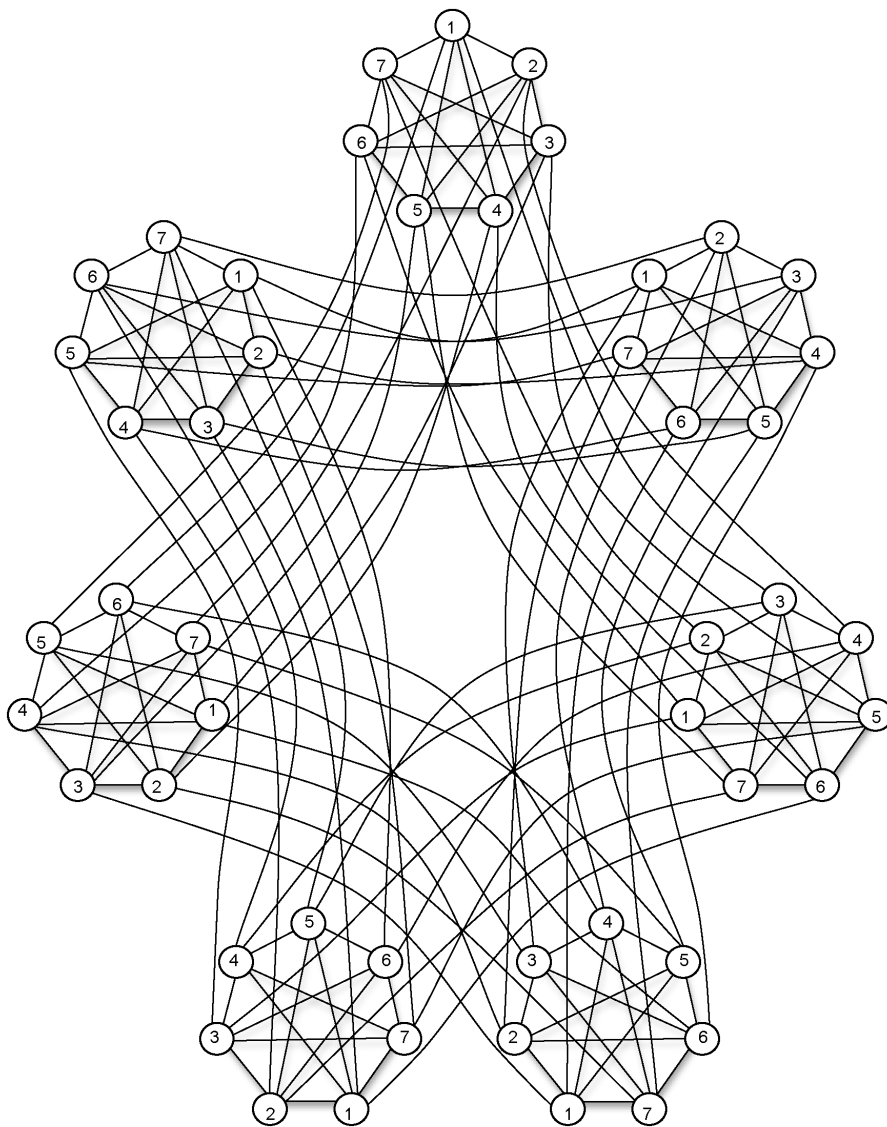


Figura 4.13: Grafo harmônico (6-regular) colorido com folga 6 com 7 cores.

As figuras 4.14, 4.15, 4.16 e 4.17 ilustram o grafo harmônico gerado pela aplicação do Teorema 4.3 em um grafo  $G$  (3-regular) com 6 vértices, seu complemento  $G'$  e um grafo  $H$  tal que  $\Delta(G') = \Delta(H)$ .

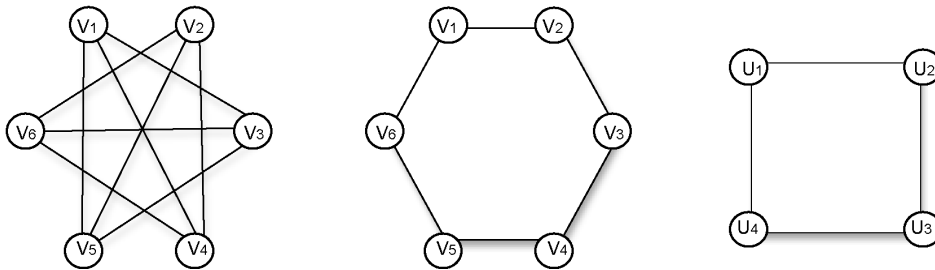


Figura 4.14: Grafo  $G$  (3-regular), seu complemento  $G'$  e o grafo  $H$ .

