

**Relatório Coppead** é uma publicação do Instituto COPPEAD de Administração da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)

**Comissão de Pesquisa**

Angela Rocha  
Paulo Fernando Fleury  
Ricardo Leal

**Gerência de Publicações**

Simone da Rocha Weitzel

**Editoração Eletrônica**

Adriana Baptista Pereira

**Revisão e Copidesque**

Martha Amália Dias de Sá

Ficha Catalográfica elaborada pela Biblioteca do COPPEAD/UFRJ



Central de atendimento  
Caixa Postal 68514  
Ilha do Fundão  
21941-970 – Rio de Janeiro – RJ  
Telefone: 21-598-9898  
Fax: 21-598-9848  
e-mail: atendimento@coppead.ufrj.br  
Home-page: <http://www.coppead.ufrj.br>

# Mudanças Repentinas na Variância Condicional e as Conseqüências para o Prêmio de Opções

*Ricardo Leal*

*O processo estocástico da variância condicional estimada por modelos da família GARCH não é monotônico ou suave e apresenta mudanças repentinas. Essas mudanças são associadas a choques, tais como a crise asiática, que levam a uma mudança de patamar na variância condicional. Profissionais do mercado utilizando a volatilidade condicional obtida de modelos GARCH que não consideram as mudanças repentinas na variância podem sub ou superestimar a volatilidade das ações, levando a uma má especificação do prêmio. Neste trabalho apresento evidência de que a variância condicional sofre mudanças repentinas para um conjunto de seis ações com opções negociadas na BOVESPA. Apresento evidência, também, de que o coeficiente do efeito GARCH torna-se insignificante depois que as mudanças repentinas na variância condicional são incluídas no modelo. Para modelar a variância, utilizo a variante de Glosten et al. (1994) com uma distribuição  $t$  para acomodar a curtose elevada e a assimetria. O uso de modelos GARCH simples para obter a volatilidade em modelos de preços de opções pode levar a problemas sérios de estimação do prêmio de opções em épocas de choques na variância condicional. O analista deve ajustar o modelo de estimação com variáveis dummy quando uma mudança de regime na volatilidade é percebida.*

## 1. INTRODUÇÃO

O prêmio de opções é função de uma estimativa da volatilidade do ativo a que a opção se refere. Analistas do mercado de opções podem utilizar modelos da família GARCH para estimar a volatilidade. Entretanto, o processo estocástico previsto pelo GARCH é suave, não sujeito a mudanças repentinas, ou mudanças de regime, na variância condicional. Há evidência de que as séries temporais de ações, tanto no mercado americano (Lamoureux e Lastrapes, 1990) quanto em mercados emergentes (Bekaert e Harvey, 1997), não se comportam dessa maneira. O exame da série temporal da variância condicional estimada por um desses modelos indica que há mudanças repentinas na série. Isto é, a variância condicional muda de patamar ao longo do tempo de forma repentina, geralmente devido a choques como a crise asiática. Neste trabalho, utilizo o algoritmo de Inclán e Tiao (1994) para detectar as mudanças na variância

condicional e para ajustar um modelo GARCH para estimar a volatilidade de ações com opções negociadas na BOVESPA.

Assumo que a variante do modelo GARCH de Glosten et al. (1994), daqui para a frente GJR, é a mais adequada em função de evidências apresentadas por Kim e Kon (1994) e Barcinsky et al. (1997). Utilizo um modelo cujos erros são estimados conforme uma distribuição  $t$  em função da evidência de curtose elevada na série de retornos. O modelo GJR também acomoda a assimetria na variância diante da evidência de que o impacto sobre a variância de eventos negativos é maior do que o impacto de eventos positivos.

