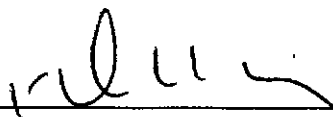


CÁLCULO DE SENSIBILIDADES - UMA APLICAÇÃO DO  
MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO À OTIMIZAÇÃO DE FORMA

LUIS PAULO DA SILVA BARRA

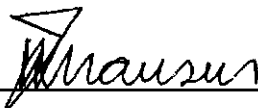
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS  
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE  
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS  
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS  
EM ENGENHARIA CIVIL.

APROVADA POR :



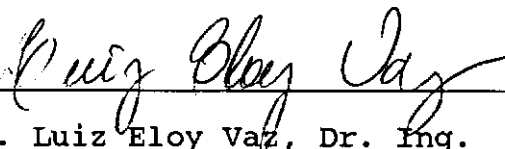
---

Prof. José Claudio de Faria Telles, Ph. D.  
( Presidente )



---

Prof. Webe João Mansur, Ph. D.



---

Prof. Luiz Eloy Vaz, Dr. Ing.

RIO DE JANEIRO - RJ - BRASIL

SETEMBRO DE 1990

BARRA, LUIS PAULO DA SILVA

Cálculo de Sensibilidades - Uma aplicação do Método  
dos Elementos de Contorno à otimização de forma.

[ Rio de Janeiro ] 1990

IX, 125p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc.,

Engenharia Civil, 1990)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro , COPPE

1. Elementos de Contorno

2. Otimização de Forma

I. COPPE/UFRJ

II.Título (série).

## AGRADECIMENTOS

A princípio pensei em fazer apenas um agradecimento de maneira geral a todas as pessoas que me ajudaram, pois só assim não esqueceria ninguém. Entretanto, percebi que desta maneira iria deixar de enfatizar a importância especial que outras tiveram. Sendo assim, mesmo correndo o risco de esquecer pessoas igualmente importantes, resolvi agradecer desta forma.

Primeiramente gostaria de agradecer a meus pais pelo apoio que sempre me deram e aos meus irmãos e minha cunhada que talvez não saibam o quanto me ajudaram neste caminho.

Agradeço também aos professores da COPPE de maneira geral e especialmente ao meu orientador, Telles, pela orientação e estímulo em momentos importantes, ao Prof. Webe pela ajuda teórica em algumas ocasiões e pelo constante exemplo de esperança e otimismo e ao Prof. Ronaldo principalmente pelas conversas informais.

A todos os companheiros de jornada, que tornaram esta caminhada menos árdua, e com destaque àqueles que estiveram mais próximos em algumas fases: Moacir, Marcílio, Zacarias, Rafael, Gray e Nathalie.

Aos amigos Marcos (Bac), Carlos Alberto e Tilio que me acompanham de outras estradas e que me incentivaram desde o

início, juntamente com o Prof. Albino, a percorrer esta trilha.

Finalmente, gostaria de agradecer a todos que, principalmente através de discussões, incentivando ou não, me ajudaram a estar convicto hoje de que até aqui valeu.

RESUMO DA TESE APRESENTADA À COPPE/UFRJ COMO PARTE DOS  
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM  
CIÊNCIAS ( M. Sc. )

CÁLCULO DE SENSIBILIDADES - UMA APLICAÇÃO DO  
MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO À OTIMIZAÇÃO DE FORMA

LUIS PAULO DA SILVA BARRA

SETEMBRO DE 1990

ORIENTADOR : JOSÉ CLAUDIO DE FARIA TELLES

PROGRAMA : ENGENHARIA CIVIL

Este trabalho tem como objetivo o desenvolvimento e a  
implementação do cálculo de sensibilidades à mudança de  
forma com a aplicação do Método dos Elementos de Contorno  
(M.E.C.) e a verificação de sua aplicação à otimização de  
forma.

É desenvolvido um método de cálculo das sensibilidades em que é derivada a equação fundamental do M.E.C. já discretizada. As sensibilidades das forças de superfície e deslocamentos no contorno são as novas incógnitas. Estas são obtidas através da resolução de um sistema de equações lineares que apresenta a mesma matriz de coeficientes do problema analisado pelo M.E.C.. Porém, para cada parâmetro em relação ao qual se deseja calcular as sensibilidades é obtido um novo termo independente. Com estes resultados conhecidos podem ser calculadas também as sensibilidades das tensões.

As implementações efetuadas utilizam o elemento constante no caso do problema de torção de barras prismáticas e o elemento linear para a elasticidade plana. Neste último caso foram desenvolvidas e implementadas técnicas para a análise de sensibilidades de estruturas simétricas e de regiões infinitas, sendo que também é possível a análise de estruturas em que as sensibilidades das incógnitas prescritas não são nulas.

Através de exemplos, verifica-se a convergência e a precisão do método e depois de ter se adotado um algoritmo de otimização, verifica-se também a aplicabilidade deste método à otimização de forma.

ABSTRACT OF THESIS PRESENTED TO COPPE/UFRJ AS PARTIAL  
FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER OF  
SCIENCE ( Ms. C. )

SENSIBILITY ANALYSIS - AN APPLICATION OF THE  
BOUNDARY ELEMENT METHOD TO SHAPE OPTIMIZATION

LUIS PAULO DA SILVA BARRA

SEPTEMBER OF 1990

THESIS SUPERVISOR : JOSÉ CLAUDIO DE FARIA TELLES

DEPARTAMENT : CIVIL ENGINEERING

This work aims at the development of shape sensitivity analysis with the application of the Boundary Element Method (B.E.M.) and its use in the shape design optimization.

A shape sensitivity procedure is developed in which the standard discretized version of the boundary integral equation is differentiated. The sensitivities of the surface tractions and displacements are the new unknowns. They are computed by the solution of a system of linear equations that presents the same coefficient matrix of the original B.E.M. problem. The sensitivities for each design parameter are computed after the formation of the respective new right-hand-side term. With these results the stress sensitivities can also be calculated.

The implementation uses constant elements in the case of torsion of prismatic bars and linear ones for plane elasticity. In the latter, special techniques for shape sensitivity analysis of symmetric structures and infinite regions were developed. It is also possible to analyse structures where the sensitivities of the prescribed unknowns are not null.

In a series of examples the convergence and precision of the method is verified. In addition, the applicability of the method is also tested through the adoption of a simple optimization algorithm.



ÍNDICE

<u>CAPÍTULO I</u>	: INTRODUÇÃO .....	1
<u>CAPÍTULO II</u>	: CÁLCULO DA SENSIBILIDADE À MUDANÇA DE FORMA PARA O PROBLEMA DE TORÇÃO	
II.1 -	Introdução .....	6
II.2 -	Teoria de torção de barras prismáticas .....	7
II.3 -	Implementação do M.E.C. para problemas de potencial .....	16
II.4 -	Cálculo da sensibilidade pelo método da derivação implícita .....	28
II.5 -	Implementação do cálculo da sensibilidade .....	38
II.6 -	Expressões para o cálculo da sensibilidade da Rigidez Torsional e da Área da seção transversal .....	47
<u>CAPÍTULO III</u>	: CÁLCULO DA SENSIBILIDADE À MUDANÇA DE FORMA PARA ELASTICIDADE PLANA	
III.1 -	Introdução .....	51
III.2 -	Implementação do M.E.C. para a elasticidade plana .....	52
III.3 -	Expressões para o cálculo da sensibilidade .....	68
III.4 -	Sensibilidades da 'Compliance' e da Tensão de Von Mises no Contorno .....	71

**CAPÍTULO IV : O ALGORÍTMO DE OTIMIZAÇÃO**

IV.1 - Introdução .....	74
IV.2 - Conceitos Básicos .....	74
IV.3 - Implementação .....	77

**CAPÍTULO V : APLICAÇÕES**

V.1 - Introdução .....	87
V.2 - Furo elíptico no meio infinito tracionado ...	87
V.3 - Torção de barra prismática .....	99
V.4 - Chapa tracionada com furo .....	104
V.5 - Filete tracionado .....	108

**CAPÍTULO VI : CONCLUSÕES .....** 114**REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....** 117**APÊNDICE A : EXPRESSÕES DA ELASTICIDADE LINEAR .....** 121**APÊNDICE B : SOLUÇÃO ANALÍTICA DO PROBLEMA DO FURO  
ELÍPTICO NO MEIO INFINITO .....** 123

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

Faz algum tempo que vários métodos numéricos vêm sendo usados para solucionar as equações diferenciais que regem uma grande variedade de problemas de engenharia. Com o desenvolvimento destes métodos e dos computadores pode-se obter mais rapidamente respostas cada vez mais precisas para os problemas analisados, o que é de grande importância para o aprimoramento das técnicas de projeto.