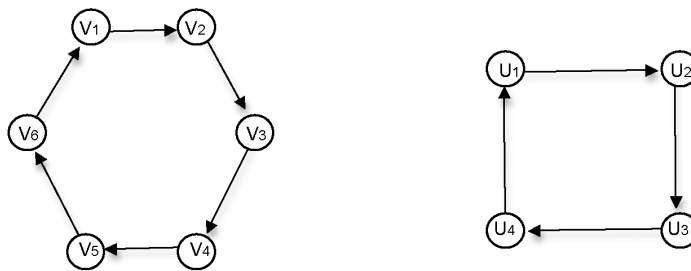


Figura 4.15: Ciclos obtidos pela decomposição em 2-fatores dos grafos  $G'$  e  $H$  com orientação arbitrária.

$1 \rightarrow 2$   
 $2 \rightarrow 3$   
 $3 \rightarrow 4$   
 $4 \rightarrow 5$   
 $5 \rightarrow 6$   
 $6 \rightarrow 1$

Figura 4.16: Bijeção associada ao ciclo da figura 4.15.

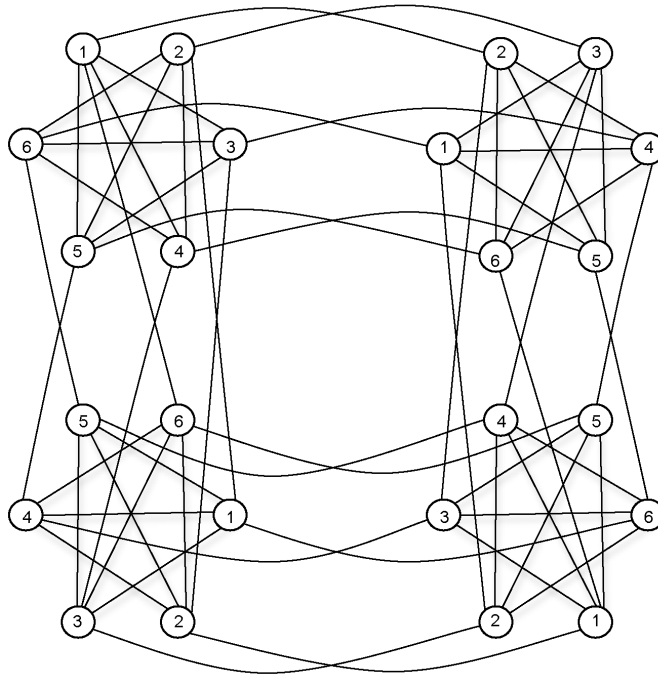


Figura 4.17: Grafo harmônico (5-regular) colorido com folga 5 com 6 cores.

As figuras 4.18, 4.19 e 4.20 ilustram o grafo harmônico gerado pela aplicação do Teorema 4.2 em um ciclo de ordem 5 e seu complemento. A figura 4.21 mostra a coloração total equilibrada do grafo harmônico obtida como consequência do Teorema 2.3.

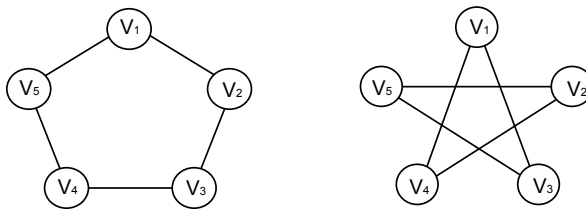


Figura 4.18: Grafo  $G$  e seu complemento  $G'$ .

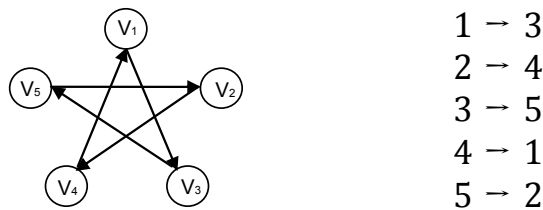


Figura 4.19: Ciclo obtido pela decomposição em 2-fator de  $G'$  e sua bijeção associada.