O exercício apresentado neste trabalho é repetido para cada seis ações selecionadas com opções negociadas com frequência na BOVESPA. As ações analisadas são: Banespa PN, Bradesco PN, Brahma ON, Inepar PN, Petrobrás PN e Telebrás PN. O período de análise vai de 15 de julho de 1994 (primeira semana completa de retornos após o Plano Real) até 29 de maio de 1998. Os dados foram obtidos da Economática. Todos os retornos de fechamento são calculados para a semana, de sexta a sexta-feira. Todos os eventos, inclusive dividendos, são incluídos no cálculo dos retornos. Quando não houve preço numa certa sexta-feira devido ao fechamento do mercado, tomou-se o preço de fechamento do pregão imediatamente anterior. A amostra consiste de 203 retornos semanais. Todas as ações apresentaram uma série ininterrupta de preços, com exceção do Banespa. A ação do Banespa não negociou em duas sextas-feiras em que houve pregão e o preço imputado para esses dias foi o do pregão imediatamente anterior em que Banespa foi negociada. Não acredito que isso apresente qualquer problema para a análise que segue.

Estatísticas descritivas da série de retornos são apresentadas na tabela 1. Nenhuma das médias é significativamente diferente de zero. Entretanto, a curtose é significativa para todas as séries, indicando a necessidade do uso de uma distribuição que acomode caudas gordas em vez da distribuição normal utilizada por Barcinsky et al. (1997). Optei pela distribuição  $t$ . Para quatro das seis séries, o coeficiente de assimetria também é positivo. Um teste de autocorrelação serial, não reportado aqui, indicou a necessidade de se ajustar um componente AR(1) para a Inepar e Petrobrás. Todas as séries apresentam um comportamento semelhante, exceto para o Banespa, que foi muito mais volátil que as outras ações no período.

O modelo GARCH de GJR foi especificado segundo as equações abaixo:

$$y(t) = a_0 + a_1 y(t-1) + u(t)$$

$$\text{onde } u(t) = h(t)^{1/2} \times e(t) \quad \text{com } e(t) = t(\mu = 0, \sigma^2 = 1, gl = n)$$

$$h(t) = c + p \times h(t-1) + q \times u(t-1)^2 + l \times I(t-1) \times u(t-1)^2$$

$$\text{onde } \begin{cases} u(t) < 0 \Rightarrow I(t) = 1 \\ u(t) \geq 0 \Rightarrow I(t) = 0 \end{cases}$$

Caso os coeficientes  $p$  ou  $q$  sejam significativos, isso é evidência de GARCH no processo estocástico. Caso o coeficiente  $l$  seja significativo, há evidência de que o impacto de choques negativos é maior do que o impacto de choques positivos. Essa foi a inovação introduzida por GJR.

Ao ajustar o modelo acima nas séries da amostra, obtive os coeficientes mostrados na tabela 2 e nas figuras de 1 a 3 para a variância condicional  $h(t)$  para cada ação selecionada. A tabela indica que havia GARCH em todas as séries, exceto Inepar, uma vez que o coeficiente  $p$  para  $h(t)$  é significativo. Os resíduos não apresentam mais GARCH porque o teste  $TR^2$  sugerido por Engle (1982) não é significativo.

O analista poderia se dar por satisfeito e parar por aqui. Entretanto, as figuras de 1 a 3 indicam que o processo estocástico de  $h(t)$  não é suave. Veja, por exemplo, o salto para Banespa no início de 1996. O comportamento do gráfico para as ações não incluídas nas figuras é similar. Na seção seguinte, eu descreverei e utilizarei o algoritmo desenvolvido por Inclán e Tiao (1994) para encontrar os pontos de mudança repentina na variância condicional  $h(t)$ . Uma vez determinados estes pontos, variáveis *dummy* serão introduzidas na equação de  $h(t)$  do modelo GJR descrito acima. Os resultados mostram que o efeito GARCH, detectado na tabela 2, desaparece depois que se ajusta para as mudanças repentinas de variância.

