

PERCOLAÇÃO EM BARRAGENS DE TERRA EM REGIME PERMANENTE E
TRANSIENTE COM O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

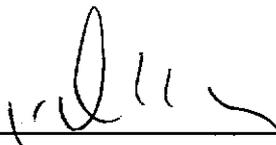
Jorge Henrique Alves Prodanoff

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL

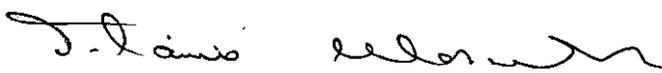
Aprovada por:



Prof. Webe João Mansur, Ph.D.
(Presidente)



Prof. José Claudio Faria Telles, Ph.D.



Prof. Flavio Cesar Borba Mascarenhas, D.Sc.



Prof. Eurípedes do Amaral Vargas Jr, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

SETEMBRO DE 1991

PRODANOFF, JORGE HENRIQUE ALVES

Percolação em Barragens de Terra em Regime Permanente e Transiente com o Método dos Elementos de Contorno.

[Rio de Janeiro] 1991.

ix, 134 p. 29.7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1991)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Percolação
2. Elementos de Contorno
3. Hidráulica
4. Barragem

I. COPPE/UFRJ

II. Título (série)

Aos meus pais Jorge e Iracema

Aos meus irmãos Claudia e Fernando

Um coração quente e vibrante
Um ar cheio de graça e perfumado
Um sorriso alegre e gostoso

Com paciência sem limites
Dedicada dia a dia
Um carinho e
Um amor sem iguais

As lágrimas me soltam aos olhos
Só de pensar o que fizestes por mim
Sou muito grato a você, minha paixão
Minha linda companheira

CRISTINA

AGRADECIMENTOS

Ao professor Webe João Mansur pelos inúmeros momentos de atenção, dedicação e paciência dispendidos durante as fases de orientação e discussão desta tese. Recebendo a continuidade da orientação, iniciada pelo prof. Wrobel, conseguiu aumentar meu interesse pelos métodos numéricos, colocando os problemas e suas soluções sob uma ótica bem abrangente.

Ao professor Luiz Carlos Wrobel pelo incentivo nos estudos básicos dos métodos numéricos desde meus estudos de graduação e por muitos gestos de camaradagem.

Ao Dr. Erton Carvalho pela credibilidade depositada neste trabalho de pesquisa ;

Devo agradecimentos a um grande número de pessoas, pelo apoio e incentivo indispensáveis para a conclusão deste trabalho:

Ao Prof. Flavio Cesar Borba Mascarenhas (EE/UFRJ);

Ao Dr. Newton de Oliveira Carvalho (ELETROBRÁS)

Ao Dr. Jānis Ivars Ritins e Edwalds (SENAI);

Ao Prof. Jaime Cabral (Computational Mechanics Institute, U.K);

Ao Dr. John C. Bruch, Jr. (Universidade da California, USA);

Aos meus colegas de FURNAS (DEPH.T) Marcelo, Alba Valéria, José Ricardo, Sandra, Alexandre e Luiza Cristina; (DISC.T) Josemar, Celso Pires, Quintiliano; (CI) Alexandre Ponciano ; (DMA.T) Sidney; Superintendência de Engenharia - Elcio, Bertholdo, Beni, Esther, Analites e Jackeline;

Aos meus companheiros da COPPE Djalma, Rodolfo, Miguez, Arízio, Juan, Ana Paula, Luciene, Otto, Helena e Daniel;

Os gráficos ,em formato A4, do capítulo VI foram plotados com o uso do pacote gráfico FORTGRAF 2.0, cedido pelo eng^o Marcelo Roberto;

As figuras foram confeccionadas pela minha irmã Claudia;

A pesquisa bibliográfica contou com a ajuda das bibliotecárias Helena e Vanise de FURNAS e das bibliotecárias da COPPE/UFRJ - Bloco B, em especial da Solange e também da eng^a Sandra Nunes;

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

PERCOLAÇÃO EM BARRAGENS DE TERRA EM REGIME PERMANENTE E
TRANSIENTE COM O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Jorge Henrique Alves Prodanoff

Setembro de 1991

Orientadores: Webe João Mansur/
Luiz Carlos Wrobel

Programa: Engenharia Civil

Este trabalho tem por objetivo principal a análise numérica do fenômeno de percolação através do corpo de uma barragem de terra. As análises das fronteiras móveis, nas fases de enchimento e esvaziamento de reservatórios, são de fundamental importância para o estudo da estabilidade do maciço e no dimensionamento das estruturas internas de drenagem. O Método dos Elementos de Contorno é utilizado para simular a evolução temporal da superfície freática em barragens de terra homogêneas. Uma especial atenção é dada na implementação do elemento isoparamétrico quadrático, que possibilita modelar geometrias curvas e melhor obedece as condições de tangência entre as superfícies freáticas e as superfícies de percolação. As discontinuidades físicas e geométricas são tratadas com o uso de elementos descontínuos de colocação não-nodal, que se utilizam da propriedade de possuírem nós geométricos nas extremidades mas os nós funcionais internos ao elemento. Outra ênfase é dada a inclusão no código de programação da transformação não-linear de terceira ordem de Telles, que aumenta a precisão das integrais singulares avaliadas por um esquema de quadratura de Gauss. Um tratamento adequado das discontinuidades eliminou as oscilações numéricas ao longo da superfície freática, tornado desnecessário o uso de técnicas de suavização, mesmo quando um esquema explícito de marcha no tempo foi empregado. Os resultados são analisados e comparados quanto à sua precisão e comportamento numérico.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

A BOUNDARY ELEMENT ANALYSIS OF A STEADY AND
TRANSIENT SEEPAGE THROUGH EARTH DAMS

Jorge Henrique Alves Prodanoff

September, 1991

Thesis Supervisor : Webe João Mansur/
Luiz Carlos Wrobel

Department : Civil Engineering

The main purpose of this work is the numerical analysis of the seepage process through an earth dam. The transient free surface flow during the fill-up and drawdown phases of a reservoir is of utmost importance in the analysis of embankment stability and to compute the internal drainage devices. A boundary element procedure for dealing with steady and unsteady seepage flow with a free surface in homogeneous earth dams is presented. Special attention is given to the implementation of isoparametric quadratic elements, which improve curved geometric modelling capabilities and can obey the tangent condition at the interface between the free and seepage faces. Physical and geometrical discontinuities are treated with the use of special non-nodal-collocation elements with nodes at their extremities but collocation points inside the element. Another emphasis is the inclusion in the computer code of Telles' third degree polynomial transformation, in order to improve the accuracy of Gaussian quadrature schemes in the near-singularity range. An adequate treatment of discontinuities significantly reduces numerical oscillations along the free surface making smoothing procedures unnecessary, even if an explicit time marching scheme is employed. The results are analysed and compared regarding their accuracy and numerical behaviour.

SUMÁRIO

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	1
I.1 - Generalidades	1
I.2 - Problemas Gerais de Fronteira Livre e Fronteira Móvel	2
I.3 - Escoamento Subterrâneo no Plano Vertical	3
I.4 - Métodos Numéricos para Solução do Problema	3
I.5 - Escopo do Trabalho	5
 CAPÍTULO II - EQUAÇÕES GOVERNANTES	 6
II.1 - Parte Subterrânea do Ciclo Hidrológico	6
II.2 - Potenciais em Águas Subterrâneas	9
II.2.1 - Potencial Gravitacional	10
II.2.2 - Potencial de Pressão Hidrostática	10
II.2.3 - Potencial de Pressão Osmótica	11
II.2.4 - Potencial de Adsorção	11
II.2.5 - Potencial Térmico	12
II.2.6 - Potencial Químico	12
II.2.7 - Potencial Total	13
II.3 - Equação da Continuidade	14
II.4 - Lei de Darcy	17
II.5 - Potencial de Velocidades e Função de Corrente	20
 CAPÍTULO III - MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA A SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LAPLACE	 21
III.1 - Introdução	21
III.2 - Formulação Direta	22
III.3 - Solução Fundamental	24
III.3.1 - Meio Isotrópico	24
III.3.2 - Meio Ortotrópico e Anisotrópico	25
III.4 - Equação Integral de Contorno	28
III.5 - Discretização da Equação Integral	28
III.5.1 - Elementos Quadráticos	30
III.5.2 - Elementos Isoparamétricos Quadráticos	31
III.6 - Avaliação das Integrais	36
III.6.1 - Integrais Regulares	36
III.6.2 - Integrais Singulares	37
III.6.3 - Transformação de Coordenadas de Telles	40

III.7 - Tratamento de Descontinuidades de Fluxo	41
III.7.1 - Elementos não-conformes	42
III.7.2 - Aproximação Geométrica	42
III.7.3 - Elemento de Colocação não-nodal	42
CAPÍTULO IV - ASPECTOS ESPECÍFICOS DA APLICAÇÃO DO MÉTODO	
DOS ELEMENTOS DE CONTORNO A PROBLEMAS DE PERCOLAÇÃO	44
IV.1 - Introdução	44
IV.2 - Condições de Contorno	44
IV.2.1 - Para o Regime Permanente	44
IV.2.2 - Para o Regime Transiente	47
IV.3 - Discretização das Condições de Contorno da Superfície freática	48
IV.4 - Esquemas de Avanço no Tempo	50
IV.4.1 - Esquema Explícito	50
IV.4.2 - Esquema Implícito	51
IV.5 - Determinação Iterativa da Superfície livre	52
IV.6 - Formulação Matricial	53
CAPÍTULO V - PROGRAMAMAÇÃO	57
V.1 - Descrição dos Programas Desenvolvidos	57
V.2 - Fluxograma do Programa "IMPLICIT"	59
V.3 - Descrição das Subrotinas do Programa "IMPLICIT"	61
CAPÍTULO VI - APLICAÇÕES	64
VI.1 - Introdução	64
VI.2 - O Movimento Inicial	65
VI.3 - O Regime Transiente	69
VI.4 - O Regime Permanente	73
CAPÍTULO VII - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	78
VII.1 - Observações preliminares	78
VII.2 - Conclusões	79
VII.3 - Recomendações	81
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	108
APÊNDICE A - Cálculo Analítico dos coeficientes de influência da matriz G - Elementos Lineares	
APÊNDICE B - Cálculo Analítico dos coeficientes de influência da matriz G - Elementos Quadráticos	

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

I.1 - GENERALIDADES

Através de registros históricos existem evidências que a humanidade teme e respeita o poder destrutivo das águas. Este enorme poder destrutivo é sentido por ocasião da ocorrência de marés e cheias excepcionais. Escondida em fendas na rocha ou em poros no solo, ela exerce forças extraordinárias capazes de provocar grandes deslizamentos de terra e destruir obras de engenharia. Quando as águas subterrâneas e a percolação¹ não são controladas, podem causar sérias perdas de vidas humanas e econômicas. Quando controladas não precisam ser temidas, Cedergreen(1967).

A maioria dos colapsos estruturais causados por águas subterrâneas e pela percolação podem ser classificados de acordo com duas categorias: aquela que acontece quando partículas de solo migram para uma área de escape, causando uma falha por entubamento ("piping") ou erosão regressiva; e uma outra que ocorre por descontrole dos padrões de percolação que conduzem à saturação; por sobrepressão ou por excessivas forças de percolação. Alguns tipos comuns de falhas devido a estes descontroles podem ser vistas em Cedergren (1967). Casos históricos de rupturas de barragens, causadas pelo fenômeno de piping, deslizamento de encostas e problemas de fundação são descritos em Mascarenhas (1990).

¹ Tipo de escoamento laminar que se produz nos interstícios de um material poroso saturado sob a ação de gradientes hidráulicos moderados, dirigidos principalmente para baixo (fonte:Glossário de termos hidrológicos, 1976).

I.2 - PROBLEMAS GERAIS DE FRONTEIRA LIVRE E FRONTEIRA MÓVEL

Define-se um problema de fronteira livre, PFL (em inglês, free-boundary problem) como um problema de valor de contorno envolvendo equações diferenciais no domínio, onde parte, as fronteiras livres, não são conhecidas a priori e devem ser determinadas como parte da solução. Um problema de fronteira móvel, PFM (em inglês, moving boundary problem) é definido como um problema de valor inicial para equações diferenciais envolvendo fronteiras livres desconhecidas, Cryer(1978). A maioria dos PFL podem ser interpretados como o limite quando o tempo t tende ao infinito do correspondente PFM.

Um PFL requer, geralmente, a solução de uma equação diferencial parcial elíptica. As fronteiras móveis, por outro lado, são associadas com problemas dependentes do tempo e a posição do contorno deve ser determinada como função do tempo e espaço. Para este último tipo de problema a equação é, geralmente, do tipo parabólica ou hiperbólica, Crank(1984).

De acordo com a pesquisa bibliográfica realizada por Cryer(1976b), a distribuição aproximada de referências, dentre as diversas áreas de aplicação é dada pela tabela abaixo.

Área de aplicação	Percentual de referências
Mecânica do Fluidos	58
Fluxo em Meios Porosos	10
Elasticidade e Plasticidade	15
Condução de Calor e Difusão	1
Eletromagnetismo	5
Gravitação	2
Reações Químicas	1
Problemas Acoplados	5
Teoria de Controle	1
Otimização	1
Matemática Generalizada	1
	<hr/>
	100

PFM são, freqüentemente, chamados de problemas de Stefan, com referência aos trabalhos de J. Stefan, que, por volta de 1890, interessou-se no derretimento da calota polar.

I.3 - ESCOAMENTO SUBTERRÂNEO NO PLANO VERTICAL

Alguns exemplos práticos de aplicações onde, as análises das fronteiras móveis e livres (superfície freática S.F. e superfície de percolação S.P.) desempenham papéis importantes são:

-Escoamentos em diques e em canais de irrigação;

-Escoamentos subterrâneos onde a vegetação (nativa ou cultivada) é sensível à mudanças do nível do lençól freático e

-Nas fases de enchimento e esvaziamento de reservatórios, para o estudo da estabilidade do maciço da barragem e para o dimensionamento das estruturas internas de drenagem.

As dificuldades introduzidas pelas não-linearidades geométricas envolvidas nestas análises, possibilita a existência de soluções analíticas somente em condições relativamente simples ou quando hipóteses simplificadoras são introduzidas, Harr(1962). Como conseqüência, na maioria dos casos de interesse prático, os cálculos são feitos através de métodos numéricos.

Investigações teóricas mostram que os escoamentos de águas subterrâneas são, em muitos casos, laminares, isto é, as forças de resistência viscosa são proporcionais à velocidade do escoamento. Como conseqüência, estes escoamentos são descritos, em muitos casos, por equações diferenciais parciais do tipo elíptica (ex.Laplace) ou parabólica (ex.Difusão).

I.4- MÉTODOS NUMÉRICOS PARA SOLUÇÃO DO PROBLEMA

O procedimento numérico de solução no caso acima citado, que é o enfoque principal deste trabalho, baseia-se na utilização de códigos de programa escritos em linguagem de alto nível e na discretização do meio contínuo. Em suma, a distribuição das cargas hidráulicas e formato da S.F. podem ser expressas em função de um número finito de valores, avaliados em nós de uma malha que aproxima o problema original.

De maneira geral, as técnicas numéricas de solução podem ser subdivididas em dois grupos principais:(a)aquelas que operam com malhas ou "grids" de geometria fixa, determinando a posição da S.F. como a interface que separa a parte saturada da parte não-saturada, (b)aquelas que alteram a geometria da malha até que parte do contorno se aproxime da forma correta da S.F., dentro de uma certa precisão.

Devido às características da deformação da geometria da malha durante o processo de cálculo, a técnica de malha variável, normalmente, envolve problemas e um maior trabalho de programação, do que aqueles baseados em malhas fixas, mas por outro lado, são geralmente mais precisas, Cividini e Gioda(1989). No caso de malhas variáveis, geralmente necessita-se de um gerador de malha automático, quase sempre complicado, para a redefinição da malha quando os Métodos das Diferenças Finitas MDF ou dos Elementos Finitos MEF são empregados. Este fato é, certamente, uma das razões que estimularam pesquisadores a aplicarem o Método dos Elementos de Contorno MEC na análise de problemas de percolação, Prodanoff, Wrobel e Mansur (1990).

A técnica de malhas variáveis parece particularmente mais adequada para uma determinação precisa da S.F. e, acima de tudo, a posição do "ponto de afloramento" (interseção entre a S.F. e o contorno permeável sujeito pressão atmosférica). Este contorno permeável é também chamado de superfície de percolação S.P.. Diversos trabalhos na literatura, como por exemplo o de Chang(1988), têm notado que, na ocorrência da face de percolação surgem instabilidades durante os processos de solução, conduzindo a oscilações na SL ou divergência da solução final.

Vários artifícios tem sido sugerido na tentativa de eliminar esses distúrbios. Alguns deles atuam somente nas vizinhanças do ponto de afloramento, descrevendo, por exemplo, a forma final da S.F. através de funções de suavização. Alternativamente pode-se adotar o refinamento da malha perto da face de percolação de forma tal que as possíveis oscilações da S.F. fiquem confinadas a uma faixa estreita e assim não influenciando, de maneira significativa, a forma geral da solução, vide Taylor e Brown(1967), Cheng e Li(1973). Algoritmos de programação matemática contendo funções de minimização acoplados que aplicam integrais ou somatórios em toda a extensão da S.F. encontram-se com detalhes em Cividini e Gioda (1989).

1.5 - ESCOPO DO TRABALHO

No presente trabalho, apresenta-se a técnica dos Elementos de Contorno aplicado a problemas de percolação. As singularidades de fluxo, que ao lado das descontinuidades de fluxo têm sido objeto intenso de pesquisas, não são aqui estudadas. A necessidade de se tratar a singularidades de fluxo é importante quando se deseja calcular as vazões efluentes usando-se a seção de saída e também para cálculo das velocidades de escape no paramento de jusante e nas regiões bem próximas. Dentre os diversos aspectos computacionais a serem aqui apresentados, faz-se especial enfoque ao tratamento adequado das descontinuidades geométricas e de fluxo. O não tratamento destas descontinuidades é tido, via de regra, a principal fonte causadora de perturbações numéricas na S.F. e na determinação do ponto de afloramento.

Propõe-se um esquema de colocação não-nodal nos elementos de contorno superparamétricos e isoparamétricos quadráticos para o tratamento das descontinuidades de fluxo, que aparecem nos pontos de afloramento da S.F. Este procedimento foi introduzido por Mustoe et al (1982) e implementado e aperfeiçoado por Marques e Mansur (1987). No capítulo que estuda as descontinuidades são indicadas outras formas alternativas, semelhantemente eficientes, com suas respectivas precisões e facilidades de implementação computacional.

CAPÍTULO II

EQUAÇÕES GOVERNANTES

II.1 - PARTE SUBTERRÂNEA DO CICLO HIDROLÓGICO

O ciclo hidrológico descreve o transporte recirculatório contínuo de águas na Terra, conectando a atmosfera, as terras emersas e os oceanos. O processo é bastante complexo, contendo muitos sub-ciclos. De maneira resumida, a água evapora da superfície dos oceanos, movida pela energia do sol, junta-se à atmosfera, movendo-se para as terras emersas. Uma vez sobre estas terras, as condições atmosféricas atuam no sentido de condensar e precipitar as águas sobre a superfície, onde, conduzidas por forças gravitacionais, retorna aos oceanos através de rios, córregos e por via subterrânea, Ponce(1989). Durante o tempo de residência sob a superfície terrestre, a água circulante é conhecida como água sub-superficial ou água subterrânea.

A água sub-superficial ocorre em aberturas na rocha ou no solo conhecidas como vazios, interstícios ou poros, Todd(1959). Os interstícios originais foram criados pelos processos geológicos que governaram a origem da formação dos solos da Terra e são encontrados em rochas sedimentares e ígneas. Após a formação das rochas apareceram os interstícios secundários. Como exemplos temos as juntas, fraturas, aberturas por solução, e aberturas formadas por plantas e animais.

Cabe aqui fazer uma distinção entre as nomenclaturas encontradas na literatura. A parte do solo que não é ocupada pelos sólidos é conhecida como "pore space" no vocabulário inglês ou "voids" no americano e vazios em português.

A porosidade pode ser definida como

$$\varepsilon = \frac{V_v}{V_T} = \frac{V_T - V_p}{V_T} \quad (\text{II.1})$$

onde

ϵ = porosidade

V_v = volume de vazios

V_T = volume total e

V_p = volume total das partículas sólidas.

A porosidade efetiva é de maior importância. É a porosidade devida aos vazios interconectados que podem ser encheidos e esvaziados com água. De agora em diante, quando o termo porosidade for usado, a porosidade efetiva estará implícita.

A característica física mais visível da porosidade de uma matriz rochosa ou de solo "é a sua continuidade, que significa que a percolação de um ponto para outro pode ser feita integralmente pelos espaços intersticiais", Childs(1957). Em virtude de sua continuidade, a matriz porosa tem a capacidade de transmitir fluidos, mais notadamente a água. Dependendo de uma dada situação e ponto de vista, as denominações tais como "permeabilidade", "permeabilidade efetiva", "coeficiente de permeabilidade", "coeficiente de percolação", "condutividade hidráulica" são usadas para descrever esta capacidade de transmitir fluidos. O termo "permeabilidade intrínseca" é geralmente aceito como sendo uma característica particular do meio, em oposição aos termos acima referidos que se aplicam ao meio e ao fluido.

Partindo da superfície até uma certa profundidade a matriz porosa encontra-se apenas parcialmente preenchida. Esta água é chamada de umidade do solo, e esta região é conhecida como zona não-saturada ou zona de aeração. Esta é a "zona na qual os interstícios da rocha permeável funcional não estão cheios (exceto temporariamente) com água. A água está sob pressão inferior à atmosférica", Bear (1972). Então, existem três fases no solo não saturado pertencentes à zona de aeração: a matriz de solo, água na fase líquida e o ar, incluindo o vapor do líquido. Pelo fato da existência destas fases e das respectivas interfaces entre elas, a descrição matemática é mais complicada do que aquela correspondente à zona saturada.

De acordo com Meinzer(1923a,b) a zona de aeração (ou zona vadosa) possui três divisões: a franja capilar, o cinturão intermediário e o cinturão composto da mistura água-solo. Mais detalhes sobre estas divisões podem ser encontrados em seus trabalhos originais.

O lençol freático é definido como a superfície ao longo da qual a pressão reinante é igual a pressão atmosférica. Esta pressão pode ser determinada a partir da elevação da superfície d'água em poços. O lençol freático, na maioria dos casos práticos, é a superfície que separa a zona de aeração, que é realmente não-saturada apenas acima da franja capilar, da zona de saturação logo abaixo.

A matriz porosa na zona de saturação é preenchida com água com exceção de pequenos volumes de gases aprisionados. Esta água é conhecida como **água subterrânea** ou **água freática**. Pelo fato das águas subterrâneas estarem sob uma pressão maior que a atmosférica, elas fluem livremente para um poço ou qualquer outra abertura abaixo do lençol freático. Em contrapartida, para extrair água da zona de aeração, uma **tensão** ou **sucção** deve ser aplicada no solo.

Um volume de matriz rochosa que possua uma condutividade hidráulica significativa e esteja saturado de água é, pelo menos em parte, um aquífero. Um dos dois tipos principais de aquíferos é o aquífero não-confinado. O outro é o aquífero confinado, artesianos ou sob pressão. Um aquífero não-confinado possui o lençol freático no seu topo e a água está em contato direto com a atmosfera do solo. Para maiores detalhes sobre aquíferos confinados e sua classificação ver DeWiest(1969), Bear(1979), Todd(1959).

II.2 - POTENCIAIS EM ÁGUAS SUBTERRÂNEAS

As forças atuantes em águas subterrâneas podem ser descritas por um campo vetorial, composto de diversas forças que atuam no fluido em diversas direções. Quando estas forças se equilibram, a água subterrânea se encontra em equilíbrio estático e não ocorre movimento. Quando as forças não se equilibram, a força resultante causa o movimento do fluido.

Por ser a força um vetor, a resultante de um número de forças deve ser determinada pela adição das componentes de acordo com lei de adição vetorial. Isto é problemático, requerendo uma construção geométrica. Felizmente, para muitas aplicações em meios porosos, esta dificuldade pode ser evitada pela introdução do conceito de uma quantidade escalar: o potencial. Os potenciais podem ser somados pela lei da adição algébrica.

Existem maneiras alternativas de se definir o potencial, incluindo o potencial de velocidades da hidrodinâmica clássica. A última escolha depende, fundamentalmente, da conveniência e adequabilidade para a faixa de problemas que cada um está envolvido, Remson(1971).

Bolt e Miller(1958) definem o potencial total como: "*energia mínima por grama de água que deve ser gasta, de forma a transportar um corpo teste de água infinitesimal, a partir de um estado de referência para qualquer outro ponto da fase líquida do sistema água-solo, que esteja em estado de equilíbrio*". O estado de equilíbrio é, usualmente, assumido como um reservatório de água pura à mesma temperatura e com uma superfície plana, submetido a pressão atmosférica numa dada elevação. Em condições sobre as quais o solo espontaneamente absorve água do estado de referência, o potencial é uma quantidade negativa. Em qualquer sistema água-solo em estado de equilíbrio, o potencial total não varia de ponto para ponto dentro do sistema.

Partindo da definição de potencial como energia por unidade de peso de água, o potencial tem a dimensão de comprimento e pode se expresso como uma **carga hidráulica** (ou "head", inglês).

II.2.1 - POTENCIAL GRAVITACIONAL

Todas as águas na terra estão sob o efeito do campo gravitacional terrestre. O potencial gravitacional é a energia requerida para mover uma massa ou volume d'água infinitesimal de um nível de referência ou datum, onde o potencial gravitacional é tomado como zero, até uma dada posição no campo contra a atração da gravidade.

Usando a definição de potencial como energia por unidade de peso, pode-se escrever a seguinte igualdade:

$$u_g = z \quad (II.2)$$

onde

u_g = potencial gravitacional

z = altura de água acima do nível de referência

Temos então que o potencial gravitacional depende apenas da altura acima do datum e é conhecido como carga de posição ou de elevação.

II.2.2 - POTENCIAL DE PRESSÃO HIDROSTÁTICA

O potencial de pressão hidrostática pode ser tomado como zero na superfície freática. Isto corresponde a uma pressão absoluta equivalente à pressão atmosférica. Então todas as pressões em águas subterâneas são relativas à pressão atmosférica ou são pressões linimétricas.

Abaixo da superfície freática, sob equilíbrio estático, o potencial de pressão hidrostática aumenta com a profundidade. Este é, frequentemente, chamado de carga de pressão, quando expresso em termos de energia por unidade de peso.

II.2.3 - POTENCIAL DE PRESSÃO OSMÓTICA

Cátions frequentemente se tornam dissociados das partículas do solo de tamanho das argilas. A superfície das partículas de solo, neste caso possui carga negativa; estas partículas são conhecidas como micelas. Por causa da atração entre partículas com cargas elétricas opostas, um aumento na concentração de cátions é encontrado nas vizinhanças da micela. Este arranjo de cargas na superfície das micelas é conhecido como dupla camada elétrica ou "Gouy". O potencial de pressão osmótica atua deslocando água na direção das concentrações maiores de íons, isto é, através das partículas e das duplas camadas elétricas.

O potencial de pressão osmótica é importante em solos que encolhem quando drenados. Aplicando-se sucção em solos, que exibem este tipo de fenômeno, a remoção de água, como resultado da sucção externa, alivia a pressão hidrostática no espaço entre as micelas. Portanto o solo se contrai quando seca. De forma semelhante, o solo se expande quando lhe é fornecido água.

II.2.4 - POTENCIAL DE ADSORÇÃO

O potencial de Adsorção é devido às forças de atração entre a matriz aquosa e a matriz particulada. Incluem-se as forças de curto e longo alcance.

As forças de curto alcance são basicamente de dois tipos. Um tipo consiste nas forças químicas, que são "causadas por interações localizadas entre nuvens de elétrons dos íons da superfície e as moléculas da água", Bolt e Miller(1958). O outro tipo são as forças de Van der Waals. As forças coesivas de longo alcance são originadas da atração entre os terminais positivos do dipolo da água e o campo eletrostático emanado pelas partículas de solo com carga negativa.

As forças de adsorção retêm fortemente a água perto da superfície sólida e é necessário uma grande força para removê-la. Todavia, estas forças de adsorção se tornam proeminentes somente quando o solo se encontra numa umidade abaixo do estado de secura que possua algum interesse prático.

II.2.5 - POTENCIAL TÉRMICO

O movimento de água pelos mecanismos da difusão de vapor ou a combinação da difusão de vapor e capilaridade pode ser apreciável quando gradientes térmicos se fazem presentes, Remson (1971). Contudo, a transferência de águas ocorre em grandes quantidades somente quando gradientes térmicos relativamente significativos estão presentes em águas sub-superficiais. Para maiores profundidades os gradientes geralmente são menores. A transferência de água devido a esse pequeno gradiente térmico nas profundezas podem significar quantidades significativas, para um certo período e uma dada área. Contudo, esta é normalmente pequena quando comparada com a transferência de água devida aos outros gradientes. Portanto, assume-se, desde agora, que os gradientes térmicos são desprezíveis e o transporte de água ocorre isotermicamente.

II.2.6 - POTENCIAL QUÍMICO

O potencial químico se deve a energia osmótica dos íons livres, presentes em soluções aquosas. Esta é distinta do potencial devido a energia osmótica de íons aprisionados nas duplas camadas elétricas nas superfícies de partículas sólidas, como visto no item II.2.3.

Na ausência de íons livres ou caso estejam uniformemente distribuídos, o potencial químico pode ser desprezado. Temos ainda, que ele é geralmente desprezado porque o movimento de solutos ocorre mais rapidamente do que o movimento do fluido em relação ao solo, Remson(1971).

II.2.7 - POTENCIAL TOTAL

Assumindo condições isotérmicas e concentração uniforme de solutos, o potencial total é dado pela expressão:

$$u = u_g + (u_p + u_o + u_a) \quad (\text{II.3})$$

onde

u = potencial total

u_p = potencial de pressão hidrostática (positivo ou negativo).

u_o = potencial de pressão osmótica

u_a = potencial de adsorção

Em solos que encolhem quando secam u_o domina u_p . Em solos que não encolhem u_p domina u_o . O potencial de adsorção pode ser desprezado para as faixas normais de umidade de solo.

Normalmente, não é possível calcular isoladamente cada termo entre parênteses. Por esta razão, a equação (II.3) é expressa comumente na forma

$$u = u_g + \Sigma \quad (\text{II.4})$$

onde

$$\Sigma = u_p + u_o + u_a \quad (\text{II.5})$$

Finalmente, para sistemas sub-superficiais saturados

$$u = u_g + u_p \quad (\text{II.6})$$

onde u_p é o potencial positivo de pressão hidrostática abaixo do lençol freático.

II.3 - EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

Para se obter as equações que descrevem o escoamento em meios porosos, adota-se a hipótese do contínuo. Assim, pode-se analisar a variação das propriedades do fluido e do meio poroso em um volume elementar representativo, VER. Para aplicar este método, o VER deve ser suficientemente pequeno de maneira que suas dimensões são desprezíveis quando comparados com aquelas do domínio como um todo. Subsequentemente, o VER é considerado como um ponto material no espaço. Por outro lado, o VER deve ser suficientemente grande para que diferentes propriedades possam ser definidas por seus valores médios.

O conceito de velocidade intersticial é importante para o desenvolvimento da teoria de escoamento em meios porosos. Este é diferente daquele de velocidade do fluido usado na mecânica dos fluidos clássica. O conceito usual de velocidade do fluido é derivado ponderando-se o movimento molecular sobre um volume que é maior que o tamanho de uma molécula mas pequeno em relação ao sistema físico. A velocidade intersticial pode ser obtida ponderando-se a velocidade média sobre um volume de material poroso que é grande em relação aos poros individuais, mas é pequeno em relação ao sistema como um todo.

A velocidade intersticial é a velocidade real com que um traçador move-se através do meio poroso. Ao invés de se usar a velocidade real se mostra vantajoso usar a velocidade de percolação ou Darciana, que é igual à velocidade intersticial multiplicada pela porosidade. Considerando que a velocidade intersticial é a taxa de fluxo de volume por área de poro normal ao escoamento, a velocidade de percolação é a taxa de fluxo de volume por unidade de área total (poros mais as partículas) normal ao escoamento.

A figura (II.1) mostra um VER em forma de paralelepípedo, com o centro em \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} e lados dx , dy , dz localizado em um sistema de coordenadas cartesianas, dentro do campo de um escoamento sub-superficial. O objetivo é estabelecer, matematicamente, que a taxa de saída de massa menos a taxa de entrada de massa é igual a taxa temporal de armazenamento de massa dentro do paralelepípedo.

Seja v_x igual a componente da velocidade de percolação na direção x no ponto $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$.

A taxa de escoamento de massa na face $dy \cdot dz$, localizada a $-dx/2$ do centro do paralelepipedo, é

$$\left(\rho \cdot v_x - \frac{\partial(\rho \cdot v_x)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} \right) \cdot dy \cdot dz \quad (\text{II.7})$$

onde ρ = densidade do fluido. Da mesma forma, a taxa de escoamento de massa para fora da face $dy \cdot dz$, localizada a $+dx/2$ do centro do paralelepipedo é

$$\left(\rho \cdot v_x + \frac{\partial(\rho \cdot v_x)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} \right) \cdot dy \cdot dz \quad (\text{II.8})$$

O saldo das taxas de escoamento na direção x é dado pela diferença entre a taxa de saída (II.8) e a de entrada (II.7)

$$\frac{\partial(\rho \cdot v_x)}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad (\text{II.9})$$

Analogamente, pode-se definir v_y e v_z como as componentes da velocidade de percolação nas direções y e z respectivamente no ponto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

Então, o acréscimo na taxa de escoamento de massa na direção y é

$$\frac{\partial(\rho \cdot v_y)}{\partial y} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad (\text{II.10})$$

O saldo na taxa de escoamento de massa na direção z é

$$\frac{\partial(\rho \cdot v_z)}{\partial z} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad (\text{II.11})$$

A taxa total de transporte de massa é dado pela soma de (II.9), (II.10) e (II.11):

$$\left(\frac{\partial(\rho \cdot v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot v_z)}{\partial z} \right) \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad (\text{II.12})$$

A massa de água armazenada em qualquer instante no paralelepípedo pode ser representada por

$$\rho \cdot \vartheta \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad (\text{II.13})$$

onde ϑ = teor de umidade volumétrico = V_a/V_T (volume de água por volume total da matriz porosa).

A taxa de variação temporal de massa no paralelepípedo elementar é dada por:

$$\frac{\partial(\rho \cdot \vartheta)}{\partial t} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad (\text{II.14})$$

onde t = tempo.

Para se ter a conservação da massa, a equação (II.12) deve ser igual a menos (II.14).

$$-\frac{\partial(\rho \cdot \vartheta)}{\partial t} \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \left(\frac{\partial(\rho \cdot v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot v_z)}{\partial z} \right) \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad (\text{II.15})$$

Dividindo ambos os lados por $(dx \cdot dy \cdot dz)$,

$$-\frac{\partial(\rho \cdot \vartheta)}{\partial t} = \frac{\partial(\rho \cdot v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot v_z)}{\partial z} \quad (\text{II.16})$$

que é a equação da **continuidade**.

Seja \mathbf{v} o vetor que fornece a velocidade de percolação. Então

$$\mathbf{v} = v_x \cdot \mathbf{i} + v_y \cdot \mathbf{j} + v_z \cdot \mathbf{k} \quad (\text{II.17})$$

onde \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} = vetores unitários nas direções x , y , z , respectivamente.

Define-se o operador vetorial gradiente e denotado por " ∇ " como sendo:

$$\nabla = \mathbf{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{II.18})$$

Aplicando-se o produto escalar deste operador vetorial em $\rho \cdot \mathbf{v}$ obtém-se:

$$\nabla(\rho \mathbf{v}) = \frac{\partial(\rho \cdot v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot v_z)}{\partial z} \quad (\text{II.19})$$

Usando-se esta notação, a equação (II.16) pode ser mais convenientemente escrita como:

$$-\frac{\partial(\rho \vartheta)}{\partial t} = \nabla(\rho \cdot \mathbf{v}) \quad (\text{II.20})$$

Desprezando-se as variações na densidade, isto é, $\rho = \text{cte}$, a equação (II.20) se torna

$$-\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \nabla(\mathbf{v}) \quad (\text{II.21})$$

II.4 - LEI DE DARCY

A lei de Darcy é a equação dinâmica que controla o escoamento à baixas velocidades, dito laminar, para o caso específico de meios porosos. Esta equação foi originariamente proposta pelo engenheiro Francês Henry Darcy em 1856. A dedução original desta equação baseou-se em medições de vazão através de um cilindro cheio de areia sob variadas condições de perda de carga e comprimento de escoamento. Esta experiência clássica se encontra esquematizada na figura (II.2). Darcy descobriu que o escoamento saturado de água através de uma coluna de solo é diretamente proporcional ao gradiente de carga e inversamente proporcional ao comprimento da coluna. Esta lei foi empiricamente estabelecida para escoamento em regime permanente.

Darcy(1856) estabeleceu varios gradientes de potencial (cargas) através de colunas contendo material granular, homogêneo e saturado, e mediu as vazões em trânsito. Ele estabeleceu a seguinte relação

$$\mathbf{v} = -K \cdot \frac{du}{dl} \quad (\text{II.22})$$

onde

v = velocidade de percolação [$L \cdot T^{-1}$].

u = potencial total, dado pela equação (II.6), como já visto.

l = distância na direção do escoamento [L].

$$\frac{du}{dl} = \frac{d(u_p + u_g)}{dl} = \text{gradiente de potencial.}$$

K = condutividade hidráulica [$L \cdot T^{-1}$].

O sinal negativo que aparece em (II.22) é devido ao fato que o escoamento se processa na direção do menor potencial.

Para um escoamento tridimensional em um meio isotrópico e homogêneo, pode se escrever a lei de Darcy na forma generalizada

$$\vec{v} = -K \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} \right) \quad (\text{II.23})$$

ou

$$\vec{v} = -K \cdot \nabla u \quad \text{ou} \quad \vec{v} = -K \cdot \text{grad } u \quad (\text{II.24})$$

onde

∇u = gradiente do potencial total(expresso em energia por unidade de peso ou carga).

Hubbert (1940) demonstrou que a lei de Darcy poderia ser deduzida teoricamente. Cooley (1972) apresenta a dedução teórica desta lei, incluindo modificações na dedução original e outras feitas por Collins (1961).

