

**Relatório Coppead** é uma publicação do Instituto COPPEAD de Administração da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)

**Comissão de Pesquisa**

Angela Rocha  
Paulo Fernando Fleury  
Ricardo Leal

**Gerência de Publicações**

Simone da Rocha Weitzel

**Projeto Gráfico**

Raquele Mendes Coelho

**Editoração Eletrônica**

Adriana Baptista Pereira

**Revisão e Copidesque**

Martha Amália Dias de Sá

Ficha Catalográfica elaborada pela Biblioteca do COPPEAD/UFRJ

Lemgruber, Eduardo Facó

Árvores binomiais implícitas: aplicação para as opções de telebrás no exercício de abril de 1999/ Eduardo Facó Lemgruber; [et.al].— Rio de Janeiro: UFRJ/COPPEAD, 2000.

14 p.; 27 cm. – (Relatórios COPPEAD ; 326).

ISBN 85-7508-004-0

ISSN: 1518-3335

1. Finanças I. Cordeiro, Leonardo. II. Faria, Herbert.  
III. Adler, Alexandre. IV. Título. V. Série.

**Central de atendimento**

Caixa Postal 68514

Ilha do Fundão

21941-970 – Rio de Janeiro – RJ

Telefone: 21-598-9898

Fax: 21-598-9848

e-mail: atendimento@coppead.ufrj.br

Home-page: <http://www.coppead.ufrj.br>

# Árvores Binomiais Implícitas: Aplicação para as Opções de Telebrás no Exercício de Abril de 1999

*Eduardo Facó Lemgruber*

*Leonardo Cordeiro*

*Herbert Faria*

*Alexandre Adler*

*Este trabalho utiliza o método de árvores binomiais implícitas proposto por Rubinstein (1994), comparando-o com o modelo de Black-Scholes (1973) na construção e manutenção de um portfolio de hedge. O método de árvores binomiais implícitas tenta encontrar uma única árvore binomial que descreva o comportamento do ativo-objeto, de forma que todos os prêmios de opções calculados a partir desta árvore estejam em consonância com os valores observados no mercado para todos os diferentes preços de exercício. Obtêm-se os parâmetros utilizados para hedge da árvore binomial implícita calculada e constroem-se os portfolios, comparando a sua eficácia de hedge com os portfolios que utilizam os parâmetros fornecidos pelo modelo de Black-Scholes. A amostra utilizada constituiu-se dos prêmios de opções dos recibos de Telebrás no período de 2 de março a 16 de abril de 1999. Os resultados indicam que não foram encontradas diferenças estatisticamente significativas entre os portfolios construídos e ajustados pelo modelo aqui apresentado com os portfolios que empregaram os parâmetros de hedge dados pelo modelo de Black-Scholes.*

## 1. INTRODUÇÃO

O modelo de Black-Scholes (1973) é um dos modelos mais bem-sucedidos e amplamente utilizados em Finanças.<sup>1</sup> Além de ser um modelo usado para precificação dos prêmios de opções, ele fornece os parâmetros para ajuste de proteção de *portfolios*.<sup>2</sup> A volatilidade futura esperada é de fundamental importância para a avaliação dos prêmios de opções, uma vez que é o único parâmetro de entrada a ser estimado, sendo crucial para a validade dos resultados do modelo. Pesquisadores e profissionais de Finanças geralmente tentam inferir o comportamento futuro da volatilidade a partir do seu comportamento apresentado no passado. O emprego de dados históricos para estimar a volatilidade ainda é insuficiente para garantir estimativas precisas e robustas, pois assume

---

<sup>1</sup> Ver Rubinstein, 1994; e Cox e Rubinstein, 1985.

<sup>2</sup> Ver Becker e Lemgruber, 1989.

que o comportamento passado se repetirá no futuro. De outra maneira, pode-se obter uma idéia aproximada da expectativa dos participantes do mercado em relação ao valor da volatilidade futura invertendo-se a equação de Black-Scholes, encontrando-se, então, a volatilidade implícita da opção.

O modelo de Black-Scholes assume que o ativo-objeto possui movimento geométrico browniano com volatilidade constante. Contudo, essa premissa tem sido sistematicamente violada em diversos estudos empíricos.<sup>3</sup> Esta violação ocorre porque a volatilidade implícita varia com o preço de exercício e com o prazo até o vencimento de cada opção, comportamento conhecido como *smile*.<sup>4</sup> Tentativas de modelar a variação da volatilidade implícita são encontradas na literatura. Shinko (1991) relaciona diversas razões para o surgimento desse fenômeno em sua análise das mudanças nas volatilidades observadas do índice S&P 100, encontrando coeficientes de correlação entre as volatilidades e os retornos altamente negativos, um indicativo de que a volatilidade implícita diminui quando o ativo-objeto se valoriza e vice-versa. Rubinstein (1994) sugere o modelo de árvores binomiais implícitas e Dupire (1994), Derman e Kani (1994) incluem modificações no modelo de Black-Scholes, compatibilizando-o com o *smile* apresentado pelas opções.

