



SOBRE O PROBLEMA EUCLIDIANO DE STEINER NO \mathbb{R}^N

Luiz Felipe Rimola Ribeiro da Cruz

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientador: Nelson Maculan Filho

Rio de Janeiro

Abril de 2017

SOBRE O PROBLEMA EUCLIDIANO DE STEINER NO \mathbb{R}^N

Luiz Felipe Rimola Ribeiro da Cruz

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Examinada por:

Prof. Nelson Maculan Filho, D.Habil.

Prof. Susana Scheimberg de Makler, D.Sc.

Prof. Jair Koiller, Ph.D.

Prof. Luiz Satoru Ochi, D.Sc.

Prof. Philippe Yves Paul Michelon, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

ABRIL DE 2017

Cruz, Luiz Felipe Rimola Ribeiro da

Sobre o Problema Euclidiano de Steiner no \mathbb{R}^n /Luiz Felipe Rimola Ribeiro da Cruz. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2017.

XIII, 57 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Nelson Maculan Filho

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2017.

Referências Bibliográficas: p. 46 – 53.

1. Problema de Steiner. 2. Problema de Steiner para os vértices de um Hipercubo. 3. Conjectura de Smith. 4. Otimização combinatória. 5. Otimização não linear. I. Maculan Filho, Nelson. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

Para Maria Augusta.

Agradecimentos

Ao professor Maculan por sua orientação, seu apoio sempre constante, pela força e entusiasmo que transmite em todos os momentos, pela maneira generosa com que acolhe seus alunos e, principalmente, por sua muito mais que infinita paciência e boa vontade.

Aos professores do PESC com quem tive oportunidade de trabalhar, pela atenção, dedicação e competência.

Ao Vinícius Leal do Forte pela ajuda com as heurísticas e com o acesso e uso dos computadores do LABOTIM.

Ao Gutierrez da Costa e a todos funcionários do PESC pela presteza, eficiência e boa vontade.

À Maria Augusta pelo apoio, carinho, compreensão e paciência.

Agradecimentos especiais aos queridos Sr. e Sra. Pamadev, Sr. Vinyk, Sr. Padmasam, prof. Sui, Sr. Swor e Syji, e a todos os amigos, professores e colaboradores do saudoso Planesp.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

SOBRE O PROBLEMA EUCLIDIANO DE STEINER NO \mathbb{R}^N

Luiz Felipe Rimola Ribeiro da Cruz

Abril/2017

Orientador: Nelson Maculan Filho

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

O Problema Euclidiano de Steiner (PES) tem como objetivo determinar uma rede de comprimento mínimo que conecte um conjunto finito de pontos do \mathbb{R}^n previamente escolhidos. A norma utilizada é a euclidiana e é permitido o uso de pontos extras que possam contribuir para a redução do comprimento final da rede. Problemas desta natureza são frequentemente encontrados em diversas áreas da matemática, engenharia, etc.

Neste trabalho, estudamos as origens do PES, suas propriedades, complexidade e métodos de resolução. Encerramos analisando uma conjectura proposta em 1992 por Warren Smith sobre a aplicação desse problema aos vértices de um hipercubo n -dimensional, a qual está em aberto desde sua publicação.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

ON THE EUCLIDEAN STEINER TREE PROBLEM IN \mathbb{R}^N

Luiz Felipe Rimola Ribeiro da Cruz

April/2017

Advisor: Nelson Maculan Filho

Department: Systems Engineering and Computer Science

The Euclidean Steiner Problem (ESP) asks for a network of minimum length interconnecting a finite set of given points in \mathbb{R}^n . The distances considered are Euclidean and it's allowed to add additional points to decrease the overall length of the network. Problems of this nature are often found in several areas of mathematics, engineering, etc.

In this work, we study the origins of ESP, their properties, complexity, and resolution methods. We conclude by analyzing a conjecture proposed in 1992 by Warren Smith on the application of this problem to the vertices of an n-dimensional hypercube, which has remained open since its publication.

Sumário

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xii
Lista de Símbolos e Abreviaturas	xiii
1 Introdução	1
1.1 O Problema de Fermat	1
1.2 O Problema euclidiano de Steiner	5
2 Definições e propriedades da árvore mínima de Steiner	8
2.1 Topologias, árvores de Steiner e árvores mínimas relativas	8
2.2 Número de topologias de Steiner	13
2.3 A razão de Steiner	14
2.3.1 A razão de Steiner no plano euclidiano	16
2.3.2 O caso geral	16
3 Estratégias de resolução para o problema euclidiano de Steiner	20
3.1 Modelos de programação matemática	20
3.2 Algoritmos exatos	24
3.2.1 Algoritmos exatos para o problema euclidiano de Steiner no plano	24
3.2.2 Algoritmos exatos para o PES em espaços com dimensão maior que dois	25
3.3 Algoritmos de aproximação	26
3.4 Heurísticas	27
4 Uma conjectura sobre o problema de Steiner para os vértices de um cubo n-dimensional	29
4.1 A conjectura	29
4.2 A topologia associada à conjectura	31
4.3 Propriedades da árvore mínima relativa associada à conjectura	33

4.4	A conjectura é verdadeira?	39
4.5	Considerações finais e a continuação deste trabalho	43
4.5.1	Propriedades estruturais de uma AMS	43
4.5.2	Heurísticas	44
4.5.3	Experiências com topologias obtidas a partir de modificações em \mathcal{T}_n	44
4.5.4	Outras abordagens	45
	Referências Bibliográficas	46
	A Topologias, enumerações e resultados numéricos	54

Lista de Figuras

1.1	Reprodução de desenho do texto original de Torricelli mostrando como resolver o problema de Fermat.	2
1.2	Reprodução de desenho do texto original de Simpson sobre o problema de Fermat. A , B e C são os pontos dados. Q é o ponto equilátero de B e C , e P o ponto de Fermat.	3
1.3	Um par primal-dual. AA' e BB' são diagonais de Simpson do triângulo ABC e P é seu ponto de Fermat. h_1 e h_2 são alturas do triângulo DEF , respectivamente paralelas a AA' e BB' e com mesmo comprimento que estas.	4
1.4	(a) Árvore geradora mínima. (b) Árvore utilizando pontos extras. Em cada caso, L é o comprimento da árvore representada.	5
1.5	Árvore interligando os vértices de um cubo usando pontos extras.	6
2.1	Três topologias diferentes para um mesmo conjunto de pontos.	9
2.2	Árvores mínimas relativas (em vermelho) correspondentes às topologias de Steiner representadas acima delas. A árvore mínima em (b) é degenerada e não é uma árvore de Steiner.	10
2.3	Em (a), uma AMR que não é de Steiner, embora sua topologia seja de Steiner. Em (b), a AMR degenerada é uma árvore de Steiner a qual, de fato, é a AMS para os pontos dados.	11
2.4	Uma topologia que não é de Steiner sendo gradualmente transformada até se tornar uma topologia de Steiner cheia. Ao final a árvore correspondente é otimizada, obtendo-se uma topologia de Steiner degenerada.	12
2.5	A decomposição de uma árvore de Steiner em componentes cheias.	13
2.6	Uma sequência de tetraedros, dois a dois adjacentes, cujos vértices $k, \dots, k + 9$ são pontos consecutivos da <i>3-sausage</i>	17
2.7	Uma sequência de esferas distribuídas em uma hélice tripla do \mathbb{R}^3 . Seus centros são pontos consecutivos da <i>3-sausage</i>	18

3.1	O grafo G para um problema com 6 vértices terminais e 4 pontos de Steiner.	21
4.1	Para cada n , a representação da topologia \mathcal{T}_n é a parte do desenho contida no círculo indicado. Fixando-se um dos círculos, os pontos em sua fronteira representam os vértices do correspondente n -cubo, enquanto que os pontos em seu interior representam os pontos de Steiner de \mathcal{T}_n	31
4.2	As topologias $\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3, \mathcal{T}_4$ e \mathcal{T}_5	32
4.3	Construção de $\mathcal{A}_{(n+1)}$ a partir de \mathcal{A}_n	35
4.4	(a) Árvore mínima relativa (b) Árvore mínima de Steiner.	39
4.5	A função $f(d)$	40
4.6	Construção de $\mathcal{D}_{(n+1)}$ a partir de \mathcal{D}_n	41
4.7	Interligando as quatro árvores para obter $\mathcal{D}_{(n+1)}$	42
4.8	Uma representação de \mathcal{T}_8	45
A.1	Topologia \mathcal{T}_2 do quadrado (2-cubo).	54
A.2	A topologia \mathcal{T}_3 do 3-cubo.	55
A.3	A topologia \mathcal{T}_4 do 4-cubo.	56

Lista de Tabelas

2.1	Número de topologias cheias para p vértices terminais.	14
2.2	Cotas superiores para ρ_n obtidas por Du e Smith utilizando a <i>sausage</i>	18
4.1	Número de topologias cheias interligando os vértices de um n -cubo.	30
A.1	Coordenadas dos vértices do 2-cubo e dos pontos de Steiner de \mathcal{A}_2 , a árvore mínima de Steiner do 2-cubo, segundo a enumeração da Figura A.1.	54
A.2	Coordenadas dos vértices terminais e dos pontos de Steiner de \mathcal{A}_3 , a árvore mínima de Steiner do 3-cubo, segundo a enumeração da Figura A.2.	55
A.3	Coordenadas dos vértices terminais (os vértices do 4-cubo) e dos pontos de Steiner de \mathcal{A}_4 , conforme a enumeração indicada na Figura A.3.	56
A.4	Coordenadas dos pontos de Steiner de \mathcal{A}_4 (a) e de \mathcal{A}_5 (b), como um exemplo da propriedade descrita no item (iii) do corolário 4.2: se (x_1, \dots, x_n) é um ponto de Steiner de \mathcal{A}_n , então $(1/2, x_1, \dots, x_n)$ é um ponto de Steiner de \mathcal{A}_{n+1}	57

Lista de Símbolos e Abreviaturas

$L(A)$	Comprimento, segundo a norma euclidiana, de uma grafo A imerso no \mathbb{R}^n , p. 10
\mathbb{R}	O conjunto dos números reais, p. 1
\mathbb{R}^n	O produto cartesiano $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ com n fatores, p. 1
ρ	Razão de Steiner, p. 15
$\rho(P)$	Razão de Steiner do conjunto P , ou dos pontos de P , p. 15
ρ_n	Razão de Steiner do espaço euclidiano \mathbb{R}^n , p. 15
\mathcal{A}_n	Árvore mínima relativa associada à conjectura de Smith, p. 33
\mathcal{T}_n	Topologia da árvore mínima relativa associada à conjectura de Smith, p. 31
AGM(P)	Árvore geradora mínima que interliga os pontos do conjunto P , p. 5
AGM	Árvore geradora mínima, p. 5
AMR	Árvore mínima relativa, p. 10
AMS(P)	Árvore mínima de Steiner que interliga os pontos do conjunto P , p. 6
AMS	Árvore mínima de Steiner, p. 6
PES	Problema Euclidiano de Steiner, p. 1

Capítulo 1

Introdução

Com um grande número de aplicações, o problema euclidiano de Steiner (PES) tem sido, nas últimas décadas, alvo de um intenso esforço de pesquisa. Seu enunciado simples e de fácil compreensão, esconde uma grande complexidade que combina aspectos de geometria, otimização combinatória e otimização contínua.

Em sua configuração mais simples, no plano euclidiano, é possível obter soluções exatas de grandes instâncias do mesmo em tempo aceitável. Porém, a partir do \mathbb{R}^3 , os métodos atuais somente encontram soluções exatas em casos particulares ou em instâncias muito pequenas. Além disso, o cálculo de soluções aproximadas também apresenta dificuldades: os algoritmos de aproximação já desenvolvidos ainda são ineficientes, restando apenas a possibilidade do uso de heurísticas, as quais, para dimensões maiores que 2, se constituem na única abordagem do problema que está num bom estágio de desenvolvimento.

Esses e outros aspectos do PES serão discutidos a partir da próxima seção. Neste capítulo o apresentaremos numa perspectiva histórica. No capítulo 2 veremos suas propriedades mais relevantes. As diferentes estratégias de resolução que têm sido utilizadas serão abordadas no capítulo 3 e, no capítulo 4, discutiremos uma conjectura proposta por W. Smith há 25 anos.

1.1 O Problema de Fermat

A primeira versão conhecida do PES foi proposta como um desafio por Pierre de Fermat [1], na primeira metade do século XVII. Certamente, Fermat não imaginava que estava iniciando o que, cerca de 400 anos depois, se tornaria num vasto campo de pesquisas com aplicações que vão da matemática e da engenharia até a biologia e a linguística. O desafio, hoje conhecido como *problema de Fermat* ou *problema de Fermat-Torricelli*, tinha o seguinte enunciado:

Dados três pontos, encontre um quarto ponto cuja soma de suas distâncias aos pontos dados é mínima.

Poucos anos depois, cerca de 1640, Torricelli já tinha resolvido o desafio [2]. A Figura 1.1 reproduz um desenho do trabalho original de Torricelli. Nela A , B e C são os pontos dados e F é o ponto procurado por Fermat. No desenho, Torricelli indicava que F pode ser obtido por meio da interseção de circunferências e de segmentos de retas, o que possibilita encontrar a solução por meio de três construções diferentes.

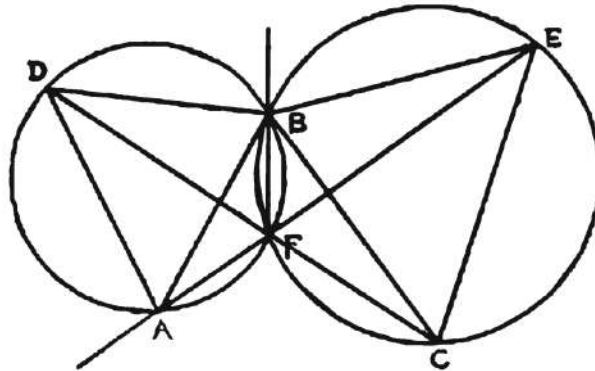


Figura 1.1: Reprodução de desenho do texto original de Torricelli mostrando como resolver o problema de Fermat.

Um ponto F , solução do problema de Fermat, é chamado de *ponto de Fermat*, *ponto de Torricelli* ou *ponto de Fermat-Torricelli*. Cada uma das circunferências da figura acima, é circunscrita a um triângulo equilátero construído sobre um dos lados do triângulo ABC , e exterior a esse triângulo. Circunferências como essas são chamadas de *circunferências de Torricelli*.

Ainda na Figura 1.1, o vértice E do triângulo equilátero BCE (exterior ao triângulo ABC) é chamado de *ponto equilátero* de B e C . Analogamente, D é o ponto equilátero de A e B . Também poderia ter sido construído um ponto equilátero correspondendo a A e C .

Cavalieri, em 1647 [3], mostrou que a solução de Torricelli só é válida se todos os ângulos do triângulo ABC forem $\leq 120^\circ$. Cavalieri mostrou também que, quando algum dos ângulos de ABC é maior que 120° , o ponto de Fermat coincide com o vértice desse ângulo.

Um segmento unido um vértice de um triângulo ao ponto equilátero de seu lado oposto (como AE na Fig. 1.1) é denominado *diagonal de Simpson*. Esta denominação, se deve a redescoberta desses segmentos por Simpson em 1750 [4], mais de um século depois da publicação da solução de Torricelli. É possível que Simpson tenha redescoberto não só a solução, como também o próprio problema de Fermat, o qual, nessa época, parecia estar esquecido.

A Figura 1.2 reproduz um desenho da publicação original de Simpson sobre o problema de Fermat. Nele vê-se que as construções de Torricelli e de Simpson são essencialmente as mesmas, embora a de Simpson seja um pouco mais resumida. Por outro lado, as demonstrações apresentadas eram diferentes. Torricelli utilizou apenas fatos geométricos, enquanto que Simpson, numa época em que a matemática estava mais desenvolvida, usou elementos de geometria, trigonometria e cinemática. Ambos porém, se basearam em um mesmo princípio: a soma das distâncias do ponto de Fermat aos três pontos dados é mínima quando os segmentos unindo esses pontos ao ponto de Fermat formam entre si ângulos iguais.

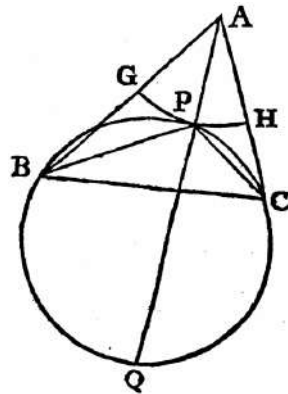


Figura 1.2: Reprodução de desenho do texto original de Simpson sobre o problema de Fermat. A , B e C são os pontos dados. Q é o ponto equilátero de B e C , e P o ponto de Fermat.

Finalmente, em 1834, Heinen completou a solução do desafio de Fermat ao demonstrar que os comprimentos das diagonais de Simpson são todos iguais à soma das distâncias do ponto de Fermat aos três pontos dados [5].

O conhecimento acumulado sobre o problema de Fermat a partir dos trabalhos desses e de outros matemáticos está resumido na proposição abaixo.

Proposição 1.1. *Dados três pontos distintos e não colineares A , B e C no plano, a solução do problema de Fermat para esses pontos existe, é única e pode ser encontrada da seguinte maneira:*

- (i) *Se algum dos ângulos do triângulo ABC é maior ou igual a 120° o ponto F de Fermat coincide com o vértice desse ângulo.*
- (ii) *Se todos os ângulos de ABC são menores que 120° , F está no interior do triângulo ABC , os segmentos que unem F aos vértices A , B e C formam, dois a dois, ângulos de 120° e F coincide com a interseção única das circunferências de Torricelli e das diagonais de Simpson. Além disso, as diagonais de Simpson*

têm todas o mesmo comprimento, o qual é igual à soma das distâncias de F aos pontos A , B e C .

As demonstrações originais destes fatos são encontradas nas referências citadas acima. Além dessas, várias outras demonstrações, utilizando diferentes áreas da matemática, podem ser vistas em [6–8].

Infelizmente, o manuscrito original de Fermat se perdeu, e não há certeza sobre a data em que foi escrito. Estima-se que foi em 1629 [9, 10]. Restou uma cópia que foi publicada após seu falecimento. Mais detalhes sobre a história do problema de Fermat e a publicação de suas obras são dados em [9–11].

Desde sua divulgação, o problema de Fermat tem atraído a atenção de matemáticos importantes. Além dos já citados, também fazem parte desta lista nomes como Steiner, Gauss, Napoleon, Bertrand, Gergonne e outros. Das diversas generalizações que surgiram ao longo dos anos, uma consiste justamente no problema euclidiano de Steiner, o qual será objeto de nosso estudo a partir da próxima seção.

Além de ter sido o ponto de partida que deu origem a novos problemas e muitas variações, o problema de Fermat é também considerado como o problema primal da primeira ocorrência de dualidade em otimização não linear. Nesse contexto, considerando o problema de Fermat definido para os vértices de um triângulo ABC , seu dual se constitui no problema de determinar um triângulo equilátero DEF de área máxima, no qual o triângulo ABC esteja inscrito.