## 2. DETECÇÃO DAS MUDANÇAS REPENTINAS NA VARIÂNCIA

O método utilizado neste estudo detecta as mudanças discretas na variância condicional utilizando o algoritmo ICSS - *Iterative Cumulative Sum of Squares* - apresentado em Inclán e Tiao (1994). O exercício assume que a série temporal analisada apresenta uma variância estacionária durante um período inicial. Uma mudança repentina na variância ocorre algum tempo depois, provavelmente causada por algum

choque político ou econômico, tal como a crise asiática ou a inquietação na Indonésia em 1998. A variância torna a ficar estacionária, em outro patamar, até que outra mudança repentina ocorra. Esse processo se repete no tempo, gerando uma série temporal de observações com um número desconhecido de mudanças repentinas na variância.

$$\sigma_t^2 = \begin{cases} \tau_0^2 & \text{para } 1 < t < \kappa_1 \\ \tau_1^2 & \text{para } \kappa_1 < t < \kappa_2 \\ \dots & \\ \tau_{NT}^2 & \text{para } \kappa_{NT} < t < T \end{cases}$$

Faça  $\{\varepsilon_t\}$  uma série temporal de observações independentes com distribuição normal, média zero e variância incondicional  $\sigma_t^2$ . A variância dentro de cada intervalo, entre mudanças repentinas, é  $\tau_j^2$  com  $j = 0, 1, \dots, N_T$  onde  $N_T$  é o número total de mudanças na variância em  $T$  observações. Faça agora  $1 < \kappa_1 < \kappa_2 < \dots < \kappa_{NT} < T$  o conjunto de pontos de mudança na variância. Desta forma, a variância incondicional  $\sigma_t^2$  muda para cada intervalo entre mudanças repentinas na variância, comportando-se da seguinte forma:

Para estimar o número de mudanças na variância e o ponto no tempo em que a mudança ocorreu, uma soma acumulada de quadrados é utilizada. Faça:

$$C_k = \sum_{t=1}^k \varepsilon_t^2, k = 1, \dots, T$$

a soma acumulada dos quadrados centrados na média das observações do início da série até o  $k^{\text{ésimo}}$  ponto no tempo. Defina, então, a estatística  $D_k$  como segue:

$$D_k = \left( \frac{C_k}{C_T} \right) - \frac{k}{T}, \text{ onde } k = 1, \dots, T \text{ e } D_0 = D_T = 0$$

Se não houver mudanças na variância durante o período da amostra, a estatística  $D_k$  oscila em torno de zero. Se houver uma ou mais mudanças na variância, os valores de  $D_k$  flutuam para cima ou para baixo de zero. Valores críticos de  $D_k$ , segundo a hipótese nula de variância homogênea durante todo o período, fornecem os limites superiores e inferiores para que se detecte uma mudança significativa na variância. Quando o valor absoluto de  $D_k$  é maior que o valor crítico, a hipótese nula é rejeitada. Faça com que  $k^*$  seja o valor de  $k$  em que  $\max_k |D_k|$  é obtido. Se  $\max_k \{(T/2) |D_k|\}^{1/2}$  excede os limites predeterminados, então  $k^*$  é tomado como uma estimativa do ponto de mudança. O fator  $(T/2)^{1/2}$  é necessário para padronizar a distribuição. Isso permite que os pontos de mudança sejam identificados.

Sob a hipótese nula de que a variância é homogênea no período total da série, assintoticamente,  $D_k$  se comporta como uma ponte browniana. O valor crítico de 1,36 representa 95º percentil da distribuição assintótica de  $\max_k \{(T/2) |D_k|^{1/2}\}$ . Portanto, os limites inferiores e superiores podem ser estabelecidos em  $\pm 1,36$ . Quando  $D_k$  excede esse valor, há uma mudança significativa na variância.

Se existem múltiplos pontos de mudança, a função de  $D_k$  sozinha não é suficiente. Para evitar este problema, Inclán e Tiao (1994) desenvolveram um algoritmo que usa a função de  $D_k$  para procurar sistematicamente por pontos de mudança em partes diferentes da série. O algoritmo ICSS baseia-se na avaliação sucessiva de  $D_k$  em partes diferentes da série, dividindo-a consecutivamente depois que um ponto de mudança é encontrado.