A lei de Darcy somente é válida quando as forças de inércia podem ser consideradas desprezíveis quando comparadas com as forças viscosas. Quando o número de Reynolds, R , é maior que 1, a aceleração do fluxo deve ser considerada, apesar do escoamento ainda ser laminar. Uma aceleração global no meio poroso pode ocorrer, por exemplo, devido a mudanças nas vazões em trânsito. O gradiente hidráulico deve então vencer as resistências ao escoamento e por causa disso provoca uma aceleração global. Todavia, em casos práticos, a influência desta aceleração pode ser desprezada, mesmo quando o fluxo se dá em regime transiente, Polubarinova-Kochina (1962). Como consequência disto a equação (II.24) pode ser aplicada também para escoamentos transientes.

A equação geral que descreve o escoamento de um fluido, sob as hipóteses já vistas, em um meio indeformável, pode ser derivada substituindo-se as componentes da velocidade Darciana v , da lei de Darcy (II.24), na equação da continuidade (II.20). A forma resultante da equação geral para um meio homogêneo e isotrópico é

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} = \nabla(\rho \cdot K \cdot \nabla u) \quad (\text{II.25})$$

Assumindo-se a água como incompressível obtém-se

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \nabla(K \cdot \nabla u) \quad (\text{II.26})$$

Supondo que o teor de umidade se mantém constante

$$\nabla(K \cdot \nabla u) = 0 \quad (\text{II.27})$$

Assumindo o meio homogêneo e isotrópico ($K = \text{constante}$):

$$\nabla^2 u = 0 \quad (\text{II.28})$$

onde $\nabla^2 \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ é o operador Laplaciano tridimensional.

II.5 - POTENCIAL DE VELOCIDADES E FUNÇÃO DE CORRENTE

De maneira geral, quando a velocidade do escoamento é proporcional ao gradiente de uma dada função escalar u , esta função é chamada de **função de velocidades** e o escoamento é dito **potencial**. Pode-se dizer que o escoamento em meios porosos é um escoamento potencial e o **produto $K \cdot u$ é dito potencial de velocidades**.

Existe uma outra função, Ψ , conhecida com função de corrente, que satisfaz igualmente a equação de Laplace, ou seja, $\nabla^2 \Psi = 0$. Para um escoamento bidimensional, pode-se escrever

$$v_x = - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad (\text{II.29})$$

$$v_z = + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (\text{II.30})$$

As equações de Cauchy-Riemann são usadas para relacionar a função de corrente Ψ , solução de $\nabla^2 \Psi = 0$, com u , solução de $\nabla^2 u = 0$. Estas equações são dadas por:

$$\partial u / \partial x = \partial \Psi / \partial z \quad (\text{II.31})$$

e

$$-\partial u / \partial z = \partial \Psi / \partial x \quad (\text{II.32})$$

CAPÍTULO III

MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA A SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LAPLACE

III.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo, apresenta-se o Método dos Elementos de Contorno (MEC) para a solução da Equação de Laplace, visando sua aplicação em problemas de percolação em regime permanente e transiente.

O MEC consiste na transformação da equação diferencial do problema, e suas condições de contorno, numa equação integral envolvendo, apenas, incógnitas no contorno. A equação integral é então discretizada, recaindo num sistema algébrico de equações lineares, Brebbia, Telles e Wrobel(1984).

Os valores nos pontos internos são calculados a partir da solução obtida no contorno. Como todas as aproximações numéricas são feitas no contorno, a dimensão espacial do problema fica reduzida de uma unidade.

A aplicação de equações integrais na formulação de problemas de valor de contorno teve início no começo do século, quando Fredholm (1903) conseguiu demonstrar a existência de soluções para tais problemas, baseado num processo de discretização. Porém, a obtenção destas soluções só foi possível na década de 60, com o advento dos computadores digitais, quando Jawson (1963) e Symm (1963) apresentaram uma técnica numérica para a solução das equações de Fredholm.

O MEC pode ser formulado usando-se dois enfoques diferentes. O primeiro, leva em consideração as equações integrais de Fredholm que constituem a formulação indireta. O segundo permite obter as equações integrais através da formulação dita direta, pelo uso da terceira identidade de Green (Kellogg, 1929). As mesmas relações integrais podem ser obtidas diretamente de considerações de resíduos ponderados, através da formulação dita inversa.

III.2 - FORMULAÇÃO DIRETA

No presente trabalho, optou-se pela formulação direta, obtida a partir de resíduos ponderados. A vantagem de se usar a técnica de resíduos ponderados é a sua generalidade, pois permite a fácil extensão do método para resolver equações diferenciais parciais mais complexas. Ela também pode usada para relacionar e combinar elementos de contorno com outras técnicas numéricas mais clássicas, em particular o método dos elementos finitos, Brebbia, Telles e Wrobel(1984), Brebbia e Dominguez (1989).

Procura-se uma solução aproximada para o problema governado pela equação de Laplace em um domínio (bi ou tridimensional) Ω ,

$$\nabla^2 u(x) = 0 \text{ em } \Omega \text{ (} x \in \Omega \text{)} \quad (\text{III.1})$$

com as seguintes condições no contorno Γ , vide figura (III.1)

(i) Condição do tipo "essencial" ou de Dirichlet

$$u(x) = \bar{u}(x) \text{ em } \Gamma_u \text{ (} x \in \Gamma_u \text{)} \quad (\text{III.2a})$$

(ii) Condição do tipo "natural" ou de Neumann

$$q(x) = \partial u(x)/\partial n = \bar{q}(x) \text{ em } \Gamma_q \text{ (} x \in \Gamma_q \text{)} \quad (\text{III.2b})$$

onde n é a coordenada na direção do vetor \underline{n} unitário normal a Γ , orientado para fora de Ω , e \bar{u} e \bar{q} são os valores prescritos da função e sua derivada com relação à direção normal externa ao contorno Γ . Note que $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_q$, figura (III.1).

A função u é denominada harmônica, dentro do domínio Ω , cercada por uma superfície fechada Γ , quando satisfaz as seguintes condições, Brebbia, Telles e Wrobel(1984):

- (i) u é contínua em Ω e Γ ;
- (ii) u é diferenciável pelo menos até segunda ordem em Ω ;
- (iii) u satisfaz a equação de Laplace em Ω .

Admitindo que u e q sejam soluções aproximadas para o problema de potencial, surgem 3 tipos de resíduos:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u(x) &= R & x \in \Omega \\ u(x) - \bar{u}(x) &= R_u & x \in \Gamma_u \\ q(x) - \bar{q}(x) &= R_q & x \in \Gamma_q \end{aligned} \quad (III.3)$$

O erro introduzido na equação diferencial, quando os valores exatos de u e q são trocados por soluções aproximadas, pode ser minimizado escrevendo-se a seguinte expressão de resíduos ponderados:

$$\int_{\Omega} R \cdot w \cdot d\Omega = \int_{\Gamma_q} R_q \cdot w \cdot d\Gamma - \int_{\Gamma_u} R_u \cdot \frac{\partial w}{\partial n} \cdot d\Gamma \quad (III.4)$$

ou

$$\int_{\Omega} \left[\nabla^2 u(x) \right] \cdot u^*(\xi, x) \cdot d\Omega(x) = \int_{\Gamma_q} \left[q(x) - \bar{q}(x) \right] \cdot u^*(\xi, x) \cdot d\Gamma(x)$$

$$- \int_{\Gamma_u} \left[u(x) - \bar{u}(x) \right] \cdot q^*(\xi, x) \cdot d\Gamma(x) \quad (III.5)$$

onde u^* é uma função de ponderação e

$$q^*(\xi, x) = \frac{\partial u^*(\xi, x)}{\partial n(x)} \quad (III.6)$$

Na literatura de elementos de contorno e da teoria de potencial, Kellogg(1929), os pontos ξ e x são denominados ponto fonte e ponto campo, respectivamente. Integrando-se por partes duas vezes o lado esquerdo da equação (III.5), obtem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\nabla^2 u^*(\xi, x) \right) \cdot u(x) \cdot d\Omega(x) &= - \int_{\Gamma_q} \bar{q}(x) \cdot u^*(\xi, x) \cdot d\Gamma(x) - \int_{\Gamma_u} u^*(\xi, x) \cdot q(x) \cdot d\Gamma(x) \\ + \int_{\Gamma_q} u(x) \cdot q^*(\xi, x) \cdot d\Gamma(x) &+ \int_{\Gamma_u} \bar{u}(x) \cdot q^*(\xi, x) \cdot d\Gamma(x) \end{aligned} \quad (III.7)$$

Esta é uma equação básica, por ser o ponto de partida para a aplicação do MEC. A tarefa agora, passa a ser transformar a equação (III.7) em uma equação integral envolvendo apenas incógnitas de contorno. Isto pode ser feito usando-se um tipo especial de função de ponderação u^* , chamada de solução fundamental, Brebbia e Dominguez(1989).

III.3 - SOLUÇÃO FUNDAMENTAL

III.3.1 - Meio Isotrópico

Neste trabalho será usada a solução fundamental em um domínio infinito, correspondente ao campo gerado por uma fonte unitária atuando em ξ . Neste caso:

$$\nabla^2 u^*(\xi, x) = -\Delta(\xi, x) \quad (\text{III.8})$$

onde a função delta de Dirac $\Delta(\xi, x)$ é definida por:

$$\begin{aligned} \Delta(\xi, x) &= 0 && \text{para } \xi \neq x && (\text{III.9}) \\ \int_{\Omega} \Delta(\xi, x) \, dx &= 1 && (x \in \Omega) \end{aligned}$$

sendo uma de suas propriedades a seguinte:

$$\int_{\Omega} \Delta(\xi, x) \cdot f(x) \, dx = f(\xi) \quad (x \in \Omega) \quad (\text{III.10})$$

Aplicando a propriedade (III.10) no lado esquerdo de (III.7), tem-se

$$\int_{\Omega} \left(\nabla^2 u^*(\xi, x) \right) \cdot u(x) \cdot d\Omega(x) = \int_{\Omega} u(x) \cdot (-\Delta(\xi, x)) \cdot d\Omega(x) = -u(\xi) \quad (\text{III.11})$$

Quando se estuda a solução de determinadas equações diferenciais, o uso da função delta de Dirac é uma maneira elegante de se representar fontes concentradas.

Pode-se escrever a equação (III.7), de forma genérica, na forma

$$u(\xi) + \int_{\Gamma} u(x) \cdot q^*(\xi, x) \cdot d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} q(x) \cdot u^*(\xi, x) \cdot d\Gamma(x) \quad (\text{III.12})$$

onde fica implícito que $u(x)$ e $q(x)$ assumem seus valores prescritos quando o ponto campo x estiver sobre Γ_u ou Γ_q , respectivamente. Deve ser lembrado que a equação (III.12) se aplica a uma fonte concentrada em " ξ " e conseqüentemente os valores de u^* e q^* são aqueles correspondentes a uma dada posição particular da fonte. Para cada posição particular de ξ encontra-se uma nova equação integral. A equação (III.12) relaciona o potencial no domínio com o fluxo e potencial no contorno.

A solução fundamental da equação (III.8) e sua derivada direcional para um meio isotrópico tridimensional são:

$$u^* = \frac{1}{4 \pi r}, \quad q^* = - \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial n} \quad (\text{III.13})$$

e para um domínio isotrópico bidimensional:

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{1}{r}\right), \quad q^* = - \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial r}{\partial n} \quad (\text{III.14})$$

onde r é a distância euclideana entre o ponto ξ de aplicação da função delta e qualquer outro ponto em consideração, pertencente ao domínio.

III.3.2 - Meio Ortotrópico e Anisotrópico

Até o presente momento, considerou-se apenas problemas envolvendo materiais ou meios isotrópicos, isto é, aqueles em que as propriedades são as mesmas em todas as direções. Estuda-se, agora, aqueles materiais cujas propriedades são diferentes. Conhecendo-se a priori as direções principais, figura (III.2), a equação que governa problemas em duas dimensões pode ser escrito na forma,

$$k_1 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + k_2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} = 0 \quad (\text{III.15})$$

onde k_i é o coeficiente da propriedade do meio na direção i . Para problemas tridimensionais a equação é dada por:

$$k_1 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + k_2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} + k_3 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y_3^2} = 0 \quad (\text{III.16})$$

A solução fundamental correspondente às equações acima pode ser encontrada, transformando-se o sistema de coordenadas y_j em um sistema z_j no qual as equações governantes (III.15) ou (III.16) tornam-se a equação de Laplace sem os coeficientes k_j . Isto pode ser alcançado usando-se a seguinte transformação,

$$z_j = \frac{y_j}{\sqrt{k_j}} \quad (\text{III.17})$$

Conhecendo-se a solução fundamental da equação de Laplace no sistema z_j , pode-se, então, retornar para as coordenadas y_j . Para um problema bidimensional tem-se a seguinte solução:

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{k_1 k_2}} \cdot \ln \left(\frac{1}{r} \right) \quad (\text{III.18})$$

onde a distância euclideana r é dada por

$$r = \left(\frac{1}{k_1} \cdot [y_1^i - y_1]^2 + \frac{1}{k_2} \cdot [y_2^i - y_2]^2 \right)^{1/2} \quad (\text{III.19})$$

onde y_1, y_2 são as coordenadas do ponto em questão e y_1^i, y_2^i são aquelas correspondentes aos nós onde a solução fundamental é aplicada.

O fluxo normal correspondente é dado por

$$q^* = k_1 \cdot \frac{\partial u^*}{\partial y_1} \cdot n_{y1} + k_2 \cdot \frac{\partial u^*}{\partial y_2} \cdot n_{y2} \quad (\text{III.20})$$

onde n_{y1} e n_{y2} são os cossenos diretores da normal \underline{n} a superfície, em relação a y_1 e y_2 respectivamente. Da mesma forma tem-se o fluxo real

$$q = k_1 \cdot \frac{\partial u}{\partial y_1} \cdot n_{y1} + k_2 \cdot \frac{\partial u}{\partial y_2} \cdot n_{y2} \quad (\text{III.21})$$

Tem-se ainda, para um meio mais genérico, a equação (III.15) escrita como:

$$k_{11} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + k_{12} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + k_{22} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0 \quad (\text{III.22})$$

onde os coeficientes k_{ij} representam os termos do tensor das propriedades do meio.

A solução fundamental é dada, para este último caso, por

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{|k_{ij}|}} \cdot \ln \left(\frac{1}{r} \right) \quad (\text{III.23})$$

onde $|k_{ij}|$ é o determinante da matriz de coeficientes das propriedades do meio e quando $K_{12}=K_{21}$ pode-se escrever

$$|k_{ij}| = k_{11}k_{22} - k_{12}^2 \quad (\text{III.24})$$

A distância r é dada pela expressão

$$r = \left(\frac{1}{k_{11}} \cdot [x_1^i - x_1]^2 + \frac{2}{k_{12}} \cdot [x_1^i - x_1][x_2^i - x_2] + \frac{1}{k_{22}} \cdot [x_2^i - x_2]^2 \right)^{1/2} \quad (\text{III.25})$$

O fluxo normal q é:

$$q = \left(k_{11} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} + k_{12} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \cdot n_{x1} + \left(k_{12} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} + k_{22} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \cdot n_{x2} \quad (\text{III.26})$$

O fluxo normal q^* é:

$$q^* = \left(k_{11} \cdot \frac{\partial u^*}{\partial x_1} + k_{12} \cdot \frac{\partial u^*}{\partial x_2} \right) \cdot n_{x1} + \left(k_{12} \cdot \frac{\partial u^*}{\partial x_1} + k_{22} \cdot \frac{\partial u^*}{\partial x_2} \right) \cdot n_{x2} \quad (\text{III.27})$$

A solução fundamental para o caso tridimensional é:

$$u^* = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{k_1 k_2 k_3}} \quad (\text{III.28})$$

onde r é agora

$$r = \left(\frac{1}{k_1} \cdot [y_1^i - y_1]^2 + \frac{1}{k_2} \cdot [y_2^i - y_2]^2 + \frac{1}{k_3} \cdot [y_3^i - y_3]^2 \right)^{1/2} \quad (\text{III.29})$$

Expressões análogas ao caso bidimensional se aplicam para os fluxos q^* e q .

III.4 - EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO

A equação (III.12), deduzida anteriormente, é válida para qualquer ponto pertencente ao domínio Ω , mas não no contorno. Portanto ela deve ser levada a este contorno, de maneira que possa entrar na solução do problema. Necessita-se descobrir o que ocorre quando o ponto ξ está em Γ . Considere que o contorno em torno de ξ seja acrescido de uma pequena superfície hemisférica de raio r_e no contorno em um domínio tridimensional ou de um semi-círculo para o caso bidimensional, figura (III.3); o ponto do contorno é assumido como estando no centro da esfera e então r_e é levado a zero. Daí, o ponto se torna um ponto do contorno e a expressão resultante torna-se um caso particular de (III.11) para um ponto em Γ . Finalmente, a Equação Integral de Contorno para problemas definidos pela equação (III.1), válida tanto para pontos ξ internos ou pertencentes ao contorno é:

$$c(\xi) \cdot u(\xi) + VP \int_{\Gamma} u(x) \cdot q^*(\xi, x) \cdot d\Gamma(x) = VP \int_{\Gamma} q(x) \cdot u^*(\xi, x) \cdot d\Gamma(x) \quad (III.30)$$

onde $c(\xi)$ vale 1 se ξ é um ponto interno ou vale $\theta/2\pi$ se ξ pertence ao contorno. Para contornos suaves $\theta = \pi$ e $c = 1/2$, onde θ é o ângulo local interno em radianos. As integrais acima são calculadas no sentido do Valor Principal de Cauchy(VP). Geralmente, esta é a equação integral de contorno utilizada como ponto inicial para a formulação do Método dos Elementos de Contorno.

III.5 - DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO INTEGRAL

Como aproximação, assume-se que o contorno Γ seja dividido em N_e segmentos ou elementos. Os pontos onde os valores das incógnitas são tomados chamam-se de "nós". A subdivisão do contorno pode ser feita com o uso de diferentes tipos de elementos, figura (III.4):

- (a) elementos constantes: o contorno é dividido em N segmentos retos. Os valores das incógnitas são avaliados no ponto mediano do elemento.
- (b) elementos lineares: o contorno é dividido como em (a), mas as incógnitas são avaliadas nos pontos de interseção entre dois elementos consecutivos, isto é, em suas extremidades.

(c) elementos quadráticos: um nó extra é incluído no interior do elemento, possibilitando assim, uma modelagem de contornos curvos.

No presente estudo são considerados os casos (b) e (c), sendo que a ênfase é dada na aplicação de elementos quadráticos.

A equação (III.30) pode ser expressa de forma discretizada :

$$c(\xi) \cdot u(\xi) + \sum_{j=1}^{Ne} \int_{\Gamma_j} u(x) \cdot q^*(\xi, x) \cdot d\Gamma(x) = \sum_{j=1}^{Ne} \int_{\Gamma_j} q(x) \cdot u^*(\xi, x) \cdot d\Gamma(x) \quad (III.31)$$

Supõe-se também que dentro do elemento j , $u(x)$ e $q(x)$ sejam aproximados da forma:

$$\begin{aligned} u_j &= \sum_{k=0}^{mu} u_k^j \cdot N_k \\ q_j &= \sum_{k=0}^{mq} q_k^j \cdot N_k \quad x \in \Gamma_j \end{aligned} \quad (III.32)$$

onde u_j potencial no elemento j
 q_j fluxo na direção normal no elemento j
 u_k^j, q_k^j valores nodais da solução aproximada
 $N_k(x)$ funções de interpolação
 mu, mq ordens de interpolação para o potencial e o fluxo

Pode-se reescrever a equação (III.31), para ξ pertencente ao elemento Γ_i , já em notação indicial, como:

$$\begin{aligned} c_i \sum_{k=0}^{mu} u_k^i \cdot N_k + \sum_{j=1}^{Ne} \sum_{k=0}^{mu} u_k^j \cdot \left(\int_{\Gamma_j} N_k \cdot q^* \cdot d\Gamma \right) = \\ \sum_{j=1}^{Ne} \sum_{k=0}^{mq} q_k^j \cdot \left(\int_{\Gamma_j} N_k \cdot u^* \cdot d\Gamma \right) \end{aligned} \quad (III.33)$$

Como o método baseia-se na formulação inversa da expressão de resíduos ponderados, não é necessário que seja garantida continuidade de potencial ou suas derivadas entre elementos adjacentes, pois o operador diferencial do problema é aplicado sobre as funções de

ponderação. A família de funções de interpolação pode assim ser feita com grande liberdade.

É importante ressaltar que, em princípio, cada elemento pode apresentar interpolações de ordens diferentes para u e q , bem como para a mesma grandeza entre elementos distintos. Larock (1977) apresenta uma discussão sobre o artigo de Liggett (1977), onde ele coloca como necessário o uso de um grau maior para a interpolação do potencial. Todavia, o que se observa é que esta afirmativa não é válida, pois as integrações são feitas no sentido do contorno (tangencial) enquanto que o fluxo representa uma variação na direção normal ao contorno. Além disso, a introdução de ordens diferentes de aproximação, acarretaria na não coincidência geométrica das incógnitas nodais do fluxo e do potencial em parte do contorno Γ .

Definindo agora

$$h_{ij}^k = \int_{\Gamma_j} N_k^j(x) \cdot u^*(\xi_i, x) \cdot d\Gamma$$

e

$$g_{ij}^k = \int_{\Gamma_j} N_k^j(x) \cdot q^*(\xi_i, x) \cdot d\Gamma \quad (\text{III.34})$$

onde

i refere-se ao ponto fonte ξ_i

j refere-se ao elemento j

k é a ordem da função de interpolação N_k

reescreve-se a equação (III.33) como

$$c_i \sum_{k=0}^{mu} u_k^i \cdot N_k + \sum_{j=1}^{Ne} \sum_{k=0}^{mu} u_k^j \cdot \hat{h}_{ij}^k = \sum_{j=1}^{Ne} \sum_{k=0}^{mq} q_k^j \cdot g_{ij}^k \quad (\text{III.35})$$

III.5.1 - ELEMENTOS QUADRÁTICOS

Os elementos constantes e lineares são bem apropriados para resolver muitos problemas de potencial no plano, abrangendo domínios infinitos ou finitos, etc. A maior limitação é que eles não são capazes de representar adequadamente geometrias curvas. Problemas envolvendo superfícies freáticas também requerem o uso de elementos de ordem

superior, uma vez que seus perfis curvos são difíceis de se modelar usando segmentos lineares.

O mais simples e versátil tipo de elemento curvilíneo é o quadrático. Considerando o contorno curvo mostrado pela figura (III.5), onde Γ é definido ao longo do contorno e vetor posição \vec{r} é uma função do sistema cartesiano, x_1, x_2 . Definindo-se a forma geométrica dos elementos usando funções de interpolação quadrática tem-se:

$$x_1 = \sum_{k=1}^3 x_1^k \cdot N_k \quad (k=1,3) \quad (\text{III.36})$$

$$x_2 = \sum_{k=1}^3 x_2^k \cdot N_k$$

sendo as funções de interpolação N_k dadas por:

$$N_1 = 1/2 \cdot \eta \cdot (\eta - 1)$$

$$N_2 = (1 + \eta) \cdot (1 - \eta) \quad (\text{III.37})$$

$$N_3 = 1/2 \cdot \eta \cdot (\eta + 1)$$

e sendo η uma coordenada local adimensional, onde $\eta \in [-1, +1]$. Estas funções são quadráticas em η e este tipo de interpolação fornece os valores nodais da variável quando particularizadas para os nós, vide figura (III.6).

III.5.2 - ELEMENTOS ISOPARAMÉTRICOS QUADRÁTICOS

Aproximando as funções u e q pelas mesmas funções de interpolação aplicadas na definição da geometria temos a formulação isoparamétrica. Então pode-se escrever:

$$u_j = \sum_{k=1}^3 u_j^k \cdot N_k \quad (k=1,3) \quad (\text{III.38})$$

$$q_j = \sum_{k=1}^3 q_j^k \cdot N_k$$

As expressões (III.36), (III.37) e (III.38) permitem que a equação integral (III.33) possa ser escrita como

$$\begin{aligned}
 & c_i \cdot \sum_{k=1}^3 u_k^i \cdot N_k + \sum_{j=1}^{Ne} \left(\int_{-1}^1 \left[q^* \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \cdot |J|_j \cdot d\eta \right] \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}_j \right) \\
 & = \sum_{j=1}^{Ne} \left(\int_{-1}^1 \left[u^* \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \cdot |J|_j \cdot d\eta \right] \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}_j \right) \quad (III.39)
 \end{aligned}$$

As integrais ao longo de qualquer elemento "j" são similares àquelas obtidas para elementos lineares, Brebbia et al (1984), Brebbia e Dominguez(1989), mas agora existem três incógnitas nodais e aparece um Jacobiano na integral. O uso do Jacobiano se faz necessário pois as funções de interpolação N_k são expressas em função de η , mas as integrais, dadas em (III.33) são avaliadas em Γ .

As integrais do tipo "h" dadas em (III.34) podem ser expandidas em:

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^1 \left[q^* \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \cdot |J|_j \cdot d\eta \right] \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}_j \\
 & = \begin{bmatrix} h_{ij}^1 & h_{ij}^2 & h_{ij}^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}_j \quad (III.40)
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 h_{ij}^1 & = \int_{-1}^1 q^* \cdot N_1 \cdot |J|_j \cdot d\eta ; \quad h_{ij}^2 = \int_{-1}^1 q^* \cdot N_2 \cdot |J|_j \cdot d\eta ; \\
 h_{ij}^3 & = \int_{-1}^1 q^* \cdot N_3 \cdot |J|_j \cdot d\eta \quad (III.41)
 \end{aligned}$$

Da mesma forma tem-se

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^1 \left[u^* \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \cdot |J|_j \cdot d\eta \right] \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}_j \\
 & = \begin{bmatrix} g_{ij}^1 & g_{ij}^2 & g_{ij}^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}_j \quad (III.42)
 \end{aligned}$$

onde

$$g_{ij}^1 = \int_{-1}^1 u^* \cdot N_1 \cdot |J|_j \cdot d\eta ; \quad g_{ij}^2 = \int_{-1}^1 u^* \cdot N_2 \cdot |J|_j \cdot d\eta ; \quad (III.43)$$

$$g_{ij}^3 = \int_{-1}^1 u^* \cdot N_3 \cdot |J|_j \cdot d\eta$$

O diferencial exato do contorno é representado por

$$d\Gamma = |J| \cdot d\eta \quad (III.44)$$

onde o Jacobiano da transformação é dado por:

$$|J| = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\eta}\right)^2} \quad (III.45)$$

Para se obter o sistema de equações algébricas, a equação (III.39) deve ser aplicada para cada um dos nós pertencentes à malha discretizada, correspondendo cada uma a um ponto fonte "i". Através da figura (III.7) fica claro que o termo da junção entre dois elementos adjacentes é formado pela adição dos coeficientes dos dois elementos, isto é, o terceiro do anterior mais o primeiro do seguinte (como nos elementos lineares). Aparece agora um termo adicional, correspondente ao nó central. Como referência na figura (III.7) pode-se escrever a seguinte relação:

$$c_i u_i + \begin{bmatrix} \hat{H}_{i1}^1 & \hat{H}_{i1}^2 & \hat{H}_{i1}^3 & \dots & \hat{H}_{iNe}^1 & \hat{H}_{iNe}^2 & \hat{H}_{iNe}^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{Ne} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{Ne} \end{bmatrix} \quad (III.46)$$

onde,

$$\hat{H}_{ij}^1 = h_{ij-1}^3 + h_{ij}^1, \quad \hat{H}_{ij}^2 = h_{ij}^2, \quad \hat{H}_{ij}^3 = \hat{H}_{ij+1}^1 = h_{ij}^3 + h_{ij+1}^1, \dots \quad (III.47)$$

$$\hat{G}_{ij}^1 = g_{ij-1}^3 + g_{ij}^1, \quad \hat{G}_{ij}^2 = g_{ij}^2, \quad \hat{G}_{ij}^3 = \hat{G}_{ij+1}^1 = g_{ij}^3 + g_{ij+1}^1, \dots$$

A expressão (III.47) é válida quando a numeração é sequencial, sendo alterada para os casos de nós duplos e de nós descontínuos. Nestes últimos dois casos, o nó especial apresenta as mesmas coordenadas geométricas no extremo dos elementos adjacentes, mas sua funcionalidade é distinta. Porém os coeficientes de influencianão serão acumulados no mesmo elemento da matriz dos coeficientes.

O primeiro termo do lado esquerdo da equação (III.46) pode ser somado à parcela do segundo, que corresponde ao elemento que contém o ponto fonte "i". Novamente, pode-se escrever, de modo simplificado, a equação para um dado ponto fonte ξ_i :

$$\sum_{j=1}^{Nnos} H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^{Nnos} G_{ij} q_j \quad (III.48)$$

sendo que:

$$\begin{aligned} H_{ij} &= \hat{H}_{ij} && \text{quando } i \neq j \\ H_{ij} &= c_i + \hat{H}_{ij} && \text{quando } i = j \end{aligned} \quad (III.49)$$

Este conjunto de equações algébricas pode ser expresso na forma matricial como:

$$H \cdot U = G \cdot Q \quad (III.50)$$

onde H e G são matrizes cheias, não simétricas, de ordem Nnos; U e Q são vetores de comprimento Nnos (número de nós funcionais).

Note que N_u valores de u e N_q valores de q são conhecidos em Γ_u e Γ_q respectivamente ($\Gamma_u + \Gamma_q = \Gamma$ e $N_u + N_q = Nnos$), portanto existem apenas Nnos incógnitas no sistema de equações (III.50). Pode-se reordenar esta equação, colocando todas as incógnitas no lado esquerdo e criando um vetor no lado direito, obtido pela multiplicação dos elementos da matriz de valores conhecidos pelos valores prescritos de potencial e fluxo. Isto resulta em

$$A \cdot X = F \quad (III.51)$$

Os termos H_{ki} da diagonal da matriz H que correspondem aos coeficientes c_i mais H_{ij} , podem ser calculados apartir da situação física

de que um corpo sujeito a uma distribuição de potencial constante corresponde a um fluxo nulo. Isto é equivalente a translação de corpo rígido na teoria da elasticidade, Brebbia, Telles e Wrobel(1984). Aplicando esta condição à equação (III.50), tem-se:

$$H \cdot I = 0 \quad (III.52)$$

onde I é um vetor, que para todos os nós tem potencial unitário. Uma vez que (III.52) deve ser satisfeita, pode-se escrever:

$$H_{ii} = - \sum_{j=1}^{Nnos} H_{ij} \quad (\text{quando } j \neq i) \quad (III.53)$$

esta equação fornece os coeficientes da diagonal em função dos demais termos da matriz H.

A equação (III.51) pode então ser resolvida obtendo todos os valores de contorno. Uma vez feito isto, é possível calcular qualquer valor de u ou q para pontos interno a Ω . Os valores dos potenciais u são calculados em qualquer ponto interno "i" usando-se a fórmula (III.12) que pode ser reescrita como

$$u_i = \int_{\Gamma} q \cdot u^* \cdot d\Gamma - \int_{\Gamma} q^* \cdot u \cdot d\Gamma \quad (III.54)$$

Esta equação representa uma relação integral obtida entre um ponto interno "i" e os valores de contorno u e q podendo ser escrita na forma discretizada como

$$u_i = \sum_{j=1}^{Nnos} G_{ij} \cdot q_j - \sum_{j=1}^{Nnos} \hat{H}_{ij} \cdot u_j \quad (III.55)$$

Os valores dos fluxos internos podem ser calculados pela diferenciação da equação (III.55) em relação as coordenadas do ponto de colocação ξ . Pode-se escrever

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right) = \int_{\Gamma} q \cdot \frac{\partial u^*}{\partial x_k} \cdot d\Gamma - \int_{\Gamma} u \cdot \frac{\partial q^*}{\partial x_k} \cdot d\Gamma \quad (III.56)$$

x_k são as coordenadas do ponto, $k=1,2$ para problemas bi-dimensionais, e $k=1,2,3$ para casos tri-dimensionais, Brebbia, Telles e Wrobel(1984).

III.6 - AVALIAÇÃO DAS INTEGRAIS

As integrais definidas em (III.39) e explicitadas em (III.41) e (III.43) são conhecidas como coeficientes de influência, pois relacionam os valores de u e q , no ponto fonte "i", com os valores de u e q no ponto campo "j".

Os coeficientes de influência são calculados por integração numérica, geralmente do tipo Gauss-Legendre, exceto quando os elementos de contorno tem geometria simples (reta), sendo possível, neste caso, uma determinação analítica.

Elemento Superparamétrico Quadrático é aquele elemento cuja representação da geometria se faz através de funções de interpolação lineares e as funções u e q por funções quadráticas. Para estes elementos, assim como os constantes e lineares, os cálculos das integrais, quando o ponto fonte pertence ao elemento em questão, podem ser feitos através de fórmulas exatas. A dedução completa para estes casos se encontra detalhada nos apêndices A e B.

III.6.1 - INTEGRAIS REGULARES

Quando o nó "i" não pertence ao elemento Γ_j , as integrais, ditas regulares, podem ser aproximadas pela expressão:

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n w_i \cdot f(\xi_i) + E_n \quad (\text{III.57})$$

onde n é o número de pontos de integração, ξ_i é a coordenada do i -ésimo ponto de integração, w_i é o fator de ponderação ou peso associado e E_n é o erro ou resíduo, dado por:

$$E_n = \frac{2^{2n+1} (n!)^4}{(2n+1) [(2n!)]^3} \cdot \frac{d^{2n} f(\xi)}{d\xi^{2n}} ; \quad (-1 < \xi < 1) \quad (\text{III.58})$$

A fórmula (III.57) é baseada na representação da função $f(\xi)$ por meio dos polinômios de Legendre $P_n(\xi)$. O valor de ξ_i corresponde a coordenada do ponto i onde o polinômio é zero e para tal, os pesos são calculados pela equação (III.59)

$$w_i = 2/(1-\xi_i^2) \cdot \left[\frac{dP_n(\xi)}{d\xi} \right]_{\xi=\xi_i}^2 \quad (\text{III.59})$$

Os valores numéricos de ξ_i e w_i para diversos valores de i podem ser encontrados em Stroud e Secrest(1966) e Abramowitz e Stegun(1970).

O número de pontos de integração é escolhido, como usual, de maneira seletiva. Esta escolha é feita conforme o cálculo preliminar de um parâmetro adimensional, que expressa uma relação entre a distância do ponto fonte ao elemento em questão e o tamanho deste último. Para o caso de elementos curvos adotou-se a corda principal como representativa do tamanho do elemento. Este parâmetro é

$$s = \frac{0.5}{l} \cdot \sqrt{(2 \cdot x_1(\xi) - x_1(1) - x_1(3))^2 + (2 \cdot x_2(\xi) - x_2(1) - x_2(3))^2} \quad (\text{III.60})$$

Adotou-se as seguintes faixas para a escolha de "n": a) $n=16$ caso $s \leq 1,5$; b) $n=10$ caso $1,5 < s \leq 5,5$ e c) $n=4$ caso $s > 5,5$. Estes valores são obtidos mediante testes numéricos em situações onde se sabe, à priori, a solução exata e arbitra-se uma tolerância para o erro.

III.6.2 - INTEGRAIS SINGULARES¹

Quando o nó "i" pertence ao elemento Γ_j , deve-se tomar cuidados especiais, pois ocorre singularidade quando o raio tende à zero. As equações integrais de contorno (III.41 e III.43) contém dois tipos distintos de kernels ou núcleos singulares. Um deles possui singularidade logarítmica e o outro apresenta um integrando singular na forma $1/r$. Já é bem conhecido e relativamente fácil de demonstrar que os núcleos contendo singularidade logarítmica não precisam ser avaliados no sentido do valor principal de Cauchy. Portanto, a questão passa a ser a precisão, que pode ser tão boa quanto a desejada quando se aplica uma pré-transformada de integração adequada, Telles(1987).

O núcleo que contém o termo $1/r$, que requer um tratamento numérico especial em elasticidade, apresenta-se bem comportado na presente análise de potencial bidimensional e é não-singular, mesmo

¹Mansur, Telles, Prodanoff e Frauches (1991).

quando o ponto de integração se aproxima da fonte ao longo do contorno. O termo $\partial r/\partial n$ torna esse núcleo regular mesmo na presença de cantos, isto porque neste caso tais pontos não são incluídos no processo de integração.

Aplicando-se as expressões de $u^*(\xi, x)$ e $q^*(\xi, x)$, dadas na equação (III.14), na equação (III.30), esquecendo por hora as funções de interpolação, obtém-se:

$$c(\xi) \cdot u(\xi) - \frac{1}{2\pi} \cdot I_1 = - \frac{1}{2\pi} \cdot I_2 \quad (\text{III.61})$$

onde

$$I_1 = \text{VP} \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial r}{\partial n} \cdot u(x) \cdot d\Gamma(x) \quad (\text{III.62})$$

$$I_2 = \text{VP} \int_{\Gamma} \ln r \cdot q(x) \cdot d\Gamma(x) \quad (\text{III.63})$$

A integral imprópria indicada na equação (III.63) é convergente, pelo fato de $q(x)$ ser uma função não-singular em ξ , isto é, seu valor principal coincide com o resultado obtido quando esta integral é calculada no sentido usual, Kellogg(1929). Esta mesma conclusão pode ser estendida a integral indicada na equação (III.62) caso seja garantido que exista uma dada constante finita L:

$$L = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial r}{\partial n} \quad (\text{III.64})$$

Com o propósito de calcular o limite indicado na equação (III.64) se torna conveniente utilizar coordenadas polares (r, θ) como visto na figura (III.8). Como mostrado em Mansur (1983), para um ponto localizado na curva $r=r(\theta)$:

$$\frac{\partial r(\theta)}{\partial n(x)} = \frac{\nu \cdot n}{\tilde{\nu} \cdot \tilde{n}} = r(\theta) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \Gamma} = \frac{r(\theta)}{\sqrt{\left[\frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta}\right]^2 + [r(\theta)]^2}} \quad (\text{III.65})$$

Por esta razão, o limite indicado na expressão (III.64) pode ser escrito como:

$$L = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta}\right]^2 + [r(\theta)]^2}} = \frac{1}{\frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta}} \quad (\text{III.66})$$

A expressão para o raio de curvatura $\rho(x)$ em coordenadas polares é, Bronstein e Semendiaev(1973):

$$\rho(x) = \frac{\left([r(\theta)]^2 + \left[\frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta}\right]^2\right)^{3/2}}{[r(\theta)]^2 + 2\left[\frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta}\right]^2 - r(\theta) \cdot \frac{\partial^2 r(\theta)}{\partial \theta^2}} \quad (\text{III.67})$$

onde a expressão limite quando $r(\theta)$ tende a zero ($x \rightarrow \xi$) é obtida facilmente por:

$$\rho(\xi) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta} \quad (\text{III.68})$$

Comparando as expressões (64),(66) e (68) a seguinte é imediatamente obtida

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial r}{\partial n} = \frac{1}{2\rho(\xi)} \quad (\text{III.69})$$

Por essa razão, não existe a necessidade de se calcular as integrais singularmente para obter o valor principal de Cauchy do núcleo para problemas de potencial bidimensional. Note, porém, que para ξ localizado em um canto, onde o raio de curvatura é zero, a integração deve ser tomada por trechos, um até antes e o outro após, mas não incluindo a quina, que por sua vez é contemplado pelo coeficiente $c(\xi)$. Em conseqüência, o valor limite de ρ imediatamente antes e depois da quina, dependendo do lado que se integra, é empregado no final ou início do intervalo.