Como mostra a Figura 1.3, DEF pode ser obtido observando-se que suas alturas são paralelas às diagonais de Simpson de ABC e têm o mesmo comprimento que elas [12].

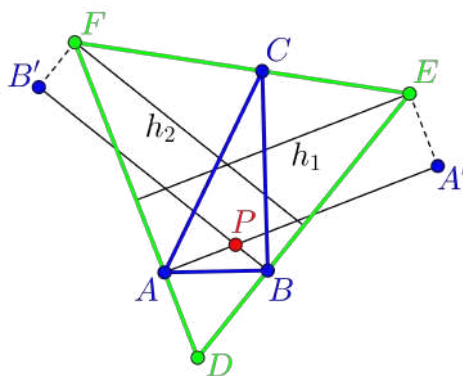


Figura 1.3: Um par primal-dual. AA' e BB' são diagonais de Simpson do triângulo ABC e P é seu ponto de Fermat. h_1 e h_2 são alturas do triângulo DEF , respectivamente paralelas a AA' e BB' e com mesmo comprimento que estas.

1.2 O Problema euclidiano de Steiner

Neste trabalho utilizaremos apenas grafos não orientados. O termo *árvore* designará um grafo (não orientado, conexo e acíclico) imerso no espaço \mathbb{R}^n . O mesmo se aplicará aos vértices e às arestas de uma árvore. A imersão considerada associará as arestas do grafo a segmentos de reta do \mathbb{R}^n . Assim, quando falarmos em ângulos entre arestas ou comprimento de uma árvore, estará implícito que estamos nos referindo a uma árvore imersa no \mathbb{R}^n . A norma utilizada será a euclidiana. Quando, em algum momento, desejarmos nos referir ao grafo usualmente denominado árvore, se isso não for claro pelo contexto, faremos alguma observação.

Dado um conjunto finito $P \subset \mathbb{R}^n$, um problema bem conhecido é o de determinar uma árvore A de comprimento mínimo, cujo conjunto de vértices seja P . A é a imersão no \mathbb{R}^n da árvore (grafo) geradora mínima do grafo completo cujo conjunto de vértices corresponde a P . Representaremos essa árvore mínima por AGM ou $AGM(P)$ e vamos chamá-la de *árvore geradora mínima para o conjunto P* ou *do conjunto P* .

A determinação de uma árvore geradora mínima é um problema simples, para o qual são conhecidos diversos algoritmos eficientes e de fácil implementação [13, 14]. Em muitos casos, porém, é possível encontrar uma árvore com comprimento ainda menor que o da AGM. Isto é conseguido utilizando-se vértices adicionais ao se conectar os pontos de P . A Figura 1.4 mostra essa situação.

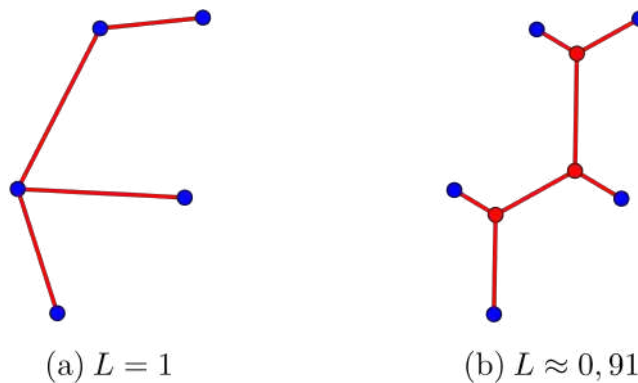


Figura 1.4: (a) Árvore geradora mínima. (b) Árvore utilizando pontos extras. Em cada caso, L é o comprimento da árvore representada.

Supondo que os pontos estão no \mathbb{R}^2 , temos em (a) uma árvore geradora mínima de comprimento 1. Em (b), usando três vértices extras, obtivemos uma árvore com comprimento cerca de 10% menor.

Outro exemplo é dado na Figura 1.5, onde consideramos o conjunto de vértices de um cubo. Como no caso anterior, arbitramos em uma unidade o comprimento da

AGM interligando aqueles vértices. Na figura está representada uma árvore que utiliza 6 pontos extras para conectar o mesmo conjunto de pontos e cujo comprimento é, aproximadamente, 0,885. Uma redução de 11,5 %.

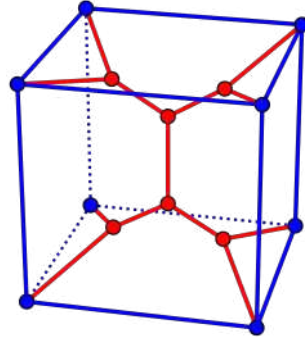


Figura 1.5: Árvore interligando os vértices de um cubo usando pontos extras.

No capítulo 3 desta tese, discutiremos as técnicas que são utilizadas para encontrar pontos extras como os que aparecem nos dois exemplos acima. Em particular, as coordenadas dos pontos adicionais usados na árvore da Figura 1.5 estão listadas na Tabela A.2 do apêndice.

Definição 1. O Problema Euclidiano de Steiner no \mathbb{R}^n . Dados p pontos no \mathbb{R}^n , encontre uma árvore interligando esses pontos que tenha o menor comprimento possível. É permitida a utilização de pontos extras.

Os pontos dados são chamados de *vértices terminais* e os pontos extras de *pontos de Steiner*. Uma árvore de comprimento mínimo conectando os vértices terminais é dita uma *árvore mínima de Steiner* (AMS).

Se P for o conjunto de vértices terminais, então a árvore de comprimento mínimo será também chamada de *árvore mínima de Steiner* do conjunto P e representada por $AMS(P)$.

Em sua definição o PES se restringe a uma árvore por um motivo óbvio. Nas condições do problema, uma interligação de comprimento mínimo necessariamente não conteria ciclos. Pois, havendo algum, bastaria remover dele uma de suas arestas para encontrarmos uma interligação (ainda conexa) com comprimento menor.

O PES também pode ser definido da seguinte maneira:

Definição 2. Dado um conjunto $P \subset \mathbb{R}^n$, encontre um conjunto $Q \subset \mathbb{R}^n$, possivelmente vazio, tal que a árvore geradora mínima de $P \cup Q$ tenha o menor comprimento possível.

No caso em que há apenas 3 vértices terminais, é fácil observar que o PES se torna equivalente ao problema de Fermat. O primeiro estudo conhecido do PES utilizando mais que 3 terminais, é o de Gergonne, publicado em 1811 [11, 15]. Ainda no século XIX, Gauss [11], Bopp [16] e Hoffmann [17] também analisaram exemplos do PES com 4 ou mais terminais [11].

Já no século XX, em 1934, Jarník e Kössler [18] publicaram a que é considerada como a primeira abordagem moderna do PES. Mas, foi somente a partir da década de 1940, com a publicação do livro “*What is Mathematics?*” de Courant e Robbins [19], que o PES ganhou grande visibilidade na comunidade científica. A partir daí, centenas de trabalhos e vários livros foram publicados, embora muitas questões ainda permaneçam não resolvidas. Além de todo esse movimento, a grande popularidade do livro de Courant e Robbins criou também um equívoco histórico ao atribuir a Steiner o problema que até hoje leva seu nome. Steiner trabalhou com outra generalização do problema de Fermat [20] não tendo, aparentemente, se envolvido com o PES.

Uma excelente narrativa da história do problema de Steiner pode ser encontrada em [11]. De tudo o que se tem escrito sobre o PES, são referências básicas os *surveys* [21, 22] e o livro [6]. Como referências avançadas destacamos [23–26].

Como resultado do intenso esforço de pesquisa que tem sido feito surgiram, nas últimas décadas, dezenas de variações e generalizações do PES. Muitas delas estão listadas em [6, 22, 23, 25, 27–33].

Quanto às aplicações do PES e de suas variações, a quantidade e a diversidade impressionam: engenharia de minas, civil, elétrica, eletrônica e de telecomunicações. Internet, química, biologia, botânica e até modelos em linguística. Várias destas estão descritas em [24, 34–44].

Capítulo 2

Definições e propriedades da árvore mínima de Steiner

Em todo este trabalho, vamos supor que o número de vértices terminais é > 1 e que o grau de um ponto de Steiner é ≥ 3 , sem que seja necessário fazer qualquer observação adicional a esse respeito. Um ponto de Steiner com grau 1 aumentaria desnecessariamente o comprimento da árvore devido à aresta que lhe é incidente. Um ponto de Steiner com grau dois pode sempre ser excluído sem que isso aumente o comprimento da árvore. Basta, após excluí-lo, inserir uma aresta conctando os dois vértices que lhe eram adjacentes.

2.1 Topologias, árvores de Steiner e árvores mínimas relativas

Dados p pontos no \mathbb{R}^n , a resolução do PES consiste em determinar:

- (i) O número de pontos de Steiner que serão utilizados.
- (ii) A estrutura combinatória da árvore procurada, isto é, uma descrição de todas as ligações entre seus vértices (terminais e pontos de Steiner).
- (iii) As coordenadas dos pontos de Steiner.

Os dois primeiros itens acima, serão descritos por um grafo (não imerso no \mathbb{R}^n) correspondente àquela estrutura combinatória. Este grafo é usualmente denominado *topologia*. Uma descrição similar poderia ser feita, por exemplo, através de uma matriz de adjacência. O importante aqui é observar que a topologia (um grafo, no

nosso texto) não especifica posições para os pontos de Steiner. No entanto, considera-se que no conjunto de vértices da topologia está claro quais vértices correspondem aos terminais e quais representam os pontos de Steiner.

Na Figura 2.1 vemos três árvores, que correspondem a diferentes topologias, interligando um conjunto de pontos do \mathbb{R}^2 .

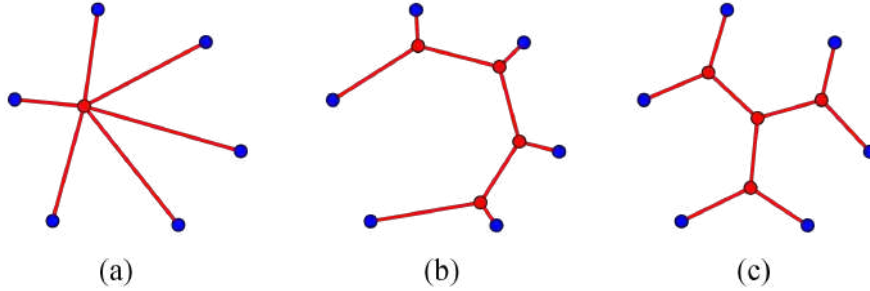


Figura 2.1: Três topologias diferentes para um mesmo conjunto de pontos.

Na literatura sobre o PES, os itens da proposição abaixo têm sido frequentemente demonstrados. Por exemplo, em [6, 21].

Proposição 2.1. *Em uma árvore mínima de Steiner:*

- (i) *Todo ponto de Steiner tem grau três, as arestas que nele incidem formam, duas a duas, ângulos de 120° e estão todas contidas em um plano.*
- (ii) *O grau de todo vértice terminal é ≤ 3 . Arestas que incidem em um vértice terminal formam entre si ângulos $\geq 120^\circ$. Quando houver três arestas incidentes, a configuração será idêntica a que ocorre nos pontos de Steiner: as arestas serão coplanares e formarão entre si ângulos de 120° .*
- (iii) *Se p for o número de vértices terminais e s o de pontos de Steiner, então $s \leq p - 2$.*
- (iv) *Os pontos de Steiner estão todos contidos no fecho convexo dos vértices terminais.*

Do item (i) resulta que, em uma AMS, todo ponto de Steiner é o ponto de Fermat correspondente aos três vértices (terminais ou de Steiner) que lhe são adjacentes.

Uma árvore que verifique as condições descritas nos itens (i) e (ii) acima é dita uma *árvore de Steiner*. Sua topologia é chamada de *topologia de Steiner*. Ou seja, uma topologia de Steiner é aquela em que todo ponto de Steiner tem grau 3 e todo vértice terminal tem grau ≤ 3 .

Como uma aplicação imediata da proposição acima, vemos que a árvore da Figura 2.1(a) não é uma AMS para os pontos dados.

Na condição (iii) acima, quando $s = p - 2$, a árvore e sua topologia são ditas *cheias*. Numa árvore de Steiner cheia todo vértice terminal tem grau 1 [21]. Conseqüentemente, se o número de vértices terminais for maior que 2, todo vértice terminal será adjacente a um único ponto de Steiner (Fig. 2.1(b)(c)).

Fixada uma topologia de Steiner, o comprimento de uma árvore A com essa topologia é

$$L(A) = \sum_{i < j} \|v_i - v_j\|, \quad (2.1)$$

onde $v_i v_j$ é uma aresta de A e $\|\cdot\|$ representa a norma euclidiana. L é uma função convexa cujas variáveis correspondem aos pontos de Steiner listados na topologia. Em [21, 22] mostra-se que, para cada topologia de Steiner T , L admite um valor mínimo que corresponde a uma única árvore A_m que pode, ou não, ser uma árvore de Steiner. Chamaremos essa árvore de *árvore mínima relativa* (AMR) correspondente à topologia T .

Em alguns casos, uma ou mais das arestas da AMR tem comprimento nulo. Quando isso ocorre, a AMR e sua topologia são ditas *degeneradas*. Um exemplo dessa situação é visto na Figura 2.2. Nela, estão representadas (em preto) duas diferentes topologias para árvores conectando quatro pontos do \mathbb{R}^2 . Cada topologia possui dois pontos de Steiner (em verde). Abaixo delas, em vermelho, está a correspondente árvore mínima relativa. A árvore mínima exibida em (b) é degenerada, pois a aresta que une os pontos de Steiner teve seu comprimento reduzido a zero.

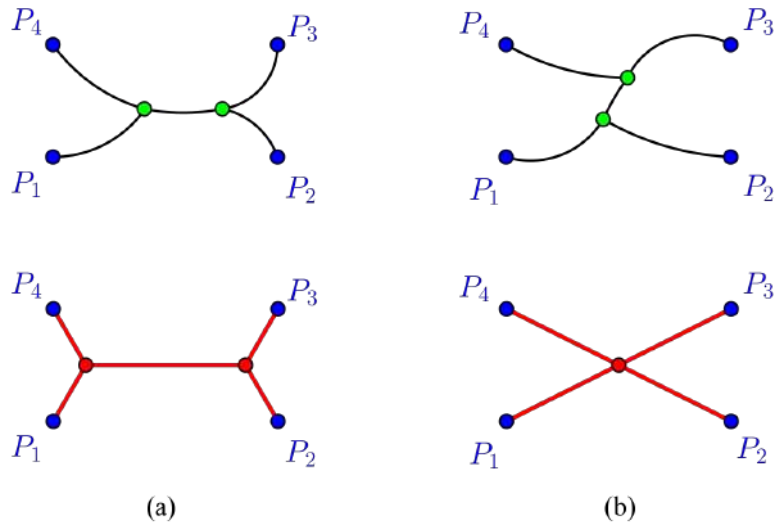


Figura 2.2: Árvores mínimas relativas (em vermelho) correspondentes às topologias de Steiner representadas acima delas. A árvore mínima em (b) é degenerada e não é uma árvore de Steiner.

Um outro exemplo é visto na Figura 2.3. Nela, vemos duas topologias de Steiner (em preto) interligando 6 vértices no plano. Abaixo das topologias estão as correspondentes árvores mínimas relativas. Em (a), a AMR não é uma árvore de Steiner, pois há duas arestas formando um ângulo menor que 120° . Logo, essa árvore não pode ser uma AMS. Em (b), a topologia dada degenerou para outra que também é de Steiner. A correspondente árvore degenerada é, neste caso, a AMS para os pontos dados.

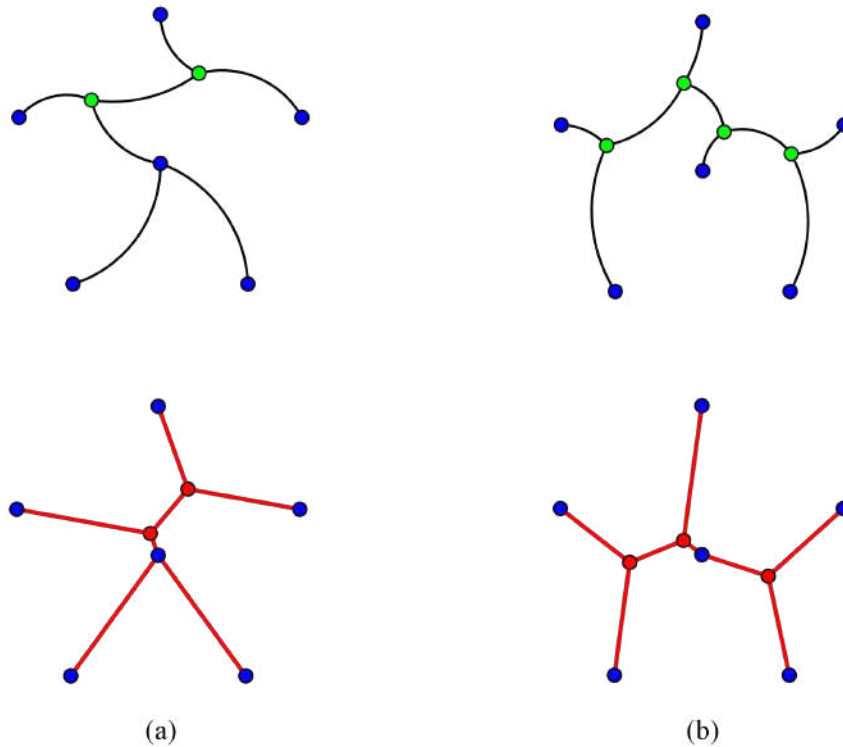


Figura 2.3: Em (a), uma AMR que não é de Steiner, embora sua topologia seja de Steiner. Em (b), a AMR degenerada é uma árvore de Steiner a qual, de fato, é a AMS para os pontos dados.

As Figuras 2.2 e 2.3 mostram que a degeneração de uma árvore (topologia) de Steiner pode, ou não, ser de Steiner. A próxima proposição [21, 22] formaliza alguns dos comentários que fizemos acima:

Proposição 2.2. *Dada uma topologia de Steiner, existe e é única a árvore mínima relativa que corresponde a essa topologia. Esta AMR será uma árvore de Steiner ou uma degeneração de uma árvore de Steiner.*

Em [21, 22] mostra-se também a recíproca:

Proposição 2.3. *Uma árvore de Steiner é sempre a árvore mínima relativa correspondente à sua topologia (a qual, naturalmente, é também de Steiner).*

Abaixo, faremos alguns comentários e citaremos duas propriedades que mostram a importância das topologias cheias no estudo e na resolução do PES.