Uma vez que o modelo de Black-Scholes não contempla essa variação de volatilidade, pode-se esperar que os parâmetros de *hedge* derivados do modelo não correspondam com exatidão à realidade do mercado, ocasionando distorções no balanceamento de *portfolios* protegidos. Desta maneira, um modelo de precificação que incorporasse o *smile* no cálculo dos parâmetros de *hedge* poderia apresentar resultados superiores aos obtidos com o de Black-Scholes. O modelo de árvores binomiais implícitas desenvolvido por Rubinstein (1994) atende a essa exigência, permitindo a variação da volatilidade local dos retornos.

O objetivo principal desse trabalho é a aplicação do modelo de árvores binomiais implícitas como sendo uma alternativa ao modelo de Black-Scholes na precificação de prêmios de opções e para o balanceamento de *portfolios* protegidos. Por permitir que a volatilidade varie ao longo da árvore binomial, este modelo não é tão restritivo quanto o de Black-Scholes em relação à premissa de volatilidade constante.

O trabalho está organizado em cinco seções. Após esta breve introdução, o conceito de árvores binomiais implícitas é discutido. Em seguida, descreve-se a amostra

---

<sup>3</sup> Ver Dumas, Fleming e Whaley, 1998.

<sup>4</sup> Ver Derman e Kani, 1994, e Dupire, 1994.

utilizada e o método de coleta de dados. A metodologia de pesquisa é objeto da quarta seção, onde serão descritos o método de obtenção da árvore binomial e a metodologia de *hedgde* utilizada na comparação entre os dois modelos. A quarta seção apresenta também os resultados obtidos. Finalmente, as conclusões do estudo, assim como sugestões para pesquisas posteriores, são encontradas na quinta seção.

## 2. ÁRVORES BINOMIAIS IMPLÍCITAS

A falha do modelo de Black-Scholes em descrever a estrutura de preços das opções é atribuída, principalmente, à premissa de volatilidade constante.<sup>5</sup> Diversos pesquisadores tentaram “enriquecer” o modelo para levar em consideração um *smile* teórico. Uma forma utilizada para isso foi incorporar um fator estocástico de volatilidade.<sup>6</sup> Outra, foi permitir pulos descontínuos no preço da ação.<sup>7</sup> Esses modelos possuem, contudo, algumas dificuldades práticas pois introduzem tipos de risco não negociáveis, dado que não existem títulos que permitam fazer o *hedgde* da volatilidade ou do risco de pulo. Perde-se, assim, a possibilidade de fazer o *hedgde* utilizando-se apenas o ativo-objeto, e a precificação deixa de ser livre da preferência de risco do investidor.<sup>8</sup> Rubinstein (1994), Derman e Kani (1994) e Dupire (1994) desenvolveram uma metodologia compatível com o *smile* observado no mercado e que permite um modelo neutro a risco. Tais métodos permitem deduzir o comportamento futuro da volatilidade de mercado. Para isso, eles se utilizam de uma árvore binomial ou trinomial ajustada aos preços observados na data de análise.

A obtenção das árvores binomiais implícitas envolve três etapas: primeiro é necessário utilizar um método de estimação da distribuição das probabilidades do preço do ativo-objeto na data de exercício das opções. O método sugerido por Rubinstein (1994) consiste em calcular estas probabilidades a partir da taxa livre de risco e dos preços de mercado do ativo-objeto e das opções com diferentes preços de exercício. Segundo, é necessário inferir um processo estocástico único, plenamente especificado, referente ao comportamento do ativo-objeto, a partir dessas probabilidades. Finalmente, a terceira etapa consiste em calcular os valores dos parâmetros de *hedgde*. Com isso, desenvolve-se um modelo livre de arbitragens, que se ajusta ao *smile* e é neutro a risco.

---

<sup>5</sup> Black *apud* Dumas, Fleming e Whaley, 1998.

<sup>6</sup> Ver, por exemplo, Hull e White, 1987.

<sup>7</sup> Ver Merton, 1976.

<sup>8</sup> Em modelos neutros a risco, pode-se calcular os preços das opções trazendo-se o valor esperado dos preços das opções no vencimento a valor presente, pela taxa livre de risco. Ver Cox, Ross e Rubinstein (1979).

### 3. DEFINIÇÃO DA AMOSTRA

O modelo de Rubinstein (1994) requer como parâmetros de entrada as cotações de fechamento, compra e venda do ativo-objeto, a taxa anual de juros livre de risco, o prazo de vencimento das opções analisadas, assim como seus preços de exercício e suas cotações de fechamento, compra e venda. Estes parâmetros podem ser obtidos facilmente no mercado. Por sua vez, o modelo de Black-Scholes diferencia-se do anterior requerendo como parâmetro de entrada adicional o desvio padrão anual dos retornos do ativo-objeto. Este parâmetro deve ser estimado.

O ativo-objeto considerado foi o recibo de Telebrás PN (código RCTB40). As opções sobre este ativo são opções de compra, tendo sido utilizadas cinco séries (códigos: RCTBD16, RCTBD28, RCTBD30, RCTBD32 e RCTBD34) com vencimento em 19 de abril e preços de exercício de R\$140.00, R\$150.00, R\$160.00, R\$170.00 e R\$180.00, respectivamente. As opções de compra brasileiras são protegidas para dividendos, não sendo necessário a introdução dos mesmos no modelo.<sup>9</sup> Estas opções são negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo e são as opções do ativo-objeto com maior liquidez no período. Devido a ausência de negócios envolvendo as opções de venda, as mesmas não foram utilizadas no estudo por não apresentarem liquidez satisfatória<sup>10</sup>. A fonte dos dados foi o jornal Gazeta Mercantil.