A próxima seção apresenta os resultados empíricos da aplicação do algoritmo ICSS e os pontos de mudança na variância das séries.

### 3. PONTOS DE MUDANÇA NA VARIÂNCIA

A tabela 3 apresenta todos os pontos de mudança na variância das séries de retornos semanais das seis ações. O número de mudanças no período varia de 2 para Banespa, Inepar e Petrobrás a 4 para Telebrás e Brahma, chegando até cinco para o Bradesco. Não exploro aqui quais são os fatores associados a cada mudança, uma vez que não é o objetivo deste trabalho. Entretanto, pode-se ver que a crise asiática no final de 1997 e a instabilidade política na Indonésia coincidem com a elevação da variância para as diversas ações da amostra.

Será que o efeito GARCH detectado na tabela 2 ainda existiria depois que o

$$y(t) = a_0 + a_1 y(t-1) + u(t)$$

onde  $u(t) = h(t)^{1/2} \times e(t)$  com  $e(t) = t(\mu = 0, \sigma^2 = 1, gl = n)$

$$h(t) = c + p \times h(t-1) + q \times u(t-1)^2 + l \times I(t-1) \times u(t-1)^2 + d_1 \times D_1 + \dots + d_k \times D_k$$

$$\text{onde} \begin{cases} u(t) < 0 \Rightarrow I(t) = 1 \\ u(t) \geq 0 \Rightarrow I(t) = 0 \end{cases}$$

analista ajustasse o modelo GJR para as mudanças de variância? Para responder a essa pergunta, cria-se uma variável *dummy* para cada mudança de variância. Por exemplo, para o Banespa, houve mudanças na variância a partir de 17/3/95 e de 8/1196. Criam-se, então, duas variáveis *dummy*. A primeira assume o valor zero do início da série em

15/7/94 até a semana anterior à mudança, 10/3/95, e valor 1 de 17/3/95 até o final da série. A segunda assume o valor zero do início da série até 1/11/96 e 1 daí até o final. O processo é repetido para cada ação.

As variáveis *dummy* criadas segundo o procedimento acima são incluídas na equação de  $h(t)$  do modelo GJR utilizado. O modelo, agora, passa a ser:

onde  $D_1, \dots, D_k$  são as variáveis *dummy*.

Finalmente, a tabela 4 apresenta os resultados para o modelo acima. Observa-se que todos os coeficientes  $\rho$  que eram significativos antes de introduzidas as variáveis *dummy* não são mais significativos. Isso indica que os efeitos GARCH detectados pelo modelo GJR sem o ajuste para as mudanças repentinas na variância se devem mais às mudanças repentinas na variância do que a um processo GARCH puro.

#### 4. COMENTÁRIOS FINAIS

O profissional do mercado deve manter em mente que o uso do GARCH para se estimar a variância condicional para uso em modelos de preços de opções está sujeito a erro quando mudanças repentinas na variância ocorrem. Em períodos de mudança de volatilidade, o modelo GARCH, que estima mudanças mais suaves na variância, pode ser empiricamente ajustado através de variáveis *dummy*. Embora o algoritmo ICSS detecte as datas de mudanças significativas na variância, o analista pode ajustar o modelo GARCH através de uma simples detecção de *outliers*. Variáveis *dummy* podem ser experimentadas na equação da variância do GARCH para que estimativas da volatilidade mais condizentes com o novo regime de volatilidade sejam obtidas.

Há diversos modelos alternativos que tentam estimar, a priori, uma mudança de regime da volatilidade numa série temporal. Os artigos de Hamilton (1990), Hamilton e Susmel (1994), Gray (1996) e Susmel (1997) apresentam alguns modelos dessa natureza. Deixo para pesquisas posteriores outros exercícios, tais como o de associar as mudanças repentinas aqui detectadas com eventos políticos, econômicos ou da própria empresa e o experimento com os modelos citados acima na previsão de pontos de mudança na variância.