Numa qualquer topologia, o grau de um vértice (terminal ou ponto de Steiner) pode ser reduzido mediante a inserção de pontos de Steiner. Para reduzir de uma unidade o grau de um vértice v , desconectamos duas arestas incidentes em v e as conectamos a um novo ponto de Steiner s , o qual será também conectado a v pela inserção de uma nova aresta. Se desejado, esse procedimento pode ser repetido várias vezes.

O procedimento inverso também ser aplicado. O grau de um vértice v pode ser aumentado excluindo-se um ponto de Steiner s que esteja conectado a v e, em seguida, conectando-se v às arestas que estavam ligadas a s . Em essência, esse mecanismo inverso é o que ocorre quando uma topologia degenera ao se minimizar o comprimento de alguma árvore.

A Figura 2.4 mostra uma árvore (topologia), inicialmente sem nenhum ponto de Steiner, sendo gradualmente modificada pela inserção de pontos de Steiner, até tornar-se uma árvore (topologia) de Steiner cheia. No último passo, a árvore é otimizada, resultando numa árvore (topologia) de Steiner degenerada. Toda essa sequência pode ser realizada em sentido inverso.

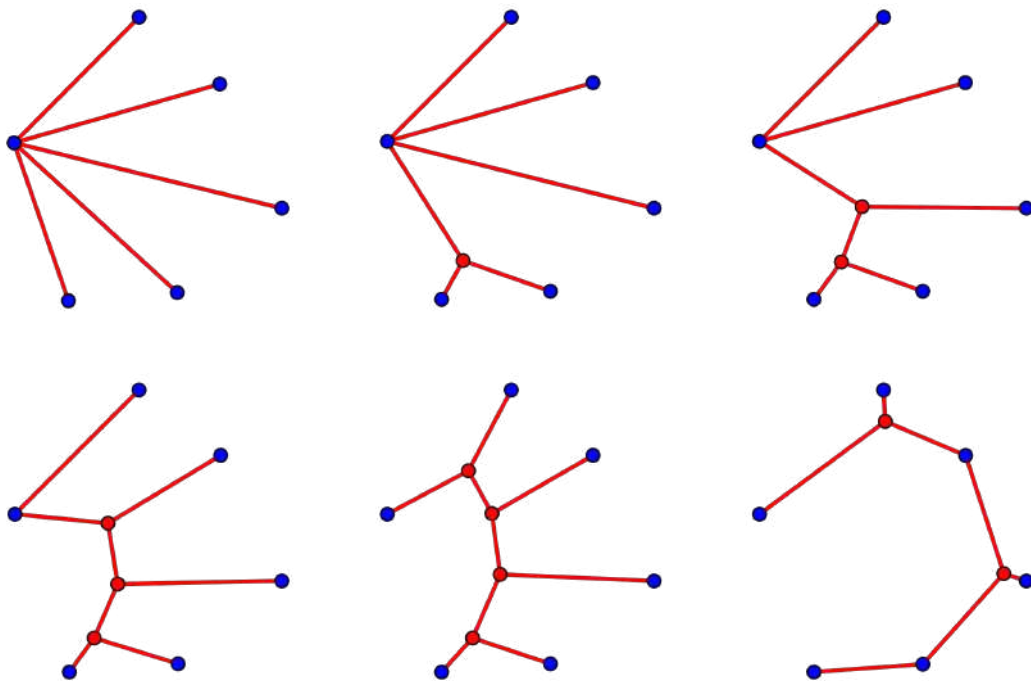


Figura 2.4: Uma topologia que não é de Steiner sendo gradualmente transformada até se tornar uma topologia de Steiner cheia. Ao final a árvore correspondente é otimizada, obtendo-se uma topologia de Steiner degenerada.

As ideias acima nos levam à seguinte proposição [21, 22]:

Proposição 2.4. *Toda árvore mínima relativa ou é cheia ou é uma degeneração de uma árvore cheia (não necessariamente única).*

Por essa razão alguns algoritmos e heurísticas utilizam somente árvores cheias, pois qualquer que seja a AMS, ela é uma árvore mínima relativa correspondente à sua topologia. Logo, poderá ser obtida como uma degeneração de uma árvore cheia.

Alguns algoritmos usam também a

Proposição 2.5. *Toda árvore de Steiner que não é cheia pode ser decomposta como uma união de árvores cheias.*

As árvores cheias cuja união forma uma árvore de Steiner A , são ditas as *componentes cheias de A* . A Figura 2.5 mostra um exemplo desse tipo de decomposição.

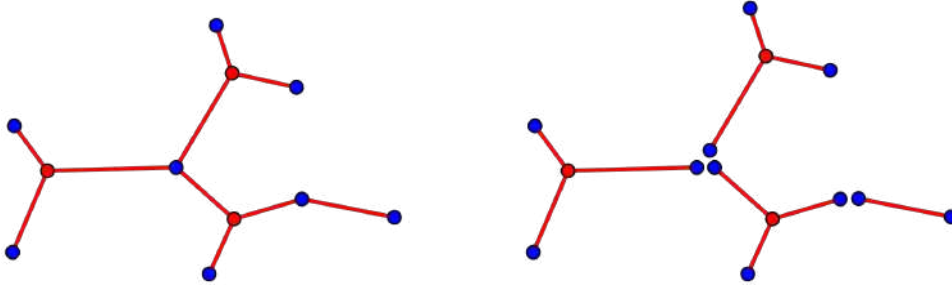


Figura 2.5: A decomposição de uma árvore de Steiner em componentes cheias.

2.2 Número de topologias de Steiner

A principal dificuldade encontrada pelos algoritmos exatos para o PES, está no imenso número de possíveis topologias, o qual aumenta superexponencialmente [21] com o número de vértices terminais. Calculado em [21, 22], o número total de topologias de Steiner para árvores conectando p vértices terminais é

$$\sum_{i=0}^{\lfloor (p-2)/2 \rfloor} \sum_{j=0}^{(p-2i-2)} \binom{p}{i} \binom{p-i}{i+j+2}.$$

Se, como fazem alguns algoritmos, nos restringirmos apenas a topologias cheias, encontraremos um número bem menor, mas que ainda apresenta crescimento superexponencial:

$$\frac{(2p-4)!}{2^{p-2}(p-2)!} = (2p-5)!! = (2p-5).(2p-7) \dots 5.3.1. \quad (2.2)$$

A Tabela 2.1 compara, para alguns valores de p , o número de topologias cheias para p vértices terminais com os valores de 2^p .

p	2^p	Número de topologias cheias
3	8	1
4	16	3
5	32	15
6	64	105
7	128	945
8	256	10.395
9	512	135.135
10	1.024	2.027.025
11	2.048	34.459.425
12	4.096	654.729.075
13	8.192	13.749.310.575
14	16.384	316.234.143.225
15	32.768	7.905.853.580.625
16	65.536	213.458.046.676.875
17	131.072	6.190.283.353.629.375
18	262.144	191.898.783.962.510.625
19	524.288	6.332.659.870.762.850.625
20	1.048.576	221.643.095.476.699.761.875
50	1,13 E+15	2,84 E+74
100	1,27 E+30	1,70 E+182
150	1,43 E+45	4,23 E+301

Tabela 2.1: Número de topologias cheias para p vértices terminais.

2.3 A razão de Steiner

Devido à complexidade do problema de Steiner e às diversas dificuldades que têm sido encontradas na busca de suas soluções, é de grande utilidade a determinação de cotas superiores e inferiores para o comprimento de uma AMS. Por outro lado, como já comentamos, encontrar uma árvore geradora mínima é um problema simples. Assim, é natural utilizar AGMs para tentar obter informações sobre o problema de Steiner. Por exemplo, como uma AMS de um conjunto $P \subset \mathbb{R}^n$ pertence a um universo que inclui o conjunto das árvores geradoras de P , temos a cota superior trivial

$$L(\text{AMS}(P)) \leq L(\text{AGM}(P)), \quad (2.3)$$

onde $L(A)$ representa o comprimento da árvore A .

Na determinação de cotas inferiores pode-se utilizar o parâmetro que definimos a seguir.

Definição 3. Fixado n , a *razão de Steiner* do espaço euclidiano \mathbb{R}^n é dada por

$$\rho = \rho_n = \inf \left\{ \frac{L(\text{AMS}(P))}{L(\text{AGM}(P))}; P \subset \mathbb{R}^n, |P| > 1 \right\},$$

onde $|P|$ representa o número de elementos do conjunto P .

Para $P \subset \mathbb{R}^n$, teremos

$$\rho_n \leq \frac{L(\text{AMS}(P))}{L(\text{AGM}(P))}.$$

Portanto, $\rho_n \cdot L(\text{AGM}(P))$ é uma cota inferior para o comprimento de $\text{AMS}(P)$. Em espaços onde o valor de ρ_n seja conhecido, esta cota pode, por exemplo, ser utilizada em algoritmos de resolução do PES (como nos métodos citados na Seção 3.1). ρ_n também poderia ser utilizada para estimar a qualidade de uma solução obtida por uma heurística (Seção 3.1) ou o desempenho médio de um algoritmo de aproximação (Seção 3.3).

A simplicidade do cálculo da AGM sugere que ela possa ser usada como uma heurística para a AMS. Neste caso, a razão de Steiner fornece uma estimativa do erro cometido. Em outras palavras, ρ_n é uma estimativa da redução máxima que se pode obter no comprimento de uma AGM de um conjunto $P \subset \mathbb{R}^n$, quando se utilizam pontos de Steiner para interligar os pontos de P .

Abaixo, uma variação da definição de razão de Steiner, útil em várias situações.

Definição 4. Dado um conjunto $P \subset \mathbb{R}^n$, com $|P| > 1$, a *razão de Steiner de P* ou dos *pontos de P* é o quociente

$$\rho(P) = \frac{L(\text{AMS}(P))}{L(\text{AGM}(P))}.$$

Por exemplo, a razão de Steiner para os vértices de um quadrado é $(1 + \sqrt{3})/3$ e a de um cubo (tridimensional) é $(1 + 3\sqrt{3})/7$.

Se $P \subset \mathbb{R}^n$, teremos $\rho_n \leq \rho(P)$. Além disso, $\rho_{n+1} \leq \rho_n$, para todo n .

Infelizmente, o valor exato da razão de Steiner do \mathbb{R}^n ainda é desconhecido para todos os valores de n . Várias conjecturas e aproximações têm sido feitas e, aparentemente, algumas delas estão corretas ou, pelo menos, muito próximas do valor real. Cotas superiores e inferiores também foram calculadas. A seguir veremos alguns destes casos.

2.3.1 A razão de Steiner no plano euclidiano

Um grande esforço tem sido investido na determinação da razão de Steiner do plano euclidiano. Uma famosa conjectura publicada em 1968 por Gilbert e Pollak [21] afirma que $\rho_2 = \sqrt{3}/2$. Este é o valor de $\rho(P) = \frac{L(\text{AMS}(P))}{L(\text{AGM}(P))}$ quando P é o conjunto de vértices de um triângulo equilátero.

Na tentativa de provar esta conjectura dois diferentes caminhos foram seguidos. Num deles a razão de Steiner é calculada considerando-se apenas conjuntos com um determinado número de pontos. Com esta abordagem, mostrou-se que o valor conjecturado é verdadeiro para conjuntos com 3 pontos, Gilbert e Pollak [21], 4 pontos, Pollak [45] e Du, Yao e Hwang [46], 5 pontos, Du, Yao e Hwang [47], 6 pontos, Rubinstein [48], 7 pontos, Wet [49] e 8 pontos, Kirszenblat [50].

A outra abordagem procura obter cotas inferiores para a razão de Steiner. Seguindo este caminho, Graham e Hwang [51], Chung e Hwang [52] e Du e Hwang [53] obtiveram gradualmente cotas inferiores cada vez maiores, até que Chung e Graham [54] encontraram a cota $0,824168\dots$, razoavelmente próxima do valor conjecturado $\sqrt{3}/2 = 0,866025\dots$. Chung e Graham, num procedimento bastante técnico, calcularam aquele valor ao mostrar que a única raiz real do polinômio

$$x^{12} - 4x^{11} - 2x^{10} + 40x^9 - 31x^8 - 72x^7 + 116x^6 + 16x^5 - 151x^4 + 80x^3 + 56x^2 - 64x + 16$$

contida no intervalo $(0, 8; 1)$ é uma cota inferior para o valor de ρ_2 .

Em 1990, Du e Hwang [55, 56] apresentaram uma demonstração que seria uma comprovação da conjectura. A repercussão foi tão grande que chegou a ser noticiada no New York Times. No entanto, cerca de 10 anos depois, a demonstração de Du e Hwang foi contestada por Innami *et al.* [57] e por Ivanov e Tuzhilin [58, 59] que identificaram nela alguns erros. Assim, a antiga conjectura continua em aberto.

2.3.2 O caso geral

Quando Gilbert e Pollak [21] publicaram sua conjectura sobre o valor de ρ_2 , consideraram também uma generalização desse caso, na qual supõem que ρ_n seria igual à razão de Steiner dos vértices de um n -simplex regular.

Em 1992, Smith [60] mostrou que a conjectura generalizada é falsa para $3 \leq n \leq 9$. Em seguida, Du e Smith [61] provaram, com três demonstrações diferentes, que a conjectura é falsa para todo $n > 2$. Na segunda demonstração, Du e Smith utilizaram o conceito de *sausage*.

Uma n -sausage é o conjunto formado pelos centros de esferas n -dimensionais dispostas no \mathbb{R}^n da seguinte maneira:

- (i) Inicie posicionando no \mathbb{R}^n uma esfera n -dimensional de diâmetro unitário.
- (ii) Sucessivamente, acrescente esferas idênticas à primeira, de modo que a p -ésima esfera tangencie as $k = \min\{n, p - 1\}$ esferas anteriores.

A menos de uma movimento rígido, este procedimento define, de maneira única, um conjunto infinito de esferas cujos interiores são disjuntos. Os centros dessas esferas formam o conjunto chamado de n -sausage.

A n -sausage é formada pelos vértices de um complexo simplicial composto por uma sequência de simplexes regulares n -dimensionais, adjacentes em faces comuns de dimensão $(n - 1)$. Por exemplo, no \mathbb{R}^3 , a 3-sausage é formada pelos vértices de tetraedros dois a dois adjacentes. Alguns destes são vistos na Figura 2.6.

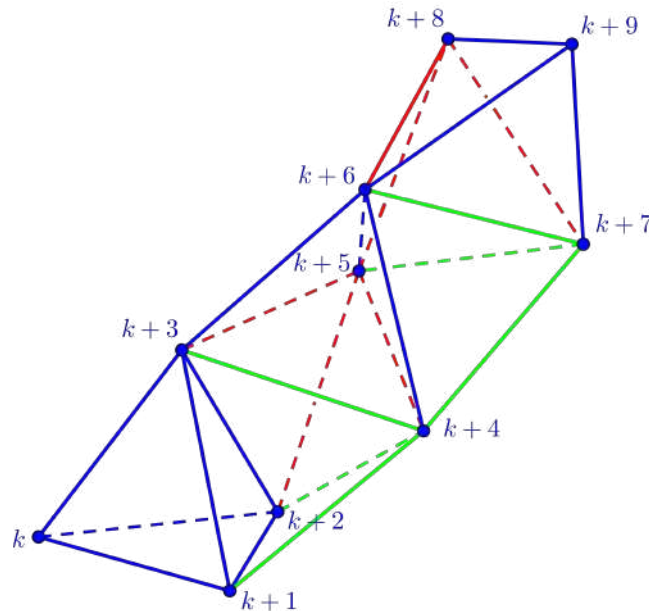


Figura 2.6: Uma sequência de tetraedros, dois a dois adjacentes, cujos vértices $k, \dots, k + 9$ são pontos consecutivos da 3-sausage.

Também podemos observar que os pontos da n -sausage estão distribuídos, de forma igualmente espaçada, ao longo de uma hélice n -dimensional. A Figura 2.7 representa a construção de uma 3-sausage. Nela, vemos uma sequência de esferas uniformemente distribuídas ao longo de uma hélice tripla do \mathbb{R}^3 , cujos centros são pontos consecutivos da sausage.

Du e Smith [61] mostraram que a razão de Steiner para os p primeiros pontos de uma sausage diminui à medida que p aumenta, convergindo para um limite finito quando $p \rightarrow \infty$. Conjeturaram então que, pelo menos para dimensões não muito elevadas, o valor desse limite seria igual à razão de Steiner do espaço considerado.

Utilizando a sausage, Du e Smith calcularam cotas superiores para ρ_n em várias dimensões. A tabela 2.2 mostra esses resultados.

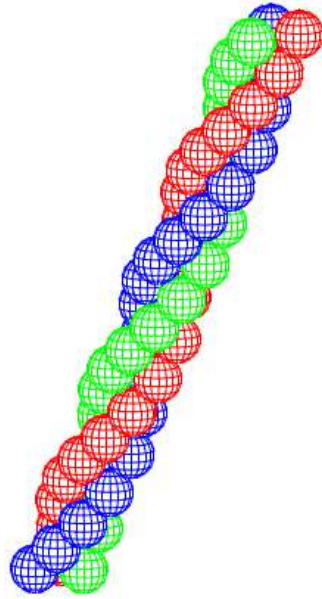


Figura 2.7: Uma seqüência de esferas distribuídas em uma hélice tripla do \mathbb{R}^3 . Seus centros são pontos consecutivos da *3-sausage*.

n	Cota superior para ρ_n
3	0,78419...
4	0,74398...
5	0,72181...
6	0,70853...
7	0,70012...
8	0,69455...
9	0,69076...
10	0,68812...
11	0,68624...

Tabela 2.2: Cotas superiores para ρ_n obtidas por Du e Smith utilizando a *sausage*.

W. Smith e M. Smith [62], também com base na *sausage*, conjecturaram que, para o \mathbb{R}^3 ,

$$\rho_3 = \sqrt{\frac{283}{700} - \frac{3\sqrt{21}}{700} + \frac{9\sqrt{11 - \sqrt{21}}\sqrt{2}}{140}}$$

$$\approx 0,78419037\dots$$

Acredita-se que mesmo que este valor não seja correto, ele é, pelo menos, uma boa aproximação para ρ_3 .

Usando outros métodos, Graham e Hwang [51] calcularam uma cota inferior para a razão de Steiner no \mathbb{R}^n . Eles mostraram que, para todo n ,

$$0,577350\dots = \frac{\sqrt{3}}{3} \leq \rho_n.$$

Partindo da constatação que os valores de ρ_n formam uma sequência decrescente e limitada (portanto convergente), Cieslik [24] comenta o caso especial em que $n \rightarrow \infty$:

$$0,577350\dots = \frac{\sqrt{3}}{3} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707106\dots$$

Capítulo 3

Estratégias de resolução para o problema euclidiano de Steiner

Em 1977, Garey, Graham e Johnson [63] mostraram que o PES é NP -difícil. Como esta classificação é feita a partir de uma análise do pior caso, mesmo que $P \neq NP$ ela não significa que não possam ser desenvolvidos bons algoritmos para casos práticos, oriundos de aplicações, por exemplo. Uma situação desse tipo ocorre com o PES no \mathbb{R}^2 (Seção 3.2.1).