III.6.3 - TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS DE TELLES

A determinação dos coeficientes da matriz g pode ser feita de duas maneiras distintas. A primeira consiste em separar o núcleo em uma parte regular (integrada pela quadratura de Gauss padrão) e uma segunda parte com integrando logarítmico $\ln(1/r)$, que pode ser integrado por um esquema numérico especial com coeficiente de ponderação proporcionais a $\ln(1/y)$. Este procedimento, além de requerer a partição do elemento quando $|\eta(\xi)| < 1$, pode ser muito trabalhoso em alguns casos, particularmente em problemas axissimétricos. A segunda alternativa baseia-se numa transformação adequada de coordenadas, onde um novo Jacobiano irá suavizar completamente a singularidade, Telles(1987).

Considerando uma relação do terceiro grau na seguinte forma

$$\eta = a \cdot \gamma^3 + b \cdot \gamma^2 + c \cdot \gamma + d \quad (\text{III.70})$$

de maneira tal que obedeça as seguintes condições

$$\left. \frac{d\eta}{d\gamma} \right|_{\bar{\eta}} = 0 \quad (\text{III.71a})$$

$$\eta(1) = 1 \quad (\text{III.71b})$$

$$\eta(-1) = -1 \quad (\text{III.71c})$$

$$\left. \frac{d^2\eta}{d\gamma^2} \right|_{\bar{\eta}} = 0 \quad (\text{III.71d})$$

A condição (III.71d) implica que o Jacobiano desta transformação deve ter um mínimo em $\bar{\eta}$ (neste estágio um máximo é igualmente possível). Os coeficientes do polinômio (III.70) são dados por:

$$\begin{aligned} a &= 1/Q \\ b &= -3 \cdot \bar{\gamma} / Q \\ c &= 3 \cdot \bar{\gamma}^2 / Q \\ d &= -b \\ Q &= 1 + 3 \cdot \bar{\gamma}^2 / Q \end{aligned} \quad (\text{III.72})$$

onde $\bar{\gamma}$ é simplesmente o valor de γ que satisfaz a relação $\eta(\bar{\gamma}) = \bar{\eta}$; este parâmetro é calculado pela expressão (III.73)

$$\bar{\gamma} = \sqrt[3]{(\bar{\eta} \cdot \eta^* + |\eta^*|)} + \sqrt[3]{(\bar{\eta} \cdot \eta^* - |\eta^*|)} + \bar{\eta} \quad (\text{III.73})$$

onde $\eta^* = \bar{\eta}^2 - 1$. Então a expressão (III.57) se torna

$$I = \int_{-1}^1 f \left[\left[(\gamma - \bar{\gamma})^3 + \bar{\gamma} \cdot (\bar{\gamma}^2 + 3) \right] / (1 + 3 \cdot \bar{\gamma}^2) \right] \cdot 3(\gamma - \bar{\gamma})^2 / (1 + 3 \cdot \bar{\gamma}^2) \cdot d\gamma \quad (\text{III.74})$$

Uma interessante capacidade desta transformação é que ela aumenta automaticamente a concentração de pontos próximo à singularidade, sem a desvantagem de proceder uma subdivisão do elemento, Telles(1987).

III.7 - TRATAMENTO DE DESCONTINUIDADES DE FLUXO

Quando um nó está localizado em um ponto onde o contorno não é suave, isto é um canto, ocorre uma descontinuidade geométrica de fluxo ($\partial\phi/\partial n$) naquele nó. A descontinuidade física de fluxo ocorre quando existem dois valores de fluxo para um determinado nó, um antes e outro depois, pelas próprias condições de contorno impostas pela física do problema. Isto implica que se os fluxos nodais são incógnitas, tem-se, então, que o número de equações escritas para este nó é menor que o número de incógnitas.

Os primeiros ensaios procuravam refinar a malha nas regiões próximas as descontinuidades, contudo este processo além de aumentar a matriz do problema, nem sempre fornece bons resultados. Uma maneira simples de se resolver o problema, se faz pela duplicação do nó do canto, sugerido por Brebbia (1978). A geometria do problema é ligeiramente modificada e apenas duas componentes do fluxo são associadas a cada nó, figura (III.9a). O problema pode agora ser resolvido pelos procedimentos padrão. A distância entre os dois nós do canto deve ser muito pequena, sendo limitada por problemas numéricos oriundos da geração de dois conjuntos de equações contendo coeficientes bem próximos. Quando um nó é duplicado, um pequeno espaço deve ser deixado entre os dois nós, vide figura (III.9a), ou então assume-se a existência de um pequeno elemento entre os dois, como mostrado na figura (III.9b). Neste último caso, assume-se que os fluxos no pequeno elemento são dados por q_1' , q_2' e q_1'' , q_2'' para os nós 2' e 2'' respectivamente, estes procedimentos mostraram-se inadequados.

III.7.1- ELEMENTOS NÃO-CONFORMES

Elementos não-conformes consideram a localização dos pontos de colocação e dos nós funcionais internamente ao elemento, a uma certa distância conveniente de suas extremidades. Neste caso, modifica-se as funções de interpolação originais. Este procedimento foi originalmente formulado e testado por Mustoe et al. (1982). Esta técnica apresenta a desvantagem que a incógnita nodal é obtida, ao final do cálculo, pela extrapolação do valor obtido no nó interno.

III.7.2- APROXIMAÇÃO GEOMÉTRICA

Este procedimento é também conhecido pelo nome de "técnica da resultante única", onde a descontinuidade de fluxo é avaliada sem que sejam criadas equações de contorno extras. Ao invés disto, equações adicionais são introduzidas relacionando os fluxos descontínuos propriamente, obrigando assim que a resultante dos fluxos à esquerda e à direita de pontos de descontinuidade seja única. Esta formulação tem sua origem nos trabalhos de Chaudonneret e Rudolphi (1978).

Marques(1986) apresenta, em maiores detalhes, as formulações acima, quando foram aplicadas em problemas de potencial, dentro de uma formulação que acopla os MEC e MEF . Ele implementou e comparou os desempenhos destes procedimentos, usando elementos lineares, em problemas de transferência de calor.

III.7.3- ELEMENTO DE COLOCAÇÃO NÃO-NODAL

Nos elementos de colocação não-nodal, chamado impropriamente de elemento interpolado, os nós funcionais (e geométricos) permaneceram nas extremidades do elemento, e os pontos de colocação são deslocados para o interior do elemento, vide figura (III.10) para o caso de elementos quadráticos. Neste tratamento as funções de interpolação são mantidas inalteradas.

Para o conjunto de nós onde ocorre a descontinuidade de fluxo, os pontos de colocação, p , não coincidem com os nós funcionais. Neste caso a equação (III.39) deverá ser reescrita como:

$$c \cdot u(p) + \sum_{j=1}^{Ne} \left(\int_{-1}^1 \left[q^* \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \cdot |J|_j \cdot d\eta \right] \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}_j \right)$$

$$\sum_{j=1}^{Ne} \left(\int_{-1}^1 \left[u^* \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \cdot |J|_j \cdot d\eta \right] \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}_j \right) \quad (III.75)$$

Neste caso, uma nova incógnita $u(p)$ aparecerá na análise numérica e por isso deverá ser eliminada. Isto pode ser obtido pela substituição do produto $c \cdot u(p)$ na equação (III.75) por:

$$c \cdot u(p) = c \cdot \left(N_1(\eta_p) \cdot u_1 + N_2(\eta_p) \cdot u_2 + N_3(\eta_p) \cdot u_3 \right) \quad (III.76)$$

Define-se a quantidade TAX como a relação entre posição do ponto η_p e o tamanho do elemento, em coordenadas locais. Tem-se que:

$$TAX = d/l \quad \therefore 0 \leq TAX \leq 1 \quad (III.77)$$

onde

d = distância medida a partir da extremidade do elemento e

l = tamanho total do elemento.

Com a introdução do elemento de colocação não-nodal, surgem novas contribuições a serem adicionadas nos coeficientes da matriz H. Estas contribuições são calculadas quando são efetuados os cálculos correspondentes as integrais singulares, na seguinte forma:

$$c_i \cdot N_1 = 1/2 \cdot (2 \cdot TAX^2 - 3 \cdot TAX - 1)$$

$$c_i \cdot N_2 = 2 \cdot TAX - 2 \cdot TAX^2 \quad (III.78)$$

$$c_i \cdot N_3 = TAX^2 - TAX/2$$

Quando um dado elemento apresenta os três nós alinhado, ou seja, é superparamétrico, também é possível o cálculo analítico dos coeficientes de influência da matriz g . Este cálculo foi desenvolvido e aplicado no presente trabalho, pois além de acelerar o processo de cálculo é mais preciso. O desenvolvimento completo das expressões analíticas destas integrais encontra-se nos apêndices A e B.

CAPÍTULO IV

ASPECTOS ESPECÍFICOS DA APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO EM PROBLEMAS DE PERCOLAÇÃO

IV.1 - INTRODUÇÃO

As equações diferenciais que governam o escoamento em regime permanente, para problemas de percolação em barragens de terra, são lineares. Já em regime transiente, o problema é não-linear, devido a introdução de não linearidades contidas nas condições de contorno da superfície freática.

Admite-se que uma barragem seja suficientemente longa, de modo que o domínio do escoamento possa ser considerado bidimensional. Esta seção é apresentada esquematicamente na figura (IV.1). O domínio de escoamento bidimensional é dado pelo polígono ABCDE. No caso de fluxo transiente, a elevação a partir da base impermeável à S.F. é função do tempo e do espaço. No caso de fluxo permanente é apenas função da posição.

IV.2 - CONDIÇÕES DE CONTORNO

IV.2.1 - PARA O REGIME PERMANENTE

Na região de fluxo Ω , a equação diferencial governante é dada pela expressão (II.28), como já visto:

$$\nabla^2 u = 0 \quad (IV.1)$$

a partir de (II.6) pode se escrever

$$u = \frac{p}{\gamma} + z \quad (IV.2)$$

a equação (IV.1) é equivalente a:

$$\nabla^2 p = 0 \quad (IV.3)$$

onde p = pressão. Em algumas aplicações, se mostra vantajoso o uso desta forma, colocando a pressão como variável dependente.

As equações (IV.1) e (IV.3) são maneiras semelhantes de expressar a equação de Laplace e necessitam de condições de contorno, ao longo de ABCDE, para definir uma única solução do problema, que são:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \text{ ou } \frac{\partial p}{\partial z} = -\gamma \quad \text{em AB} \quad (\text{IV.4a})$$

$$u = z_2 \text{ ou } p = \gamma (z_2 - z) \quad \text{em BC} \quad (\text{IV.4b})$$

$$u = \eta \text{ ou } p = 0 \quad \text{em CDE} \quad (\text{IV.4c})$$

$$u = z_1 \text{ ou } p = \gamma (z_1 - z) \quad \text{em EA} \quad (\text{IV.4d})$$

onde

η = elevação da superfície freática acima da camada impermeável.

$\gamma = \rho \cdot g$ = peso específico da água

Para completar as equações (IV.4), necessita-se de uma condição extra para fixar a posição da superfície DE, que é a incógnita principal do problema. Sabendo-se que DE é uma linha de fluxo, a componente normal do vetor velocidade através desta linha deve ser igual a zero, tem-se:

$$v_x \cos(x,n) + v_z \sin(x,n) = 0 \quad (\text{IV.5})$$

onde

n = direção da normal exterior a superfície freática DE,

(x,n) = ângulo formado entre as direções x e n num dado ponto.

De acordo com a lei de Darcy,

$$v_x = - \frac{K_x}{\epsilon} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{K_x}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{IV.6a})$$

$$v_z = - \frac{K_z}{\epsilon} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = - K_z \cdot \left(\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + 1 \right) = - \frac{K_z}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} - K_z \quad (\text{IV.6b})$$

Substituindo-se as expressões (IV.6) em (IV.5), obtém-se:

$$\frac{\partial p}{\partial x} \cdot \cos(x,n) + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \text{sen}(x,n) = -\gamma \cdot \text{sen}(x,n) \quad (\text{IV.7})$$

Seja s a coordenada medida ao longo de DE. Então, uma vez que $p=0$ em DE a derivada de p em DE é zero, isto é,

$$0 = \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{ds}$$

tem-se, como mostrado na figura(IV.3):

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \text{sen}(x,n) - \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \cos(x,n) = 0 \quad (\text{IV.8})$$

Combinando as equações (IV.8) e (IV.7), a condição na linha de corrente DE pode ser expressa de duas formas convenientes

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\gamma \cdot \text{sen}(x,n) \cdot \cos(x,n) \quad (\text{IV.9a})$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\gamma \cdot \text{sen}^2(x,n) \quad (\text{IV.9b})$$

ou

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (\text{IV.9c})$$

A equação (IV.9), mais especificamente (IV.9c), é a condição adicional aplicada na superfície freática DE.

Então, o escoamento em regime permanente pode ser completamente definido por (IV.1), (IV.4) e (IV.9c), ou (IV.3), (IV.4) e (IV.9a) ou (IV.9b). Como visto acima, pode-se formular o problema utilizando as variáveis u (potencial total) ou p (pressão), porém, pode-se alternativamente escrevê-las usando a função corrente Ψ , vide Crank(1984).

IV.2.2 - PARA O REGIME TRANSIENTE

A equação de Laplace continua sendo válida para escoamentos em regime transiente. Todavia, o domínio do problema muda devido a variação da S.F. As condições dadas pelas equações (IV.4) continuam sendo válidas, porém a linha DE, vista na figura(IV.1), não é mais estacionária. Portanto, a componente normal da velocidade é não nula, necessitando de uma nova condição em DE. Esta condição pode ser derivada partindo do princípio que uma partícula fluida P, pertencente a S.F., move-se segundo a relação

$$z_p(t) = \eta(x_p(t), t) \quad (IV.10)$$

Uma vez que a S.F. é uma superfície material, isto é, constituída pelas mesmas partículas fluidas, a taxa de variação da posição desta superfície deve ser igual a velocidade vertical na própria superfície. A derivada material da expressão (IV.10) é dada por

$$\frac{Dz_p(t)}{Dt} = \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{dx_p}{dt} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (IV.11)$$

Aplicando-se a definição de velocidade de percolação e a Lei de Darcy, chega-se a

$$V_{x_p} = \epsilon \cdot \frac{dx_p}{dt} = K_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \quad (IV.12a)$$

$$V_{z_p} = \epsilon \cdot \frac{dz_p}{dt} = K_z \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \quad (IV.12b)$$

onde

$dx_p/dt, dz_p/dt$ = componentes da velocidade real da partícula

V_{x_p}, V_{z_p} = componentes da velocidade de percolação ou Darciana.

Logo, variação temporal $\partial \eta / \partial t$ da elevação superfície freática fica

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left[K_x \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - K_z \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right] \quad (IV.13)$$

A equação diferencial (IV.13) governa o movimento da S.F. Pode-se, então, descrever completamente o fluxo em regime transiente pelas equações (IV.14):

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{em ABCDE} \quad (\text{IV.14a})$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{em AB} \quad (\text{IV.14b})$$

$$u = z_2 \quad \text{em BC} \quad (\text{IV.14c})$$

$$u = \eta \quad \text{em CDE} \quad (\text{IV.14d})$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \cdot \left[K_x \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - K_z \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right] \quad \text{em DE} \quad (\text{IV.14e})$$

$$u = z_1 \quad \text{em EA} \quad (\text{IV.14f})$$

IV.3-DISCRETIZAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO DA SUPERFÍCIE FREÁTICA

Com a finalidade de se resolver o sistema de equações algébricas (III.50), que envolve u e $\partial u / \partial n$ no contorno, uma relação entre u e $\partial u / \partial n$ deve ser conhecida na S.F.

Partindo-se da equação (IV.10) pode-se obter o vetor tangente unitário, e deste, imediatamente, o vetor normal unitário

$$\tilde{n} = \frac{-1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2}} \cdot \left[\tilde{i} + \frac{\partial z}{\partial x} \tilde{k} \right] \quad (\text{IV.15})$$

Sabendo-se que $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \tilde{i} + \frac{\partial u}{\partial z} \tilde{k}$ e $\frac{\partial u}{\partial n} = \tilde{n} \cdot \nabla u$, chega-se a

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{-1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2}} \cdot \left[K_x \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - K_z \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right] \quad (\text{IV.16})$$

Lembrando que na superfície freática $\partial n / \partial t = \partial u / \partial t$ e aplicando (IV.16) em (IV.13) obtém-se a equação (IV.17)

$$\epsilon \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = - \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \quad (\text{IV.17})$$

Pela figura (IV.2) tem-se que $\partial \eta / \partial x = - \tan \beta$, onde β é o ângulo que a S.F. faz com a horizontal. Logo

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_x = - \frac{1}{\epsilon \cdot \cos \beta} \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \quad (\text{IV.18})$$

onde o subscrito x indica que (IV.18) é a taxa de variação do potencial seguida pela S.F. na direção vertical conservando a coordenada x constante. A figura (IV.2) mostra as definições geométricas acima indicadas.

Aproximando-se $\partial u / \partial t$ por uma expressão de diferenças finitas progressivas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{u^{t+\Delta t} - u^t}{\Delta t} \quad (\text{IV.19})$$

para pequenos incrementos de tempo Δt , pode-se escrever

$$u^{t+\Delta t} = u^t - \frac{\Delta t}{\epsilon \cdot \cos \beta^t} \cdot \left(\theta q^{t+\Delta t} + (1-\theta) q^t \right) \quad (\text{IV.20})$$

onde $q = \partial u / \partial n$ e θ é um fator de ponderação que posiciona a derivada entre dois intervalos consecutivos. Esta equação estabelece a relação entre u e $\partial u / \partial n$ no tempo $t + \Delta t$ e é somente válida nos pontos da S.F. quando se mantém o valor da coordenada x constante. Esta expressão envolve uma linearização, uma vez que o ângulo β é calculado no instante t ao passo que deveria sê-lo em $t + \Delta t$. Embora este problema possa ser amenizado com um processo iterativo, consegue-se bons resultados com o uso de intervalos de tempo pequenos, Liggett(1983).

Para alguns problemas, se mostra conveniente possuir a capacidade de descrever a mudança da elevação da S.F. segundo uma direção particular. Para tal, define-se um sistema de coordenadas transformada (x_x, z_x) na forma

$$x = x_* \cdot \cos \xi - z_* \cdot \sin \xi \quad (\text{IV.21a})$$

$$z = x_* \cdot \sin \xi + z_* \cdot \cos \xi \quad (\text{IV.21b})$$

onde ξ representa o ângulo de rotação, mostrado na figura (IV.2). A taxa de variação do potencial dos pontos pertencentes a S.F. na direção z_* é

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_* = \frac{\cos \xi}{\cos(\beta^t + \xi)} \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \quad \text{em } z_* = \eta_* \quad (\text{IV.22})$$

Finalmente, a expressão de Diferenças Finitas da equação (IV.22) é dada por, Liggett(1983)

$$u^{t+\Delta t} = u^t - \frac{\cos \xi \cdot \Delta t}{\varepsilon \cdot \cos(\beta^t + \xi)} \cdot \left(\theta q^{t+\Delta t} + (1-\theta) q^t \right) \quad (\text{IV.23})$$

Para meios anisotrópicos, onde a solução fundamental inclui as componentes do tensor de condutividade hidráulica, as expressões (IV.20) e (IV.23) devem ser aplicadas diretamente. No caso de meios homogêneos, o segundo termo do lado direito em ambas as expressões deve ser multiplicado pela permeabilidade do meio K.

IV.4- ESQUEMAS DE AVANÇO NO TEMPO

IV.4.1-ESQUEMA EXPLÍCITO

Para o esquema de avanço no tempo explícito, a elevação da superfície freática, ou valor da carga hidráulica, depende somente da elevação ou carga no instante anterior. Este é o esquema de avanço mais simples, mas que fornece, em alguns casos, resultados bastante atraentes.

Neste caso a equação (IV.23) pode ser reescrita, bastando adotar como nulo o valor do fator de ponderação θ , o que resulta:

$$u^{t+\Delta t} = u^t - \frac{\cos \xi \cdot \Delta t}{\varepsilon \cdot \cos(\beta^t + \xi)} \cdot q^t \quad (\text{IV.24})$$

IV.4.2-ESQUEMA IMPLÍCITO

Para o esquema implícito de avanço no tempo, a elevação da S.F. é calculada através de uma relação ponderada entre as elevações ou fluxos nos instantes anterior e atual.

A partir deste ponto, pode-se escolher eliminar o potencial u no intervalo $t+\Delta t$ conforme fizeram Liggett(1977), Chang(1986), Sá(1986) e Cabral(1990) ou eliminar a velocidade normal q , também no mesmo instante, ambos na etapa de montagem do sistema solução. Bruch e Grilli (1987) examinando os resultados daqueles que optaram pela primeira abordagem, notaram que os valores de potencial eram menos sensíveis as variações da geometria do contorno, nas vizinhanças do ponto nodal em questão, do que os valores de gradiente, assim optaram pela segunda forma de eliminação.

A equação (IV.25), deduzida a partir de (IV.24), fornece o valor da velocidade normal na S.F.

$$q_j^{t+\Delta t} = \frac{\epsilon \cdot \cos(\xi + \beta^t)}{\epsilon \cdot \Delta t \cdot \cos \xi} \left(u^t - u^{t+\Delta t} \right) - \frac{1 - \epsilon}{\epsilon} \cdot q^t \quad (IV.25)$$

Como já dito anteriormente, para meios isotrópicos, o primeiro termo da equação (IV.25) deve ser multiplicado pela constante K .

A escolha do fator de ponderação é de grande importância para a estabilidade da solução. A influência deste coeficiente na solução propriamente e a determinação de seu valor ótimo foi estudada por Liggett (1977,1983). Bruch e Grilli (1987) apresentaram uma relação para o valor ótimo do fator de ponderação, dado por:

$$\epsilon_{op} = - \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{e^{-\lambda} - 1} \right) \quad (IV.26)$$

onde

$$\lambda = \frac{\pi \cdot \sqrt{K_x \cdot K_z} \cdot \Delta t}{\epsilon \cdot \Delta x} \quad \text{para meios anisotrópicos ou} \quad (IV.27a)$$

$$\lambda = \frac{\pi \cdot K \cdot \Delta t}{\epsilon \cdot \Delta x} \quad \text{para meios isotrópicos} \quad (IV.27b)$$

onde Δx é a distância horizontal entre dois nós da S.F.

IV.5 - DETERMINAÇÃO ITERATIVA DA SUPERFÍCIE LIVRE

A posição da S.F. DE, figura (IV.2), pode ainda sofrer um ajuste mais refinado usando-se um procedimento iterativo (IV.28) e um critério de convergência ou parada do tipo (IV.29), este sugerido por Bruch e Grilli(1987). Estes pesquisadores resolveram o sistema de equações acopladas com a equação (IV.25) e obtiveram bons resultados, que serão apresentados no capítulo VI. Este esquema é utilizado em ambos os regimes, sendo que para o regime transiente é opcionalmente ativado.

A matriz do sistema é montada e resolvida usando-se a condição (IV.25). Então, a solução do sistema linear fornece os valores dos potenciais u , isto é, a própria elevação η dos nós da S.F.

Aplica-se o seguinte procedimento iterativo:

$$\eta_j^{t+\Delta t} = \omega \cdot \eta_j^{t+\Delta t} + (1-\omega) \cdot \eta^*$$

$$\eta^* = \eta^t \quad \text{quando } j=1$$

$$\eta^* = \eta_j^{t+\Delta t} \quad \text{para } j > 1 \quad (\text{IV.28})$$

onde

j = o número de ordem da iteração

ω = coeficiente geralmente assumido igual à 0.5

Utiliza-se o seguinte critério de convergência para cada nó.

$$\text{Max}_j (z_j^{t+\Delta t} - z^*) / z_j^{t+\Delta t} \leq \text{Tol} \quad (\text{IV.29})$$

onde

Tol = limite de precisão ou tolerância desejada

Caso a condição (IV.29) não seja atendida para cada nó da S.F., retorna-se ao início do processo iterativo.

IV.6 - FORMULAÇÃO MATRICIAL

A matriz solução do problema de potencial, simultaneamente com as condições de contorno, acoplada com uma das equações (IV.23) ou (IV.25) definem o conjunto de coeficientes conhecidos e as incógnitas do problema.

A montagem deste sistema procede-se conforme explicado em Liggett (1977,1983), sendo apresentada a figura (IV.2) para facilitar a visualização. Seja a barragem representada nesta figura, inicialmente encontra-se saturada até o nível $z = z_1$. No instante $t=0$ o nível do reservatório de jusante é rebaixado instantaneamente para uma elevação $z = z_2 < z_1$ e ali se mantém indefinidamente. O objetivo é determinar o movimento da S.F., fronteira móvel, que se seguirá a esta operação de rebaixamento.

O superescrito k denota o intervalo de tempo. As condições de contorno, no início da simulação, são as seguintes:

$$u_e = u_d^0 = u_c = z_1, \quad \eta^0 = z_1, \quad \beta^0 = 0, \quad u_b = z_2 \quad (\text{IV.30})$$

Escrevendo a equação (III.50) de maneira que a matriz G seja utilizada para armazenar os coeficientes das incógnitas nodais e a matriz H , por sua vez, guarde os valores correspondentes as condições prescritas.

$$G \cdot q = H \cdot u$$

De forma a compactar as matrizes globais, facilitando assim sua apresentação, estas matrizes podem ser divididas em submatrizes, correspondendo aos cinco segmentos de que se compõem o contorno. Os segmentos são os trechos \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{DE} , \overline{EA} , dados pela figura (IV.1). O primeiro subíndice corresponde ao trecho em que se localiza o ponto fonte ξ e o segundo ao trecho onde se encontra o elemento de contorno em questão, como já explicados pelas equações (III.46), (III.47) e (III.48). Estes subíndices são denotados pelas minúsculas a , b , c , d , e como visto pela figura (IV.2).

$$\begin{bmatrix} G_{aa} & G_{ab} & G_{ac} & G_{ad} & G_{ae} \\ G_{ba} & G_{bb} & G_{bc} & G_{bd} & G_{be} \\ G_{ca} & G_{cb} & G_{cc} & G_{cd} & G_{ce} \\ G_{da} & G_{db} & G_{dc} & G_{dd} & G_{de} \\ G_{ea} & G_{eb} & G_{ec} & G_{ed} & G_{ee} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_a^{k+1} \\ q_b^{k+1} \\ q_c^{k+1} \\ q_d^{k+1} \\ q_e^{k+1} \end{bmatrix} = \quad (IV.31)$$

$$\begin{bmatrix} H_{aa} & H_{ab} & H_{ac} & H_{ad} & H_{ae} \\ H_{ba} & H_{bb} & H_{bc} & H_{bd} & H_{be} \\ H_{ca} & H_{cb} & H_{cc} & H_{cd} & H_{ce} \\ H_{da} & H_{db} & H_{dc} & H_{dd} & H_{de} \\ H_{ea} & H_{eb} & H_{ec} & H_{ed} & H_{ee} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_a^{k+1} \\ u_b^{k+1} \\ u_c^{k+1} \\ u_d^{k+1} \\ u_e^{k+1} \end{bmatrix}$$

Armazenando as incógnitas na matriz G (lado esquerdo) e os valores prescritos com seus respectivos coeficientes na matriz H (lado direito) fica-se com:

$$\begin{bmatrix} -H_{aa} & G_{ab} & G_{ac} & G_{ad} & G_{ae} \\ -H_{ba} & G_{bb} & G_{bc} & G_{bd} & G_{be} \\ -H_{ca} & G_{cb} & G_{cc} & G_{cd} & G_{ce} \\ -H_{da} & G_{db} & G_{dc} & G_{dd} & G_{de} \\ -H_{ea} & G_{eb} & G_{ec} & G_{ed} & G_{ee} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_a^{k+1} \\ q_b^{k+1} \\ q_c^{k+1} \\ q_d^{k+1} \\ q_e^{k+1} \end{bmatrix} = \quad (IV.32)$$

$$\begin{bmatrix} -G_{aa} & H_{ab} & H_{ac} & H_{ad} & H_{ae} \\ -G_{ba} & H_{bb} & H_{bc} & H_{bd} & H_{be} \\ -G_{ca} & H_{cb} & H_{cc} & H_{cd} & H_{ce} \\ -G_{da} & H_{db} & H_{dc} & H_{dd} & H_{de} \\ -G_{ea} & H_{eb} & H_{ec} & H_{ed} & H_{ee} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_a^{k+1} \\ u_b^{k+1} \\ u_c^{k+1} \\ u_d^{k+1} \\ u_e^{k+1} \end{bmatrix}$$

As matrizes dadas em (IV.32) devem ser montadas quando se deseja eliminar o potencial u_d^{k+1} . Substituindo-se o valor de u_d^{k+1} , dado em (IV.20), no lado direito de (IV.32) obtém-se:

$$\begin{bmatrix} -H_{aa} & G_{ab} & G_{ac} & (G_{ad} + H_{ad} \cdot B) & G_{ae} \\ -H_{ba} & G_{bb} & G_{bc} & (G_{bd} + H_{bd} \cdot B) & G_{be} \\ -H_{ca} & G_{cb} & G_{cc} & (G_{cd} + H_{cd} \cdot B) & G_{ce} \\ -H_{da} & G_{db} & G_{dc} & (G_{dd} + H_{dd} \cdot B) & G_{de} \\ -H_{ea} & G_{eb} & G_{ec} & (G_{ed} + H_{ed} \cdot B) & G_{ee} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_a^{k+1} \\ q_b^{k+1} \\ q_c^{k+1} \\ q_d^{k+1} \\ q_e^{k+1} \end{bmatrix} = \quad (IV.33)$$

$$\begin{bmatrix} -G_{aa} & H_{ab} & H_{ac} & H_{ad} & H_{ae} \\ -G_{ba} & H_{bb} & H_{bc} & H_{bd} & H_{be} \\ -G_{ca} & H_{cb} & H_{cc} & H_{cd} & H_{ce} \\ -G_{da} & H_{db} & H_{dc} & H_{dd} & H_{de} \\ -G_{ea} & H_{eb} & H_{ec} & H_{ed} & H_{ee} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_a^{k+1} \\ u_b^{k+1} \\ u_c^{k+1} \\ u_d^k - C \cdot q^k \\ u_e^{k+1} \end{bmatrix}$$

$$\text{onde } B = \frac{K \cdot \cos \xi \cdot \Delta t}{\varepsilon \cdot \cos(\beta^t + \xi)} \cdot \theta \quad \text{e} \quad C = \frac{K \cdot \cos \xi \cdot \Delta t}{\varepsilon \cdot \cos(\beta^t + \xi)} \cdot (1 - \theta)$$

Para a alternativa de eliminação do fluxo, procede-se de forma semelhante a anterior.

$$\begin{bmatrix} -H_{aa} & G_{ab} & G_{ac} & -H_{ad} & G_{ae} \\ -H_{ba} & G_{bb} & G_{bc} & -H_{bd} & G_{be} \\ -H_{ca} & G_{cb} & G_{cc} & -H_{cd} & G_{ce} \\ -H_{da} & G_{db} & G_{dc} & -H_{dd} & G_{de} \\ -H_{ea} & G_{eb} & G_{ec} & -H_{ed} & G_{ee} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_a^{k+1} \\ q_b^{k+1} \\ q_c^{k+1} \\ u_d^{k+1} \\ q_e^{k+1} \end{bmatrix} = \quad (IV.34)$$

$$\begin{bmatrix} -G_{aa} & H_{ab} & H_{ac} & -G_{ad} & H_{ae} \\ -G_{ba} & H_{bb} & H_{bc} & -G_{bd} & H_{be} \\ -G_{ca} & H_{cb} & H_{cc} & -G_{cd} & H_{ce} \\ -G_{da} & H_{db} & H_{dc} & -G_{dd} & H_{de} \\ -G_{ea} & H_{eb} & H_{ec} & -G_{ed} & H_{ee} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_a^{k+1} \\ u_b^{k+1} \\ u_c^{k+1} \\ q_d^{k+1} \\ u_e^{k+1} \end{bmatrix}$$

Substituindo-se o valor do fluxo q_d^{k+1} , obtido da equação (IV.20), no lado direito de (IV.34) obtém-se:

$$\begin{bmatrix} -H_{aa} & G_{ab} & G_{ac} & -(H_{ad} + G_{ad} \cdot D) & G_{ae} \\ -H_{ba} & G_{bb} & G_{bc} & -(H_{bd} + G_{bd} \cdot D) & G_{be} \\ -H_{ca} & G_{cb} & G_{cc} & -(H_{cd} + G_{cd} \cdot D) & G_{ce} \\ -H_{da} & G_{db} & G_{dc} & -(H_{dd} + G_{dd} \cdot D) & G_{de} \\ -H_{ea} & G_{eb} & G_{ec} & -(H_{ed} + G_{ed} \cdot D) & G_{ee} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_a^{k+1} \\ q_b^{k+1} \\ q_c^{k+1} \\ u_d^{k+1} \\ q_e^{k+1} \end{bmatrix} = \quad (IV.35)$$

$$\begin{bmatrix} -G_{aa} & H_{ab} & H_{ac} & -G_{ad} & H_{ae} \\ -G_{ba} & H_{bb} & H_{bc} & -G_{bd} & H_{be} \\ -G_{ca} & H_{cb} & H_{cc} & -G_{cd} & H_{ce} \\ -G_{da} & H_{db} & H_{dc} & -G_{dd} & H_{de} \\ -G_{ea} & H_{eb} & H_{ec} & -G_{ed} & H_{ee} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_a^{k+1} \\ u_b^{k+1} \\ u_c^{k+1} \\ D \cdot u_d^k - E \cdot q_d^k \\ u_e^{k+1} \end{bmatrix}$$

$$\text{onde } D = \frac{\varepsilon \cdot \cos(\xi + \beta^t)}{K \cdot \theta \cdot \Delta t \cdot \cos \xi} \quad \text{e} \quad E = \frac{1 - \theta}{\theta}$$

Uma vez que os valores de contorno, pertencentes ao lado direito das equações (IV.33) e (IV.35), são conhecidos, o sistema de equações pode ser então resolvido. A solução do sistema de equações algébricas pode ser obtida pela aplicação de um método direto de resolução do tipo Gauss ou Decomposição LU. As equações (IV.23) e (IV.25) podem ser aplicadas para se calcular ou o potencial ou o fluxo na S.F. respectivamente. Segue-se, então, a aplicação do processo iterativo, caso se opte pela linearização das condições de contorno na S.F., fechando assim um ciclo de cálculo, isto é, um incremento de tempo.

2^o BLOCO

NOME APLICAÇÃO

FREELINE ²	- Extensão do programa "LINEAR" incluindo o elemento interpolado e o processo transiente
ISOPOR ²	- Extensão do programa "CURVO" incluindo o elemento interpolado e o processo transiente com esquema explícito de marcha no tempo
IMPLICIT ²	- O mesmo que o programa "ISOPOR" mas com esquema implícito de marcha no tempo

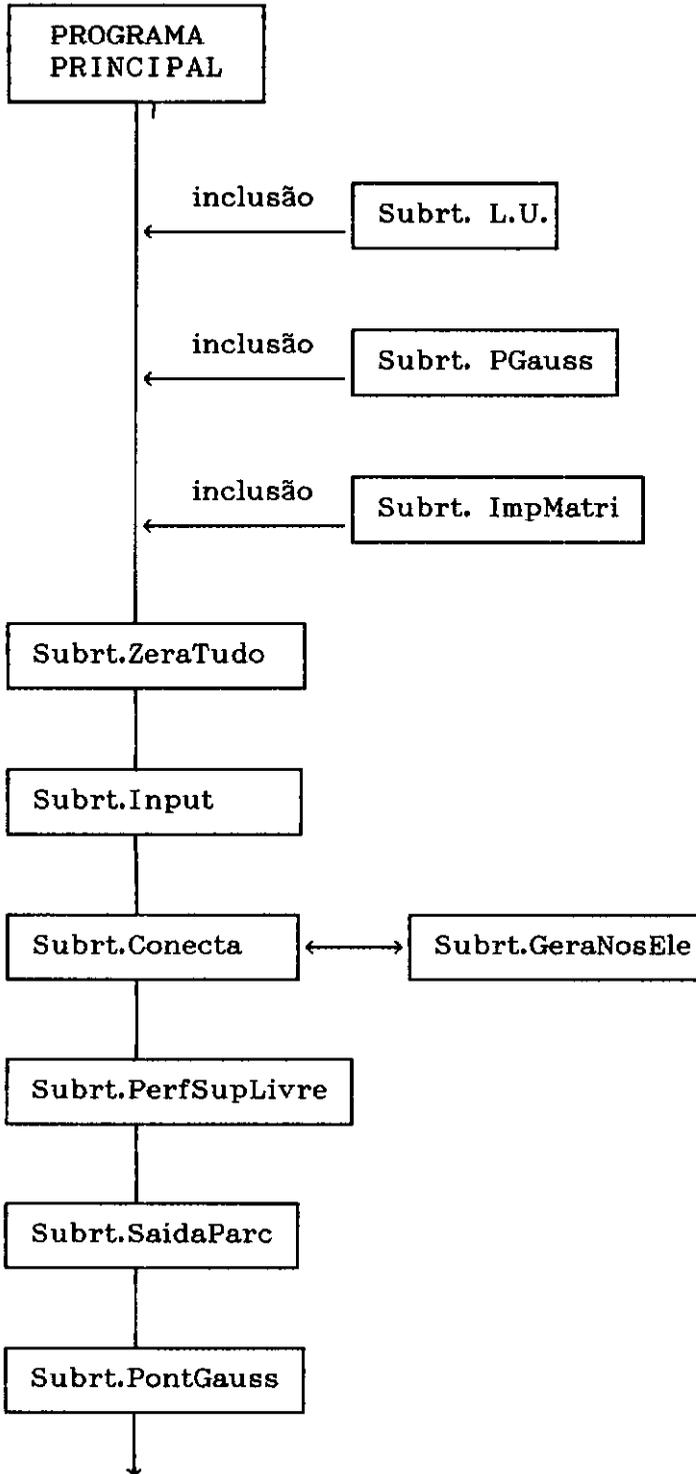
2 - Estes programas possuem pré-processador gráfico e rotina gráfica iterativa, sendo esta última para acompanhamento contínuo dos resultados intermediários de potenciais e fluxos.

