

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza
Observatório do Valongo

HOMOGENEIDADES ESPACIAL E
OBSERVACIONAL DA DISTRIBUIÇÃO
DE GALÁXIAS

Luis Juracy Rangel Lemos

2006



HOMOGENEIDADES ESPACIAL E OBSERVACIONAL
DA DISTRIBUIÇÃO DE GALÁXIAS

Luis Juracy Rangel Lemos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Astronomia, Observatório do Valongo, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Astronomia.

Orientador: Marcelo Byrro Ribeiro

Setembro de 2006

HOMOGENEIDADES ESPACIAL E OBSERVACIONAL
DA DISTRIBUIÇÃO DE GALÁXIAS

Luis Juracy Rangel Lemos

Orientador: Marcelo Byrro Ribeiro

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação em Astronomia, Observatório do Valongo, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Astronomia.

Aprovada por:

Presidente, Prof. Marcelo Byrro Ribeiro

Prof. José Ademir Sales de Lima

Prof. Maurício Ortiz Calvão

Setembro de 2006

Lemos, Luis Juracy Rangel
Homogeneidades Espacial e Observacional da Distribuição de Galáxias / Luis Juracy Rangel Lemos. - Rio de Janeiro: UFRJ/OV, 2006.

viii, 100f.: il; 29,7 cm.

Orientador: Marcelo Byrro Ribeiro

Dissertação (mestrado) – UFRJ/OV/Programa de Pós-graduação em Astronomia, 2006.

Referências Bibliográficas: f. 66-67.

1. Relatividade e Gravitação. 2. Cosmologia Observacional. I. Ribeiro, Marcelo Byrro. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Observatório do Valongo, Programa de Pós-graduação em Astronomia. III. Título.

Aos meus pais, Juracy e Catalina.

AGRADECIMENTOS

Sou extremamente grato aos meus pais e as minhas irmãs que tanto amo, pela(s): amizade, amor, ajudas e atenção que me dedicaram por toda minha vida, principalmente pelos últimos sete anos e meio que vivo longe deles, onde a nossa união nunca deixou a distância física nos desligar. Agradeço por tudo que fizeram por mim, o que não dá para descrever. Agradeço minha querida avó Marina por me aturar na sua casa esses dois anos e meio que vivo no Rio. Agradeço boa parte da minha família que é composta por: Juracy José Lemos (pai), Catalina del Valle Rangel de Lemos (mãe), Jenny e Claudia (irmãs), André e Tomaz (cunhados), Thalles e Larisa (sobrinhos), avó Marina, tia Kátia; minhas(o) primas: Kharina, Karla, Katiúcia e Yuri. Agradeço também toda a minha família da Venezuela, que vive a bela revolução bolivariana de Hugo Chávez.

Agradeço especialmente ao meu orientador de mestrado Prof. Dr. Marcelo Byrro Ribeiro pelo ensinamento, atenção, paciência e amizade que cultivamos nesse período. Agradeço meu amigo Jaime Rocha pelas importantes sugestões à minha tese. Sou muito grato aos professores que tive durante a graduação e o mestrado pela boa qualidade dos cursos que ministraram e pela amizade que cultivei com alguns deles, os principais são: Paulo Daniel, Marcio Martins, Salomon, Carlos Farina, Heloisa Boechat, Gustavo P. Mello, Marcio Maia, Paulo Pelegrine, Eduardo Marino e Ioav Waga.

Agradeço o Prof. Ioav Waga e o Instituto de Física da UFRJ pela infraestrutura que me proporcionaram para realizar meu trabalho. Agradeço o Observatório do Valongo, os funcionários da pós-graduação (Rosa e Renan) e a Prof. Heloisa pela atenção que me cederam.

Sou extremamente grato a todas às grandes amizades que fiz durante minha vida, por diversos motivos, entre eles: a troca de conhecimento (ex: física, política, filosofia, história, vivência, etc), o calor humano que me passaram, as brincadeiras, os jogos de futebol, os sambas e os especiais encontros nas mesas de bares (especialmente o Mangue e o Arco-íris, este último da Lapa), onde proporcionaram belas discussões em física, filosofia, etc.

Sou muito grato à excelente universidade que me graduei, UFSCar (São Carlos-SP), onde passei um período excepcional da minha vida, ao qual me desprendi fisicamente da minha família aos 18 anos, sendo uma experiência de vida única. Agradeço às amizades

que fiz: ao morar na mesma república, no departamento de física, no serviço militar obrigatório e nas horas de lazer. Os principais amigos são: Laleska, Véio, Boca, Jardel, Gordão, Dodo, Hiroshi, Anderson, Cacheffo, Jamaica, Giuliano, Lulu, Alf, Fabinho, Henrique, Elton, Atenágoras, Rodolfo, Lara, Rubão, Hércules, Erika, Aderaldo, Ninja, Viviane, Alan Pavan, Pará, Salgado, Tião, Andrey, Berbel, Luli, Zad, Taubinha, Coluto e Cervini.

Sou muito grato às amizades que fiz e cultivei nos dois anos e meio que vivo no Rio de Janeiro, onde me acolheram de maneira excepcional. Agradeço em especial a Denise (mãe do Leandro) por ter representado minha mãe aqui no Rio. Agradeço meus grandes amigos e colegas: Leandro Di Bartolo, Guga de Barros, Jaime Rocha, Magno, Marquinhos, Saraiva, Lidy, Cristian, Alan, Aline Mendonça, Fabrício, Bob, Rafael S. D., Berna, Marquito, Alejo, Colo, Carlos Molina, Eloa e família, Alfonso, Elmer, Carla Mello, Simone, Valéria, Renata Cabral e família, Laura, Renata Figueiredo, Ana Julia, Daniel Schneider, Saliby Simoni, Ribamar, Miguel Quartin, Molinho, Lord Wells, Leandro Guedes, Sr. Sergio, Tamara, Pilling, Rammom, Huguinho, Rita e o pessoal da rua São Braz.

Sou muito grato à cidade de Boa Vista-RR e às amizades que cultivei nos seis anos e meio da minha infância que vivi lá, onde foi o primeiro lugar que morei no Brasil. Sou muito grato a pacata e bela cidade de Medianeira-PR, ao qual passei minha adolescência. Agradeço especialmente em Medianeira às quatro amizades, e respectivos familiares, que cultivo até os dias de hoje, que são: Diego Rossi, Kleber Ramalho, Márcio Rockenbach e Fernando Weizenmann. Agradeço as principais amizades que fiz em escolas ou congressos de física pelo Brasil, onde me ajudaram a conhecer a pesquisa em física de outras instituições brasileiras. Apesar de nunca termos morado na mesma cidade fiz grandes amizades. Os principais são: Clovis, Evandro, Adnei, Felipe e Eloy.

Convivi pouco com algumas dessas pessoas que citei, mas mesmo assim tenho grande admiração e amizade.

Agradeço à CAPES pelo financiamento de dois anos de bolsa de mestrado.

“A gente devia se lembrar todo dia, ao sair de casa e caminhar para a universidade, do seguinte: ‘faço pesquisa, faço física num país que é um dos campeões mundiais da desigualdade social. Tenho esse privilégio e essa responsabilidade’. Então acho muito importante antes de mais nada que a gente trabalhe direito.”

Luiz Davidovich

RESUMO

HOMOGENEIDADES ESPACIAL E OBSERVACIONAL DA DISTRIBUIÇÃO DE GALÁXIAS

Luis Juracy Rangel Lemos

Orientador: Marecelo Byrro Ribeiro

Resumo da dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação em Astronomia, do Observatório do Valongo da Universidade Federal do Rio de Janeiro — OV/UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Astronomia.

Neste trabalho propomos um segundo tipo de análise da homogeneidade da distribuição de matéria no Universo, aqui chamada de homogeneidade observacional (HO) e a qual é feita na hiper-superfície tipo-nulo do cone de luz do passado. O tipo de análise da homogeneidade já conhecida é definida pelo Princípio Cosmológico, que chamamos de homogeneidade espacial (HE), a qual ocorre nas hiper-superfícies tipo-espacial do espaço-tempo. Realizamos este trabalho utilizando o modelo cosmológico de Einstein-de Sitter. Todas as discussões de homogeneidades foram feitas para quatro tipos de distâncias cosmológicas, que são: distância por área d_A , distância por área galáctica d_G , distância de luminosidade d_L e distância por desvio para o vermelho d_z . Simulamos vários tipos de contagens de fontes cosmológicas e no caso de universo com homogeneidade espacial usamos a contagem numérica prevista pelo modelo de Einstein-de Sitter (EdS, N_{EdS}), pois assume o Princípio Cosmológico. Para simularmos o universo com homogeneidade observacional, usamos a contagem numérica proposta por Wertz (1970) e Pietronero (1987), para a distribuição de galáxias. A partir de duas funções de densidade numérica radiais definidas em Ribeiro (2005), que são a densidade diferencial γ_i e a densidade diferencial integral γ_i^* , fizemos uma análise das homogeneidades espacial e observacional da distribuição de galáxias, esta última é definida pela constância de γ_i^* . Foram apresentados gráficos mostrando o papel central da escolha da distância cosmológica na determinação das densidades. Pôde ser observado claramente que para caracterizar se a distribuição de galáxias em grande escala do Universo possui ou não HO, é necessário conhecer não somente a distribuição geral de massa-energia, a qual é determinada pela contagem N_i de fontes cosmológicas, mas também o volume geométrico que define densidade, que, por sua vez, depende da distância cosmológica.

Palavras-chave: Cosmologia e Gravitação, Cosmologia Observacional; Astrofísica Extragaláctica; Distâncias Cosmológicas e Contagem Numérica.

Rio de Janeiro
Setembro de 2006

ABSTRACT

SPATIAL AND OBSERVATIONAL HOMOGENEITIES OF GALAXIES DISTRIBUTION

Luis Juracy Rangel Lemos

Supervisor: Marcelo Byrro Ribeiro

Abstract of MSc thesis submitted to the Graduate Program in Astronomy, at Valongo Observatory of Federal University of Rio de Janeiro — OV/UFRJ, as part of requirements for MSc degree in Astronomy.

In this work we propose a second way of analysing the homogeneity of the matter distribution in the Universe, called here as observational homogeneity (OH), and which is carried out along the past light cone null type hypersurface. The usual type of homogeneity is given by the Cosmological Principle, called here as spatial homogeneity (SH), and which is defined along space-like hypersurfaces of the spacetime. In this work we adopted the Einstein-de Sitter cosmological model. All discussion regarding homogeneity were done by means of four cosmological distances, namely, the area distance d_A , the galaxy area distance d_G , the luminosity distance d_L and the redshift distance d_z . Simulations of various types of counting of cosmological sources were carried out and in the case of an universe model with SH we used the number counting obtained from the Einstein-de Sitter (EdS) model (N_{EdS}), since it assumes the Cosmological Principle. In order to simulate an universe with OH, we adopted the number counts expression advanced by Wertz (1970) and Pietronero (1987) for the galaxy distribution. Starting from two radial density functions defined in Ribeiro (2005), namely the differential density γ_i and the integral differential density γ_i^* , we carried out an analysis of spatial and observational homogeneities of the galaxy distribution, where the latter (OH) was defined by the constant value of γ_i^* . Various plots were presented showing the central role played by the cosmological distance choice. It was also clearly observed that in order to characterize whether or not the large-scale galaxy distribution in the Universe has, or has not, OH, it is necessary to know not only the general mass-energy distribution, which is determined by the count N_i of cosmological sources, but also the geometrical volume which defines the density and, by itself, depends on the cosmological distance.

Key Words: Cosmology and Gravitation, Observational Cosmology; Extragalactic Astrophysics; Cosmological Distances and Number Counts.

Rio de Janeiro
September of 2006

Índice

Agradecimentos	vi
Resumo	ix
Abstract	x
Índice	xi
Introdução	1
1 Fundamentos Teóricos	4
1.1 Princípio Cosmológico	4
1.2 O Modelo Cosmológico de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	7
1.3 Soluções das Equações de Friedmann para $\Lambda = 0$ e $p = 0$	12
1.3.1 O Modelo de Einstein-de Sitter ($k = 0$)	13
1.3.2 O Modelo fechado ($k = 1$)	14
1.3.3 O Modelo aberto ($k = -1$)	15
1.4 Relação de Mattig	16
1.4.1 Caso para o universo de Einstein-de Sitter	17
1.4.2 Caso para universo fechado	17
1.4.3 Caso para universo aberto	20
1.5 Distâncias Cosmológicas	21
1.5.1 Distância de luminosidade	22
1.5.2 Distância por área	23
1.5.3 Distância por área galáctica	25
1.5.4 Distância por desvio para o vermelho	26
1.6 Contagem Numérica e Densidade Diferencial	28
1.6.1 Contagem Numérica	28
1.6.2 Densidades Diferenciais	31
1.7 Modelo Hierárquico de Pietronero-Wertz	33
1.8 Definição das Homogeneidades Espacial e Observacional	34

2	Contagens Numéricas e Densidades Diferenciais Simuladas no Modelo de Einstein-de Sitter	37
2.1	Contagens Numéricas	37
2.2	Cálculo das Densidades Diferenciais	38
2.3	Cálculo das Densidades Diferenciais Integrais	41
3	Estudo dos Casos com e sem Homogeneidade Observacional	44
3.1	Caso com homogeneidade observacional	44
3.2	Caso sem homogeneidade observacional	48
4	Comportamento de $D(z)$ ao Assumirmos Homogeneidade Espacial	52
	Conclusão	56
	Apêndices	58
	A Métrica de Robertson-Walker	58
	B Cálculo de $\gamma_z^*(z)$ e $\gamma_L^*(z)$	64
	Bibliografia	66

Introdução

As descobertas de Hubble em 1923 tornaram consensual à comunidade científica a noção de que as nebulosas eram outras galáxias semelhantes a nossa e, assim, começou o estudo da distribuição de matéria em nível extra-galáctico no Universo assim como da sua geometria. A cosmologia moderna, portanto, tem por objetivo determinar a distribuição de matéria em grandes escalas e a estrutura espaço-temporal do Universo a partir das observações. Como, no entanto, as equações de Einstein da gravitação constituem-se em um sistema de 10 equações diferenciais não lineares as quais são muito difíceis de serem tratadas analiticamente na sua totalidade, foi necessário assumir alguma hipótese de simetria para facilitar a resolução. Com essa finalidade Einstein, de Sitter, Friedmann e muitos outros assumiram a hipótese de que o Universo deve ser homogêneo e isotrópico. As observações, no entanto, não indicavam claramente que essa hipótese era a mais adequada devido a serem observados super-aglomerados de galáxias e grandes vazios. Assim outros pesquisadores estudaram outras hipóteses simplificadoras, como por exemplo, a métrica de Lemaître-Tolman-Bondi, a qual descreve um universo esféricamente simétrico, mas não-homogêneo. Hoyle, Bondi e Narlikar acreditavam que o Universo pudesse ser homogêneo e isotrópico espacial e temporalmente, hipótese de simetria a qual é conhecida como Princípio Cosmológico Perfeito, proposto para sustentar o Modelo Estacionário do Universo, atualmente ultrapassado. Apesar de haver muito mais evidências observacionais para a isotropia do que para a hipótese de homogeneidade da distribuição de matéria no Universo, vários estudos teóricos foram feitos abandonando a isotropia, o que é o caso dos modelos de Bianchi, cujas características são a de serem homogêneos espacialmente, mas anisotrópicos (Stephani e outros 2003). No entanto a hipótese adotada hoje pela maioria da comunidade científica é fundada no Princípio Cosmológico que afirma que o Universo é homogêneo e isotrópico espacialmente.

Este trabalho faz uma análise relativística da cosmologia observacional e originou-se de uma seqüência de artigos publicados com início na década de 70, onde uma série de pesquisadores como, por exemplo, Wertz (1971), Bonnor (1972), Mandelbrot (1977), Wesson (1979), Pietronero (1987), Ribeiro (1995) e outros se dedicaram a modelar as

possíveis não homogeneidades do Universo baseando-se em dados observacionais. Esta dissertação faz parte dessa seqüência de trabalhos, mas não tem como objetivo se contrapor ao Princípio Cosmológico, porém apresentar argumentos de que, para verificá-lo, é necessário fazer uma análise mais cuidadosa da informação observacional.

Assim, este trabalho tem por objetivo mostrar que, se o Universo não é homogêneo observacionalmente, tal situação não implica que o Princípio Cosmológico esteja errado. Este ponto é sobremaneira relevante, pois o Modelo Cosmológico Padrão é sustentado pelo Princípio Cosmológico. Queremos mostrar que essa inomogeneidade é apenas observacional, mas não espacial. Com isso o Universo pode ser considerado homogêneo espacialmente, mas não o ser observacionalmente, confirmando a hipótese do Princípio Cosmológico. Entretanto, é necessário verificar a homogeneidade espacial do Universo, onde entram em cena as dificuldades intrínsecas da Relatividade Geral.

Este trabalho é desenvolvido no universo de Einstein-de Sitter (ver subseção 1.3.1) e nele pretendemos mostrar que quando assumimos a homogeneidade espacial (HE) apenas obtemos a homogeneidade observacional (HO) ao usarmos a distância por área galáctica d_G (ver subseção 1.5.3). Se assumirmos a HO, obtemos HE apenas quando $z \rightarrow 0$. Acreditamos que este trabalho contribuirá para o maior entendimento de conceitos básicos relacionados à uniformidade da distribuição de matéria do Universo.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma. O capítulo 1 tem por objetivo fornecer a base teórica para o entendimento dos capítulos seguintes, e é dividido em oito seções. A seção 1.1 faz uma abordagem formal do Princípio Cosmológico e a seção 1.2 é dedicada ao Modelo Cosmológico Padrão, mostrando, em linhas gerais, a obtenção das soluções cosmológicas de Friedmann da Equação de Einstein da gravitação. A seção 1.3 mostra as soluções cosmológicas para universos sem constante cosmológica Λ e com domínio exclusivo da matéria (poeira), onde demonstramos as soluções para as três possibilidades da curvatura espacial k de um universo homogêneo e isotrópico, quais sejam, $k = 0, \pm 1$. A seção 1.4 faz a dedução da relação de Mattig de distâncias para universos com curvatura espacial nula e não nula. Estas soluções nos serão úteis para obtermos as distâncias cosmológicas. A seção 1.5 mostra a origem das quatro distâncias observacionais que usaremos ao longo dos próximos capítulos e a seção 1.6 mostra a origem das duas principais ferramentas do trabalho, a contagem numérica e a densidade diferencial. A seção 1.7 comenta sobre a análise fractal da distribuição de galáxias desenvolvida por Wertz (1970, 1971) e Pietronero (1987), onde usaremos a contagem numérica sugerida por ambos, chamada ao longo do trabalho de contagem de Pietronero. A seção 1.8 explica a diferença entre homogeneidade observacional e espacial, diferenciação esta que será utilizada como eixo para as discussões seguintes.

O capítulo 2 mostra como se obtêm as contagens numéricas e as densidades diferenciais para cada distância cosmológica usando a contagem de Pietronero. A seção 2.1 discute as contagens numéricas para as quatro distâncias cosmológicas que estamos adotando, a seção 2.2 desenvolve o cálculo das densidades diferenciais em função das contagens encontradas na seção anterior e a seção 2.3 calcula as densidades diferenciais integrais a partir das densidades diferenciais encontradas anteriormente. O capítulo 3 estuda as contagens numéricas e as densidades diferenciais para universos com e sem homogeneidade observacional, onde a seção 3.1 calcula e analisa, através de gráficos, as contagens numéricas e densidades diferenciais ao assumirmos HO. A seção 3.2 faz o mesmo que a seção anterior, mas desta vez assumindo que não há homogeneidade observacional. O capítulo 4 discute o comportamento da dimensão fractal como função do desvio para o vermelho z para o modelo de universo que assume homogeneidade espacial.

Na conclusão resumimos os resultados que obtivemos sobre as homogeneidades espacial e observacional da distribuição de galáxias, onde concluímos que quando assumimos a HO (seção 3.1) apenas há homogeneidade espacial no caso da distância por área galáctica d_G , e quando não assumimos homogeneidade observacional (seção 3.2) não há HE para as quatro distâncias cosmológicas adotadas neste trabalho. Também resumimos o caso em que assumimos a homogeneidade espacial (capítulo 4), e onde mostramos que apenas em $z \rightarrow 0$ há HO para as quatro distâncias cosmológicas ao mesmo tempo, mas para $z > 0$ só há homogeneidade observacional ao uso da distância por área galáctica d_G . Dois apêndices complementam este trabalho. O apêndice A discute a origem da métrica de Robertson-Walker mostrando de forma breve a interessante evolução da análise geométrica ao longo da história. O apêndice B calcula a densidade diferencial integral para a distância por desvio para o vermelho d_z e para a distância de luminosidade d_L .

Capítulo 1

Fundamentos Teóricos

Este capítulo tem por objetivo fornecer a base teórica necessária para o melhor entendimento dos capítulos seguintes.