Nas próximas seções veremos as principais abordagens utilizadas para o PES. Apesar do caso no \mathbb{R}^2 citado acima, algumas dessas estratégias têm encontrado grandes dificuldades. Daremos maior destaque ao uso de modelos de programação matemática, pois esta é uma abordagem recente, sobre a qual ainda há muito poucas referências na literatura.

3.1 Modelos de programação matemática

A formulação de modelos de programação matemática para o PES se constitui numa abordagem relativamente nova e pouco explorada. Embora apresente um grande potencial de desenvolvimento, o número de trabalhos publicados nesta área é ainda muito pequeno.

Na literatura especializada são encontrados apenas dois destes modelos. O primeiro deles foi apresentado em 2000 por Maculan, Michelon e Xavier [64]. Nele o PES é formulado como um problema de programação inteira mista não linear e não convexo.

Considerando que uma instância arbitrária do PES tenha p vértices terminais a_1, \dots, a_p e que a correspondente AMS (degenerada ou não) tenha $p - 2$ pontos de Steiner x_{p+1}, \dots, x_{2p-2} , o modelo é formulado a partir do grafo G definido abaixo.

O conjunto de vértices de G é $V = P \cup S$, onde $P = \{1, \dots, p\}$ corresponde

aos vértices terminais e $S = \{p + 1, \dots, 2p - 2\}$ corresponde aos pontos de Steiner. Cada aresta de G é representada por $[i, j]$, $i, j \in V$, com $i < j$, e o conjunto de arestas do grafo é definido por $E = \{[i, j]; i, j \in V, j > p\}$. A Figura 3.1 mostra uma representação de G para $p = 6$.

Finalmente, define-se uma variável binária $y_{ij} \in \{0, 1\}$, associada a cada aresta de G , interpretada da seguinte maneira: $y_{ij} = 1$ significará que $\{i, j\}$ está na AMS e $y_{ij} = 0$ indicará o caso contrário. A seguir, descrevemos o modelo:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \sum_{i \in P, j \in S} \|a_i - x_j\| y_{ij} + \sum_{i, j \in S, i < j} \|x_i - x_j\| y_{ij}, \\ \text{sujeito a} \quad & x_i \in \mathbb{R}^n, \quad i \in S, \\ & y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad [i, j] \in E, \\ & \sum_{j \in S} y_{ij} = 1, \quad i \in P, \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\sum_{i \in P} y_{ij} + \sum_{k < j, k \in S} y_{kj} + \sum_{k > j, k \in S} y_{jk} = 3, \quad j \in S, \tag{3.2}$$

$$\sum_{i < j, i \in S} y_{ij} = 1, \quad j \in S - \{p + 1\}, \tag{3.3}$$

onde $\|\cdot\|$ representa a norma euclidiana. A restrição 3.1 assegura que todo vértice terminal tem grau 1, 3.2 garante que o grau de cada ponto de Steiner é 3, e 3.3 evita a formação de ciclos. Uma solução ótima desta formulação terá uma topologia de Steiner (uma árvore) geradora do grafo G .

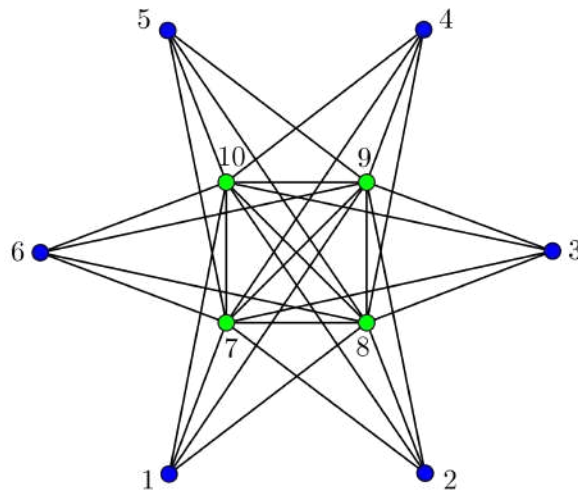


Figura 3.1: O grafo G para um problema com 6 vértices terminais e 4 pontos de Steiner.

A resolução do problema não linear e não convexo proposto neste modelo tem apresentado grandes dificuldades. Na prática, o uso de técnicas de branch-and-bound como as descritas em [65–67] não produziu bons resultados nas primeiras experiências.

Em [68] estão relacionados alguns impecilhos identificados nessas implementações. Destacam-se,

- a não convexidade da relaxação contínua do modelo,
- a má qualidade das cotas inferiores utilizadas nos procedimentos de branch-and-bound,
- a não diferenciabilidade da função objetivo nos pontos onde as topologias cheias degeneram e
- o grande número de topologias isomorfas dentre as soluções viáveis do modelo. Estas topologias levam os algoritmos a resolver subproblemas equivalentes diversas vezes, aumentando demasiadamente os tempos de processamento.

D’Ambrosio, Fampa, Lee e Vigerske [69] estudaram diversas dificuldades inerentes ao modelo, sugerindo algumas ideias para contorná-las. Incorporando estas ideias, realizaram novas implementações, atingindo resultados significativamente superiores aos que tinham sido obtidos nas primeiras experiências. Estes resultados não são superiores aos que podem ser obtidos com os algoritmos exatos que discutiremos na próxima seção. No entanto, em nosso entendimento, eles evidenciam a capacidade de evolução desta abordagem, a qual, como dissemos anteriormente, é recente e pouco explorada.

Em 2004, Fampa e Maculan [70], apresentaram um novo modelo, derivado do primeiro, mas que admite uma relaxação contínua convexa. A partir desse, foi possível obter melhores soluções. Nessa nova formulação a convexidade foi atingida introduzindo-se uma constante “big- M ” definida como uma cota superior para as distâncias entre os vértices de uma AMS do problema.

Descrevemos abaixo o novo modelo. São utilizados as mesmas notações e o mesmo grafo G do modelo anterior. É definida uma variável adicional d_{ij} representando o comprimento da aresta $[i, j]$.

$$\text{Minimizar} \quad \sum_{[i,j] \in E} d_{ij},$$

$$\text{sujeito a:} \quad d_{ij} \geq \|a_i - x_j\| - M(1 - y_{ij}), \quad i \in P, j \in S, \quad (3.4)$$

$$d_{ij} \geq \|x_i - x_j\| - M(1 - y_{ij}), \quad i, j \in S, \quad (3.5)$$

$$d_{ij} \geq 0, \quad [i, j] \in E,$$

$$x_i \in \mathbb{R}^n, \quad i \in S,$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad [i, j] \in E,$$

$$\sum_{j \in S} y_{ij} = 1, \quad i \in P, \quad (3.6)$$

$$\sum_{i \in P} y_{ij} + \sum_{k < j, k \in S} y_{kj} + \sum_{k > j, k \in S} y_{jk} = 3, \quad j \in S, \quad (3.7)$$

$$\sum_{i < j, i \in S} y_{ij} = 1, \quad j \in S - \{p + 1\}. \quad (3.8)$$

Como no caso anterior, as restrições 3.6, 3.7 e 3.8 configuram uma árvore com topologia de Steiner. As restrições 3.4 e 3.5 asseguram que uma aresta só será considerada na função objetivo se estiver nessa árvore.

O valor de M que será utilizado deve ser escolhido com cautela, pois pode interferir na qualidade das soluções. Grandes valores de M aumentam o número de iterações nos métodos de resolução, causando uma maior propagação de erros. Em [70], os autores sugerem que se use $M = \max_{1 \leq i < j \leq p} \|a_i - a_j\|$. Esta escolha se justifica a partir da propriedade 2.1, segundo a qual os pontos de Steiner de uma AMS estão contidos no interior do fecho convexo dos vértices terminais.

As primeiras experiências com este novo modelo encontraram algumas dificuldades semelhantes às do caso anterior. Notadamente, a má qualidade das cotas inferiores utilizadas nos algoritmos de branch-and-bound e o grande número de topologias isomorfas dentre as soluções viáveis do modelo.

Em [71], Fampa, Lee e Melo analisaram as dificuldades encontradas propondo e implementando algumas soluções. Dentre elas destaca-se a utilização da ideia de classes de subproblemas isomórficos desenvolvida por Margot [72]. Ainda em [71], os autores compararam os resultados obtidos com e sem as modificações propostas, revelando melhorias significativas. Tal como no caso do primeiro modelo, embora a performance atingida até a presente data ainda seja inferior a dos algoritmos exatos (que veremos na próxima seção) os resultados já conseguidos apontam numa direção promissora.

Resumindo, utilizando o segundo modelo já foi possível obter soluções do PES

para conjuntos com até 15 vértices terminais dispostos aleatoriamente. Para configurações com muitas simetrias como, por exemplo, os vértices de um poliedro ou de um hiperpoliedro regular, a situação se modifica. A dificuldade criada por um número elevado de simetrias no conjunto das soluções viáveis de um problema de programação inteira [73], causa uma forte queda na performance dos algoritmos de branch-and-bound que tem sido utilizados na resolução do modelo. Com isso, nessas configurações, o número de vértices terminais para os quais se consegue obter uma solução pode ficar muito reduzido.

3.2 Algoritmos exatos

3.2.1 Algoritmos exatos para o problema euclidiano de Steiner no plano

Em 1961, Melzak [74] apresentou um algoritmo que foi, na época, considerado como o primeiro método capaz de obter soluções exatas para o PES em tempo finito. Na verdade, em 1810 Gergonne [15] já havia publicado um algoritmo semelhante ao de Melzak, mas isso, após tantos anos, estava esquecido.¹

Dado um conjunto de vértices terminais, o algoritmo proposto por Melzak considerava todas as possíveis topologias para uma árvore que conectasse tais pontos (utilizando pontos de Steiner). Para cada topologia, o algoritmo usava um engenhoso procedimento para determinar a correspondente árvore de comprimento mínimo.

Devido a dois aspectos que geravam ineficiência o algoritmo de Melzak exigia tempo superexponencial. O primeiro e principal aspecto, estava no imenso número de topologias que precisavam ser construídas. O segundo consistia num passo do procedimento de minimização que necessitava de tempo exponencial. Este segundo problema foi eliminado por Hwang [75] que apresentou um procedimento de tempo linear para substituir aquele passo. Várias outras modificações foram propostas procurando identificar e desconsiderar topologias que não levariam a uma solução do problema [21, 22, 76]. No entanto, resultados realmente significativos só foram obtidos quando, ainda baseados nas idéias geométricas do algoritmo de Melzak, novos algoritmos foram desenvolvidos [22]. Dentre eles destaca-se o algoritmo GeoSteiner desenvolvido por Winter [77] em 1985 e aperfeiçoado posteriormente por Warme, Winter e Zachariasen [78]. Com ele foi possível resolver o problema de Steiner, em tempo razoável, para conjuntos com algumas dezenas de milhares de vértices

¹ Aparentemente, estavam também esquecidos os estudos de Gauss [11], Bopp [16] e Hoffmann [17] realizados no século XIX e o de Jarník e Kössler [18] da primeira metade do século XX, que citamos na seção 1.2.

terminais.

3.2.2 Algoritmos exatos para o PES em espaços com dimensão maior que dois

Apesar de sua eficácia, infelizmente o algoritmo Geosteiner não pode ser adaptado para dimensões maiores que 2. As ideias geométricas nele utilizadas, não podem ser generalizadas ou tornam-se demasiadamente complexas quando consideradas em espaços de maior dimensão, inviabilizando sua implementação. Devido a isso, durante vários anos só havia algoritmos exatos para o \mathbb{R}^2 .

Essa lacuna só foi preenchida em 1992, quando Smith [60] propôs um algoritmo exato para o PES no \mathbb{R}^n . Trata-se de um algoritmo de *força bruta* que analisa somente topologias cheias. Essa análise utiliza um sistema de enumeração implícita, juntamente com um método de *branch-and-bound*. É um algoritmo muito rápido para problemas com um número pequeno de vértices terminais. Porém, torna-se muito lento quando o número de terminais aumenta.

Nos últimos anos, três artigos apresentaram melhorias significativas para o algoritmo de Smith. Fampa e Anstreicher [79] propuseram o chamado algoritmo Smith+, uma modificação do algoritmo original. No Smith+, o esquema de *branch-and-bound* é acelerado através do cálculo de melhores cotas inferiores e de uma modificação na ordem segundo a qual os terminais são acessados pelo algoritmo.

Van Laarhoven [80] e VanLaarhoven e Anstreicher [81] propuseram outras modificações. Desta vez baseados exclusivamente em critérios geométricos como, por exemplo, o diagrama de Voronoi. Esses critérios possibilitam descartar várias topologias que seriam processadas pelo algoritmo original. Implementações posteriores indicaram, no entanto, que parte do ganho obtido é perdido pelo tempo extra exigido pelos cálculos geométricos adicionais.

Recentemente, Fonseca et al. [82] com novas modificações, conseguiram reduzir o número de nodos na árvore de *branch-and-bound*, de modo a torná-lo o menor dentre todas as implementações citadas acima. Os autores mostraram também que o menor número de topologias processadas é atingido pelo algoritmo Smith+.

Atualmente, um algoritmo baseado no de Smith, que incorpore modificações como as descritas acima, pode resolver instâncias do PES com até 17 terminais em dimensões maiores que dois. Esse número pode aumentar ou diminuir um pouco, dependendo de fatores como a dimensão do espaço, o posicionamento dos vértices terminais, as máquinas disponíveis, etc. Com o algoritmo original de Smith, esse número cai para cerca de 12, variando de acordo com os mesmos fatores. Em qualquer dos casos, o tamanho das instâncias é extremamente pequeno quando comparado com

o que se pode obter para o PES no plano.

Em [82], Fonseca et al. além das propostas para o algoritmo de Smith, apresentaram também um novo algoritmo exato. Bem diferente do algoritmo de Smith, este novo método consiste em enumerar, processar e concatenar subárvores cheias obtidas a partir de subconjuntos dos vértices terminais. Essa é uma das idéias básicas do bem sucedido GeoSteiner, utilizado para o PES no \mathbb{R}^2 . Os autores afirmam que com este novo algoritmo é possível resolver instâncias do PES com até 16 terminais. Um número que, acreditamos, poderá ser ampliado em futuras implementações.

Além dos artigos originais citados acima, uma interessante análise crítica e comparativa dos diversos métodos exatos para o PES no \mathbb{R}^n é feita por Fampa, Lee e Maculan em [71].

3.3 Algoritmos de aproximação

Comentamos acima sobre a baixa performance dos algoritmos exatos para o PES em dimensões maiores que 2. Uma alternativa, que tem obtido bons resultados em outras áreas, consiste no desenvolvimento de algoritmos de aproximação. Estes, ao invés de procurar a solução ótima do problema determinam, para qualquer instância do mesmo, uma solução aproximada que tenha um valor que se afaste do ótimo por, no máximo, um percentual previamente conhecido. Embora soluções assim obtidas sejam apenas aproximadas, na prática frequentemente não é necessário encontrar a solução exata e uma boa aproximação pode ser plenamente aceitável.

Formalmente: seja Π um problema de *minimização* tal que, em todas as suas instâncias, o custo (ou valor) de qualquer uma de suas soluções viáveis seja ≥ 0 .² Seja $\text{Ótimo}(I)$ o valor ótimo do problema Π para uma instância I . Diz-se que um algoritmo A é uma α -*aproximação* para Π se, para qualquer instância I de Π , A determina uma solução *viável* de Π cujo custo é, no máximo, $\alpha \cdot \text{Ótimo}(I)$, onde $\alpha \geq 1$. α é chamado de *fator* ou *razão de aproximação* do algoritmo A . Em alguns casos, o valor de α pode depender da instância I [83].

Ou seja, se $\text{Val}(I)$ é o valor aproximado obtido pelo algoritmo para uma instância I , então

$$\text{Ótimo}(I) \leq \text{Val}(I) \leq \alpha \cdot \text{Ótimo}(I).$$

Um *esquema de aproximação* para um problema de *minimização* é um algoritmo, (ou melhor, uma sequência de algoritmos) que para cada instância I do problema e para cada racional $\epsilon > 0$, obtém uma solução *viável* do problema cujo erro relativo

²Como ocorre, por exemplo, com o PES.

máximo é ϵ . Assim, se $\text{Val}(\epsilon, I)$ é o valor da solução obtida,

$$\text{Ótimo}(I) \leq \text{Val}(\epsilon, I) \leq (1 + \epsilon) \cdot \text{Ótimo}(I).$$

Se, para cada ϵ , o algoritmo for polinomial, então o esquema é chamado de *esquema de aproximação polinomial* (PTAS), (*polynomial-time approximation scheme*) [84].

Arora [84, 85] desenvolveu o primeiro esquema de aproximação polinomial conhecido para o PES. Em seguida, utilizando *spanners* [86] e introduzindo o conceito de *banyans*, Rao e Smith [87] apresentaram outro PTAS, um pouco mais eficiente que o anterior.

Os dois algoritmos utilizam ideias inovadoras e promissoras, possuindo uma relevante importância teórica. Na prática, porém, ambos são ainda ineficazes, requerendo tempos de processamento inviáveis. Como a pesquisa na área de algoritmos de aproximação tem crescido muito, é possível que num futuro próximo algoritmos como esses tenham uma melhor performance.

3.4 Heurísticas

As dificuldades encontradas pelos algoritmos de aproximação e pelos algoritmos exatos em espaços com dimensão maior que dois têm estimulado o desenvolvimento de um grande número de heurísticas. Hoje, para o PES, essa é uma área muito extensa, que inclui várias abordagens diferentes.

Algumas heurísticas são muito rápidas, podendo obter soluções para instâncias com dezenas de milhares de pontos em tempo razoável. Outras, chegam a obter soluções exatas ou muito próximo delas. Resultados obtidos por heurísticas, podem também ser utilizados como cotas superiores da solução ótima em algoritmos exatos.

No momento, excetuando-se o caso do \mathbb{R}^2 , o desenvolvimento de heurísticas se constitui na abordagem mais bem sucedida para o PES.

Heurísticas, no entanto, têm duas desvantagens com relação às outras abordagens. Em geral, não há nelas nenhuma garantia quanto à qualidade dos resultados obtidos e nem a certeza de que funcionarão para qualquer instância do problema dado. Essas deficiências são expressas informalmente por Arora [88] ao dizer que heurísticas são “*algoritmos que não sabemos como analisar.*” Na verdade, diversos algoritmos propostos nesta e em outras áreas não foram analisados. Ou porque seria uma tarefa muito difícil (talvez impossível em alguns casos) ou simplesmente porque ainda não se sabe como fazer.

Devido a vastidão do tema, não faz sentido aqui uma descrição de suas diversas

possibilidades. Heurísticas excelentes estão descritas e discutidas em [80, 89–96], onde também pode ser encontrada uma ampla bibliografia.

Capítulo 4

Uma conjectura sobre o problema de Steiner para os vértices de um cubo n -dimensional

Em 1992, no mesmo artigo que introduziu o primeiro algoritmo exato para o PES no \mathbb{R}^n [60], Warren Smith apresentou também uma conjectura que, desde então, permaneceu em aberto. Analisar essa conjectura é o tema deste capítulo.