Foram observados, para o ativo-objeto e opções da amostra, os preços de fechamento, além das últimas cotações de compra e venda, no período de 3 de março até 19 de abril de 1999, totalizando 32 dias úteis. Os valores utilizados para efeito de "preço" foram os valores das últimas transações realizadas em cada dia, cujo horário não coincide, necessariamente, com o fechamento do pregão. Portanto, deve-se salientar que os valores utilizados não são provenientes de negócios realizados simultaneamente, o que pode causar distorções na análise. A amostra final constituiu-se de cinco séries de opções, perfazendo um total de 160 observações. Utilizou-se como sub-rogado para a taxa livre de risco de 1 dia o CDI base 252 dias da base de dados Econômica. Tal fato deveu-se a não ter sido possível encontrar uma taxa livre de risco para os períodos até o vencimento (como seria recomendável pelo modelo). Esta é uma taxa efetiva anual, utilizando 252 dias úteis por ano.

---

<sup>9</sup> Em 18 de março, houve um pagamento de dividendos no valor de R\$ 0.04, fazendo com que os preços de exercício fossem ajustados para R\$ 139.96, R\$ 149.96, R\$ 159.96, R\$ 169.96 e R\$ 179.96, respectivamente, a partir deste dia, inclusive.

<sup>10</sup> Rubinstein (1994), entretanto, utiliza ambos os tipos de opções em sua análise.

A partir da série de preços de fechamento do ativo-objeto, obteve-se a série de retornos diários. Para o cálculo da volatilidade histórica, um sistema de pesos com base na metodologia de alisamento exponencial foi usado para o cálculo do desvio padrão dos retornos. Esta metodologia atribui pesos maiores às observações mais recentes, tendo demonstrado boa aderência ao mercado brasileiro<sup>11</sup>. Matematicamente, a técnica de alisamento exponencial considera um número infinito de observações passadas, de forma que a soma de seus coeficientes seja um, o que equivale à soma dos termos de uma progressão geométrica infinita com a razão menor do que a unidade. Como o número de observações no cálculo do desvio padrão foi limitado a vinte, os pesos foram normalizados de forma a atender a essa restrição. O valor do parâmetro de amortecimento foi de 6%<sup>12</sup>, atribuindo, assim, pesos de 0.06 para a primeira observação passada,  $0.06 \times (1 - 0.06)$  para a segunda,  $0.06 \times (1 - 0.06) \times (1 - 0.06)$  para a terceira e assim sucessivamente. Estes valores foram, então, normalizados.

#### 4. METODOLOGIA E RESULTADOS

Esta seção descreve a metodologia utilizada e apresenta os resultados obtidos. Inicialmente, é mostrado que o mercado fornece evidências empíricas do *smile*. Em seguida, as árvores binomiais implícitas obtidas são apresentadas. Para finalizar, apresenta-se a forma como foi testada a eficácia dos *portfolios* de *hedge*.

##### 4.1 Evidências da variação da volatilidade implícita

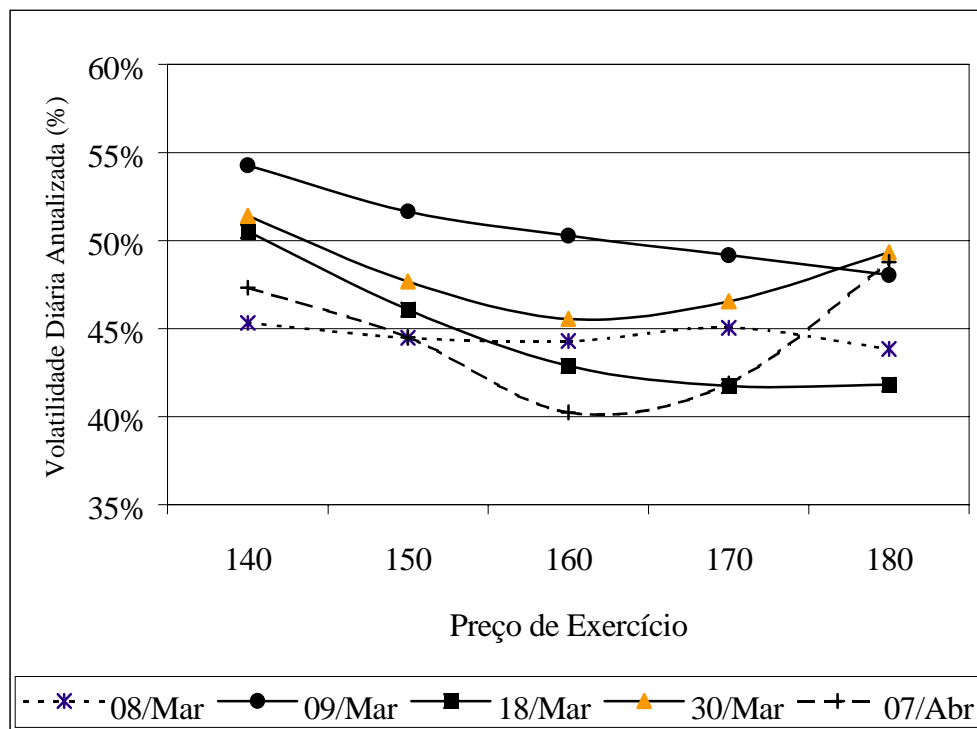
O Gráfico 1 evidencia a existência de variação da volatilidade implícita com o preço de exercício, no mercado de opções brasileiro. Nele, essa variação é apresentada para alguns dias do período estudado.