1.1 Princípio Cosmológico

Primeiro será apresentado um breve comentário histórico sobre o Princípio Cosmológico e em seguida argumentaremos de maneira mais formal sobre ele. Conforme Barrow (1989, 1993), o Princípio Cosmológico é oriundo do Princípio Copernicano, segundo o qual “não ocupamos um lugar privilegiado no Universo, ou seja, somos observadores típicos”. O Princípio Copernicano influenciou na simetria empregada nos primeiros modelos cosmológicos relativísticos (modelos de: Einstein de 1917, de Sitter de 1917 e Friedmann de 1922), simetria a qual hipotetiza que “o Universo é homogêneo e isotrópico espacialmente”. Posteriormente, essa simetria foi nomeada de Princípio Cosmológico. Ele tinha como objetivo facilitar a obtenção das soluções cosmológicas das equações de Einstein da gravitação, publicadas em 1916, as quais constituem-se em um sistema de 10 equações diferenciais não lineares muito difíceis de serem tratadas analiticamente na sua totalidade. Naquela época, o Princípio Cosmológico tinha um simples propósito: justificar o uso das métricas de de Sitter e de Friedmann como uma descrição do Universo em grandes escalas.

Em 1935, Milne explorou os modelos cosmológicos newtonianos e da Relatividade Geral com mais detalhes. Em 1948, Bondi, Gold e Hoyle propuseram o Princípio Cosmológico Perfeito para o qual “o Universo é homogêneo e isotrópico espacialmente e temporalmente”, enunciado para sustentar o Modelo do Estado Estacionário, também defendido posteriormente por Narlikar (Hoyle & Narlikar 1963). Tal idéia, entretanto,

foi descartada pela maior parte da comunidade científica após resultados fornecidos pela contagem de fontes de rádio e pela descoberta da Radiação Cós mica de Fundo.

Como vimos, o Princípio Cosmológico envolve de forma articulada os conceitos de homogeneidade e isotropia aplicados, via Relatividade Geral, à discussão do Universo como um todo. No que segue, vamos definir homogeneidade, isotropia e posteriormente o Princípio Cosmológico através dos vetores de Killing, mas primeiro vamos mostrar resumidamente como o vetor de Killing surge da necessidade de haver simetria na geometria. Exporemos uma análise matemática breve desta parte e, caso o leitor se interesse mais a respeito, pode recorrer as seções que indicaremos.

Conforme Weinberg (1972, seções: 13.1, 13.2 e 14.1), Euclides implicitamente assumiu que as relações métricas não são afetadas por translações ou rotações. O campo gravitacional normalmente não apresenta alto grau de simetria, mas existem boas aproximações em que ele admite algum grupo de transformações simétricas, e quando o faz, pode-se usar essas informações para ajudar a resolver as equações de Einstein. Antes, porém, precisamos definir a transformação isométrica,

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} g_{\rho\sigma}(x'), \quad (1.1.1)$$

onde x' é a coordenada transformada de x . Assumimos que a métrica tem forma invariante, $g'_{\mu\nu}(y) = g_{\mu\nu}(y)$, para qualquer y . Podemos simplificar a equação acima para o caso de transformações de coordenadas infinitesimais,

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon \xi^{\mu}(x) \quad \text{com} \quad |\varepsilon| \ll 1. \quad (1.1.2)$$

Substituindo esta última expressão na equação (1.1.1) e desenvolvendo um pouco a álgebra tensorial, obtemos,

$$0 = \xi_{\sigma;\rho} + \xi_{\rho;\sigma}, \quad (1.1.3)$$

onde todo quadri-vetor de campo $\xi_{\sigma}(x)$ que satisfaça à equação acima é dito ter a forma do vetor de Killing da métrica $g_{\mu\nu}$.

A métrica espacial é dita ser *homogênea* se apresenta isometrias infinitesimais (1.1.2) que conduzam algum dado ponto x para algum outro ponto na imediata vizinhança, ou seja, a métrica tem que admitir vetores de Killing que algum dado ponto leve a todos os valores possíveis.

A métrica espacial é dita ser *isotrópica* sobre um dado ponto x se apresenta isometrias infinitesimais (1.1.2) que deixem o ponto x fixo, tal que $\xi^\lambda(x)$ seja nulo e $\xi_{\lambda;\nu}(x)$ leve a todos os valores possíveis, sujeito somente à condições anti-simétricas (1.1.3). Para o caso de N dimensões, podemos selecionar um conjunto com $N(N-1)/2$ vetores de Killing. De maneira trivial verificamos que para $N = 4$, obtemos 6 vetores de Killing, que é o número máximo de elementos independentes de uma matriz quadrada anti-simétrica de ordem 4.

É de interesse especial introduzir na cosmologia o espaço maximamente simétrico. Através da álgebra dos vetores de Killing, o espaço que é isotrópico sobre todos os pontos é também homogêneo (que é o número máximo de elementos independentes de uma matriz quadrada simétrica de ordem N). A métrica que admite o número máximo $N(N+1)/2$ de vetores de Killing é dita ser maximamente simétrica. Um espaço maximamente simétrico é necessariamente homogêneo e isotrópico sobre todos os pontos e tais espaços são definidos de forma unívoca por uma dada curvatura k e pelo número de autovalores positivos e negativos. Dadas duas métricas maximamente simétricas com iguais constantes de curvatura k e igual número de autovalores de cada sinal, sempre será possível encontrar uma transformação de coordenada que leve de uma métrica à outra.

O Princípio Cosmológico implica numa forma invariante para as transformações $g_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu}$ e $T_{\mu\nu} = T'_{\mu\nu}$, as transformações de coordenadas devem ser isométricas (1.1.1). Outro princípio fundador do Modelo Cosmológico Padrão é o postulado de Weyl (1923), que hipotetisa que as linhas de universo do tipo temporal dos observadores fundamentais designadas pelas galáxias formam um feixe de linhas, que não se interceptam entre si, ou seja, são ortogonais a uma série de hiper-superfícies tipo-espaço.

Em resumo, o Princípio Cosmológico pode ser formulado por: I) A hiper-superfície de tempo constante é um subespaço maximamente simétrico de todo o espaço-tempo. II) Não somente a métrica $g_{\mu\nu}$, mas todo tensor cósmico, como $T_{\mu\nu}$, é invariante na forma com respeito a isometria deste subespaço.

A Formulação I diz que as hiper-superfícies tipo-espaço são homogêneas e isotrópicas e a formulação II, diz que os tensores energia-momento $T_{\mu\nu}$ de cada hiper-superfície de tipo-espaço são invariantes.

1.2 O Modelo Cosmológico de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

Como todo modelo cosmológico, o modelo FLRW* tem por objetivo descrever a evolução do Universo em toda sua história. O modelo padrão é baseado nas equações de Friedmann-Lemaître e a sua geometria é dada pela métrica de Robertson-Walker.

A cosmologia estudada até 1917 fundava-se, evidentemente na dinâmica e na gravitação Newtonianas (ver Waga 2005). Naquele ano iniciou-se o estudo da cosmologia relativística, baseada na Teoria da Relatividade Geral de Einstein, publicada no ano anterior, 1916. Os dois primeiros modelos cosmológicos relativísticos foram propostos em 1917 por Einstein e de Sitter, e assumiam um universo com curvatura espacial nula. Em seguida, o matemático russo A. A. Friedmann (1888 – 1925) publicou soluções para universos com curvaturas espaciais constantes e positiva em 1922 e negativa em 1924. Os trabalhos de Friedmann passaram praticamente despercebidos, acredita-se que devido a sua forte abordagem matemática, até que em 1927 o físico e matemático belga G. E. Lemaître (1894 – 1966) publicou, de maneira independente, soluções equivalentes às de Friedmann. Lemaître conseguiu chamar a atenção da comunidade científica por sua consistente interpretação física e astronômica do modelo.

A seguir, reproduziremos as equações de Friedmann, conforme Narlikar (1993). A equação de Einstein da gravitação é dada por,

$$G_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (1.2.1)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein, $T_{\mu\nu}$ o tensor energia-momento e μ e ν são índices que variam de 0 a 3, onde 0 representa a coordenada temporal e os outros três índices representam as coordenadas espaciais. $G_{\mu\nu}$ e $T_{\mu\nu}$ são definidos por,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (1.2.2)$$

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho c^2)\frac{v_\mu v_\nu}{c^2} - pg_{\mu\nu}, \quad (1.2.3)$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, R o escalar de Ricci (também conhecido como escalar de curvatura), p a pressão, ρ a densidade de massa, v_μ o quadri-vetor velocidade e $g_{\mu\nu}$ a

*Também conhecido como: modelo cosmológico padrão, modelo de Friedmann, modelo padrão, cosmologia padrão e modelo do Big-Bang. A partir de 1965, este último, foi considerado pela maior parte da comunidade científica como o modelo padrão da cosmologia. Contudo, prefere-se não usar a terminologia de “teoria ou modelo do Big Bang”, pois sugere um início explosivo, o que não é, necessariamente, verdadeiro.

métrica. O tensor e o escalar de Ricci são obtidos a partir do tensor de Riemann-Christoffel $R_{i \quad kn}^m$ (mais conhecido como tensor de Riemann). Os três são definidos por,

$$R_{i \quad kn}^m = \Gamma_{ik;n}^m - \Gamma_{in;k}^m + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{ln}^m - \Gamma_{in}^l \Gamma_{lk}^m, \quad (1.2.4)$$

$$R_{\mu\nu} = g^{\sigma\rho} R_{\sigma\mu\nu\rho} \equiv R^{\rho}{}_{\mu\nu\rho}, \quad (1.2.5)$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \equiv R_{\mu}{}^{\mu}, \quad (1.2.6)$$

onde Γ_{kl}^i é a conexão afim, definida como,

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{im} (g_{mk;l} + g_{lm;k} - g_{kl;m}). \quad (1.2.7)$$

A métrica usada para obter as equações de Friedmann é a métrica de Robertson-Walker (deduzida no apêndice A), dada por,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right). \quad (1.2.8)$$

onde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$, a é o fator de escala, ou seja, taxa de expansão do universo, originário da coordenada (ou distância) própria $R(t) = a(t)r$, r é a coordenada co-móvel. Como o tensor métrico de Robertson-Walker é diagonal, podemos simplificar as equações (1.2.1), (1.2.2) e (1.2.3) multiplicando-as por $g^{\mu\nu}$, resultando em,

$$G_{\mu}^{\mu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu}^{\mu}, \quad (1.2.9)$$

$$R_{\mu}^{\mu} - \frac{1}{2} R = -\frac{8\pi G}{c^4} \left[(p + \rho c^2) \frac{v_{\mu} v^{\mu}}{c^2} - p \right]. \quad (1.2.10)$$

Nosso objetivo é obter as quatro equações, $G_0^0 = \kappa T_0^0$, $G_1^1 = \kappa T_1^1$, $G_2^2 = \kappa T_2^2$ e $G_3^3 = \kappa T_3^3$, onde $\kappa = -8\pi G/c^4$.

Usando os elementos da métrica de Robertson-Walker para calcular o tensor e o escalar de Ricci, considerando que as galáxias seguem o postulado de Weyl (1923) rigorosamente,

e que o quadri-vetor velocidade de um objeto no espaço-tempo é $v^\mu = (c, 0, 0, 0)$, obtemos,

$$G_1^1 = G_2^2 = G_3^3 = -\frac{1}{c^2} \left(2\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + kc^2}{a^2} \right), \quad (1.2.11)$$

$$G_0^0 = -\frac{3}{c^2} \left(\frac{\dot{a}^2 + kc^2}{a^2} \right), \quad (1.2.12)$$

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -p, \quad (1.2.13)$$

$$T_0^0 = \rho c^2. \quad (1.2.14)$$

Substituindo as equações de (1.2.11) a (1.2.14) na equação (1.2.9), obtemos as duas equações de Friedmann,

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + kc^2}{a^2} = -\frac{8\pi G}{c^2} p, \quad (1.2.15)$$

$$\frac{\dot{a}^2 + kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho. \quad (1.2.16)$$

Na realidade Friedmann obteve três pares de soluções, para $k = 0, \pm 1$, pois a constante de curvatura k foi acrescentada na métrica por Robertson (1935) e Walker (1936), de forma independente (ver apêndice A).

Iremos obter agora duas equações importantes que derivam das duas equações encontradas por Friedmann. A subtração da equação (1.2.16) pela equação (1.2.15) resulta em,

$$\frac{2\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi G}{3c^2} (\rho c^2 + 3p), \quad (1.2.17)$$

que é a equação da aceleração (também conhecida como equação de Raychaudhuri). Observe que para $p > -\rho c^2/3$ o universo é desacelerado, para $p < -\rho c^2/3$ o universo é acelerado e para $p = -\rho c^2/3$ a velocidade de expansão ou contração é constante.

Para obtermos a outra equação que procuramos nós derivamos a equação (1.2.16) em função do tempo e substituímos o termo \ddot{a} da equação (1.2.15) na primeira. Assim,

$$\dot{\rho} c^2 + 3\frac{\dot{a}}{a} (\rho c^2 + p) = 0, \quad (1.2.18)$$

que é a equação relativística da conservação da energia em uma geometria de Robertson-Walker (é uma espécie de equação do fluido do universo ou equação da continuidade do universo). Observe que a equação (1.2.18) tem dimensão de potência/volume. As equações (1.2.16) e (1.2.18) podem ser obtidas a partir de um cálculo Newtoniano, uma delas vem da conservação da energia e a outra da primeira lei da termodinâmica, mas a

interpretação da constante k é diferente, sendo a energia mecânica total do sistema (ver Harrison 1981).

Em 1917, Einstein acrescentou na sua equação da gravitação a constante cosmológica Λ para contrabalancear com a força gravitacional que é atrativa, isso devido a ele acreditar que o Universo era estático. Após a descoberta em 1929, por Hubble que o Universo está se expandindo, Einstein e outros abandonaram Λ , mas essa constante foi utilizada para explicar discrepâncias observacionais (exemplo: sobre a idade do Universo nos 30 e problemas na nucleossíntese primordial). No final dos anos 90 dois grupos astronômicos independentes (Riess & outros 1998 e Perlmutter & outros 1999) concluíram através da observação de supernovas do tipo Ia que o Universo está se expandindo aceleradamente, trazendo de volta a constante cosmológica na equação da gravitação de Einstein, mas desta vez para descrever um universo acelerado. As principais equações são reescritas com a constante Λ como,

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (1.2.19)$$

$$\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + kc^2}{a^2} - \Lambda c^2 = -\frac{8\pi G}{c^2} p, \quad (1.2.20)$$

$$\frac{\dot{a}^2 + kc^2}{a^2} - \frac{\Lambda c^2}{3} = \frac{8\pi G}{3} \rho, \quad (1.2.21)$$

$$\frac{2\ddot{a}}{a} - \frac{2\Lambda c^2}{3} = -\frac{8\pi G}{3c^2} (\rho c^2 + 3p), \quad (1.2.22)$$

$$\dot{\rho} c^2 + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho c^2 + p) = 0. \quad (1.2.23)$$

Agora temos quatro equações, de (1.2.20) a (1.2.23), para descrever o universo, onde apenas duas são lineamente independentes, sendo que existem três variáveis (ρ , p e a), com isso, precisamos de uma terceira equação do tipo $p = p(\rho)$, para resolver o problema, ou seja, precisamos da equação de estado do universo.

A análise para obter as soluções das equações de Friedmann é bem ampla, pois precisamos ajustar duas constantes, k e Λ , e descobrir uma equação de estado que descreva o Universo por três eras de domínios muito diferentes. São elas as eras da radiação[†], a era da matéria[‡] e a era da constante cosmológica[§].

[†]Era da radiação: iniciada no fim da era da inflação ($\sim 10^{-36} s$ após o Big-Bang) indo até o instante da equipartição (~ 5 mil anos após o Big-Bang, transição entre as eras de domínio da radiação e da matéria).

[‡]Era da matéria: entre a equipartição e o instante da emissão da Radiação Cósmica de Fundo (~ 400 mil anos após o Big-Bang, instante em que os elétrons e os prótons se combinam pra formar os átomos de hidrogênio e hélio).

[§]Era da constante cosmológica: não se sabe do que é composta, a comunidade científica chama essa suposta composição de energia escura; acredita-se que essa energia provoca a expansão acelerada do Universo. Não se sabe quando começou, mas as observações indicam fortemente que essa substância reina atualmente.

Vamos definir algumas quantidades importantes,

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad (1.2.24)$$

$$q(t) = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = -\frac{\ddot{a}}{aH^2}, \quad (1.2.25)$$

$$\rho^{cr}(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G}, \quad (1.2.26)$$

$$\Omega(t) = \frac{\rho(t)}{\rho^{cr}(t)}, \quad (1.2.27)$$

onde $H(t)$ é o parâmetro de Hubble[¶], $q(t)$ o parâmetro de desaceleração, $\Omega(t)$ o parâmetro de densidade e $\rho^{cr}(t)$ a densidade crítica. Esta última é oriunda da equação de Friedmann (1.2.21) ao considerarmos $\Lambda = k = 0$. $\rho^{cr}(t)$ é o limite de densidade para o universo ser: fechado ($\rho > \rho^{cr}$), aberto ($\rho < \rho^{cr}$) ou plano ($\rho = \rho^{cr}$). ρ^{cr} é usado para calcular o parâmetro de densidade da contante cosmológica $\Omega_\Lambda = \rho_\Lambda/\rho^{cr}$, da matéria $\Omega_m = \rho_m/\rho^{cr}$, da radiação $\Omega_r = \rho_r/\rho^{cr}$ e da curvatura $\Omega_k = \rho_k/\rho^{cr}$.

A seguir vamos demonstrar uma expressão que usaremos bastante nas seções seguintes. Através da métrica de Robertson-Walker (1.2.8), e lembrando que a luz segue geodésicas nulas ($ds^2 = 0$), um pulso de luz radial ($d\Omega^2 = 0$) emitido de uma galáxia de coordenada r_e no instante t_e e chegando até nós em $r_0 = 0$ no instante t_0 , satisfaz,

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_0^{r_e} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (1.2.28)$$

Para o pulso de luz seguinte, emitido no instante $t_e + \Delta t_e$ e chegando a nós em $t_0 + \Delta t_0$, e lembrando que as coordenadas espaciais são co-móveis, obtemos,

$$\int_{t_e + \Delta t_e}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_0^{r_e} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (1.2.29)$$

Subtraindo a equação (1.2.28) da equação (1.2.29) e supondo que Δt_e e Δt_0 são muito pequenos, obtemos,

$$\frac{a_0}{a_e} = \frac{c\Delta t_0}{c\Delta t_e} = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{\nu_e}{\nu_0} = 1 + z, \quad (1.2.30)$$

[¶] $H(0) = H_0$ é conhecido como constante de Hubble. Essa constante é definida por $H_0 = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, onde h é o parâmetro adimensional de Hubble e medidas atuais indicam entre $h = 0.5 - 1$.

onde z é o desvio para o vermelho, definido por $z = (\nu_e - \nu_0)/\nu_0$, onde λ_e e λ_0 são os comprimentos de onda emitido e observado, respectivamente.

1.3 Soluções das Equações de Friedmann para $\Lambda = 0$ e $p = 0$

Nesta seção estudaremos apenas o caso que a matéria domina a evolução do universo sem constante cosmológica. O importante desta seção são as expressões encontradas durante os cálculos, porque serão de fundamental utilidade para as duas seções seguintes. Considerando $\Lambda = 0$ e $p = 0$ na equação diferencial (1.2.23) e em seguida resolvendo-a, resulta em,

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0, \quad (1.3.1)$$

$$\rho = \rho_0 \frac{a_0^3}{a^3}. \quad (1.3.2)$$

Reescrevendo as equações de (1.2.20) a (1.2.23) para o caso $\Lambda = p = 0$, obtemos,

$$\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + kc^2}{a^2} = 0, \quad (1.3.3)$$

$$\frac{\dot{a}^2 + kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G\rho_0}{3} \frac{a_0^3}{a^3}, \quad (1.3.4)$$

$$\frac{2\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi G}{3}\rho. \quad (1.3.5)$$

Agora vamos obter mais duas expressões do nosso interesse. Substituindo as equações de (1.2.24) a (1.2.27) na equação (1.3.5), temos que,

$$\frac{2}{a}(-qaH^2) = -\frac{8\pi G}{3}\rho = -\frac{H^2\rho}{\rho^{cr}} = -H^2\Omega, \quad (1.3.6)$$

$$\rho(t) = \frac{3H^2(t)}{4\pi G}q(t), \quad (1.3.6)$$

$$\Omega(t) = 2q(t). \quad (1.3.7)$$

Isso quer dizer que o parâmetro de densidade é igual a duas vezes o parâmetro de desaceleração em qualquer modelo com $p = \Lambda = 0$. Para obtermos a outra expressão de interesse, substituindo as equações (1.2.24) e (1.2.25) na equação (1.3.3), obtemos,

$$\frac{kC^2}{a^2} = (2q - 1)H^2. \quad (1.3.8)$$

Esta última equação nos será útil ao decorrer do trabalho. Agora vamos estudar os casos $k = 0, \pm 1$.