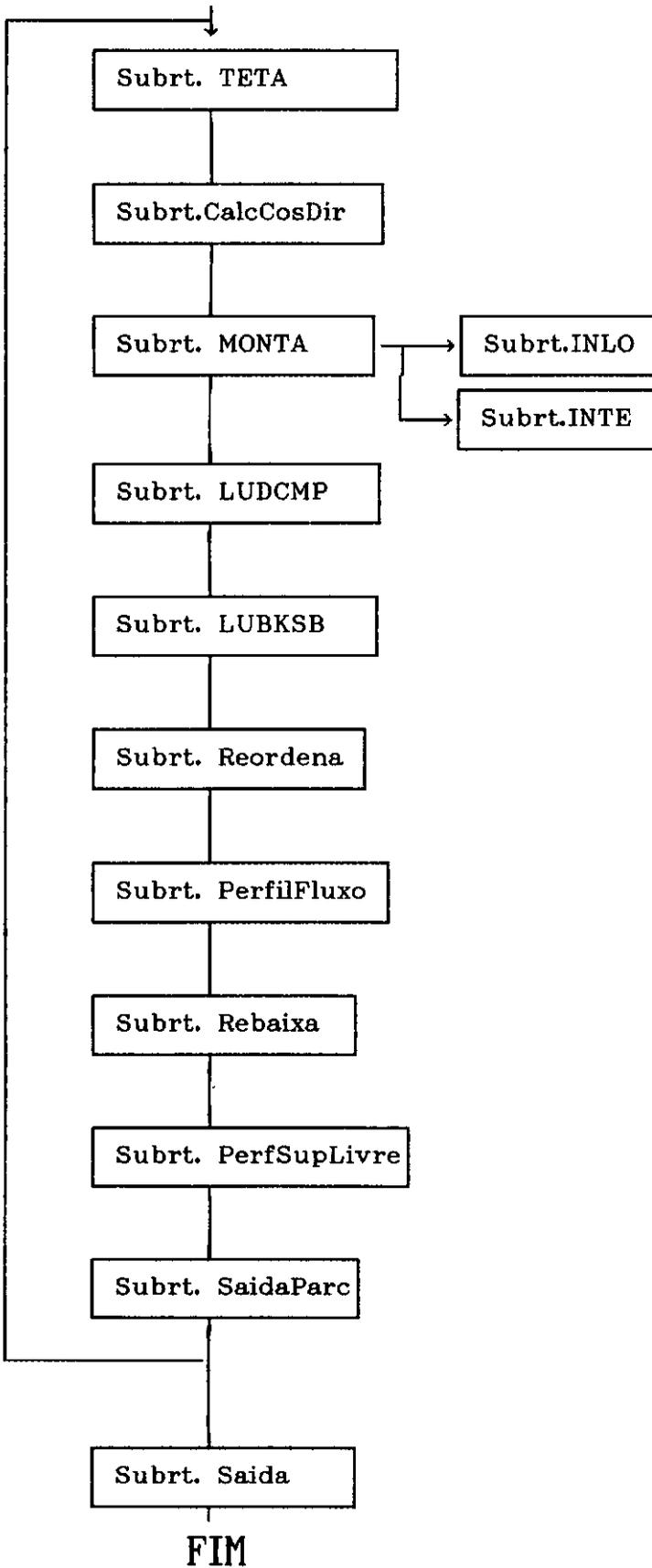
3^o BLOCO

NOME APLICAÇÃO

INITION	- Programa para calcular o movimento inicial da superfície livre proposto por Liggett e Hadjitheodorou (1965)
CAUCHY	- Calcula e compara os coeficientes de influência de elementos isoparamétricos quadráticos analítica e numericamente
PLOTPERF	- Pós-processador gráfico para plotagem de N soluções geradas pelos programas do 2 ^o Bloco

V.2 FLUXOGRAMA DO PROGRAMA "IMPLICIT"





V.3 DESCRIÇÃO DAS SUBROTINAS DO PROGRAMA "IMPLICIT"

Subrotina ZeraTudo

Destina-se a inicializar todos os vetores, matrizes, pointers e variáveis principais do programa.

Subrotina Input

Destina-se a ler os dados correspondentes aos parâmetros físicos do solo, dados de geometria, condições de contorno e incremento de tempo. Possui também um gerador interno de malha por interpolação linear. Abre três(3) arquivos de saída: o primeiro para verificação das coordenadas, condições de contorno e conectividades; o segundo para armazenar os vetores com as coordenadas da S.F em diversos intervalos de tempo; e o terceiro guarda o número de iterações, quando for o caso, para cada intervalo de tempo.

Subrotina Conecta

Destina-se a determinar as conectividades e calcular os comprimentos dos elementos(cordas para o caso de elementos curvos).

Acessa a seguinte subrotina

Subrotina GeraNosEle

gera automaticamente as coordenadas de cada elemento.

Subrotina PerfSupLivre

Destina-se a plotar, na tela e na impressora, o contorno físico (barragem) e a S.F., esta última no atual instante de cálculo. Plota também as principais características do meio poroso e algumas variáveis importantes para um acompanhamento do processo transiente.

Subrotina SaidaParc

Destina-se a gravar as coordenadas dos nós do contorno, dos potenciais e das velocidades em um arquivo de saída, previamente aberto.

Subrotina PontGauss

Destina-se a atribuir as coordenadas locais e os pesos utilizados para integração numérica de funções pelo método da Quadratura de Gauss.

Subrotina Teta

Destina-se a calcular os novos fatores de ponderação para cada nó da superfície livre, como função de novos valores da distância horizontal internodal e do incremento de tempo. Esta rotina só é ativada quando Δt varia e/ou a barragem não possui paramentos verticais.

Subrotina CalcCosDir

Destina-se a calcular os cossenos diretores, n_x e n_y , nos pontos nodais do contorno.

Subrotina Monta

Destina-se a montar a equação matricial $H u = G q$ e logo a seguir introduzir as condições de contorno, formando o sistema de equações algébricas $A x = F$ para ser resolvido por um processo direto.

Acessa as seguintes subrotinas:

Subrotina Inte

Calcula os coeficientes de influência das matrizes H e G para os elementos não contendo o ponto fonte.

Subrotina INLO

Calcula os coeficientes de influência das matrizes H e G para os elementos contendo o ponto fonte. Utiliza a transformação não-linear de terceira ordem proposta por Telles (1987).

Subrotina ImpMatrizGlobal

Destina-se a imprimir, em modo comprimido, as matrizes H e G e os vetores u e q. Usada para visualizar os coeficientes recém calculados e seu rearranjo.

Subrotina LUDCMP

1ª etapa do processo direto de resolução do sistema de equações algébricas, previamente montado e arranjado, por decomposição L U. Nesta etapa são formadas as matrizes L e U, onde L é a matriz triangular inferior e U é a matriz triangular superior. Esta rotina possui a capacidade de efetuar pivoteamentos quando necessário.

Subrotina LUBKSB

2ª etapa do processo de decomposição L U, que corresponde à fase de retrosubstituição.

Subrotina Reordena

Destina-se a reordenar as incógnitas e condições de contorno na sua forma original.

Subrotina PerfilFluxo

Destina-se a plotar, na tela e na impressora, os valores dos fluxos lidos e calculados no contorno.

Subrotina Rebaixa

Destina-se a mover a S.F. e a face de percolação, atualizando suas coordenadas para o próximo intervalo de tempo. Serve ainda para inicializar as matrizes H e G e alguns vetores.

Subrotina Saida

Destina-se a escrever em um arquivo de saída as coordenadas nodais, os potenciais, fluxos e cossenos diretores ao final da simulação.

CAPÍTULO VI

APLICAÇÕES

VI.1 - INTRODUÇÃO

A metodologia exposta nos capítulos III e IV e implementada em programas de computador, apresentados no capítulo V, é aplicada ao estudo de alguns problemas de percolação em barragens de terra homogêneas. Desta maneira, possibilitou-se a ilustração da técnica, utilizando-a em configurações físicas idealizadas tradicionais e em casos práticos, procurando, assim, demonstrar a precisão dos resultados obtidos e a versatilidade do MEC.

Neste capítulo, avalia-se o desempenho dos procedimentos apresentados para o tratamento matemático de descontinuidades físicas e geométricas, que se apresentam, com bastante frequência, em problemas práticos.

Inicialmente, aborda-se o problema do movimento inicial da S.F. nos primeiros intervalos de tempo da simulação. São reproduzidos a análise e os resultados da formulação proposta por Liggett e Hadjitheodorou (1965), que pode ser empregado, dentro de certos limites, na avaliação do desempenho do modelo principal nos instantes iniciais. Esta formulação foi aplicada, em um caso, como ponto de partida do perfil inicial da S.F. no modelo de elementos de contorno, mas pode ser utilizado, da mesma forma, em um outro modelo qualquer.

Numa segunda parte deste capítulo, faz-se uma análise de desempenho do MEC da simulação do problema de rebaixamento instantâneo em situações bastante estudadas na literatura, como também para novas configurações. Os testes mais severos são aplicados para o caso de percolação através de um bloco de terra retangular, que por apresentar uma configuração bastante desfavorável, sob o ponto de vista numérico, serve como primeiro indicador do desempenho do modelo. Este caso, apresenta a vantagem de ter sido bastante estudado em regime transiente e também possui solução analítica para o regime permanente.

Os resultados obtidos nas simulações de percolação em regime transiente, podem então ser comparados com soluções numéricas apresentadas na literatura: Todson(1971) usando Diferenças Finitas, Cheng e Li(1973), France et al (1971) usando Elementos Finitos, Liggett(1977), Cheng(1986), E.Bruch (1987,1988), Cabral(1990) usando Elementos de Contorno, Kellogg(1941), Cargill(1983)utilizando modelos de escala reduzida e Vargas(1975) com um modelo eletroanalógico.

São tecidos comentários sobre os trabalhos de Sá (1985) e Chang(1988), onde oscilações numéricas foram detectadas e de alguma forma estes autores procuraram explicar tais perturbações.

Na última parte deste capítulo são apresentados os resultados obtidos para o caso de regime permanente ou estacionário, via esquema iterativo, e comparados com aqueles obtidos por diversos métodos numéricos, com soluções analíticas e com resultados experimentais.

VI.2 - O MOVIMENTO INICIAL

Liggett e Hadjitheodorou (1965) publicaram um trabalho que, essencialmente, se concentrou no estudo do movimento inicial da S.F., utilizando a técnica das perturbações, que neste ítem será apresentada resumidamente. Tal trabalho foi assim introduzido pelos autores:

"As equações Lagrangeanas da mecânica dos fluidos são usadas para resolver o problema de rebaixamento rápido nas vizinhanças de um maciço de terra com face vertical. As variáveis dependentes são a pressão e as coordenadas da S.F. As pressões podem então ser usadas para calcular a estabilidade do maciço, enquanto que os valores do escoamentos do fluido são utilizados para calcular a hidrógrafa de drenagem.

As equações Lagrangeanas possuem a vantagem de que seu domínio de solução se mantém inalterado no decorrer dos cálculos, isto é, por tempo indeterminado, embora o fluxo se processe em regime transiente na presença de superfície livre. Este tipo de representação é sempre útil em problemas de movimento inicial desta natureza. Os resultados são apresentados de forma tabelada e adimensional, de maneira que os cálculos possam ser facilmente feitos".

O problema em questão é mostrado esquematicamente na figura (VI.1). O maciço de terra funciona com uma barragem por tempo suficientemente longo, até que esteja saturado até a altura H. No instante $t=0$, o reservatório a esquerda do maciço é esvaziado instantaneamente e então, inicia-se um fluxo d'água para fora do maciço. O modelo proposto fornece, como já dito, os valores de pressão no interior do maciço e as hidrógrafas de recessão ou vazões em trânsito.

As equações Lagrangeanas para o escoamento em duas dimensões são:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial T^2} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} \quad (\text{VI.1})$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial T^2} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial Z} - g \quad (\text{VI.2})$$

$$\frac{\partial X}{\partial A} \frac{\partial Z}{\partial B} - \frac{\partial Z}{\partial A} \frac{\partial X}{\partial B} = 1 \quad (\text{VI.3})$$

onde X é a posição horizontal, figura (VI.1), da partícula fluida em qualquer tempo, T, Z denota a posição vertical da mesma partícula; ρ é a densidade do fluido; A denota a posição horizontal original ($T=0$) da partícula do fluido que estará na posição X algum instante de tempo depois; e B se refere à posição original horizontal da partícula fluida. As equações (VI.1) e (VI.2) são as equações do movimento, enquanto que a (VI.3) representa equação da continuidade em coordenadas Lagrangeanas.

A partir destas equações são feitas algumas hipóteses simplificadas e adiciona-se a expressão correspondente a lei de Darcy.

Com o intuito de tornar as equações universais para uma dada geometria e independente da condutividade hidráulica, define-se as seguintes variáveis adimensionais

$$x = \frac{X}{H}, \quad z = \frac{Z}{H}, \quad t = \frac{K \cdot T}{H}, \quad p = \frac{P}{\rho \cdot g \cdot H}, \quad a = \frac{A}{H}, \quad b = \frac{B}{H}$$

Mais alguns passos são feitos até que o seguinte conjunto de equações, na forma adimensional, é obtido:

$$\frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial z}{\partial b} - \frac{\partial z}{\partial a} \frac{\partial x}{\partial b} = 1 \quad (\text{VI.4})$$

$$\frac{\partial p}{\partial a} + \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial a} + \left(\frac{\partial z}{\partial t} + 1 \right) \frac{\partial z}{\partial a} = 0 \quad (\text{VI.5})$$

$$\frac{\partial p}{\partial b} + \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial b} + \left(\frac{\partial z}{\partial t} + 1 \right) \frac{\partial z}{\partial b} = 0 \quad (\text{VI.6})$$

Devido as dificuldades de se resolver as não linearidades das equações Lagrangeanas, Liggett e Hadjitheodorou (1965) expandiram as equações em séries, chegando nas seguintes expressões:

$$x(a,b,t) = a + x^{(1)}(a,b) \cdot t + x^{(2)}(a,b) \cdot t^2 + \dots \quad (\text{VI.7})$$

$$z(a,b,t) = b + z^{(1)}(a,b) \cdot t + z^{(2)}(a,b) \cdot t^2 + \dots \quad (\text{VI.8})$$

$$p(a,b,t) = p^{(0)}(a,b) + p^{(1)}(a,b) \cdot t + p^{(2)}(a,b) \cdot t^2 + \dots \quad (\text{VI.9})$$

onde cada coeficiente da série $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, z^{(1)}, z^{(2)}, \dots, p^{(0)}, p^{(1)}, \dots$, representa um problema bidimensional. No instante $t=0$ $x=a$ e $z=b$, satisfazendo o critério em que a e b são as coordenadas originais das partícula. Os termos $x^{(1)}$ e $z^{(1)}$ representam as velocidades adimensionais e $x^{(2)}$ e $z^{(2)}$ as acelerações adimensionais.

As séries (VI.7), (VI.8), e (VI.9) são substituídas nas equações (VI.4), (VI.5), e (VI.6). Sobre os resultados aplica-se a técnica padrão de perturbação. Para maiores detalhes vide Liggett e Hadjitheodorou (1965). No problema de rebaixamento, mostrado na figura (VI.1), as seguintes condições de contorno foram adotadas:

$$p(a,1,t) = 0 \quad (\text{VI.10})$$

$$\frac{\partial}{\partial b} p(a,0,t) = -1 \quad (\text{VI.11})$$

$$p(0,b,t) = 0 \quad (\text{VI.12})$$

$$p(\infty,b,t) = (1-b) \quad (\text{VI.13})$$

A equação (VI.10) indica que a pressão é zero para as partículas na S.F. A equação (VI.11) advem da condição de que a velocidade vertical ou normal na superfície impermeável é zero e por isso a pressão nesta superfície é localmente hidrostática.

A equação (VI.12) indica que a pressão, no instante $t=0$, sobre as partículas pertencentes a face do maciço se mantém nula. Esta condição não é a condição exata(real) para um rebaixamento rápido, mas é a pressão que ocorreria se a água tivesse de percolar da região saturada para o meio poroso não saturado. Para a situação mostrada na figura (VI.1), a água escoava para fora do meio completamente. Todavia, a equação (VI.12) é uma boa aproximação da condição de contorno verdadeira para o rebaixamento rápido se o intervalo for pequeno.

Para a análise numérica, via programa de computador, parte das tabelas, apresentadas no trabalho original, foram reproduzidas em um arquivo de dados. O programa "INITION" (capítulo V) consulta este arquivo para calcular as novas coordenadas da S.F. nos instantes desejados. A saída gráfica do programa apresenta o traçado de duas curvas, que servem para visualizar os perfis da S.F. A curva plotada em linha cheia corresponde a série que utiliza os termos de 1ª e 2ª ordem, ao passo que a curva em linha pontilhada contém apenas o termo de 1ª ordem. Encontram-se também plotados dados correspondentes ao intervalo de tempo adimensional e a abscissa do ponto de afloramento.

Exemplo VI.1

Este exemplo, apresenta uma barragem de terra homogênea de geometria retangular, com altura, H , igual à 1 metro e largura, B , igual à 5 metros. As figuras (VI.2), (VI.3) e (VI.4) correspondem aos perfis da S.F. para os tempos adimensionais, t^* , iguais a 0.143, 0.499 e 0.641. Verifica-se por comparação que os resultados aqui obtidos são idênticos àquele obtidos por Liggett e Hadjitheodorou (1965). Estes autores também incluíram na plotagem resultados experimentais, conduzidos em um modelo de placas do tipo Hele-Shaw.

Exemplo VI.2

Os dados para esse exemplo, são:

$$H = 10.0 \text{ m,}$$

$$B = 10.0 \text{ m,}$$

$$\text{e } t^* = 0.06 .$$

Este mesmo exemplo foi utilizado por Liggett (1977,1983) para obter um perfil da S.F. num dado instante e então, com esse perfil, dar prosseguimento à simulação utilizando-se o MEC, discretizado com elementos lineares. O resultado deste exemplo é mostrado na figura (VI.5), que reproduz fielmente os resultados originais.

Exemplo VI.3

Os dados para esse exemplo, são:

$$H = 24.0 \text{ m,}$$

$$B = 16.0 \text{ m,}$$

$$\text{e } t^* = 0.06675 \text{ e } t^* = 0.166875 .$$

Este exemplo, como será visto mais adiante, possui uma geometria e condições de contorno bastante utilizadas na literatura. Os resultados podem ser vistos nas figuras (VI.6) e (VI.7).

VI.3 - O REGIME TRANSIENTE

Como primeiro exemplo apresenta-se o fluxo através de um bloco de material poroso, de dimensões idênticas ao exemplo VI.3. Este problema foi estudado por diversos pesquisadores e pode ser considerado, propriamente, como um teste padrão no assunto. Taylor et al (1973), E.Bruch (1988), Cividini e Gioda (1989), Prodanoff et al(1990), Cabral(1990), entre outros, estudaram este mesmo problema.

A figura (VI.8) mostra a configuração geométrica da barragem. Para o tempo $t < 0$, o nível do reservatório de montante (24m) é o mesmo do que o de jusante e, instantaneamente, o nível deste último é rebaixado para o nível $z_2 = 4.0$ em $t=0$, seguindo-se um fluxo transiente no interior da barragem. Para a discretização do problema foram utilizados duas malhas distintas. A primeira e mais refinada contém um total

de 48 nós(22 elementos), dos quais 17 nós(8 elementos) se encontram na S.F. A segunda malha contém um total de 36 nós(16 elementos), dos quais 9 nós(4 elementos) situados na S.F. As características do meio poroso e os valores dos parâmetros computacionais são apresentados a seguir:

$$\begin{array}{lll}
 K = 0.01 \text{ cm/s} & \epsilon = 0.4 & \Delta t = 0.1125 \therefore t \leq 16 \cdot \Delta t \\
 \text{Tol} = 0.001 & \xi = 0.0^0 & \Delta t = 0.2225 \therefore 16 \cdot \Delta t < t \leq 24 \cdot \Delta t \\
 z_1 = 24 \text{ m} & z_2 = 4 \text{ m} & \Delta t = 0.445 \text{ para } t > 24 \cdot \Delta t \\
 \text{TAX} = 0.25 & &
 \end{array}$$

Exemplo VI.4 - Primeira malha e esquema Implícito

$$\theta_{\text{ótimo}} = 0.52616, 0.55208 \text{ e } 0.60218; \Delta x = 1.0 \text{ m na S.F.}$$

Exemplo VI.5 - Primeira malha e esquema Explícito

$$\theta = 0.0; \Delta x = 1.0 \text{ m na S.F.}$$

Os resultados desta simulação estão plotados na figura (VI.8), onde a linha cheia corresponde ao esquema explícito e a pontilhada ao implícito. Nota-se que acontece um atraso na solução implícita desde os primeiros instantes.

Exemplo VI.6 - Segunda malha e esquema Implícito

$$\theta_{\text{ótimo}} = 0.51310, 0.52616 \text{ e } 0.55208; \Delta x = 2.0 \text{ m na S.F.}$$

Exemplo VI.7 - Segunda malha e esquema Explícito

$$\theta = 0.0; \Delta x = 2.0 \text{ m na S.F.}$$

Os resultados desta simulação estão plotados na figura (VI.9), onde a linha cheia corresponde ao esquema explícito e a pontilhada ao implícito. O amortecimento na solução implícita fica mais restrita à região próxima ao ponto de afloramento.

Na figura (VI.10) estão plotadas as soluções implícitas dos exemplos VI.4 e VI.6., para se ter uma melhor idéia da perturbação produzida na região perto da face de percolação.

Exemplo VI.8 - Segunda malha, esquema Implícito e Iterativo

$\Theta_{\text{ótimo}} = 0.51310, 0.52616 \text{ e } 0.55208; \Delta x = 2.0 \text{ m na S.F.}$
 $\omega = 0.5$ (esquema iterativo ativado)

Plotou-se na figura (VI.11) as curvas correspondentes aos exemplos VI.6 em linha tracejada, VI.7 em linha cheia e VI.8 em linha pontilhada. Nota-se um atraso ainda maior quando se adota o processo iterativo.

Exemplo VI.9 - Primeira malha, esquema Explícito e Iterativo

Plotou-se na figura (VI.12) as soluções correspondentes a este caso e em linha tracejada os resultados do exemplo VI.5. O formato da solução do caso iterativo assemelha-se ao explícito, mas permanece o atraso da S.F..

Exemplo VI.10 - Soluções Explícitas exemplo VI.5 versus VI.7

Verifica-se, pela figura (VI.13), que a solução da malha mais refinada em linha tracejada, difere levemente no ponto de afloramento da solução dada pela malha menos refinada em linha cheia.

Simulou-se o caso em que a solução inicial era dada pela solução do item VI.1, apresentando resultados semelhantes e compatíveis com os demais.

Exemplo VI.11 - Exemplo VI.6 versus B-Spline MEC (Cabral-1990)

Os resultados apresentado em por Cabral(1990b) foram comparados com aqueles obtidos no exemplo VI.6, vide figura (VI.14). Cabral usou um nó simples no ponto de afloramento, fazendo valer da capacidade dos elementos B-splines de permitirem a conservação das continuidades da declividade e da curvatura. Para os demais nós descontínuos foram utilizados nós triplos. Pelo fato dos elementos B-splines cúbicos poderem assumir uma pequena curvatura, pode explicar o fato dos resultados terem apresentado um rebaixamento mais acentuado nesta região. Todavia, procurando seguir os mesmos dados utilizados por E.Bruch(1988), Cabral discretizou a S.F. de forma diferente de Bruch, mas manteve o fator de ponderação ótimo Θ igual à 0.69 em todos os

nós, quando deveria ter utilizado os valores 0.612674, 0.593302, 0.55208 e 0.526169, correspondentes aos incrementos Δx iguais à 0.9, 1.1, 2.0 e 4.0. Aplicando a análise numérica de precisão e estabilidade propostos por Liggett(1983), verifica-se que os dois primeiros nós sofrem amplificação numérica e os dois últimos amortecimento numérico. Esta é, provavelmente, uma das razões mais fortes que explique tal comportamento dado pela diferença encontrada entre os resultados.

Encontram-se plotados na figura (VI.15) as curvas eqüipotenciais para os instantes $t = 0$ e $t = 4.45$ horas do exemplo VI.7 .

BARRAGEM TRAPEZOIDAL

A figura (VI.16) mostra a configuração geométrica de uma barragem trapezoidal. Para o tempo $t < 0$, o nível do reservatório de montante (10m) é o mesmo do que o de jusante. Instantaneamente, o nível deste último é rebaixado para o nível $z_2 = 0.0$ em $t=0$, seguindo-se um fluxo transiente no interior da barragem. Para a discretização do problema foi utilizada uma malha contendo 32 nós(14 elementos), dos quais 13 nós(6 elementos) se encontram na S.F. As características do meio poroso e os valores dos parâmetros computacionais são apresentados a seguir:

Exemplo VI.12

$$\begin{array}{llll}
 K = 0.00005 \text{ cm/s} & \epsilon = 0.5 & \text{Tol} = 0.001 & \omega = 0.5 \\
 z_1 = 10 \text{ m} & z_2 = 0 \text{ m} & \text{TAX} = 0.25 & \xi_{\max} = \pi/6 \text{ rad}
 \end{array}$$

Resultados foram plotados para os instantes t iguais à 0, 10, 30, 150, 390, 630, 1110, 1590, 2550 e 8214 horas, figura (VI.16). Os valores de Δt foram duplicados nos instantes de ordem 10, 20, 30, 100, 150 e 200 e triplicado em 40. São plotadas as soluções explícita em linha cheia e a implícita em linha tracejada. Os resultados demonstraram que esta geometria, ameniza bastante os problemas numéricos, tal fato também foi detectado por Sá (1985).

BARRAGEM TRAPEZOIDAL COM FILTRO CHAMINÉ

A figura (VI.17) mostra a configuração geométrica de uma barragem contendo um filtro interno do tipo chaminé. O filtro está localizado na face vertical à direita do desenho, o restante do corpo da barragem foi suprimido. Para o tempo $t < 0$, supõe-se que todo o meio esteja saturado até o nível do reservatório de montante (1m) e instantaneamente "liga-se" o filtro (nível $z_2 = 0.0$), seguindo-se um fluxo transiente no interior da barragem. Para a discretização do problema foi utilizada uma malha contendo 32 nós(14 elementos), dos quais 9 nós(4 elementos) se encontram na S.F. As características do meio poroso e os valores dos parâmetros computacionais são apresentados a seguir:

Exemplo VI.13

$$\begin{array}{llll}
 K = 1.3(8)E-4 \text{ cm/s} & \epsilon = 0.5 & \text{Tol} = 0.001 \text{ e } \text{Tol} = 0.0001 & \\
 z_1 = 1 \text{ m} & z_2 = 0 \text{ m} & \text{TAX} = 0.25 & \Delta x_i = 20 \text{ cm}
 \end{array}$$

Os resultados foram plotados para os instantes t iguais à 0, 6, 15, 24, 30, 45, 60 horas e regime permanente na figura (VI.17). Os valores de Δt foram duplicados nos instantes de ordem 20 e 60. São apresentadas duas curvas, a solução explícita em linha cheia e a implícita em linha tracejada. Este problema foi, inicialmente, simulado usando-se $\text{Tol}=0.001$ mais o processo interrompeu-se antes de chegar a região esperada. Numa segunda simulação trocou-se o valor de Tol para 0.0001, alcançando resultados, comparativamente, melhores.

VI.4 - O REGIME PERMANENTE

Os principais métodos de resolução podem ser subdivididos em duas grandes classes: os métodos de domínio fixo e os de domínio variável.

Os métodos de domínio fixo podem ser classificados em dois grupos: o método de desigualdade variacional e o método de cargas de pressão estendidas. Baiocchi foi o primeiro a aplicar o método de desigualdade variacional em problemas de fronteira livre para fluxos através de meios porosos. Este método, de maneira geral, também utiliza uma extensão da carga de pressão, mas adiciona a aplicação de uma transformação integral (transformação de Baiocchi) ao problema.

Este método possui uma estrutura matemática elegante em sua teoria e conduz a algoritmos numéricos de solução simples. Todavia, a aplicação do método é difícil se não impossível, em alguns casos, dependendo da regularidade do domínio de percolação, J.C.Bruch(1989).

O método de carga de pressão estendida é baseado no conceito de que a pressão é estendida suavemente através da fronteira livre ou móvel para a região não-saturada a partir da região de fluxo. A extensão da carga de pressão para todo o meio poroso conduz a um coeficiente de permeabilidade estendido do meio, que é igual ao coeficiente saturado na região de percolação e igual a zero ou a algum valor pequeno(por razões computacionais) na região não-saturada, J.C.Bruch (1989).

O MEC utilizando o esquema de rebaixamento apresentado no capítulo IV, é um método de domínio variável e pertence a uma classe mais abrangente, chamada de métodos de fronteira livre por tentativas (Trial Free-Boundary Methods). Esta classe engloba as seguintes técnicas, segundo Cryer(1976b):

Diferenças Finitas;

Elementos Finitos;

Método de Galerkin;

Equações Integrais e distribuições superficiais;

Método de Trefftz;

Equações Integrais;

Método Auto-Consistente e o Método dos momentos;

Métodos Analógicos;

Tanque Eletrolítico;

Analogia de Hele-Shaw;

Redes de resistências;

Eletroanalógico com papel eletrocondutor e grafite;

Métodos Gráficos.

Cryer(1976b)apresenta com mais propriedades cada um dos métodos acima colocados e mais as técnicas usuais de movimentação da fronteira móvel. Uma excelente bibliografia é dada por Cryer (1976a).

Neste trabalho, procurou-se escolher algumas das diversas soluções disponíveis na literatura, principalmente aquelas apresentadas sob forma tabular, para comparação dos resultados.

Foi utilizada a mesma configuração e os mesmos dados dos exemplos de VI.4 à VI.13. O ponto de afloramento, que ora era tratado como um nó descontínuo de colocação não-nodal, agora, é apenas um nó simples onde o fluxo precrito igual à zero. O nó descontínuo de interseção entre a S.F. e a face de montante é tratado como um nó duplo, de um lado o fluxo é igual a zero e do outro o potencial, igual ao nível de montante, são prescritos.

Exemplo VI.14

Arbitrou-se três formas arbitradas para a aproximação inicial do perfil da S.F., sendo escolhida aquela que apresentou a menor deformação dos nós centrais do elementos pertencentes à S.F. A figura (VI.18) apresenta a plotagem da forma inicial, das curvas intermediárias e do perfil final.

Estão plotadas na figura (VI.19) quatro soluções para o perfil da S.F. em regime permanente, sendo a linha cheia a solução dada pelo processo iterativo dado na figura (VI.18), a linha tracejada longa a solução implícita de VI.4, tracejada curta a solução explícita VI.5 e em losangos a solução analítica de Polubarinova-Kochina (1962).

A tabela VI.1 mostra a posição final do ponto de afloramento obtida por diferentes métodos e autores. E.I.Q.C.N.N. é a abreviação de elementos isoparamétricos quadráticos com colocação não-nodal.

Notação:

- (1) - malha mais refinada;
- (2) - malha menos refinada;
- (3) - processo iterativo ativado com a malha (1);
- (4) - processo iterativo ativado com a malha (2);

E.I.Q.C.N.N. Implícito (1)	12.7415
E.I.Q.C.N.N. Explícito (1)	12.8044
E.I.Q.C.N.N. Implícito (2)	12.8039
E.I.Q.C.N.N. Explícito (2)	12.8676
E.I.Q.C.N.N. Implícito (3)	12.7276
E.I.Q.C.N.N. Explícito (3)	12.8147
E.I.Q.C.N.N. Implícito (4)	12.8185
E.I.Q.C.N.N. Explícito (4)	12.8808
E.I.Q. Processo Iterativo	12.9380
B-Spline Cúbico Cabral(1990)	12.7515
Cryer(1976b)	12.7132
Polubarinova-Kochina(1962)	12.95
Ozis(1981)	12.7070
E.Bruch (transiente) (1988)	13.03
E.Bruch (permanente) (1988)	12.98
Finnemore e Perry (1968)	12.78
Cheng e Li (1973)	12.20
Todson (1971)	11.60

Tabela VI.1 - Elevação do ponto de afloramento

BARRAGEM TRAPEZOIDAL

Exemplo VI.15 - Regime Permanente do exemplo VI.12

Com base na figura (VI.20) estão representadas: A aproximação inicial corresponde a linha cheia superior; algumas das posições intermediárias foram plotadas em linha tracejada; e a configuração final é dada em asteriscos.

*BARRAGEM TRAPEZOIDAL COM FILTRO CHAMINÉ**Exemplo VI.16 - Regime Permanente*

Na figura (VI.21) foram plotadas diversas soluções: em linha cheia superior a posição final para o processo transiente com marcha explícita e maior tolerância; em linha pontilhada o mesmo do anterior mas com marcha implícita; em linha cheia inferior a posição final para o processo transiente com marcha explícita e menor tolerância; em linha tracejada o mesmo do anterior mas com marcha implícita; em triângulos a solução do processo iterativo; em quadrados a solução pelo método de fronteira livre por tentativas; em losangos o mesmo do anterior mais complementado com iterações de compatibilidade, estes dois últimos se encontram tabelados em Crank (1984).

Nota-se que para as duas situações finais obtidas pelo processo transiente com maior tolerância, tiveram seus cálculos interrompidos antes de fosse alcançada a configuração de equilíbrio. Isto, deu-se pela adoção de um critério de parada pouco restritivo.

CAPÍTULO VII

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

VII.1 - OBSERVAÇÕES PRELIMINARES

O problema de percolação em regime permanente tem seu modelo matemático bastante estudado, contendo uma enorme variedade de soluções distintas, vide Cryer(1976a,b,1977) e Crank(1984). Por outro lado, estudos mais aprofundados ainda são necessários quando o escoamento se dá em regime transiente.

A formulação aqui desenvolvida considera somente a região saturada. Todavia, Freeze (1971) mostrou a importância, em certos casos, de uma análise que considera o fluxo na região não saturada. Neste caso o Método dos Elementos de Contorno pode ser acoplado a uma malha de Elementos Finitos que irá representar a região não-saturada, sendo que o ajuste da malha continuará sendo governado pelo MEC.

Procurou-se implementar o maior número possível de tratamentos matemáticos e, ao mesmo tempo, testar várias alternativas de cálculo, buscando, sempre que possível, estruturar e otimizar seus componentes. Para tanto, foram implementadas as seguintes facilidades no código de programação denominado "*implicit.pas*":

- 1-Geração automática da malha inicial e de sua conectividade;
- 2-Utilização de incrementos de tempo variáveis;
- 3-Cálculo automático do melhor fator de ponderação para os nós pertencentes à superfície freática, em função de Δx e Δt ;
- 4-Elementos Isoparamétricos ou Superparamétricos Quadráticos;
- 5-Integração seletiva para as integrais regulares;
- 6-Integração singular de duas formas;
 - 6.1-Transformação de Telles para integração em elementos curvos;
 - 6.2-Cálculo analítico exato em elementos superparamétricos;
- 7-Determinação das direções de rebaixamento para cada nó pertencente a superfície freática;
- 8-Ajuste iterativo opcional da superfície freática para cada incremento temporal;

- 9-Utilização de esquema implícito ou explícito para avanço no tempo;
- 10-Possibilidade de tratamento de descontinuidades físicas ou geométricas de fluxo;
- 11-Utilização de rotinas gráficas para visualização dos resultados em cada passo de tempo.

VII.2 - CONCLUSÕES

Assumindo a validade das hipóteses sobre o escoamento e o meio poroso, procura-se colocar as conclusões sob aspectos estritamente numéricos.

De uma maneira geral, o MEC mostrou boa estabilidade, tanto na análise em regime permanente quanto em regime transiente. O esquema iterativo para o regime permanente, apesar de simples, converge rapidamente para a solução final. A facilidade de ajuste da malha em problemas de fronteira móvel, como visto, coloca o método em vantagem sobre as demais formulações nesta classe de problemas.

A discretização do contorno através de elementos curvos é uma escolha atraente, devido, principalmente, a sua capacidade de modelar corpos com geometria irregulares. A formulação isoparamétrica é indicada no caso título deste trabalho ou em quaisquer situações onde rápidas variações funcionais da solução ou das condições de contorno estejam presentes na análise.

A integral imprópria indicada na equação (III.63) é convergente, então, como já dito, seu valor principal coincide com o resultado obtido quando esta integral é calculada no sentido usual. Esta mesma conclusão foi estendida para a integral indicada na equação (III.62) baseando-se na existência da expressão (III.69).

Para o cálculo das integrais onde o ponto fonte pertence ao elemento de integração, verificou-se, através de experiências numéricas, que são necessários dezesseis (16) pontos de Gauss no caso de elementos contínuos e de vinte e quatro (24) pontos de Gauss no caso de elementos descontínuos, para se obter uma precisão razoável.

O tratamento adequado das descontinuidades mostrou-se de fundamental importância em problemas envolvendo bruscas variações de nível d'água, podendo ser considerado peça chave para a localização e rebaiamento do ponto de afloramento no processo transiente.

Para os diversos graus de refinamento, no esquema implícito de marcha no tempo, verificou-se a ocorrência de um atraso na S.F. No geral, tal comportamento foi mais acentuado nas malhas mais refinadas, sendo que nas menos refinadas mostrou-se mais pronunciado nas vizinhanças do ponto de afloramento.

O esquema explícito de marcha no tempo é, apesar de ser mais simples, menos aproximado do que o implícito, principalmente devido a linearização das condições de contorno. Mesmo quando foi usada uma malha "pobre", apresentou bom desempenho e estabilidade.

A eliminação do potencial mostrou-se inadequada quando os resultados da solução explícita são confrontados com aqueles produzidos pela solução implícita. A solução implícita, exceto nos instantes iniciais, apresentou forte amortecimento numérico, principalmente, na vizinhança do ponto de afloramento. Isto é, provavelmente, causado pelo fato do fluxo ser mais sensível às variações do que o potencial.

O processo iterativo utilizado durante o processo transiente, provocou um amortecimento considerável nos perfis da S.F., não apresentando qualquer melhoria na solução global do problema.

O processo iterativo, quando utilizado, na obtenção do perfil da S.F. em regime permanente, apresentou um desempenho bastante satisfatório. Isto ficou comprovado nos estudos comparativos apresentados no capítulo VI, onde os resultados foram confrontados com resultados numéricos obtidos por soluções analíticas e aproximadas.

Notou-se, durante o transcorrer do processo transiente, que o nó central deslocou-se, acentuadamente, de sua posição central. Este fato se deve ao deslocamento diferenciado entre nós adjacentes.