Paralelamente, outro grande impulso para a melhoria da qualidade dos projetos vem sendo dado pelo desenvolvimento de técnicas de otimização. Com os novos computadores diminuindo o tempo e o custo da análise, estas técnicas podem ser efetivamente utilizadas. Elas são formas metódicas de procura do ótimo que tornam a melhoria dos projetos menos dependente da experiência e da intuição do projetista, sem contudo as substituir.

Tais técnicas podem ser definidas de forma resumida dizendo-se que procuram o ponto extremo (mínimo ou máximo) de uma função de várias variáveis, chamada Função Objetivo. Estas variáveis estão sujeitas a limitações que são expressas por igualdades e/ou desigualdades envolvendo outras funções destas mesmas variáveis, chamadas Funções Restrição. As técnicas que tratam deste tipo de problema quando tanto as funções Restrição quanto a Função Objetivo

são lineares são ditas de Programação Linear. A otimização estrutural normalmente não se depara com este tipo de problema , portanto são usadas as chamadas técnicas de Programação Matemática, que tratam de funções não-lineares. Os algoritmos utilizados nestas técnicas podem ser classificados quanto ao tipo de informação de que se utilizam. São ditos de ordem zero se usam apenas a avaliação das próprias funções, de primeira ordem quando se utilizam dos gradientes ou primeiras derivadas e são classificados como de segunda ordem quando levam em conta as segundas derivadas das funções envolvidas.

Dentro da otimização estrutural surge um tipo de problema conhecido como Otimização de Forma que consiste em se extremizar uma função objetivo variando-se a forma do contorno da estrutura. Isto é, as variáveis do processo de otimização são parâmetros que controlam a forma desta estrutura ou componente estrutural. Nesta classe de problemas, tipicamente não-linear, são usados com frequência algoritmos de primeira ordem. Neste caso as primeiras derivadas das funções envolvidas são conhecidas como sensibilidades à mudança de forma ou simplesmente sensibilidades.

Na otimização de forma o Método dos Elementos Finitos (M.E.F.) foi o método de análise inicialmente utilizado por ser um método mais antigo e mais amplamente difundido. O cálculo das sensibilidades se desenvolveu, então, sob dois enfoques. No primeiro é usado um modelo já discretizado para

calcular as sensibilidades. Dentro deste enfoque tem-se três métodos para se desenvolver esta análise: por diferenças finitas, semi-analítico e analítico. No método das diferenças finitas as sensibilidades são aproximadas utilizando-se a análise da estrutura original e desta estrutura alterada por uma perturbação. No semi-analítico as derivadas das matrizes de rigidez são calculadas utilizando-se um esquema de diferenças finitas e no analítico as derivadas das matrizes de rigidez são calculadas analiticamente. O outro enfoque parte da utilização de um modelo contínuo, usando o conceito de derivada material. Neste caso são obtidas expressões para as sensibilidades como integrais cujos integrandos envolvem quantidades tais como deslocamentos, tensões, deformações, e mudanças de forma.

Mais recentemente o Método dos Elementos de Contorno (M.E.C.) começou a ser aplicado à otimização de forma. Nesta aplicação o M.E.C. apresenta grande vantagem sobre o M.E.F. pois os remodelamentos da malha ao longo do processo de otimização são imediatos e conseqüentemente menos custosos. De uma maneira geral tem-se que tanto o M.E.F. quanto o M.E.C. podem ser implementados nas formas: discreto-discreto (D-D) e os contínuo-discreto (C-D) como classificados por CHOI K.K. e TWU S.L. em [1]. Os do tipo (D-D) obtêm uma derivada exata (no caso do enfoque analítico) de um modelo aproximado enquanto que os do tipo (C-D) obtêm uma derivada aproximada do modelo exato.

Podem ser citados os trabalhos de KUMAR, LEE e GERMAN [2] e YANG e BOTKIN [3] que usando o M.E.F. desenvolvem respectivamente métodos (C-D) e (D-D). Igualmente, usando o M.E.C. , podem ser citados os trabalhos de DEFOURNY [4], KANE [5], KANE, SAIGAL [6], SAIGAL, AITHAL e KANE [7],[8] que desenvolvem métodos (D-D) e SOARES e CHOI [9], BARONE e YANG [10], ZHAO e ADEY [11] e CHOI e KWAK [12] como exemplos de desenvolvimento de métodos (C-D).

O presente trabalho apresenta um método do tipo (D-D) com a utilização do M.E.C., também conhecido como Método da Derivação Implícita.

O trabalho está dividido em outros 5 capítulos:

No Capítulo II é apresentada resumidamente a teoria de torção de barras prismáticas, aplicando o M.E.C. para este problema e é desenvolvido o método de cálculo das sensibilidades que é implementado para o problema em questão.

No Capítulo III o M.E.C. é resumidamente apresentado para a elasticidade plana e é aplicado o método desenvolvido no capítulo anterior para este tipo de problema.

No Capítulo IV é introduzido um algoritmo de otimização que é utilizado com o método desenvolvido.

No Capítulo V são apresentados alguns exemplos que atestam a convergência, precisão e aplicabilidade do método à otimização de forma .

Por fim, o Capítulo VI contém as conclusões do trabalho.

CAPÍTULO II  
CÁLCULO DA SENSIBILIDADE À MUDANÇA DE FORMA  
PARA O PROBLEMA DE TORÇÃO

II.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo é apresentada resumidamente a teoria da torção de barras prismáticas de Saint-Venant, aplicada a materiais linearmente elásticos. Mostra-se, então que este problema se resume à resolução de uma equação de Poisson da teoria de potencial. Mostra-se também uma expressão para a rigidez torsional como uma integral de contorno.

A seguir é desenvolvida, de forma resumida, uma formulação direta do Método dos Elementos de Contorno para os problemas de potencial que é implementada para o elemento de geometria linear e interpolação das incógnitas constante.

São desenvolvidas as expressões gerais que vão ser usadas no cálculo das sensibilidades das incógnitas do problema. Estas expressões são, então, especificadas para o elemento em questão e aplicadas na implementação de um processo numérico para a determinação das sensibilidades que como já foi mencionado é um sub-problema da otimização de forma.

Por fim, são desenvolvidas expressões para as



sensibilidades da rigidez torsional e da área da seção transversal que em uma aplicação mostrada no capítulo V são utilizadas como funções objetivo e restrição.

## II.2 - TEORIA DA TORÇÃO DE BARRAS PRISMÁTICAS

A teoria da torção de barras prismáticas, também conhecida como teoria da torção de Saint-Venant, trata do problema de uma barra constituída de um material linearmente elástico submetida a torção.

Nesta abordagem é utilizado um método semi-inverso, isto é, são adotadas hipóteses para o comportamento das tensões e/ou deslocamentos e é obtida uma solução para o problema. Se esta solução satisfaz as equações de equilíbrio, compatibilidade, relações tensão-deformação e condições de contorno então ela é realmente a solução do problema. Uma exposição mais detalhada sobre este assunto pode ser encontrada em SOKOLNIKOFF [13] e MENDELSON [14].

Para maior compacidade utiliza-se aqui a notação Cartesiana Indicial para a representação das expressões. Nesta notação os eixos cartesianos são denotados por  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  e os vetores unitários em suas respectivas direções são  $\underline{e}_1$ ,  $\underline{e}_2$  e  $\underline{e}_3$ . É adotada a regra da soma, onde um índice repetido em um mesmo termo é dito mudo e implica um somatório. Nesta notação convencionou-se, também que a

vírgula é usada como representação de derivada espacial:

$$x_{,1} \cdot x_{,1} = x_1 \cdot x_1 + x_2 \cdot x_2 + x_3 \cdot x_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$u_{,1} \cdot n_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot n_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot n_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3} \cdot n_3$$

(II.2.1)

Outro símbolo usado nesta representação é o Delta de Kronecker,  $\delta_{ij}$ , sendo dado por :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (\text{II.2.2})$$

O problema aqui estudado consiste em uma barra de seção transversal constante em que é aplicado um momento de torção na extremidade  $x_3 = \bar{x}_3$  e tem seus deslocamentos nas direções  $x_1$  e  $x_2$  prescritos nulos na seção  $x_3 = 0$ , como mostra a Figura (II.2.1).