1.3.1 O Modelo de Einstein-de Sitter ($k = 0$)

Esta solução foi publicada em 1932 através de um trabalho em conjunto entre Einstein e o físico holandês Willem de Sitter (1872 – 1934). O modelo Einstein-de Sitter (EdS) é descrito em um universo dominado apenas pela matéria e com curvatura espacial nula. Vamos obter a taxa de expansão $a(t)$ e a idade do universo t_0 por este modelo. Neste caso a equação (1.3.4) resulta em,

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G\rho_0}{3} \frac{a_0^3}{a}. \quad (1.3.9)$$

Isolando ρ_0 na equação acima, e usando a equação (1.2.24) em $t = t_0$, obtemos,

$$\rho_0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = \rho_0^{cr}, \quad (1.3.10)$$

onde $\rho_0^{cr} = 2 \times 10^{-29} h^2 g.cm^{-3}$ é a densidade crítica na época atual pelo modelo de EdS. Substituindo a equação acima na equação (1.2.27), obtemos que $\Omega_0 = 1$ no modelo de EdS, logo $q_0 = 1/2$ pela equação (1.3.7).

Para resolver a equação diferencial (1.3.9), usamos a equação acima, resultando em,

$$\begin{aligned} \dot{a}^2 &= H_0^2 \frac{a_0^3}{a}, \\ a(t) &= a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3}, \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

onde

$$t_0 = \frac{2}{3H_0}. \quad (1.3.12)$$

Com isso, obtivemos a taxa de expansão $a(t)$ e a idade do universo t_0 no modelo de EdS.

1.3.2 O Modelo fechado ($k = 1$)

Este modelo estuda um universo com curvatura espacial positiva. Vamos obter a idade do universo t_0 para este modelo.

Reescrevendo as equações (1.3.4), (1.3.6) e (1.3.8), e supondo $t = t_0$ nas duas últimas, temos,

$$\frac{\dot{a}^2 + c^2}{a^2} = \frac{8\pi G\rho_0 a_0^3}{3 a^3}, \quad (1.3.13)$$

$$\rho_0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G} q_0, \quad (1.3.14)$$

$$a_0 = \frac{c}{H_0} (2q_0 - 1)^{-1/2}. \quad (1.3.15)$$

Substituindo as equações (1.3.14) e (1.3.15) na equação (1.3.13), obtemos,

$$\dot{a}^2 = c^2 \left(\frac{\alpha}{a} - 1 \right), \quad (1.3.16)$$

onde

$$\alpha = \frac{2q_0}{(2q_0 - 1)^{3/2}} \frac{c}{H_0}. \quad (1.3.17)$$

Integrando a equação (1.3.16), temos que,

$$ct = \int_0^a \frac{a'^{1/2} da'}{\sqrt{\alpha - a'}}, \quad (1.3.18)$$

e considerando,

$$a' = \alpha \text{sen}^2 \frac{\theta'}{2} = \frac{\alpha}{2} (1 - \cos \theta'), \quad (1.3.19)$$

obtemos,

$$ct = \int_0^\theta \alpha \text{sen}^2 \frac{\theta'}{2} d\theta' = \frac{\alpha}{2} (\theta - \text{sen} \theta). \quad (1.3.20)$$

Igualando a equação (1.3.15) com a equação (1.3.19), em $t = t_0$, e usando a equação

(1.3.17) para obter $\cos \theta_0$ e $\text{sen} \theta_0$, temos que,

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2}(1 - \cos \theta_0) &= \frac{c}{H_0}(2q_0 - 1)^{-1/2}, \\ \cos \theta_0 &= \frac{1 - q_0}{q_0}, \quad \text{sen} \theta_0 = \frac{\sqrt{2q_0 - 1}}{q_0}. \end{aligned} \quad (1.3.21)$$

Assumindo $t = t_0$ na equação (1.3.20),

$$t_0 = \frac{\alpha}{2c}(\theta_0 - \text{sen} \theta_0), \quad (1.3.22)$$

e substituindo a equação (1.3.21) na equação acima, obtemos,

$$t_0 = \frac{q_0}{(2q_0 - 1)^{3/2}} \left[\cos^{-1} \left(\frac{1 - q_0}{q_0} \right) - \frac{\sqrt{2q_0 - 1}}{q_0} \right] \frac{1}{H_0}. \quad (1.3.23)$$

Com isso, a última equação nos oferece a idade do universo pelo modelo com curvatura espacial positiva.

1.3.3 O Modelo aberto ($k = -1$)

Este modelo estuda um universo com curvatura espacial negativa. Vamos obter a idade do universo t_0 para este modelo. As equações (1.3.3) e (1.3.4) resultam em ser iguais a,

$$\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 - c^2}{a^2} = 0, \quad (1.3.24)$$

$$\frac{\dot{a}^2 - c^2}{a^2} = \frac{8\pi G \rho_0 a_0^3}{3 a^3}. \quad (1.3.25)$$

Analogamente à subseção anterior, obtemos,

$$a_0 = \frac{c}{H_0}(1 - 2q_0)^{-1/2}, \quad (1.3.26)$$

$$\rho_0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G} q_0, \quad (1.3.27)$$

$$\dot{a}^2 = c^2 \left(\frac{\beta}{a} + 1 \right), \quad (1.3.28)$$

$$\beta = \frac{2q_0}{(1 - 2q_0)^{3/2}} \frac{c}{H_0}. \quad (1.3.29)$$

A solução da equação diferencial (1.3.28) é dada por,

$$a = \frac{\beta}{2}(\cosh \psi - 1), \quad (1.3.30)$$

$$ct = \frac{\beta}{2}(\sinh \psi - \psi). \quad (1.3.31)$$

Igualando as equações (1.3.26) e (1.3.31), em $t = t_0$, e usando β (1.3.29) temos que,

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{2}(\cosh \psi_0 - 1) &= \frac{c}{H_0}(1 - 2q_0)^{-1/2}, \\ \cosh \psi_0 &= \frac{1 - q_0}{q_0}, \quad \sinh \psi_0 = \frac{\sqrt{1 - 2q_0}}{q_0}. \end{aligned} \quad (1.3.32)$$

Isolando t na equação (1.3.31) e assumindo $t = t_0$ obtemos,

$$t_0 = \frac{\beta}{2c}(\sinh \psi_0 - \psi_0),$$

e substituindo a equação (1.3.32) nesta última obtemos a idade do universo com curvatura espacial negativa,

$$t_0 = \frac{q_0}{H_0(1 - 2q_0)^{3/2}} \left\{ \frac{\sqrt{1 - 2q_0}}{q_0} - \ln \left[\frac{1 - q_0 + \sqrt{1 - 2q_0}}{q_0} \right] \right\}. \quad (1.3.33)$$

onde $\psi_0 = \ln(\cosh \psi_0 + \sinh \psi_0)$.

1.4 Relação de Mattig

Temos por objetivo nesta seção encontrar a relação de Mattig para universos com curvatura espacial positiva ($k = 1$) e negativa ($k = -1$) (Mattig 1958), onde ele encontrou a distância co-móvel r_e percorrida pelo fóton em função do desvio para o vermelho z da fonte. Estamos considerando um universo FLRW dominado apenas pela matéria ($p = 0$) e sem constante cosmológica ($\Lambda = 0$). Uma vez que o fóton é obrigado a percorrer o nosso cone de luz, a distância co-móvel é diferente da distância física realmente percorrida pelo fóton. As deduções desta seção foram baseadas em Narlikar (1993). Primeiro iremos mostrar a distância co-móvel para o modelo de EdS.

1.4.1 Caso para o universo de Einstein-de Sitter

Consideremos r_e como sendo a posição em relação a nós, observadores, de uma galáxia G_e que emite um raio luminoso no instante t_e , chegando a nós no instante t_0 . Considerando $k = 0$ na equação (1.2.28), obtemos o seguinte resultado,

$$r_e = \int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)}. \quad (1.4.1)$$

Substituindo a equação (1.3.11) nesta última e integrando, temos que,

$$\begin{aligned} r_e &= \frac{c}{a_0} \int_{t_e}^{t_0} t_0^{2/3} t^{-2/3} dt, \\ r_e &= \frac{3ct_0}{a_0} \left[1 - \left(\frac{t_e}{t_0} \right)^{1/3} \right]. \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

Das equações (1.2.30) e (1.3.11) obtemos,

$$1 + z = \frac{a_0}{a_e} = \left(\frac{t_0}{t_e} \right)^{2/3} \implies \frac{t_e}{t_0} = (1 + z)^{-3/2}, \quad (1.4.3)$$

e substituindo as equações (1.3.11) e (1.4.3) na equação (1.4.2), temos,

$$\begin{aligned} r_e &= \frac{2c}{a_0 H_0} [1 - (1 + z)^{-1/2}], \\ r_e &= \frac{2c}{a_0 H_0} \left[\frac{1 + z - \sqrt{1 + z}}{1 + z} \right]. \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

Esta última expressão relaciona a distância co-móvel r_e com o desvio para o vermelho z no universo de EdS.

1.4.2 Caso para universo fechado

Similarmente ao caso do universo de EdS, da equação (1.2.28), obtemos,

$$\int_0^{r_e} \frac{dr}{\sqrt{1 - r^2}} = \int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)}. \quad (1.4.5)$$

Vamos resolver primeiro a integral que está do lado direito da equação acima. Usando a equação (1.3.16), obtemos,

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{a_e}^{a_0} \frac{cda}{a\dot{a}} = \int_{a_e}^{a_0} \frac{da}{\sqrt{a(\alpha - a)}}. \quad (1.4.6)$$

Considerando a substituição $a = \alpha \text{sen}^2(\theta/2)$ na equação acima, resulta em,

$$\int_{\theta_e}^{\theta_0} \frac{\alpha \text{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{\alpha^2 \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} - \alpha^2 \text{sen}^4 \frac{\theta}{2}}} = \int_{\theta_e}^{\theta_0} d\theta = \theta_0 - \theta_e, \quad (1.4.7)$$

onde essa substituição é oriunda da equação (1.3.19).

A solução da integral do lado esquerdo da equação (1.4.5) é bem conhecida, $\text{sen}^{-1}r_e$. Com isso, a equação (1.4.5) resulta em,

$$\text{sen}^{-1}r_e = \theta_0 - \theta_e,$$

$$r_e = \text{sen}(\theta_0 - \theta_e). \quad (1.4.8)$$

$$r_e = \text{sen}\theta_0 \cos \theta_e - \text{sen}\theta_e \cos \theta_0. \quad (1.4.9)$$

Precisamos encontrar os senos e cossenos da equação acima, em função do desvio para o vermelho para obtermos a relação de Mattig. Substituindo a equação (1.3.19) na equação (1.2.30), obtemos,

$$1 + z = \frac{a_0}{a_e} = \frac{\text{sen}^2(\theta_0/2)}{\text{sen}^2(\theta_e/2)}. \quad (1.4.10)$$

Desenvolvendo a equação (1.4.10) para obter $\text{sen}\theta_e$ e $\cos \theta_e$ em função do desvio para o vermelho, temos que,

$$\cos \theta_e = \frac{z + \cos \theta_0}{1 + z}, \quad (1.4.11)$$

$$\text{sen}\theta_e = \frac{2}{1 + z} \left(\text{sen} \frac{\theta_0}{2} \right) \sqrt{z + \cos^2 \frac{\theta_0}{2}}. \quad (1.4.12)$$

Como nosso objetivo é obter r_e em termos de z na equação (1.4.9), precisamos antes obter $\text{sen}(\theta_0/2)$ e $\cos(\theta_0/2)$. Reescrevendo a equação (1.3.21), temos,

$$\cos \theta_0 = \frac{1 - q_0}{q_0}, \quad \text{sen}\theta_0 = \frac{\sqrt{2q_0 - 1}}{q_0}, \quad (1.4.13)$$

e usando as expressões anteriores, obtemos,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 \frac{\theta_0}{2} &= \frac{1}{2}(1 - \cos \theta_0) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1 - q_0}{q_0} \right) = \frac{2q_0 - 1}{2q_0}, \\ \operatorname{sen} \frac{\theta_0}{2} &= \sqrt{\frac{2q_0 - 1}{2q_0}}, \end{aligned} \quad (1.4.14)$$

$$\cos \frac{\theta_0}{2} = \frac{1}{\sqrt{2q_0}}. \quad (1.4.15)$$

Substituindo as equações (1.4.13), (1.4.14) e (1.4.15) nas equações (1.4.11) e (1.4.12), temos que,

$$\operatorname{sen} \theta_e = \frac{2}{1+z} \sqrt{\frac{2q_0 - 1}{2q_0}} \sqrt{z + \frac{1}{2q_0}}, \quad (1.4.16)$$

$$\cos \theta_e = \frac{q_0 z + 1 - q_0}{q_0(1+z)}. \quad (1.4.17)$$

Substituindo as equações (1.4.13), (1.4.16) e (1.4.17) na equação (1.4.9), obtemos,

$$\begin{aligned} r_e &= \frac{\sqrt{2q_0 - 1}}{q_0} \left(\frac{q_0 z + 1 - q_0}{q_0(1+z)} \right) - \frac{2}{1+z} \sqrt{\frac{2q_0 - 1}{2q_0}} \sqrt{z + \frac{1}{2q_0}} \left(\frac{1 - q_0}{q_0} \right), \\ r_e &= \frac{\sqrt{2q_0 - 1}}{q_0^2} \left[\frac{q_0 z + (1 - q_0)(1 - \sqrt{2zq_0 + 1})}{1+z} \right]. \end{aligned} \quad (1.4.18)$$

Usando a equação (1.3.15), a equação acima resulta em,

$$r_e = \frac{c}{a_0 H_0 q_0^2} \left[\frac{q_0 z + (1 - q_0)(1 - \sqrt{2zq_0 + 1})}{1+z} \right], \quad (1.4.19)$$

e em seguida considerando $q_0 = \Omega_0/2$, oriundo da equação (1.3.7), resulta em,

$$r_e = \frac{2c}{a_0 H_0 \Omega_0^2} \left[\frac{\Omega_0(1+z) + 2(1 - \Omega_0) - (2 - \Omega_0)\sqrt{1 + \Omega_0 z}}{1+z} \right]. \quad (1.4.20)$$

Com isso, as duas última equações encontradas são a relação de Mattig entre a coordenada co-móvel r_e e o desvio para o vermelho z para um universo fechado, com curvatura espacial positiva. Observe que se considerarmos $q_0 = 1/2$ na equação (1.4.19) e $\Omega_0 = 1$ na equação (1.4.20) as duas equações resultam na relação (1.4.4) do modelo de EdS.

1.4.3 Caso para universo aberto

De forma análoga ao universo fechado, considerando ($k = -1$) na equação (1.2.28), obtemos,

$$\int_0^{r_e} \frac{dr}{\sqrt{1+r^2}} = \int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)}. \quad (1.4.21)$$

Resolvendo primeiro a integral do lado direito da equação acima e usando a equação (1.3.28), obtemos,

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{a_e}^{a_0} \frac{cda}{a\dot{a}} = \int_{a_e}^{a_0} \frac{da}{\sqrt{a(\beta+a)}}, \quad (1.4.22)$$

Substituindo a equação (1.3.31), $a = \frac{\beta}{2}(\cosh \psi - 1)$, para resolver a integral acima, obtemos,

$$\int_{\psi_e}^{\psi_0} \frac{(\beta/2)\sinh\psi d\psi}{\sqrt{(\beta^2/2)(\cosh\psi-1)+(\beta^2/4)(\cosh^2\psi-2\cosh\psi+1)}} = \int_{\psi_e}^{\psi_0} d\psi = \psi_0 - \psi_e. \quad (1.4.23)$$

A solução da integral do lado esquerdo da equação (1.4.21) é bem conhecida, $\sinh^{-1}r_e$, com isso, a equação (1.4.21) resulta em,

$$\begin{aligned} \sinh^{-1}r_e &= \psi_0 - \psi_e, \\ r_e &= \sinh(\psi_0 - \psi_e), \end{aligned} \quad (1.4.24)$$

$$r_e = \sinh\psi_0 \cosh\psi_e - \sinh\psi_e \cosh\psi_0. \quad (1.4.25)$$

Em seguida precisamos encontrar os senos e cossenos hiperbólicos da equação acima em função do desvio para o vermelho para obtermos a relação de Mattig. Precisamos obter $\sinh\psi_e$ e $\cosh\psi_e$, pois conhecemos a equação (1.3.32).

Substituindo a equação (1.3.31) na equação (1.2.30), obtemos,

$$1+z = \frac{a_0}{a_e} = \frac{\cosh\psi_0 - 1}{\cosh\psi_e - 1}, \quad (1.4.26)$$

calculando $\cosh \psi_e$ e $\sinh \psi_e$, temos que,

$$\cosh \psi_e = 1 + \frac{\cosh \psi_0 - 1}{1+z} = \frac{z + \cosh \psi_0}{1+z}, \quad (1.4.27)$$

$$\sinh \psi_e = \frac{\sqrt{2z(\cosh \psi_0 - 1) + \sinh^2 \psi_0}}{1+z}. \quad (1.4.28)$$

Substituindo as equações (1.3.32), (1.4.27) e (1.4.28) na equação (1.4.25), obtemos,

$$\begin{aligned} r_e &= \frac{1}{1+z} \left(\frac{zq_0 + 1 - q_0}{q_0} \right) \frac{\sqrt{1-2q_0}}{q_0} - \\ &\frac{1}{1+z} \sqrt{2z \left(\frac{1-2q_0}{q_0} \right) + \frac{(1-2q_0)}{q_0^2} \left(\frac{1-q_0}{q_0} \right)}, \\ r_e &= \frac{\sqrt{1-2q_0}}{q_0^2} \left[\frac{q_0 z + (1-q_0)(1 - \sqrt{2zq_0 + 1})}{1+z} \right]. \end{aligned} \quad (1.4.29)$$

Usando a equação (1.3.26), a equação acima resulta em,

$$r_e = \frac{c}{a_0 H_0 q_0^2} \left[\frac{q_0 z + (1-q_0)(1 - \sqrt{2zq_0 + 1})}{1+z} \right], \quad (1.4.30)$$

e considerando $q_0 = \Omega_0/2$, da equação (1.3.7), obtemos,

$$r_e = \frac{2c}{a_0 H_0 \Omega_0^2} \left[\frac{\Omega_0(1+z) + 2(1-\Omega_0) - (2-\Omega_0)\sqrt{1+\Omega_0 z}}{1+z} \right], \quad (1.4.31)$$

onde as duas últimas equações são a relação de Mattig entre a distância co-móvel e o desvio para o vermelho, também encontrada na subseção anterior, mas neste caso desenvolvemos o cálculo para um universo aberto com curvatura espacial negativa. Com isso, a relação de Mattig independe se o universo é aberto ou fechado. Observe que as duas últimas equações se reduzem ao caso de EdS se considerarmos $q_0 = 1/2$ e $\Omega_0 = 1$.

1.5 Distâncias Cosmológicas

Nesta seção exporemos as quatro distâncias cosmológicas que usaremos ao longo do trabalho. As deduções foram baseadas em Weinberg (1972).

1.5.1 Distância de luminosidade

Calculada a partir do fluxo de radiação^{||} l_0 emitido pela fonte e medido pelo observador. A definição da distância de luminosidade d_L é dada por,

$$l_0 = \frac{L_e}{4\pi d_L^2}, \quad (1.5.1)$$

onde L_e é a luminosidade absoluta da fonte medida no referencial da fonte emissora e possui dimensão de potência (energia/tempo). O fluxo l_0 é a potência medida no detector por unidade de área e pode ser escrito por,

$$l_0 = \frac{P_0}{A_0} = \frac{L_0}{4\pi(a_0 r_e)^2}, \quad (1.5.2)$$

onde P_0 é a potência medida no detector, A_0 a área do detector e L_0 a luminosidade absoluta da fonte medida na superfície da esfera de raio $a_0 r_e$, a qual se localiza o observador (nós). O termo $a_0 r_e$ da última equação é a distância própria entre a fonte e o observador medida no referencial do observador, se fosse medida no referencial da fonte seria $a_e r_e$.

A luminosidade absoluta da fonte medida no referencial do observador é dada por

$$L_0 = \frac{E_0}{\delta t_0} = \frac{h\nu_0}{\delta t_0}, \quad (1.5.3)$$

e usando a equação (1.2.30), temos,

$$L_0 = \frac{h\nu_e(a_e/a_0)}{\delta t_e(a_0/a_e)} = L_e \frac{a_e^2}{a_0^2}. \quad (1.5.4)$$

Substituindo a equação acima na equação (1.5.2), obtemos,

$$l_0 = \frac{L_e}{4\pi[(a_0^2/a_e)r_e]^2} \quad (1.5.5)$$

Comparando as equações (1.5.1) e (1.5.5) e em seguida usando a equação (1.2.30) obtemos a definição da distância de luminosidade no modelo FLRW em função do desvio para o vermelho,

^{||}O fluxo de radiação também é denotado pelos astrofísicos pela letra F .

$$d_L(z) = a_0 r_e (1 + z). \quad (1.5.6)$$

Substituindo a equação (1.4.4) na equação acima obtemos a distância de luminosidade no modelo de EdS em função do desvio para o vermelho,

$$d_L(z) = \frac{2c}{H_0} (1 + z - \sqrt{1 + z}). \quad (1.5.7)$$

Substituindo a equação (1.4.20) na equação (1.5.6), temos que,

$$d_L(z) = \frac{2c}{H_0 \Omega_0^2} \left[\Omega_0 (1 + z) + 2(1 - \Omega_0) - (2 - \Omega_0) \sqrt{1 + \Omega_0 z} \right], \quad (1.5.8)$$

que é a distância de luminosidade no modelo FLRW. Observe que se considerarmos $\Omega_0 = 1$ na equação acima, ela resulta na equação (1.5.7), como era esperado. Como a partir do capítulo 2 nosso trabalho é desenvolvido no universo de EdS, usaremos apenas a expressão (1.5.7).