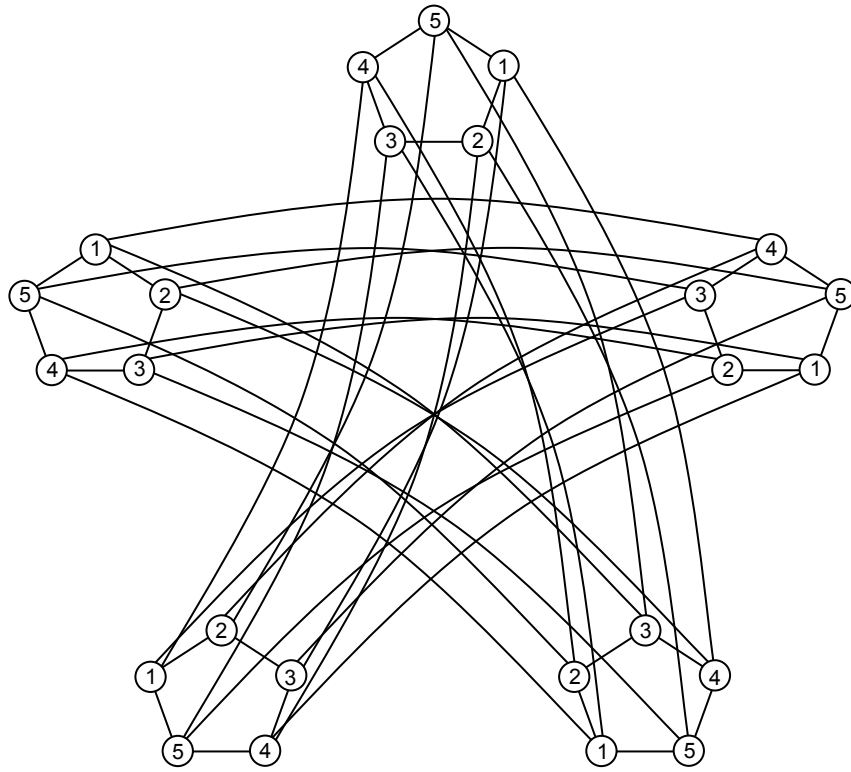


Figura 4.20: Grafo harmônico (4-regular) colorido com folga 4 com 5 cores.

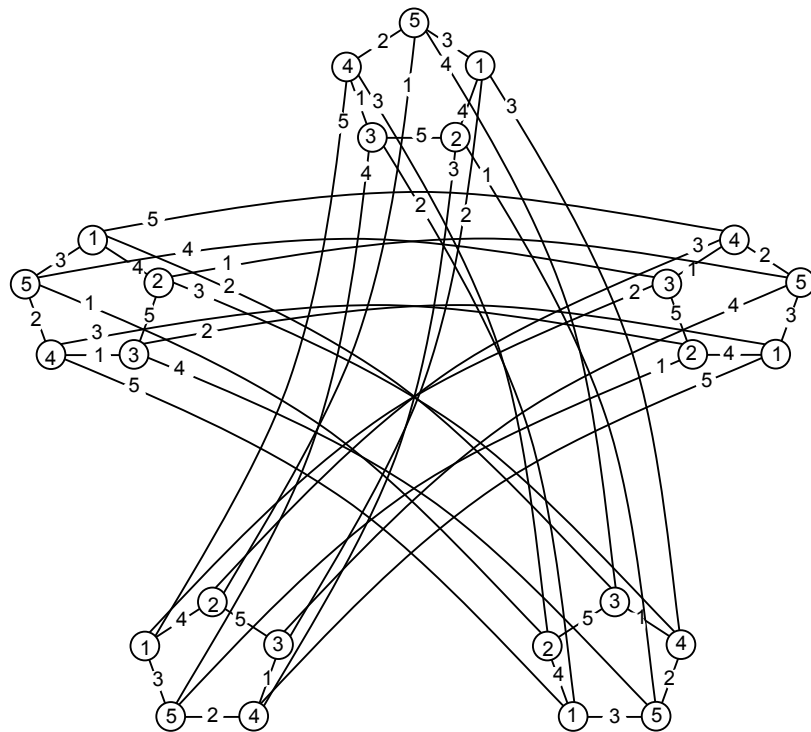


Figura 4.21: Coloração total equilibrada de um grafo harmônico (4-regular) com 5 cores.

As figuras 4.22, 4.23, 4.24 e 4.25 destacam o harmônico gerado pela aplicação do Teorema 4.3 em dois ciclos,  $C_5$  e  $C_3$ . A figura 4.26 mostra a coloração total equilibrada do grafo harmônico obtida como consequência do Teorema 2.3.

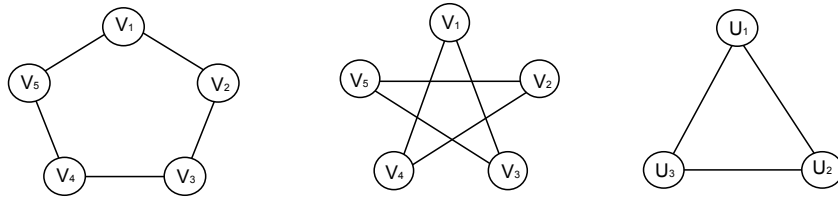


Figura 4.22: Grafo  $G$ , seu complemento  $G'$  e o grafo  $H$ .

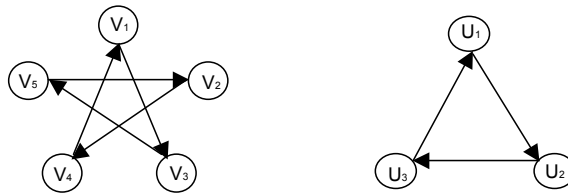


Figura 4.23: Ciclos obtidos pela decomposição em 2-fatores dos grafos  $G'$  e  $H$  com orientação arbitrária.

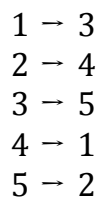


Figura 4.24: Bijeção associada ao ciclo da figura 4.23.