---

<sup>11</sup> Ver Lemgruber e Ohanian (1997)

<sup>12</sup> Considera-se também como fator de decaimento o valor  $(1 - 6\%) = 94\%$ , fazendo-se as devidas alterações na forma de cálculo.

Gráfico 1 - Variação das volatilidades implícitas observadas - *smile* - para opções de compra de Telebrás (RCTB40) para os dias 8, 9, 18 e 30 de março e 7 de abril de 1999.



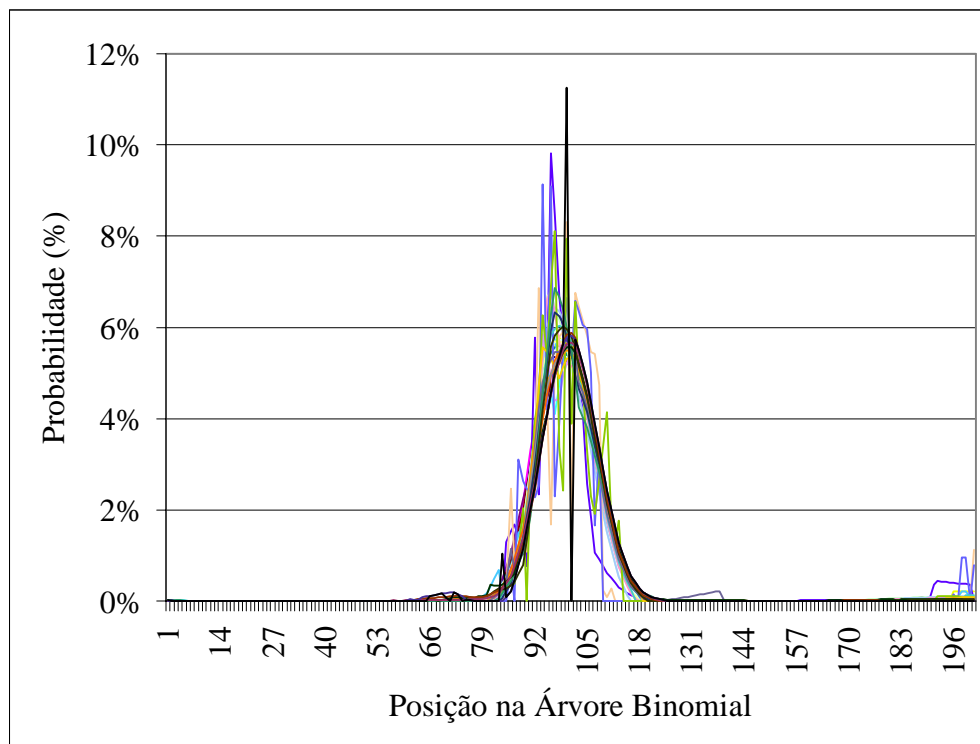
A análise do Gráfico 1 mostra que no dia 30 março de 1999 a volatilidade implícita foi de 51% para o exercício de R\$ 140.00, 45% para o de R\$ 160.00 e 49% para o de R\$ 180.00. No dia 8 de março, a curva permaneceu praticamente constante, variando muito pouco ao redor de 45%. Já para o dia 18 de março, ela apresentou um comportamento decrescente com o valor do preço de exercício. Estes resultados comprovam a existência do *smile* e, portanto corroboram a necessidade de aplicação de um modelo que contemple tal fato.

#### 4.2 Construção da Árvore Binomial Implícita

O ponto central deste trabalho é a utilização de um modelo que seja compatível com o *smile* observado no mercado, que não permita oportunidades de arbitragem, que assuma um ambiente de neutralidade a risco e que dependa apenas de dados amplamente disponíveis no mercado. O primeiro passo da construção da árvore binomial implícita consiste na utilização de um método de otimização para a obtenção das distribuições de probabilidades dos possíveis valores dos preços na data de vencimento. Rubinstein (1994) sugere um método para a obtenção desta distribuição de probabilidades. Seu objetivo é encontrar uma distribuição de probabilidades que seja a

mais próxima possível da distribuição log-normal e que garanta que todos os prêmios das opções com diferentes preços de exercício, calculados a partir destas probabilidades, estejam de acordo com os prêmios observados no mercado, *i.e.*, entre os valores de compra e de venda.<sup>13</sup> Essa condição se aplica também ao preço do ativo-objeto, forçando este a ficar entre as suas cotações de compra e de venda. Estes valores são calculados de forma semelhante à inicialmente proposta no estudo de Cox, Ross e Rubinstein (1979), na qual os autores desenvolveram o conceito de árvores binomiais. As distribuições encontradas para os 32 dias da amostra, segundo esse critério de otimização, encontram-se no Gráfico 2.