1.5.2 Distância por área

Também conhecida como distância por diâmetro angular, distância de luminosidade corrigida e distância por área do observador. No caso do modelo de EdS ela coincide com a distância própria. A definição da distância por área d_A é dada por,

$$D_e^{(A)} = \delta_0^{(A)} d_A, \quad (1.5.9)$$

onde $D_e^{(A)}$ é o diâmetro da fonte medido no referencial da fonte emissora e $\delta_0^{(A)}$ o diâmetro angular (ou ângulo de abertura) da fonte em relação ao observador medido no referencial do observador. A distância por área está representada na figura 1.1. O diâmetro da fonte medido no referencial do observador é dado por,

$$D_0^{(A)} = \delta_0^{(A)} (a_0 r_e). \quad (1.5.10)$$

Da equação (1.2.30) temos que $D_0^{(A)} = (a_0/a_e) D_e^{(A)}$. Com isso, a equação acima resulta

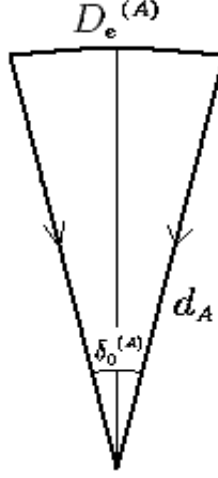


Figura 1.1: Esta figura é uma representação esquemática da definição da distância por área d_A . $D_e^{(A)}$ é o diâmetro da fonte medido no referencial da fonte emissora (ex: galáxia) e $\delta_0^{(A)}$ o ângulo de abertura da fonte em relação ao observador (nós) medido no referencial do observador.

em,

$$D_e^{(A)} = \delta_0^{(A)} \left(a_0 r_e \frac{a_e}{a_0} \right). \quad (1.5.11)$$

Comparando a equação (1.5.9) com a equação (1.5.11) e usando a equação (1.2.30), obtemos,

$$d_A = \frac{a_0 r_e}{1+z}, \quad (1.5.12)$$

que é a definição da distância por área no modelo FLRW em função do desvio para o vermelho.

Substituindo a equação (1.4.4) na equação (1.5.12), obtemos a distância por área no modelo de EdS em função do desvio para o vermelho,

$$d_A(z) = \frac{2c}{H_0} \left[\frac{1+z - \sqrt{1+z}}{(1+z)^2} \right]. \quad (1.5.13)$$

Substituindo a equação (1.4.20) na equação (1.5.12), temos que,

$$d_A(z) = \frac{2c}{H_0 \Omega_0^2} \left[\frac{\Omega_0(1+z) + 2(1-\Omega_0) - (2-\Omega_0)\sqrt{1+\Omega_0 z}}{(1+z)^2} \right]. \quad (1.5.14)$$

a qual é a distância por área no modelo FLRW para universo fechado ($\Omega_0 > 1$), universo aberto ($\Omega_0 < 1$) ou universo plano ($\Omega_0 = 1$). Este último resulta na equação (1.5.13), ou seja, o modelo de EdS. A partir do capítulo 2 usaremos apenas a definição (1.5.13).

1.5.3 Distância por área galáctica

Também conhecida como distância por movimento próprio, distância efetiva, distância por tamanho angular, distância de Mattig e distância co-móvel transversal.

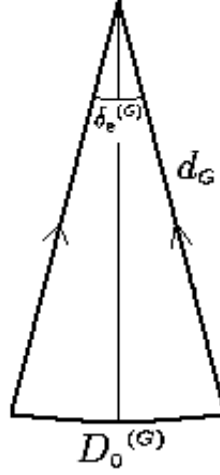


Figura 1.2: Esta figura é a representação esquemática da distância por área galáctica d_G . $D_0^{(G)}$ é o diâmetro do objeto (ex: Via-Láctea) medido no referencial do observador e $\delta_e^{(G)}$ o ângulo de abertura do observador em relação à fonte medido no referencial da fonte.

A definição de d_G é similar à de d_A , mas a diferença está nos pontos opostos (ver figura 1.2), tal que,

$$D_0^{(G)} = \delta_e^{(G)} d_G, \quad (1.5.15)$$

onde $D_0^{(G)}$ é o diâmetro do objeto (ex: Via-Láctea) medido no referencial do observador e $\delta_e^{(G)}$ o ângulo de abertura do observador em relação à fonte medido no referencial da fonte. A distância por área galáctica está representada na figura 1.2.

O diâmetro do observador medido no referencial da fonte emissora é dado por,

$$D_e^{(G)} = \delta_e^{(G)} (a_e r_e). \quad (1.5.16)$$

Da equação (1.2.30) temos que $D_e^{(G)} = (a_e/a_0) D_0^{(G)}$, com isso, a equação acima resulta em,

$$D_0^{(G)} = \delta_e^{(G)}(a_0 r_e). \quad (1.5.17)$$

Comparando a equação (1.5.15) com a equação (1.5.17), obtemos,

$$d_G = a_0 r_e, \quad (1.5.18)$$

que é a definição da distância por área galáctica no universo FLRW em função do desvio para o vermelho. Substituindo a equação (1.4.4) na equação acima, obtemos a distância por área galáctica no universo de EdS em função do desvio para o vermelho,

$$d_G(z) = \frac{2c}{H_0} \left(\frac{1+z - \sqrt{1+z}}{1+z} \right). \quad (1.5.19)$$

Substituindo a equação (1.4.20) na equação (1.5.18), obtemos,

$$d_G(z) = \frac{2c}{H_0 \Omega_0^2} \left[\frac{\Omega_0(1+z) + 2(1-\Omega_0) - (2-\Omega_0)\sqrt{1+\Omega_0 z}}{1+z} \right], \quad (1.5.20)$$

no qual é a distância por área galáctica no universo FLRW; análogo as duas últimas subseções, para $\Omega_0 = 1$ a equação acima resulta na equação (1.5.19), que era esperado. Este trabalho usará apenas as distâncias no universo de EdS, equação (1.5.19).

1.5.4 Distância por desvio para o vermelho

Esta distância é uma consequência da lei de Hubble com a aproximação Doppler da expansão. Como discutido em Waga (2000, 2005), na realidade o que Hubble observou em 1929 foi uma relação linear entre o desvio para o vermelho z e a distância d , tal que,

$$cz = H_0 d, \quad (1.5.21)$$

onde H_0 é uma constante que definiremos mais adiante. A maior parte da comunidade científica defende atualmente que essa relação tem validade limitada, sendo válida apenas para pequenas distâncias ou pequenos desvios para o vermelho, que foi o caso de Hubble, pois ele mediu galáxias com no máximo $2Mpc$ de nós. Com isso, acredita-se que Hubble

obteve a linearidade (z por d) graças a aproximação Doppler da expansão para baixas velocidades, tal que,

$$v_e = cz, \quad (1.5.22)$$

onde v_e é a velocidade da fonte no instante da emissão. Igualando as equações (1.5.21) e (1.5.22) obtemos a lei de Hubble,

$$v_e = H_0 d. \quad (1.5.23)$$

Também acredita-se que a relação acima não tem validade geral, mas por outro lado, é sempre válida se a Lei de Hubble** for escrita como,

$$v(t) = H(t)d(t), \quad (1.5.24)$$

onde $v(t)$ é a velocidade de recessão, $H(t)$ o parâmetro de Hubble e $d(t)$ a distância própria. Não é de nosso interesse estendermo-nos na equação acima.

Até os dias de hoje há um debate sobre qual equação entre (1.5.21) e (1.5.23) tem maior alcance, alguns defendem que a equação (1.5.21) tem alcance maior (ver Harrison 1993) e outros defendem o inverso. A definição da distância por desvio para o vermelho é oriunda da equação (1.5.21) (ver Ribeiro 2005), tal que,

$$d_z(z) = \frac{cz}{H_0}, \quad (1.5.25)$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo e H_0 a constante de Hubble.

A distância co-móvel no modelo de EdS é representada neste trabalho por d_G , da qual difere por um fator constante. Não trabalharemos com a distância de paralaxe porque somente é usada para medir distâncias de objetos que se encontram próximo do sistema solar. As três primeiras distâncias observacionais discutidas acima são conectadas por um teorema muito importante demonstrado por Etherington (1933), chamado de lei da reciprocidade de Etherington ou teorema da reciprocidade (ver Ellis 1971), tal que,

**Harrison (1981) chama essa expressão de “lei linear da velocidade-distância”.

$$d_L = (1 + z)d_G = (1 + z)^2 d_A. \quad (1.5.26)$$

Esse resultado é puramente geométrico e requer que a fonte e o observador sejam conectados por geodésicas nulas. Esse teorema é válido para qualquer cosmologia. Verificamos que três quantidades encontradas nas equações acima são medidas pelo observador, l_0 , $\delta_0^{(A)}$ e $D_0^{(G)}$; as outras três são medidas no referencial em repouso fonte emissora, L_e , $D_e^{(A)}$ e $\delta_e^{(G)}$.

1.6 Contagem Numérica e Densidade Diferencial

Nesta seção vamos definir algumas quantidades que iremos usar ao longo do trabalho, a começar com a contagem numérica de galáxias N_i (também conhecida como contagem de fontes, *source counts*), a qual, é uma quantidade adimensional obtida através dos catálogos de galáxias (*galaxy redshift surveys*) e comparada com simulações teóricas. Nesta seção iremos deduzir a contagem numérica no modelo de FLRW e em seguida mostraremos o caso particular do modelo de EdS. As deduções sobre contagem numérica foram baseadas em Narlikar (1993) e Weinberg (1972).

1.6.1 Contagem Numérica

A definição do diferencial da contagem numérica é dado por,

$$dN = n(t)dV, \quad (1.6.1)$$

onde $n(t)$ é a densidade numérica de fontes (volume^{-1}) e dV o elemento de volume próprio. Este último é definido por,

$$\begin{aligned} dV &= \sqrt{g}drd\theta d\phi = \frac{a^3 r^2 dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \sin\theta d\theta d\phi, \\ dV &= \frac{4\pi a^3 r^2 dr}{\sqrt{1 - kr^2}}, \end{aligned} \quad (1.6.2)$$

onde g é o determinante do tensor métrico de Robertson-Walker. Observe que dV é uma casca esférica de raio ar e espessura $(1 - kr^2)^{-1/2}adr$. Como a densidade numérica sofre efeitos causados pela expansão, temos,

$$n(t) = \frac{a_0^3}{a^3} n(t_0). \quad (1.6.3)$$

Substituindo as equações (1.6.2) e (1.6.3) na equação (1.6.1), obtemos,

$$dN = \frac{4\pi n_0 a_0^3 r^2 dr}{\sqrt{1 - kr^2}}, \quad (1.6.4)$$

integrando a equação acima de 0 (nós) a r_e (coordenada co-móvel da fonte emissora), temos,

$$N(r_e) = 4\pi n_0 a_0^3 \int_0^{r_e} \frac{r^2 dr}{\sqrt{1 - kr^2}}, \quad (1.6.5)$$

que é o número de fontes (galáxias) dentro da esfera de raio $a_0 r_e$, cujo centro se localiza a Via-Láctea (nós). A equação (1.6.4) é a expressão mais geral do diferencial da contagem numérica de galáxias no modelo FLRW.

Considerando $k = 0$ (caso de EdS) na equação acima, temos que,

$$\begin{aligned} N(r_e) &= 4\pi n_0 a_0^3 \int_0^{r_e} r^2 dr, \\ N(r_e) &= \frac{4\pi n_0}{3} (a_0 r_e)^3. \end{aligned} \quad (1.6.6)$$

Substituindo a equação (1.4.4) nesta última, obtemos,

$$N_{EdS} = \frac{4\pi n_0}{3} \left(\frac{2c}{H_0} \right)^3 \left(\frac{1 + z - \sqrt{1 + z}}{1 + z} \right)^3. \quad (1.6.7)$$

Como estamos estudando o caso de EdS, a densidade numérica n_0 (*volume*⁻¹) pode ser dada pela densidade ρ_0 (*massa/volume*), no caso de EdS, dividida pela massa de uma fonte (galáxia), ou seja, pela massa média de repouso de uma galáxia M_g ($\sim 10^{11} M_\odot$). A partir da equação (1.3.10), temos,

$$n_0 = \frac{\rho_0}{M_g} = \frac{\rho_0^{cr}}{M_g} = \frac{3H_0^2}{8\pi M_g G}. \quad (1.6.8)$$

onde G é a constante da gravitação universal de Newton e ρ_0^{cr} a densidade crítica atualmente (ver também a equação 1.2.26). Substituindo a quantidade acima na equação

(1.6.7) obtemos a contagem numérica prevista pelo modelo de EdS (Ribeiro 2005),

$$N_{EdS} = \frac{4c^3}{H_0 M_g G} \left(\frac{1+z - \sqrt{1+z}}{1+z} \right)^3. \quad (1.6.9)$$

Em seguida vamos realizar o cálculo da contagem numérica para o universo com curvatura espacial positiva constante. Considerando $k = 1$ na equação (1.6.4), obtemos,

$$dN = \frac{4\pi n_0 a_0^3 r^2 dr}{\sqrt{1-r^2}}, \quad (1.6.10)$$

Como já havíamos estudado o caso para universo fechado, da equação (1.4.8), temos,

$$r = \text{sen}(\theta_0 - \theta), \quad (1.6.11)$$

assim

$$\left| \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} \right| = |d\theta|. \quad (1.6.12)$$

Substituindo as duas últimas equações na equação (1.6.10), obtemos,

$$dN = 4\pi n_0 a_0^3 \text{sen}^2(\theta_0 - \theta) \left| \frac{d\theta}{dz} \right| dz. \quad (1.6.13)$$

Diferenciando a equação (1.4.10), temos que,

$$\left| \frac{dz}{1+z} \right| = \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta. \quad (1.6.14)$$

Usando as quantidades trigonométricas obtidas na subseção 1.4.2, a equação (1.6.13) resulta em,

$$dN = 4\pi n_0 a_0^3 \frac{(2q_0 - 1)^{3/2}}{q_0^4} \left\{ \frac{[q_0 z + (q_0 - 1)(\sqrt{1 + 2zq_0} - 1)]^2}{(1+z)^3 \sqrt{1 + 2q_0 z}} \right\} dz. \quad (1.6.15)$$

Substituindo a equação (1.3.15) nesta última obtemos uma importante quantidade chamada de contagem diferencial,

$$\frac{dN}{dz} = 4\pi n_0 \left(\frac{c}{H_0} \right)^3 \left\{ \frac{[q_0 z + (q_0 - 1)(\sqrt{1 + 2zq_0} - 1)]^2}{q_0^4 (1 + z)^3 \sqrt{1 + 2q_0 z}} \right\}, \quad (1.6.16)$$

a qual é uma expressão geral para um universo de FLRW. Observe que se assumirmos $k = -1$ na equação (1.6.4), e utilizarmos as quantidades obtidas nas subseções 1.3.3 e 1.4.3, obtemos a mesma contagem diferencial (1.6.16).

A seguir vamos assumir $q_0 = 1/2$ na equação (1.6.16) e em seguida integramos, obtendo,

$$N(z) = \frac{16\pi n_0 c^3}{H_0^3} \int_0^z \frac{(1 + z' - \sqrt{1 + z'})^2}{(1 + z')^{7/2}} dz'. \quad (1.6.17)$$

por meio da mudança de variáveis $1 + z' = x$, conseguimos integrar a equação acima. Retornando as variáveis originais obtemos,

$$N(z) = \frac{16\pi n_0 c^3}{H_0^3} \left[-2(1 + z')^{-1/2} + 2(1 + z')^{-1} - \frac{2}{3}(1 + z')^{-3/2} \right] \Big|_0^z, \\ N(z) = \frac{32\pi n_0 c^3}{3H_0^3} \left(\frac{1 + z - \sqrt{1 + z}}{1 + z} \right)^3. \quad (1.6.18)$$

Observe que substituindo a constante (1.6.8) na equação acima obtemos a mesma contagem (1.6.9), o que era nosso objetivo, a partir da contagem no modelo FLRW podemos obter a contagem de EdS.

1.6.2 Densidades Diferenciais

Em seguida iremos definir duas outras funções importantes, a densidade diferencial γ_i e a densidade diferencial integral γ_i^* (Wertz 1970, 1971; ver também Ribeiro 2005). A primeira é definida por,

$$\gamma_i = \frac{1}{S_i} \frac{dN_i}{d(d_i)}, \quad (1.6.19)$$

onde o índice i indica as quatro distâncias cosmológicas ($i = A, G, L, z$). A equação acima é o diferencial da contagem numérica em função da distância cosmológica, dividida pela área superficial da esfera de raio d_i , onde esta última é dada por,

$$S_i = 4\pi(d_i)^2. \quad (1.6.20)$$

A densidade diferencial integral γ_i^* é definida por,

$$\gamma_i^* = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \gamma_i(d_i) dV_i, \quad (1.6.21)$$

onde V_i é o volume da esfera de raio d_i , tal que,

$$V_i = \frac{4}{3}\pi(d_i)^3. \quad (1.6.22)$$

Como é de nosso interesse trabalhar com a variável z , as equações (1.6.19) e (1.6.21) podem ser reescritas da seguinte maneira,

$$\gamma_i(z) = \frac{dN_i}{dz} \left[S_i \frac{d(d_i)}{dz} \right]^{-1}, \quad (1.6.23)$$

$$\gamma_i^*(z) = \frac{1}{V_i} \int_0^z \gamma_i(z') \frac{dV_i}{dz'} dz'. \quad (1.6.24)$$

Na equação (1.6.23) aparece uma quantidade muito medida pelos catálogos de galáxias: a contagem diferencial dN_i/dz , já discutida nesta seção (ver também a equação 1.6.16). Observamos na definição de γ_i^* (1.6.21) que nos referimos a média integrada da densidade diferencial. Vamos mostrar em seguida que a densidade diferencial integral é equivalente a densidade numérica média $\langle n \rangle$, onde esta última é definida por,

$$\langle n \rangle = \frac{1}{V} \int dN = \frac{1}{V} \int n dV. \quad (1.6.25)$$

Como $n = N/V$, temos que $dN = n dV$. Substituindo a definição de γ_i (1.6.19) na definição de γ_i^* (1.6.21) e em seguida considerando dV_i como sendo uma casca esférica de espessura infinitesimal $d(d_i)$ e área superficial S_i , $dV_i = S_i d(d_i)$, obtemos,

$$\gamma_i^* = \frac{1}{V_i} \int \frac{1}{S_i} \frac{dN_i}{d(d_i)} dV_i, \quad (1.6.26)$$

logo

$$\gamma_i^* = \frac{1}{V_i} \int dN_i, \quad (1.6.27)$$

que pode ser generalizada à importante relação,

$$\gamma^* = n = \frac{N}{V}. \quad (1.6.28)$$

Assim, a densidade diferencial integral não é nada mais que uma densidade numérica média.

1.7 Modelo Hierárquico de Pietronero-Wertz

Queremos deixar bem claro que este trabalho não tem como objetivo contrariar o modelo cosmológico padrão ou sugerir um novo modelo cosmológico. Nossas pretensões são mais simples, onde procuramos mostrar que nossos resultados estão de acordo com o modelo cosmológico padrão. Esta seção tem como objetivo explicar de maneira breve como se obteve a contagem numérica sugerida por Pietronero - que adotaremos ao longo do trabalho -, mas, para isso, precisamos explicar o que é o modelo hierárquico (fractal) de Pietronero-Wertz.

Esse modelo surgiu de uma discussão antiga sobre a homogeneidade da distribuição de matéria do Universo, onde a grande maioria dos cientistas da área adotam o Princípio Cosmológico (seção 1.1), o qual assume homogeneidade e isotropia da distribuição de matéria. Mas, sempre houve aqueles que questionaram essa homogeneidade, como Giordano Bruno (1548–1600), Immanuel Kant (1724–1804), Pierre de Laplace (1749–1827), assim como G. W. Leibniz (1646–1716), que se opôs a Newton a respeito da homogeneidade do Universo. Recentemente, Mandelbrot (1977, 1983) e Pietronero (1987), propuseram que os velhos conceitos hierárquicos - que existem desde Anaxágoras e Ptolomeu (um dos últimos é de Charlier 1908, 1922) - não são nada mais do que a afirmação de que a matéria deve ser distribuída de acordo com um padrão (ou forma) fractal. Wertz (1970, 1971) obteve conclusões parecidas, mas seu trabalho passou despercebido até recentemente.