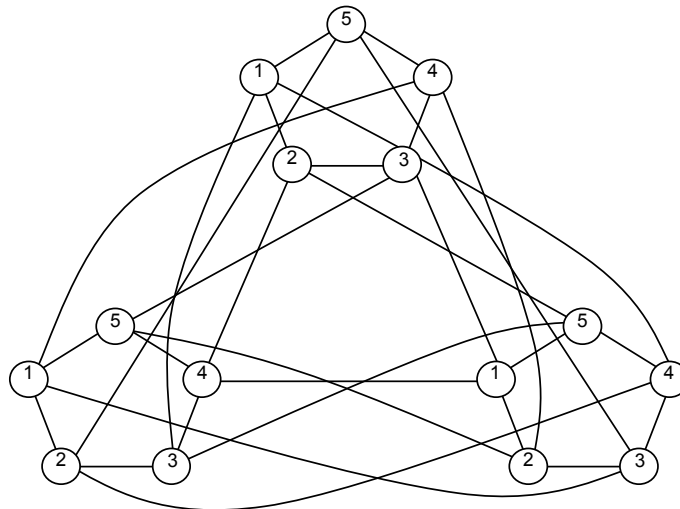


Figura 4.25: Grafo harmônico (4-regular) colorido com folga 4 com 5 cores.

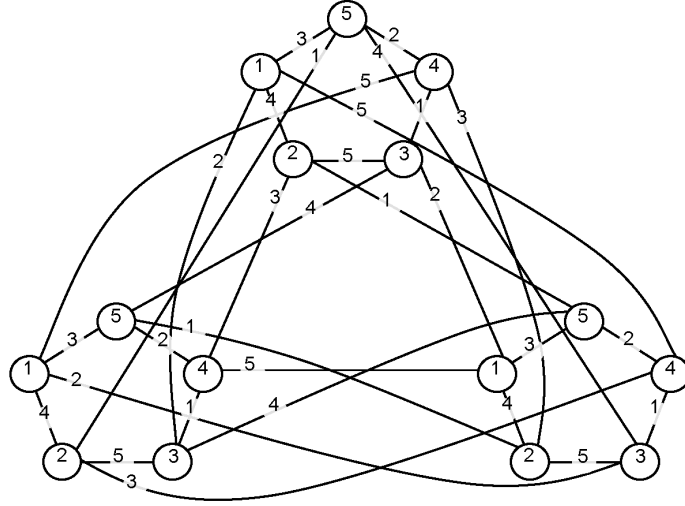


Figura 4.26: Coloração total equilibrada de um grafo harmônico (4-regular) com 5 cores.

### 4.2.1 Outra Construção

O produto funcional de grafos não é a única forma de gerar grafos harmônicos, pois existe uma relação entre a regularidade e o número de vértices do grafo que garante a existência de grafos harmônicos como mostra o Teorema 4.4.

**Teorema 4.4.** *Sejam  $n$  e  $k \in \mathbb{N}$ , se  $(k + 1)|n$ , então existe um grafo conexo harmônico  $k$ -regular com  $n$  vértices.*

*Demonstração.* Sejam  $n, k$  e  $t \in \mathbb{N}$  tais que  $n = t \cdot (k + 1)$ , se  $t = 1$ , então o grafo  $K_n$  é o grafo harmônico procurado. Caso contrário, vamos construir o grafo  $G(V, E)$  como se segue:

Seja  $V = \{v_{10}, \dots, v_{1k}, v_{20}, \dots, v_{2k}, \dots, v_{t0}, \dots, v_{tk}\}$ , definimos o conjunto  $E$  de arestas da seguinte forma:

Dois vértices  $v_{ij}$  e  $v_{i'j'}$ , com  $i, i' \in \{1, 2, \dots, t\}$  e  $j, j' \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$ , são adjacentes quando:

- Para  $i = i'$ , se  $j = 0$ , então  $j' \neq 1$ ;
- Para  $i' = i + 1 \pmod{t}$ , se  $j = 0$ , então  $j' = 1$ .

A cada vértice  $v_{ij}$ , damos a cor  $j$  do conjunto  $\{0, 1, 2, \dots, k\}$ . O resultado é uma coloração com folga  $\Delta(G)$  que utiliza  $\Delta + 1$  cores. Logo, o grafo  $G$  é harmônico.  $\square$

As figuras 4.27, 4.28, 4.29 e 4.30 ilustram a prova do Teorema 4.4. Para exemplificar, adotamos  $n = 15$ ,  $k = 4$  e  $t = 3$ .

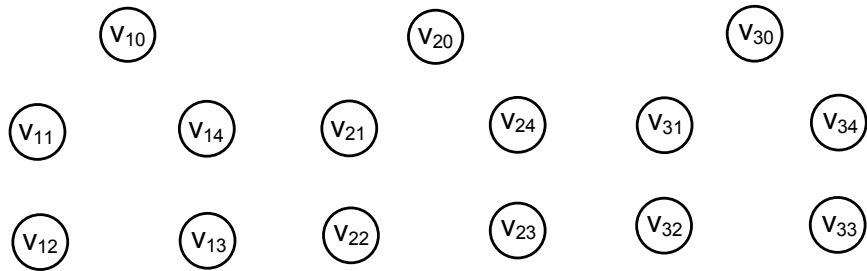


Figura 4.27: Conjunto de Vértices  $V = \{v_{10}, \dots, v_{14}, v_{20}, \dots, v_{24}, \dots, v_{t0}, \dots, v_{34}\}$ .