## REFERÊNCIAS

- Barcinsky, A., Du Pin e Almeida B., Garcia M. e Da Silveira, M. "Estimação da volatilidade do retorno das ações brasileiras - um método alternativo à família GARCH," *Resenha BM&F* 116, 21-39, 1997.
- Bekaert, G., Harvey, C.R.. "Emerging Equity Market Volatility," *Journal of Financial Economics* 43, 29-77, 1997.
- Engle, R.F. "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation," *Econometrica* 50, 987-1007, 1982.
- Glosten, L., Jagannathan, R. e Runkle D. "On the Relation Between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks," *Journal of Finance* 49, 1994.
- Gray, S. F. "Modeling the Conditional Distribution of Interest Rates as a Regime-Switching Process," *Journal of Financial Economics* 42, 27-62, 1996.
- Hamilton, J. D. "Analysis of Time Series Subject to Changes in Regime," *Journal of Econometrics* 45, 39-70, 1990.
- Hamilton, J. D. Susmel, R. "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity and Changes in Regime," *Journal of Econometrics* 64, 307-333, 1994.
- Inclán, C., Tiao, G. C. "Use of Cumulative Sums of Squares for Retrospective Detection of Changes of Variance", *Journal of the American Statistical Association*, 89, 913-923, 1994.
- Kim, D., Kon, S. "Alternative models for the conditional heteroscedasticity of stock returns," *Journal of Business* 67, 563-598, 1994.
- Lamoreux, C.G., and Lastrapes, W.D. "Persistence in Variance, Structural Change and the GARCH model," *Journal of Business and Economic Statistics* 68, 225-234, 1990.
- Susmel, R. *Switching Volatility in Latin American Emerging Equity Markets*, Working Paper, University of Houston, 1997.

**Tabela 1: Estatísticas Descritivas para as Ações da Amostra**

Retornos semanais para 203 semanas no período de 15/7/94 a 29/5/98.

| Ação      | Média | Desvio Padrão | Mínimo | Máximo | Curtose | Assimetria | AR(1) |
|-----------|-------|---------------|--------|--------|---------|------------|-------|
| Banespa   | 2,14  | 15,67         | -40,50 | 138,81 | 35,34*  | 4,54*      | Não   |
| Bradesco  | ,73   | 6,45          | -25,11 | 31,08  | 4,19*   | ,34*       | Não   |
| Brahma    | ,76   | 5,77          | -30,31 | 24,85  | 6,47*   | ,15        | Não   |
| Inepar    | ,73   | 8,49          | -30,24 | 29,37  | 1,37*   | ,35*       | Sim   |
| Petrobrás | ,61   | 7,07          | -29,06 | 25,00  | 2,01*   | -,12       | Sim   |
| Telebrás  | ,74   | 6,30          | -21,60 | 16,10  | ,99*    | -,55*      | Não   |

\* indica significância a 5%.

**Tabela 2: Coeficientes e Estatísticas para o Modelo GJR Simples**

Retornos semanais para 203 semanas no período de 15/7/94 a 29/5/98.  $p$  é o coeficiente da variância condicional defasada  $h(t-1)$  e  $q$  é o coeficiente do erro quadrado defasado  $u(t-1)^2$ . A significância de um ou outro indica GARCH.  $l$  é o coeficiente do ajuste para o impacto assimétrico de choques negativos e positivos. Se for significativo, indica que choques negativos afetam a variância mais do que choques positivos. A estatística Ljung-Box para 16 defasagens -  $LB(16)$  indica presença de autocorrelação serial nos resíduos. A estatística  $TR^2$  de Engle (1982) indica a presença de ARCH nos resíduos, depois do ajustamento do modelo GARCH.

| Ação      | $p$  | $q$  | $l$ | LB(16) | $TR^2$ |
|-----------|------|------|-----|--------|--------|
| Banespa   | ,97* | -,02 | ,01 | 7,25   | ,00    |
| Bradesco  | ,67* | ,17  | ,29 | 12,26  | ,00    |
| Brahma    | ,65* | ,07  | ,36 | 13,91  | ,02    |
| Inepar    | ,43  | ,00  | ,49 | 19,23  | ,47    |
| Petrobrás | ,83* | ,00  | ,15 | 16,28  | ,23    |
| Telebrás  | ,78* | -,03 | ,17 | 9,61   | ,01    |

\* indica significância a 5%.