Nos anos 90, Ribeiro (1992*a, b*, 1993, 1994, 1995) mostrou um novo ponto de vista desse assunto, propondo que a resposta para o problema da identificação observacional da uniformidade da distribuição de matéria pode estar na interpretação relativística dos modelos. Ribeiro (1995) obteve que através do modelo de EdS a homogeneidade espacial pode somente ser observada se analisarmos, isoladamente, a distribuição de matéria nos folheamentos de tipo-espaço, conjecturando que a estrutura fractal observada pode ser um efeito observacional. Mas, como as observações astronômicas são sempre feitas ao longo

do cone de luz do passado, isso significa que a hipótese fractal (ou hierárquica) para a distribuição de matéria pode não contrariar o Princípio Cosmológico. A dificuldade desse problema está na observação, pois nossos telescópios observam a distribuição de matéria ao longo do cone de luz do passado, em diferentes tempos, onde nossa linha de visada é cortada por muitos folheamentos tipo-espaço.

A dimensão fractal D derivou da dimensão de similaridade e da dimensão de Hausdorff-Besicovitch. Não é de nosso interesse extendermo-nos a respeito da origem da dimensão fractal, caso o leitor se interesse, pode recorrer à Ribeiro & Miguelote (1998) ou Sylos-Labini, Montuori & Pietronero (1998).

Pietronero (1987) e Wertz (1970) usaram a dimensão fractal^{††} como ferramenta para estudar a uniformidade da distribuição de galáxias. A contagem numérica sugerida^{‡‡}, grosso modo, por Pietronero e Wertz é dada por,

$$N_i = (Bd_i)^D, \quad (1.7.1)$$

onde B é uma constante que iremos calcular no próximo capítulo, d_i a distância cosmológica, D a dimensão fractal e o índice i indica as quatro distâncias cosmológicas ($i = A, G, L, z$). Em um meio tridimensional, $D = 3$ implica que a distribuição de pontos (no nosso caso a distribuição de galáxias) é homogênea, $D > 3$ não tem sentido geométrico ou que a distribuição de pontos não possui padrão fractal e $D < 3$ implica na inhomogeneidade, ou mais precisamente, $D < 3$ indica uma “taxa” de inhomogeneidade: quanto menor a quantidade D , maior será a inhomogeneidade. Em meios bidimensional e unidimensional, $D = 2$ e $D = 1$, respectivamente, indicam a homogeneidade.

1.8 Definição das Homogeneidades Espacial e Observacional

Esta seção tem o objetivo de definir as homogeneidades espacial e observacional da distribuição de galáxias, conceitos os quais são o título desta dissertação. Precisamos definir antes a densidade local $\rho(t)$, a qual é a densidade de galáxias em uma hiper-

^{††}Wertz (1970) não usou na sua tese em nenhum momento a palavra fractal. O que ele chamou como análogo a dimensão fractal foi a taxa de afinamento (*thinning rate*), que no nosso caso é a dimensão fractal menos três ($D - 3$).

^{‡‡}Pietronero (1987) e Wertz (1970) chamaram a equação (1.7.1) de *relação generalizada massa-comprimento*. Daqui em diante chamaremos essa relação de contagem de Pietronero.

superfície de tipo-espacial, ou seja, é a densidade de uma superfície com três dimensões espaciais. A densidade local é dependente do tempo e aparece do lado direito da equação de campo de Einstein.

- Homogeneidade Espacial (HE): significa que a densidade local $\rho(t)$ de galáxias é constante em cada hiper-superfície de tipo-espacial, ou seja, as galáxias são uniformemente distribuídas em cada folheamento de tempo constante do espaço-tempo. Esses folheamentos (superfícies do espaço quadri-dimensional) cortam o cone de luz do passado. Observe que há HE mesmo quando as densidades locais das hiper-superfícies forem diferentes entre si. A homogeneidade espacial é matematicamente definida por,

$$\rho_{TC} = \text{constante}, \quad (1.8.1)$$

onde o índice TC indica que a análise está sendo feita em uma superfície de “tempo constante”.

- Homogeneidade Observacional (HO): significa que é constante a densidade de galáxias na hiper-superfície de tipo-nulo, ou seja, as galáxias são uniformemente distribuídas no cone de luz. A HO indica que a densidade numérica média de galáxias em todo o Universo observado é constante. Note que estamos enxergando a distribuição de galáxias ao longo do nosso cone de luz, em diferentes tempos, onde nossa linha de visada é cortada por diversas superfícies tipo-espacial. Observe que poderia haver HO mesmo se as densidades locais de cada hiper-superfície tipo-espaço não fossem constantes. A definição matemática da homogeneidade observacional é dada por,

$$\langle n \rangle = \gamma^* = \langle \rho_{CL} \rangle = \text{constante}, \quad (1.8.2)$$

onde o índice CL indica que esta quantidade está definida no “cone de luz”.

Percebe-se que é possível teoricamente haver quatro situações de homogeneidades para o Universo, 1^a com HE e com HO, 2^a com HE e sem HO, 3^a sem HE e com HO, 4^a sem HE e sem HO. Como o Princípio Cosmológico prevê a homogeneidade espacial (ver seção 1.8) e alguns autores sustentam que as observações não mostram a homogeneidade da distribuição de matéria, defendemos que a segunda opção mencionada acima é a que descreve melhor o Universo observado. O Modelo Cosmológico Padrão e as observações mostram

que a densidade de galáxias variou ao longo do tempo, não podendo haver HO, pois estamos observando o Universo em diferentes momentos. Esses dois tipos de homogeneidades surgem da relatividade geral, pois na relatividade Newtoniana não há distinção entre elas. A figura 1.3 mostra onde se localizam as homogeneidades espacial e observacional no cone de luz.

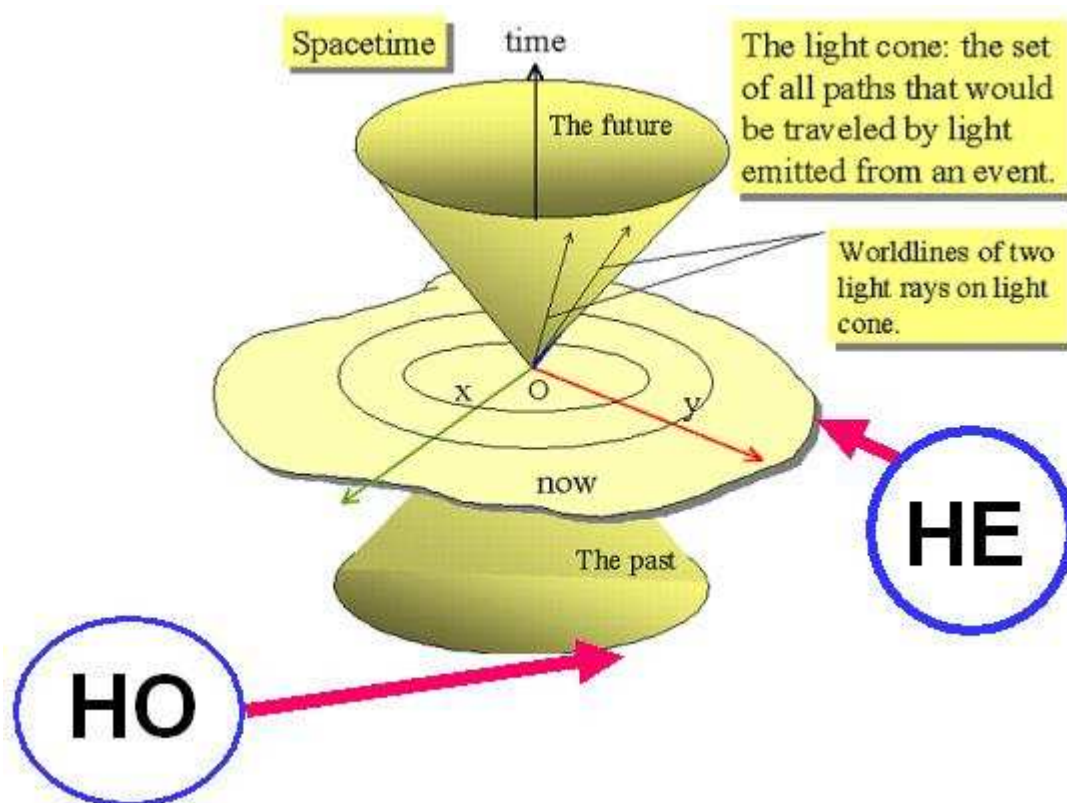


Figura 1.3: Esta figura mostra onde as homogeneidades espacial (HE) e observacional (HO) se localizam no cone de luz. A análise de HE é feita nos planos (folheamento) que cortam transversalmente o cone, mas a figura mostra apenas o plano que nós nos localizamos atualmente. A análise de HO é feita no cone de luz do passado.

Capítulo 2

Contagens Numéricas e Densidades Diferenciais Simuladas no Modelo de Einstein-de Sitter

O objetivo deste capítulo é obtermos a contagem numérica de fontes N_i e em seguida, através da primeira, calcular as densidades diferenciais γ_i e γ_i^* . Usaremos a contagem (1.7.1) proposta por Pietronero como simulação do Universo observado. Aqui iremos deixar indicada a dimensão fractal D , embora no próximo capítulo estudaremos os casos específicos para ela.

2.1 Contagens Numéricas

Nesta seção iremos apenas escrever a contagem proposta por Pietronero (1.7.1) em termos das quatro distâncias observacionais que adotamos. Reescrevendo as quatro distâncias observacionais no modelo EdS - equações (1.5.7), (1.5.13), (1.5.19) e (1.5.25) - que usaremos ao longo do trabalho, temos,

$$d_A(z) = \frac{2c}{H_0} \left[\frac{1+z - \sqrt{1+z}}{(1+z)^2} \right], \quad (2.1.1)$$

$$d_G(z) = \frac{2c}{H_0} \left(\frac{1+z - \sqrt{1+z}}{1+z} \right), \quad (2.1.2)$$

$$d_L(z) = \frac{2c}{H_0} (1+z - \sqrt{1+z}), \quad (2.1.3)$$

$$d_z(z) = \frac{2c}{H_0} \left(\frac{z}{2} \right). \quad (2.1.4)$$

Reescrevendo, respectivamente, a contagem prevista pelo modelo EdS (1.6.9) e a contagem de Pietronero (1.7.1), temos,

$$N_{EdS} = \frac{4c^3}{H_0 M_g G} \left(\frac{1+z-\sqrt{1+z}}{1+z} \right)^3, \quad (2.1.5)$$

$$N_i = (Bd_i)^D, \quad (2.1.6)$$

onde D é a dimensão fractal, o índice i indica as quatro distâncias cosmológicas ($i = A, G, L, z$) e B é uma constante que iremos obter no final deste capítulo. Substituindo as quatro distâncias cosmológicas na última equação, obtemos

$$N_A^{(D)}(z) = \left(\frac{2cB}{H_0} \right)^D \left[\frac{1+z-\sqrt{1+z}}{(1+z)^2} \right]^D, \quad (2.1.7)$$

$$N_G^{(D)}(z) = \left(\frac{2cB}{H_0} \right)^D \left(\frac{1+z-\sqrt{1+z}}{1+z} \right)^D, \quad (2.1.8)$$

$$N_L^{(D)}(z) = \left(\frac{2cB}{H_0} \right)^D \left(1+z-\sqrt{1+z} \right)^D, \quad (2.1.9)$$

$$N_z^{(D)}(z) = \left(\frac{2cB}{H_0} \right)^D \left(\frac{z}{2} \right)^D. \quad (2.1.10)$$

onde o índice (D) além de indicar que é para a dimensão fractal D (onde nos próximos capítulo usaremos $D = 2, 3$), indica também que essa expressão é oriunda da contagem de Pietronero (2.1.6). Acrescentamos esse índice para diferenciar com as expressões oriundas da contagem de EdS (2.1.5), onde nesse caso acrescentaremos o índice (EdS).

As quatro expressões acima são as contagens de Pietronero para as quatro distâncias cosmológicas que estamos trabalhando em função do desvio para o vermelho z e em termos da dimensão fractal D . Essas expressões fornecem contagens simuladas no modelo de EdS, e a partir delas será feita a análise das densidades diferenciais. Observe que a equação (2.1.5) é a contagem prevista pelo modelo de Einstein-de Sitter e as quatro contagens numéricas acima simulam contagens no modelo de EdS, pois elas usam as expressões de distâncias do modelo de EdS, dadas pelas expressões de (2.1.1) a (2.1.4).

2.2 Cálculo das Densidades Diferenciais

Nesta seção pretendemos obter as expressões das densidades diferenciais $\gamma_i^{(D)}$ e $\gamma_i^{(EdS)}$ para as quatro distâncias cosmológicas d_i em função do desvio para o vermelho z . As densidades

diferenciais $\gamma_i^{(D)}$ são obtidas a partir da contagem de Pietronero (2.1.6). As densidades diferenciais $\gamma_i^{(EdS)}$ são obtidas a partir da contagem (2.1.5) prevista pelo modelo de EdS. Reescrevendo a definição (1.6.19) de γ_i , temos,

$$\gamma_i = \frac{1}{S_i} \frac{dN_i}{d(d_i)}. \quad (2.2.1)$$

Para obtermos $\gamma_i^{(D)}(d_i)$, precisamos substituir a contagem de Pietronero (2.1.6) e a área superficial (1.6.20) na definição acima, tal que,

$$\gamma_i^{(D)}(d_i) = \frac{DB^D}{4\pi} d_i^{D-3}, \quad (2.2.2)$$

ou seja, esta expressão fornece a densidade diferencial oriunda da contagem de Pietronero (2.1.6) em função de qualquer distância cosmológica d_i e da dimensão fractal D . Substituindo as quatro distâncias (2.1.1) a (2.1.4) na equação acima, temos que,

$$\gamma_A^{(D)}(z) = \frac{DH_0^3}{32\pi c^3} \left(\frac{2cB}{H_0} \right)^D \left[\frac{1+z-\sqrt{1+z}}{(1+z)^2} \right]^{D-3}, \quad (2.2.3)$$

$$\gamma_G^{(D)}(z) = \frac{DH_0^3}{32\pi c^3} \left(\frac{2cB}{H_0} \right)^D \left(\frac{1+z-\sqrt{1+z}}{1+z} \right)^{D-3}, \quad (2.2.4)$$

$$\gamma_L^{(D)}(z) = \frac{DH_0^3}{32\pi c^3} \left(\frac{2cB}{H_0} \right)^D \left(1+z-\sqrt{1+z} \right)^{D-3}, \quad (2.2.5)$$

$$\gamma_z^{(D)}(z) = \frac{DH_0^3}{32\pi c^3} \left(\frac{2cB}{H_0} \right)^D \left(\frac{z}{2} \right)^{D-3}. \quad (2.2.6)$$

As quatro últimas equações são as densidades diferenciais oriundas da contagem de Pietronero (2.1.6) para as quatro distâncias cosmológicas em função do desvio para o vermelho z e da dimensão fractal D . Observe que as equações acima são simulações no universo de EdS, pois usamos as distâncias dadas pelas equações de (2.1.1) e (2.1.4).

A seguir vamos obter as densidades diferenciais $\gamma_i^{(EdS)}$ oriundas da contagem de Einstein-de Sitter (2.1.5). Neste caso a equação (2.2.1) resulta em,

$$\gamma_i^{(EdS)} = \frac{dN_{EdS}}{dz} \left[S_i \frac{d(d_i)}{dz} \right]^{-1}, \quad (2.2.7)$$

onde,

$$\frac{dN_{EdS}}{dz} = \frac{6c^3}{H_0 M_g G} \left[\frac{(1+z - \sqrt{1+z})^2}{(1+z)^{7/2}} \right], \quad (2.2.8)$$

$$\frac{d(d_A)}{dz} = \frac{2c}{H_0} \left[\frac{3 - 2\sqrt{1+z}}{2(1+z)^{5/2}} \right], \quad (2.2.9)$$

$$\frac{d(d_G)}{dz} = \frac{2c}{H_0} \left[\frac{1}{2(1+z)^{3/2}} \right], \quad (2.2.10)$$

$$\frac{d(d_L)}{dz} = \frac{2c}{H_0} \left(\frac{2\sqrt{1+z} - 1}{2\sqrt{1+z}} \right), \quad (2.2.11)$$

$$\frac{d(d_z)}{dz} = \frac{2c}{H_0} \left(\frac{1}{2} \right), \quad (2.2.12)$$

onde obtivemos dN_{EdS}/dz na equação (1.6.17).

Substituindo as equações (1.6.20) e (2.2.8) na equação (2.2.7), obtemos,

$$\gamma_i^{(EdS)}(z) = \frac{3c^3}{2\pi H_0 M_g G} \left[\frac{(1+z - \sqrt{1+z})^2}{(1+z)^{7/2}} \right] \left[d_i^2 \frac{d(d_i)}{dz} \right]^{-1}. \quad (2.2.13)$$

A expressão acima fornece a densidade diferencial oriunda da contagem de EdS em função de qualquer distância cosmológica d_i . Substituindo as equações de (2.2.9) a (2.2.12) e as equações de (2.1.1) a (2.1.4) nesta última, obtemos,

$$\gamma_A^{(EdS)}(z) = \frac{3H_0^2}{8\pi M_g G} \left[\frac{(1+z)^3}{(3 - 2\sqrt{1+z})} \right], \quad (2.2.14)$$

$$\gamma_G^{(EdS)}(z) = \frac{3H_0^2}{8\pi M_g G}, \quad (2.2.15)$$

$$\gamma_L^{(EdS)}(z) = \frac{3H_0^2}{8\pi M_g G} \left[\frac{1}{(2\sqrt{1+z} - 1)(1+z)^3} \right], \quad (2.2.16)$$

$$\gamma_z^{(EdS)}(z) = \frac{3H_0^2}{8\pi M_g G} \left[\frac{4(1+z - \sqrt{1+z})^2}{z^2(1+z)^{7/2}} \right]. \quad (2.2.17)$$

As quatro últimas equações são as densidades diferenciais oriundas da contagem numérica prevista pelo modelo de Einstein-de Sitter (2.1.5) para as quatro distâncias cosmológicas em função do desvio para o vermelho z . Essas quatro descrevem uma distribuição de matéria homogênea espacialmente, porque o modelo de EdS assume o Princípio Cosmológico.

2.3 Cálculo das Densidades Diferenciais Integrais

Nesta seção pretendemos obter as expressões das densidades diferenciais integrais $\gamma_i^{*(D)}$ e $\gamma_i^{*(EdS)}$ para as quatro distâncias cosmológicas d_i em função do desvio para o vermelho z . As densidades diferenciais integrais $\gamma_i^{*(D)}$ são obtidas a partir da contagem de Pietronero (2.1.6) e as densidades diferenciais integrais $\gamma_i^{*(EdS)}$ são obtidas a partir da contagem (2.1.5) prevista pelo modelo de EdS. Reescrevendo a definição (1.6.21) de γ_i^* , temos,

$$\gamma_i^* = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \gamma_i(d_i) dV_i. \quad (2.3.1)$$

Para obtermos $\gamma_i^{*(D)}$, precisamos substituir as equações (1.6.22) e (2.2.2) na definição acima, obtendo,

$$\begin{aligned} \gamma_i^{*(D)}(d_i) &= \frac{3}{4\pi d_i^3} \int_0^{d_i} \frac{DB^D}{4\pi} d_i'^{D-3} 4\pi d_i'^2 d(d_i'), \\ \gamma_i^{*(D)}(d_i) &= \frac{3}{4\pi} B^D d_i^{D-3}, \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

sendo esta última a densidade diferencial integral em função de qualquer uma das quatro distâncias observacionais que adotamos. Observe que se usarmos a definição (1.6.28), $\gamma^* = N/V$, obteríamos a mesma expressão acima. Substituindo as quatro distâncias cosmológicas, equações de (2.1.1) a (2.1.4), nesta última, obtemos,

$$\gamma_A^{*(D)}(z) = \frac{3H_0^3}{32\pi c^3} \left(\frac{2cB}{H_0} \right)^D \left[\frac{1+z-\sqrt{1+z}}{(1+z)^2} \right]^{D-3}, \quad (2.3.3)$$

$$\gamma_G^{*(D)}(z) = \frac{3H_0^3}{32\pi c^3} \left(\frac{2cB}{H_0} \right)^D \left(\frac{1+z-\sqrt{1+z}}{1+z} \right)^{D-3}, \quad (2.3.4)$$

$$\gamma_L^{*(D)}(z) = \frac{3H_0^3}{32\pi c^3} \left(\frac{2cB}{H_0} \right)^D \left(1+z-\sqrt{1+z} \right)^{D-3}, \quad (2.3.5)$$

$$\gamma_z^{*(D)}(z) = \frac{3H_0^3}{32\pi c^3} \left(\frac{2cB}{H_0} \right)^D \left(\frac{z}{2} \right)^{D-3}, \quad (2.3.6)$$

que são as densidades diferenciais integrais oriundas da contagem numérica proposta por Pietronero (2.1.6) para as quatro distâncias cosmológicas d_i em função do desvio para o vermelho z e da dimensão fractal D .^{*} Observe que as equações acima são simulações no universo de EdS, pois usamos as distâncias dadas pelas equações de (2.1.1) a (2.1.4).