VII.3 - RECOMENDAÇÕES

Com intuito de minimizar os erros introduzidos pela técnica numérica de solução do modelo matemático, sugere-se que as seguintes implementações sejam efetuadas em futuros trabalhos:

- 1-Realocação do nó central para a posição correspondente a coordenada local $\eta=0$;
- 2-Tratamento mais robusto para as integrais quase-singulares, apesar de se ter utilizado um esquema de integração seletiva;
- 3-Tratamento da(s) singularidade(s) de fluxo;
- 4-Eliminação do fluxo e não do potencial, como foi feito na etapa de montagem da matriz solução do problema, para o esquema implícito;
- 5-Acoplamento de um modelo auto-adaptativo tipo H para a redistribuição e refinamento da malha durante o processo de cálculo;

Objetivando solucionar problemas mais complexos, que ocorrem no dia a dia da engenharia, recomenda-se:

- 1-Incorporação de subregiões para análise de meios não homogêneos
- 2-Incorporação das soluções fundamentais apresentadas no capítulo III para análise de meios anisotrópicos.

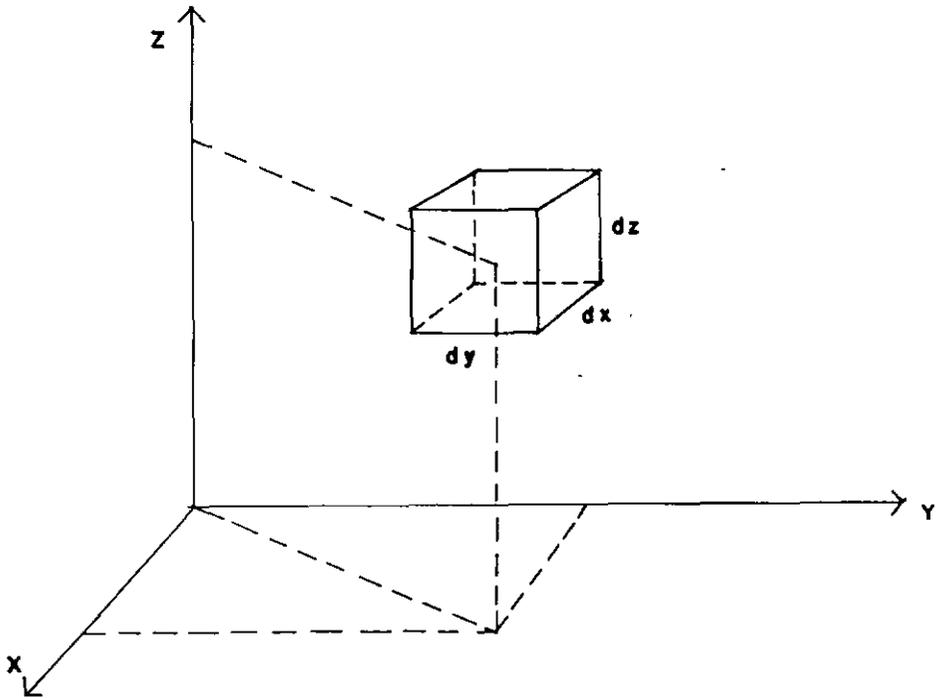


Figura II.1 - Elemento infinitesimal de volume

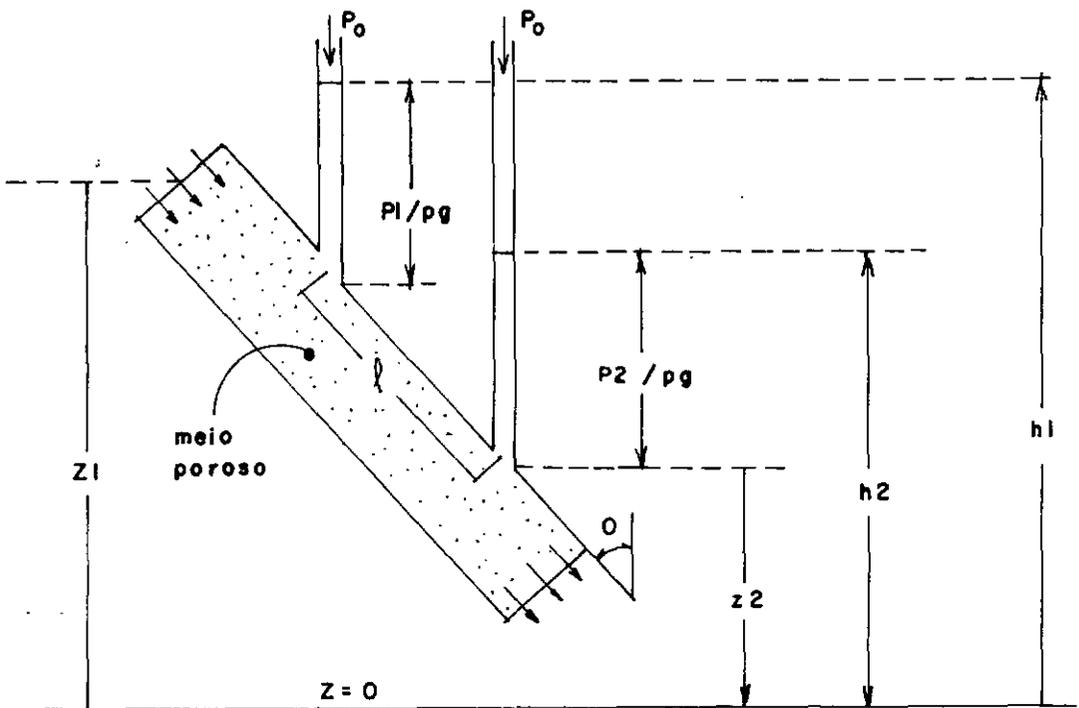


Figura II.2 - Escoamento através de uma coluna de solo saturada

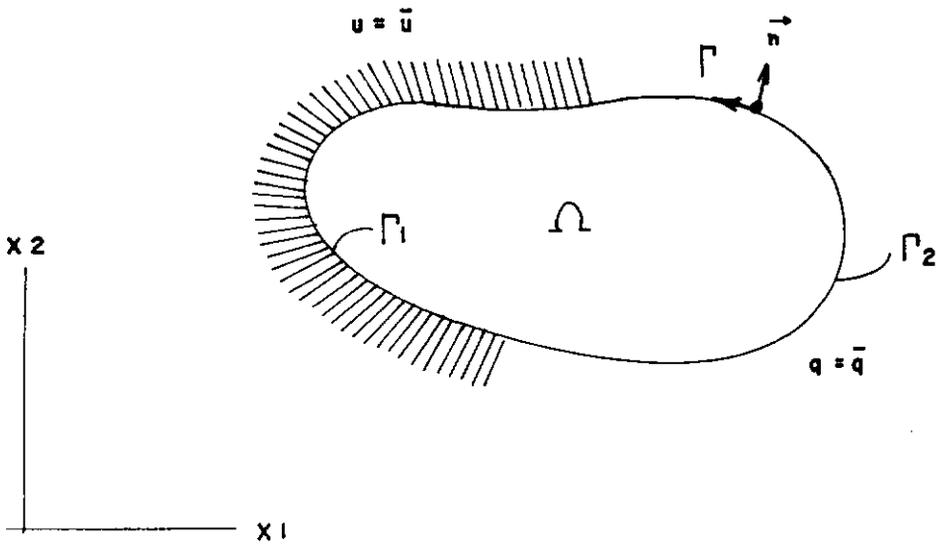


Figura III.1 - Definições geométricas da equação de Laplace

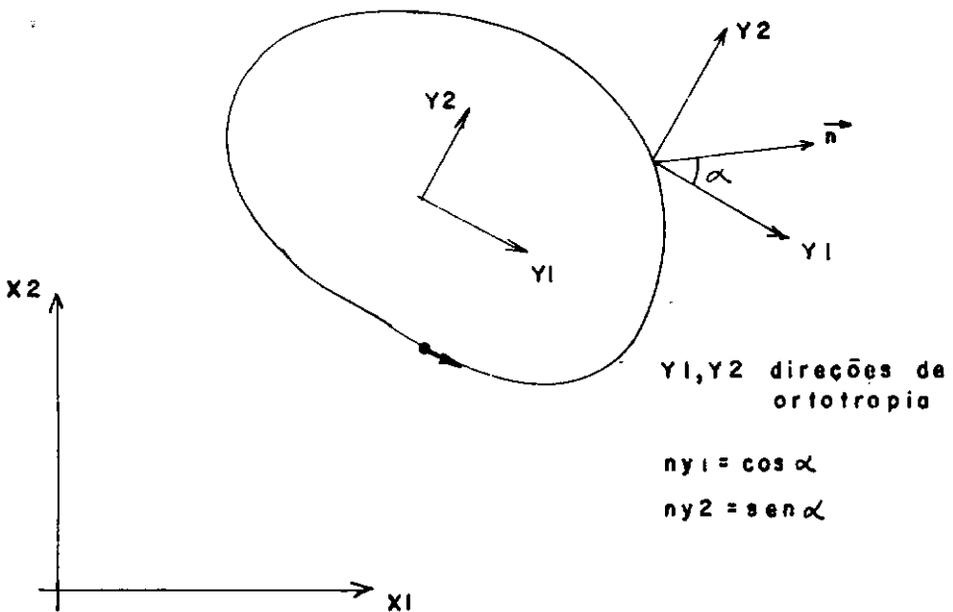
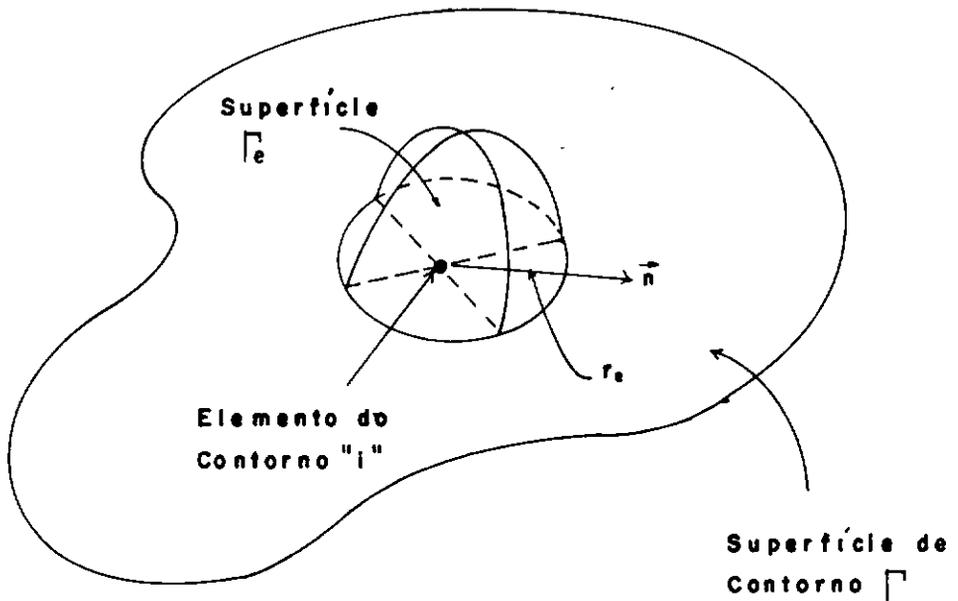


Figura III.2 - Meio ortotrópico



Caso tridimensional - Hemisfério em torno de i

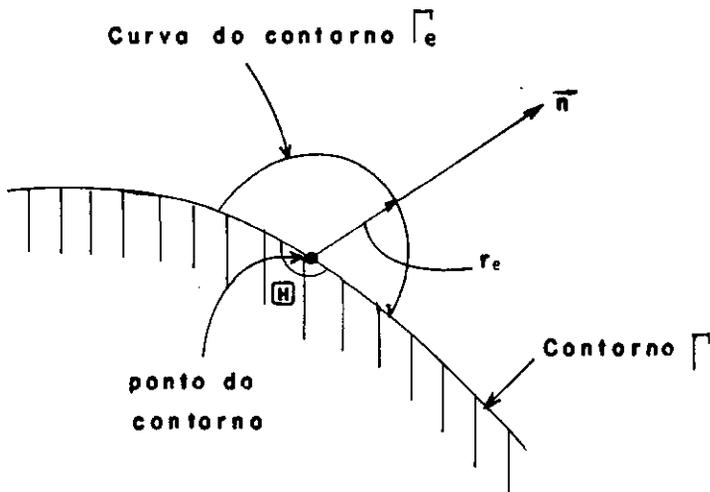


Figura III.3 Pontos do contorno para caso bi ou tridimensional, aumentados de um pequeno hemisfério ou semicírculo - Brebbia e Dominguez (1989).

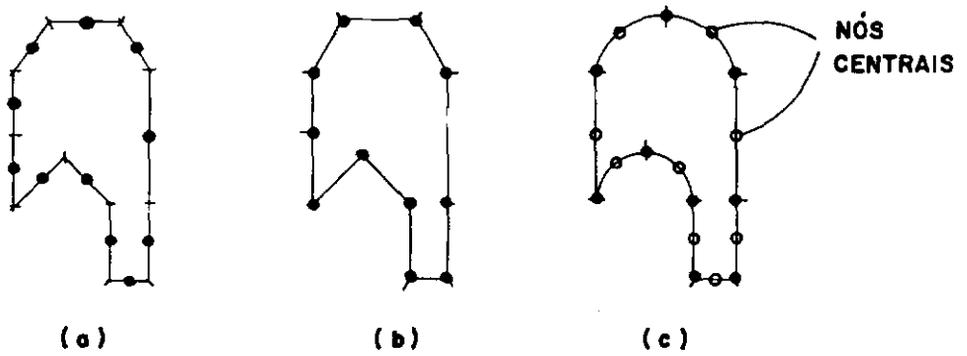


Figura III.4 Divisão do contorno em elementos (a) constantes, (b) lineares, (c) quadráticos

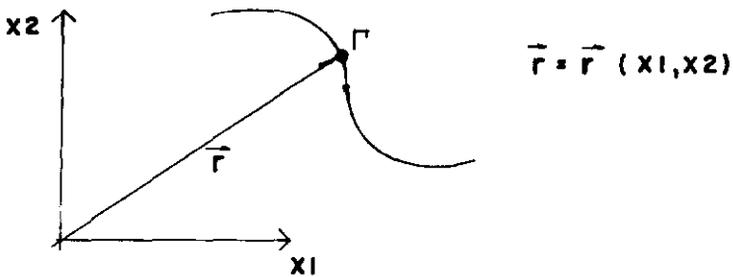


Figura III.5 - Contorno curvo

NÓ	η	N1	N2	N3
1	-1	1	0	0
2	0	0	1	0
3	+1	0	0	1

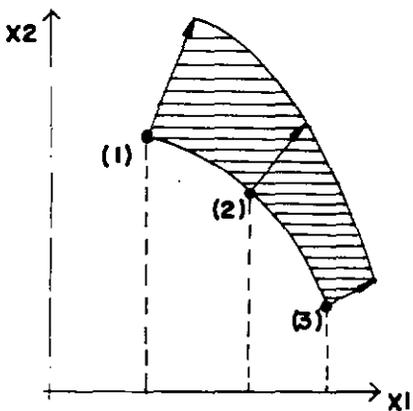
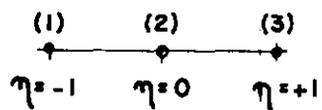
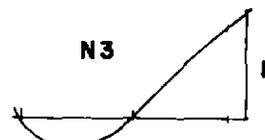
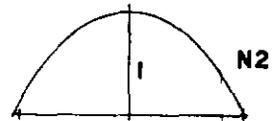
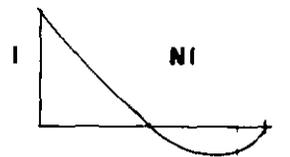


Figura III.6 - Elementos quadráticos

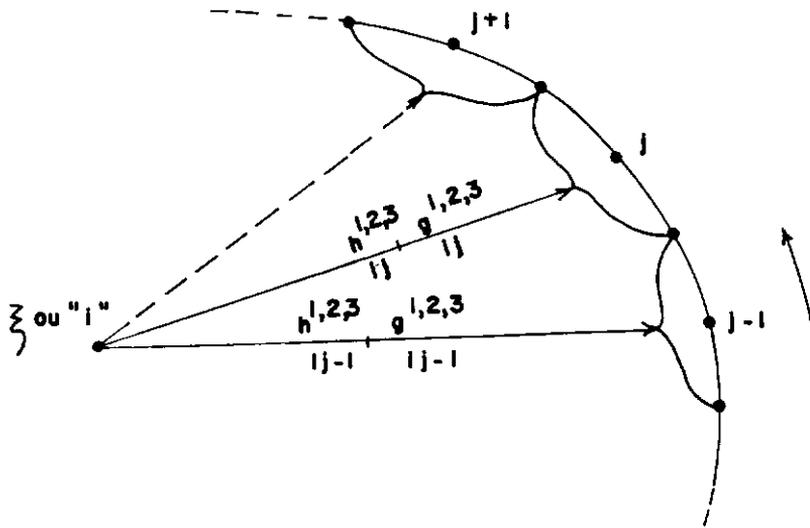


Figura III.7 Sequencia de obtenção dos coeficientes de influência

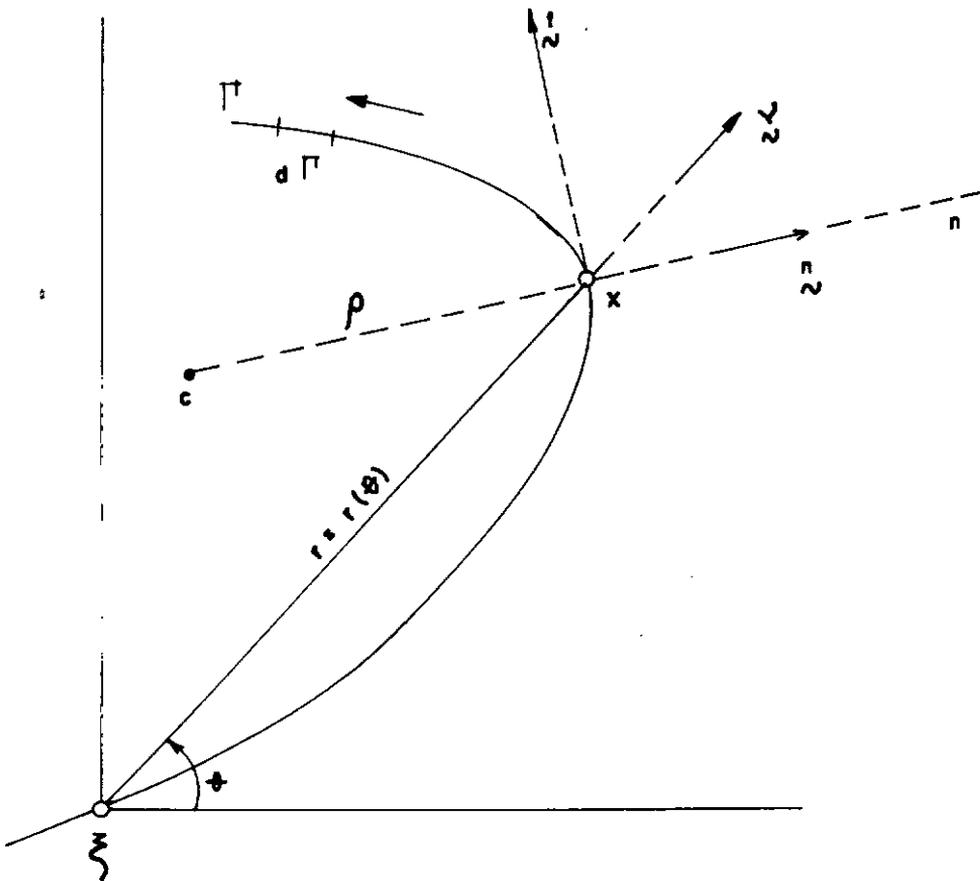


Figura III-8 - Coordenadas polares. y é o vetor normal unitário externo, z_2 é o vetor tangente unitário e z_1 é o vetor unitário na direção da reta que une os pontos ξ e x . c é o centro de curvatura e ρ é o raio da curvatura.

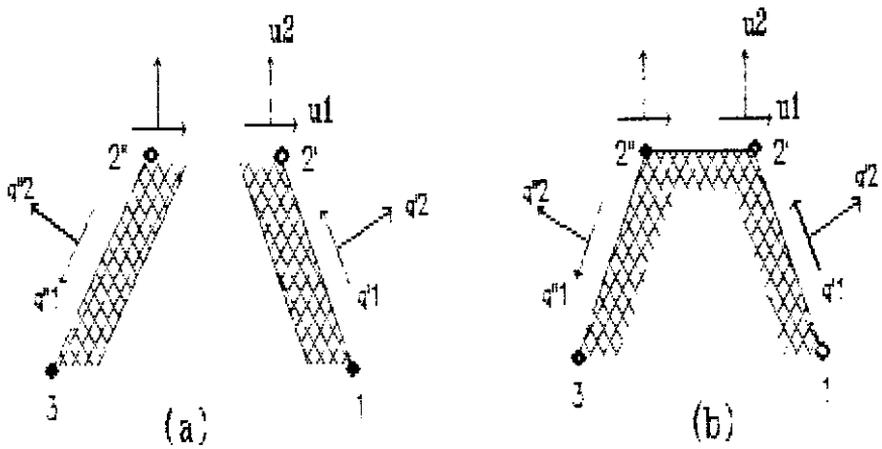


Figura III.9 - Tratamento de descontinuidade de fluxo

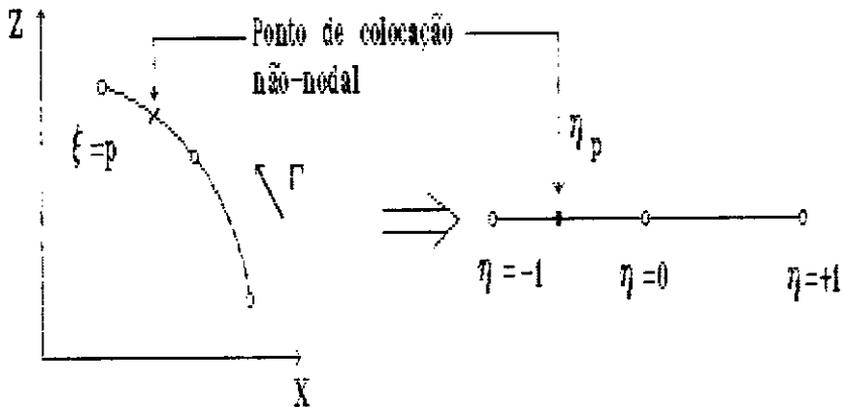


Figura III.10 - Elemento Quadrático de colocação não-nodal

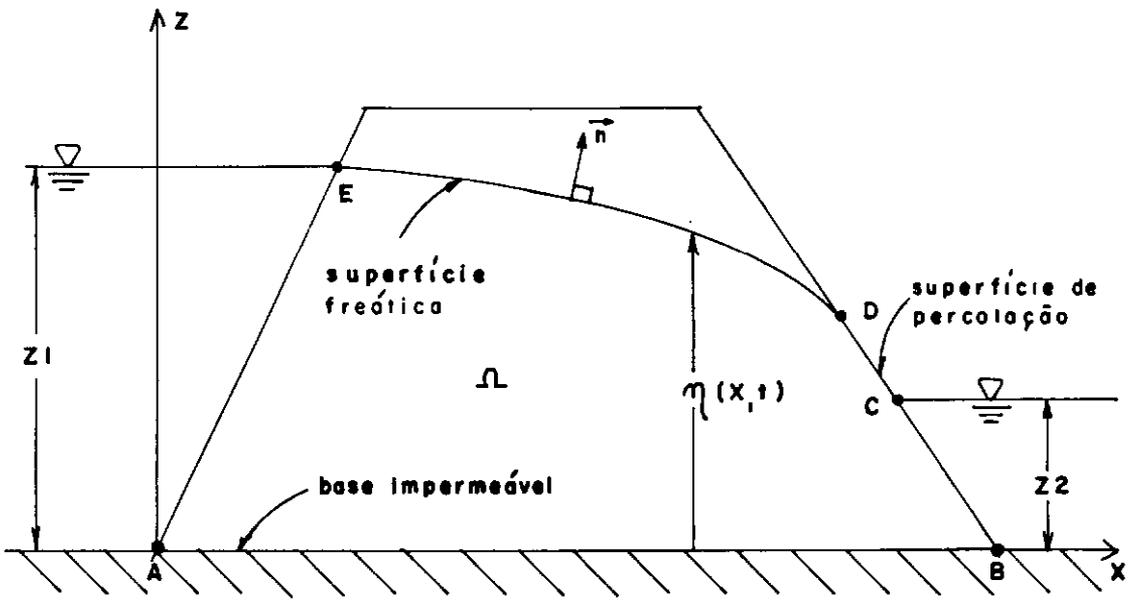


Figura IV.1 - Diagrama esquemático do escoamento através de uma barragem de terra

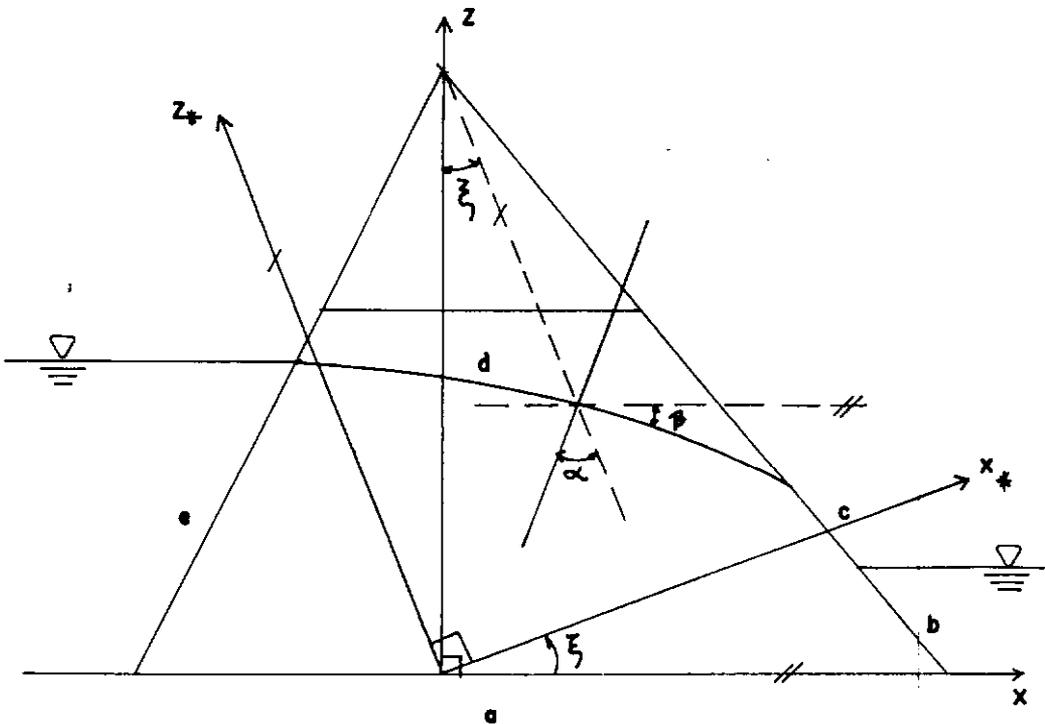


Figura IV.2 - Definição geométrica dos ângulos de posicionamento e rebaixamento da superfície freática.