4.1 A conjectura

Um conjunto $B \subset \mathbb{R}^n$, dado pelo produto cartesiano de n intervalos fechados

$$\prod_{i=1}^n [a_i, b_i] = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \quad (4.1)$$

é chamado de *bloco n -dimensional* ou *paralelepípedo retângulo n -dimensional*. Os *vértices* de B são os pontos $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, tais que $x_i \in \{a_i, b_i\}$ para $1 \leq i \leq n$. Os conjuntos $\prod_{i=1}^n L_i$ onde $L_i = [a_i, b_i]$ para apenas um valor de i e, para os demais, $L_i = \{a_i\}$ ou $L_i = \{b_i\}$, são as *arestas* do bloco B . Uma aresta com $L_i = [a_i, b_i]$ tem *comprimento* $b_i - a_i$. O *baricentro* ou, simplesmente, *centro* de B é o ponto $(\frac{a_1+b_1}{2}, \dots, \frac{a_n+b_n}{2})$.

Um bloco n -dimensional cujas arestas têm todas o mesmo comprimento é chamado de *cubo n -dimensional* ou *hipercubo n -dimensional* ou, simplesmente, *n -cubo*. O n -cubo $\prod_{i=1}^n [0, 1] = [0, 1]^n$ é dito *unitário* e seus vértices são os 2^n pontos (x_1, \dots, x_n) do \mathbb{R}^n , tais que $x_i \in \{0, 1\}$.

A seguir, enunciamos a conjectura de W. Smith [60].

Conjectura 4.1. *Para todo inteiro $n \geq 1$, o comprimento da árvore mínima de Steiner que conecta os vértices de um n -cubo unitário é igual a $(2^{(n-1)} - 1)\sqrt{3} + 1$.*

Se $1 \leq n \leq 3$, é muito simples verificar a veracidade desta conjectura: o pequeno número de vértices do n -cubo permite que a solução exata do problema de Steiner seja obtida com facilidade. Porém, como sugere a Tabela 4.1, a partir de $n = 4$ essa situação se inverte. Se $n \geq 5$, considerando-se os algoritmos e computadores atualmente existentes, o crescimento superexponencial do número de vértices do n -cubo inviabiliza completamente o cálculo de soluções exatas. Já o caso $n = 4$ se aproxima do que *hoje* é a fronteira entre o possível e o impossível de ser calculado. É claro que essa fronteira é um tanto fluida pois depende não só dos algoritmos disponíveis como também do computador e da linguagem de programação utilizados, da dimensão do espaço, da maneira como estão posicionados os vértices terminais, etc.

n	Topologias cheias
2	3
3	10.395
4	213.458.046.676.875 $\approx 2,1 \times 10^{14}$
5	$2,9 \times 10^{40}$
6	$1,0 \times 10^{103}$
7	$1,0 \times 10^{248}$

Tabela 4.1: Número de topologias cheias interligando os vértices de um n -cubo.

Podemos ter uma ideia da dificuldade do caso $n = 4$ observando que existem mais de 200 trilhões de topologias cheias interligando os 16 vértices do 4-cubo. Utilizando um algoritmo que consiga descartar 95% delas sem necessitar processá-las e, se no processamento de cada uma das topologias restantes fosse gasto 0,00001 segundo, ainda assim seriam necessários mais de 3 anos para encontrarmos a solução exata do problema.

Apesar desses números, os algoritmos exatos atuais têm se aproximado gradativamente daquela fronteira. Como discutimos na seção 3.2, já existe um algoritmo sobre o qual se diz ser capaz de resolver um problema de Steiner dessa dimensão em tempo aceitável. No entanto, nossa experiência com ele não produziu nenhum resultado prático.

Embora, por simplicidade, a conjectura tenha sido enunciada para um hipercubo unitário, é claro que ela poderia ser formulada para um hipercubo de aresta arbitrária a . Para isso, bastaria multiplicar por a o comprimento conjecturado.

4.2 A topologia associada à conjectura

Sejam $C_0, C_1 \subset \mathbb{R}^{n+1}$, tais que

$$C_0 = [0, 1]^n \times \{0\} \text{ e } C_1 = [0, 1]^n \times \{1\}. \quad (4.2)$$

C_0 e C_1 são n -cubos de aresta unitária imersos em \mathbb{R}^{n+1} . Claramente, os vértices de C_0 e de C_1 formam o conjunto de vértices do $(n + 1)$ -cubo unitário.

Em geral, o conjunto de vértices de um $(n + 1)$ -cubo, pode ser obtido a partir dos vértices de dois n -cubos ou, equivalentemente, a partir de 2^{n-2} 3-cubos imersos e convenientemente posicionados em \mathbb{R}^{n+1} .

Em seu texto original, Smith apresentou brevemente uma topologia para a árvore mínima associada à conjectura. Ou seja, para aquela que considerava ser uma árvore mínima de Steiner para os vértices de um n -cubo. Essa topologia, que representaremos por \mathcal{T}_n , tem a seguinte propriedade: para todo $n \geq 1$, \mathcal{T}_n é formada por duas árvores binárias cheias e de mesma ordem, conectadas por uma aresta incidente em seus respectivos vértices raiz. Chamaremos essa aresta de *central*. A Figura 4.1 ilustra essa condição.

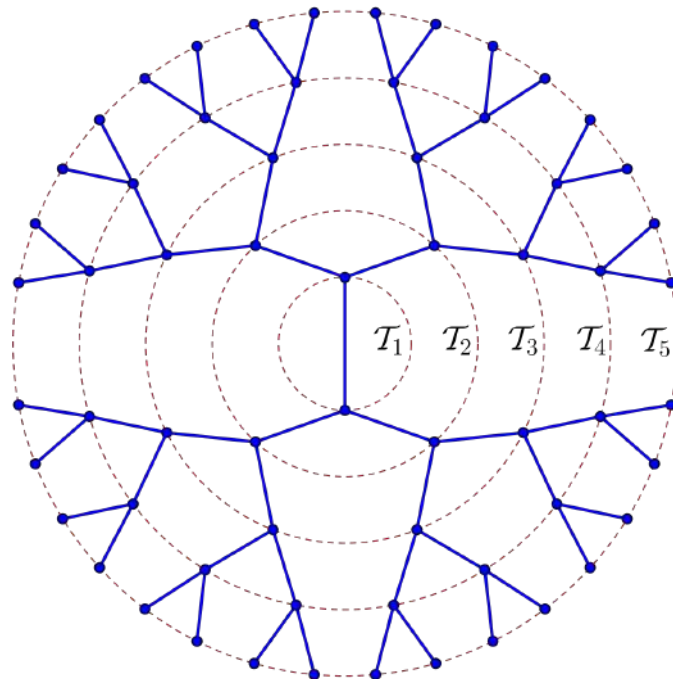


Figura 4.1: Para cada n , a representação da topologia \mathcal{T}_n é a parte do desenho contida no círculo indicado. Fixando-se um dos círculos, os pontos em sua fronteira representam os vértices do correspondente n -cubo, enquanto que os pontos em seu interior representam os pontos de Steiner de \mathcal{T}_n .

Definiremos \mathcal{T}_n de forma indutiva. Iniciamos com $n = 1$, quando o hipercubo se reduz ao intervalo $[0, 1]$ e tem somente dois vértices. A topologia \mathcal{T}_1 possui apenas

uma aresta conectando aqueles vértices e, trivialmente, satisfaz à propriedade acima.

Supondo \mathcal{T}_n construída, consideramos os cubos C_0 e C_1 citados em 4.2. Supondo que os vértices de cada um destes cubos estão interligados por uma árvore com topologia \mathcal{T}_n , inserimos um vértice na aresta central de cada uma dessas árvores. Unindo esses dois vértices com uma nova aresta obtemos uma árvore conectando os vértices do $(n+1)$ -cubo unitário, cuja topologia definimos como $\mathcal{T}_{(n+1)}$. Claramente, esta topologia satisfaz à propriedade desejada.

A Figura 4.2 mostra as topologias de \mathcal{T}_2 até \mathcal{T}_5 . Para facilitar a visualização, exibimos na figura os 3-cubos (citados no início desta seção) cujos vértices formam o conjunto de vértices de cada n -cubo. Também ampliamos as distâncias entre os 3-cubos.

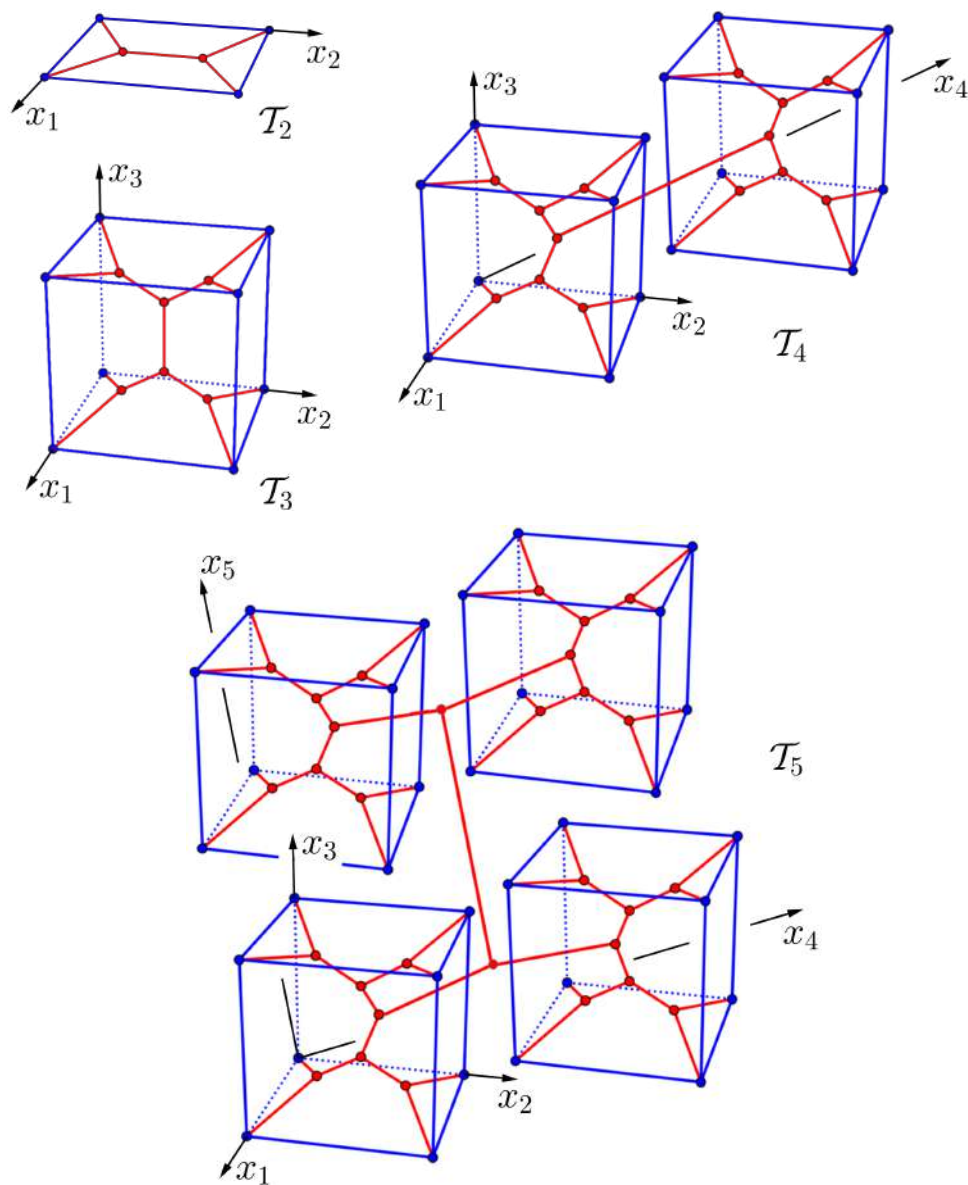


Figura 4.2: As topologias \mathcal{T}_2 , \mathcal{T}_3 , \mathcal{T}_4 e \mathcal{T}_5 .

onde \mathcal{R} é a rotação em torno do subespaço \mathcal{S} descrita acima. A interpretação da função \mathcal{F} é semelhante a de \mathcal{R} , diferindo apenas em que a rotação no plano \mathcal{P} agora ocorre em torno do ponto de interseção de \mathcal{P} e \mathcal{V} .

Tal como ocorre no caso anterior, sob \mathcal{F} a variedade \mathcal{V} permanece fixa e o plano \mathcal{P} é invariante.

Proposição 4.1. *Para todo inteiro $n \geq 2$:*

- (i) *A aresta central de \mathcal{A}_n é paralela ao vetor e_n da base canônica de \mathbb{R}^n e seu ponto médio coincide com o centro do n -cubo unitário (cujos vértices são interligados por \mathcal{A}_n).*
- (ii) *A aresta central de \mathcal{A}_n é ortogonal aos dois $(n-1)$ -cubos utilizados na definição de sua topologia, e a reta suporte desta aresta contém o centro daqueles dois $(n-1)$ -cubos.*

O item (ii) desta proposição é uma consequência imediata do item (i), cuja verificação está contida na demonstração da próxima proposição.

Proposição 4.2. *Se $n \geq 3$, as arestas de \mathcal{A}_n têm apenas três diferentes comprimentos:*

- (i) $\sqrt{3}/3$ *para as 2^n arestas que conectam um ponto de Steiner a um vértice do n -cubo.*
- (ii) $\sqrt{3}/6$ *para as $2^n - 4$ arestas que ligam dois pontos de Steiner, excetuando-se a aresta central.*
- (iii) $1 - \sqrt{3}/3$ *para a aresta central.*

Se $n = 2$, há somente arestas dos tipos (i) e (iii), nas mesmas quantidades citadas acima.

Demonstração. Por indução. Usando-se as propriedades descritas no Capítulo 2 ou o algoritmo de Smith citado na Seção 3.2 encontram-se rapidamente as coordenadas dos pontos de Steiner nos casos $n = 2$ e $n = 3$. As Tabelas A.1 e A.2 mostram os resultados obtidos. A partir deles é fácil observar que os dois casos verificam as propriedades desejadas.¹

Seja n tal que a árvore \mathcal{A}_n satisfaz a esta e à proposição anterior. Para mostrar que \mathcal{A}_{n+1} também verifica essas propriedades supomos que \mathcal{A}_n é uma árvore \mathcal{A}'_n que

¹Embora os casos $n = 2$ e $n = 3$ sejam diferentes, bastaria aqui apresentar o primeiro deles. A aplicação ao caso $n = 2$ do passo indutivo que veremos, produz uma árvore com as propriedades desejadas para $n = 3$.

le é idêntica interligam, respectivamente, os vértices de cada um dos n -cubos C_0 e C_1 descritos em 4.2. Como dissemos acima, os vértices C_0 e C_1 formam o conjunto de vértices do $(n + 1)$ -cubo unitário, os quais serão interligados por \mathcal{A}_{n+1} .

A Figura 4.3(a) representa a imagem desses objetos pela projeção $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}^2$ dada por $\pi(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_n, x_{n+1})$. Esta projeção pode ser interpretada como o resultado da aplicação de uma sequência de $n - 1$ projeções ortográficas, cada uma delas segundo a direção do primeiro vetor da base canônica do espaço a partir do qual a projeção é feita.

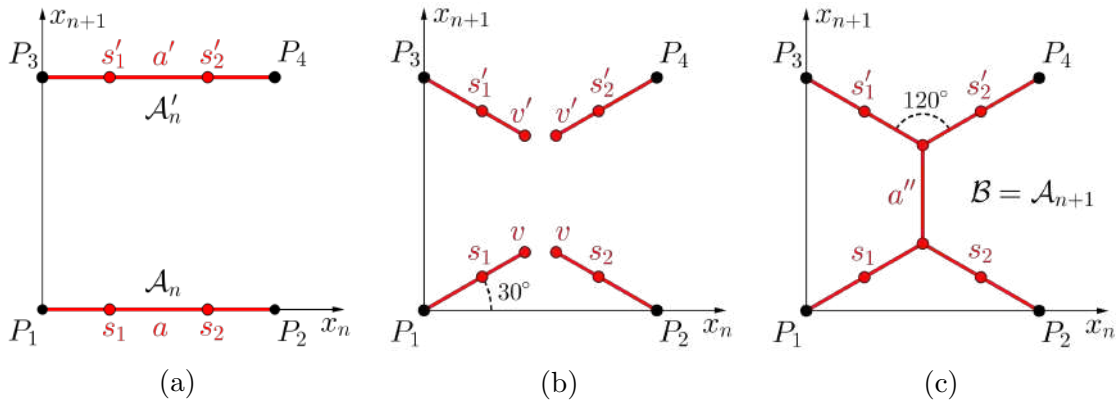


Figura 4.3: Construção de $\mathcal{A}_{(n+1)}$ a partir de \mathcal{A}_n .

Nessa figura, as projeções de C_0 e \mathcal{A}_n se reduzem ao segmento P_1P_2 enquanto que P_3P_4 representa as projeções de C_1 e \mathcal{A}'_n . P_1 é a projeção de todos os vértices (x_1, \dots, x_{n+1}) de C_0 tais que $x_n = 0$. P_2 representa a projeção dos vértices de C_0 onde $x_n = 1$. Situação análoga ocorre com P_3 e P_4 , relativamente aos vértices de C_1 . As direções dos vetores e_n e e_{n+1} estão representadas na figura através dos eixos correspondentes às coordenadas x_n e x_{n+1} .

Também estão indicadas na Figura 4.3(a) as projeções de a e a' , arestas centrais de \mathcal{A}_n e \mathcal{A}'_n , e as projeções dos pontos de Steiner s_1, s_2, s'_1 e s'_2 , incidentes àquelas arestas.

Por hipótese, a e a' são paralelas a e_n e seus pontos médios coincidem com os centros de C_0 e C_1 . Logo, se l é o comprimento da aresta a , as coordenadas de s_1 e s_2 são $(1/2, \dots, 1/2, \pm l/2, 0)$ e as de s'_1 e s'_2 são $(1/2, \dots, 1/2, \pm l/2, 1)$. Assim, s_1, s_2, s'_1 e s'_2 são os vértices de um retângulo contido no plano $x_1 = \dots = x_{n-1} = 1/2$, cujos lados são paralelos aos vetores e_n e e_{n+1} . O centro desse retângulo coincide com o centro do $(n + 1)$ -cubo unitário.

Vamos agora construir uma árvore de Steiner \mathcal{B} , cuja topologia será $\mathcal{T}_{(n+1)}$ e que terá todas as propriedades exigidas nesta e na proposição anterior. Como citamos

em 2.2, fixada uma topologia existe apenas uma árvore mínima relativa associada a essa topologia. Logo, \mathcal{B} será a árvore \mathcal{A}_{n+1} desejada, encerrando assim o passo indutivo e esta demonstração.