**Gráfico 2 - Distribuições de probabilidades do preço do ativo-objeto na data de vencimento das opções, 19/04/99, segundo o método de otimização proposto por Rubinstein (1994).**



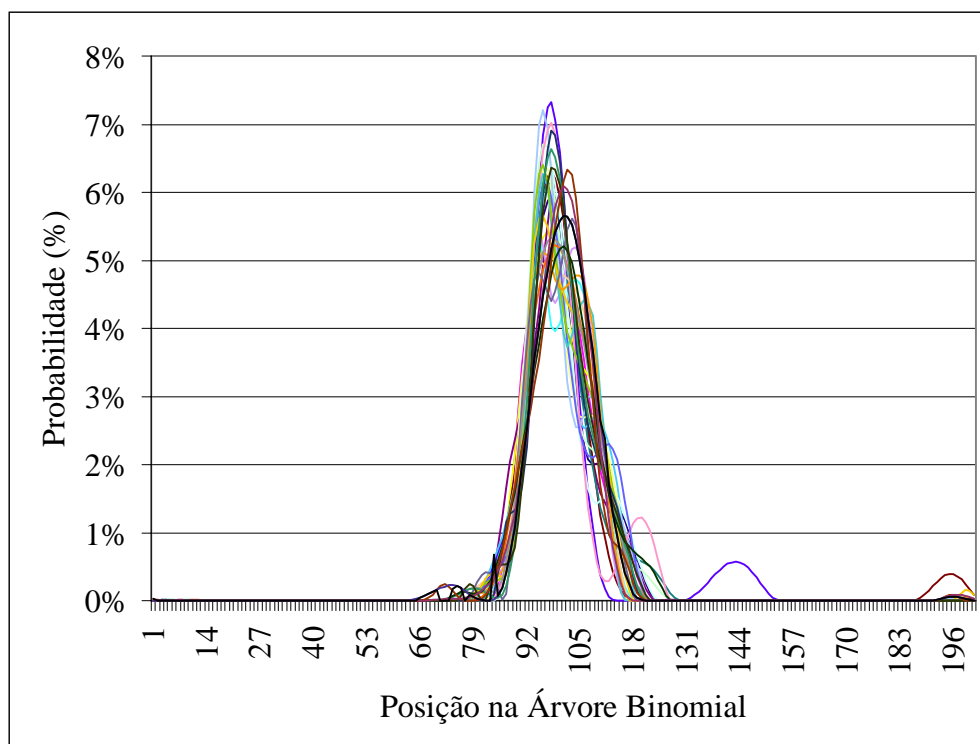
Pode-se observar que algumas distribuições apresentam um formato bastante irregular, com alguns picos descontínuos e resíduos em suas extremidades, enquanto outras aderem satisfatoriamente à distribuição log-normal. Para corrigir essas imperfeições, Jackwerth e Rubinstein (1996) apresentaram uma alternativa para o método de otimização previamente utilizado. Os autores eliminaram a condição de máxima aderência à distribuição log-normal, substituindo-a por uma condição de máxima

<sup>13</sup> Rubinstein (1994) expõe detalhadamente o modelo de otimização utilizado.



suavidade. Ao invés de forçar a distribuição a ser a mais próxima possível da distribuição log-normal, os autores sugerem um método alternativo, de forma que a mesma não apresente saltos nem picos repentinos, tornando-a contínua e suave em todos os pontos. Como a derivada segunda de uma função corresponde à sua curvatura, isto foi alcançado através da minimização da curvatura apresentada pela função de probabilidade em cada ponto, fazendo com que a distribuição não apresentasse variações bruscas no seu traçado. Para o cálculo da derivada segunda em cada ponto, foi utilizado o método de aproximação por diferenças finitas. Os resultados obtidos estão dispostos no Gráfico 3.

**Gráfico 3 - Distribuições de probabilidades do preço do ativo-objeto na data de vencimento das opções, 19/04/99, segundo o método de otimização proposto por Jackwerth e Rubinstein (1996).**



Uma análise visual torna evidente que o segundo método de otimização produziu resultados com um número bem menor de irregularidades. De fato, Jackwerth e Rubinstein (1996) explicitam claramente sua preferência pelo segundo método. Rubinstein (1994) sugere, ainda, que o número de passos  $n$  seja muito maior que o número de opções utilizadas  $m$ . Assim, construiu-se uma árvore binomial de 200 passos, para um conjunto de cinco opções diferentes. O software utilizado para resolver ambos os problemas de otimização não-linear foi o "What's Best" versão industrial (1997), com

capacidade para até 32.000 variáveis e 16.000 restrições para cada modelo de otimização. De posse dos resultados acima, calculou-se os parâmetros  $u$ ,  $d$ ,  $p$  e  $\sigma$ , correspondentes ao movimento multiplicativo de subida e descida do ativo-objeto, a probabilidade de ocorrência do movimento multiplicativo de subida e a volatilidade local dos retornos, conforme a metodologia de Rubinstein (1994). É importante ressaltar que o processo estocástico implícito considera os resultados da otimização como sendo parâmetros de entrada exógenos, tornando-se possível a obtenção de resultados diferentes de acordo com os diferentes métodos de otimização descritos anteriormente. O delta e o gama da opção podem ser calculados de forma semelhante ao de uma árvore binomial tradicional. A Tabela 1 apresenta os resultados obtidos e evidencia que  $u$ ,  $d$  e  $\sigma$ , variam ao longo da árvore binomial. Estes resultados diferem dos que seriam obtidos na construção de uma árvore binomial assumindo-se que a volatilidade é constante, caso em que o modelo converge para os mesmos preços e *hedges* fornecidos por Black-Scholes.<sup>14</sup>