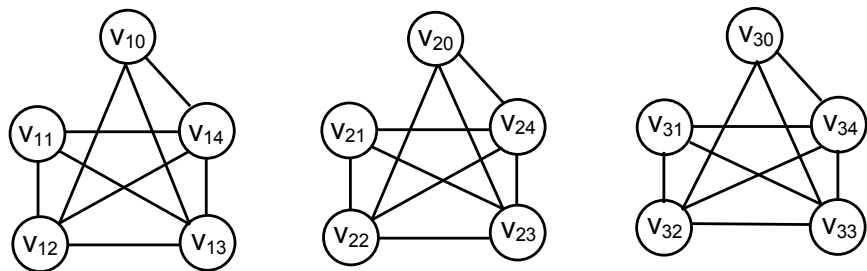


Figura 4.28: Conjunto de arestas de  $G(V, E)$ , de acordo com a primeira condição.

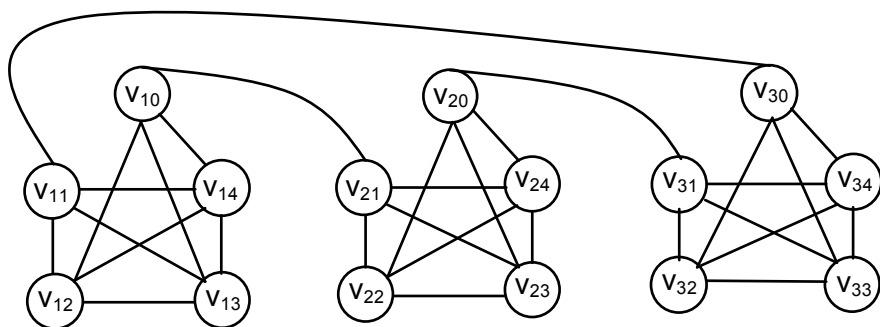


Figura 4.29: Conjunto de arestas de  $G(V, E)$ , de acordo com a primeira e a segunda condição.



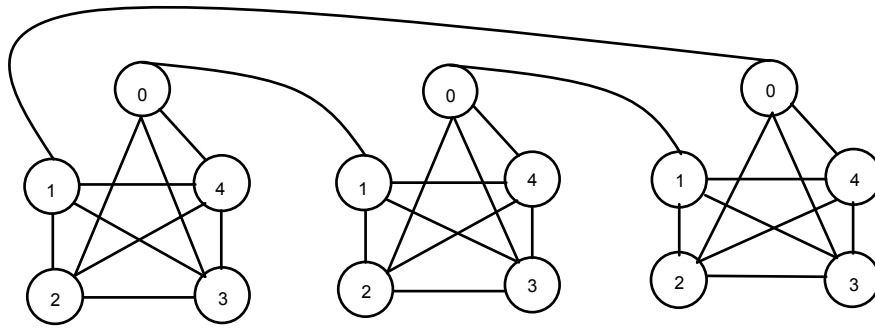


Figura 4.30: Grafo harmônico (4-regular) colorido com folga 4 com 5 cores.

A figura 4.31 mostra uma coloração total equilibrada do Grafo 4-harmônico obtida como consequência do Teorema 2.3.

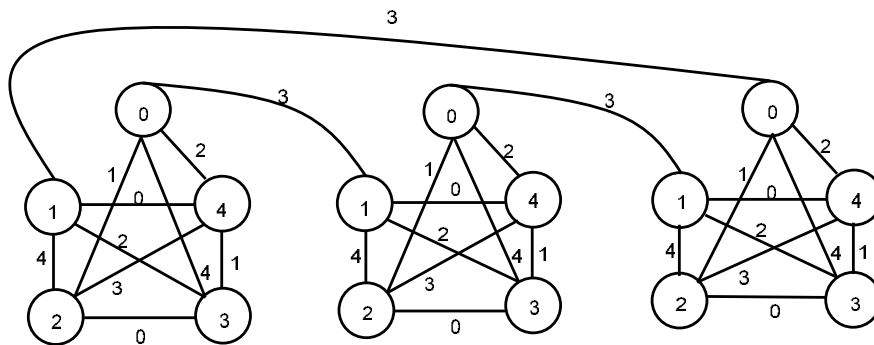


Figura 4.31: Coloração total equilibrada do Grafo harmônico resultante.

Vale destacar que todo grafo harmônico, por definição, satisfaz o Teorema 4.4. Portanto, esse resultado oferece uma condição necessária para existência dos grafos harmônicos.

# Capítulo 5

## Conclusões

Este capítulo apresenta os resultados obtidos neste trabalho e as propostas para a continuidade dos estudos.

### 5.1 Conclusões

Nessa tese, investigamos o produto funcional de grafos, suas propriedades e aplicações. O produto funcional é uma generalização do produto cartesiano e, assim como outras operações em grafos, gera um novo grafo a partir de seus fatores. Portanto, pode ser utilizado como ferramenta para construção de novas estruturas. Sob essa perspectiva, suscitamos três questionamentos sobre esse novo produto:

1. Quais as propriedades algébricas do produto funcional de grafos?
2. Como o produto funcional de grafos se comporta em relação aos principais invariantes de grafos, isto é, qual a relação entre um determinado invariante no grafo produto com esse mesmo invariante nos grafos fatores?
3. Como gerar a família dos grafos harmônicos a partir do produto funcional de grafos?