A fim de construirmos \mathcal{B} , primeiro inserimos um vértice v e um vértice v' no ponto médio das arestas a e a' . A partir desses vértices dividimos \mathcal{A}_n e \mathcal{A}'_n em duas subárvores cada (v e v' são duplicados nesse processo). Em seguida, os vértices de cada uma das quatro subárvores obtidas serão rotacionados de 30° ou -30° em torno da variedade afim gerada pelos vértices de C_0 ou de C_1 que ela conecta. Obtemos assim a configuração representada na Figura 4.3(b).

As rotações citadas podem ser feitas usando-se as aplicações \mathcal{R} e \mathcal{F} descritas em 4.3 e 4.4. Basta lembrarmos que os vértices de C_0 ou de C_1 conectados por cada uma das quatro subárvores são aqueles cujas projeções coincidem com cada um dos pontos P_1, P_2, P_3 e P_4 . As variedades afins geradas por cada grupo de vértices são, portanto, dadas pelas condições: $x_n = x_{n+1} = 0$, para os vértices projetados em P_1 , $x_n = 1$ e $x_{n+1} = 0$, para os projetados em P_2 , $x_n = 0$ e $x_{n+1} = 1$ (em P_3) e $x_n = 1$ e $x_{n+1} = 1$ (em P_4).

Essas rotações ocorrem em planos paralelos ao plano $x_n x_{n+1}$ e deixam fixos os vértices de C_0 e C_1 . Em particular, as rotações dos pontos de Steiner s_1, s_2, s'_1 e s'_2 e dos vértices v e v' ocorrem no plano $x_1 = \dots = x_{n-1} = 1/2$, ao qual esses pontos pertencem.

A árvore \mathcal{B} é então obtida conectando-se as quatro subárvores da Figura 4.3(b) como indicado na Figura 4.3(c). Os vértices v e v' são excluídos após essa conexão que é feita de modo que as novas arestas também estejam contidas no plano $x_1 = \dots = x_{n-1} = 1/2$ (como estavam v e v').

Agora é fácil notar que: (i) a topologia de \mathcal{B} é $\mathcal{T}_{(n+1)}$ e (ii) \mathcal{B} é uma árvore de Steiner, já que as rotações realizadas não modificam ângulos e que os novos pontos de Steiner que surgiram na conexão representada na Figura 4.3(c) têm grau três e as arestas que neles incidem formam ângulos de 120° . Logo \mathcal{B} é a mesma árvore que $\mathcal{A}_{(n+1)}$.

Como as rotações não afetam distâncias, e como os comprimentos das arestas que surgem após a conexão das quatro subárvores podem ser calculados com facilidade, é muito simples concluir que os comprimentos das arestas de $\mathcal{A}_{(n+1)}$ estão de acordo com o enunciado desta proposição.

A partir da construção utilizada na Figura 4.3(c) vê-se também que a'' , a aresta central de $\mathcal{A}_{(n+1)}$, é paralela ao vetor e_{n+1} e que seu ponto médio coincide com o centro do $(n+1)$ -cubo unitário. Com isto, completa-se a verificação de que $\mathcal{A}_{(n+1)}$ satisfaz à todas as condições exigidas nesta e na proposição anterior. \square

Uma consequência imediata da propriedade 4.2 é o

Corolário 4.1. *Para todo $n \geq 1$, o comprimento de \mathcal{A}_n é $(2^{(n-1)} - 1)\sqrt{3} + 1$.*

Sendo assim, a análise da conjectura se resume em verificar se \mathcal{A}_n é uma árvore mínima de Steiner.

Utilizando as matrizes de rotação como indicado na demonstração da proposição 4.2, podemos encontrar as coordenadas dos pontos de Steiner de \mathcal{A}_n para qualquer valor de n previamente escolhido. A Tabela A.3 mostra as coordenadas dos vértices do 4-cubo e dos pontos de Steiner de \mathcal{A}_4 . A Figura A.3, acima da tabela, mostra a enumeração utilizada.

Seguindo indutivamente nesse processo, obtemos expressões genéricas para as coordenadas dos pontos de Steiner. Veremos então que, para $n \geq 2$, a árvore \mathcal{A}_n terá:

2 pontos de Steiner com coordenadas

$$\left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \pm \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\right),$$

4 com coordenadas

$$\left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \pm \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{12}\right)\right),$$

8 com coordenadas

$$\left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \pm \frac{3}{8}, \frac{1}{2} \pm \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{24}\right)\right),$$

continuando nesta sequência até atingir 2^{n-1} pontos com coordenadas

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \pm \frac{3}{8}, \frac{1}{2} \pm \frac{7}{16}, \dots, \frac{1}{2} \pm \frac{2^{n-2} - 1}{2^{n-1}}, \frac{1}{2} \pm \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3 \cdot 2^{n-1}}\right)\right).$$

A próxima proposição e seu corolário formalizam várias observações feitas a partir desses resultados.

Proposição 4.3. *Se $n \geq 2$, os pontos de Steiner da árvore mínima relativa \mathcal{A}_n estão distribuídos em $n - 1$ agrupamentos com as seguintes características. Para cada inteiro j tal que $1 \leq j \leq n - 1$, existe um conjunto com 2^j pontos de Steiner cujas coordenada (x_1, \dots, x_n) satisfazem:*

$$(i) \ x_i = \frac{1}{2}, \text{ se } 1 \leq i \leq n - j,$$

$$(ii) \ x_i = \frac{1}{2} \pm \frac{2^{i-n+j} - 1}{2^{i-n+j+1}}, \text{ se } n - j < i < n \ (j > 1) \text{ e}$$

$$(iii) \ x_n = \frac{1}{2} \pm \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3 \cdot 2^j} \right).$$

Corolário 4.2. Para $n \geq 2$:

- (i) Os pontos de Steiner da árvore mínima relativa \mathcal{A}_n estão contidos no hiperplano $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 = 1/2\}$.
- (ii) As $n - 1$ primeiras coordenadas de qualquer ponto de Steiner de \mathcal{A}_n são números racionais e a última é um número irracional da forma $a + b\sqrt{3}$, onde a e b são racionais.
- (iii) Se (x_1, \dots, x_n) é um ponto de Steiner de \mathcal{A}_n , então $(1/2, x_1, \dots, x_n)$ é um ponto de Steiner de \mathcal{A}_{n+1} .

A partir da Proposição 4.3 podemos calcular as distâncias dos pontos de Steiner de \mathcal{A}_n ao baricentro do n -cubo, bem como os comprimentos e direções de segmentos de reta unindo esses pontos. Dessa maneira encontramos que os conjuntos de pontos de Steiner de \mathcal{A}_n citados naquela proposição estão contidos em esferas concêntricas e que, em cada esfera, esses pontos se posicionam de forma bastante particular. A próxima proposição reúne essas conclusões.

Proposição 4.4. Para $n \geq 2$, os pontos de Steiner de \mathcal{A}_n estão distribuídos em $n - 1$ esferas E_1, \dots, E_{n-1} , de dimensão $n - 1$, centradas no baricentro do n -cubo unitário, tais que:

- (i) Se $n \geq 3$, então para $1 \leq i \leq n - 1$, a esfera E_i contém 2^i pontos de Steiner da árvore \mathcal{A}_n e tem diâmetro igual a

$$\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n-2} (1 - 2^{-i})^2 \right] + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3 \cdot 2^{n-2}} \right)^2}. \quad (4.5)$$

Os pontos de Steiner pertencentes à esfera E_i são os vértices de um bloco i -dimensional imerso no \mathbb{R}^n , com arestas paralelas aos i últimos vetores da base canônica de \mathbb{R}^n e cujo baricentro coincide com o baricentro do n -cubo.

- (ii) Se $n = 2$, E_1 contém os 2 pontos de Steiner de \mathcal{A}_n e tem diâmetro $1 - \sqrt{3}/3$. Em todos os casos, a aresta central de \mathcal{A}_n é um diâmetro de E_1 . Para todo $n \geq 2$, as $n - 1$ primeiras esferas do $(n + 1)$ -cubo unitário têm os mesmos raios que as esferas do n -cubo (embora aquelas tenham uma dimensão maior) e contêm o mesmo número de pontos de Steiner.

Corolário 4.3. Se $n \geq 2$, \mathcal{A}_n é simétrica com relação ao centro do n -cubo unitário e com relação aos $n - 1$ hiperplanos $x_2 = 1/2, \dots, x_n = 1/2$.

4.4 A conjectura é verdadeira?

As propriedades descritas na seção anterior nos mostram a maneira uniforme e simétrica com que os pontos de Steiner da árvore \mathcal{A}_n estão distribuídos no interior do n -cubo unitário. Por outro lado, as diversas simetrias existentes em um n -cubo, facilmente nos induzem a supor que uma árvore mínima interligando seus vértices deva ser tão uniforme e simétrica quanto \mathcal{A}_n . No entanto, há situações similares em que uma hipótese desse tipo seria falsa.

Um exemplo clássico desse engano ocorreu da década de 1960, quando ainda não havia nenhum algoritmo para o problema de Steiner no \mathbb{R}^3 . Na época, Gilbert e Pollak [21] conjecturaram que a AMS para os vértices de um octaedro regular (tri-dimensional) deveria ser a que está indicada na Figura 4.4(a): uma árvore com uma topologia semelhante a \mathcal{T}_n . Semelhante, no seguinte sentido: ambas são construídas concatenando-se árvores binárias idênticas por meio de seu vértice raiz, o qual, na árvore otimizada, coincide com o baricentro do poliedro.

Somente em 1992, com a publicação do algoritmo de Smith [60], foi verificado (pelo próprio Smith) que essa conjectura era falsa. A verdadeira AMS é a árvore representada na Figura 4.4(b), que não apresenta simetrias.

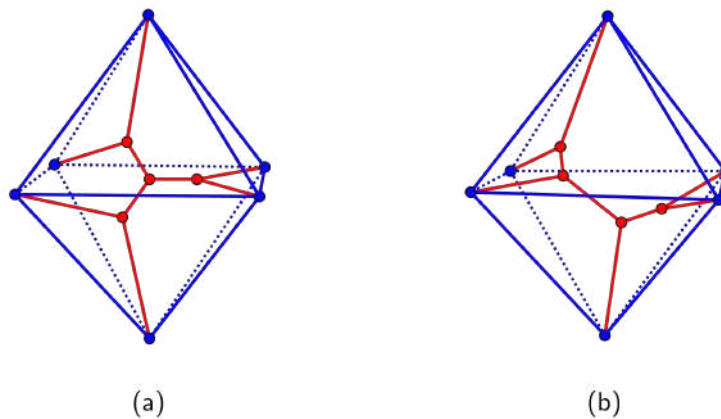


Figura 4.4: (a) Árvore mínima relativa (b) Árvore mínima de Steiner.

Sob condições razoáveis é possível mostrar que, se a conjectura de Smith for falsa em alguma dimensão n , então será falsa em toda dimensão $> n$.

Proposição 4.5. *Supondo que para algum inteiro n existam:*

- (i) *uma árvore mínima de Steiner \mathcal{D}_n conectando os vértices do n -cubo unitário, cujo comprimento é menor que o de \mathcal{A}_n ,*
- (ii) *um hiperplano α , ortogonal a alguma aresta do n -cubo unitário, que intercepte \mathcal{D}_n em somente um ponto,*

então, chamando de d a distância de α ao centro do n -cubo, a conjectura de Smith é falsa para todo cubo unitário com dimensão $\geq n$ se

$$d \leq \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}, \quad (4.6)$$

ou se

$$d > \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2} \quad e \quad L(\mathcal{A}_n) - L(\mathcal{D}_n) > f(d) = \frac{\sqrt{4d^2 + 7 - \sqrt{3}} - d - \sqrt{3} - 1,5}{2}, \quad (4.7)$$

onde $L(\mathcal{A}_n)$ e $L(\mathcal{D}_n)$ representam, respectivamente, os comprimentos de \mathcal{A}_n e \mathcal{D}_n .

Como se trata de um cubo unitário, $d \in [0; 0,5)$. O gráfico de f está representado na Figura 4.5. Nela, vemos os pequenos valores assumidos por $f(d)$, os quais tornam bastante aceitável a condição $L(\mathcal{A}_n) - L(\mathcal{D}_n) > f(d)$.

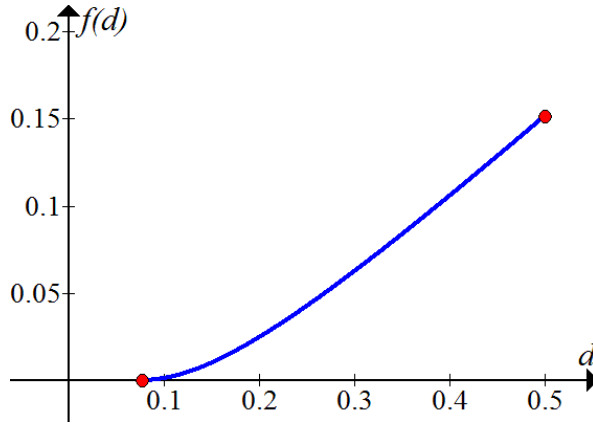


Figura 4.5: A função $f(d)$.

Quando existe um hiperplano como α , provavelmente ele não será único. Nesse caso, os correspondentes valores de d pertencerão a algum subintervalo de $[0; 0,5)$. Esta possibilidade de variar d facilita ainda mais que a condição 4.7 se verifique.

Observamos que, nessa proposição, não é necessário que \mathcal{D}_n seja uma AMS ou uma árvore mínima relativa. A seguir, a demonstração da proposição.

Demonstração. Usaremos um procedimento indutivo semelhante ao adotado na demonstração da proposição 4.2. A partir de uma árvore como \mathcal{D}_n , vamos construir uma árvore \mathcal{D}_{n+1} interligando os vértices do $(n+1)$ -cubo unitário. Dentro das condições citadas, \mathcal{D}_{n+1} terá comprimento menor que o de \mathcal{A}_{n+1} e o plano $x_{n+1} = 1/2$, ortogonal ao vetor e_{n+1} , interceptará $\mathcal{D}_{(n+1)}$ em somente um ponto.

Cada aresta do n -cubo unitário é paralela a algum vetor da base canônica de \mathbb{R}^n . Seja e_r o vetor dessa base que é ortogonal a α . Se $r \neq n$, reposicionamos \mathcal{D}_n e o plano α da seguinte maneira: considerando a orientação definida pela base canônica,

giramos de 90° todos os vértices de \mathcal{D}_n (inclusive os terminais) em torno da variedade afim $\{(x_1, \dots, x_n); x_r = x_n = 1/2\}$. Obteremos uma nova árvore interligando os vértices do n -cubo, com o mesmo comprimento de \mathcal{D}_n . Após este movimento, o plano que corresponde a α fica ortogonal a e_n e o ponto que corresponde à interseção de α com \mathcal{D}_n terá coordenadas $(a_1, \dots, a_{n-1}, 1/2-d)$ ou $(b_1, \dots, b_{n-1}, 1/2+d)$. Daqui em diante, caso essas rotações tenham sido feitas, os termos \mathcal{D}_n e α designarão a nova árvore e o novo plano. Q representará a interseção de α e \mathcal{D}_n . Sem perda de generalidade, vamos considerar apenas o caso em que a n -ésima coordenada de Q é $1/2-d$. Dos argumentos que seguem será fácil perceber que o tratamento do outro caso é idêntica ao do primeiro.

Começamos a construção como fizemos na Proposição 4.2. Visualizamos \mathcal{D}_n e uma árvore \mathcal{D}'_n que lhe é idêntica imersas no \mathbb{R}^{n+1} , interligando, respectivamente, os vértices de cada um dos n -cubos C_0 e C_1 descritos em 4.2. Assim, nessa imersão, \mathcal{D}_n conecta os vértices do $(n+1)$ -cubo unitário tais que $x_{n+1} = 0$ e \mathcal{D}'_n interliga os vértices para os quais $x_{n+1} = 1$. \mathcal{D}'_n é uma translação de \mathcal{D}_n segundo o vetor e_{n+1} .

Essa situação está representada na Figura 4.6(a), obtida da mesma forma que a Figura 4.3(a): por meio da projeção $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}^2$, dada por $\pi(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_n, x_{n+1})$.

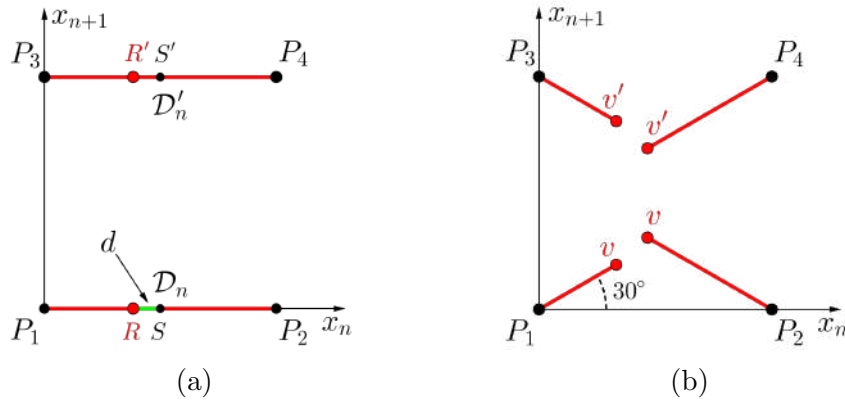


Figura 4.6: Construção de $\mathcal{D}_{(n+1)}$ a partir de \mathcal{D}_n .

Em 4.6(a), P_1P_2 é a projeção de \mathcal{D}_n . P_1 corresponde aos vértices do $(n+1)$ -cubo unitário tais que $x_n = x_{n+1} = 0$ e P_2 aos vértices onde $x_n = 1$ e $x_{n+1} = 0$. Ou seja, P_1 e P_2 são as projeções dos vértices interligados por \mathcal{D}_n . R é a projeção de Q e S é a projeção do centro do n -cubo unitário formado pelos vértices projetados sobre P_1 e P_2 . RS nos mostra d . Situação análoga ocorre para o segmento P_3P_4 .

Em seguida, exatamente no ponto Q (projetado como R na figura), “dividimos” \mathcal{D}_n em duas árvores (nesse ponto é inserido um vértice v em cada uma das árvores obtidas). Procedimento análogo é feito com \mathcal{D}'_n . Cada uma das quatro árvores

obtidas é então girada de 30° ou -30° em torno da variedade afim gerada pelos vértices do $(n + 1)$ -cubo por ela conectados. Obtemos então a configuração exibida na Figura 4.6(b).

Antes e depois das rotações, os quatro vértices representados na figura por v e v' estão contidos em um plano (bidimensional) paralelo ao plano $x_n x_{n+1}$. Obteremos \mathcal{D}_{n+1} conectando esses pontos. A Figura 4.7 mostra duas maneiras diferentes de realizar essa conexão.