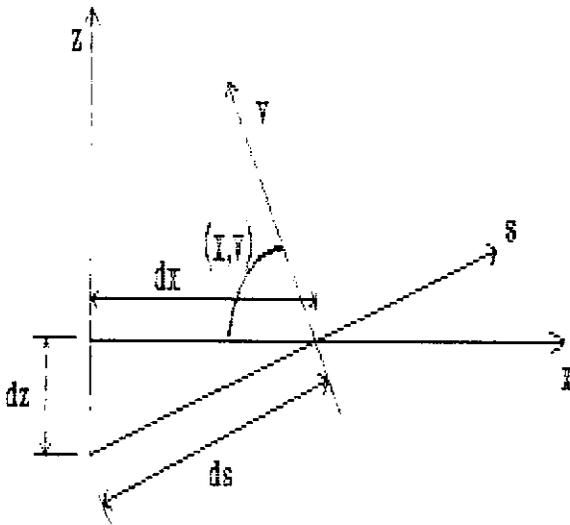


Figura IV.3 - Relação entre as direcções x , z , s e v

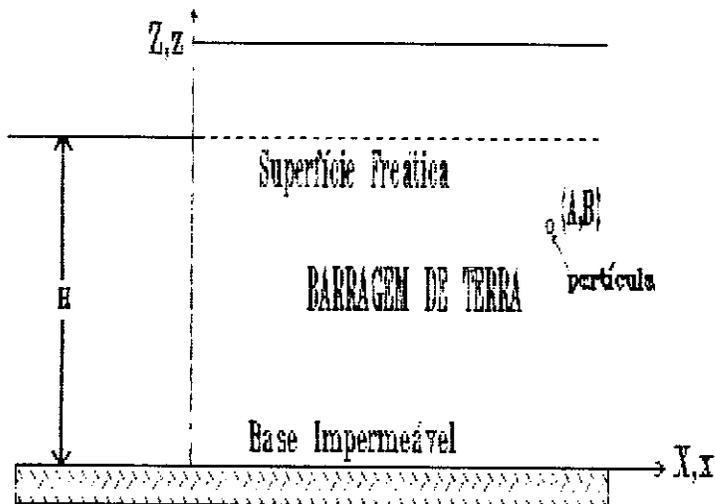


Figura VI.1 - Esquema da barragem antes do rebaixamento

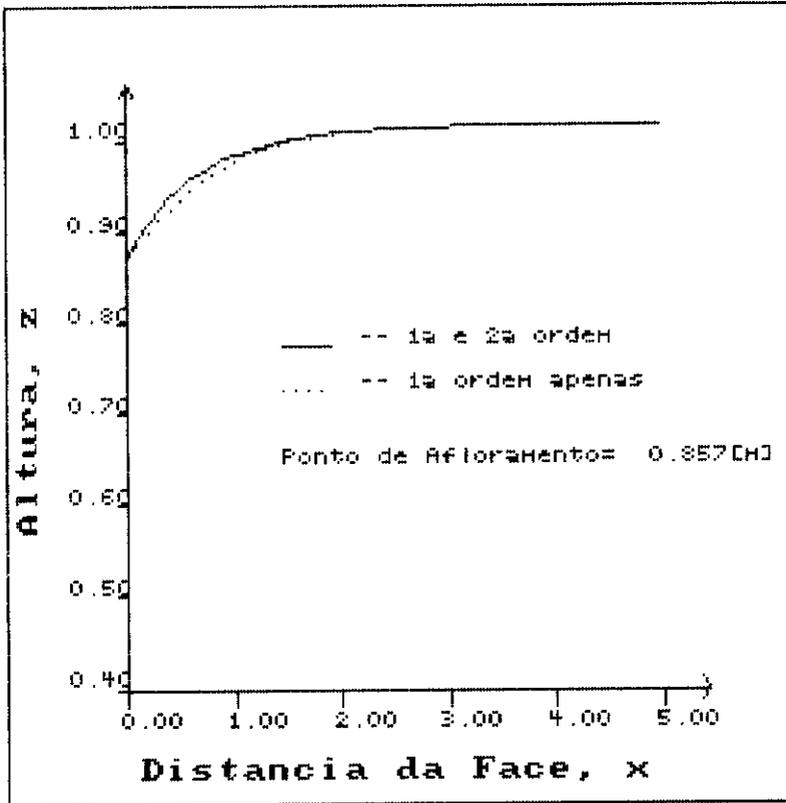


Figura VI.2 - Perfil da Superfície Freática para $t^* = 0.143$

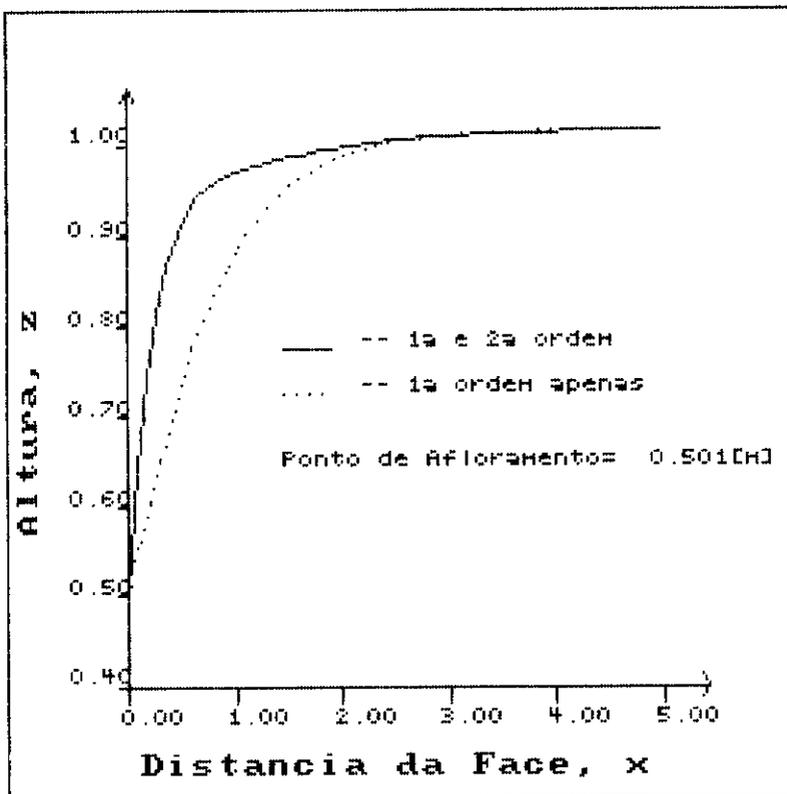


Figura VI.3 - Perfil da Superfície Freática para $t^* = 0.499$

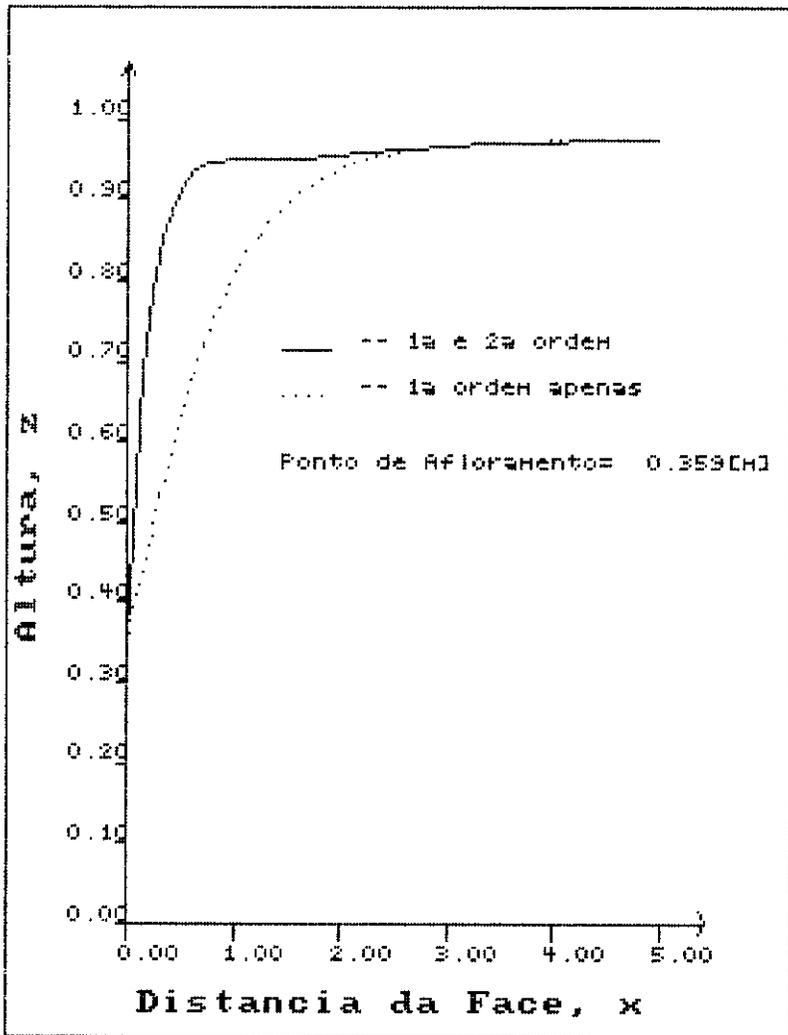


Figura VI.4 - Perfil da Superfície Freática para $t^* = 0.641$

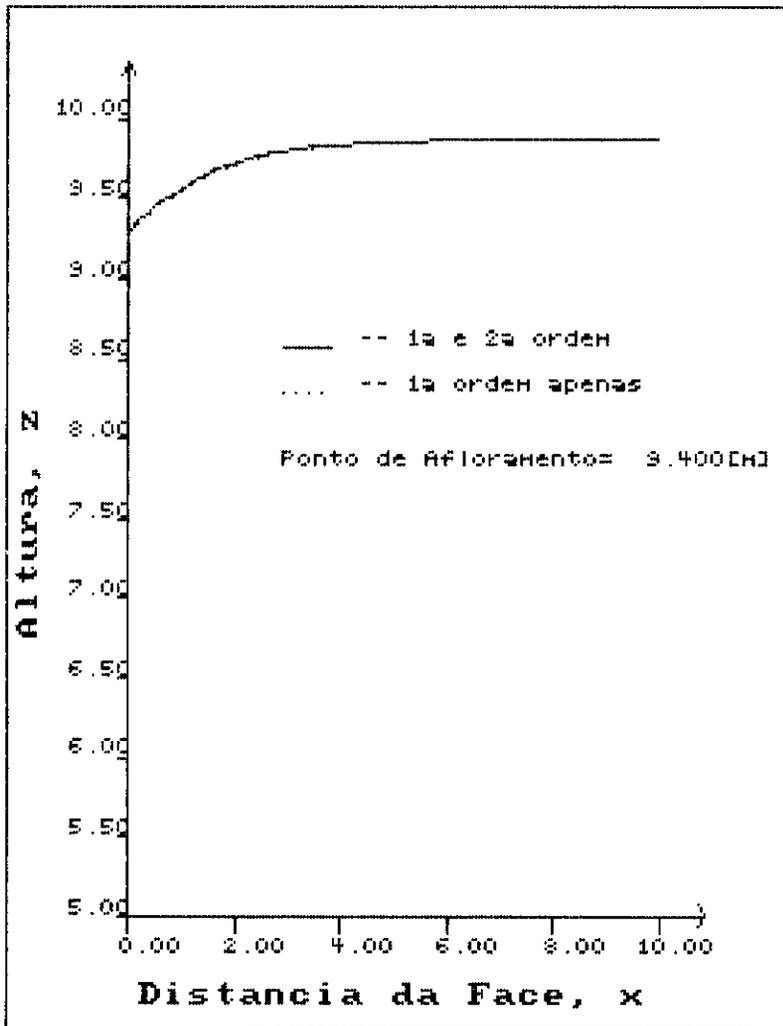


Figura VI.5 - Perfil da Superfície Freática para $t^* = 0.060$

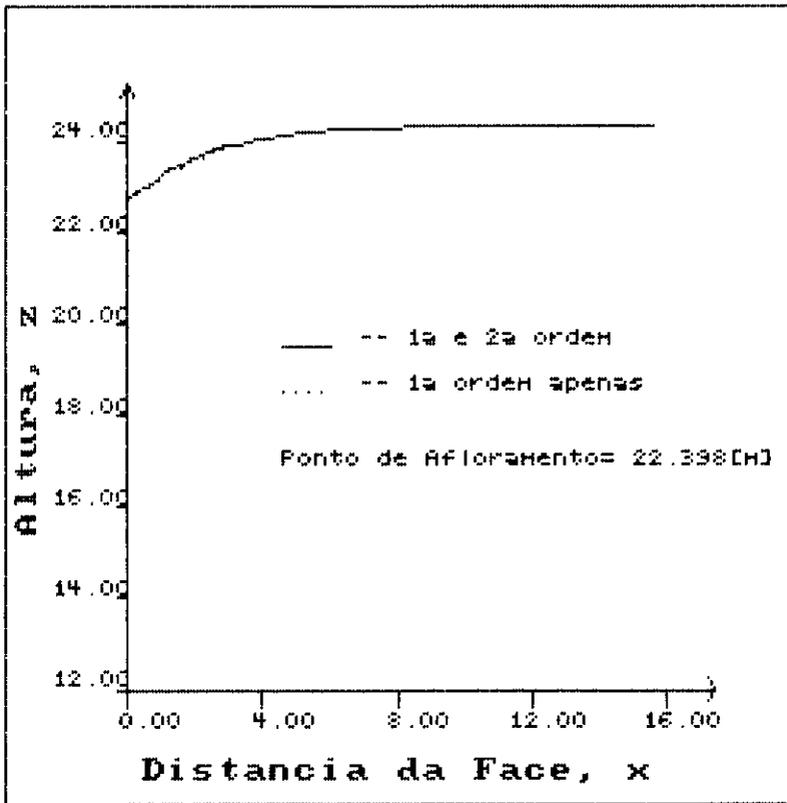


Figura VI.6 - Perfil da Supeficie Freática para $t^* = 0.06675$

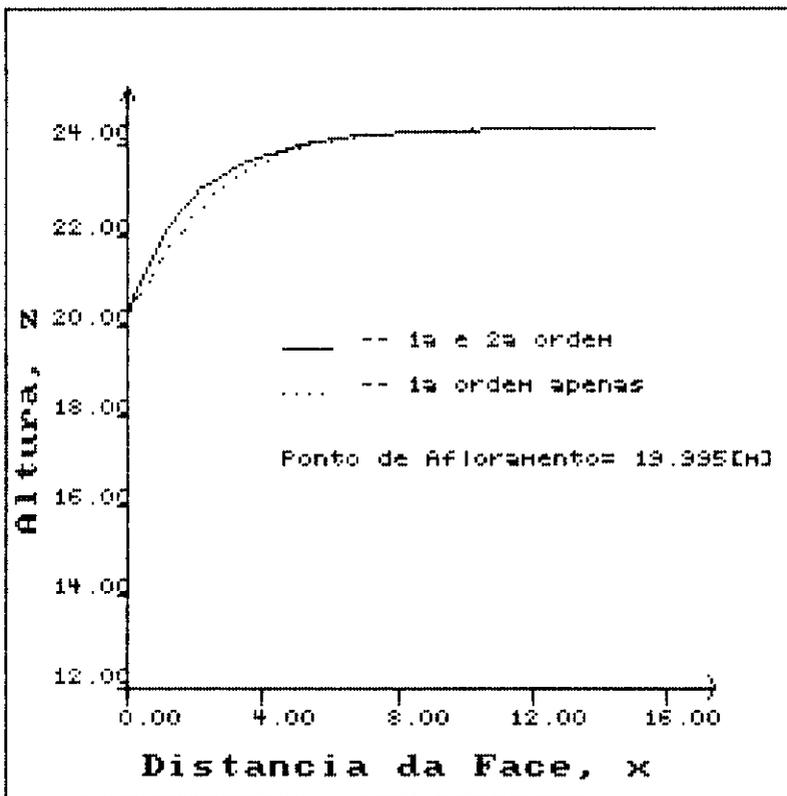


Figura VI.7 - Perfil da Supeficie Freática para $t^* = 0.166875$

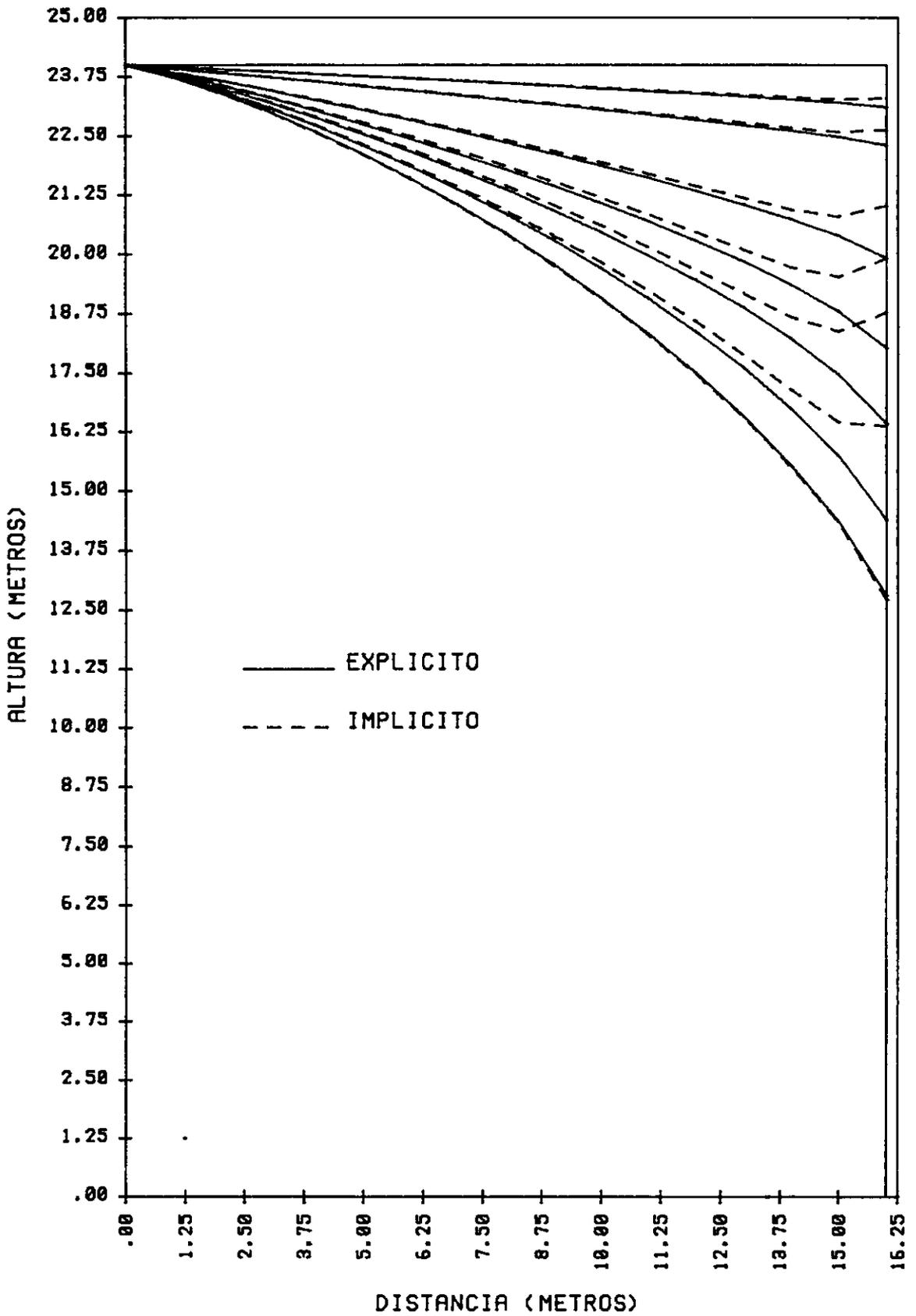


FIGURA VI.8 - MALHA MAIS REFINADA

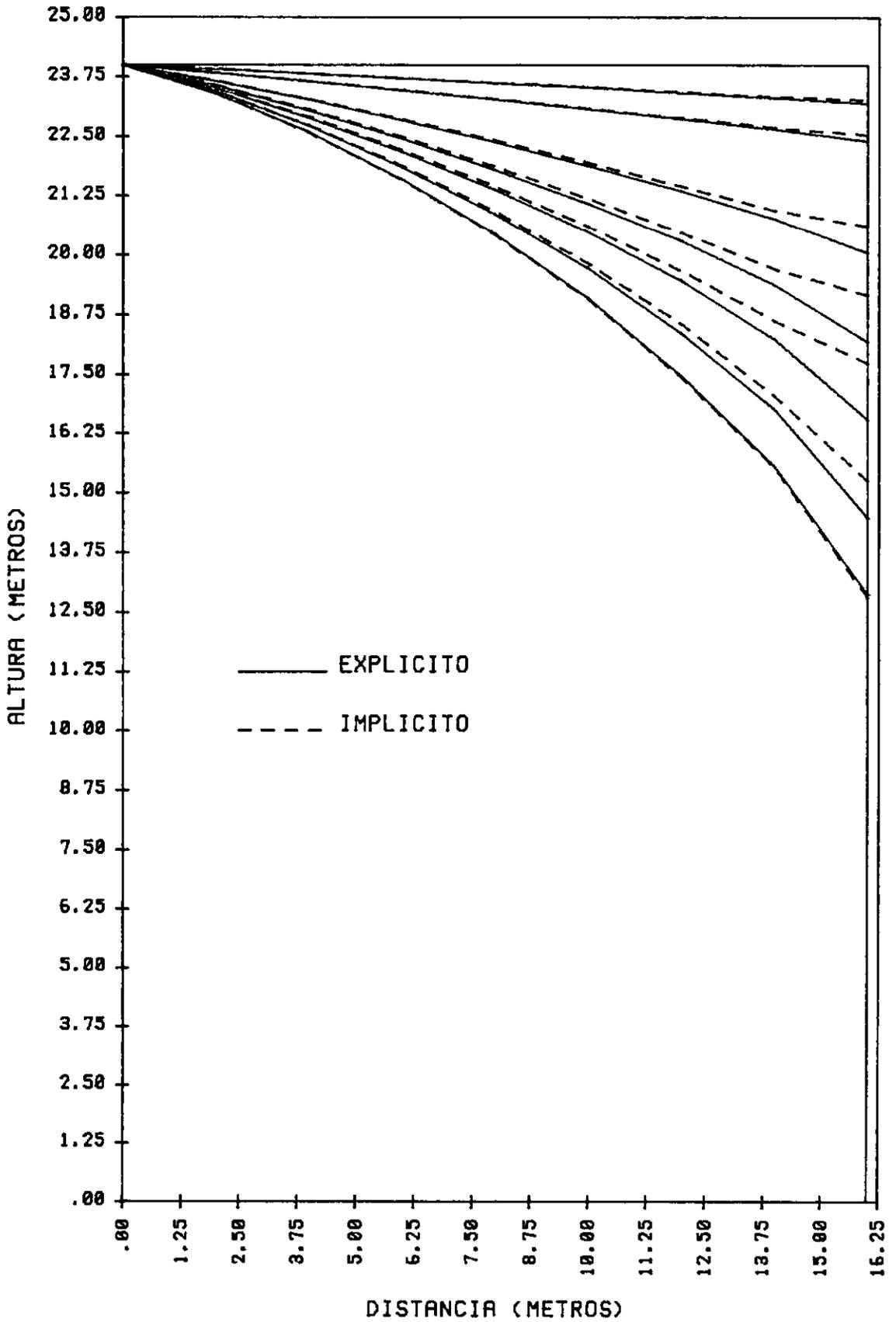


FIGURA VI.9 - MALHA MENOS REFINADA

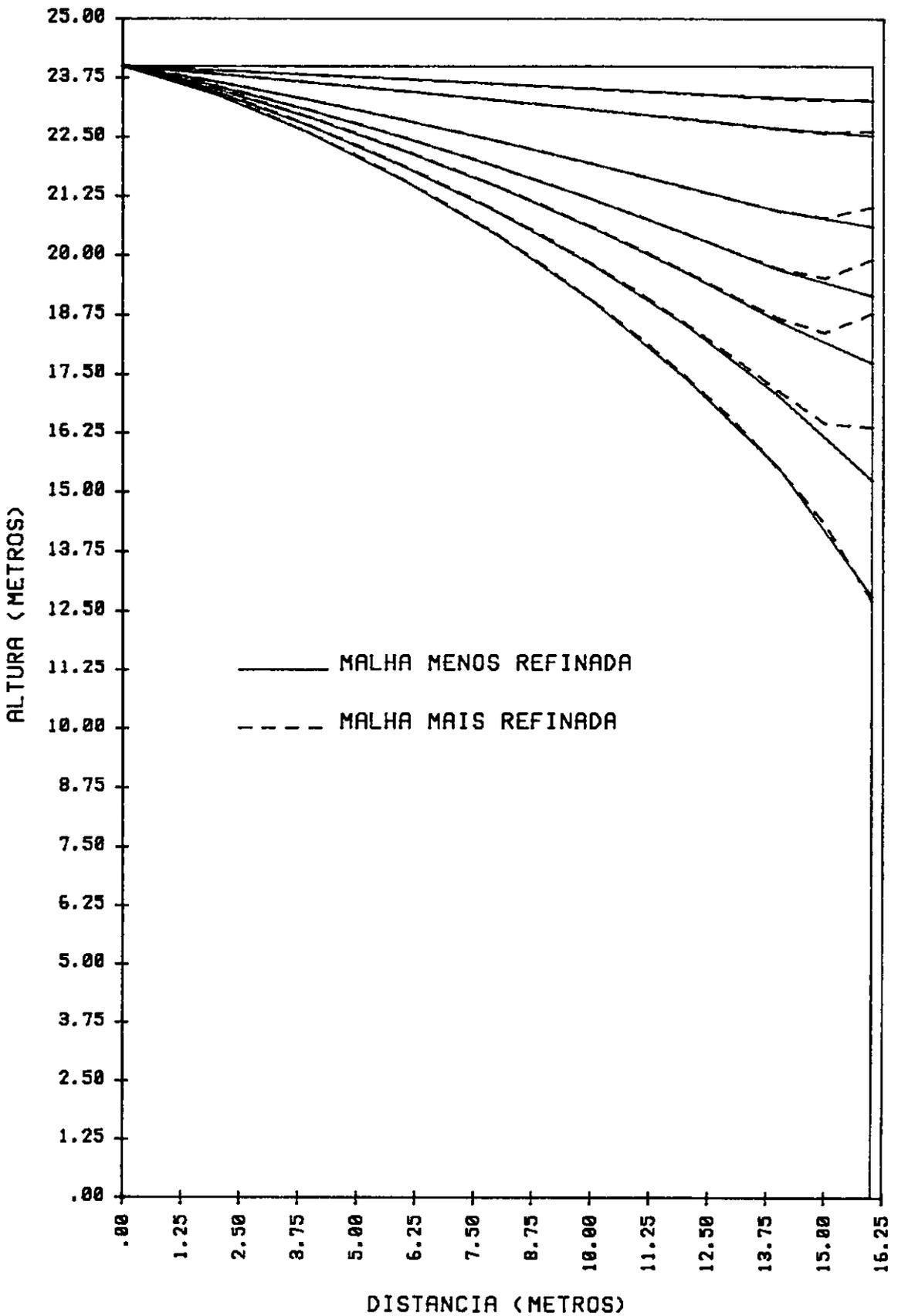


FIGURA VI.10 - SOLUCOES IMPLICITAS

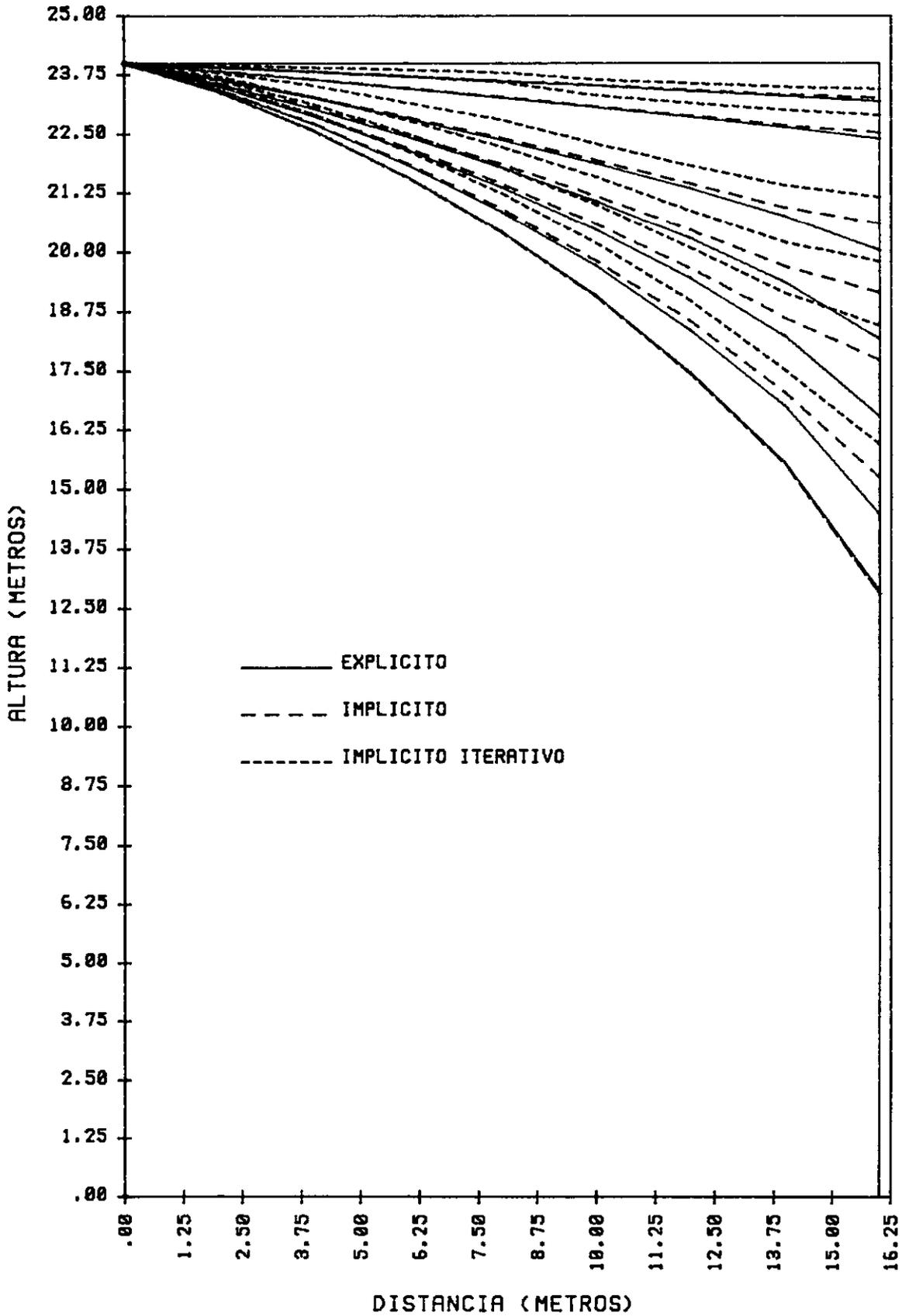


FIGURA VI.11 - MALHA MENOS REFINADA

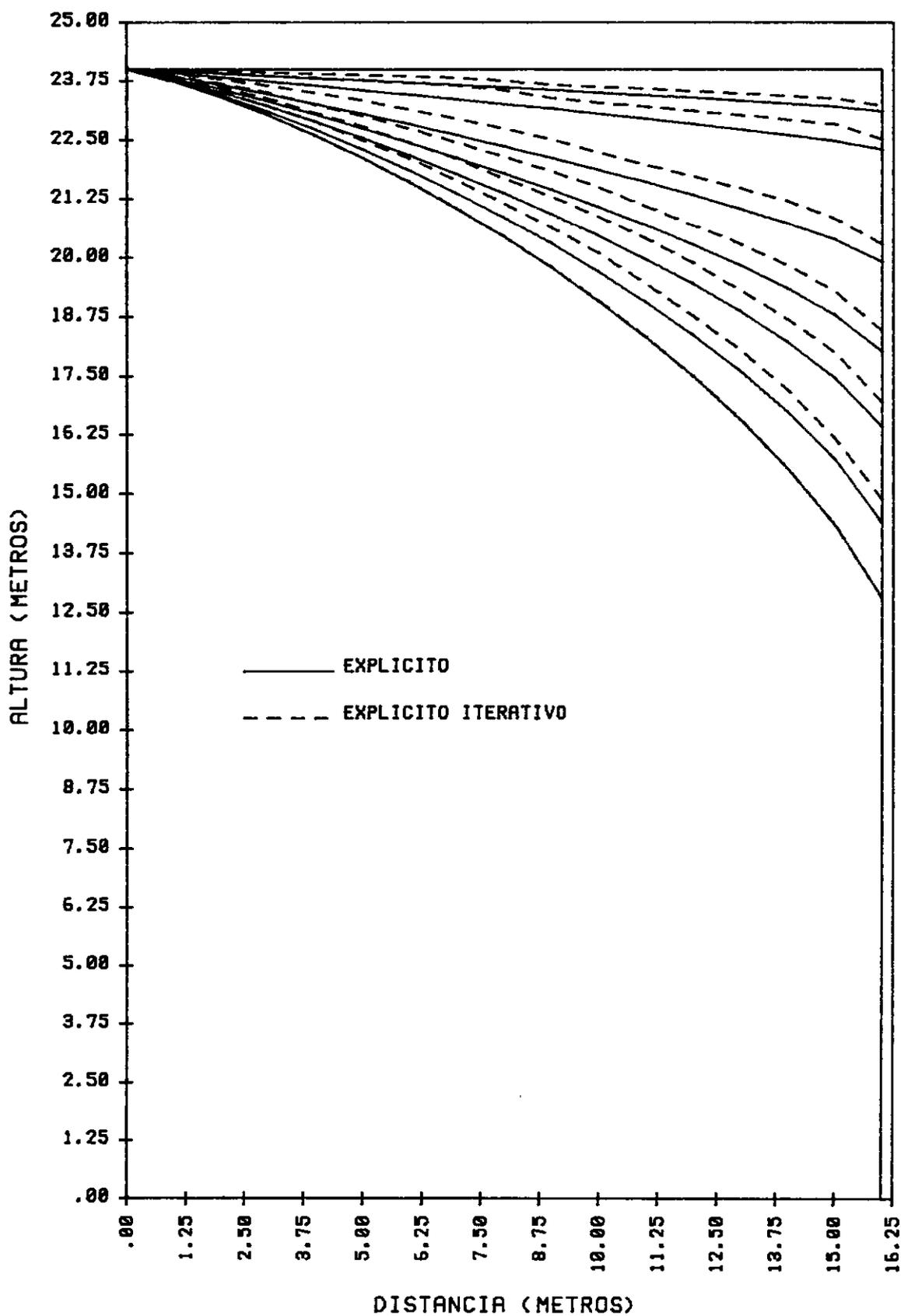


FIGURA VI.12 - MALHA MAIS REFINADA

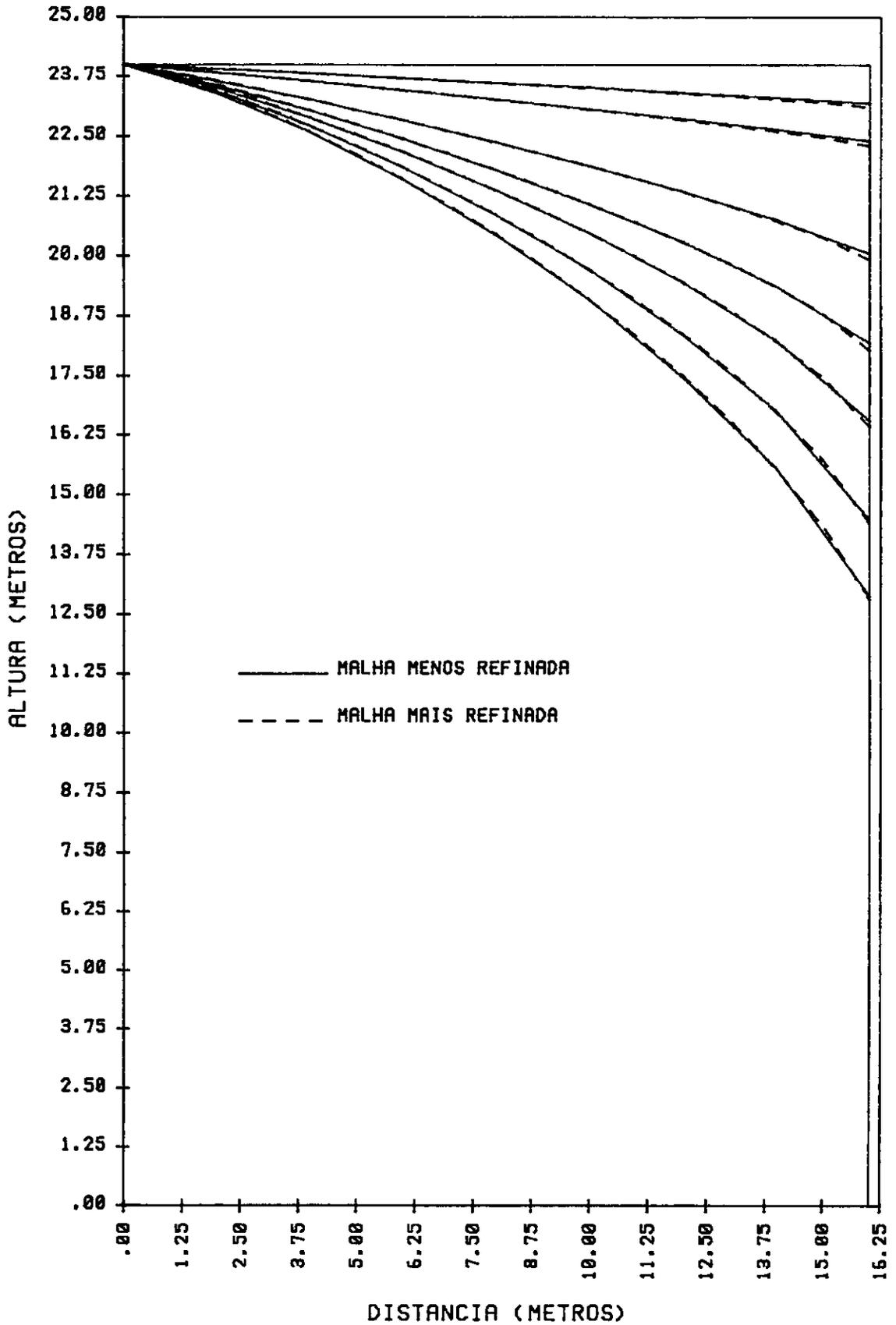


FIGURA VI.13 - SOLUCOES EXPLICITAS

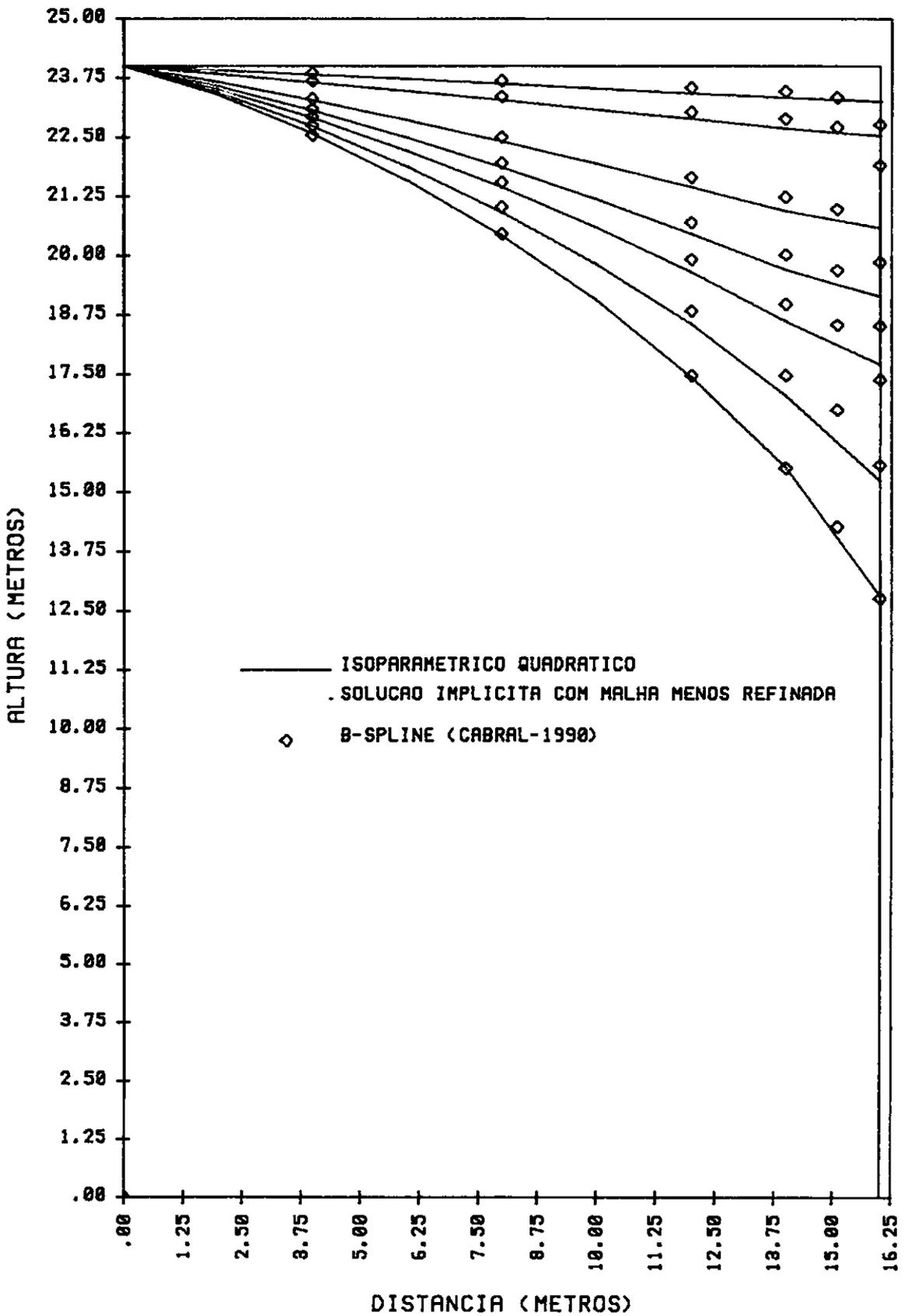


FIGURA VI.14 - PRESENTE TRABALHO versus B-SPLINE

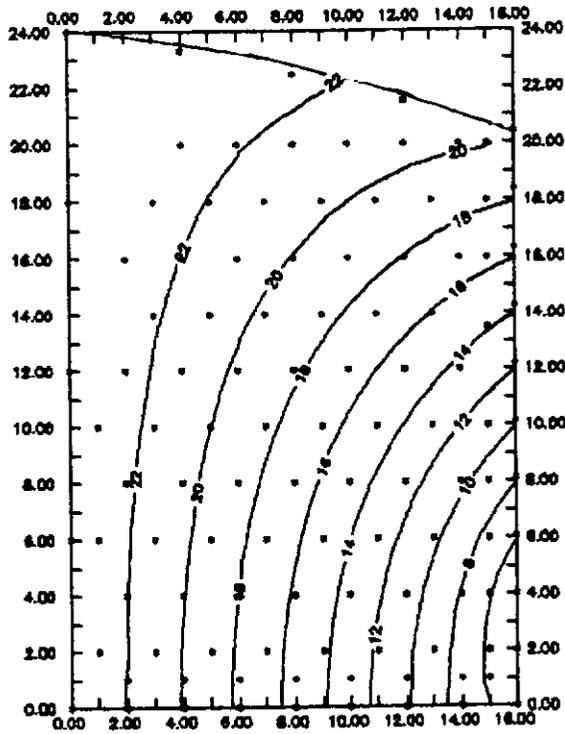
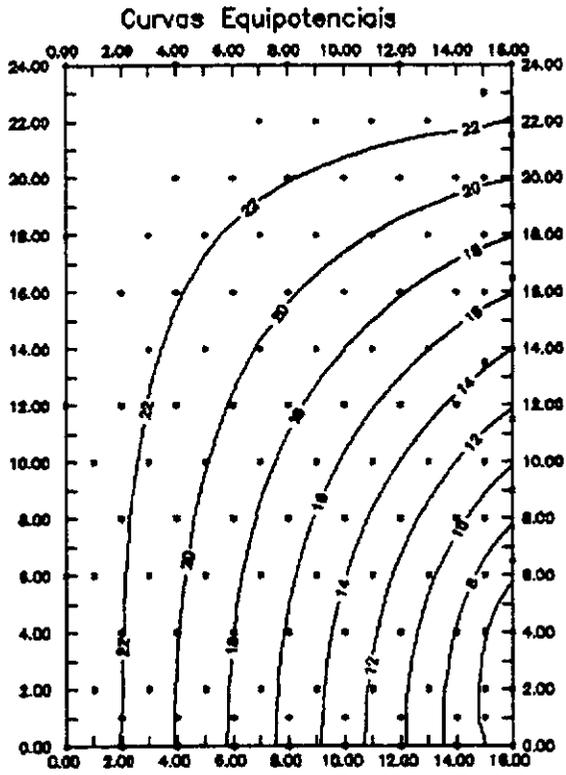


Figura VI.15 - Curvas Equipotenciais para os instantes $t = 0$ e $t = 0.45$ horas - solução explícita VI.7