Propriedades como a comutatividade e a existência da unidade (elemento neutro) são resultados já conhecidos. Procuramos estudar a associatividade do produto funcional de grafos. A partir do teorema 3.2, o produto funcional pode ser usado para gerar famílias de grafos com a mesma sequência de graus, pois quando alteramos as bijeções associadas pelas aplicações de ligação no produto funcional entre dois grafos, obtemos grafos distintos (não isomórficos) que compartilham a mesma sequência de graus. Por essa razão, mostramos que, no conjunto dos grafos, a relação “ter a mesma sequência de graus” é uma relação de equivalência e o produto funcional é associativo nas classes de equivalência.

O estudo da associatividade fora das classes de equivalência mostrou ser de difícil tratamento, porque, dependendo da ordem em que se está realizando o produto e da cardinalidade do conjunto de vértices dos grafos fatores, é preciso lidar com diferentes domínios nas aplicações de ligação, condição que dificulta a escolha das bijeções adequadas. Como já destacamos, o produto funcional de grafos não é associativo, mas o fato do produto cartesiano, um caso particular do produto funcional, ser associativo nos permite investigar quais são as condições que garantem a associatividade do produto funcional de grafos.

Em relação aos invariantes de grafos, estudamos a conexidade do produto funcional. Apresentamos condições em que o produto funcional de grafos bipartidos gera um grafo desconexo e, em seguida, generalizamos esse resultado para grafos  $k$ -partidos. Mostramos que é possível obter grafos conexos como resultado do produto funcional, mesmo quando um dos grafos fatores é desconexo. Melhoramos o resultado apresentado em [33], que garante a conexidade do grafo produto quando os grafos fatores são conexos.

Quanto à aplicação do produto funcional na construção dos grafos harmônicos, apresentamos duas formas distintas de se obter essa família de grafos regulares. Inicialmente, provamos que para todo grafo regular  $G$  e seu complemento  $G'$  existem aplicações de ligação tais que o grafo produto é harmônico. Em seguida, provamos que para qualquer grafo regular  $G$  e seu complemento  $G'$ , se  $\Delta(G')$  é par, então para qualquer grafo  $H$  tal que  $\Delta(G') = \Delta(H)$ , existem aplicações de ligação tais que o

grafo produto é harmônico.

Esses resultados generalizam os anteriores, baseados nos grafos  $k$ -suporte [33, 41] e no produto cartesiano [32]. Além disso, mostram que a partir do produto funcional, a família dos grafos harmônicos pode ser estendida infinitamente preservando a regularidade e a coloração de vértices com folga  $\Delta$  com  $\Delta + 1$  cores. Além do mais, como consequência do Teorema 2.3, a família dos grafos harmônicos satisfaz a conjectura de Wang.

Por fim, mostramos que existe uma relação entre a regularidade e o número de vértices do grafo que garante a existência dos grafos harmônicos. Provamos que para  $n$  e  $k \in \mathbb{N}$ , se  $(k + 1)|n$ , existe um grafo conexo harmônico  $k$ -regular com  $n$  vértices. Nesse sentido, o produto funcional de grafos não é a única forma de gerar grafos harmônicos. Ademais, como todo grafo harmônico verifica as condições desse Teorema, tal resultado apresenta uma condição necessária para existência da família dos grafos harmônicos.

## 5.2 Continuidade do Trabalho

Como trabalhos futuros, pretendemos:

- Investigar em que condições o produto funcional de grafos é associativo.
- Estudar o comportamento de outros invariantes para o produto funcional de grafos, como por exemplo, número cromático, diâmetro e conectividade de vértices e arestas.
- Identificar os grafos que podem ser gerados a partir do produto funcional entre dois ou mais grafos fatores, ou melhor, como caracterizar os grafos produtos.
- Reconhecer famílias de grafos que podem ser obtidas pelo produto funcional de grafos.

- Ampliar as famílias de grafos que podem ser coloridas com folga  $\Delta$  com  $\Delta + 1$  cores.

Esperamos que nossa contribuição seja útil na obtenção de outros resultados, sobretudo em relação aos problemas de operação em grafos e coloração total equilibrada.