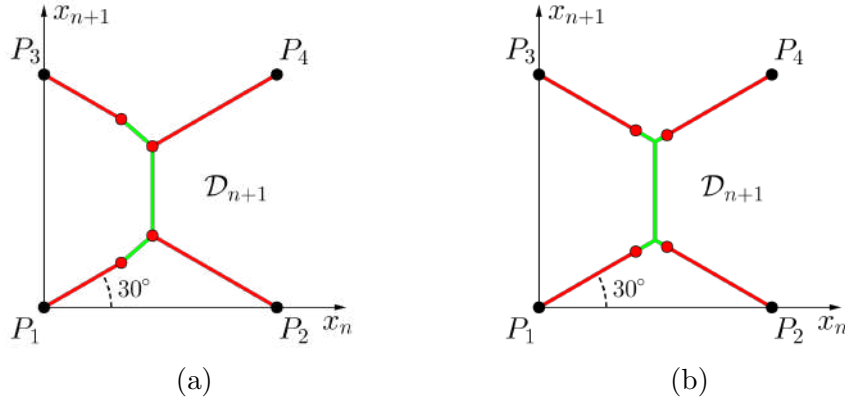


Figura 4.7: Interligando as quatro árvores para obter $\mathcal{D}_{(n+1)}$.

Dependendo do valor de d , uma das conexões indicadas definirá $\mathcal{D}_{(n+1)}$. Considerando que os vértices v e v' são coplanares e que os segmentos que representam as projeções das quatro árvores formam entre si ângulos de 30° e 120° , calculamos que:

- (i) Se $0 \leq d \leq \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}$, a AMS interligando os quatro vértices é a que está indicada na Figura 4.7(b). O comprimento dessa AMS é o mesmo para qualquer valor de d nesse intervalo. Esse comprimento é também igual ao da conexão representada na Figura 4.3(c) utilizada para construir $\mathcal{A}_{(n+1)}$. Logo, no intervalo citado, usando essa construção obtemos $\mathcal{D}_{(n+1)}$ com comprimento menor que o de $\mathcal{A}_{(n+1)}$.
- (ii) Se $\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2} < d < 0,5$, a AMS interligando os vértices v e v' é a que está representada na Figura 4.7(a). Essa será a conexão que definirá $\mathcal{D}_{(n+1)}$. Nesse caso, porém, o comprimento da conexão é maior do que o da ligação que foi empregada na construção de $\mathcal{A}_{(n+1)}$. Então, para que $\mathcal{D}_{(n+1)}$ tenha comprimento menor que $\mathcal{A}_{(n+1)}$, a diferença entre as medidas das conexões usadas em 4.7(a) e 4.3(c) (a primeira menos a segunda) tem que ser menor que $2(L(\mathcal{A}_n) - L(\mathcal{D}_n))$. A partir desta constatação, alguns cálculos adicionais explorando a geometria das figuras acima, nos levam a concluir que $L(\mathcal{D}_{(n+1)})$ será menor que $L(\mathcal{A}_{(n+1)})$

se $L(\mathcal{A}_n) - L(\mathcal{D}_n) > (\sqrt{4d^2 + 7 - \sqrt{3}} - d - \sqrt{3} - 1, 5)/2$, conforme exigido no enunciado da proposição.

Para concluir, observamos que o hiperplano definido por $x_{n+1} = 1/2$ é ortogonal ao vetor e_{n+1} e intercepta $\mathcal{D}_{(n+1)}$ em somente um ponto. Além disso, nesse ponto, $d = 0$. Assim, o passo indutivo descrito acima permitirá sempre construir uma nova árvore com comprimento menor que o da árvore da conjectura de Smith. \square

4.5 Considerações finais e a continuação deste trabalho

Segundo a Proposição 4.5, se encontrarmos uma dimensão n onde a conjectura falhe, isso poderá significar que a conjectura é falsa em todas as dimensões maiores que n . Motivados por essa proposição e por algumas considerações de natureza heurística, decidimos que a continuação deste trabalho, após sua publicação, consistirá em tentar mostrar que existem dimensões onde a conjectura é falsa. Inicialmente, supomos que isso poderia ocorrer na dimensão $n = 8$ ou próximo dela. Descrevemos a seguir alguns caminhos que pretendemos seguir visando encontrar esse valor de n .

4.5.1 Propriedades estruturais de uma AMS

Existem várias condições necessárias que uma AMS deve satisfazer. Encontrando-se n tal que alguma dessas condições não seja verificada por \mathcal{A}_n , saberemos que a conjectura é falsa nessa dimensão. Abaixo, citamos alguns exemplos importantes. Outras propriedades estruturais de uma AMS estão descritas em [6, 21].

A propriedade das lunas

Dado um segmento v_1v_2 unindo os pontos $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$, a *luna* de v_1v_2 é o conjunto

$$L(v_1, v_2) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x, v_1\| < \|v_1, v_2\| \text{ e } \|x, v_2\| < \|v_1, v_2\|\},$$

onde $\|\cdot\|$ representa a norma euclidiana.

Em [21] mostra-se que:

Proposição 4.6. *Se v_1v_2 é uma aresta de uma AMS, então a luna $L(v_1, v_2)$ contém apenas pontos do segmento v_1v_2 .*

Assim, se para algum n , encontrarmos uma luna de alguma aresta de \mathcal{A}_n que não satisfaça essa condição, a conjectura será falsa nessa dimensão.

O diagrama de Voronoi

Seja $C = \{v_1, \dots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$. A *célula de Voronoi* de $v_i \in C$ é o conjunto poliedral

$$\text{vor}(v_i) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - v_i\| \leq \|x - y\|, \forall y \in \mathbb{R}^n\}.$$

O conjunto formado por todas as células de Voronoi dos elementos de C é chamado de *diagrama de Voronoi* de C e representado por $\text{Vor}(C)$. Os vértices de uma célula de Voronoi são chamados de *pontos de Voronoi*.

O diagrama de Voronoi de um conjunto finito $C \in \mathbb{R}^n$ é, portanto, uma partição do \mathbb{R}^n em conjuntos poliedrais, na qual cada elemento de C está em dois conjuntos da partição.

Na literatura sobre o PES, em [81] por exemplo, são descritas várias propriedades estruturais de uma AMS obtidas a partir do diagrama de Voronoi. Além dessas, novas propriedades, diretamente relacionadas com o diagrama de Voronoi da árvore \mathcal{A}_n , podem ser desenvolvidas e utilizadas na análise da conjectura.

4.5.2 Heurísticas

Para algum n , seja P o conjunto de vértices do n -cubo unitário. Na utilização mais imediata de uma heurística, procuramos encontrar uma árvore interligando os pontos de P , cujo comprimento seja menor que o de \mathcal{A}_n . Além dessa abordagem óbvia, podemos também procurar árvores conectando subconjuntos de P ou mesmo conjuntos obtidos acrescentando-se novos vértices a subconjuntos de P . Em seguida, considerando que as árvores obtidas estão conectadas, comparamos a soma de seus comprimentos com o comprimento de \mathcal{A}_n .

4.5.3 Experiências com topologias obtidas a partir de modificações em \mathcal{T}_n

Aqui, uma árvore com comprimento menor que o de \mathcal{A}_n é procurada efetuando-se pequenas (ou grandes) alterações na topologia \mathcal{T}_n . A árvore mínima relativa correspondente à topologia modificada é obtida usando-se um software específico que implementamos com esse objetivo. Dependendo dos resultados encontrados, esse procedimento pode ser feito sequencialmente, ajustando-se a topologia passo a passo.

4.5.4 Outras abordagens

Durante a redação deste trabalho, fizemos várias experiências com as abordagens citadas acima. Embora essas tentativas não tenham encontrado uma dimensão em que a conjectura seja falsa, elas nos foram muito úteis, pois nos forneceram uma base que servirá como referência e orientação para as próximas experiências que faremos com essas mesmas técnicas. Abaixo, descrevemos duas abordagens, um pouco mais teóricas, que ainda não utilizamos. Ambas serão consideradas na continuação deste trabalho.

I) Toda árvore é um grafo planar. Na literatura sobre grafos há uma grande variedade de propriedades sobre grafos planares. Algumas delas já foram utilizadas no estudo do PES [60]. Por outro lado, os esquemas de \mathcal{T}_n no plano resultam em curvas formadas segundo um padrão muito específico. (Fig. 4.8). Acreditamos que esse dois fatos devem ser relacionados e pesquisados.

II) Em algumas experiências numéricas que fizemos com as distâncias dos pontos de Steiner ao centro do n -cubo, encontramos um grande quantidade de valores distribuídos de forma extremamente regular. Porém, dentre toda essa uniformidade, foi possível detectar um ou outro valor que estava fora do padrão dos demais. Isso pode, ou não, significar alguma anomalia da árvore conjecturada, ocorrendo na dimensão correspondente ao valor fora do padrão. Sem dúvida, esse é mais um ponto que precisa ser investigado.

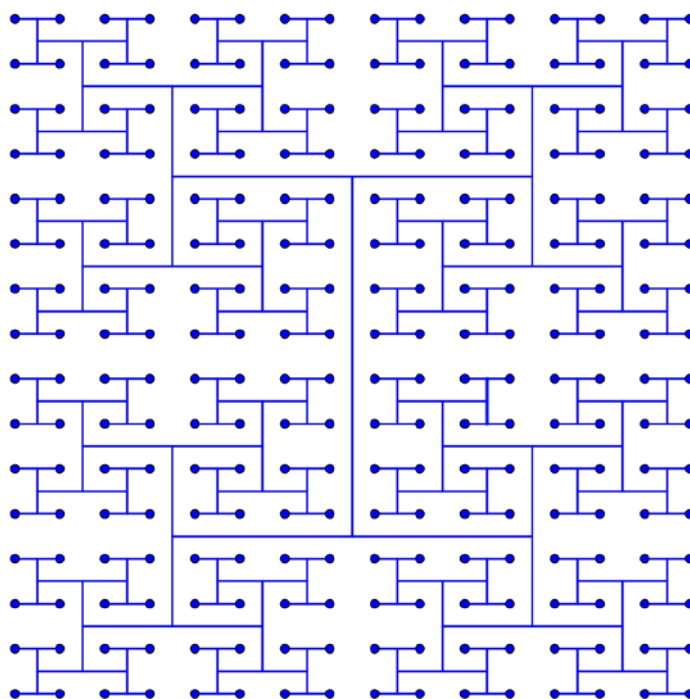


Figura 4.8: Uma representação de \mathcal{T}_8 .

Referências Bibliográficas

- [1] DE FERMAT, P. “Methodus ad disquirendam maximam et minimam et De tangentibus linearum curvarum”. In: Tannery, P., Henry, C. (Eds.), *Œuvres de Fermat*, v. 1, cap. Maxima et minima, pp. 133–174, Paris, Gauthier-Villars, 1891.
Versão eletrônica em latim disponível em: <https://fr.wikisource.org/wiki/%C5%92uvres_de_Fermat/I/Maxima_et_Minima>. Acessado em 26/03/2017.
- [2] TORRICELLI, E. “De maximis et minimis”. In: Loria, G., Vassura, G. (Eds.), *Opere di Evangelista Torricelli*, Faenza, Italy, G. Montanari, 1919.
- [3] CAVALIERI, F. B. *Exercitationes Geometricæ Sex*. Bononiæ, 1647.
- [4] SIMPSON, T. *The Doctrine and Application of Fluxions*. John Nourse Publisher, 1750.
- [5] HEINEN, F. *Über Systeme von Kräften*. G. D. Bädeker, 1834.
- [6] BRAZIL, M., ZACHARIASEN, M. *Optimal Interconnection Trees in the Plane*. Berlin, Springer, 2015.
- [7] Disponível em: <http://www.cut-the-knot.org/Generalization/fermat_point.shtml>. Acessado em 10/03/2017.
- [8] Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Fermat_point>. Acessado em 10/03/2017.
- [9] GARBER, D., AYERS, M. *The Cambridge History of Seventeenth-century Philosophy*, v. 1. Cambridge, Cambridge University Press, 2003.
- [10] GONZALEZ-VELASCO, E. A. *Journey through Mathematics - Creative Episodes in Its History*. New York, Springer, 2011.
- [11] BRAZIL, M., GRAHAM, R. L., THOMAS, D., et al. “On the history of the Euclidean Steiner tree problem”, *Archive for History of Exact Sciences*, v. 68, n. 3, pp. 327–354, may 2014.

- [12] KRARUP, J., VAJDA, S. “On Torricelli’s geometrical solution to a problem of Fermat”, *IMA Journal of Mathematics Applied in Business & Industry*, v. 8, pp. 215–224, 1997.
- [13] BAZLAMAÇCI, C. F., HINDI, K. S. “Minimum-weight spanning tree algorithms. A survey and empirical study”, *Computers & Operations Research*, v. 28, pp. 767–785, 2001.
- [14] BOAVENTURA NETTO, P. O. *Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos*. 5^a ed. São Paulo, Edgard Blücher, 2012.
- [15] GERGONNE, J. D. “Solutions purement géométriques des problèmes de minimis proposés aux pages 196, 232 et 292 de ce volume, et de divers autres problèmes analogues”, *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, v. 1, pp. 375–384, 1810.
- [16] BOPP, K. *Über das kürzeste Verbindungssystem zwischen vier Punkten*. Tese de Doutorado, Universität Göttingen, 1879.
- [17] HOFFMANN, E. “Über das kürzeste Verbindungssystem zwischen vier Punkten der Ebene”. In: *Program des Königlichen Gymnasiums zu Wetzlar für das Schuljahr von Ostern 1889 bis Ostern 1890*, Schnitzler, 1890.
- [18] JARNÍK, V., KÖSSLER, O. “O minimálních grafeth obeahujících n daných bodů”, *Cas. Pěstování Mat. a Fys.*, v. 63, pp. 223–235, 1934.
- [19] COURANT, R., ROBBINS, H. *What Is Mathematics?* 2nd ed. London, Oxford University Press, 1996.
- [20] OSTERMANN, A., WANNER, G. *Geometry by Its History*. Berlim, Springer, 2012.
- [21] GILBERT, E. N., POLLAK, H. O. “Steiner Minimal Trees”, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, v. 16, n. 1, pp. 1–29, 1968.
- [22] HWANG, F. K., RICHARDS, D. S., WINTER, P. “The Steiner Tree Problem”, *Annals of Discrete Mathematics*, v. 53, 1992.
- [23] CIESLIK, D. *Steiner Minimal Trees*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [24] CIESLIK, D. *The Steiner Ratio*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [25] IVANOV, A. O., TUZHILIN, A. A. *Minimal Networks: The Steiner Problem and Its Generalizations*. Boca Raton, CRC Press, 1994.

- [26] DU, D., SMITH, J. D., RUBINSTEIN, J. H. *Advances in Steiner Trees*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [27] MACULAN, N. “The Steiner Problem in Graphs”, *Annals of Discrete Mathematics*, v. 31, pp. 185–212, 1987.
- [28] DU, D., HU, X. *Steiner Tree Problems in Computer Communication Networks*. Singapore, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2008.
- [29] XIN-YAO, J. “The Steiner Problem on a Surface”, *Applied Mathematics and Mechanics*, (English Edition), v. 8, n. 10, pp. 969–974, October 1987.
- [30] WENG, J. F. “Steiner Trees on Curved Surfaces”, *Graphs and Combinatorics*, v. 17, n. 2, pp. 353–363, June 2001.
- [31] CAFFARELLI, E. A., HALVERSON, D. M., JENSEN, R. J. “The Steiner Problem on Surfaces of Revolution”, *Graphs and Combinatorics*, v. 30, pp. 315–342, 2014.
- [32] RUBINSTEIN, J. H., WENG, J. F. “Compression Theorems and Steiner Ratios on Spheres”, *Journal of Combinatorial Optimization*, v. 1, n. 1, pp. 67–78, March 1997.
- [33] CHENG, X., DU, D. *Steiner Trees in Industry*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [34] ROBINS, G., ZELIKOVSKY, A. “Minimum Steiner Tree Construction”. In: Alpert, C. J., Mehta, D. P., Sapatnekar, S. S. (Eds.), *The Handbook of Algorithms for Physical Design Automation*, cap. 24, pp. 487–508, Boca Raton, CRC Press, 2009.
- [35] OLIVEIRA, C. A. S. *Optimization Problems in Telecommunications and the Internet*. Tese de Doutorado, University of Florida, 2004.
- [36] SMITH, J. M., GROSS, M. “Steiner minimal trees and urban service networks”, *Socio-Economic Planning Sciences*, v. 16, n. 1, pp. 21–38, 1982.
- [37] HELD, S., KORTE, B., RAUTENBACH, D., et al. “Combinatorial optimization in VLSI design”. In: Chvátal, V. (Ed.), *Combinatorial Optimization: Methods and Applications*, pp. 33–96, Amsterdam, IOS Press, 2011.
- [38] UCHOA, E. *Algoritmos para problemas de Steiner com aplicações em projeto de circuitos VLSI*. Tese de Doutorado, PUC-Rio, 2001.

- [39] MONDAINI, R. P. “The Steiner Tree Problem and Its Application to the Modelling of Biomolecular Structures”. In: Mondaini, R. P., Pardalos, P. M. (Eds.), *Mathematical Modelling of Biosystems*, pp. 199–219, Berlin, Springer, 2008.
- [40] SMITH, J. M. “Steiner Minimal Trees in E^3 : Theory, Algorithms, and Applications”. In: Du, D., Pardalos, P. M. (Eds.), *Handbook of Combinatorial Optimization*, v. 2, pp. 397–470, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [41] CHENG, X., LI, Y., DU, D., et al. “Steiner Trees in Industry”. In: Du, D., Pardalos, P. (Eds.), *Handbook of Combinatorial Optimization*, Supplement Volume B, pp. 193–216, New York, Springer, 2005.
- [42] CIESLIK, D. *Shortest Connectivity*. New York, Springer, 2005.
- [43] DRESS, A., KRÜGER, M. “Parsimonious Phylogenetic Trees in Metric Spaces and Simulated Annealing”, *Advances in Applied Mathematics*, v. 8, pp. 8–37, 1987.
- [44] DAHL, J. “Steiner Problems in Optimal Transport”, *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 383, n. 4, pp. 1805–1819, April 2011.
- [45] POLLAK, H. O. “Some Remarks on the Steiner Problem”, *Journal of Combinatorial Theory*, Series A 24, pp. 278–295, 1978.
- [46] DU, D., YAO, E. Y., HWANG, F. K. “A Short Proof of a Result of Pollak on Steiner Minimal Trees”, *Journal of Combinatorial Theory*, Series A 32, pp. 396–400, 1982.
- [47] DU, D., YAO, E. Y., HWANG, F. K. “The Steiner ratio conjecture is true for five points”, *Journal of Combinatorial Theory*, Series A 38, pp. 230–240, 1985.
- [48] RUBINSTEIN, J. H., THOMAS, D. A. “The Steiner Ratio Conjecture for Six Points”, *Journal of Combinatorial Theory*, Series A 58, pp. 54–77, 1991.
- [49] DE WET, P. O. *Geometric Steiner Minimal Trees*. Tese de Doutorado, University of South Africa, 2008.
- [50] KIRSZENBLAT, D. *The Steiner ratio conjecture for eight points*. Tese de Mestrado, University of Melbourne, 2014.