É adotada a hipótese de que o ângulo de rotação  $\psi$  de uma seção é proporcional à distancia desta à origem, isto é:

$$\psi = \alpha \cdot x_3 \quad (\text{II.2.3})$$

Desde que  $\psi$  seja suficientemente pequeno, a hipótese

formulada acima equivale a supor que os deslocamentos nas direções  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  são dados respectivamente por:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\alpha \cdot x_2 \cdot x_3 \\ u_2 &= \alpha \cdot x_1 \cdot x_3 \\ u_3 &= u_3(x_1, x_2, \alpha) \end{aligned} \quad (\text{II.2.4})$$

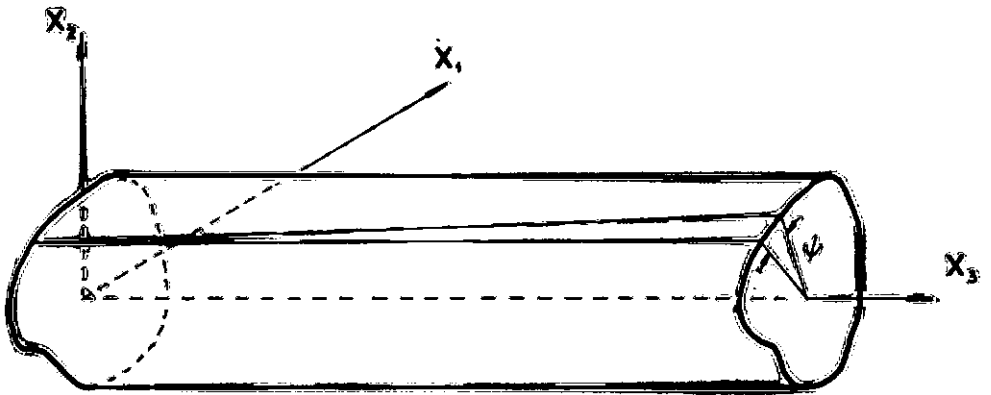


Figura (II.2.1) - Barra prismática sujeita à torção

Substituindo as equações (II.2.4) nas relações de deformação-deslocamento da elasticidade (A.4), obtem-se:

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = \epsilon_{12} = 0$$

$$\epsilon_{13} = \frac{1}{2} \cdot (-\alpha \cdot x_2 + u_{3,1}) \quad (\text{II.2.5})$$

$$\epsilon_{23} = \frac{1}{2} \cdot (\alpha \cdot x_1 + u_{3,2})$$

Substituindo as equações (II.2.5) nas equações de compatibilidade de deformações (A.5), observa-se que as únicas que não são identicamente satisfeitas são:

$$(\epsilon_{23,1} - \epsilon_{13,2})_{,1} = 0 \quad (\text{II.2.6})$$

$$(\epsilon_{23,1} - \epsilon_{13,2})_{,2} = 0$$

Logo a expressão entre parentêses repetida nas equações (II.2.6) deve ser constante. Substituindo a eq. (II.2.5) nesta expressão chega-se à equação de compatibilidade do problema:

$$\epsilon_{23,1} - \epsilon_{13,2} = \alpha \quad (\text{II.2.7})$$

Tendo em vista as relações tensão-deformação (A.6) e as equações (II.2.5) observa-se que as únicas tensões não nulas são:

$$\tau_{13} = 2 G \varepsilon_{13} \quad (\text{II.2.8})$$

$$\tau_{23} = 2 G \varepsilon_{23}$$

Logo as equações de equilíbrio (A.1) se resumem a:

$$\tau_{13',1} + \tau_{23',2} = 0 \quad (\text{II.2.9})$$

Exprimindo as deformações a partir de (II.2.8) e substituindo em (II.2.7), obtém-se a equação de compatibilidade em termos das tensões:

$$\tau_{23',1} - \tau_{13',2} = 2 G \alpha \quad (\text{II.2.10})$$

Introduz-se, então, uma função de tensões  $\phi$ , de forma que:

$$\tau_{13} = \alpha G \phi_{,2} \quad (\text{II.2.11})$$

$$\tau_{23} = -\alpha G \phi_{,1}$$

As equações de equilíbrio (II.2.9) são desta forma identicamente satisfeitas e a equação de compatibilidade (II.2.10) se torna:

$$\phi_{,11} + \phi_{,22} \equiv \phi_{,11} = -2 \quad (\text{II.2.12})$$

Como é adotada a hipótese de que a superfície lateral da barra não sofre a atuação de forças, as condições de contorno do problema são obtidas de (A.2) e se resumem a:

$$l_1 \cdot \tau_{13} + l_2 \cdot \tau_{23} = 0 \quad (\text{II.2.13})$$

Onde  $l_1$  e  $l_2$  são os cossenos diretores da normal a superfície lateral da seção transversal, que podem ser expressos de acordo com a Figura (II.2.2) como:

$$l_1 = \cos(\tilde{n}, x_1) = \frac{dx_2}{ds} \quad (\text{II.2.14})$$

$$l_2 = \cos(\tilde{n}, x_2) = -\frac{dx_1}{ds}$$

Substituindo as eqs. (II.2.11) e (II.2.14) na eq. (II.2.13) vem:

$$\alpha G \phi_{,1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial s} + \alpha G \phi_{,2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial s} \equiv \alpha G \frac{\partial \phi}{\partial s} = 0$$

$$(\text{II.2.15})$$

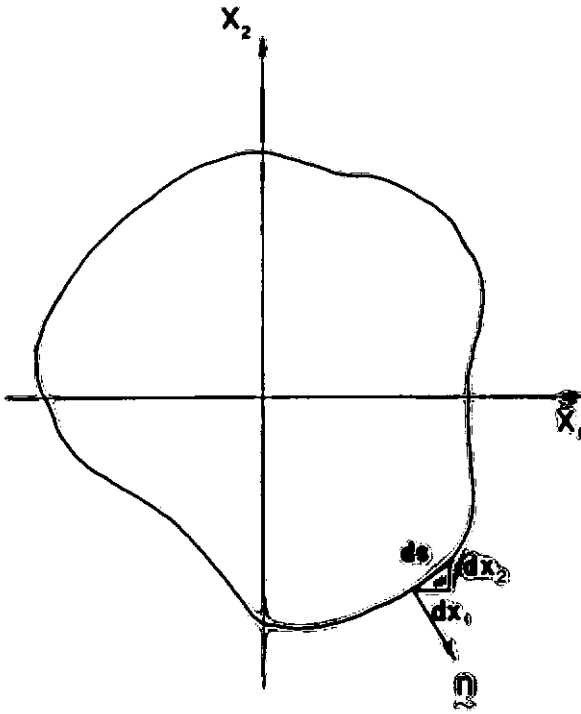


Figura (II.2.2) - Vetor normal ao contorno da seção transversal.

Isto é, a função de tensões  $\phi$  é constante ao longo de todo o contorno da seção. Quando se trata de barras sólidas, ou seja, barras em que o contorno da seção transversal é definido por uma única linha fechada, esta constante pode ser escolhida arbitrariamente. Por conveniência anula-se esta constante, tornando a condição

de contorno:

$$\phi = 0 \quad \text{no contorno} \quad (\text{II.2.16})$$

Pode-se agora calcular as forças resultantes e momentos atuantes em uma seção qualquer.

Para a força resultante na direção  $x$ , tem-se:

$$Q_1 = \int \int \tau_{13} \, dx_1 dx_2 = \alpha G \int \int \phi_{,2} \, dx_1 dx_2 \quad (\text{II.2.17})$$

Onde o domínio da integral dupla é a área da seção transversal e integrando primeiramente em  $x_2$ , tem-se:

$$Q_1 = \alpha G \int ( \phi(x,A) - \phi(x,B) ) \, dx_1 = 0 \quad (\text{II.2.18})$$

Onde  $\phi(x,A)$  e  $\phi(x,B)$  são os valores de  $\phi$  nos pontos de contorno de coordenada  $x_1$ , que são nulos devido à condição de contorno (II.2.16). Analogamente se chega a conclusão que a força resultante na direção  $x_2$  também se anula.

O momento de torção atuante em uma seção será dado por:



$$\begin{aligned}
 M &= \int ( \tau_{23} \cdot x_1 - \tau_{13} \cdot x_2 ) dx_1 dx_2 \\
 &= -\alpha G \int ( \phi_{,1} \cdot x_1 + \phi_{,2} \cdot x_2 ) dx_1 dx_2
 \end{aligned}
 \tag{II.2.19}$$

Se uma solução da equação (II.2.12), sujeita às condições de contorno (II.2.16) é obtida, as tensões e deformações podem ser calculadas usando (II.2.11) e (II.2.8) e as equações de equilíbrio e compatibilidade são automaticamente satisfeitas. Portanto a hipótese adotada, (II.2.3) ou (II.2.4) , conduz a resposta correta do problema.

Define-se então:

$$D = -G \int ( \phi_{,1} \cdot x_1 + \phi_{,2} \cdot x_2 ) dx_1 dx_2
 \tag{II.2.20}$$

Substituindo (II.2.20) em (II.2.19) vem:

$$M = D \alpha
 \tag{II.2.21}$$

A expressão (II.2.21) mostra que o momento de torção  $M$  é proporcional ao ângulo de rotação por unidade de comprimento  $\alpha$  . Esta constante de proporcionalidade  $D$ , que depende apenas da forma da seção e do módulo de

elasticidade transversal  $G$  , permite avaliar a rigidez de uma barra submetida a torção e é então chamada de rigidez torsional da barra.