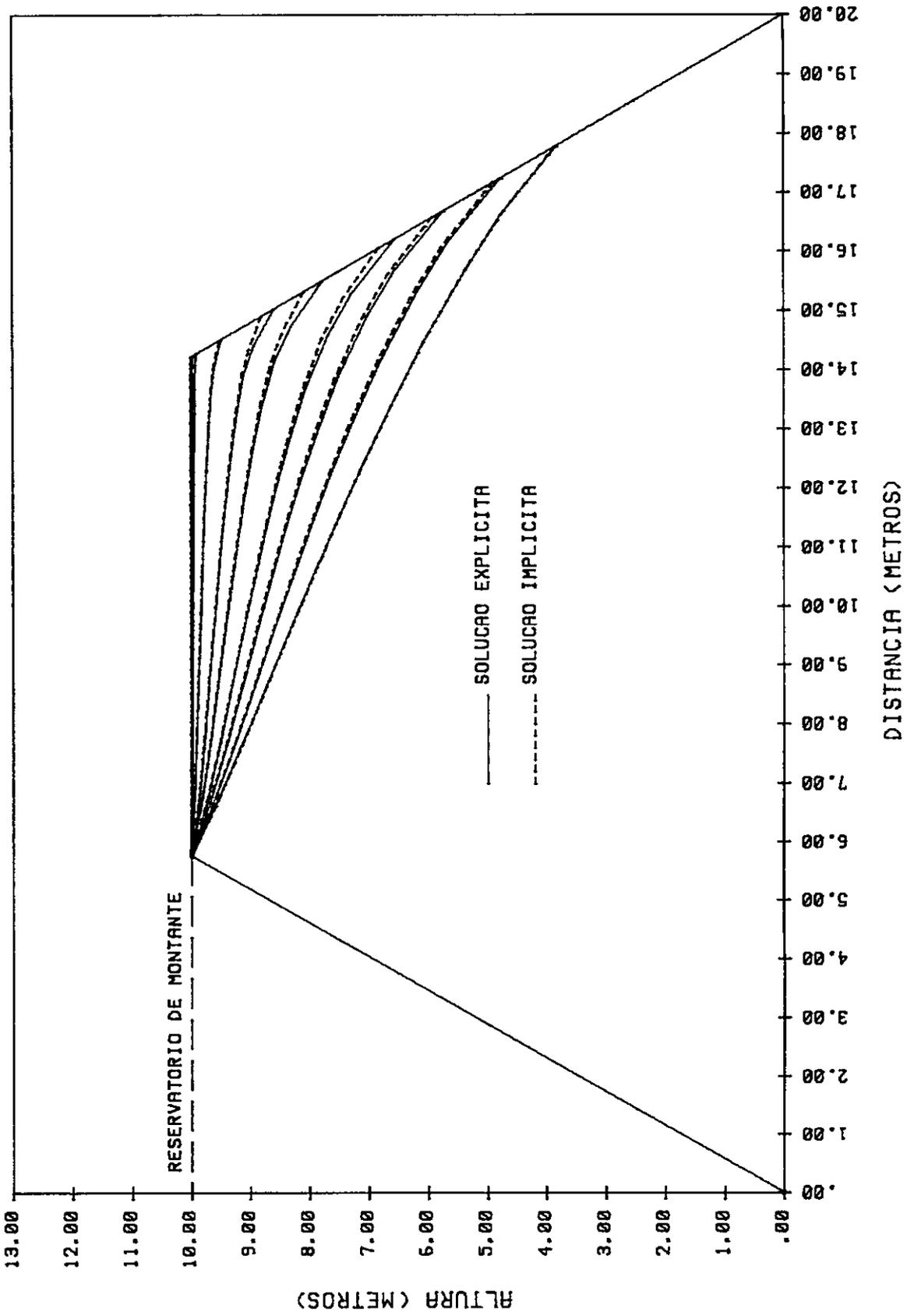


FIGURA VI.16 - BARRAGEM TRAPEZOIDAL

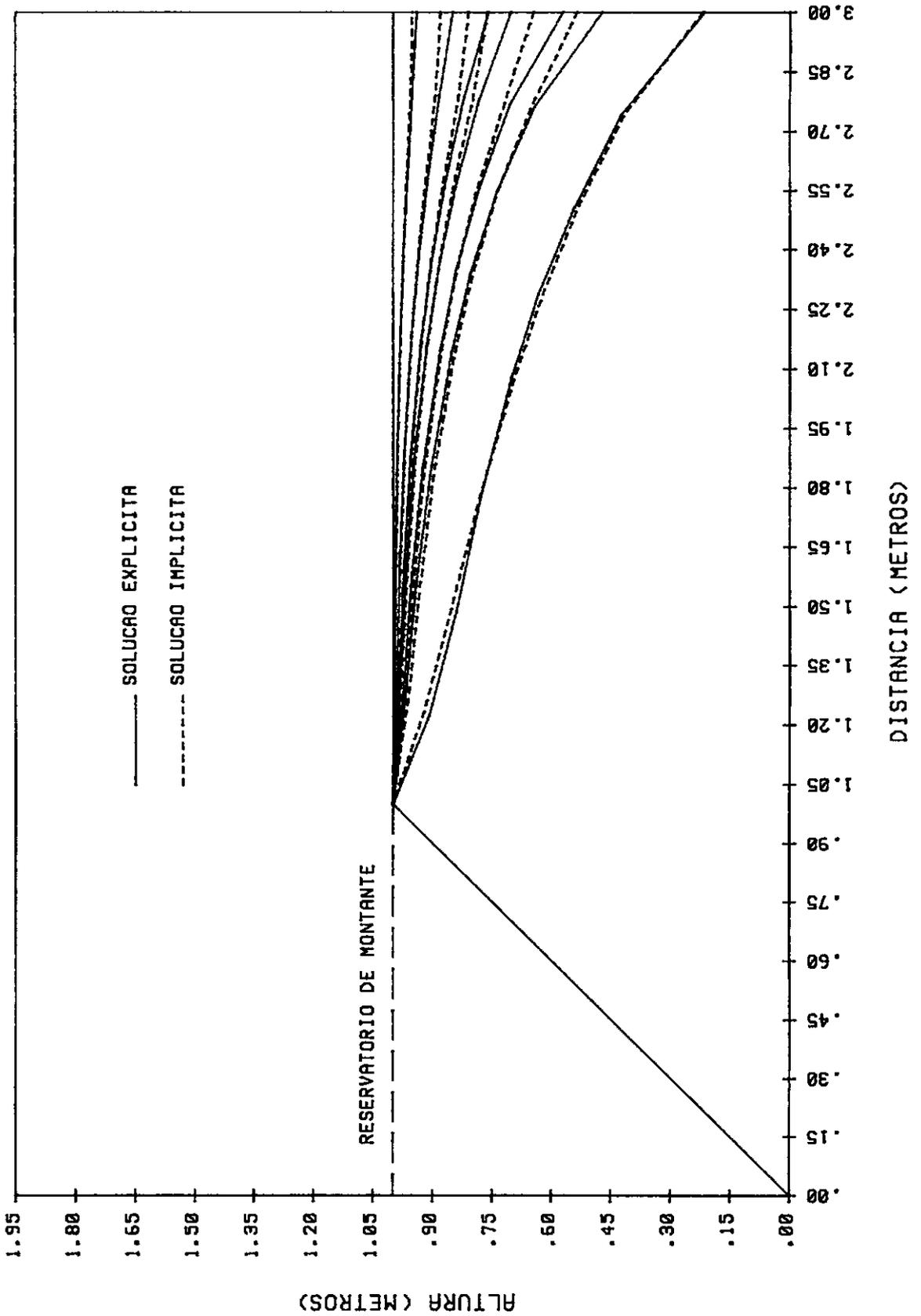


FIGURA VI.17 - BARRAGEM TRAPEZOIDAL COM DRENO CHAMINE

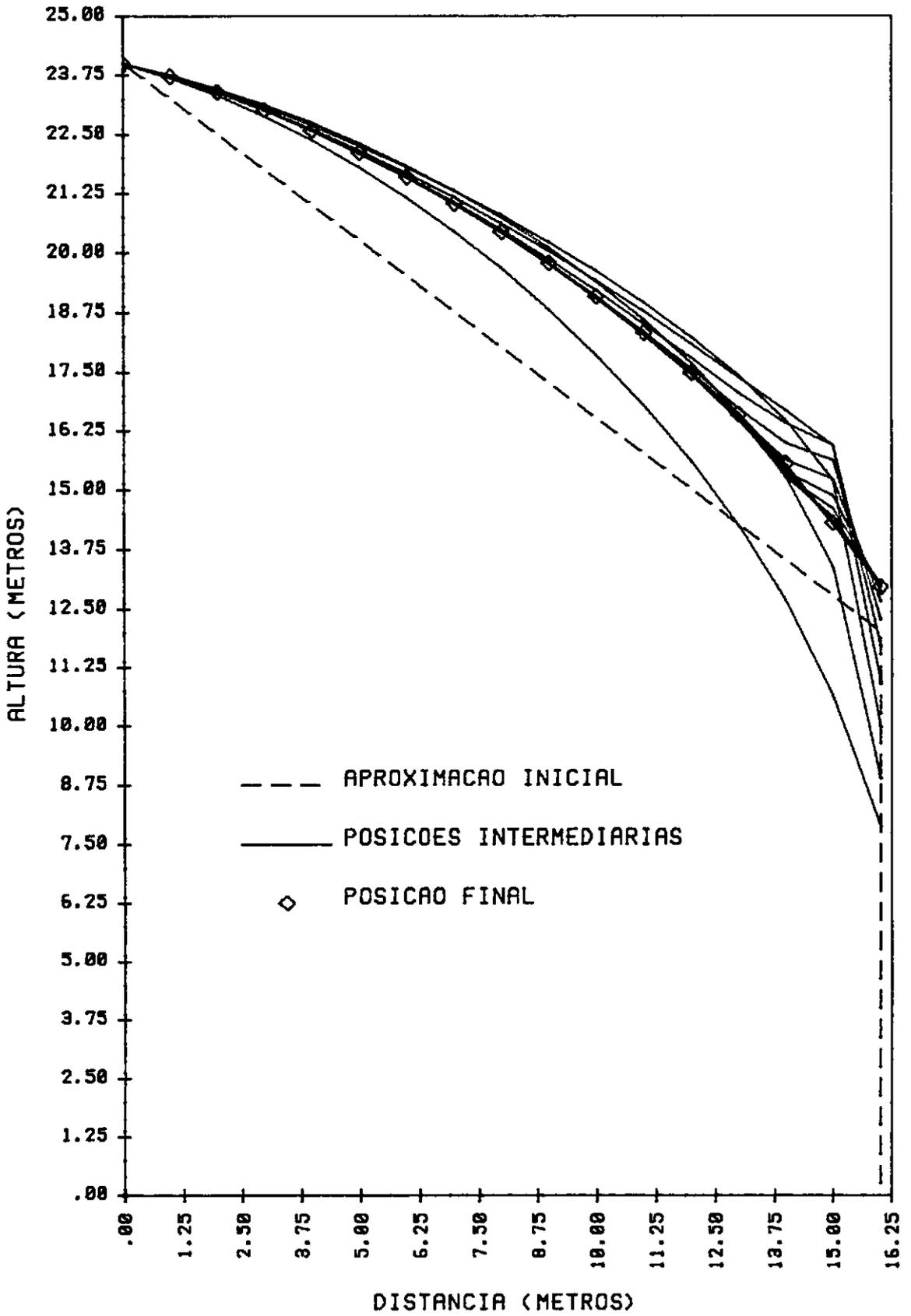


FIGURA VI.18 - BARRAGEM RETANGULAR - PROCESSO ITERATIVO

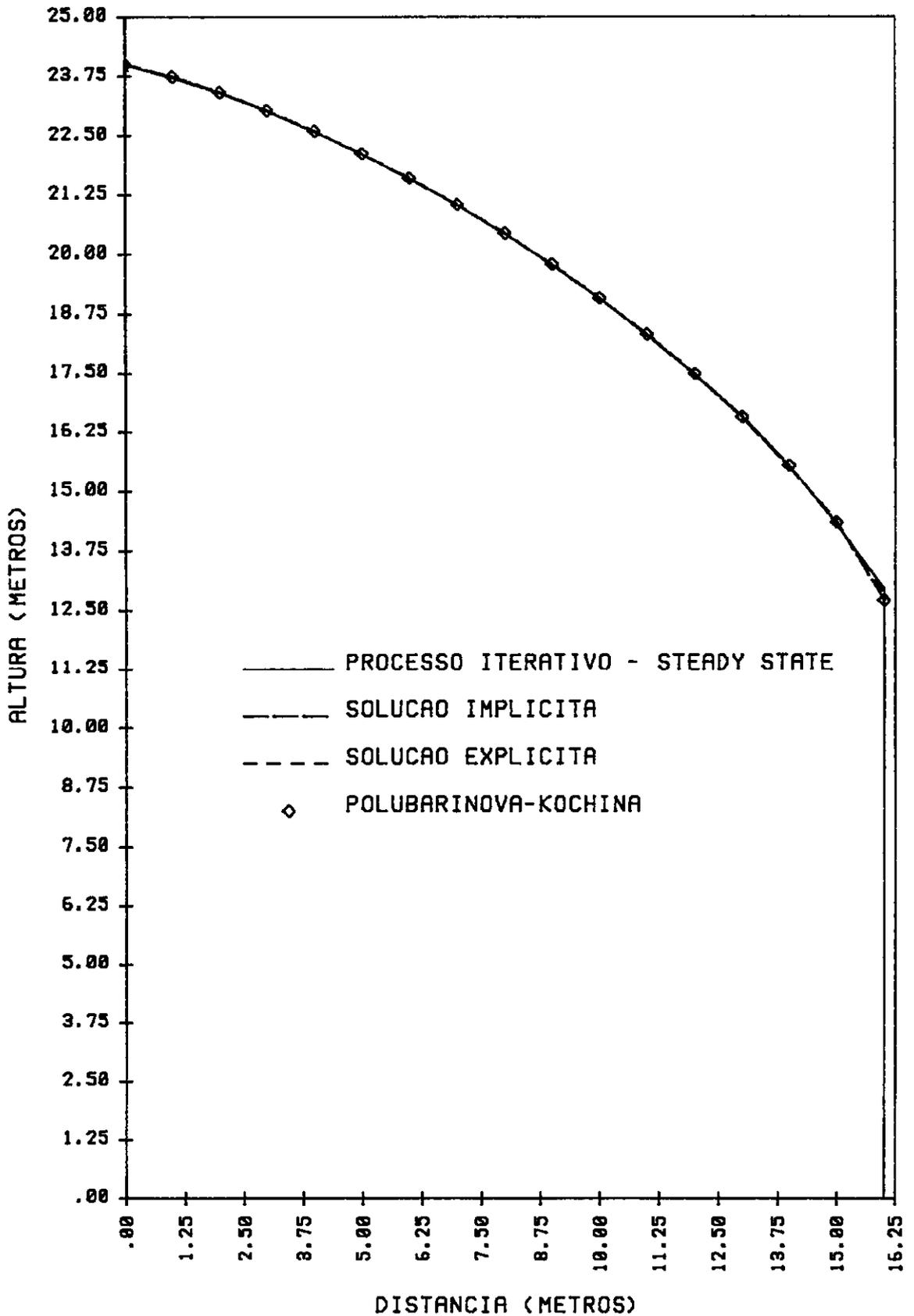


FIGURA VI.19 - BARRAGEM RETANGULAR - POSICAO FINAL

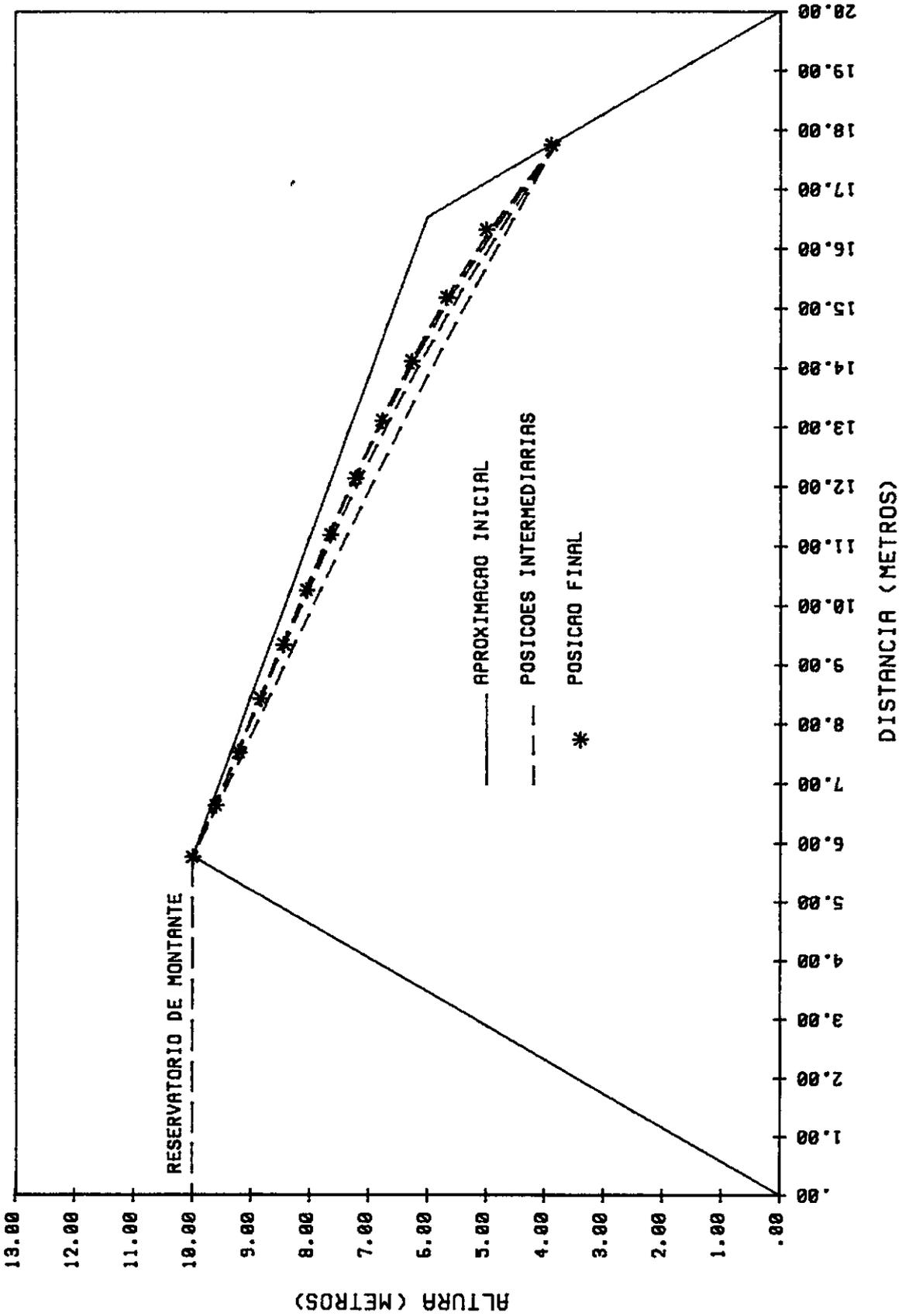
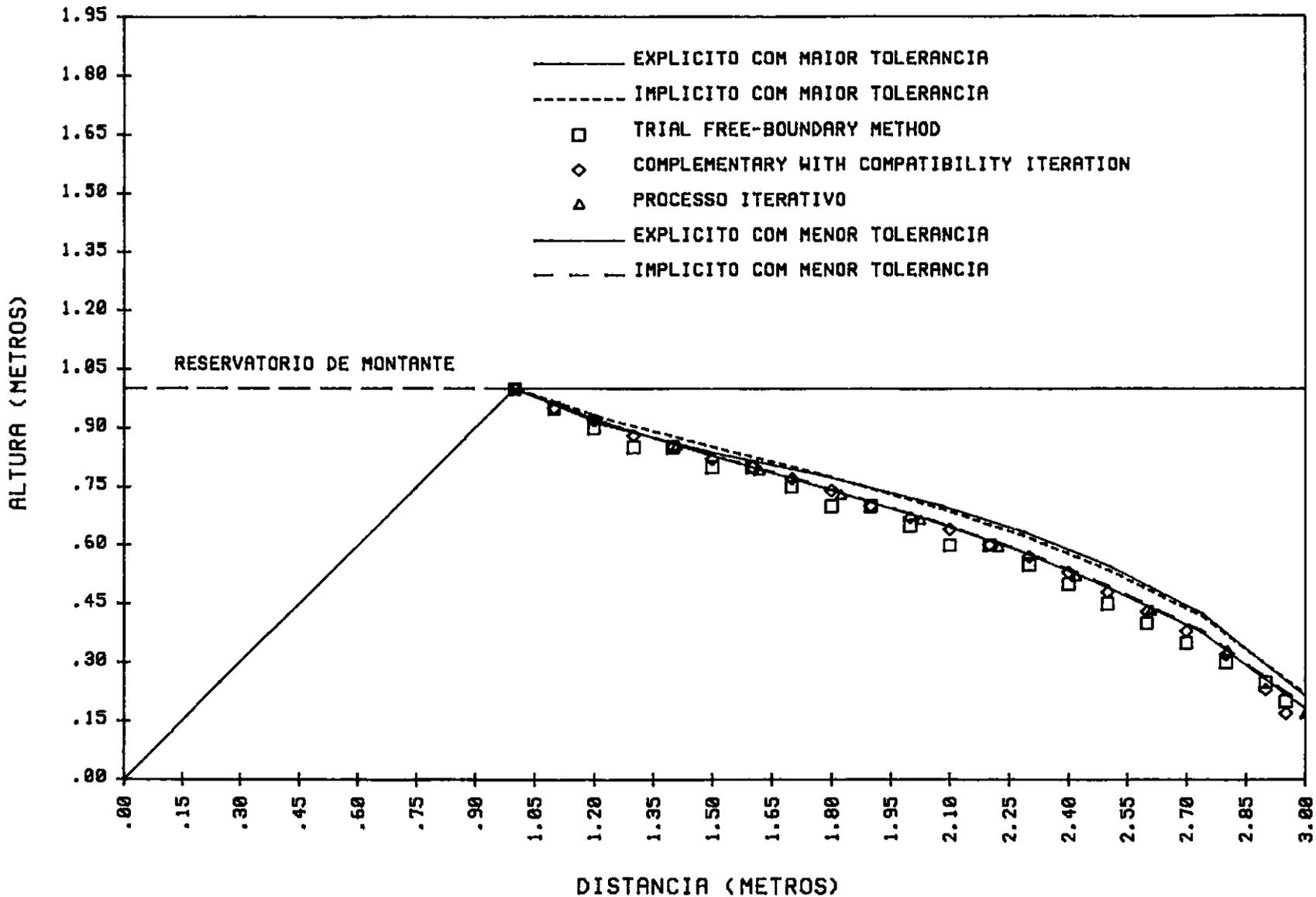


FIGURA VI.20 - BARRAGEM TRAPEZOIDAL - PROCESSO ITERATIVO

FIGURA VI.21 - BARRAGEM TRAPEZOIDAL COM DRENOS CHAMINE



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abramowitz, M. and Stegun, I.A. (1970), "*Handbook of Mathematical Functions*", Dover Publications, New York.
- Alberti, M.E. (1988), "*Um Estudo de Percolação em Barragens de Terra, em regimes Permanente e Transiente, com Aplicação do Método dos Elementos Finitos*", Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.
- Badillo, E.J. and Rodríguez, A.R. (1978), "*Mecánica de Suelos*", Tomo III, Flujo de Agua en Suelos, Editorial Limusa.
- Bolt, G.H. e Miller, R.D. (1958), "Calculation of total and component potentials of water in soils," *Trans. Am. Geophys. Union*, 39, No.5, 917-928.
- Brebbia, C.A., Telles, J.C.F. and Wrobel, L.C. (1984), "*Boundary Element Techniques - Theory and Applications in Engineering*", Springer-Verlag, Berlin and New York.
- Brebbia, C.A. and Dominguez, J. (1989), "*Boundary Elements An Introductory Course*", Computational Mechanics Publications, Southampton, McGraw-Hill Book Company, New York.
- Bronshtein, I. e Semendiaev, K. (1973), "*Manual de Matemáticas*, 2ª edición, Editorial MIR, Moscú.
- Bruch, J.C.Jr. (1980), "A survey of free boundary value problems in the theory of fluid flow through porous media: variational inequality approach-Parts I and II", *Advances in Water Resources*, Volume 3, June pp.65-80 e September pp.115-124.
- Bruch, J.C.Jr. (1989), "*Bibliography of Fixed Domain Methods in Flow Through Porous Media*", UCSB-ME-89-5, University of California.
- Bruch, E. and Lejeune, A. (1988), "Applications of the Boundary Element Method to Groundwater Flows", capítulo de livro não publicado.

Bruch,E. and Grilli,S. (1987), "Computation of the Transient Seepage Problem in Anisotropic Porous Media by the Boundary Element Method", *Boundary Element Method Conference, BEM IX*, Stuttgart, Germany.

Bruch,E.(1988), "Application of the BEM to the Steady and Unsteady Two Dimensional Phreatic Groundwater Flow", *Boundary Element Method Conference, BEM X*, Southampton, England.

Bruch,E. (1988), "An Effective Solution of the Singularities at Multidomain Points for Laplace Problems", *European Boundary Element Meeting*, Bruxelles, Belgium .

Bruch,E. and Lejeune,A.(1989), "An Effective Solution of the Numerical Problems at Multi-Domain Points for Anisotropic Laplace Problems", *Boundary Element Method Conference, BEM XI*, Cambridge, USA.

Cabral,J.J.S.P., Wrobel,L.C. and Brebbia,C.A.(1990), "Boundary Element Analysis of Unconfined Flow in Porous Media Using B-Splines", *VIII International Conference on Computational Methods in Water Resources*, Venice, Italy.

Cabral,J.J.S.P., Wrobel,L.C. and Brebbia,C.A.(1990), "A BEM formulation using B-splines: I-uniform blending functions", *Engineering Analysis*, Vol.7, pp.136-144. "A BEM formulation using B-splines: II- multiple Knots and non-uniform blending functions", *Engineering Analysis*, vol.8, pp.51-55.

Casalini,P. and Guiggiani,M.(1988), "New Developments in the Boundary Element Method for Plane and Axisymmetric Elasticity", *Advanced Boundary Element Methods, IUTAM Symposium*, San Antonio, Texas, USA.

Cedegren, H. R.(1967), *"Seepage, Drainage, and Flow Nets"*, John Wiley & Sons, Inc, New York.

Cerrolaza,M., Alarcón,E. and Molina,J.,(1989), "Accurate Integration of Singular Kernels in Boundary Methods", *Boundary Element Method Conference, BEM XI*, Cambridge, Massachusetts, USA.

Chang, O.V.(1979), *"Boundary Elements Applied to Seepage Problems in Zoned Anisotropic Soils"*, Master of Science Thesis, Southampton.

Chang, C.S.(1986), "Application of Boundary Element Method in Transient Flow Problems with Moving Boundaries", *Boundary Element Method Conference, BEM VIII*, Tokyo, Japan.

Chang, C.S.(1988), "Boundary Element Analysis for Unconfined Seepage Problems", *Journal Geotechnical Eng. Div.*, ASCE, Vol.114, pp.556-572.

Cheng,R.T-S.and Li,C-Y.(1973), "On the Solution of Transient Free-Surface Flow Problems in Porous Media by the Finite Element Method", *Journal of Hydrology*, Vol.20, pp.49-63.

Childs, E. C. (1957), "The physics of land drainage," *Drainage of Agricultural Lands*, J.N.Luthin, Ed:Madison, American Society of Agronomy, pp.1-78.

Cividini,A. and Gioda,G. (1984), "An Approximate F.E. Analysis of Seepage with a Free Surface", *International Journal Numerical and Analitical Methods in Geomechanics*. Vol 8, pp.549-566

Cividini,A. and Gioda,G. (1989), "On the variable mesh finite element analysis of unconfined seepage problems", *Géotechnique*, 39, No 2, pp. 251-267.

Cooley,R.L., Harsh,J.F. and Lewis,D.C. (1972), "*Principles of Ground-Water Hydrology*", Hydrologic Engineering Methods for Water Resources Development, Vol.10, HEC.

Crank, J., (1984), "*Free and Moving Boundary Problems*", Clarendon Press, Oxford.

Cryer, C. W.(1976a), *MRC Technical Summary Report # 1657*, University of Wisconsin, Madison.

Cryer, C. W.(1976b), *MRC Technical Summary Report # 1693*, University of Wisconsin, Madison.

Cryer, C. W.(1977), *MRC Technical Summary Report # 1793*, University of Wisconsin, Madison.

Cryer,C.W.(1978), "The Interrelation between moving boundary problems and free boundary problems", *Moving Boundary Problems*, pp.91-107, Academic Press, New York.

- DeWiest, R.J.M.,(ed.),(1969), "*Flow Through Porous Media*", Academic Press, New York.
- Finnemore, E.J. and Perry, B.(1968), "Seepage through an Earth Dam Computed by the Relaxation Technique", *Water Resources Research*, Vol.4, pp.1059-1067.
- France, P.W. (1981), "A simple technique for the analysis of free surface flow problems", *Advances in Water Resources*, Vol.4, pp.20-22
- Fredholm, I., (1903), "Sur une classe d'equations Fonctinnelles", *Acta Math.* 27, pp. 365-390.
- Freeze, R. A. (1971), "Influence of the unsaturated flow domain on seepage through earth dams", *Water Resources Research*, 7(4), pp.929-941, August.
- Glossário de Termos Hidrológicos(1976), MRE/CBDHI-MME/DNAEE, Brasília.
- Harr, M.E. (1962), "*Ground Water and Seepage*", McGraw-Hill, New York.
- Hubbert, M.K. (1940), "The theory of ground-water motion", *Journal of Geology*, Vol.48, No.8, Part 1, pp. 785-944.
- Jawson, M.A. (1963), "Integral Equations Methods in Potential Theory, I", *Proc. Roy. Soc. Ser. A.*, 275, 23-32.
- Kellogg, O. D. (1929), "*Foundations of Potential Theory*", Springer, Berlin.
- Larock,E. (1977), Discussion on "Location of Free Surface in Porous Media", *Journal of Hydraulics Division*, ASCE, HY.12, pp.1502-1503.
- Liggett,J.A. and Hadjitheodorou,C.(1965), "Initial Motion Problem in Porous Media", *J. Hydraulics Div.*, ASCE, Vol.91, No.HY3, pp.61-80.
- Liggett,J.A.(1977), "Location of Free Surface in Porous Media", *Journal Hydraulics Division*, ASCE, Vol.103, pp.353-365.

Liggett, J.A. and Liu, P.L-F (1983), "*The Boundary Integral Equation Method for Porous Media Flow*", George Allen and Unwin, London.

Mansur, W.J., Telles, J.C.F, Prodanoff, J.H.A and Frauches, E., " On BEM Singular Integrals for Two-Dimensional Potential Applications", Technical Note, *Engineering Analysis* (aceito para publicação).

Marques, E. and Mansur, W.J. (1987), "Coupling of Boundary and Finite Element Methods: Application to Potential Problems", *MECOM VIII*, Rio de Janeiro, Brasil, pp.331-345.

Mascarenhas, F.C.B. (1990), "*Modelação Matemática de Ondas Provocadas por Ruptura de Barragens*", Dissertação de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

Meinzer, O. E. (1923a), "The occurrence of ground-water in the United States, with a discussion of principles", *U.S. Geol. Survey Water-Supply Paper* 489.

Meinzer, O. E. (1923b), "Outline of ground-water hydrology with definitions", *U.S. Geol. Survey Water-Supply Paper* 494.

Mustoe, G.G.W., Volait, F. and Zienkiewicz, O.C. (1982), "A Symmetric Direct Boundary Integral Equation Method for Two Dimensional Elastostatics", *RES Mechanica*, 0143-0085/82/0057.

Neuman, S.P. and Witherspoon, P.A. (1970a), "Finite Element Method of Analyzing Steady Seepage with a Free Surface", *Water Resources Research*, Vol.6, No 3, pp.889-897.

Neuman, S.P. and Witherspoon, P.A. (1971), " Analysis of Nonsteady Flow with a Free Surface using the Finite Element Method", *Water Resources Research*, Vol.7, No 3, pp.611-623.

Polubarinova-Kochina, P.V. (1962), "*Theory of Groundwater Movement*", translated from Russian by J.M.R. de Wiest, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

Prodanoff, J.H.A., Wrobel, L.C. and Mansur, W.J. (1990a), "Boundary Element Analysis of Unsteady Seepage Flow", *Boundary Element Method Conference, BEM XII*, Sapporo, Hokkaido, Japan.

Prodanoff, J.H.A., Mansur, W.J. e Wrobel, L.C. (1990b), "Análise da Superfície Livre Transiente em Barragens de Terra com a Aplicação do Método dos Elementos de Contorno", *Congresso Ibero Latino Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia, MECOM XI*, Itaipava, RJ de Janeiro, Brasil.

Ponce, V.M. (1989), "*Engineering Hydrology - Principles and Practices*", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632.

Stroud, A.H., and Secrest, D. (1966), "*Gaussian Quadrature Formulas*", Prentice-Hall, New York.

SÁ, P.A.C.O. (1985), "*Problemas Bidimensionais de Fluxo Transiente em Meios Porosos pelo Método dos Elementos de Contorno*", Seminário de Qualificação para o Doutorado, COPPE/UFRJ.

Symm, G.T. (1963), "Integral Equations Methods in Potential Theory, II", *Proc. Roy. Soc. Ser. A.*, 275, 33-46.

Taylor, R.L. e Brown, C.B. (1967), "Darcy flow solution with a free surface", *Journal of Hydraulics Division, ASCE*, 93, HY.2, pp.25-33.

Telles, J.C.F. (1987), "A Self-Adaptive Co-Ordinate Transformation for Efficient Numerical Evaluation of General Boundary Element Integrals", *Int. j. numer. methods eng.*, Vol.24, pp. 959-973.

Todd, D. K., (1959), *Ground Water Hydrology*, John Wiley and Sons, New York.

Todson, M. (1971), "On the Solution of Transient Free-Surface Flow Problems in Porous Media by Finite-Difference Methods", *Journal of Hydrology*, Vol.12, pp.177-210.

Vargas, E.A.Jr. (1975), "*Estudo e Aplicação de um Modelo Eletroanalógico Simples a Problemas Práticos de Fluxo em Meios Porosos*", Tese de Mestrado, PUC/RJ.

APÊNDICE A

CÁLCULO ANALÍTICO DOS COEFICIENTES DE INFLUÊNCIA DA MATRIZ G - ELEMENTOS LINEARES

A.1 - ELEMENTOS LINEARES COM COLOCAÇÃO NODAL

Nesta parte, são apresentadas as deduções analíticas dos coeficientes de influência da matriz G, para o caso de elementos lineares com colocação nodal. Colocação nodal significa que o ponto de colocação ou nó funcional coincide com o nó geométrico, isto é, uma das duas extremidades do elemento.

A.1.1 CÁLCULO DE G_{ii}^1

Inicia-se o cálculo escrevendo a expressão geral, que foi mostrada no capítulo III.

$$G_{ii}^1 = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{N}_1 \cdot d\Gamma = \frac{1}{2\pi} \cdot |J| \cdot \int_{-1}^1 \ln\left(\frac{1}{r}\right) \cdot \mathbf{N}_1 \cdot d\eta \quad (\text{A.1.1})$$

onde l é o comprimento do elemento e $|J|$ é o Jacobiano da transformação igual a $l/2$. A função de interpolação N_1 e distância r entre o ponto fonte e o ponto campo são expressos por:

$$N_1 = \frac{1}{2} \cdot (1 - \eta) \quad ; \quad r = \frac{l}{2} \cdot (1 + \eta) \quad (\text{A.1.2})$$

substituindo (A.1.2) em (A.1.1), obtem-se

$$\frac{l}{8\pi} \cdot \int_{-1}^1 \ln\left(\frac{2}{l} \cdot \frac{1}{1+\eta}\right) \cdot (1-\eta) \cdot d\eta = \frac{l}{8\pi} \cdot \left[\underbrace{\int_{-1}^1 \ln\left(\frac{2}{l}\right) \cdot (1-\eta) \cdot d\eta}_{\text{A}} + \underbrace{\int_{-1}^1 \ln\left(\frac{1}{1+\eta}\right) \cdot (1-\eta) \cdot d\eta}_{\text{B}} \right] \quad (\text{A.1.3})$$

os termos entre colchetes na equação (A.1.3) podem ser integrados separadamente.

Parte A

$$\ln\left(\frac{2}{l}\right) \cdot \int_{-1}^1 (1-\eta) \cdot d\eta = \ln\left(\frac{2}{l}\right) \cdot \left[\eta \Big|_{-1}^1 - \frac{\eta^2}{2} \Big|_{-1}^1 \right] = 2 \cdot \ln\left(\frac{2}{l}\right) \quad (\text{A.1.4})$$

Parte B

$$-\int_{-1}^1 \ln(1+\eta) \cdot (1-\eta) \cdot d\eta$$

efetuando a seguinte mudança de variáveis: $\xi = 1+\eta \therefore \eta = \xi-1 \therefore 1-\eta=2-\xi$
 $\therefore d\xi=d\eta$; e mudando os limites de integração de $\eta=1$ para $\xi=2$ e $\eta=-1$ para $\xi=0$ pode-se escrever:

$$\begin{aligned} -\int_0^2 \ln(\xi) \cdot (2-\xi) \cdot d\xi &= -\int_0^2 2 \cdot \ln(\xi) \cdot d\xi + -\int_0^2 \xi \cdot \ln(\xi) \cdot d\xi = \\ -2 \cdot \left[\xi \cdot \ln(\xi) - \xi \right]_0^2 + \frac{\xi^2}{2} \cdot \left[\ln(\xi) - \frac{1}{2} \right]_0^2 &= -2 \cdot \ln(2) + 3 \end{aligned} \quad (\text{A.1.5})$$

finalmente obtém-se G_{ii}^1 somando as partes A e B

$$G_{ii}^1 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{l}{2} \cdot \left[\frac{3}{2} - \ln(l) \right] \quad (\text{A.1.6})$$

A.1.2 CÁLCULO DE G_{ii}^2

$$G_{ii}^2 = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{N}_2 \cdot d\Gamma = \frac{1}{2\pi} \cdot |J| \cdot \int_{-1}^1 \ln\left(\frac{1}{r}\right) \cdot \mathbf{N}_2 \cdot d\eta \quad (\text{A.1.7})$$

onde

$$\mathbf{N}_1 = \frac{1}{2} \cdot (1 + \eta) \quad ; \quad r = \frac{l}{2} \cdot (1 + \eta) \quad ; \quad |J| = \frac{l}{2} \quad (\text{A.1.8})$$

substituindo (A.1.8) em (A.1.7) chega-se a expressão

$$\frac{l}{8\pi} \cdot \int_{-1}^1 \ln\left(\frac{2}{l} \cdot \frac{1}{1+\eta}\right) \cdot (1+\eta) \cdot d\eta = \frac{l}{8\pi} \cdot \left[\int_{-1}^1 \ln\left(\frac{2}{l}\right) \cdot (1+\eta) \cdot d\eta + \int_{-1}^1 \ln\left(\frac{1}{1+\eta}\right) \cdot (1+\eta) \cdot d\eta \right] \quad (\text{A.1.9})$$

← A →

← B →

os termos entre colchetes da equação (A.1.9) podem ser integrados separadamente

Parte A

$$\ln\left(\frac{2}{l}\right) \cdot \int_{-1}^1 (1+\eta) \cdot d\eta = \ln\left(\frac{2}{l}\right) \cdot \left[\eta \Big|_{-1}^1 + \frac{\eta^2}{2} \Big|_{-1}^1 \right] = 2 \cdot \ln\left(\frac{2}{l}\right) \quad (\text{A.1.10})$$

Parte B

$$-\int_{-1}^1 \ln(1+\eta) \cdot (1+\eta) \cdot d\eta$$

efetuando-se a seguinte mudança de variáveis: $\xi = 1+\eta \therefore d\xi=d\eta$; e mudando os limites de integração de $\eta=1$ para $\xi=2$ e $\eta=-1$ para $\xi=0$ tem-se

$$-\int_0^2 \xi \cdot \ln(\xi) \cdot d\xi = -2 \cdot \ln(2) + 1 \quad (\text{A.1.11})$$

tem-se então que G_{ii}^2 é igual a soma das partes A e B

$$G_{ii}^2 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{l}{2} \cdot \left[\frac{1}{2} - \ln(l) \right] \quad (\text{A.1.12})$$

A.2 - ELEMENTOS LINEARES COM COLOCAÇÃO NÃO-NODAL

Nesta parte, são apresentadas as deduções analíticas dos coeficientes de influência da matriz G, para o caso de elementos lineares com colocação não-nodal. O termo colocação não-nodal significa que o ponto de colocação ou nó funcional não coincide com o nó geométrico, isto é, está posicionado no interior do elemento.