**Tabela 3: Datas de Mudanças Repentinhas na Variância e Desvio Padrão Incondicional Dentro dos Diferentes Períodos**

Retornos semanais para 203 semanas no período de 15/7/94 a 29/5/98.

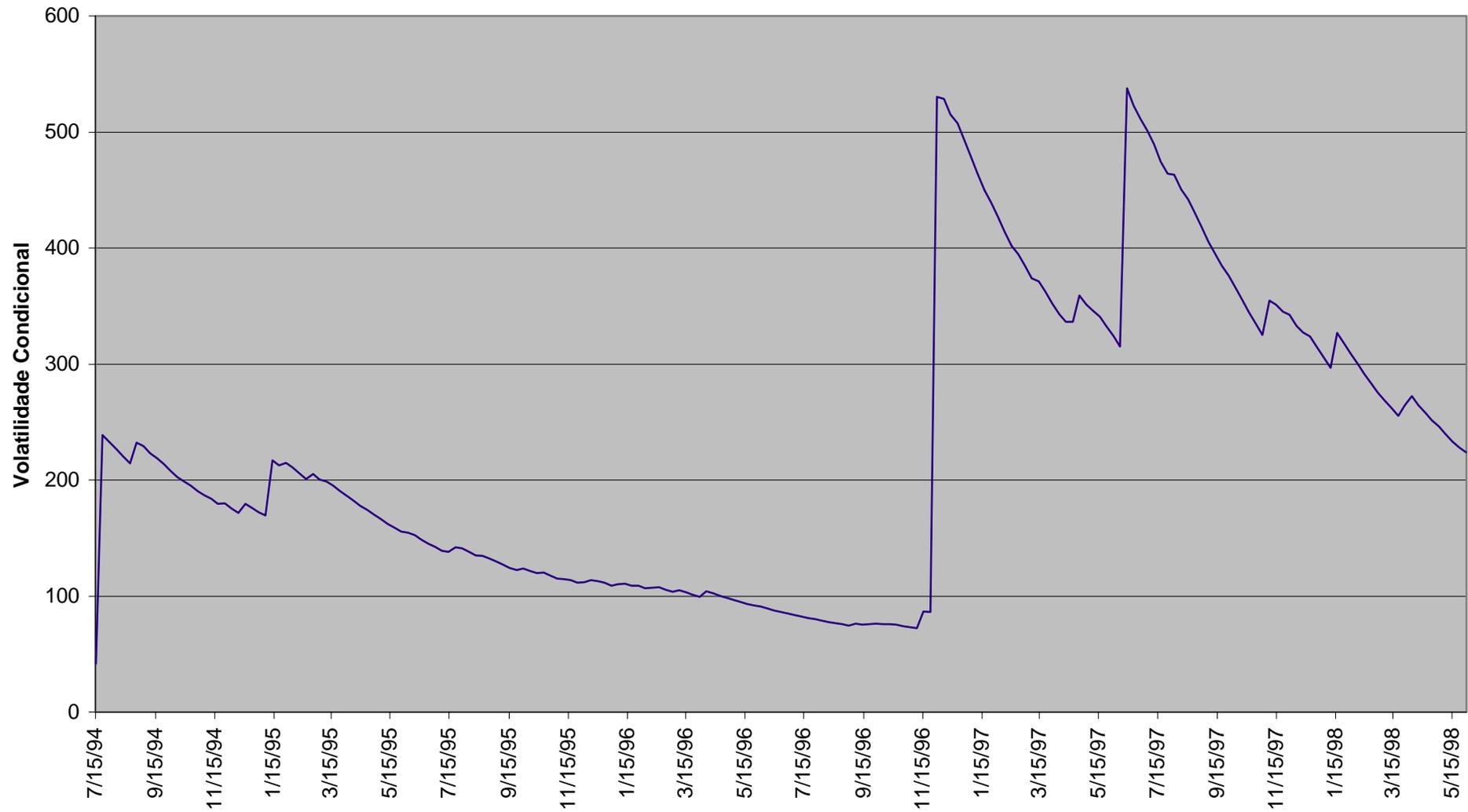
| Ação (nº de mudanças) | Início do Período | Final do Período | Desvio Padrão no Período |
|-----------------------|-------------------|------------------|--------------------------|
| Banespa (2)           | 15/7/94           | 10/3/95          | 12,18                    |
|                       | 17/3/95           | 01/11/96         | 6,08                     |
|                       | 08/11/96          | 29/5/98          | 22,00                    |
| Bradesco (5)          | 15/7/94           | 26/8/94          | 14,29                    |
|                       | 02/9/94           | 04/8/95          | 6,25                     |
|                       | 11/8/95           | 06/6/97          | 3,67                     |
|                       | 13/6/97           | 24/10/97         | 7,02                     |
|                       | 31/10/97          | 09/1/98          | 15,28                    |
|                       | 16/1/98           | 29/5/98          | 4,96                     |
| Brahma (4)            | 15/7/94           | 17/2/95          | 6,95                     |
|                       | 24/2/95           | 26/5/95          | 13,23                    |
|                       | 02/6/95           | 08/8/97          | 3,56                     |
|                       | 15/8/97           | 21/11/97         | 8,18                     |
|                       | 28/11/97          | 29/5/98          | 3,87                     |
| Inepar (2)            | 15/7/94           | 12/4/96          | 8,29                     |
|                       | 19/4/96           | 09/5/97          | 5,58                     |
|                       | 16/5/97           | 29/5/98          | 10,75                    |
| Petrobrás (2)         | 15/7/94           | 02/2/96          | 8,56                     |
|                       | 09/2/96           | 06/6/97          | 4,11                     |
|                       | 13/6/97           | 29/5/98          | 7,49                     |
| Telebrás (4)          | 15/7/94           | 28/4/95          | 8,69                     |
|                       | 05/5/95           | 04/7/97          | 4,70                     |
|                       | 11/7/97           | 09/1/98          | 8,68                     |
|                       | 16/1/98           | 29/5/98          | 3,56                     |