### II.3 - IMPLEMENTAÇÃO DO M.E.C. PARA PROBLEMAS DE POTENCIAL

Trata-se da obtenção de uma solução aproximada pelo Método dos Elementos de Contorno para o problema definido na região  $\Omega$  do espaço bidimensional limitada por um contorno  $\Gamma$  , governado pela equação de Poisson:

$$\nabla^2 u \equiv u_{,ii} = -b \quad (\text{II.3.1})$$

Onde  $u$  é função escalar da posição e  $b$  será tomado como constante.

A dedução da equação integral que dá origem ao M.E.C. para problemas de Potencial pode ser encontrada de forma detalhada em vários textos como BREBBIA [15], BREBBIA, TELLES e WROBEL [16] e AZEVEDO[17]. Neste trabalho parte-se da referida equação que é escrita abaixo:

$$\begin{aligned} u(\xi) + \int_{\Gamma} p^*(\xi, x) \cdot u(x) \, d\Gamma(x) &= \\ &= \int_{\Gamma} u^*(\xi, x) \cdot p(x) \, d\Gamma(x) + \int_{\Omega} u^*(\xi, x) \cdot b(x) \, d\Omega(x) \end{aligned}$$

(II.3.2)

Que levada ao contorno fornece:

$$\begin{aligned}
 c(\xi) \cdot u(\xi) + \int_{\Gamma} p^*(\xi, x) \cdot u(x) \, d\Gamma(x) &= \\
 = \int_{\Gamma} u^*(\xi, x) \cdot p(x) \, d\Gamma(x) + \int_{\Omega} u^*(\xi, x) \cdot b(x) \, d\Omega(x)
 \end{aligned}$$

(II.3.3)

Onde:

$u^*(\xi, x)$  : é a solução conhecida e avaliada no ponto  $x$  da equação (II.3.1) com o segundo membro dado pela função Delta de Dirac [16] aplicada no ponto  $\xi$ . Para problemas de condução de calor  $u^*$  representa a distribuição de temperatura em um meio infinito quando se aplica uma fonte unitária concentrada de calor no ponto  $\xi$ . Chama-se, então, este ponto, de coordenadas  $\xi_1$ , de ponto fonte. Analogamente chama-se o ponto  $x$ , de coordenadas  $x_1$  de ponto campo.

$u(\xi)$ ,  $u(x)$  : são respectivamente os valores da função  $u$  nos pontos  $\xi$  e  $x$ .

$p(x)$  : representa o valor da função  $p$ , análoga à densidade de fluxo

térmico em problemas de condução de calor, avaliada no ponto campo e definida como a derivada direcional de  $u$  em relação à normal externa ao contorno neste ponto.

$$p = \frac{\partial u}{\partial \tilde{n}} \equiv u_{,i} n_i \quad (\text{II.3.4})$$

$p^*(\xi, x)$  : é uma função conhecida dos pontos  $\xi$  e  $x$ , dita fluxo fundamental definida analogamente a  $p$  como:

$$p^* = \frac{\partial u^*}{\partial \tilde{n}} \equiv u^*_{,i} n_i \quad (\text{II.3.5})$$

$c(\xi)$  : é uma função da forma do contorno definida como a seguir:

$$c(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{se } \xi \notin (\Omega \cup \Gamma) \\ \beta/2\pi & \text{se } \xi \in \Gamma \\ 1 & \text{se } \xi \in \Omega \end{cases}$$

(II.3.6)

onde  $\beta$  é o ângulo interno formado pelas tangentes à direita e à esquerda do ponto  $\xi$  do contorno, Figura (II.3.1). Vale ressaltar que quando o contorno é suave  $\beta = \pi$  e portanto  $c(\xi) = 0.5$ .

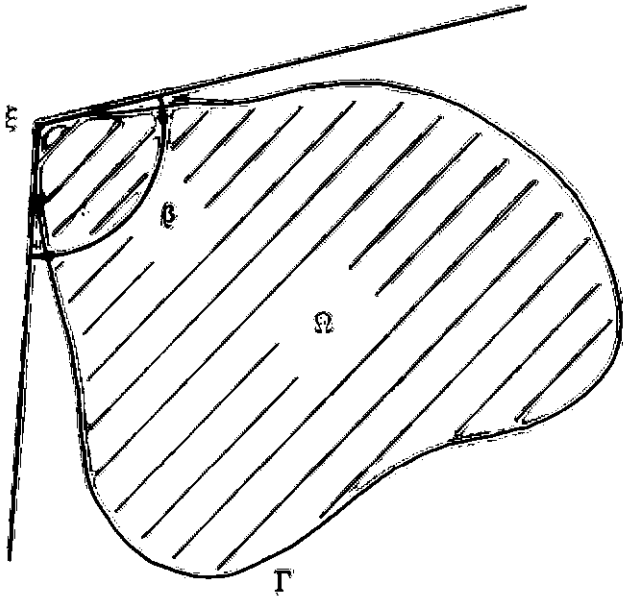


Figura (II.3.1) - Determinação de  $c(\xi)$

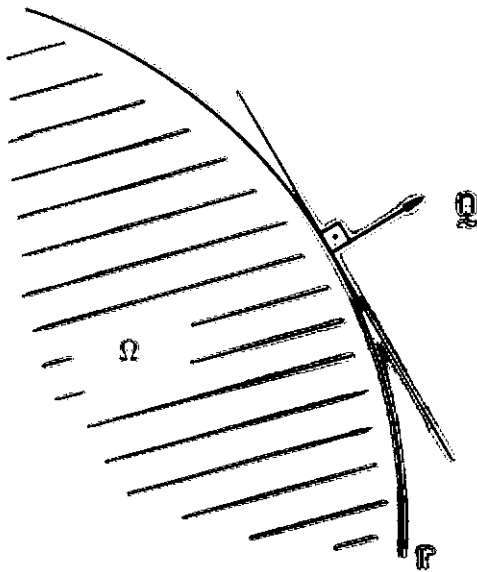


Figura (II.3.2) - Vetor normal ao contorno

As expressões das soluções fundamentais são dadas por:

$$u^* = -\frac{1}{2\pi} \ln(r) \quad ; \quad p^* = -\frac{1}{2\pi} r_{,i} n_i \quad (\text{II.3.7})$$

onde:

$$r = (r_i r_i)^{1/2} \quad ; \quad r_i = (x_i - \xi_i) \quad (\text{II.3.8})$$

E portanto:

$$r_{,i} = \frac{r_i}{r} \quad (\text{II.3.9})$$

$n_i$  são as componentes do vetor  $\underline{n}$  unitário normal ao contorno  $\Gamma$ , como na Figura (II.3.2), sendo dadas por:

$$n_i = \cos(\underline{n}, e_i) \quad (\text{II.3.10})$$

Para a obtenção de soluções aproximadas da equação divide-se o contorno em  $N_e$  partes ou elementos. Supõe-se que cada elemento de contorno tem sua geometria definida por  $NG$  nós e funções de forma, bem como, tem a variação de  $u$  e  $p$  determinada por  $NF$  nós funcionais e funções de interpolação. Estas funções de interpolação, geométrica e funcional, são definidas em relação à uma variável local e adimensional  $\eta$ , podendo-se escrever para um elemento qualquer:

$$x_{1(j)}(\eta) = \sum_{k=1}^{NG} x_{1(j)}^k \cdot \phi_k(\eta) = \underline{x}_{(j)} \cdot \underline{M}$$

$$u_{(j)}(\eta) = \sum_{k=1}^{NF} u_{(j)}^k \cdot \psi_k(\eta) = \underline{u}_{(j)} \cdot \underline{N}$$

$$p_{(j)}(\eta) = \sum_{k=1}^{NF} p_{(j)}^k \cdot \psi_k(\eta) = \underline{p}_{(j)} \cdot \underline{N}$$

(II.3.11)

Onde:

$x_{1(j)}(\eta)$  : são os valores das coordenadas  $x_1$  em um ponto genérico do elemento  $j$ , definido por  $\eta$ .

$x_{1(j)}^k$  : são os valores das coordenadas nodais  $x_1$  do nó geométrico  $k$  no elemento  $j$ .

$u_{(j)}(\eta)$ ,  $p_{(j)}(\eta)$ : são os valores de  $u$  e  $p$  em um ponto genérico do elemento  $j$  definido por  $\eta$ .

$u_{(j)}^k$ ,  $p_{(j)}^k$  : são valores nodais de  $u$  e  $p$  do nó funcional  $k$  no elemento  $j$ .

$\psi_k(\eta)$  e  $\phi_k(\eta)$ : são respectivamente as funções de interpolação funcionais e geométricas.