- [51] GRAHAM, R. L., HWANG, F. K. “A Remark on Steiner Minimal Trees”, *Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica*, v. 4, n. 1, pp. 177–182, 1976.
- [52] CHUNG, F. R. K., HWANG, F. K. “A Lower Bound for the Steiner Tree Problem”, *SIAM J. Appl. Math.*, v. 4, n. 1, pp. 27–36, 1978.
- [53] DU, D., HWANG, K. “A New Bound for the Steiner Ratio”, *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 278, n. 1, pp. 137–148, 1983.
- [54] CHUNG, F. R. K., GRAHAM, R. L. “A New Bound for Euclidean Steiner Minimal Trees”, *Ann. N. Y. Acad. Sci.*, v. 440, pp. 328–346, 1985.
- [55] DU, D., HWANG, F. K. “The Steiner ratio conjecture of Gilbert and Pollak is true”, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, v. 87, pp. 9464–9466, December 2015.
- [56] DU, D., HWANG, F. K. “A Proof of the Gilbert-Pollak Conjecture on the Steiner Ratio”, *Algorithmica*, v. 7, pp. 121–135, 1992.
- [57] INNAMI, N., KIM, B. H., MASHIKO, Y., et al. “The Steiner Ratio Conjecture of Gilbert-Pollak May Still Be Open”, *Algorithmica*, v. 57, pp. 869–872, 2010.
- [58] IVANOV, A. O., TUZHILIN, A. A. “The Steiner Ratio Gilbert-Pollak Conjecture Is Still Open. Clarification Statement”, *Algorithmica*, v. 62, pp. 630–632, 2012.
- [59] IVANOV, A. O., TUZHILIN, A. A. “Du-Hwang Characteristic Area: Catch-22”, *arXiv:1402.6079 [math.MG]*, 2014.
- [60] SMITH, W. D. “How To Find Steiner Minimal Trees in Euclidean d-Space”, *Algorithmica*, v. 7, pp. 137–177, 1992.
- [61] DU, D. Z., SMITH, W. D. “Disproofs of Generalized Gilbert-Pollak Conjecture on the Steiner Ratio in Three or More Dimensions”, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, v. 74, n. 1, pp. 115–130, 1996.
- [62] SMITH, W. D., SMITH, J. M. “On the Steiner Ratio in 3-Space”, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, v. 69, pp. 301–332, 1995.
- [63] GAREY, M. R., GRAHAM, R. L., JOHNSON, D. S. “The complexity of computing Steiner minimal trees”, *SIAM J. Appl. Math.*, v. 32, n. 4, pp. 835–859, 1977.

- [64] MACULAN, N., MICHELON, P., XAVIER, A. E. “The Euclidean Steiner problem in \mathbb{R}^n : a mathematical programming formulation”, *Annals of Operations Research*, v. 96, pp. 209–220, 2000.
- [65] ACHTERBERG, T. “SCIP: Solving constraint integer programs”, *Mathematical Programming Computation*, v. 1, n. 1, pp. 1–41, 2009.
- [66] BELOTTI, P., LEE, J., LIBERTI, L., et al. “Branching and bounds tightening techniques for non-convex MINLP”, *Optimization Methods and Software*, v. 24, n. 4-5, pp. 597–634, 2009.
- [67] VIGERSKE, S. *Decomposition of multistage stochastic programs and a constraint integer programming approach to MINLP*. Tese de Doutorado, Humboldt-U, Berlin, Germany, 2013.
- [68] FAMPA, M., LEE, J., MACULAN, N. “An overview of exact algorithms for the Euclidean Steiner tree problem in n -space”, *International Transactions in Operational Research*, v. 23, n. 5, pp. 861–874, 2016.
- [69] D’AMBROSIO, C., FAMPA, M., LEE, J., et al. “On a nonconvex MINLP formulation of the Euclidean Steiner tree problems in n -space”, Disponível em Optimization-Online: <http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2014/09/4528.html>. Acessado em 23/03/2017.
- [70] FAMPA, M., MACULAN, N. “Using a conic formulation for finding Steiner minimal trees”, *Numerical Algorithms*, v. 35, pp. 315–330, 2004.
- [71] FAMPA, M., LEE, J., MELO, W. “A specialized branch-and-bound algorithm for the Euclidean Steiner tree problem in n -space”, *Computational Optimization and Applications*, v. 65, n. 1, pp. 47–71, September 2016.
- [72] MARGOT, F. “Pruning by isomorphism in branch-and-cut”, *Mathematical Programming*, v. 94, n. 1, pp. 71–90, 2002.
- [73] MARGOT, F. “Symmetry in Integer Linear Programming”. In: Jünger, M., Liebling, T., Naddef, D., et al. (Eds.), *50 Years of Integer Programming 1958-2008*, Berlin, Springer, 2009.
- [74] MELZAK, Z. A. “On the problem of Steiner”, *Canad. Math. Bull.*, v. 4, n. 2, pp. 143–148, May 1961.
- [75] HWANG, F. K. “A Linear Time Algorithm for Full Steiner Trees”, *Operations Research Letters*, v. 4, n. 5, pp. 235–237, 1986.

- [76] COCKAYNE, E. J. “On the efficiency of the algorithm for Steiner minimal trees”, *SIAM J. Appl. Math.*, v. 18, n. 1, pp. 150–159, 1970.
- [77] WINTER, P. “An algorithm for the Steiner problem in the Euclidean plane”, *Networks*, v. 15, pp. 323–345, 1985.
- [78] WARME, D. M., WINTER, P., ZACHARIASEN, M. “Exact algorithms for plane Steiner tree problems: a computational study”. In: Du, D., Smith, J. M., Rubinstein, J. H. (Eds.), *Advances in Steiner Trees*, pp. 81–116, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [79] FAMPA, M., ANSTREICHER, K. M. “An improved algorithm for computing Steiner minimal trees in Euclidean d -space”, *Discrete Optimization*, v. 5, n. 2, pp. 530–540, 2008.
- [80] LAARHOVEN, J. W. V. *Exact and heuristic algorithms for the Euclidean Steiner tree problem*. Tese de Doutorado, University of Iowa, 2010. Disponível em: <<http://ir.uiowa.edu/etd/755>>. Acessado em 04/05/2017.
- [81] LAARHOVEN, J. W. V., ANSTREICHER, K. M. “Geometric conditions for Euclidean Steiner trees in \mathbb{R}^d ”, *Computational Geometry*, v. 46, pp. 520–531, 2013.
- [82] FONSECA, R., BRAZIL, M., WINTER, P., et al. “Faster Exact Algorithms for Computing Steiner Trees in Higher Dimensional Euclidean Spaces”, 11th DIMACS Implementation Challenge Workshop, 2014.
- [83] FERNANDES, C. G., MIYAZAWA, F. K., CERIOLI, M., et al. *Uma Introdução Sucinta a Algoritmos de Aproximação*. IMPA - 23º Colóquio Brasileiro de Matemática, 2001.
- [84] ARORA, S. “Approximation schemes for NP-hard geometric optimization problems: a survey”, *Mathematical Programming*, v. 97, n. 1-2, pp. 43–69, 2003.
- [85] ARORA, S. “Polynomial Time Approximation Schemes for Euclidean Traveling Salesman and Other Geometric Problems”, *Journal of the ACM*, v. 45, n. 5, pp. 753–782, 1998.
- [86] EPPSTEIN, D. “Spanning Trees and Spanners”, 1996. Disponível em: <<https://www.cs.duke.edu/courses/spring07/cps296.2/papers/SpanningTrees.pdf>>. Acessado em 04/05/2017.

- [87] RAO, S. B., SMITH, W. D. “Improved approximation schemes for geometrical graphs via “spanners” and “banyans””. In: *30th ACM Symposium on Theory of Computing*, pp. 540–550, 1998.
- [88] ARORA, S. *A Graduate Course in Algorithm Design and Analysis*. Notas de aula do curso COS 521: Advanced Algorithm Design. Disponível em: <<http://www.cs.princeton.edu/courses/archive/fall15/cos521/>>. Acessado em 22/02/2017.
- [89] MONTENEGRO, F., MACULAN, N., PLATEAU, G., et al. “New Heuristics for the Euclidean Steiner Problem in \mathbb{R}^n ”, *Kluwer Academic Publishers*, pp. 509–524, 2001.
- [90] MONTENEGRO, F., TORREÃO, J. R. A., MACULAN, N. “Microcanonical optimization algorithm for the Euclidean Steiner problem in \mathbb{R}^n with application to phylogenetic inference”, *Physical Review E*, v. 68, pp. 056702–1 – 056702–5, 2003.
- [91] MONTENEGRO, F. M. T. *Heurísticas para o problema de Steiner Euclidiano*. Tese de Doutorado, COPPE - Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2010.
- [92] FORTE, V. L. *Algoritmos de Otimização Aplicados ao Problema de Steiner em N Dimensões*. Tese de Mestrado, COPPE - Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2010.
- [93] TOPPUR, B., SMITH, J. M. “A Sausage Heuristic for Steiner Minimal Trees in Three-Dimensional Euclidean Space”, *Journal of Mathematical Modelling and Algorithms*, v. 4, pp. 199–217, 2005.
- [94] DREYER, D. R., OVERTON, M. L. “Two Heuristics for the Euclidean Steiner Tree Problem”, *Journal of Global Optimization*, v. 13, n. 1, pp. 95–106, 1998.
- [95] RAVADA, S., SHERMAN, A. T. “Experimental evaluation of a partitioning algorithm for the Steiner tree problem in \mathbb{R}^2 and \mathbb{R}^3 ”, *Networks*, v. 24, n. 8, pp. 409–415, 1994.
- [96] SMITH, J. M., WEISS, R., PATEL, M. “An $O(N^2)$ heuristic for Steiner minimal trees in E^3 ”, *Networks*, v. 25, pp. 273–289, 1995.
- [97] LIMA, E. L. *Álgebra Linear*. Rio de Janeiro, IMPA, 2011.
- [98] HANSON, J. “Rotations in three, four, and five dimensions”, *arXiv:1103.5263v1 [math.MG]*, 2011.

Apêndice A

Topologias, enumerações e resultados numéricos

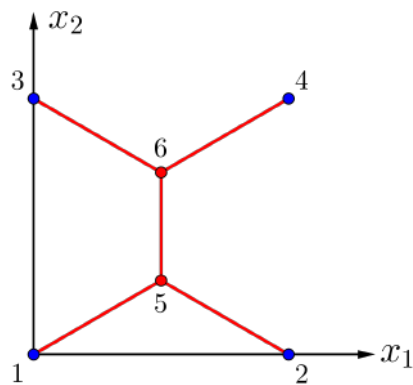


Figura A.1: Topologia \mathcal{T}_2 do quadrado (2-cubo).

Vértices terminais		Pontos de Steiner	
1	(0, 0)	5	$(1/2, \sqrt{3}/6)$
2	(1, 0)	6	$(1/2, 1 - \sqrt{3}/6)$
3	(0, 1)		
4	(1, 1)		

Tabela A.1: Coordenadas dos vértices do 2-cubo e dos pontos de Steiner de \mathcal{A}_2 , a árvore mínima de Steiner do 2-cubo, segundo a enumeração da Figura A.1.

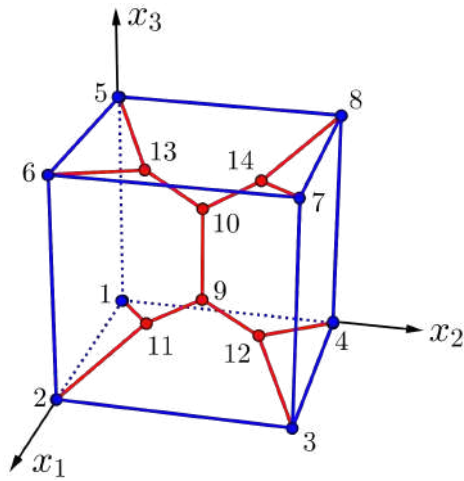


Figura A.2: A topologia \mathcal{T}_3 do 3-cubo.

Vértices terminais		Pontos de Steiner	
1	$(0, 0, 0)$	9	$(1/2, 1/2, \sqrt{3}/6)$
2	$(1, 0, 0)$	10	$(1/2, 1/2, 1 - \sqrt{3}/6)$
3	$(1, 1, 0)$	11	$(1/2, 1/4, \sqrt{3}/12)$
4	$(0, 1, 0)$	12	$(1/2, 3/4, \sqrt{3}/12)$
5	$(0, 0, 1)$	13	$(1/2, 1/4, 1 - \sqrt{3}/12)$
6	$(1, 0, 1)$	14	$(1/2, 3/4, 1 - \sqrt{3}/12)$
7	$(1, 1, 1)$		
8	$(0, 1, 1)$		

Tabela A.2: Coordenadas dos vértices terminais e dos pontos de Steiner de \mathcal{A}_3 , a árvore mínima de Steiner do 3-cubo, segundo a enumeração da Figura A.2.

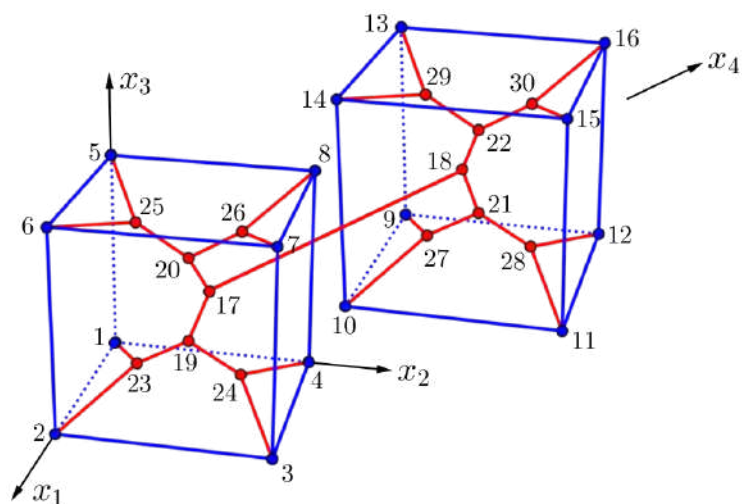


Figura A.3: A topologia \mathcal{T}_4 do 4-cubo.

Vértices do 4-cubo		Pontos de Steiner	
1	$(0, 0, 0, 0)$	17	$(1/2, 1/2, 1/2, \sqrt{3}/6)$
2	$(1, 0, 0, 0)$	18	$(1/2, 1/2, 1/2, 1 - \sqrt{3}/6)$
3	$(1, 1, 0, 0)$	19	$(1/2, 1/2, 1/4, \sqrt{3}/12)$
4	$(0, 1, 0, 0)$	20	$(1/2, 1/2, 3/4, \sqrt{3}/12)$
5	$(0, 0, 1, 0)$	21	$(1/2, 1/2, 1/4, 1 - \sqrt{3}/12)$
6	$(1, 0, 1, 0)$	22	$(1/2, 1/2, 3/4, 1 - \sqrt{3}/12)$
7	$(1, 1, 1, 0)$	23	$(1/2, 1/4, 1/8, \sqrt{3}/24)$
8	$(0, 1, 1, 0)$	24	$(1/2, 3/4, 1/8, \sqrt{3}/24)$
9	$(0, 0, 0, 1)$	25	$(1/2, 1/4, 7/8, \sqrt{3}/24)$
10	$(1, 0, 0, 1)$	26	$(1/2, 3/4, 7/8, \sqrt{3}/24)$
11	$(1, 1, 0, 1)$	27	$(1/2, 1/4, 1/8, 1 - \sqrt{3}/24)$
12	$(0, 1, 0, 1)$	28	$(1/2, 3/4, 1/8, 1 - \sqrt{3}/24)$
13	$(0, 0, 1, 1)$	29	$(1/2, 1/4, 7/8, 1 - \sqrt{3}/24)$
14	$(1, 0, 1, 1)$	30	$(1/2, 3/4, 7/8, 1 - \sqrt{3}/24)$
15	$(1, 1, 1, 1)$		
16	$(0, 1, 1, 1)$		

Tabela A.3: Coordenadas dos vértices terminais (os vértices do 4-cubo) e dos pontos de Steiner de \mathcal{A}_4 , conforme a enumeração indicada na Figura A.3.

x_1	x_2	x_3	x_4
0,5	0,50	0,500	0,2887
0,5	0,50	0,500	0,7113
0,5	0,50	0,250	0,1443
0,5	0,50	0,750	0,1443
0,5	0,50	0,250	0,8557
0,5	0,50	0,750	0,8557
0,5	0,25	0,125	0,0722
0,5	0,75	0,125	0,0722
0,5	0,25	0,875	0,0722
0,5	0,75	0,875	0,0722
0,5	0,25	0,125	0,9278
0,5	0,75	0,125	0,9278
0,5	0,25	0,875	0,9278
0,5	0,75	0,875	0,9278

(a)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0,5	0,5	0,50	0,500	0,2887
0,5	0,5	0,50	0,500	0,7113
0,5	0,5	0,50	0,250	0,1443
0,5	0,5	0,50	0,750	0,1443
0,5	0,5	0,50	0,250	0,8557
0,5	0,5	0,50	0,750	0,8557
0,5	0,5	0,25	0,125	0,0722
0,5	0,5	0,75	0,125	0,0722
0,5	0,5	0,25	0,875	0,0722
0,5	0,5	0,75	0,875	0,0722
0,5	0,5	0,25	0,125	0,9278
0,5	0,5	0,75	0,125	0,9278
0,5	0,5	0,25	0,875	0,9278
0,5	0,5	0,75	0,875	0,9278
0,5	0,25	0,125	0,0625	0,0361
0,5	0,75	0,125	0,0625	0,0361
0,5	0,25	0,875	0,0625	0,0361
0,5	0,75	0,875	0,0625	0,0361
0,5	0,25	0,125	0,9375	0,0361
0,5	0,75	0,125	0,9375	0,0361
0,5	0,25	0,875	0,9375	0,0361
0,5	0,75	0,875	0,9375	0,0361
0,5	0,25	0,125	0,0625	0,9639
0,5	0,75	0,125	0,0625	0,9639
0,5	0,25	0,875	0,0625	0,9639
0,5	0,75	0,875	0,0625	0,9639
0,5	0,25	0,125	0,9375	0,9639
0,5	0,75	0,125	0,9375	0,9639
0,5	0,25	0,875	0,9375	0,9639
0,5	0,75	0,875	0,9375	0,9639

(b)

Tabela A.4: Coordenadas dos pontos de Steiner de \mathcal{A}_4 (a) e de \mathcal{A}_5 (b), como um exemplo da propriedade descrita no item (iii) do corolário 4.2: se (x_1, \dots, x_n) é um ponto de Steiner de \mathcal{A}_n , então $(1/2, x_1, \dots, x_n)$ é um ponto de Steiner de \mathcal{A}_{n+1} .