Comparando as equações (2.2.2) e (2.3.2), obtemos a importante relação entre a den-

^{*}No Apêndice B, são desenvolvidos os cálculos para obter γ_L^* (equação 2.3.5) e γ_z^* (equação 2.3.6) partindo da equação (1.6.24), onde essa definição de γ_i^* depende diretamente de z .

sidade diferencial e a densidade diferencial integral oriundas da contagem de Pietronero (2.1.6),

$$\gamma_i^{*(D)} = \frac{3}{D} \gamma_i^{(D)}. \quad (2.3.7)$$

Observando as equações (2.2.2) e (2.3.2) notamos que γ e γ^* são constantes e iguais para $D = 3$, o que era esperado pois como vimos na seção 1.7 (página 34) $D = 3$ representa a homogeneidade da distribuição de fontes cosmológicas (no nosso caso galáxias).

A seguir vamos obter as densidades diferenciais integrais $\gamma_i^{*(EdS)}$ oriundas da contagem de EdS (2.1.5). Como vimos nas equações (1.6.28) e (2.3.2), a densidade diferencial integral também é definida por $\gamma_i^* = N_i/V_i$, então,

$$\gamma_i^{*(EdS)} = \frac{N_{EdS}}{V_i}, \quad (2.3.8)$$

logo,

$$\gamma_i^{*EdS}(z) = \frac{3H_0^2}{8\pi M_g G} \left[\frac{H_0}{2c} d_i(z) \right]^{-3} \left(\frac{1+z-\sqrt{1+z}}{1+z} \right)^3. \quad (2.3.9)$$

A expressão acima fornece a densidade diferencial integral oriunda da contagem numérica prevista pelo modelo de Einstein-de Sitter em função de qualquer distância cosmológica d_i . Note-se também que se tivéssemos partido da definição (2.3.1) obteríamos a equação acima.

Substituindo as equações de (2.1.1) a (2.1.4) na equação acima obtemos,

$$\gamma_A^{*(EdS)}(z) = \frac{3H_0^2}{8\pi M_g G} (1+z)^3, \quad (2.3.10)$$

$$\gamma_G^{*(EdS)}(z) = \frac{3H_0^2}{8\pi M_g G}, \quad (2.3.11)$$

$$\gamma_L^{*(EdS)}(z) = \frac{3H_0^2}{8\pi M_g G} (1+z)^{-3}, \quad (2.3.12)$$

$$\gamma_z^{*(EdS)}(z) = \frac{3H_0^2}{8\pi M_g G} \left[\frac{2(1+z-\sqrt{1+z})}{z(1+z)} \right]^3. \quad (2.3.13)$$

As quatro últimas equações são as densidades diferenciais integrais oriundas da contagem numérica prevista pelo modelo de Einstein-de Sitter (2.1.5) para as quatro distâncias

cosmológicas d_i em função do desvio para o vermelho z . Essas quatro expressões descrevem distribuições de matéria espacialmente homogênea, pois o modelo de EdS assume o Princípio Cosmológico. Observe que $\gamma_G^{*(EdS)}$ (equação 2.3.11) é constante, isso implica que a distribuição de matéria dada pela densidade $\gamma_G^{*(EdS)}$ além de ser espacialmente homogênea, ela também é HO, pois conforme a seção 1.8, $\gamma^* = \text{constante}$ implica na homogeneidade observacional), com isso podemos obter a constante B , pois $\gamma_G^{*(D=3)}$ também implica na HO (conforme página 34). Assumindo $D = 3$ na equação (2.3.4), obtemos,

$$\frac{3H_0^3}{32\pi c^3} \left(\frac{2cB}{H_0} \right)^3 = \frac{3B^3}{4\pi}. \quad (2.3.14)$$

Igualando a equação acima com a equação (2.3.11) obtemos que a constante B é dada por,

$$B = \left(\frac{H_0^2}{2M_g G} \right)^{1/3}. \quad (2.3.15)$$

Me baseei em Ribeiro (2005) para obter as equações de (2.2.14) a (2.2.17) e de (2.3.10) a (2.3.13).

Capítulo 3

Estudo dos Casos com e sem Homogeneidade Observacional

Neste capítulo estudaremos o comportamento de N_i , γ_i e γ_i^* em função do desvio para o vermelho z para o caso cuja contagem de Pietronero (contagem simulada baseada na relação generalizada número-distância) gera homogeneidade observacional ($D = 3$) e um outro caso no qual esta expressão não gera HO ($D = 2$). Procuraremos discutir também se há ou não homogeneidade espacial nesses casos.

3.1 Caso com homogeneidade observacional

Para analisarmos a contagem numérica, consideramos $D = 3$ nas contagens simuladas dadas pelas expressões (2.1.7) a (2.1.10), usando o valor da constante B (equação 2.3.15), tal que,

$$N_A^{(3)}(z) = \frac{4c^3}{H_0 M_g G} \left[\frac{1+z-\sqrt{1+z}}{(1+z)^2} \right]^3, \quad (3.1.1)$$

$$N_G^{(3)}(z) = \frac{4c^3}{H_0 M_g G} \left(\frac{1+z-\sqrt{1+z}}{1+z} \right)^3, \quad (3.1.2)$$

$$N_L^{(3)}(z) = \frac{4c^3}{H_0 M_g G} \left(1+z-\sqrt{1+z} \right)^3, \quad (3.1.3)$$

$$N_z^{(3)}(z) = \frac{4c^3}{H_0 M_g G} \left(\frac{z}{2} \right)^3. \quad (3.1.4)$$

Vimos através da discussão feita nas seções 1.7 e 1.8 e no capítulo 2, que as quatro contagens acima implicam em uma contagem numérica observacionalmente homogênea (ver página 34). Como estamos trabalhando com o modelo de EdS para as expressões

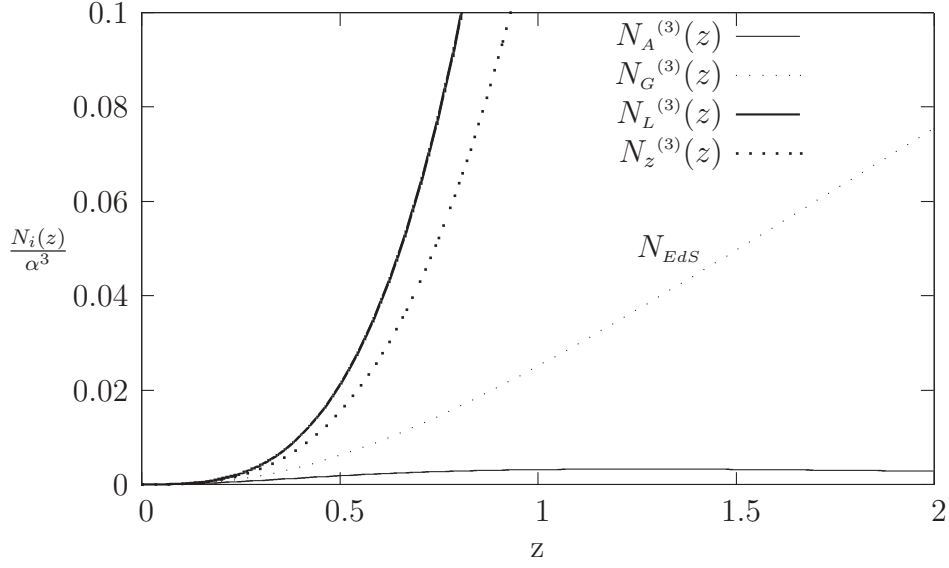


Figura 3.1: Comportamento das contagens numéricas simuladas via a contagem de Pietronero (N_i/α^3) em função do desvio para o vermelho z para o caso de HO ($D = 3$), com escalas próximas da origem, no modelo EdS. A contagem α é definida na equação (3.1.5) abaixo.

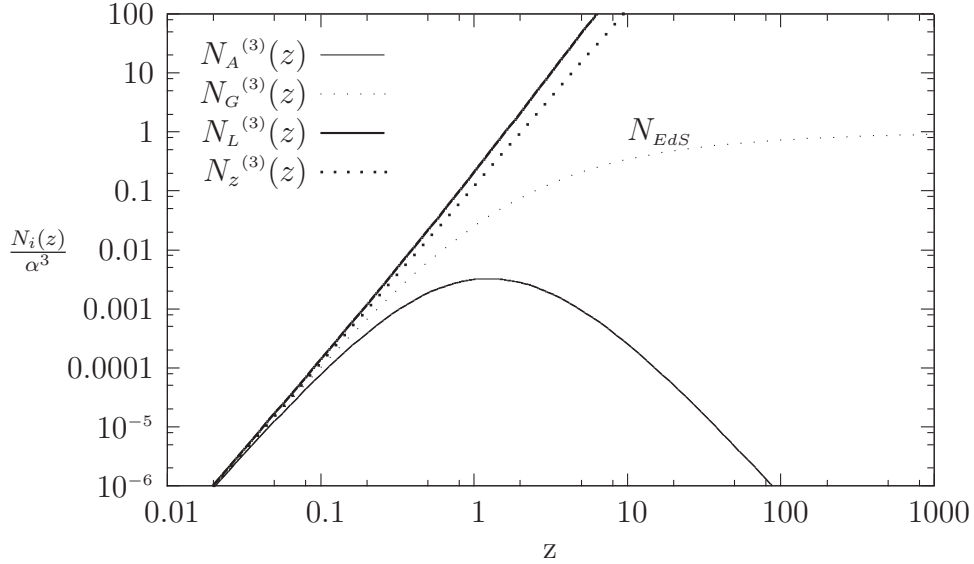


Figura 3.2: Comportamento das contagens numéricas simuladas via a contagem de Pietronero (N_i/α^3) em função do desvio para o vermelho z para o caso de HO ($D = 3$), em grandes escalas, no modelo EdS.

das distâncias cosmológicas, isso significa que a contagem dada pela expressão (2.1.5) é HE, então, dentre as contagens acima a única *espacialmente* homogênea é $N_G^{(3)}$, pois é

a única que coincide com a contagem oriunda do modelo de EdS. Os gráficos das figuras 3.1 e 3.2 mostram que $N_A^{(3)}$ possui uma contagem inferior em relação a contagem dada pelo modelo de EdS. Assim, para termos uma distribuição de galáxias espacialmente homogênea a contagem numérica de galáxias teria que ser maior do que a dada pela contagem $N_A^{(3)}$. Já $N_L^{(3)}$ e $N_z^{(3)}$, conforme as expressões (3.1.3) e (3.1.4), possuem contagens superiores em relação a N_{EdS} , ou seja, teríamos que observar uma contagem menor de galáxias para obtermos HE. Note na figura 3.2 que N_{EdS} e $N_A^{(3)}$ tendem, respectivamente, a $\alpha^3 = 3.57951 \times 10^{12}$ e a zero para $z \rightarrow \infty$, pois as duas expressões podem ser dadas por $N_{EdS} = \alpha^3[1 - (1+z)^{-1/2}]^3$ e $N_A^{(3)} = \alpha^3[(1+z)^{-1} - (1+z)^{-3/2}]^3$, sendo de maneira direta a obtenção dos limites. Para construirmos os gráficos de $N_i(z)$ com homogeneidade observacional ($D = 3$), figuras 3.1 e 3.2, foi necessário definir a constante adimensional α como sendo o termo constante das equações de (3.1.1) a (3.1.4), e em seguida calcular quantitativamente o valor de α e α^3 , tal que,

$$\alpha = \left(\frac{4c^3}{H_0 M_g G} \right)^{1/3}. \quad (3.1.5)$$

Retiramos os valores das constantes c , G e M_\odot (onde $M_g \sim 10^{11} M_\odot$) de Cox (2000), tal que,

$$\alpha = \left(\frac{2.50565682823}{h} \right)^{1/3} \times 10^4. \quad (3.1.6)$$

Considerando parâmetro adimensional de Hubble $h = 0.7$ na última equação, obtemos,

$$\alpha = 15297. \quad (3.1.7)$$

ou,

$$\alpha^3 = 3.57951 \times 10^{12}. \quad (3.1.8)$$

Iremos agora proceder com as análises para a densidade diferencial e a densidade diferencial integral. Assumindo $D = 3$ nas equações (2.3.3) a (2.3.6) e (2.3.10) a (2.3.13), obtemos o mesmo resultado nas oito expressões,

$$\gamma_i^{(3)} = \gamma_i^{*(3)} = \frac{3H_0^2}{8\pi M_g G} = \frac{\rho_0^{cr}}{M_g} = \langle n \rangle, \quad (3.1.9)$$

onde ρ_0^{cr} é a densidade crítica hoje medida no nosso referencial e o índice (3) indica que

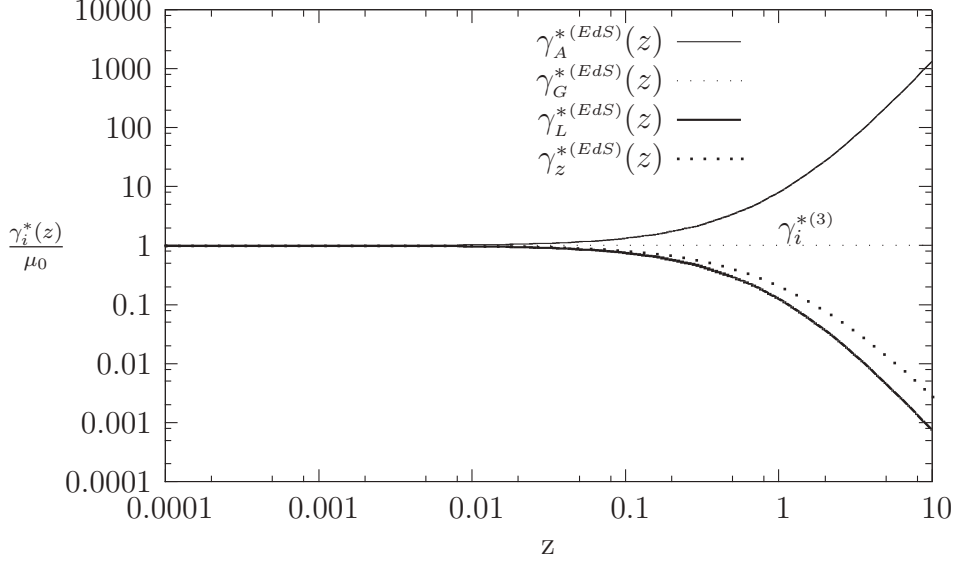


Figura 3.3: Comportamento das densidades diferenciais integrais ($\gamma_i^{*(EdS)}(z)/\mu_0$) em função do desvio para o vermelho z para o caso com homogeneidade espacial, pois $\gamma_i^{*(EdS)}$ é oriunda da contagem numérica prevista no modelo de EdS. A constante μ_0 é definida pela equação (3.1.10). Note que as quatro densidades observacionalmente homogêneas $\gamma_i^{*(3)}(z)$ são constante e iguais a μ_0 .

o cálculo foi feito para $D = 3$. Era esperado que as oito expressões de densidades diferenciais resultassem iguais a média da densidade numérica $\langle n \rangle$ na última equação, porque como já vimos no capítulo anterior e na equação (1.8.2), $D = 3$ implica na homogeneidade observacional, e conseqüentemente $D = 3$ implica também na constância de $\gamma_i^{*(3)}$. Além disso, conforme a equação (2.3.7), $\gamma_i^{(3)}$ também torna-se constante. Para construirmos os gráficos de $\gamma_i^*(z)$ (dados pelas equações de 2.3.10 a 2.3.13 e 3.1.9) na figura 3.3 foi necessário definir a constante μ_0 como sendo a expressão constante dada pela equação (3.1.9),

$$\mu_0 = \frac{3H_0^2}{8\pi M_g G}, \quad (3.1.10)$$

3.2 Caso sem homogeneidade observacional

Conforme Ribeiro & Miguelote (1998), os catálogos de galáxias mediram dimensão fractal D da distribuição de galáxias entre $1.5 \leq D \leq 2.3$. Com isso, nesta seção estudaremos o caso $D = 2$, porque acreditamos descrever razoavelmente bem a realidade observada.

Assumindo $D = 2$ nas contagens dadas pelas expressões de (2.1.7) a (2.1.10) e usando a constante B (equação 2.3.15), obtemos,

$$N_A^{(2)}(z) = \left(\frac{4c^3}{H_0 M_g G} \right)^{2/3} \left[\frac{1+z-\sqrt{1+z}}{(1+z)^2} \right]^2, \quad (3.2.1)$$

$$N_G^{(2)}(z) = \left(\frac{4c^3}{H_0 M_g G} \right)^{2/3} \left(\frac{1+z-\sqrt{1+z}}{1+z} \right)^2, \quad (3.2.2)$$

$$N_L^{(2)}(z) = \left(\frac{4c^3}{H_0 M_g G} \right)^{2/3} \left(1+z-\sqrt{1+z} \right)^2, \quad (3.2.3)$$

$$N_z^{(2)}(z) = \left(\frac{4c^3}{H_0 M_g G} \right)^{2/3} \left(\frac{z}{2} \right)^2. \quad (3.2.4)$$

Notamos nas quatro equações acima que além dessas contagens não descreverem uma distribuição observacionalmente uniforme de galáxias, elas tampouco descrevem uma contagem de galáxias espacialmente homogênea, pois nenhuma delas coincide com a contagem do modelo de EdS, conforme a equação (2.1.5). Na figura 3.4, as quatro contagens ($N_A^{(2)}$, $N_G^{(2)}$, $N_L^{(2)}$ e $N_z^{(2)}$) possuem contagens inferiores em relação a N_{EdS} entre $10^{-4} \lesssim z \lesssim 10^2$. As contagens de galáxias nesse intervalo teriam que ser maiores para obtermos HE. Note que para $z \approx 100$ e $z \approx 200$ as contagens $N_z^{(2)}$ e $N_L^{(2)}$ são, respectivamente, praticamente iguais ao do modelo de EdS. As contagens $N_z^{(2)}$ e $N_L^{(2)}$ são maiores que a contagem do modelo de EdS para $z \gtrsim 100$, ou seja, precisaríamos ter menos galáxias para verificar a homogeneidade espacial. Observe que $N_G^{(2)}$ e N_{EdS} tendem para valores constantes quando $z \rightarrow \infty$, resultando em $N_G^{(2)} = \alpha^2 = 2,34 \times 10^8$ e $N_{EdS} = \alpha^3 = 3.57951 \times 10^{12}$, pois as duas expressões podem ser dadas por $N_G^{(2)} = \alpha^2 [1 - (1+z)^{-1/2}]^2$ e $N_{EdS} = \alpha^3 [1 - (1+z)^{-1/2}]^3$, sendo de maneira direta a obtenção dos limites. Como as equações de (3.2.1) a (3.2.4) simulam um universo com distribuição de galáxias parecida a observada por nós, tentamos verificar se com a não homogeneidade observacional poderíamos ter homogeneidade espacial, mas verificamos que não há HE ao uso das quatro distâncias cosmológicas que adotamos, se existisse a distância cosmológica $d = (2c/H_0)[1 - (1+z)^{-1/2}]^{3/2}$, verificaríamos a homogeneidade espacial ao assumirmos não HO.

A seguir vamos obter as densidades diferenciais. Para obtermos $\gamma_i^{(2)}$, consideramos

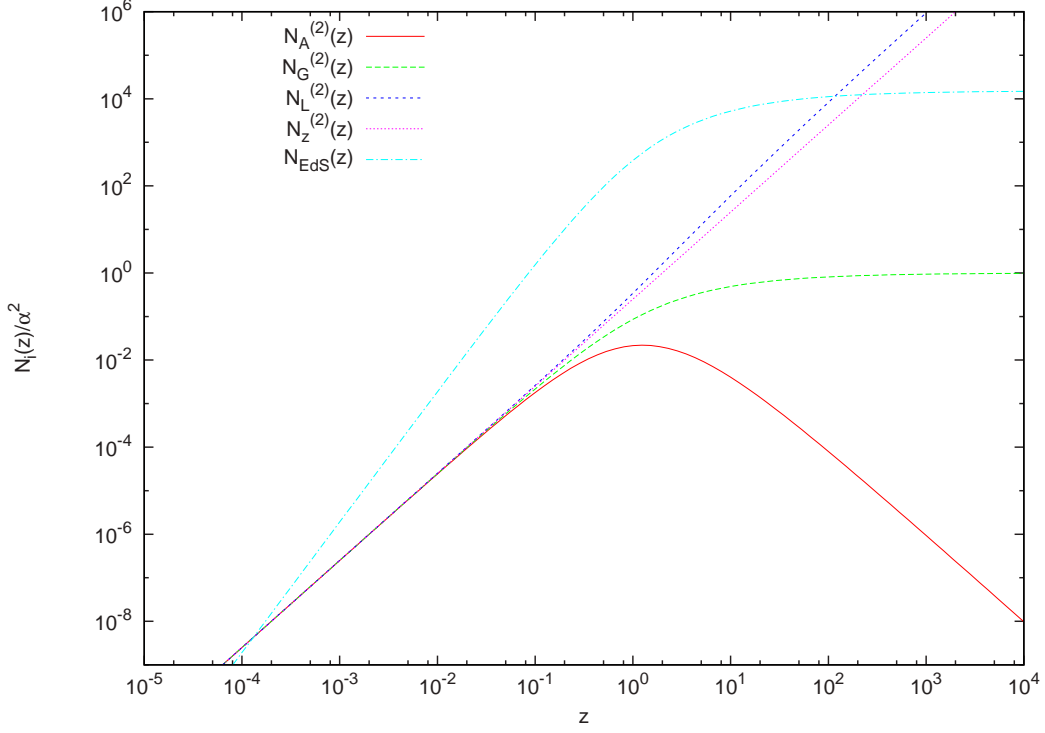


Figura 3.4: Comportamento das contagens numéricas simulada via contagem de Pietronero (N_i/α^2) em função do desvio para o vermelho z para um caso sem homogeneidade observacional ($D = 2$). Comparamos as contagens não HO com a contagem prevista pelo modelo de EdS N_{EdS} .