# Referências Bibliográficas

- [1] AURENHAMMER, F., HAGAUER, J., AND IMRICH, W. Cartesian graph factorization at logarithmic cost per edge. *Comput. Complexity* 2 (1992), 331–349.
- [2] BANIČ, I., AND ŽEROVNIK, J. The fault-diameter of cartesian products. *Advances in Applied Mathematics* 40, 1 (2008), 98–106.
- [3] BATAGELJ, V., AND PISANSKI, T. Hamiltonian cycles in the cartesian product of a tree and a cycle. *Discrete Mathematics* 38, 2-3 (1982), 311–312.
- [4] BEHZAD, M. *Graphs and their chromatic number*. Ph.D. thesis, Michigan State University, Michigan, USA, 1965.
- [5] BEHZAD, M., AND MAHMOODIAN, S. On topological invariants of the product of graphs. *Canad. Math. Bull* 12, 2 (1969), 157–166.
- [6] BONDY, J., AND MURTY, U. *Graph Theory with Applications*. North-Holland, New York, 1976.
- [7] BROERSMA, H. A general framework for coloring problems: old results, new results, and open problems. In *IJCCGGT* (2003), Springer, pp. 65–79.
- [8] ČADA, R., FLANDRIN, E., AND LI, H. Hamiltonicity and pancyclicity of cartesian products of graphs. *Discrete Mathematics* 309, 22 (2009), 6337–6343.
- [9] CHEN, B. L., FU, H. L., AND KO, M. T. Total chromatic number and chromatic index of split graphs. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing* 17 (1995), 137–146.
- [10] CHEW, K. H. Total chromatic number of regular graphs of odd order and high degree. *Discrete Mathematics* 154 (1996), 41–51.
- [11] DIESTEL, R. *Graph Theory*. Springer-Verlag, New York, 1997.

- [12] DIMAKOPOULOS, V. V., PALIOS, L., AND POULAKIDAS, A. S. On the hamiltonicity of the cartesian product. *Information processing letters* 96, 2 (2005), 49–53.
- [13] FEDER, T. Product graph representations. *J. Graph Theory* 16 (1992), 467–488.
- [14] FEIGENBAUM, J., HERSHBERGER, J., AND SHAFFER, A. A. A polynomial time algorithm for finding the prime factors of cartesian-products graphs. *Discrete Appl. Math.* 12 (1985), 123–138.
- [15] FIGUEREDO, C. M. H., MEIDANIS, J., AND MELLO, C. P. Total chromatic number and chromatic index of dually chordal graphs. *Information Processing Letters* 70 (1999), 147–152.
- [16] FRIEDMANN, C. V. P., LOZANO, A. R. G., MARKENZON, L., AND WAGA, C. F. E. M. Total coloring of block-cactus graphs. *The journal of combinatorial mathematics and combinatorial computing* 78 (2011), 273–283.
- [17] FU, H. Some results on equalized total coloring. *Congressus Numerantium* (1994), 111–120.
- [18] GAREY, M. R., AND JOHNSON, D. S. *Computers and intractability*, vol. 29. wh freeman New York, 2002.
- [19] GRAHAM, R. L., AND WINKLER, P. M. On isometric embedding of graphs. *Transactions of the American Mathematical Society* 288 (1985), 527–536.
- [20] GUPTA, R. P. The chromatic index and the degree of a graph. *Notices of the American Mathematical Society* 13 (1966), 66T–429.
- [21] HILTON, A. J. W., AND DUGDALE, J. K. The total chromatic number of regular graphs whose complement is bipartite. *Discrete Mathematics* 126 (1994), 87–98.
- [22] HOCHSTRASSER, B. A note on winkler’s algorithm for factoring a conected graph. *Discrete Mathematics* 109 (1992), 127–132.
- [23] HOLYER, I. The np-completeness of edge-coloring. *SIAM Journal on Computing* 10 (1981), 718–720.
- [24] IMRICH, W., KLAUZAR, S., AND RALL, D. *Topics in Graph Theory: Graphs and their Cartesian Products*. A K Peters Ltd, Wellesley, Massachusetts, 2008.

- [25] IMRICH, W., AND PETERIN, I. Recognizing cartesian products in linear time. *Discrete Mathematics* 307 (2007), 472–483.
- [26] KEMNITZ, A., AND MARANGIO, M. Total colorings of cartesian products of graphs. *Congres. Numer.* 165 (2003), 99–109.
- [27] LI, N., AND HOU, X. On the total  $\{k\}$ -domination number of cartesian products of graphs. *Journal of combinatorial optimization* 18, 2 (2009), 173–178.
- [28] LOZANO, A., SIQUEIRA, A., MATTOS, S., AND JURKIEWICZ, S. Produto funcional de grafos: um modelo para conexão de sistemas multiagentes. *TEMA (São Carlos)* 17, 3 (2016), 341–352.
- [29] LOZANO, A. R. G. *Coloração Total Equilibrada de Grafos*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2005.
- [30] LOZANO, A. R. G., FRIEDMANN, C. V. P., WAGA, C. F. E. M., AND MARKENZON, L. Coloração de vértices com folga. In *XLI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional* (2009).
- [31] LOZANO, A. R. G., JURKIEWICZ, S., AND FRIEDMANN, C. Coloração total equilibrada de grafos, um modelo para redes de interconexão. *Pesquisa Operacional* 28 (2008), 161–171.
- [32] LOZANO, A. R. G., SIQUEIRA, A. S., FRIEDMANN, C., AND JURKIEWICZ, S. Relationship between equitable total coloring and range coloring in some regular graphs. *Pesquisa Operacional* 36, 1 (2016), 101–111.
- [33] LOZANO, A. R. G., SIQUEIRA, A. S., JURKIEWICZ, S., AND FRIEDMANN, C. Produto funcional de grafos. *Tema - Tend. Mat. Apl. Comput.* 2 (2013), 221–232.
- [34] MARCU, D. On colouring products of graphs. *Mathematica Bohemica* 121, 1 (1996), 69–71.
- [35] NETTO, P. O. B. *Grafos: Teorias, Modelos Algoritmos*. Edgard Blucher, Rio de Janeiro, 2003.
- [36] ROSENFELD, M., AND BARNETTE, D. Hamiltonian circuits in certain prisms. *Discrete Mathematics* 5, 4 (1973), 389–394.
- [37] SABIDUSSI, G. Graphs with given group and given graph-theoretical properties. *Math. Z.* 72 (1956), 446–457.