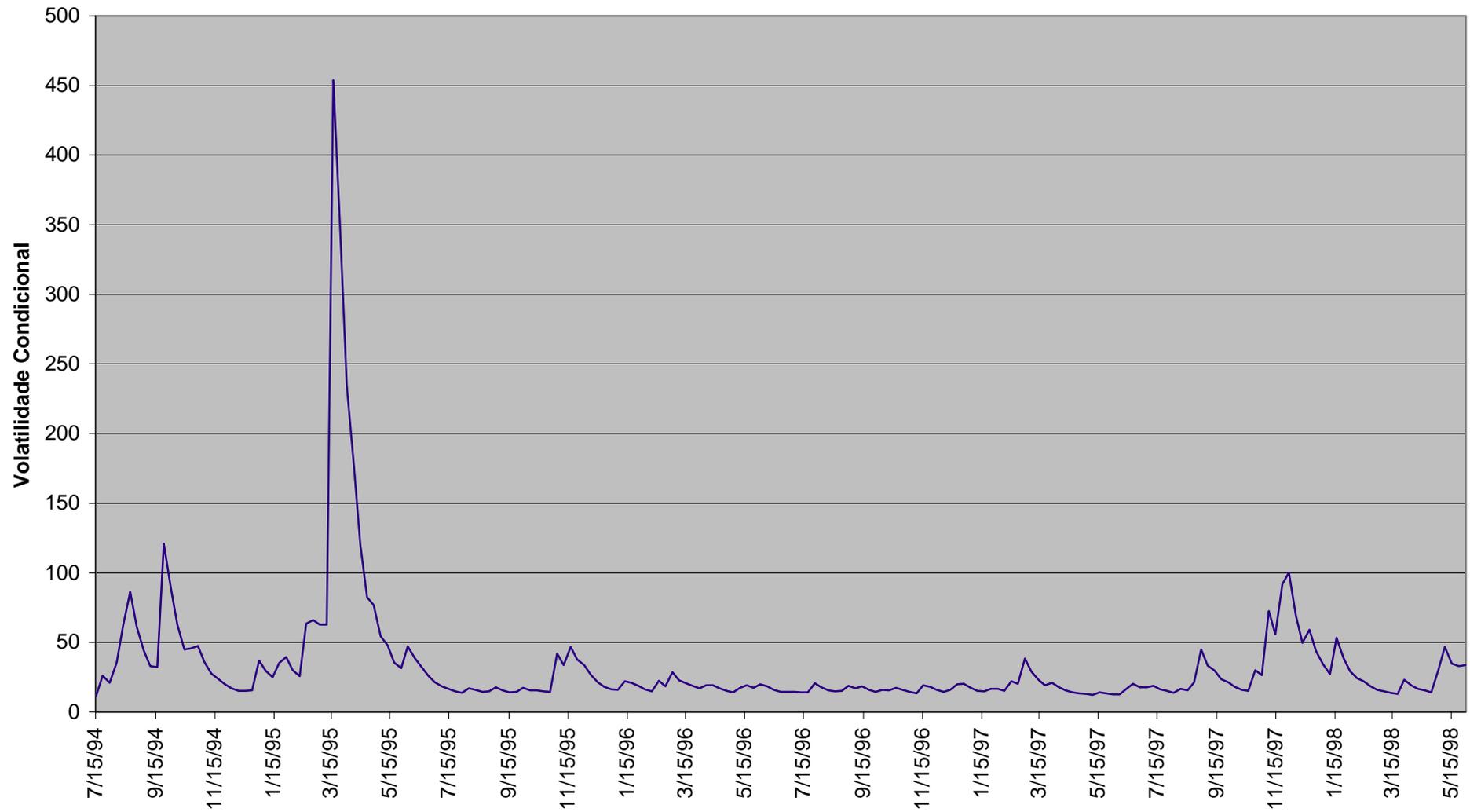
**Tabela 4: Coeficientes e Estatísticas para o Modelo GJR com Variáveis *Dummy***