Pode-se então avaliar a equação (II.3.3) de forma aproximada para cada nó funcional  $\xi_i$  do contorno como mostra a expressão abaixo onde  $B_i$  representa a integral de domínio que só contém termos conhecidos.

$$\begin{aligned} C(\xi_i) u(\xi_i) + \sum_{j=1}^{Ne} u_{(j)} \int_{\eta} p^* |J| N d\eta &= \\ &= \sum_{j=1}^{Ne} p_{(j)} \int_{\eta} u^* |J| N d\eta + B_i \end{aligned}$$

(II.3.12)

Obtém-se assim N equações, sendo N o número total de nós funcionais, que podem ser escritas matricialmente com  $\underline{u}$  e  $\underline{p}$  representando o potencial e a densidade de fluxo nos nós funcionais do contorno, como:

$$[ \underline{C} + \underline{H} ] \cdot \underline{u} = \underline{G} \cdot \underline{p} + \underline{B} \quad (\text{II.3.13})$$

Ou acoplando a matriz diagonal  $\underline{C}$  à matriz  $\underline{H}$  :

$$\underline{H} \cdot \underline{u} = \underline{G} \cdot \underline{p} + \underline{B} \quad (\text{II.3.14})$$

As condições de contorno do problema são então introduzidas pela atribuição de valores a  $u$  ou a  $p$  em cada nó funcional. Restam, então, N incógnitas. O sistema de equações lineares assim formado pode ser reordenado de forma que se armazenem as incógnitas no vetor  $\underline{x}$  como disposto abaixo:



$$\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{d} \quad (\text{II.3.15})$$

Desta forma, na matriz  $\underset{\sim}{A}$  são armazenadas as colunas das matrizes respectivas as incógnitas e no vetor  $\underset{\sim}{d}$  é armazenada a soma do vetor  $\underset{\sim}{B}$  ao produto dos valores prescritos de  $\underset{\sim}{u}$  e  $\underset{\sim}{p}$  pelas colunas das matrizes correspondentes.

Resolvendo-se este sistema de equações obtém-se o valor das incógnitas no contorno e pode-se usar a equação (II.3.2) ou equação resultante da derivação de (II.3.2) discretizada para se obter valores de  $u$  ou suas derivadas direcionais  $u_{,x}$  e  $u_{,y}$  qualquer parte do domínio.

Para a resolução aproximada do problema de potencial é adotado neste trabalho o elemento constante. Este elemento interpola  $u$  e  $p$  de forma constante e a geometria de forma linear conforme as Figuras (II.3.3) e (II.3.4).

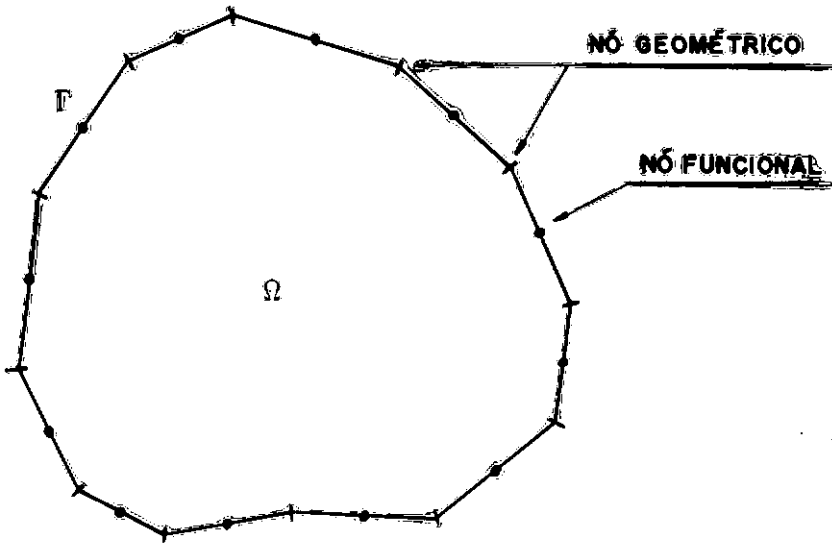


Figura (II.3.3) - Contorno discretizado com elemento constante.

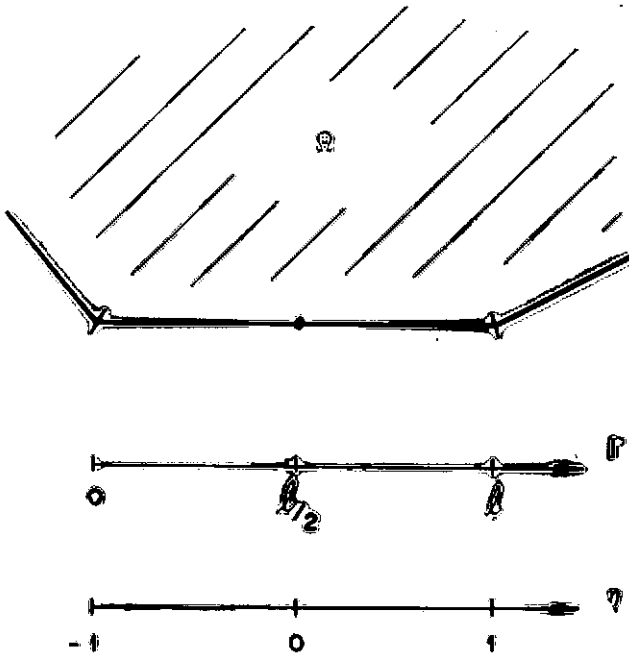


Figura (II.3.4) - Elemento constante.

Pode-se então escrever para um elemento  $j$ , qualquer:

$$u_{(j)}(\eta) = u_{(j)}^1 = u_j$$

$$p_{(j)}(\eta) = p_{(j)}^1 = p_j$$

$$x_{1(j)}(\eta) = \phi_1(\eta) \cdot x_1^1 + \phi_2(\eta) \cdot x_1^2$$

(II.3.16)

Onde:

$$\phi_1(\eta) = \frac{1}{2} (1 - \eta)$$

(II.3.17)

$$\phi_2(\eta) = \frac{1}{2} (1 + \eta)$$

Sendo o sistema adimensional local definido por:

$$\Gamma_{(j)} = l_{(j)} \cdot \frac{(\eta + 1)}{2} \quad (\text{II.3.18})$$

e portanto, indicando o jacobiano da transformação como  $|J|$ , vem:

$$d\Gamma_{(j)} = |J| d\eta = \frac{l_{(j)}}{2} d\eta$$

$$\therefore |J| = \frac{l_{(j)}}{2}$$

(II.3.19)

A equação (II.3.12) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u(\xi_i) + \sum_{j=1}^{Ne} u_{(j)} \int_{\eta} \frac{1}{2} p^* l_{(j)} d\eta &= \\ &= \sum_{j=1}^{Ne} p_{(j)} \int_{\eta} \frac{1}{2} u^* l_{(j)} d\eta + B_i \end{aligned}$$

(II.3.20)

Para o cálculo das integrais de domínio  $B_i$  adota-se um dos tratamentos descritos por BREBBIA, TELLES e WROBEL [16] que consiste em transformar a integral de domínio em uma integral sobre o contorno. Como no problema estudado (equação de Poisson) o segundo membro é constante tal transformação se torna simples sendo dada por:

$$B_i = b \int_{\Gamma} v_{,1}^* n_1 d\Gamma \quad (II.3.21)$$

Sendo  $v^*(\xi, x)$  dado por:

$$v^* = -\frac{r^2}{8\pi} \left( 1 - \ln(r) \right) \quad (II.3.22)$$

E portanto:

$$\begin{aligned}
 v_{,1}^* &= -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{2} - \ln(r) \right) \cdot r_{,1} \\
 &= -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{4\pi} + u^* \right) \cdot r_{,1}
 \end{aligned}$$

(II.3.23)

Logo, na forma discretizada tem-se:

$$B_{\tilde{i}} = \sum_{j=1}^{N_e} b \int_{\eta} v_{,1}^* n_{,1} |J| d\eta$$

(II.3.24)

Para a avaliação das integrais da equação (II.3.19) que vão gerar os termos fora da diagonal das matrizes  $\underline{H}$  e  $\underline{G}$ , bem como os termos  $B_{\tilde{i}}$ , é utilizado o método de integração numérica de Gauss onde de forma genérica tem-se:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \cong \sum_{k=1}^{N_k} W_k \cdot f(x_k)$$

(II.3.25)

onde  $W_k$  é o peso associado à coordenada  $x_k$  e  $N_k$  é o número de pontos de integração de Gauss.