**Tabela 1 - Valores dos parâmetros obtidos com a construção da árvore.**

$t$  é o prazo para o vencimento, em dias, da data de construção de cada árvore.  $u$  médio é o valor médio do movimento multiplicativo de subida ( $u$ ) observado na árvore.  $u$  máx é o valor máximo do movimento multiplicativo de subida ( $u$ ).  $u$  mín é o valor mínimo do movimento multiplicativo de subida.  $d$  médio é o valor médio do movimento multiplicativo de descida ( $d$ ) em cada tempo.  $d$  máx é o valor máximo do movimento multiplicativo de descida.  $d$  mín é o valor mínimo do movimento multiplicativo de descida. **Volatilidade média** é o valor médio para a volatilidade local ( $\sigma$ ).  $q$  médio é o valor médio da probabilidade de ocorrência do movimento multiplicativo de subida ( $q$ ) em cada ponto da árvore.

t	u médio	u máx.	u mín.	d médio	d máx.	d mín.	Volatilidade média	q médio
32	1,0133	1,4641	1,0002	0,9848	1,0002	0,1313	0,2914	0,4120
31	1,0125	1,4331	1,0002	0,9867	1,0002	0,1125	0,1921	0,3579
30	1,0116	1,0239	1,0002	0,9943	1,0002	0,1497	0,1429	0,3383
29	1,0281	7,2841	1,0002	0,9816	1,0002	0,1500	0,4527	0,5388
28	1,0290	5,2490	1,0002	0,9945	1,0002	0,2120	0,1738	0,3295
27	1,0339	5,4765	1,0002	0,9850	1,0002	0,2325	0,4046	0,4213
26	1,0117	1,3925	1,0002	0,9853	1,0002	0,1334	0,2990	0,4135
25	1,0136	1,5541	1,0002	0,9889	1,0002	0,1880	0,3426	0,3613
24	1,0102	1,0209	1,0002	0,9946	1,0002	0,1863	0,1560	0,3476
23	1,0298	4,9087	1,0002	0,9875	1,0002	0,2004	0,2852	0,3790
22	1,0204	3,8056	1,0002	0,9867	1,0002	0,1715	0,4563	0,3165
21	1,0189	4,3705	1,0002	0,9878	1,0002	0,2379	0,2801	0,3935
20	1,0223	4,1309	1,0001	0,9878	1,0001	0,2230	0,3041	0,3725
19	1,0096	1,3301	1,0001	0,9886	1,0001	0,1831	0,1976	0,3491
18	1,0091	1,2808	1,0001	0,9857	1,0001	0,2079	0,4025	0,5454
17	1,0091	1,0188	1,0001	0,9948	1,0001	0,2117	0,1663	0,3554
16	1,0161	2,4346	1,0001	0,9942	1,0001	0,7962	0,4265	0,3006

<sup>14</sup> Deve-se ressaltar que o modelo de Black-Scholes é um caso particular do modelo de árvore binomial implícita, ou seja, utilizando-se uma distribuição log-normal no vencimento são obtidos  $u$ ,  $d$ ,  $q$  e volatilidade constantes.

t	u médio	u máx.	u mín.	d médio	d máx.	d mín.	Volatilidade média	q médio
15	1,0147	3,6099	1,0001	0,9895	1,0001	0,3108	0,2178	0,4234
14	1,0078	1,3402	1,0001	0,9920	1,0001	0,2829	0,1965	0,3774
13	1,0212	3,7302	1,0001	0,9956	1,0001	0,2922	0,1927	0,3283
12	1,0197	3,6210	1,0001	0,9899	1,0001	0,3082	0,2568	0,3951
11	1,0115	2,8446	1,0001	0,9894	1,0001	0,3655	0,3333	0,4219
10	1,0067	1,2601	1,0001	0,9925	1,0001	0,3249	0,1867	0,3698
9	1,0059	1,0121	1,0001	0,9961	1,0001	0,3876	0,1817	0,3674
8	1,0056	1,1890	1,0001	0,9919	1,0001	0,3942	0,1818	0,3792
7	1,0112	2,2108	1,0000	0,9925	1,0000	0,4759	0,2967	0,4168
6	1,0084	1,6947	1,0000	0,9924	1,0000	0,6224	0,4582	0,5171
5	1,0091	2,0171	1,0000	0,9926	1,0000	0,5976	0,4829	0,4571
4	1,0062	1,5341	1,0000	0,9944	1,0000	0,6591	0,4101	0,4048
3	1,0073	1,5489	1,0000	0,9942	1,0000	0,6602	0,4003	0,4303
2	1,0042	1,3742	1,0000	0,9961	1,0000	0,7720	0,3541	0,5465
1	1,0033	1,2834	1,0000	0,9969	1,0000	0,7604	0,3666	0,5232

### 4.3. Teste dos *Portfolios de Hedge*

Para a comparação dos resultados dos dois modelos, utilizou-se a metodologia proposta por Becker e Lemgruber (1987), que consiste em carregar uma posição delta neutra, constituída por uma opção e uma fração do ativo-objeto, com ajustes diários para proteção do *portfolio*.<sup>15</sup> Analisou-se os *portfolios* simulados até o vencimento. Para analisar a evolução dos *portfolios*, usou-se a metodologia de análise de eventos sucessivos, denotando-se o primeiro dia como 0 e o dia do vencimento como t. Em um certo dia t, os modelos são utilizados para calcular os preços teóricos das opções e os respectivos delta-*hedges*. Assim, são compradas opções subavaliadas e vendidas opções superavaliadas. Para se fazer o *hedge*, monta-se uma posição inversa com uma certa proporção do ativo-objeto. Esta proporção do ativo-objeto é obtida pelo delta dos modelos. Nos dias subseqüentes, calculam-se os novos deltas e são feitos os ajustes diários. Eis que formam-se novos *portfolios* que serão ajustados diariamente até o vencimento.