$D = 2$ nas equações de (2.2.3) a (2.2.6), resultando em,

$$\gamma_A^{(2)}(z) = \frac{H_0^{7/3}}{4\pi c(2M_g G)^{2/3}} \left(\frac{1+z-\sqrt{1+z}}{(1+z)^2} \right)^{-1}, \quad (3.2.5)$$

$$\gamma_G^{(2)}(z) = \frac{H_0^{7/3}}{4\pi c(2M_g G)^{2/3}} \left(\frac{1+z-\sqrt{1+z}}{1+z} \right)^{-1}, \quad (3.2.6)$$

$$\gamma_L^{(2)}(z) = \frac{H_0^{7/3}}{4\pi c(2M_g G)^{2/3}} \left(1+z-\sqrt{1+z} \right)^{-1}, \quad (3.2.7)$$

$$\gamma_z^{(2)}(z) = \frac{H_0^{7/3}}{4\pi c(2M_g G)^{2/3}} \left(\frac{z}{2} \right)^{-1}, \quad (3.2.8)$$

que são as densidades diferenciais oriundas da contagem de Pietronero (2.1.6) da distribuição de galáxias sem homogeneidade observacional para as quatro distâncias cosmológicas e em função do desvio para o vermelho z . Para obtermos a densidade diferencial

integral $\gamma_i^{*(2)}$, considera-se $D = 2$ nas equações de (2.3.3) a (2.3.6), resultando em,

$$\gamma_A^{*(2)}(z) = \frac{3H_0^{7/3}}{8\pi c(2M_g G)^{2/3}} \left[\frac{1+z-\sqrt{1+z}}{(1+z)^2} \right]^{-1}, \quad (3.2.9)$$

$$\gamma_G^{*(2)}(z) = \frac{3H_0^{7/3}}{8\pi c(2M_g G)^{2/3}} \left(\frac{1+z-\sqrt{1+z}}{1+z} \right)^{-1}, \quad (3.2.10)$$

$$\gamma_L^{*(2)}(z) = \frac{3H_0^{7/3}}{8\pi c(2M_g G)^{2/3}} \left(1+z-\sqrt{1+z} \right)^{-1}, \quad (3.2.11)$$

$$\gamma_z^{*(2)}(z) = \frac{3H_0^{7/3}}{8\pi c(2M_g G)^{2/3}} \left(\frac{z}{2} \right)^{-1}, \quad (3.2.12)$$

que são as densidades diferenciais integrais oriundas da contagem de Pietronero (2.1.6) em uma distribuição sem homogeneidade observacional ($D = 2$) para as quatro distâncias cosmológicas em função do desvio para o vermelho z . Como não assumimos HO, verificamos no gráfico da figura 3.5 que as densidades não observacionalmente homogêneas $\gamma_i^{*(2)}(z)$ começam com um valor igual ao das densidades espacialmente homogêneas $\gamma_i^{*(EdS)}(z)$, mas logo em seguida as densidades $\gamma_i^{*(2)}(z)$ diminuem drasticamente. Notamos que a densidade não observacionalmente homogênea $\gamma_A^{*(2)}(z)$ é sempre inferior a densidade espacialmente homogênea $\gamma_A^{*(EdS)}(z)$ para $z > 0$. Observe que $\gamma_G^{*(2)}$ torna-se praticamente constante a partir de $z = 100$, ou seja, a partir desse desvio para o vermelho a distribuição de galáxias é observacionalmente homogênea, conforme a equação (1.8.2), mas possui densidade de galáxias inferior ao da densidade prevista pelo modelo de EdS $\gamma_G^{*(EdS)}(z)$, que é HE. Matematicamente obtemos de maneira direta a constância de $\gamma_G^{*(2)}(z)$ para $z \rightarrow \infty$, porque essa função pode ser escrita $\gamma_G^* \propto [1 - (1+z)^{-1/2}]^{-1}$. Observe também que as densidades não observacionalmente homogêneas $\gamma_L^{*(2)}(z)$ e $\gamma_z^{*(2)}(z)$ são inferiores, respectivamente, as densidades espacialmente homogêneas $\gamma_L^{*(EdS)}(z)$ e $\gamma_z^{*(EdS)}(z)$ entre $0 < z \lesssim 300$. Mas para $z \approx 300$ essas duas densidades não observacionalmente homogêneas são praticamente iguais as suas previsões HE. Não faremos o gráfico das funções $\gamma_i(z)$ devido as curvas serem iguais à da figura abaixo, diferindo apenas no fator constante.

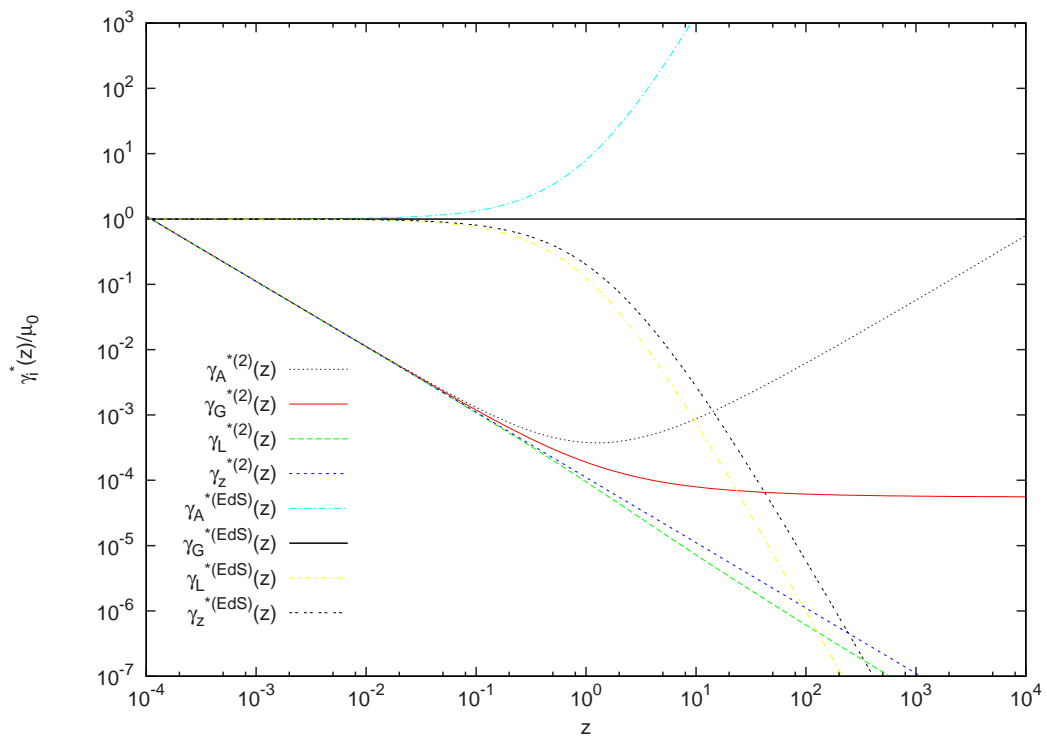


Figura 3.5: Comportamento das densidades diferenciais integrais ($\gamma_i^*(z)/\mu_0$) em função do desvio para o vermelho z . A constante μ_0 é definida pela equação (3.1.10). Comparamos as densidades $\gamma_i^{*(2)}(z)$ não observacionalmente homogêneas com as densidades $\gamma_i^{*(EdS)}(z)$ espacialmente homogêneas.

Capítulo 4

Comportamento de $D(z)$ ao Assumirmos Homogeneidade Espacial

Neste capítulo estudaremos o comportamento da dimensão fractal D em função do desvio para o vermelho z quando assumimos a homogeneidade espacial. Para facilitar a análise, vamos reescrever a contagem de Pietronero da seguinte maneira,

$$N_i = (Bd_i)^D = \alpha^D \left[\left(\frac{H_0}{2c} \right) d_i \right]^D. \quad (4.1)$$

conforme as equações (2.3.15) e (3.1.5). A equação acima surge das contagens dadas pelas expressões (2.1.7) a (2.1.10) e da contagem de Pietronero (2.1.6). O termo entre colchetes da equação acima facilitará nossos cálculos, pois eliminará o termo constante das distâncias observacionais. Se assumirmos a homogeneidade espacial, a contagem numérica de fontes cosmológicas terá que seguir a contagem dada pelo modelo cosmológico padrão adotado aqui, no caso EdS. Vamos agora igualar a expressão (4.1) acima com a contagem (2.1.5) do modelo de EdS. Isto resulta em,

$$\left[\alpha \left(\frac{H_0}{2c} \right) d_i \right]^D = \frac{4c^3}{H_0 M_g G} \left(\frac{1+z-\sqrt{1+z}}{1+z} \right)^3. \quad (4.2)$$

Por conveniência para facilitar os cálculos que seguem, vamos reescrever a contagem do modelo de EdS em termos da constante α (equação 3.1.5) e de uma função $f(z)$ que definimos como: $f(z) = (2c/H_0)[(1+z-\sqrt{1+z})/(1+z)]$. Com isso, a contagem numérica prevista pelo modelo de EdS pode ser reescrita da seguinte maneira,

$$N_{EdS} = \alpha^3 \left[\left(\frac{H_0}{2c} \right) f(z) \right]^3. \quad (4.3)$$

Observe que $f(z) = d_G$. Substituindo a equação acima na equação (4.2) e em seguida aplicando o logaritmo em ambos os dois lados para isolar D , obtemos,

$$\begin{aligned} \ln \left[\alpha \left(\frac{H_0 d_i}{2c} \right) \right]^{D^{(i)}} &= \ln \left[\alpha \left(\frac{H_0 f(z)}{2c} \right) \right]^3, \\ D^{(i)}(z) &= 3 \left(\frac{\ln \alpha + \ln [(H_0/2c)f(z)]}{\ln \alpha + \ln [(H_0/2c)d_i]} \right), \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde o índice (i) indica a distância cosmológica escolhida. Esta última equação é a expressão mais geral que podemos obter para a dimensão fractal em função do desvio para o vermelho z para qualquer distância cosmológica no modelo de EdS. Para obtermos os gráficos de $D(z)$ da equação acima, precisamos antes obter o valor quantitativo de $\ln \alpha$. Aplicando o logaritmo na constante α (equação 3.1.6), obtemos,

$$\ln \alpha = 9.516524 - \frac{1}{3} \ln h, \quad (4.5)$$

e considerando $h = 0.7$, resulta em,

$$\ln \alpha = 9.6354. \quad (4.6)$$

Substituindo a constante acima e as quatro distâncias observacionais, dadas pelas equações de (2.1.1) a (2.1.4), na equação (4.4), obtemos,

$$D^{(G)} = 3, \quad (4.7)$$

$$D^{(A)}(z) = 3 \left\{ \frac{9.6354 + \ln \left(\frac{1+z-\sqrt{1+z}}{1+z} \right)}{9.6354 + \ln \left[\frac{1+z-\sqrt{1+z}}{(1+z)^2} \right]} \right\}, \quad (4.8)$$

$$D^{(L)}(z) = 3 \left[\frac{9.6354 + \ln \left(\frac{1+z-\sqrt{1+z}}{1+z} \right)}{9.6354 + \ln (1+z-\sqrt{1+z})} \right], \quad (4.9)$$

$$D^{(z)}(z) = 3 \left[\frac{9.6354 + \ln \left(\frac{1+z-\sqrt{1+z}}{1+z} \right)}{9.6354 + \ln (z/2)} \right]. \quad (4.10)$$

Como as três últimas dimensões fractais são indeterminadas em $z = 0$, precisaremos usar o teorema de L'hôpital nos três casos para sabermos o valor quantitativo dessas dimensões no limite $z \rightarrow 0$. De uma maneira geral, temos,

$$\lim_{z \rightarrow 0} D^{(i)}(z) = \lim_{z \rightarrow 0} 3 \left\{ \frac{9.6354 + \ln [(H_0/2c)f(z)]}{9.6354 + \ln [(H_0/2c)d_i]} \right\}, \quad (4.11)$$

aplicando o teorema de L'hôpital na equação acima, obtemos,

$$\lim_{z \rightarrow 0} D^{(i)}(z) = 3 \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \frac{d_i}{f(z)} \left[\frac{d[f(z)]}{dz} \right] \left[\frac{d(d_i)}{dz} \right]^{-1} \right\}. \quad (4.12)$$

Reescrevendo as equações de (2.2.9) a (2.2.12), obtemos,

$$\frac{H_0}{2c} \frac{d[f(z)]}{dz} = \frac{1}{2(1+z)^{3/2}}, \quad (4.13)$$

$$\frac{H_0}{2c} \frac{d(d_A)}{dz} = \frac{3 - 2(1+z)^{1/2}}{2(1+z)^{5/2}}, \quad (4.14)$$

$$\frac{H_0}{2c} \frac{d(d_L)}{dz} = \frac{2(1+z)^{1/2} - 1}{2(1+z)^{1/2}}, \quad (4.15)$$

$$\frac{H_0}{2c} \frac{d(d_z)}{dz} = \frac{1}{2}, \quad (4.16)$$

onde $d[f(z)]/dz = d(d_G)/dz$. Substituindo as quatro últimas equações no limite (4.12), temos que,

$$\lim_{z \rightarrow 0} D^{(A)}(z) = 3 \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{3 - 2(1+z)^{1/2}} = 3, \quad (4.17)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} D^{(L)}(z) = 3 \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2(1+z)^{1/2} - 1} = 3, \quad (4.18)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} D^{(z)}(z) = 3 \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{3(1+z)^{1/2} - 2} = 3. \quad (4.19)$$

Queremos agora saber quais são os limites quando $z \rightarrow \infty$ nas dimensões fractais (4.8), (4.9) e (4.10). Calculando estes limites obtemos,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} D^{(A)}(z) = 3 \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{3 - 2(1+z)^{1/2}} = 0, \quad (4.20)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} D^{(L)}(z) = 3 \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{2(1+z)^{1/2} - 1} = 0, \quad (4.21)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} D^{(z)}(z) = 3 \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{3(1+z)^{1/2} - 2} = 0. \quad (4.22)$$

Conforme as equações de (4.17) a (4.19), os limites para $z \rightarrow 0$ resultaram todos iguais a três, ou seja, localmente há homogeneidade espacial e observacional, o que é previsto pelo Princípio Cosmológico e, conseqüentemente, também é previsto pelo modelo de FLRW. Localmente ($z \ll 1$) as relatividades Geral e Newtoniana são iguais e, conseqüentemente (pela seção 1.8), as homogeneidades espacial e observacional também o são.

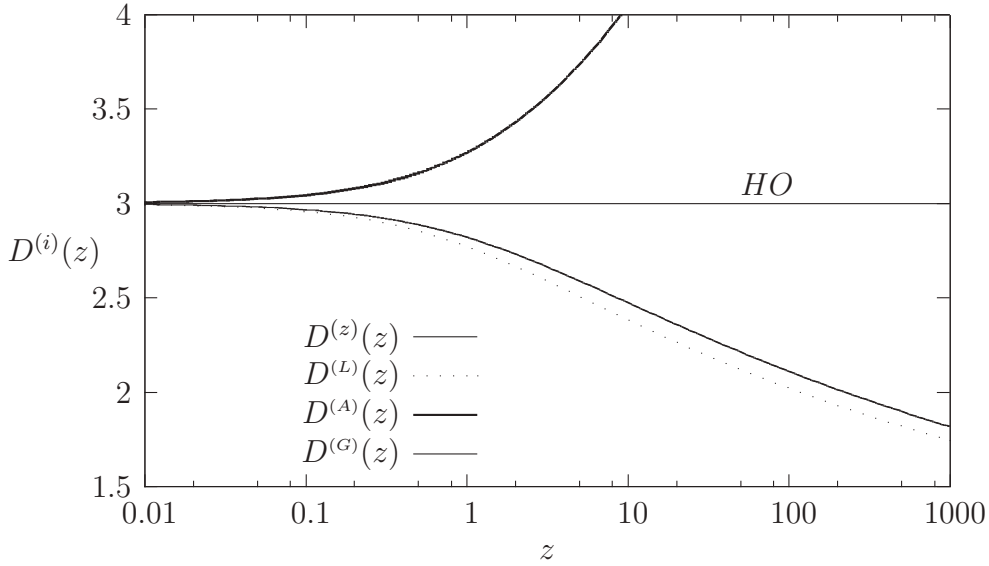


Figura 4.1: Comportamento da dimensão fractal D para as quatro distâncias cosmológicas em função do desvio para o vermelho. Assumimos homogeneidade espacial no universo de EdS.

O gráfico da figura 4.1 nos mostra como a dimensão fractal varia com o desvio para o vermelho z em um universo que assume homogeneidade espacial. Note que $D^{(L)}(z)$ e $D^{(z)}(z)$ diminuem quanto maior for o desvio para o vermelho z . Isso implica que quanto maior o valor de z , maior a inomogeneidade observacional. Também obtivemos que para $z \rightarrow \infty$ (equações de 4.20 a 4.22), nos três casos a dimensão fractal tende a zero, inclusive $D^{(A)}(z)$, que cresce inicialmente. Isso implica que os efeitos relativísticos conduzem a máxima inomogeneidade observacional quando nos aproximamos da singularidade.

Conclusão

Neste trabalho discutimos dois tipos de homogeneidades, espacial (HE) e observacional (HO), para a distribuição de galáxias no Universo e defendemos a tese de que a existência de mais de uma homogeneidade é consequência de efeitos relativísticos em modelos cosmológicos. Usamos como ferramenta quatro distâncias observacionais (seção 1.5) e mostramos os efeitos da escolha de cada uma delas na análise da distribuição de galáxias. As distâncias são: distância de luminosidade d_L , distância por área d_A , distância por área galáctica d_G e distância por desvio para o vermelho d_z . Mostramos na seção 1.1 que o Princípio Cosmológico possui uma definição de homogeneidade que neste trabalho chamamos de homogeneidade espacial, mas mostramos ao longo da dissertação que isso não implica que observaríamos de maneira direta a homogeneidade da distribuição de matéria, ou seja, esse segundo conceito de homogeneidade que estamos propondo (ou incrementando) é a explicação para a não observação da homogeneidade da distribuição de galáxias, pois a nível das grandes estruturas do Universo se observa grandes aglomerados e vazios. Desenvolvemos este trabalho no universo de Einstein-de Sitter. Outras importantes ferramentas que utilizamos para o estudo das homogeneidades são: a contagem numérica de fontes N_i , a densidade diferencial γ_i e a densidade diferencial integral γ_i^* , onde, as duas últimas são obtidas a partir da primeira. Estudamos as homogeneidades a partir de duas contagens numéricas, que são: a contagem de EdS (N_{EdS}) e a contagem proposta por Pietronero, $N_i = (Bd_i)^D$. Como a contagem de Einstein-de Sitter é deduzida através do modelo de EdS, consequentemente ela assume o Princípio Cosmológico, e, portanto, a contagem de EdS descreve um universo com homogeneidade espacial. Já a contagem de Pietronero foi proposta para descrever as contagens medidas pelos catálogos de galáxias, ou seja, é uma contagem que tenta descrever a observação, tanto que essa contagem simula universos com e sem homogeneidade observacional. Fizemos uma análise da homogeneidade observacional ao usarmos as densidade diferenciais γ_i e γ_i^* , pois a HO é definida matematicamente como $\gamma_i^* = \text{constante}$ (seção 1.8). No capítulo 3 estudamos primeiro o caso com homogeneidade observacional, onde assumimos $D = 3$. Nessa análise obtivemos que apenas há também homogeneidade espacial quando aplicamos a distância

por área galáctica d_G na contagem simulada de Pietronero (resultando em N_G), pois essa contagem coincide com a simulação teórica N_{EdS} . Também estudamos no capítulo 3 um caso sem homogeneidade observacional, onde assumimos $D = 2$, que conforme Ribeiro & Miguelote (1998) acreditamos descrever relativamente bem a realidade observada. Nesse caso sem HO, verificamos a não homogeneidade espacial, pois as quatro contagens diferem de N_{EdS} , mas obtivemos que γ_G^* torna-se praticamente constante para $z \gtrsim 10$, ou seja, mesmo assumindo $D = 2$ obtivemos HO para $z \gtrsim 10$. No capítulo 4 estudamos a homogeneidade observacional após assumir HE, ou seja, igualamos a contagem de Pietronero com a contagem do modelo de EdS para estudar o comportamento da dimensão fractal. Nessa análise obtivemos que todas as dimensões fractais são iguais a três para $z \rightarrow 0$, ou seja, isso informa que localmente (a nível do nosso grupo local de galáxias) há homogeneidade observacional. Também obtivemos que com excessão de $D^{(G)}(z)$, que é HO para todo desvio para o vermelho z (previsto na seção 3.1), todas as dimensões fractais tendem a zero para $z \rightarrow \infty$, relatando que a informação observacional vai a “máxima” inomogeneidade na singularidade. Isso implica que os efeitos relativísticos conduzem a máxima inomogeneidade observacional.