Retornos semanais para 203 semanas no período de 15/7/94 a 29/5/98.  $p$  é o coeficiente da variância condicional defasada  $h(t-1)$  e  $q$  é o coeficiente do erro quadrado defasado  $u(t-1)^2$ . A significância de um ou outro indica GARCH.  $l$  é o coeficiente do ajuste para o impacto assimétrico de choques negativos e positivos. Se for significativo, indica que choques negativos afetam a variância mais do que choques positivos. A estatística Ljung-Box para 16 defasagens -  $LB(16)$  indica presença de autocorrelação serial nos resíduos. A estatística  $TR^2$  de Engle (1982) indica a presença de ARCH nos resíduos, depois do ajustamento do modelo GARCH.

| Ação      | $p$ | $q$ | $l$  | LB(16) | $TR^2$ |
|-----------|-----|-----|------|--------|--------|
| Banespa   | ,00 | ,04 | -,08 | 9,16   | ,08    |
| Bradesco  | ,00 | ,00 | ,03  | 15,18  | ,13    |
| Brahma    | ,00 | ,13 | ,22  | 16,28  | ,04    |
| Inepar    | ,22 | ,00 | ,38  | 18,72  | ,85    |
| Petrobrás | ,00 | ,00 | ,04  | 12,41  | ,20    |
| Telebrás  | ,00 | ,00 | ,00  | 13,14  | ,09    |

\* indica significância a 5%.

**Figura 1: Volatilidade Condicional - Banespa PN - 15/7/94 a 29/5/98**

**Figura 2: Volatilidade Condicional - Brahma ON - 15/7/94 a 29/5/98**

**Figura 3: Volatilidade Condicional - Petrobrás PN - 15/7/94 a 29/5/98**