Os resultados da aplicação do modelo de Black-Scholes e o de árvores binomiais implícitas nos *portfolios*, para as séries de opções da amostra, encontram-se nas Tabelas 2 e 3.

<sup>15</sup> Esta estratégia não implica em uma posição completamente neutra, devido à restrição a um único ajuste diário. Ela apenas reduz o risco decorrente da oscilação de preços do ativo-objeto. Somente um ajuste dos *portfolio* a cada mudança de preços implicaria em uma posição absolutamente livre de risco. Entretanto, a amostra não permite tal sofisticação.

**Tabela 2 - Aplicação do Modelo Black-Scholes nos *portfolios* de teste**

**Lucro médio B&S** corresponde à média aritmética dos lucros, apurados no vencimento, dos 32 *portfolios* ajustados conforme os deltas fornecidos pelo modelo de Black-Scholes. **DP lucros B&S** é o desvio padrão dos lucros, apurados no vencimento. **Diferença média B&S** é a média aritmética das diferenças entre o lucro esperado, previsto por Black-Scholes, e o obtido para cada um dos 32 *portfolios*. **DP diferenças B&S** é o desvio padrão das diferenças entre o lucro esperado, previsto por Black-Scholes, e o obtido. **Valor t lucro médio B&S ( $t_1$ )** é o valor da estatística t para a série Lucro médio de Black-Scholes. **Valor t diferença média B&S ( $t_2$ )** é o valor da estatística t para a série de Diferença média entre o lucro obtido e o lucro esperado por Black-Scholes.

	RCTB16	RCTB28	RCTB30	RCTB32	RCTB34
Preço de exercício	140	150	160	170	180
Lucro médio B&S	0.772	0.476	-0.401	-0.131	-0.028
DP lucros B&S	1.346	2.560	2.082	0.865	0.301
Diferença média B&S	-0.114	-0.301	-0.995	-0.481	-0.237
DP diferenças B&S	1.433	2.624	2.219	1.146	0.643
Valor $t$ lucro médio B&S ( $t_1$ )	3.246	1.052	-1.089	-0.858	-0.536
Valor $t$ diferença média B&S ( $t_2$ )	-0.448	-0.649	-2.536	-2.373	-2.088

As estatísticas t dos lucros médios ( $t_1$ ) denotam que a hipótese nula pode ser rejeitada apenas para a série RCTB16. Este resultado significa um bom desempenho, em termos de *hedge*, utilizando o Black-Scholes. As estatísticas  $t$  das diferenças entre o lucro esperado por Black-Scholes e os lucros obtidos ( $t_2$ ) não permitem a rejeição da hipótese nula para todas as séries observadas, o que também é positivo em termos da capacidade de previsão do lucro pelo modelo de Black-Scholes.

**Tabela 3 - Aplicação do Modelo de Árvores Binomiais Implícitas nos *portfolios* de teste**

**Lucro médio Modelo** corresponde à média aritmética dos lucros, apurados no vencimento, dos 32 *portfolios* ajustados conforme os deltas fornecidos pelo modelo de Árvores Binomiais Implícitas. **DP lucros Modelo** é o desvio padrão dos lucros, apurados no vencimento. **Diferença média Modelo** é a média aritmética das diferenças entre o lucro esperado, previsto por Árvores Binomiais Implícitas, e o obtido para cada um dos 32 *portfolios*. **DP diferenças Modelo** é o desvio padrão das diferenças entre o lucro esperado, previsto por Árvores Binomiais Implícitas, e o obtido. **Valor t lucro médio Modelo ( $t_3$ )** é o valor da estatística t para a série Lucro médio de Árvores Binomiais Implícitas. **Valor t diferença média Modelo ( $t_4$ )** é o valor da estatística t para a série de Diferença média entre o lucro obtido e o lucro esperado por Árvores Binomiais Implícitas.

	RCTB16	RCTB28	RCTB30	RCTB32	RCTB34
Lucro médio Modelo	0.378	0.374	0.366	-0.016	-0.072
DP Lucros Modelo	1.764	3.686	1.829	0.811	0.324
Diferença média Modelo	0.203	0.323	0.333	-0.051	-0.117
DP diferenças Modelo	1.791	3.688	1.832	0.793	0.318
Valor $t$ lucro médio Modelo ( $t_3$ )	1.213	0.574	1.133	-0.110	-1.249
Valor $t$ diferença média Modelo ( $t_4$ )	0.642	0.495	1.028	-0.366	-2.086

As estatísticas  $t$  dos lucros médios ( $t_3$ ) resultam em que a hipótese nula não pode ser rejeitada em nenhuma das séries de opção observadas. Este resultado significa um bom desempenho em termos de *hedge* utilizando o modelo de Árvores Binomiais

Implícitas. As estatísticas  $t$  das diferenças entre o lucro esperado pelo modelo e os lucros obtidos ( $t_4$ ) também não permitem a rejeição da hipótese nula para todas as séries observadas, o que significa um bom resultado na previsão do lucro pelo modelo.