- [38] SABIDUSSI, G. Graph multiplication. *Math. Z.* 72 (1960), 446–457.
- [39] SEOUD, M. Total chromatic numbers. *Applied mathematics letters* 5, 6 (1992), 37–39.
- [40] SEOUD, M. A., MAQSoud, A. E. I. A. E., WILSON, R. J., AND WILLIAMS, J. Total colourings of cartesian products. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 28, 4 (1997), 481–487.
- [41] SIQUEIRA, A. S. *Coloração Total Equilibrada em Subfamilias de Grafos Regulares*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2011.
- [42] SPACAPAN, S. Connectivity of cartesian products graphs. *Applied Mathematics Letters* 21 (2008), 682–685.
- [43] VIZING, V. The cartesian product of graphs. *Vyc. Systemy* 9 (1963), 30–43.
- [44] VIZING, V. Some unsolved problem in graph theory. *Math. Surv.* 23 (1968), 125–141.
- [45] VIZING, V. G. On an estimate of the chromatic class of a p-graph. *Metody Diskret* 3 (1964), 25–30.
- [46] VIZING, V. G. The chromatic class f a multigraph. *Cybernetics* 3 (1965), 32–41.
- [47] WANG, W.-F. Equitable total coloring of graphs with maximum degree 3. *Graphs and Combinatorics* 18 (2002), 677–685.
- [48] WINKLER, P. M. Factoring a graph in polynomial time. *European J. Combin.* 8 (1987), 209–212.
- [49] XU, J. M., AND YANG, C. Connectivity of cartesian products graphs. *Discrete Mathematics* 306 (2006), 159–165.
- [50] YAP, H. *Total colorings of graphs*. Springer, Berlin, 1996.
- [51] YIXIAN, Y., HUANGPING, L., FANGCHUN, Y., ET AL. Total chromatic numbers of product graphs. *Mathematica Applicata* 2 (1999), 021.
- [52] ZMAZEK, B., AND ZEROVNIK, J. Behzad-vizing conjecture and cartesian-product graphs. *Applied mathematics letters* 15, 6 (2002), 781–784.

# Índice Remissivo

- Árvore, 9
- Aplicação Centrada, 39
- Aplicação de Ligação, 21
- Caminho, 9
- Centroide, 39
- Ciclo, 9
- Cintura, 9
- Cobertura de Vértices, 10
- Cobertura Mínima, 10
- Coloração 2-Distante, 3
- Coloração com Folga, 13
- Coloração de Arestas, 11
- Coloração de Vértices, 11
- Coloração Total, 2
- Coloração Total Equilibrada, 12
- Componente Conexa, 9
- Conectividade, 11
- Conectividade de Arestas, 11
- Conectividade de Vértices, 11
- Conjunto Dominante, 11
- Conjunto Independente, 10
- Conjunto Máximo, 10
- Conjunto Maximal, 10
- Diâmetro, 9
- Distância, 9
- Emparelhamento, 10
- Emparelhamento Perfeito, 10
- Folha, 8
- Grafo, 8
- Grafo Bipartido, 10
- Grafo Bipartido Completo, 10
- Grafo Centopeia, 9
- Grafo Complementar, 9
- Grafo Completo, 8
- Grafo Conexo, 9
- Grafo Desconexo, 9
- Grafo Estrela, 10
- Grafo Finito, 8
- Grafo Harmônico, 42
- Grafo k-fator, 9
- Grafo k-fatorizável, 9
- Grafo k-partido, 10
- Grafo k-partido Completo, 10
- Grafo k-regular, 8
- Grafo primo, 1
- Grafo Simples, 8
- Grafo Trivial, 1
- Grau, 8
- Grau Mínimo, 8
- Grau Máximo, 8
- Índice Cromático, 11
- Isomorfismo, 11

Laço, 8

M-saturado, 10

Número Cromático, 11

Número Cromático com Folga, 13

Número Cromático Total, 2

Número Cromático Total Equilibrado, 12

Número de Cobertura, 10

Número de Dominância, 11

Número de independência, 10

Ordem, 8

Produto Cartesiano de Grafos, 15

Produto Funcional de Grafos, 21

Propriedades do Produto Funcional, 29

Sequência de Graus, 8

Subgrafo, 8

Subgrafo Gerador, 9

Subgrafo Induzido, 9

Tamanho, 8