CÁLCULO DE G_{ii}

$$G_{ii} = \int_{\Gamma} u^* \cdot q \cdot d\Gamma \quad (\text{A.2.1})$$

sabendo que $q = N_1 \cdot q_1 + N_2 \cdot q_2$, tem-se

$$G_{ii} = \int_{\Gamma} u^* \cdot \left(N_1 \cdot q_1 + N_2 \cdot q_2 \right) \cdot d\Gamma \quad (\text{A.2.2})$$

separando as integrais e colocando a expressão da solução fundamental do potencial, fica-se com

$$G_{ii} = - \frac{1}{2\pi} \cdot \left[q_1 \cdot \int_{\Gamma} \ln(r) \cdot N_1 \cdot d\Gamma + q_2 \cdot \int_{\Gamma} \ln(r) \cdot N_2 \cdot d\Gamma \right] \quad (\text{A.2.3})$$

separando o termo acima em duas partes

$$G_{ii}^1 = - \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^l \ln(r) \cdot N_1 \cdot d\Gamma \quad (\text{A.2.4})$$

e

$$G_{ii}^2 = - \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^l \ln(r) \cdot N_2 \cdot d\Gamma \quad (\text{A.2.5})$$

A.2.1 CÁLCULO DE G_{ii}^2

Primeiramente, dividi-se o contorno Γ em dois sub-trechos

$$\Gamma = r_1 + d \quad \therefore N_2 = \frac{d + r_1}{l} \quad \therefore dr_1 = d\Gamma \quad (\text{A.2.6})$$

$$\Gamma = d - r'_1 \quad \therefore N_2 = \frac{d - r'_1}{l} \quad \therefore dr'_1 = - d\Gamma \quad (\text{A.2.7})$$

então

$$\begin{aligned} G_{ii}^2 &= K \cdot \left[\int_0^{l-d} \ln(r_1) \cdot \frac{d + r_1}{l} \cdot dr_1 + \int_d^0 \ln(r'_1) \cdot \frac{d - r'_1}{l} \cdot (-dr'_1) \right] \\ &= K \cdot \left[\int_0^{l-d} \ln(r_1) \cdot \frac{d + r_1}{l} \cdot dr_1 + \int_0^d \ln(r'_1) \cdot \frac{d - r'_1}{l} \cdot dr'_1 \right] \\ &= \frac{K}{l} \cdot \left[\int_0^{l-d} \ln(r_1) \cdot r_1 \cdot dr_1 + \int_0^{l-d} \ln(r_1) \cdot d \cdot dr_1 + \right. \\ &\quad \left. \int_0^d \ln(r'_1) \cdot d \cdot dr'_1 - \int_0^d \ln(r'_1) \cdot r'_1 \cdot dr'_1 \right] \quad (\text{A.2.8}) \\ &\quad \leftarrow \text{A} \rightarrow \quad \leftarrow \text{B} \rightarrow \\ &\quad \leftarrow \text{C} \rightarrow \quad \leftarrow \text{D} \rightarrow \end{aligned}$$

$$A = \frac{(l-d)^2}{2} \cdot \left(\ln(l-d) - \frac{1}{2} \right)$$

$$B = d \cdot \left((l-d) \cdot \ln(l-d) - (l-d) \right)$$

$$C = d^2 \cdot \ln(d) - d^2$$

$$D = - \left(\frac{d^2}{2} \cdot \left(\ln(d) - \frac{1}{2} \right) \right) \quad K = \frac{-1}{2\pi}$$

somando as parcela e fazendo algumas simplificações, obtem-se:

$$G_{ii}^2 = \frac{K}{l} \cdot \left[\frac{l^2 - d^2}{2} \cdot \ln(l-d) + \frac{d^2}{2} \cdot \ln(d) + \left(\frac{-l^2 - 2ld}{4} \right) \right] \quad (\text{A.2.9})$$

tem-se que Tax = d/l, eliminando-se "d" da equação acima, fica-se com:

$$\begin{aligned} G_{ii}^2 &= \frac{-l}{2\pi} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} - \text{Tax}^2 \right) \cdot \ln(l) - \left(\frac{1 - \text{Tax}^2}{2} \right) \cdot \ln(1 - \text{Tax}) + \frac{\text{Tax}^2}{2} \cdot \right. \\ &\quad \left. \ln(\text{Tax}) - \left(\frac{1 + 2 \text{Tax}}{4} \right) \right] \quad (\text{A.2.10}) \end{aligned}$$

A.2.2 CÁLCULO DE G_{ii}^1

Primeiramente, dividi-se o contorno Γ em dois sub-trechos

$$\Gamma = r_1 + d \therefore N_1 = 1 - N_2 = 1 - \frac{d + r_1}{l} \therefore dr_1 = d\Gamma \quad (\text{A.2.11})$$

e

$$\Gamma = d - r'_1 \therefore N_1 = 1 - N_2 = 1 - \frac{d - r'_1}{l} \therefore dr'_1 = -d\Gamma \quad (\text{A.2.12})$$

então

$$G_{ii}^1 = \frac{-1}{2\pi} \left[\int_0^{l-d} \ln(r_1) \cdot dr_1 + \int_0^d \ln(r'_1) \cdot dr'_1 \right] - G_{ii}^2$$

a parcela entre colchetes corresponde a solução para o elemento constante.

$$G_{ii}^1 = \frac{-1}{2\pi} \left((l-d) \cdot \ln(l-d) - l + d \cdot \ln(d) \right) - G_{ii}^2 \quad (\text{A.2.13})$$

substituindo d por $l \cdot \text{Tax}$, colocando l em evidência e fazendo as simplificações dos termos semelhantes, obtém-se:

$$G_{ii}^1 = \frac{-1}{2\pi} \left((1-\text{Tax}) \cdot \ln(1-\text{Tax}) + \ln(l) + \text{Tax} \cdot \ln(\text{Tax}) - 1 \right) - G_{ii}^2 \quad (\text{A.2.14})$$

APÊNDICE B

CALCULO ANALÍTICO DOS COEFICIENTES DE INFLUÊNCIA
DA MATRIZ G - ELEMENTOS QUADRATICOS

B.1 - ELEMENTOS SUPERPARAMÉTRICOS COM COLOCAÇÃO NODAL

Nesta parte, são apresentadas as deduções analíticas dos coeficientes de influência da matriz G, para o caso de elementos superparamétricos quadráticos com colocação nodal. Elemento superparamétrico pois a geometria é reta e as funções de interpolação são quadráticas.

Existem dois casos distintos no que dizem respeito a posição relativa do ponto fonte. No primeiro caso o ponto fonte se localiza no extremo do elemento, sendo que no segundo caso, a fonte está no nó central do elemento.

B.1.1 CÁLCULO DE $G_{ii}^{1, \text{extremo}}$

$$G_{ii}^1 = \int_{\Gamma} u^* \cdot N_1 \cdot d\Gamma = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{l}{2} \cdot \int_{-1}^1 \ln\left(\frac{1}{r}\right) \cdot N_1 \cdot d\eta \quad (\text{B.1.1})$$

onde l é o comprimento do elemento e $|J| = l/2$, como já vistos.

A função de interpolação N_1 e distância r entre o ponto fonte e o ponto campo são expressos por:

$$N_1 = \frac{1}{2} \cdot \eta \cdot (\eta - 1) ; r = \frac{l}{2} \cdot (1 + \eta) \quad (\text{B.1.2})$$

substituindo (B.1.2) em (B.1.1), obtem-se

$$\begin{aligned} \frac{l}{8\pi} \cdot \int_{-1}^1 \ln\left(\frac{2}{l} \cdot \frac{1}{1+\eta}\right) \cdot \eta \cdot (\eta - 1) \cdot d\eta &= \frac{l}{8\pi} \cdot \left[\int_{-1}^1 \ln\left(\frac{2}{l}\right) \cdot \eta \cdot (\eta - 1) \cdot d\eta \right. \\ &\left. + \int_{-1}^1 \ln\left(\frac{1}{1+\eta}\right) \cdot \eta \cdot (\eta - 1) \cdot d\eta \right] \quad (\text{B.1.3}) \end{aligned}$$

os termos entre colchetes na equação (B.1.3) podem ser integrados separadamente em duas partes:

Parte A

$$\ln\left(\frac{2}{l}\right) \cdot \int_{-1}^1 \eta \cdot (\eta - 1) \cdot d\eta = \frac{2}{3} \cdot \ln\left(\frac{2}{l}\right) \quad (\text{B.1.4})$$

Parte B

$$\int_{-1}^1 \ln\left(\frac{1}{1+\eta}\right) \cdot \eta \cdot (\eta - 1) \cdot d\eta = - \int_{-1}^1 \ln(1+\eta) \cdot \eta \cdot (\eta - 1) \cdot d\eta$$

efetuando-se a seguinte mudança de variáveis: $\xi=1+\eta \therefore \eta=\xi-1 \therefore 1-\eta=2-\xi$
 $\therefore d\xi=d\eta$; e mudando os limites de integração de $\eta=1$ para $\xi=2$ e $\eta=-1$ para $\xi=0$ tem-se

$$-\int_0^2 \ln(\xi) \cdot (\xi-1) \cdot (\xi-2) \cdot d\xi = -\int_0^2 (\xi^2 - 3\xi + 2) \cdot \ln(\xi) \cdot d\xi \quad (\text{B.1.5})$$

Abrindo o produto dentro da integral tem-se

$$-\int_0^2 \xi^2 \cdot \ln(\xi) \cdot d\xi = -\frac{\xi^3}{3} \cdot \left(\ln(\xi) - \frac{1}{3} \right) \Big|_0^2 = -\frac{8}{3} \cdot \left(\ln(2) - \frac{1}{3} \right)$$

$$\int_0^2 3 \cdot \xi \cdot \ln(\xi) \cdot d\xi = 3 \cdot \frac{\xi^2}{2} \cdot \left(\ln(\xi) - \frac{1}{2} \right) \Big|_0^2 = 6 \cdot \left(\ln(2) - \frac{1}{2} \right)$$

$$-\int_0^2 \ln(\xi) \cdot d\xi = -2 \cdot \left(\xi \cdot \ln(\xi) - \xi \right) \Big|_0^2 = -4 \cdot \left(\ln(2) - 1 \right)$$

finalmente obtem-se G_{11}^1 somando as partes A e B

$$G_{11}^1 = \frac{l}{8\pi} \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot \ln\left(\frac{2}{l}\right) - \frac{8}{3} \cdot \left(\ln(2) - \frac{1}{3} \right) + 6 \cdot \left(\ln(2) - \frac{1}{2} \right) - 4 \cdot \left(\ln(2) - 1 \right) \right] = \frac{l}{2\pi} \cdot \frac{l}{2} \cdot \left[\frac{17}{18} - \frac{1}{3} \cdot \ln(l) \right] \quad (\text{B.1.6})$$

B.1.2 CÁLCULO DE $G_{ii}^{2,extremo}$

$$G_{ii}^2 = \int_{\Gamma} u^* \cdot N_2 \cdot d\Gamma = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{l}{2} \cdot \int_{-1}^1 \ln\left(\frac{1}{r}\right) \cdot N_2 \cdot d\eta \quad (B.1.7)$$

$$\text{onde } N_2 = (1 - \eta) \cdot (1 + \eta) \quad ; \quad r = \frac{l}{2} \cdot (1 + \eta) \quad (B.1.8)$$

substituindo (B.1.8) em (B.1.7), obtem-se

$$\frac{l}{4\pi} \cdot \int_{-1}^1 \ln\left(\frac{2}{l} \cdot \frac{1}{1+\eta}\right) \cdot (1 - \eta) \cdot (1 + \eta) \cdot d\eta = \frac{l}{4\pi} \cdot \left[\int_{-1}^1 \ln\left(\frac{2}{l}\right) \cdot (1 - \eta) \cdot (1 + \eta) \cdot d\eta - \int_{-1}^1 \ln(1 + \eta) \cdot (1 - \eta) \cdot (1 + \eta) \cdot d\eta \right] \quad (B.1.9)$$

os termo entre colchetes na equação (B.1.9) podem ser integrados separadamente.

Parte A (idêntica àquela da apêndice A)

$$\ln\left(\frac{2}{l}\right) \cdot \int_{-1}^1 (1 - \eta) \cdot (1 + \eta) \cdot d\eta = \frac{4}{3} \cdot \ln\left(\frac{2}{l}\right) \quad (A.1.4)$$

Parte B

$$- \int_{-1}^1 \ln(\eta + 1) \cdot (1 - \eta) \cdot (1 + \eta) \cdot d\eta = - \int_{-1}^1 \ln(\eta + 1) \cdot d\eta + \int_{-1}^1 \eta^2 \cdot \ln(\eta + 1) \cdot d\eta$$

efetuando-se a mesma mudança de variáveis mostrada em B.1.1:

$$- \int_0^2 \ln(\xi) \cdot (2\xi - \xi^2) \cdot d\xi = - \int_0^2 2 \cdot \xi \cdot \ln(\xi) \cdot d\xi + \int_0^2 \xi^2 \cdot \ln(\xi) \cdot d\xi \quad (B.1.10)$$

calculando as integrais exteriores separadamente

Parte B1

$$- \int_0^2 2 \cdot \xi \cdot \ln(\xi) \cdot d\xi = -4 \cdot \ln(2) + 2$$

Parte B2

$$\int_0^2 \xi^2 \cdot \ln(\xi) \cdot d\xi = \frac{8}{3} \cdot \left(\ln(2) - \frac{1}{3} \right)$$

finalmente obtem-se G_{ii}^2 somando as partes A, B1 e B2

$$G_{ii}^2 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{l}{2} \cdot \left[\frac{10}{9} - \frac{4}{3} \cdot \ln(l) \right] \quad (\text{B.1.11})$$

B.1.3 CÁLCULO DE $G_{ii}^{3, \text{extremo}}$

$$G_{ii}^3 = \int_{\Gamma} u^* \cdot N_3 \cdot d\Gamma = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{l}{2} \cdot \int_{-1}^1 \ln\left(\frac{1}{r}\right) \cdot N_3 \cdot d\eta \quad (\text{B.1.12})$$

$$\text{onde } N_3 = \frac{1}{2} \cdot \eta \cdot (\eta + 1) ; r = \frac{l}{2} \cdot (1 + \eta) \quad (\text{B.1.13})$$

substituindo (B.1.13) em (B.1.12), obtem-se

$$\begin{aligned} \frac{l}{8\pi} \cdot \int_{-1}^1 \ln\left(\frac{2}{l} \cdot \frac{1}{1+\eta}\right) \cdot \eta \cdot (\eta + 1) \cdot d\eta &= \frac{l}{8\pi} \cdot \left[\int_{-1}^1 \ln\left(\frac{2}{l}\right) \cdot \eta \cdot (\eta + 1) \cdot d\eta \right. \\ &\left. + \int_{-1}^1 \ln\left(\frac{1}{1+\eta}\right) \cdot \eta \cdot (\eta + 1) \cdot d\eta \right] \quad (\text{B.1.14}) \end{aligned}$$

os termos entre colchetes na equação (B.1.14) podem ser integrados separadamente.

Parte A

$$\ln\left(\frac{2}{l}\right) \cdot \int_{-1}^1 \eta \cdot (\eta + 1) \cdot d\eta = \frac{2}{3} \cdot \ln\left(\frac{2}{l}\right) \quad (\text{B.1.15})$$

Parte B

$$\int_{-1}^1 \ln\left(\frac{1}{1+\eta}\right) \cdot \eta \cdot (\eta + 1) \cdot d\eta = - \int_{-1}^1 \ln(1+\eta) \cdot \eta \cdot (\eta + 1) \cdot d\eta \quad (\text{B.1.16})$$

efetuando-se a seguinte mudança de variáveis: $\xi = 1+\eta \therefore \eta = \xi-1 \therefore 1-\eta=2-\xi \therefore d\xi=d\eta$; e mudando os limites de integração de $\eta=1$ para $\xi=2$ e $\eta=-1$ para $\xi=0$ tem-se

$$- \int_0^2 \ln(\xi) \cdot (\xi-1) \cdot \xi \cdot d\xi = - \int_0^2 (\xi^2 - \xi) \cdot \ln(\xi) \cdot d\xi \quad (\text{B.1.17})$$

Abrindo o produto dentro da integral tem-se

$$- \int_0^2 \xi^2 \cdot \ln(\xi) \cdot d\xi = - \frac{\xi^3}{3} \cdot \left(\ln(\xi) - \frac{1}{3} \right) \Big|_0^2 = - \frac{8}{3} \cdot \left(\ln(2) - \frac{1}{3} \right)$$

$$\int_0^2 \xi \cdot \ln(\xi) \cdot d\xi = \frac{\xi^2}{2} \cdot \left(\ln(\xi) - \frac{1}{2} \right) \Big|_0^2 = 2 \cdot \left(\ln(2) - \frac{1}{2} \right)$$

finalmente obtem-se G_{11}^3 somando as partes A e B

$$G_{11}^3 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{l}{2} \cdot \left[- \frac{1}{18} - \frac{1}{3} \cdot \ln(l) \right] \quad (\text{B.1.18})$$

B.1.4 CÁLCULO DE $G_{11}^{1, \text{centro}}$ e $G_{11}^{3, \text{centro}}$

$$G_{11}^1 = \int_{\Gamma} u^x \cdot N_1 \cdot d\Gamma = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{l}{2} \cdot \int_{-1}^1 \ln\left(\frac{1}{|r|}\right) \cdot N_1 \cdot d\eta \quad (\text{B.1.19})$$

onde

$$N_1 = \frac{1}{2} \cdot \eta \cdot (\eta - 1) ; r = \frac{l}{2} \cdot \eta \quad (\text{B.1.20})$$

substituindo (B.1.20) em (B.1.19), obtem-se:

$$\frac{l}{8\pi} \cdot \int_{-1}^1 \ln\left(\frac{2}{l} \cdot \frac{1}{\eta}\right) \cdot \eta \cdot (\eta - 1) \cdot d\eta = \quad (\text{B.1.21})$$

$$\frac{l}{8\pi} \cdot \left[\int_{-1}^1 \ln\left(\frac{2}{l}\right) \cdot \eta \cdot (\eta - 1) \cdot d\eta + \int_{-1}^1 \ln\left(\frac{1}{\eta}\right) \cdot \eta \cdot (\eta - 1) \cdot d\eta \right]$$

os termos entre colchetes na equação (B.1.21) podem ser integrados separadamente em duas partes, sendo que a parte A é idêntica à equação(B.1.4):

Parte B

$$- \int_{-1}^1 \ln(\eta) \cdot \eta \cdot (\eta - 1) \cdot d\eta = - \int_{-1}^1 \eta^2 \cdot \ln(\eta) \cdot d\eta + \int_{-1}^1 \eta \cdot \ln(\eta) \cdot d\eta \quad (\text{B.1.22})$$

Parte B1

$$- \int_{-1}^1 \eta^2 \cdot \ln(\eta) \cdot d\eta = \frac{2}{9}$$

Parte B2

$$- \int_{-1}^1 \eta \cdot \ln(\eta) \cdot d\eta = 0$$

finalmente obtem-se o resultado somando as partes A e B

$$G_{11}^{1,c}, G_{11}^{3,c} = \frac{l}{8\pi} \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot \ln\left(\frac{2}{l}\right) + \frac{2}{9} \right] \quad (\text{B.1.23})$$

B.1.5 CÁLCULO DE $G_{11}^{2, \text{centro}}$

$$G_{11}^2 = \int_{\Gamma} u^* \cdot N_2 \cdot d\Gamma = 2 \cdot \left[\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{l}{2} \cdot \int_0^1 \ln\left(\frac{1}{|r|}\right) \cdot N_2 \cdot d\eta \right] \quad (\text{B.1.24})$$

onde $N_2 = (1 - \eta) \cdot (1 + \eta)$; $r = \frac{l}{2} \cdot \eta$ (B.1.25)

substituindo (B.1.25) em (B.1.24), obtem-se

$$\frac{l}{2\pi} \cdot \left[\underbrace{\ln\left(\frac{2}{l}\right) \cdot \int_0^1 (1 - \eta^2) \cdot d\eta}_{\text{Parte A}} - \underbrace{\int_0^1 \ln(\eta) \cdot (1 - \eta^2) \cdot d\eta}_{\text{Parte B}} \right] \quad (\text{B.1.26})$$

Parte A

$$\ln\left(\frac{2}{l}\right) \cdot \int_0^1 (1 - \eta^2) \cdot d\eta = \frac{2}{3} \cdot \ln\left(\frac{2}{l}\right) \quad (\text{B.1.27})$$

Parte B

$$- \int_0^1 \ln(\eta) \cdot (1 - \eta^2) \cdot d\eta = - \underbrace{\int_0^1 \ln(\eta) \cdot d\eta}_{\text{B1}} + \underbrace{\int_0^1 \eta^2 \cdot \ln(\eta) \cdot d\eta}_{\text{B2}} \quad (\text{B.1.28})$$

Parte B1

$$- \int_0^1 \ln(\eta) \cdot d\eta = -1$$

Parte B2

$$+ \int_0^1 \eta^2 \cdot \ln(\eta) \cdot d\eta = + \frac{1}{9}$$

finalmente obtem-se o resultado somando as partes A e B1 e B2

$$G_{11}^{2, \text{centro}} = \frac{l}{4\pi} \cdot \left[\frac{4}{3} \cdot \ln\left(\frac{2}{l}\right) + \frac{16}{9} \right] \quad (\text{B.1.29})$$

B.2 - ELEMENTOS SUPERPARAMÉTRICOS COM COLOCAÇÃO NÃO-NODAL

Nesta parte, são apresentadas as deduções analíticas dos coeficientes de influência da matriz G de elementos superparamétricos quadráticos com colocação não-nodal.

CÁLCULO DE G_{ii}

$$G_{ii} = \int_{\Gamma} u^* \cdot q \cdot d\Gamma \quad (\text{B.2.1})$$

sabendo que $q = N_1 q_1 + N_2 q_2 + N_3 q_3$, tem-se

$$G_{ii} = \int_{\Gamma} u^* \cdot \left(N_1 q_1 + N_2 q_2 + N_3 q_3 \right) \cdot d\Gamma \quad (\text{B.2.2})$$

separando as integrais e introduzindo a expressão da solução fundamental, fica-se com

$$G_{ii} = - \frac{1}{2\pi} \cdot \left[q_1 \cdot \int_{\Gamma} \ln(r) \cdot N_1 \cdot d\Gamma + q_2 \cdot \int_{\Gamma} \ln(r) \cdot N_2 \cdot d\Gamma + q_3 \cdot \int_{\Gamma} \ln(r) \cdot N_3 \cdot d\Gamma \right] \quad (\text{B.2.3})$$

separando os coeficientes do termo acima em três partes

$$G_{ii}^1 = K \cdot \int_0^l \ln(r) \cdot N_1 \cdot d\Gamma \quad (\text{B.2.4})$$

$$G_{ii}^2 = K \cdot \int_0^l \ln(r) \cdot N_2 \cdot d\Gamma \quad (\text{B.2.5})$$

$$G_{ii}^3 = K \cdot \int_0^l \ln(r) \cdot N_3 \cdot d\Gamma \quad (\text{B.2.6})$$

onde $K = - \frac{1}{2\pi}$

B.2.1 CÁLCULO DE G_{11}^1

Para se conduzir os cálculos dividi-se o contorno Γ em dois sub-trechos:

$$\Gamma = d + r_1 \therefore N_1 = 2 \cdot \left(\frac{d + r_1}{l} \right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{d + r_1}{l} \right) + 1 \therefore d\Gamma = dr_1 \quad (\text{B.2.7})$$

$$\Gamma = d - r'_1 \therefore N_1 = 2 \cdot \left(\frac{d - r'_1}{l} \right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{d - r'_1}{l} \right) + 1 \therefore d\Gamma = -dr'_1 \quad (\text{B.2.8})$$

$$G_{11}^1 = K \cdot \left[\underbrace{\int_0^{l-d} \ln(r_1) \cdot \left\{ 2 \cdot \left(\frac{d + r_1}{l} \right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{d + r_1}{l} \right) + 1 \right\} \cdot dr_1}_{\text{Parte A}} + \underbrace{\int_d^0 \ln(r_1) \cdot \left\{ 2 \cdot \left(\frac{d - r'_1}{l} \right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{d - r'_1}{l} \right) + 1 \right\} \cdot (-dr'_1)}_{\text{Parte B}} \right] \quad (\text{B.2.9})$$

Parte A

$$\frac{2}{l^2} \cdot \underbrace{\int_0^{l-d} \ln(r_1) \cdot (d^2 + 2 \cdot d \cdot r_1 + r_1^2) \cdot dr_1}_{\text{Parte A1}} - \frac{3}{l} \cdot \underbrace{\int_0^{l-d} \ln(r_1) \cdot (d + r_1) \cdot dr_1}_{\text{Parte A2}} + \underbrace{\int_0^{l-d} \ln(r_1) \cdot dr_1}_{\text{Parte A3}} \quad (\text{B.2.10})$$

$$A1 = \frac{2}{l^2} \cdot \left[\underbrace{\int_0^{l-d} \ln(r_1) \cdot d^2 \cdot dr_1}_{\text{Parte A11}} + \underbrace{\int_0^{l-d} \ln(r_1) \cdot 2 \cdot d \cdot r_1 \cdot dr_1}_{\text{Parte A12}} + \underbrace{\int_0^{l-d} \ln(r_1) \cdot r^2 \cdot dr_1}_{\text{Parte A13}} \right] \quad (\text{B.2.11})$$

$$A11 = d^2 \cdot \int_0^{l-d} \ln(r_1) \cdot dr_1 = d^2 \cdot \left[(l-d) \cdot \ln(l-d) - (l-d) \right] \quad (\text{B.2.12})$$

$$A12 = 2 \cdot d \cdot \int_0^{l-d} \ln(r_1) \cdot r_1 \cdot dr_1 = d \cdot (l-d)^2 \cdot \left[\ln(l-d) - \frac{1}{2} \right] \quad (\text{B.2.13})$$

$$A13 = \int_0^{l-d} \ln(r_1) \cdot r_1^2 \cdot dr_1 = \frac{(l-d)^3}{3} \left[\ln(l-d) - \frac{1}{3} \right] \quad (B.2.14)$$

$$A2 = - \frac{3}{l} \cdot \left[d \cdot \int_0^{l-d} \ln(r_1) \cdot dr_1 + \int_0^{l-d} \ln(r_1) \cdot r_1 \cdot dr_1 \right] = \quad (B.2.15)$$

$$- \frac{3}{l} \cdot \left[d \cdot \left((l-d) \cdot \ln(l-d) - (l-d) \right) + \frac{(l-d)^2}{2} \cdot \left(\ln(l-d) - \frac{1}{2} \right) \right]$$

$$A3 = \left((l-d) \cdot \ln(l-d) - (l-d) \right) \quad (B.2.16)$$

Parte B

$$\frac{2}{l^2} \int_0^d \ln(r'_1) \cdot (d^2 - 2 \cdot d \cdot r'_1 + r'^2_1) \cdot dr'_1 - \frac{3}{l} \int_0^d \ln(r'_1) \cdot (d - r'_1) \cdot dr'_1$$

← Parte B1 → ← Parte B2 →

$$+ \int_0^d \ln(r'_1) \cdot dr'_1 \quad (B.2.17)$$

← Parte B3 →

$$B1 = \frac{2}{l^2} \cdot \left[d^2 \cdot \int_0^d \ln(r'_1) \cdot dr'_1 - 2 \cdot d \cdot \int_0^d \ln(r'_1) \cdot r'_1 \cdot dr'_1 + \int_0^d \ln(r'_1) \cdot r'^2_1 \cdot dr'_1 \right]$$

← Parte B11 → ← Parte B12 → ← Parte B13 →

(B.2.18)

$$B11 = d^2 \cdot \left(d \cdot \ln(d) - d \right) \quad (B.2.19)$$

$$B12 = - d^3 \cdot \left(\ln(d) - \frac{1}{2} \right) \quad (B.2.20)$$

$$B13 = \frac{d^3}{3} \cdot \left(\ln(d) - \frac{1}{3} \right) \quad (B.2.21)$$

$$B2 = - \frac{3}{l} \cdot \left[d \cdot \int_0^d \ln(r'_1) \cdot dr'_1 - \int_0^d \ln(r'_1) \cdot r'_1 \cdot dr'_1 \right] =$$

$$- \frac{3}{l} \cdot \left[d \cdot \left(d \cdot \ln(d) - d \right) - \frac{d^2}{2} \cdot \left(\ln(d) - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (B.2.22)$$

$$B3 = \left(d \cdot \ln(d) - d \right) \quad (B.2.23)$$

$$\begin{aligned} G_{11}^1 &= K \cdot \left(A11 + A12 + A13 + A2 + A3 + B11 + B12 + B13 + B2 + B3 \right) \\ &= K \cdot \left[\frac{2}{l^2} \cdot \left\{ d^2 \cdot \left[(l-d) \cdot \ln(l-d) - (l-d) \right] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. d \cdot (l-d)^2 \cdot \left[\ln(l-d) - \frac{1}{2} \right] + \frac{(l-d)^3}{3} \cdot \left[\ln(l-d) - \frac{1}{3} \right] \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{l} \cdot \left\{ d \cdot \left[(l-d) \cdot \ln(l-d) - (l-d) \right] + \frac{(l-d)^2}{2} \cdot \left[\ln(l-d) - \frac{1}{2} \right] \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \left[(l-d) \cdot \ln(l-d) - (l-d) \right] \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{l^2} \cdot \left\{ d^2 \cdot \left(d \cdot \ln(d) - d \right) - d^3 \cdot \left(\ln(d) - \frac{1}{2} \right) + \frac{d^3}{3} \cdot \left(\ln(d) - \frac{1}{3} \right) \right\} - \right. \\ &\quad \left. \frac{3}{l} \cdot \left\{ d \cdot \left(d \cdot \ln(d) - d \right) - \frac{d^2}{2} \cdot \left(\ln(d) - \frac{1}{2} \right) \right\} + \left(d \cdot \ln(d) - d \right) \right] \quad (B.2.24) \end{aligned}$$

como $d = \text{Tax} \cdot l$, tem-se então:

$$\begin{aligned} G_{11}^1 &= K \cdot \left[\frac{2}{l^2} \cdot \left\{ (\text{Tax} \cdot l)^2 \left[(l - \text{Tax} \cdot l) \cdot \ln(l - \text{Tax} \cdot l) - (l - \text{Tax} \cdot l) \right] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \text{Tax} \cdot l \cdot (l - \text{Tax} \cdot l)^2 \left[\ln(l - \text{Tax} \cdot l) - \frac{1}{2} \right] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{(l-d)^3}{3} \left[\ln(l - \text{Tax} \cdot l) - \frac{1}{3} \right] \right\} - \right. \\ &\quad \left. \frac{3}{l} \cdot \left\{ \text{Tax} \cdot l \cdot \left[(l - \text{Tax} \cdot l) \cdot \ln(l - \text{Tax} \cdot l) - (l - \text{Tax} \cdot l) \right] + \frac{(l - \text{Tax} \cdot l)^2}{2} \cdot \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left[\ln(l - \text{Tax} \cdot l) - \frac{1}{2} \right] \right\} + \left\{ \left[(l - \text{Tax} \cdot l) \cdot \ln(l - \text{Tax} \cdot l) - (l - \text{Tax} \cdot l) \right] \right\} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{l^2} \cdot \left\{ (\text{Tax} \cdot l)^2 \cdot \left[\text{Tax} \cdot l \cdot \ln(\text{Tax} \cdot l) - \text{Tax} \cdot l \right] - (\text{Tax} \cdot l)^3 \cdot \right. \right. \end{aligned}$$

$$\left(\ln(\text{Tax} \cdot l) - \frac{1}{2} \right) + \frac{(\text{Tax} \cdot l)^3}{3} \cdot \left(\ln(\text{Tax} \cdot l) - \frac{1}{3} \right) \left. \vphantom{\frac{(\text{Tax} \cdot l)^3}{3}} \right\} - \frac{3}{l} \cdot \left\{ \text{Tax} \cdot l \cdot \left((\text{Tax} \cdot l) \cdot \ln(\text{Tax} \cdot l) - (\text{Tax} \cdot l) \right) - \frac{(l - \text{Tax} \cdot l)^2}{2} \cdot \left(\ln(\text{Tax} \cdot l) - \frac{1}{2} \right) \right\} + \left((\text{Tax} \cdot l) \cdot \ln(\text{Tax} \cdot l) - (\text{Tax} \cdot l) \right) \quad (\text{B.2.25})$$

B.2.2 CÁLCULO DE G_{11}^2

Para se conduzir os cálculos dividi-se o contorno Γ em dois sub-trechos:

$$\Gamma = r_1 + d \cdot N_2 = 4 \cdot \left[- \left(\frac{d + r_1}{l} \right)^2 + \left(\frac{d + r_1}{l} \right) \right] \cdot d\Gamma = dr_1 \quad (\text{B.2.26})$$

$$\Gamma = d - r'_1 \cdot N_2 = 4 \cdot \left[- \left(\frac{d - r'_1}{l} \right)^2 + \left(\frac{d - r'_1}{l} \right) \right] \cdot d\Gamma = -dr'_1 \quad (\text{B.2.27})$$

$$G_{11}^2 = K \cdot \left[\int_0^{l-d} \ln(r_1) \cdot \left\{ 4 \cdot \left[- \left(\frac{d + r_1}{l} \right)^2 + \left(\frac{d + r_1}{l} \right) \right] \right\} \cdot dr_1 + \right.$$

← Parte A →

$$\left. \int_d^0 \ln(r_1) \cdot \left\{ 4 \cdot \left[- \left(\frac{d - r'_1}{l} \right)^2 + \left(\frac{d - r'_1}{l} \right) \right] \right\} \cdot (-dr'_1) \right] \quad (\text{B.2.28})$$

← Parte B →

Parte A

$$- \frac{4}{l^2} \int_0^{l-d} \ln(r_1) \cdot (d + r_1)^2 \cdot dr_1 + \frac{4}{l} \int_0^{l-d} \ln(r_1) \cdot (d + r_1) \cdot dr_1 \quad (\text{B.2.29})$$

← Parte A1 → ← Parte A2 →

A1 = $-\frac{4}{l^2} \cdot (A11 + A12 + A13)$ dados pelas equações (B.2.12), (B.2.13) e (B.2.14), respectivamente.

A2 = equação (B.2.15), substituindo $-\frac{3}{l}$ por $+\frac{4}{l}$

PARTE B

$$-\frac{4}{l^2} \int_0^d \ln(r'_1) \cdot (d - r'_1)^2 \cdot dr'_1 + \frac{4}{l} \int_0^d \ln(r'_1) \cdot (d - r'_1) \cdot dr'_1 \quad (\text{B.2.30})$$

\longleftarrow Parte B1 \longrightarrow \longleftarrow Parte B2 \longrightarrow

B1 = $-\frac{4}{l^2} \cdot (B11 + B12 + B13)$ dados pelas equações (B.2.19), (B.2.20) e (B.2.21), respectivamente.

B2 = equação (B.2.22), substituindo $-\frac{3}{l}$ por $+\frac{4}{l}$

$$G_{11}^2 = K \cdot (A1 + A2 + B1 + B2) = \quad (\text{B.2.31})$$

$$K \cdot \left[-\frac{4}{l^2} \cdot \left\{ d^2 \cdot \left[(1-d) \cdot \ln(1-d) - (1-d) \right] + d \cdot (1-d)^2 \cdot \left[\ln(1-d) - \frac{1}{2} \right] + \frac{(1-d)^3}{3} \cdot \left[\ln(1-d) - \frac{1}{3} \right] \right\} \right. \\ \left. + \frac{4}{l} \cdot \left\{ d \cdot \left[(1-d) \cdot \ln(1-d) - (1-d) \right] + \frac{(1-d)^2}{2} \cdot \left[\ln(1-d) - \frac{1}{2} \right] \right\} \right. \\ \left. - \frac{4}{l^2} \cdot \left\{ d^2 \cdot \left[d \cdot \ln d - d \right] - d^3 \cdot \left[\ln d - \frac{1}{2} \right] + \frac{d^3}{3} \cdot \left[\ln d - \frac{1}{3} \right] \right\} + \frac{4}{l} \cdot \left\{ d \cdot \left[d \cdot \ln d - d \right] - \frac{d^2}{2} \cdot \left[\ln d - \frac{1}{2} \right] \right\} \right]$$

como $d = \text{Tax} \cdot l$, tem-se então:

$$G_{11}^2 = K \cdot \left[-\frac{4}{l^2} \cdot \left\{ (\text{Tax} \cdot l)^2 \cdot \left[(1 - \text{Tax} \cdot l) \cdot \ln(1 - \text{Tax} \cdot l) - (1 - \text{Tax} \cdot l) \right] \right. \right. \\ \left. + \text{Tax} \cdot l \cdot (1 - \text{Tax} \cdot l)^2 \cdot \left[\ln(1 - \text{Tax} \cdot l) - \frac{1}{2} \right] + \frac{(1 - \text{Tax} \cdot l)^3}{3} \cdot \left[\ln(1 - \text{Tax} \cdot l) - \frac{1}{3} \right] \right\} + \frac{4}{l} \cdot \left\{ \text{Tax} \cdot l \cdot \left[\text{Tax} \cdot l \cdot \ln \text{Tax} \cdot l - \text{Tax} \cdot l \right] - \frac{(\text{Tax} \cdot l)^2}{2} \cdot \left[\ln \text{Tax} \cdot l - \frac{1}{2} \right] \right\} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{4}{l} \cdot \left\{ \text{Tax} \cdot l \cdot \left((1 - \text{Tax} \cdot l) \cdot \ln(1 - \text{Tax} \cdot l) - (1 - \text{Tax} \cdot l) \right) + \frac{(1 - \text{Tax} \cdot l)^2}{2} \right. \\
 & \left. \left(\ln(1 - \text{Tax} \cdot l) - \frac{1}{2} \right) \right\} - \frac{4}{l^2} \cdot \left\{ (\text{Tax} \cdot l)^2 \cdot \left(\text{Tax} \cdot l \cdot \ln(\text{Tax} \cdot l) - \text{Tax} \cdot l \right) \right. \\
 & \left. - (\text{Tax} \cdot l)^3 \cdot \left(\ln(\text{Tax} \cdot l) - \frac{1}{2} \right) + \frac{(\text{Tax} \cdot l)^3}{3} \cdot \left(\ln(\text{Tax} \cdot l) - \frac{1}{3} \right) \right\} + \\
 & \frac{4}{l} \cdot \left\{ \text{Tax} \cdot l \cdot \left((\text{Tax} \cdot l) \cdot \ln(\text{Tax} \cdot l) - (\text{Tax} \cdot l) \right) - \right. \\
 & \left. \frac{(\text{Tax} \cdot l)^2}{2} \left(\ln(\text{Tax} \cdot l) - \frac{1}{2} \right) \right\} \quad \text{(B.2.32)}
 \end{aligned}$$

B.2.3 CÁLCULO DE G_{11}^3

Para se conduzir os cálculos dividi-se o contorno Γ em dois sub-trechos:

$$\Gamma = d + r_1 \triangleq N_3 = 2 \cdot \left(\frac{d + r_1}{l} \right)^2 - \left(\frac{d + r_1}{l} \right) \triangleq d\Gamma = dr_1 \quad \text{(B.2.33)}$$

$$\Gamma = d - r'_1 \triangleq N_3 = 2 \cdot \left(\frac{d - r'_1}{l} \right)^2 - \left(\frac{d - r'_1}{l} \right) \triangleq d\Gamma = - dr'_1 \quad \text{(B.2.34)}$$

$$\begin{aligned}
 G_{11}^3 = K \cdot & \left[\underbrace{\int_0^{l-d} \ln(r_1) \cdot \left\{ 2 \cdot \left(\frac{d + r_1}{l} \right)^2 - \left(\frac{d + r_1}{l} \right) \right\} \cdot dr_1}_{\text{Parte A}} \right. \\
 & \left. + \underbrace{\int_d^0 \ln(r'_1) \cdot \left\{ 2 \cdot \left(\frac{d - r'_1}{l} \right)^2 - \left(\frac{d - r'_1}{l} \right) \right\} \cdot (- dr'_1)}_{\text{Parte B}} \right] \quad \text{(B.2.35)}
 \end{aligned}$$

Compondo os resultados obtidos na parte (B.2.1), pode-se escrever diretamente a expressão para G_{11}^3 .

$$\begin{aligned}
G_{11}^3 = K \cdot & \left[\frac{2}{l^2} \cdot \left\{ d^2 \cdot \left[(1-d) \cdot \ln(1-d) - (1-d) \right] + \right. \right. \\
& d \cdot (1-d)^2 \cdot \left[\ln(1-d) - \frac{1}{2} \right] + \frac{(1-d)^3}{3} \cdot \left[\ln(1-d) - \frac{1}{3} \right] \left. \right\} - \\
& \frac{1}{l} \cdot \left\{ d \cdot \left((1-d) \cdot \ln(1-d) - (1-d) \right) + \frac{(1-d)^2}{2} \cdot \left(\ln(1-d) - \frac{1}{2} \right) \right\} + \\
& \frac{2}{l^2} \cdot \left\{ d^2 \cdot \left(d \cdot \ln(d) - d \right) - d^3 \cdot \left(\ln(d) - \frac{1}{2} \right) + \frac{d^3}{3} \cdot \left(\ln(d) - \frac{1}{3} \right) \right\} - \\
& \left. \frac{1}{l} \cdot \left\{ d \cdot \left(d \cdot \ln(d) - d \right) - \frac{d^2}{2} \cdot \left(\ln(d) - \frac{1}{2} \right) \right\} \right] \quad (B.2.36)
\end{aligned}$$