Apêndice A

Métrica de Robertson-Walker

Esta seção tem como objetivo fazer uma breve reconstituição histórica da métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, mais conhecida como métrica de Robertson-Walker. Acredito que seja interessante fazer esta breve reconstituição neste trabalho para verificar a evolução do estudo da geometria do Universo, podendo tentar visualizar um paralelo com o tema principal desta dissertação. Este apêndice foi baseado no capítulo 3 de Narlikar (1993) e em Waga (2005).

Em 1854, a geometria desenvolvida pelo matemático alemão G. F. B. Riemann (1826 – 1866) sugeria que o Universo poderia não possuir limites e tampouco ser infinito, ou seja, o Universo poderia possuir uma geometria curva, de tal maneira que poderíamos viajar ao longo de uma geodésica de uma tri-superfície do espaço quadri-dimensional, onde, dependendo da geometria, poderíamos passar mais de uma vez pelo mesmo ponto se nos deslocássemos “sempre em linha reta”, isso seria análogo a locomoção de uma formiga na superfície de uma esfera. A métrica Riemanniana é definida por,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (\text{A.1})$$

onde ds^2 é chamado de elemento de linha do espaço-tempo ou métrica do espaço-tempo, os índices μ e ν são 0, 1, 2, 3 (0 representa a coordenada temporal e os índices restantes representam as coordenadas espaciais) e $g_{\mu\nu}$ o tensor métrico do espaço-tempo. Para uma métrica pseudo-Rimanniana e diagonal, a equação (A.1) reduz-se a,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2, \quad (\text{A.2})$$

onde dl é o elemento de linha espacial, podendo ser o elemento de geodésica dl' . dl^2

representa a parte espacial da métrica do espaço-tempo.

Os primeiros modelos cosmológicos relativísticos propostos assumiam universo plano, ou seja, com curvatura espacial nula. Pelo teorema de Pitágoras o elemento de geodésica dl' de uma tri-superfície plana é dado por,

$$dl'^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2. \quad (\text{A.3})$$

Substituindo a equação acima na equação (A.2) obtemos a famosa métrica de Minkowski,*

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2. \quad (\text{A.4})$$

Fazendo a transformação para coordenadas esféricas, $x_1 = a \sin \theta \cos \phi$, $x_2 = a \sin \theta \sin \phi$ e $x_3 = a \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$), na equação acima, obtemos,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2 [dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)], \quad (\text{A.5})$$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2 (dr^2 + r^2 d\Omega^2), \quad (\text{A.6})$$

onde a é uma constante, que neste caso representa a coordenada radial das coordenadas esféricas de uma tri-superfície plana. Como estamos seguindo a ordem de Narlikar (1993), mais a frente iremos definir a como sendo o fator de escala, a “taxa” de expansão do Universo, tendo dependência do tempo, mas por enquanto iremos trabalhar com universos estáticos, $a(t_0)$ com $t_0 = \text{constante}$. Para simplificar fizemos a substituição $d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 = d\Omega^2$ na passagem matemática acima.

Em 1922, Friedmann obteve soluções cosmológicas para universo fechado, curvatura espacial positiva constante. Ele supôs que o Universo pudesse ser a tri-superfície de uma quadri-esfera. A equação da quadri-esfera é dada por,

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a^2, \quad (\text{A.7})$$

onde a desta vez representa o raio do universo modelado. O elemento de linha espacial dl

*Hermann Minkowski (1864 – 1909), físico e matemático russo que publicou em 1907 o artigo *Space and Time*, no qual ele afirmava que o trabalho de Lorentz e Einstein poderia ser mais bem compreendido em um espaço não-euclidiano. Ele considerou espaço e tempo juntos em um espaço de quatro dimensões, que até então eram tratados de maneira separada.

da quadri-esfera acima é dado por,

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2. \quad (\text{A.8})$$

Para obtermos o elemento de geodésica dl' da tri-superfície da quadri-esfera (A.7), diferenciamos a equação (A.7), isolamos dx_4 e em seguida substituímos na equação acima, resultando em,

$$dl'^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - a^2}, \quad (\text{A.9})$$

$$dl'^2 = a^2(d\chi^2 + \text{sen}^2\chi d\Omega^2), \quad (\text{A.10})$$

onde, na passagem da equação (A.9) para a equação (A.10), consideramos $x_1 = a \text{sen}\chi \cos\theta$, $x_2 = a \text{sen}\chi \cos\theta \cos\phi$, $x_3 = a \text{sen}\chi \text{sen}\theta \text{sen}\phi$ e $x_4 = a \cos\chi$ ($0 \leq \chi \leq \pi$), que são as coordenadas esféricas de uma quadri-esfera de raio a . Considerando $\text{sen}\chi = r$ em (A.10), de maneira simples obtemos,

$$dl'^2 = a^2 \left(\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad (\text{A.11})$$

onde r é a coordenada co-móvel. Também obtemos a equação (A.11) se considerarmos $\vec{R} = x_1 \hat{i} + x_2 \hat{j} + x_3 \hat{k} = (x_1, x_2, x_3) = (a \text{sen}\theta \cos\phi, a \text{sen}\theta \text{sen}\phi, a \cos\theta)$ na equação (A.9) e em seguida $\vec{R} = a\vec{r}$ e $d\vec{R} = a d\vec{r}$. Substituindo as equações (A.10) e (A.11) na equação (A.2), obtemos as métricas,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(d\chi^2 + \text{sen}^2\chi d\Omega^2), \quad (\text{A.12})$$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2 \left(\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad (\text{A.13})$$

onde a primeira das duas equações acima é conhecida como métrica de Friedmann para universo fechado, a qual uma das soluções obtidas era para universo em expansão.

Em 1924, Friedmann obteve soluções cosmológicas para universo aberto, com curvatura espacial negativa constante. Ele supôs que o universo pudesse ser a tri-superfície de um quadri-hiperbolóide. A equação do quadri-hiperbolóide é dada por,

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = -a^2, \quad (\text{A.14})$$

onde aqui a é apenas uma constante. O elemento de linha espacial do quadri-hiperbolóide acima é dado por,

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2, \quad (\text{A.15})$$

então, se diferenciarmos a equação (A.14), isolarmos dx_4 e em seguida substituirmos na equação acima, obtemos o elemento de geodésica dl' da tri-superfície do quadri-hiperbolóide (A.14),

$$dl'^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + a^2}, \quad (\text{A.16})$$

$$dl'^2 = a^2(d\chi^2 + \sinh^2\chi d\Omega^2), \quad (\text{A.17})$$

onde consideramos na passagem acima $x_1 = a \sinh\chi \cos\theta$, $x_2 = a \sinh\chi \cos\theta \cos\phi$, $x_3 = a \sinh\chi \sin\theta \sin\phi$ e $x_4 = a \cosh\chi$ ($0 \leq \chi \leq \pi$).

Considerando $\sinh\chi = r$ na equação (A.17), obtemos,

$$dl'^2 = a^2 \left(\frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 d\Omega^2 \right). \quad (\text{A.18})$$

Também obtemos esta última equação se considerarmos $\vec{R} = (x_1, x_2, x_3) = (a \sinh\theta \cos\phi, a \sinh\theta \sin\phi, a \cosh\theta)$ na equação (A.16) e em seguida $\vec{R} = a\vec{r}$ e $d\vec{R} = a d\vec{r}$. Substituindo as equações (A.17) e (A.18) na equação (A.2), temos que,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(d\chi^2 + \sinh^2\chi d\Omega^2), \quad (\text{A.19})$$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2 \left(\frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad (\text{A.20})$$

onde a equação (A.19) é conhecida como métrica de Friedmann para universo aberto, curvatura espacial negativa constante.

Em 1935 e 1936, respectivamente, o matemático norte-americano H. P. Robertson e o matemático inglês Arthur G. Walker demonstraram independentemente uma expressão geral para essas métricas estudadas até então, ela englobava as métrica plana (A.6) e as métricas de Friedmann (A.12) e (A.19). Eles propuseram que o Universo poderia ser a tri-superfície de uma quadri-geometria que, esta última, obedeça a seguinte expressão,

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + k(x_4)^2 = \frac{a^2}{k}, \quad (\text{A.21})$$

onde k é a constante de curvatura, também chamada de constante de curvatura de Robertson-Walker, podendo ter os valores $k = 0, \pm 1$. Para $k = 0$, obtemos uma esfera de raio infinito (onde podemos considerar a superfície de uma esfera de raio infinito como sendo uma superfície plana), para $k = 1$, a equação acima resulta na quadri-esfera (A.7), e para $k = -1$, a equação acima resulta no quadri-hiperbolóide (A.14). Resumindo, $k = 0$ representa um universo plano, $k = 1$ fechado e $k = -1$ aberto. O elemento de linha espacial da quadri-geometria acima é dado por,

$$dl'^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 + k(dx_4)^2, \quad (\text{A.22})$$

diferenciando a equação (A.21), isolando dx_4 e em seguida substituímos na equação (A.22), obtemos o elemento de geodésica dl' da tri-superfície da quadri-geometria (A.21),

$$dl'^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 + k \left[\frac{-x_1 dx_1 - x_2 dx_2 - x_3 dx_3}{\sqrt{a^2 - k(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}} \right]^2, \quad (\text{A.23})$$

transformando para coordenadas esféricas, $\vec{R} = R\hat{R} = (x_1, x_2, x_3)$ e $d\vec{R} = (dR)\hat{R} + (d\theta)\hat{\theta} + (\text{sen}\theta d\phi)\hat{\phi} = (dx_1, dx_2, dx_3)$, onde $(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 = dR^2 + R^2 d\Omega^2$, $(-x_1 dx_1 - x_2 dx_2 - x_3 dx_3)^2 = (\vec{R} \cdot d\vec{R})^2 = (RdR)^2$ e $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \vec{R} \cdot \vec{R} = R^2$, resultando em,

$$\begin{aligned} dl'^2 &= dR^2 + R^2 d\Omega^2 + \frac{kR^2 dR^2}{a^2 - kR^2}, \\ dl'^2 &= \frac{a^2 dR^2}{a^2 - kR^2} + R^2 d\Omega^2. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Considerando $R = ar$ na equação acima, e substituindo na equação (A.2), obtemos a métrica de Robertson-Walker, tal que,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right). \quad (\text{A.25})$$

Vamos assumir agora que o fator constante a possui uma dependência do tempo cósmico, sendo chamado de fator de escala, ou fator de expansão. Consideramos até o momento hiper-superfícies estáticas, $a(t_0)$ com $t_0 = \text{constante}$. Reescrevendo a equação acima com $a(t)$, obtemos,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right). \quad (\text{A.26})$$

Assim a equação acima é o mais geral elemento de linha que satisfaz o Postulado de Weyl e o Princípio Cosmológico. Observe que para $k = \pm 1$, a métrica de Robertson-Walker resulta nas métricas de Friedmann para universo fechado e aberto. A métrica acima também é conhecida como métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. Lemaître contribuiu bastante na interpretação física e geométrica da métrica acima. Observe que para $k = 0$, a métrica acima reduz-se para a métrica plana (A.6).

Apêndice B

Cálculo de $\gamma_z^*(z)$ e $\gamma_L^*(z)$

O objetivo desta seção é obtermos as densidades $\gamma_L^*(z)$ e $\gamma_z^*(z)$ dadas pelas equações (2.3.6) e (2.3.5) a partir da definição da densidade diferencial (1.6.24) escrita em função do desvio para o vermelho z . Para simplificar as expressões de densidade, reescrevemos as equações (1.6.23), (1.6.24), (2.2.5) e (2.2.6), usando nas duas últimas a constante α dada pela expressão (3.1.5), resulta em,

$$\gamma_i(z) = \frac{dN_i}{dz} \left[S_i \frac{d(d_i)}{dz} \right]^{-1}, \quad (\text{B.1})$$

$$\gamma_i^*(z) = \frac{1}{V_i} \int_0^z \gamma_i(z') \frac{dV_i}{dz'} dz'. \quad (\text{B.2})$$

$$\gamma_z(z) = \alpha^D \frac{DH_0^3}{32\pi c^3} \left(\frac{z}{2} \right)^{D-3}, \quad (\text{B.3})$$

$$\gamma_L(z) = \alpha^D \frac{DH_0^3}{32\pi c^3} (1 + z - \sqrt{1+z})^{D-3}. \quad (\text{B.4})$$

Para calcularmos $\gamma_z^*(z)$, substituímos as equações (1.6.22) e (B.3) na equação (B.2), obtendo,

$$\begin{aligned} \gamma_z^*(z) &= \frac{3}{4\pi (cz/H_0)^3} \int_0^z \alpha^D \frac{DH_0^3}{32\pi c^3} \left(\frac{z'}{2} \right)^{D-3} 4\pi \left(\frac{cz'}{H_0} \right)^2 \frac{c}{H_0} dz', \\ \gamma_z^*(z) &= \frac{3DH_0^3}{32\pi c^3} \frac{\alpha^D 2^3}{(cz/H_0)^3} \int_0^z \left(\frac{z'}{2} \right)^{D-1} \left(\frac{c}{H_0} \right)^3 d \left(\frac{z'}{2} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

e integrando, obtemos,

$$\begin{aligned} \gamma_z^*(z) &= \frac{3DH_0^3}{32\pi c^3} \frac{\alpha^D}{(z/2)^3} \frac{1}{D} \left(\frac{z}{2} \right)^D, \\ \gamma_z^*(z) &= \alpha^D \frac{3H_0^3}{32\pi c^3} \left(\frac{z}{2} \right)^{D-3}. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

onde alcançamos o nosso primeiro propósito: a equação (B.6) confere com a equação (2.3.6).

No caso do cálculo de $\gamma_L^*(z)$, substituímos as equações (1.6.22) e (B.4) na equação (B.6), tal que,

$$\begin{aligned}
\gamma_L^*(z) &= \frac{3}{4\pi \left[\frac{2c}{H_0}(1+z-\sqrt{1+z}) \right]^3} \int_0^z \alpha^D \frac{DH_0^3}{32\pi c^3} (1+z'-\sqrt{1+z'})^{D-3} 4\pi \times \\
&\quad \times \left[\frac{2c}{H_0}(1+z'-\sqrt{1+z'}) \right]^2 \frac{2c}{H_0} \left[1 - \frac{1}{2}(1+z)^{-1/2} \right] dz', \\
\gamma_L^*(z) &= \frac{3DH_0^3}{32\pi c^3} \frac{\alpha^D}{\left[\frac{2c}{H_0}(1+z-\sqrt{1+z}) \right]^3} \int_0^z \left(\frac{2c}{H_0} \right)^{3-D} \left[\frac{2c}{H_0}(1+z'-\sqrt{1+z'}) \right]^{D-3} \times \\
&\quad \times \left[\frac{2c}{H_0}(1+z'-\sqrt{1+z'}) \right]^2 \frac{2c}{H_0} \left[1 - \frac{1}{2}(1+z)^{-1/2} \right] dz', \\
\gamma_L^*(z) &= \frac{3DH_0^3}{32\pi c^3} \frac{\alpha^D}{\left[\frac{2c}{H_0}(1+z-\sqrt{1+z}) \right]^3} \left(\frac{2c}{H_0} \right)^{3-D} \int_0^z \left[\frac{2c}{H_0}(1+z'-\sqrt{1+z'}) \right]^{D-1} \times \\
&\quad \times d \left[\frac{2c}{H_0}(1+z'-\sqrt{1+z'}) \right], \tag{B.7}
\end{aligned}$$

e integrando, obtemos,

$$\begin{aligned}
\gamma_L^*(z) &= \frac{DH_0^3}{32\pi c^3} \frac{\alpha^D}{\left[\frac{2c}{H_0}(1+z-\sqrt{1+z}) \right]^3} \left(\frac{2c}{H_0} \right)^{3-D} \frac{1}{D} \left[\frac{2c}{H_0}(1+z'-\sqrt{1+z'}) \right]^D \Big|_0^z, \\
\gamma_L^*(z) &= \alpha^D \frac{3H_0^3}{32\pi c^3} (1+z-\sqrt{1+z})^{D-3}, \tag{B.8}
\end{aligned}$$

onde esta última equação confere com a equação (2.3.5), o que era nosso segundo propósito desta seção.

Bibliografia

- Barrow, J. 1989, Q. J. R. Astr. Soc., **30**, 163.
- Barrow, J. 1993, Q. J. R. Astr. Soc., **34**, 117.
- Bondi, H. & Gold, T. 1948, Mon. Not. R. Astr. Soc., **108**, 252.
- Bonnor, W. B. 1972, Mon. Not. R. Astr. Soc., **152**, 261.
- Charlier, C. V. L. 1908, Ark. Mat. Astron. Fys., **4**, 1.
- Charlier, C. V. L. 1922, Ark. Mat. Astron. Fys., **16**, 1.
- Cox, A. N. 2000, *Allen's Astrophysical Quantities*, quarta edição (New York: Springer-Verlag).
- de Sitter, W. 1917, Mon. Not. R. Astr. Soc., **78**, 3.
- Einstein, A. 1917, Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber, 142.
- Einstein, A. & de Sitter, W. 1932, Proc. Natl. Acad. Sci., **18**, 213.
- Ellis, G. F. R. 1971, *General Relativity and Cosmology*, Proc. of the International School of Physics "Enrico Fermi", ed. R. K. Sachs (New York: Academic Press), 104.
- Etherington, I. M. H. 1933, Phil. Mag., **15**, 761.
- Friedmann, A. A. 1922, Z. Phys., **10**, 377. (ou 1999, GRG, **31**, 12.)
- Friedmann, A. A. 1924, Z. Phys., **21**, 326.
- Harrison, E. R. 1981, *Cosmology, The Science of the Universe* (Cambridge: Cambridge University Press).
- Harrison, E. 1993, ApJ, **403**, 28.
- Hoyle, F. 1948, Mon. Not. R. Astr. Soc., **108**, 372.
- Hoyle, F. & Narlikar, J. V. 1963, Pro. R. Soc. A, **273**, 1.
- Mandelbrot, B. B. 1977, *Fractals: Form, Chance and Dimension* (New York: Freeman).
- Mandelbrot, B. B. 1983, *The Fractal Geometry of Nature* (New York: Freeman).
- Mattig, W. 1958, Astron. Nach., **284**, 109.
- Milne, E. A. 1935, *Relativity, Gravitation and World Structure* (Oxford: Ox-

ford).

- Narlikar, J. V. 1993, *Introduction to Cosmology*, segunda edição (Cambridge: Cambridge University Press).
- Perlmutter, S. & outros 1999, ApJ, **517**, 565.
- Pietronero, L. 1987, Physica A, **144**, 257.
- Ribeiro, M. B. 1992a, ApJ, **388**, 1.
- Ribeiro, M. B. 1992b, ApJ, **395**, 29.
- Ribeiro, M. B. 1993, ApJ, **415**, 469.
- Ribeiro, M. B. 1994, *Deterministic Chaos in General Relativity*, ed. D. Hobil, A. Burd, & a. Coley (New York: Plenum Press), 269.
- Ribeiro, M. B. 1995, ApJ, **441**, 477.
- Ribeiro, M. B., & Miguelote, A. Y. 1998, Brazilian J. Phys., **28**, 132.
- Ribeiro, M. B. 2005, A&A, **429**, 65.
- Riess, A. G. & outros 1998, Astronomical Journal, **116**, 1009.
- Robertson, H. P. 1935, ApJ, **82**, 248.
- Stephani, H., Kramer, D., MacCallum, M. A. H., Hoenselaers, C. & Herlt, E. 2003, *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*, segunda edição (Cambridge: Cambridge University Press).
- Sylos-Labini, F., Montuori, M., & Pietronero, L. 1998, Phys. Rep., **293**, 61.
- Waga, I. 2000, Revista Brasileira do Ensino de Física, **22**, 2.
- Waga, I. 2005, Revista Brasileira do Ensino de Física, **27**, 1.
- Walker, A. G. 1936, Proc. Lond. Math. Soc. (2), **42**, 90.
- Weinberg, S. 1972, *Gravitation and Cosmology*, (New York: Wiley).
- Wertz, J. R. 1970, *Newtonian Hierarchical Cosmology*, Tese de doutorado, University of Texas at Austin.
- Wertz, J. R. 1971, ApJ, **164**, 227.
- Wesson, P.S. 1978, Astrophys. Spa. Sci., **54**, 489.
- Wesson, P.S. 1979, ApJ, **228**, 647.
- Weyl, H. 1923, Z. Phys., **24**, 230.