Nos termos das diagonais de  $\underline{G}$  e  $\underline{H}$  o nó fonte pertence ao domínio de integração e o integrando apresenta uma singularidade. Adota-se, então, a integração analítica uma vez que é facilmente obtida por:

$$G_{ii} = \frac{1}{2\pi} l_{(j)} \left\{ \ln \left( \frac{2}{l_{(j)}} \right) + 1 \right\}$$

e

$$\hat{H}_{ii} = 0$$

(II.3.26)

#### II.4 - CÁLCULO DA SENSIBILIDADE PELO MÉTODO DA DERIVAÇÃO IMPLÍCITA

Deseja-se inicialmente obter expressões para o cálculo de derivadas das incógnitas básicas do Método dos Elementos de Contorno,  $u$  e  $p$ , em relação à um parâmetro  $q$  que controla a forma da estrutura. Tais derivadas são também chamadas sensibilidades de  $u$  e  $p$  em relação à  $q$  e são representadas por  $\partial_q u$  e  $\partial_q p$ .

Estas sensibilidades serão usadas no cálculo de sensibilidades de outras funções que medem a performance da estrutura. Estas funções podem tomar lugar de função objetivo ou restrição em um problema de otimização de forma.

A idéia básica da abordagem analítica deste método é prover uma derivada "exata" da resposta da estrutura já discretizada. Esta idéia é motivada pelo fato de que o

processo de otimização ocorre, na realidade, na estrutura modelada. Isto é, são as respostas da estrutura já discretizada que são usadas para se medir a performance da estrutura. Vendo-se o problema de otimização desta forma, torna-se natural que as derivadas em relação à mudança de forma devam ser tomadas na estrutura já discretizada.

Examina-se uma estrutura já discretizada pelo M.E.C. em que sua forma, ou na maior parte dos casos parte dela, é função de  $q$ .

Toma-se como base a discretização genérica descrita como no ítem anterior e expressa matematicamente pelas equações (II.3.11) que são aqui repetidas.

$$x_{1(j)}(\eta) = \sum_{k=1}^{NG} x_{1(j)}^k \cdot \phi_k(\eta) = \tilde{x}_{(j)} \cdot \tilde{M}$$

$$u_{(j)}(\eta) = \sum_{k=1}^{NF} u_{(j)}^k \cdot \psi_k(\eta) = \tilde{u}_{(j)} \cdot \tilde{N}$$

$$p_{(j)}(\eta) = \sum_{k=1}^{NF} p_{(j)}^k \cdot \psi_k(\eta) = \tilde{p}_{(j)} \cdot \tilde{N}$$

(II.4.1)

Se é dado um incremento  $\Delta q$  ao parâmetro  $q$ , obtém-se uma nova forma. Supõe-se que as características da discretização não são alteradas, isto é, só são alteradas as posições dos nós e conseqüentemente o comprimento dos elementos adjacentes aos mesmos. Esta variação na geometria vai causar uma variação na resposta da estrutura, mesmo que

esta mudança na forma não acarrete uma alteração na solicitação a que a estrutura está submetida.

Esta mudança na forma da estrutura original não é causada pela atuação de nenhum fator físico real. Simplesmente admite-se que a estrutura tivesse esta nova forma antes de ser submetida à solicitação em questão.

Indicando as variáveis referentes a esta possível forma com o símbolo ' , tem-se:

$$x'_{1(j)}(\eta) = \sum_{k=1}^{NG} x'^k_{1(j)} \cdot \phi_k(\eta) = \tilde{x}'_{(j)} \cdot \tilde{M}$$

$$u'_{(j)}(\eta) = \sum_{k=1}^{NF} u'^k_{(j)} \cdot \psi_k(\eta) = \tilde{u}'_{(j)} \cdot \tilde{N}$$

$$p'_{(j)}(\eta) = \sum_{k=1}^{NF} p'^k_{(j)} \cdot \psi_k(\eta) = \tilde{p}'_{(j)} \cdot \tilde{N}$$

(II.4.2)

Define-se então a derivada de um valor nodal  $u^k_{(j)}$  em relação à  $q$  como:

$$\partial_q u^k_{(j)} = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{u'^k_{(j)} - u^k_{(j)}}{\Delta q} \quad (\text{II.4.3})$$

Analogamente para um ponto genérico de um elemento  $j$  :



$$\partial_{\mathbf{q}} u_{(j)}(\eta) = \lim_{\Delta \mathbf{q} \rightarrow 0} \frac{u'_{(j)}(\eta) - u_{(j)}(\eta)}{\Delta \mathbf{q}} \quad (\text{II.4.4})$$

De (II.4.1) e (II.4.2), reescreve-se (II.4.4) como:

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{q}} u_{(j)}(\eta) &= \lim_{\Delta \mathbf{q} \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta \mathbf{q}} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{NF} (u'_{(j)}{}^k - u_{(j)}^k) \cdot \psi_k(\eta) \right\} \\ &= \sum_{k=1}^{NF} \psi_k(\eta) \cdot \left\{ \lim_{\Delta \mathbf{q} \rightarrow 0} \frac{u'_{(j)}{}^k - u_{(j)}^k}{\Delta \mathbf{q}} \right\} \end{aligned} \quad (\text{II.4.5})$$

Substituindo (II.4.3) em (II.4.5) vem:

$$\partial_{\mathbf{q}} u_{(j)}(\eta) = \sum_{k=1}^{NF} \partial_{\mathbf{q}} u_{(j)}^k \cdot \psi_k(\eta) = \partial_{\mathbf{q}} \underline{u} \cdot \underline{N} \quad (\text{II.4.6})$$

Desenvolvendo-se analogamente para  $p$ , chega-se a:

$$\partial_{\mathbf{q}} p_{(j)}(\eta) = \sum_{k=1}^{NF} \partial_{\mathbf{q}} p_{(j)}^k \cdot \psi_k(\eta) = \partial_{\mathbf{q}} \underline{p} \cdot \underline{N} \quad (\text{II.4.7})$$

Tendo-se em vista as expressões (II.4.6) e (II.4.7), pode-se concluir que a derivada das incógnitas em relação

a um parâmetro  $q$  deve ser expressa com as mesmas funções de interpolação que as próprias incógnitas.

Derivando a equação fundamental do M.E.C. já discretizada, equação (II.3.12), tem-se:

$$\begin{aligned} \partial_q C(\xi_i) \cdot u(\xi_i) + C(\xi_i) \cdot \partial_q u(\xi_i) + \\ + \sum_{j=1}^{N^e} \int_{\eta} \partial_q \left( p^* \underline{u} \underline{N} |J| \right) d\eta = \\ = \sum_{j=1}^{N^e} \int_{\eta} \partial_q \left( u^* \underline{p} \underline{N} |J| \right) d\eta + \partial_q (B_i) \end{aligned}$$

(II.4.8)

Desenvolvendo os integrandos das integrais de (II.4.8) e usando (II.4.6) e (II.4.7) vem:

$$\begin{aligned} \partial_q \left( p^* \underline{u} \underline{N} |J| \right) = \underline{u} \underline{N} |J| \partial_q (p^*) + \underline{u} \underline{N} p^* \partial_q |J| + \\ + p^* |J| \partial_q (\underline{u}) \underline{N} \\ \partial_q \left( u^* \underline{p} \underline{N} |J| \right) = \underline{p} \underline{N} |J| \partial_q (u^*) + \underline{p} \underline{N} u^* \partial_q |J| + \\ + u^* |J| \partial_q (\underline{p}) \underline{N} \end{aligned}$$

(II.4.9)

Substituindo (II.4.9) em (II.4.8) e reordenando:

$$\begin{aligned}
& C(\xi) \partial_q u(\xi) + \sum_{j=1}^{N_e} \partial_q u \int_{\eta} p^* \underline{N} |J| d\eta + \partial_q C(\xi) u(\xi) + \\
& + \sum_{j=1}^{N_e} u \int_{\eta} ( |J| \partial_q p^* + p^* \partial_q |J| ) \underline{N} d\eta = \\
& = \sum_{j=1}^{N_e} \partial_q p \int_{\eta} u^* |J| \underline{N} d\eta + \\
& + \sum_{j=1}^{N_e} p \int_{\eta} ( |J| \partial_q u^* + u^* \partial_q |J| ) \underline{N} d\eta + \partial_q (B_i)
\end{aligned}
\tag{II.4.10}$$

Que pode ser escrito de forma matricial seguindo procedimento análogo ao desenvolvimento da equação (II.3.12) como:

$$\underline{H} \cdot \partial_q \underline{u} + \partial_q \underline{H} \cdot \underline{u} = \underline{G} \cdot \partial_q \underline{p} + \partial_q \underline{G} \cdot \underline{p} + \partial_q \underline{B}
\tag{II.4.11}$$

Admitindo-se que o problema original já tenha sido resolvido, isto é, que  $\underline{u}$  e  $\underline{p}$  são conhecidos, e que as derivadas dos valores prescritos no contorno são também prescritas, ve-se que as únicas incógnitas no sistema de equações (II.4.11) são as derivadas das incógnitas do problema original.