Faz-se necessário assim, uma análise comparativa do desempenho dos dois modelos. Na Tabela 4, encontram-se os resultados estatísticos de diferença de lucros obtidos utilizando os modelos de Black-Scholes e de Árvores Binomiais Implícitas nos *portfolios* definidos anteriormente. Observa-se que, pela estatística  $t$  encontrada em todas as séries, não é possível rejeitar a hipótese nula. Os resultados deixam claro que não foi possível encontrar prova estatisticamente significativa da existência de diferenças de resultado entre o modelo de árvores binomiais implícitas e o modelo de Black-Scholes.

**Tabela 4 - Análise Comparativa de Lucros**

**Valor  $t$  da diferença de lucros B&S x Modelo** é o valor da estatística  $t$  para a diferença entre o Lucro médio de B&S e de Árvores Binomiais Implícitas.  **$p$ -value** é a estatística de probabilidade de erro ao rejeitar a hipótese nula.

	RCTB16	RCTB28	RCTB30	RCTB32	RCTB34
Preço de exercício	140	150	160	170	180
Valor $t$ da diferença de lucros B&S x Modelo	1.060	0.124	1.482	0.498	0.631
$p$ -value	0.298	0.902	0.148	0.622	0.532

## 5. CONCLUSÕES E SUGESTÕES

O estudo permitiu a obtenção de uma árvore binomial implícita, observando-se uma árvore com uma distribuição de probabilidade no vencimento diferente da prevista pelo modelo de Black-Scholes e construindo-se um processo de comportamento do ativo-objeto no qual, tinha-se a probabilidade de subida e as taxas de subida e descida, variando em cada ponto da árvore e, conseqüentemente, tinha-se a volatilidade variando dentro da árvore binomial. O teste com uma estratégia de *hedge* até o vencimento não possibilitou, contudo, observar uma diferença estatisticamente significativa entre os resultados do modelo de árvores binomiais implícitas em relação ao de Black-Scholes no período observado. Tal resultado não permitiu concluir a existência de superioridade de um modelo sobre o outro. Isto leva a uma conclusão favorável ao modelo de Black-Scholes, pois trata-se de um modelo simples e de implementação mais fácil do que o de árvores implícitas.

Deve-se tomar cuidado com a interpretação destes resultados, pois a amostra utilizada reúne dados de apenas um exercício de opções. Uma extensão deste trabalho deverá incluir um período mais amplo de observações, contemplando períodos de crises financeiras em que ocorreram mudanças significativas na volatilidade, bem como evoluir para a utilização de diferentes modelos de otimização para a construção da árvore binomial implícita.

## 6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BECKER, J. L.; LEMGRUBER, E. F. Uma análise de estratégias de negociação no mercado brasileiro de opções: evidências a partir das opções de compra mais negociadas durante o Plano Cruzado. In: BRITO, N. R. O. **Gestão de investimentos**. São Paulo: Atlas, 1989.

DUMAS, B., FLEMING, J., WHALEY, R.E. Implied volatility functions: empirical tests. **Journal of Finance**, v. 53, n. 6, p. 2059-2106, Dec. 1998.  
(verificar a estória do apud)

BLACK, F.; SCHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. **Journal of Political Economy**, n. 81, p. 637-659, 1973.

COX, J.; ROSS, S.; RUBINSTEIN, M. Option pricing: a simplified approach. **Journal of Financial Economics**, p. 229-264, Oct. 1979.

COX, J.; RUBINSTEIN, M. **Options markets**. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1985.

DERMAN, E.; KANI, I. Riding on a smile. **Risk**, v. 7, n. 2, p. 32-39, Feb. 1994.

DUPIRE, B. Pricing with a smile. **Risk**, v. 7, n. 1, p. 18-20, Jan. 1994.

HULL, J.; WHITE, A. The pricing of options on assets with stochastic volatilities, **Journal of Finance**, v. 42, p. 281-300, 1987.

\_\_\_\_\_. **Options, futures, and other derivatives**. Upper Saddle River, N.J.: Prentice-Hall, 1997. 572 p.

JACKWERTH, J.; RUBINSTEIN, M. Recovering probabilities distributions from options prices, **Journal of Finance**, v. 51, n. 6, p. 1611-1631, Dec. 1996.

LEMGRUBER, E. F.; OHANIAN, G. O modelo de projeção de volatilidade do RiskMetrics™ e a hipótese de distribuição normal condicional para alguns fatores de risco do Brasil. In: ENCONTRO ANUAL da ANAPD, 21., 1997, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro : ANPAD, 1997.

MERTON, R. Options pricing when underlying stock returns are discontinuous. **Journal of Financial Economics**, v. 3, p. 125-144, 1976.

RUBINSTEIN, M. Implied binomial trees. **Journal of Finance**, v. 49, n. 3, p. 771-818, July 1994.

SHINKO, D. Beyond implied volatility: Probability distributions and *hedge* ratios implied by option prices. [S.I.]: University of Southern California, 1991.

WHAT'S Best 3.0: Industrial version. [S.I.]: **LINDO Systems**, 1997.