Adotando um procedimento de troca de colunas análogo ao desenvolvido no item anterior para a equação (II.3.14),

chega-se a:

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{A} \cdot \partial_{\underset{\sim}{q}} \underset{\sim}{X} &= \underset{\sim}{D} \cdot \partial_{\underset{\sim}{q}} \bar{\underset{\sim}{X}} + \partial_{\underset{\sim}{q}} \underset{\sim}{D} \cdot \bar{\underset{\sim}{X}} - \underset{\sim}{X} \cdot \partial_{\underset{\sim}{q}} \underset{\sim}{A} + \partial_{\underset{\sim}{q}} \underset{\sim}{B} \\ &= \partial_{\underset{\sim}{q}} (\underset{\sim}{d}) \end{aligned} \tag{II.4.12}$$

O sistema de equações (II.4.12) , fornece uma maneira de calcular as derivadas das incógnitas do problema desde que se obtenha as matrizes de influência derivadas  $\partial_{\underset{\sim}{q}} \underset{\sim}{H}$  e  $\partial_{\underset{\sim}{q}} \underset{\sim}{G}$  . Para que isto seja feito é preciso calcular as integrais da equação (II.4.9) que envolvem as quantidades  $\partial_{\underset{\sim}{q}} C$  ,  $\partial_{\underset{\sim}{q}} u^*$  ,  $\partial_{\underset{\sim}{q}} p^*$  ,  $\partial_{\underset{\sim}{q}} |J|$  e  $\partial_{\underset{\sim}{q}} B_i$  .

Como em geral um parâmetro  $q$  não afeta todo o contorno as matrizes  $\partial_{\underset{\sim}{q}} \underset{\sim}{G}$  e  $\partial_{\underset{\sim}{q}} \underset{\sim}{H}$  têm forma esparsa. Estas matrizes apresentam linhas não nulas que são somente aquelas correspondentes aos nós funcionais afetados pela variação  $\Delta q$  . As únicas colunas não nulas são as correspondentes aos nós funcionais dos elementos afetados.

Antes da implementação deste método, convém que as novas quantidades  $\partial_{\underset{\sim}{q}} u^*$  e  $\partial_{\underset{\sim}{q}} p^*$  , bem como  $\partial_{\underset{\sim}{q}} B_i$  , sejam desenvolvidas sem qualquer particularização com relação ao parâmetro  $q$  ou ao tipo de elemento. Em termos de derivadas de funções mais simples, tem-se então:

$$\partial_q u^*(\xi, x) = \frac{\partial u^*}{\partial x_1} \cdot \partial_q(x_1) + \frac{\partial u^*}{\partial \xi_1} \cdot \partial_q(\xi_1)$$

(II.4.13)

Mas também de (II.3.9):

$$\frac{\partial u^*}{\partial x_1} = \frac{\partial u^*}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_1}$$

(II.4.14)

$$\frac{\partial u^*}{\partial \xi_1} = \frac{\partial u^*}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial \xi_1}$$

Da definição de r (II.3.8) vem:

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{r_1}{r}$$

(II.4.15)

$$\frac{\partial r}{\partial \xi_1} = -\frac{r_1}{r}$$

De (II.3.7) e (II.4.13) a (II.4.15) vem:

$$\begin{aligned} \partial_q u^*(\xi, x) &= -\frac{1}{2\pi r^2} r_1 \partial_q(x_1) + \frac{1}{2\pi r^2} r_1 \partial_q(\xi_1) \\ &= -\frac{1}{2\pi r^2} r_1 \cdot \partial_q(x_1 - \xi_1) \\ &= -\frac{1}{2\pi r^2} r_1 \cdot \partial_q(r_1) \end{aligned}$$

(II.4.16)

Para a derivada de  $p^*$  tem-se:

$$\begin{aligned} \partial_q p^*(\xi, x) &= \frac{\partial p^*}{\partial x_1} \cdot \partial_q(x_1) + \frac{\partial p^*}{\partial \xi_1} \cdot \partial_q(\xi_1) + \\ &+ \frac{\partial p^*}{\partial n_1} \cdot \partial_q(n_1) \end{aligned} \quad (\text{II.4.17})$$

E também:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^*}{\partial x_1} &= \frac{\partial p^*}{\partial r_j} \cdot \frac{\partial r_j}{\partial x_1} + \frac{\partial p^*}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_1} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \left( \frac{n_j}{r^2} \cdot \delta_{1j} - 2 \frac{r_1}{r^4} (r_j n_j) \right) \end{aligned} \quad (\text{II.4.18})$$

Analogamente a  $\partial_q(u^*)$ , tem-se:

$$\frac{\partial p^*}{\partial \xi_1} = -\frac{\partial p^*}{\partial x_1} \quad (\text{II.4.19})$$

De (II.3.7) vem:

$$\frac{\partial p^*}{\partial n_1} = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{r_1}{r^2} \quad (\text{II.4.20})$$

Substituindo (II.4.18) a (II.4.20) em (II.4.17) chega-se a:

$$\partial_q p^*(\xi, x) = -\frac{1}{2\pi r^2} \left\{ \left( n_1 - 2(r_k n_k) \frac{r_1}{r^2} \right) \partial_q(r_1) + r_1 \partial_q(n_1) \right\} \quad (\text{II.4.21})$$

Para o termo  $\partial_q(B_i)$  tendo em vista as considerações

feitas no desenvolvimento de (II.3.23) ,vem:

$$\partial_q(B_i) = \sum_{j=1}^{N_e} b \int_{\eta} \partial_q(v_{,i}^* n_i |J|) d\eta \quad (\text{II.4.22})$$

Desenvolvendo o integrando da expressão (II.4.22) e tendo em vista (II.3.23), chega-se a:

$$\partial_q(B_i) = \sum_{j=1}^{N_e} -\frac{b}{2} \int_{\eta} \partial_q \left\{ \left( \frac{1}{4\pi} + u^* \right) \cdot (r_i n_i) \cdot |J| \right\} d\eta \quad (\text{II.4.23})$$

Desenvolvendo as derivações do integrando chega-se a:

$$\begin{aligned} \partial_q(B_i) = \sum_{j=1}^{N_e} -\frac{b}{2} \int_{\eta} \left\{ \left( \frac{1}{4\pi} + u^* \right) |J| \partial_q(r_i n_i) + \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{4\pi} + u^* \right) (r_i n_i) \partial_q |J| + \right. \\ \left. + (r_i n_i) |J| \partial_q(u^*) \right\} d\eta \quad (\text{II.4.24}) \end{aligned}$$

$$\text{onde: } \partial_q(r_i n_i) = r_i \partial_q(n_i) + n_i \partial_q(r_i)$$

$$(\text{II.4.25})$$

Considerando que  $\partial_q(u^*)$  já foi explicitado em termos de  $\partial_q(r_i)$  , ve-se que todas as novas quantidades apresentadas neste ítem foram explicitadas em funções

diretamente dependentes do tipo de discretização e parâmetro adotados.

## II.5 - IMPLEMENTAÇÃO DO CÁLCULO DA SENSIBILIDADE

Para que efetivamente se implemente o cálculo da sensibilidade em relação à mudança de forma é necessário que seja definido o parâmetro que controla a forma da estrutura. É aqui definido tal parâmetro,  $q$ , como uma coordenada de um nó qualquer que passa a ser chamado de nó-parâmetro. Tendo em vista a definição acima, cada nó-parâmetro pode conter dois parâmetros de definição de forma, sendo que na realidade, em um problema de otimização de forma tem-se usualmente vários destes parâmetros. A definição do parâmetro acima não impõe qualquer restrição à forma do componente estrutural.

Outra característica desta escolha é que se for desejada a sensibilidade em relação à outro parâmetro qualquer, pode-se encarar este cálculo como um passo intermediário para tal finalidade. Se o novo parâmetro desejado afeta  $N_p$  nós da discretização, as sensibilidades em relação a este novo parâmetro (representadas respectivamente por  $\partial_q u$  e  $\partial_q p$ ) são obtidas pela aplicação da regra da cadeia:



$$\begin{aligned} \partial_Q u = & \frac{\partial u}{\partial q_{11}} \cdot \frac{\partial q_{11}}{\partial Q} + \frac{\partial u}{\partial q_{12}} \cdot \frac{\partial q_{12}}{\partial Q} + \frac{\partial u}{\partial q_{21}} \cdot \frac{\partial q_{21}}{\partial Q} + \\ & \dots + \frac{\partial u}{\partial q_{Np1}} \cdot \frac{\partial q_{Np1}}{\partial Q} + \frac{\partial u}{\partial q_{Np2}} \cdot \frac{\partial q_{Np2}}{\partial Q} \end{aligned}$$

(II.5.1)

Onde:

$q_1, q_2 \dots q_{Np}$  : são os nós-parâmetro.

$\frac{\partial u}{\partial q_{ij}}$  : são as sensibilidades em relação à variação da coordenada  $j$  do nó parâmetro  $i$ .

$\frac{\partial q_{ij}}{\partial Q}$  : são as derivadas parciais espaciais da coordenada  $j$  do nó parâmetro  $i$  em relação ao parâmetro  $Q$ .

Como o parâmetro  $Q$  é definido a priori, as derivadas  $\frac{\partial q_{ij}}{\partial Q}$  podem ser explicitadas sem maiores dificuldades, resumindo-se então o problema ao caso anterior.

Depois de definido o parâmetro que controla a mudança de forma passa-se propriamente à implementação do cálculo da sensibilidade. Este consiste na avaliação das novas matrizes  $\partial_{q_{\sim}} H$  e  $\partial_{q_{\sim}} G$  e do vetor  $\partial_{q_{\sim}} B$  desenvolvidos no item anterior, bem como na sua reordenação e resolução do sistema de equações então formado.

A reordenação das matrizes não apresenta nenhuma inovação. Quanto à resolução do sistema de equações, foi utilizado um artifício [7] para aumentar a eficiência do método. A técnica aqui empregada consiste numa pequena modificação no algoritmo de eliminação de Gauss que permite que se resolvam vários termos independentes com apenas uma etapa de triangularização. Durante a primeira resolução do sistema, na obtenção da resposta da análise do problema, são armazenadas informações que vão permitir que se reproduzam mais tarde, no cálculo das sensibilidades, as operações efetuadas no termo independente nesta etapa.

Para a avaliação dos termos das matrizes  $\partial_{\tilde{q}} H$  e  $\partial_{\tilde{q}} G$  e do vetor  $\partial_{\tilde{q}} B$  segue-se procedimento análogo ao que foi utilizado no cálculo dos termos das matrizes  $\tilde{H}$  e  $\tilde{G}$  e do vetor  $\tilde{B}$ .

Os elementos das matrizes derivadas são as derivadas dos elementos das matrizes originais, como foi visto no item anterior. Nos elementos em que o nó fonte não pertence ao domínio de integração é adotado o procedimento geral, indicado anteriormente, que consiste em aplicar a derivação aos integrandos das integrais originais e então aplicar o mesmo método de integração de Gauss para as novas integrais. Os integrandos destas novas integrais são quantidades derivadas que dependem do tipo de elemento implementado. Para tanto basta que se avaliem as novas quantidades  $\partial_{\tilde{q}} r$ ,  $\partial_{\tilde{q}} |J|$  e  $\partial_{\tilde{q}} n$ .

Ou seja, analogamente à expressão (II.4.3) , tem-se:

$$\partial_{q_j}(r_i) = \lim_{\Delta q_j \rightarrow 0} \frac{r'_i - r_i}{\Delta q_j} \quad (\text{II.5.2})$$

onde o índice  $j$  representa que o parâmetro é a coordenada  $j$  do nó-parâmetro.

Partindo-se da expressão (II.3.8) tem-se:

$$\partial_{q_j}(r_i) = \partial_{q_j}(x_i) - \partial_{q_j}(\xi_i) \quad (\text{II.5.3})$$

Considerando a Figura (II.5.1), onde se mostra uma variação  $\Delta q$  no nó-parâmetro, fica claro que se tanto  $x$  quanto  $\xi$  pertencem à  $\Gamma_2$  a expressão (II.5.3) se anula.

Para que a expressão (II.5.3) não se anule três alternativas são analisadas separadamente:

- (i)  $x \in \Gamma_1$  e  $\xi \in \Gamma_2$
- (ii)  $\xi \in \Gamma_1$  e  $x \in \Gamma_2$
- (iii)  $x \in \Gamma_1$  e  $\xi \in \Gamma_1$

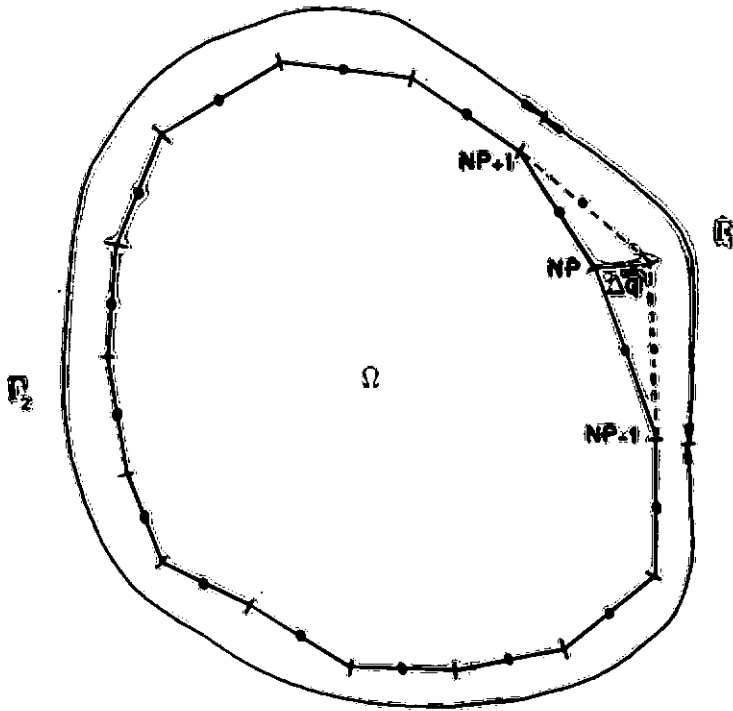


Figura (II.5.1) - Variação no nó-parâmetro.

Na alternativa (i) tem-se  $\partial_q(\xi_i) = 0$ . Também, para o ponto campo pertencendo ao elemento anterior ao nó-parâmetro e tendo em vista (II.3.16), pode-se escrever a derivada de uma componente do vetor raio em relação à direção  $j$  como:

$$\partial_{q_j} (r_i) = \partial_{X_j^2} \left( X_1^1 \cdot \phi_1(\eta) + X_1^2 \cdot \phi_2(\eta) \right)$$

(II.5.4)

Porém como as coordenadas ortogonais são independentes, bem como as coordenadas de dois nós distintos tem-se:

$$\partial_{X_j^2} (X_1^1) = 0 \quad ; \quad \partial_{X_j^2} (X_1^2) = \delta_{1j}$$

(II.5.5)

Logo:

$$\partial_{q_j} (r_i) = \delta_{ij} \phi_2(\eta)$$

(II.5.6)

Procedendo analogamente quando o nó campo pertence ao elemento posterior ao nó-parâmetro, chega-se a :

$$\partial_{q_j} (r_i) = \delta_{ij} \phi_1(\eta)$$

(II.5.7)

Para a alternativa (ii) tem-se  $\partial_q(x_i) = 0$  , logo:

$$\partial_{q_j} (r_i) = - \partial_{q_j} (\xi_i)$$

(II.5.8)

Como o nó fonte é um ponto do elemento situado em  $\eta=0$ ,

procedimento análogo ao descrito acima leva, para o nó fonte no elemento anterior ou posterior ao nó-parâmetro:

$$\partial_{q_j}(r_1) = -\delta_{ij}\phi_1(0) = -\delta_{ij}\phi_2(0) = -\frac{1}{2}\delta_{ij} \quad (\text{II.5.9})$$

Para a alternativa (iii) somam-se as expressões obtidas acima, excetuando-se o caso em que o nó fonte pertence ao elemento que está sendo integrado. Neste caso a integração é efetuada de forma analítica como será visto adiante.

Para o jacobiano da transformação de coordenadas, de (II.3.19), vem:

$$\partial_q |J| = \frac{1}{2} \partial_q (l_{(j)}) \quad (\text{II.5.10})$$

Para que esta derivada não se anule é preciso que uma variação no parâmetro modifique o comprimento do elemento em questão. Isto só acontece se o elemento em consideração for o elemento anterior ou posterior ao nó-parâmetro. E sabendo-se que:

$$l = \left[ (x_1^2 - x_1^1)^2 + (x_2^2 - x_2^1)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{II.5.11})$$

Considerando o elemento anterior ao nó parametro,  
tem-se:

$$\partial_{q_j} |J| = \frac{1}{2} \partial_{x_j^2} (1) = \frac{1}{2l} \cdot l_j \quad (\text{II.5.12})$$

Analogamente para o elemento posterior:

$$\partial_{q_j} |J| = - \frac{1}{2l} \cdot l_j \quad (\text{II.5.13})$$

Para a derivada do vetor unitário normal é preciso inicialmente considerar sua expressão:

$$n_1 = \frac{1}{l} \cdot (x_2^2 - x_2^1) \quad (\text{II.5.14})$$

$$n_2 = \frac{1}{l} \cdot (x_1^1 - x_1^2)$$

Considerando-se inicialmente o elemento anterior ao nó-parâmetro e as expressões (II.5.12) e (II.5.13), tem-se respectivamente para as direções 1 e 2 :

$$\partial_{q_1} (n_1) = \partial_{x_1^2} (n_1) = \frac{1}{l} \left( -\delta_{21} - \frac{1}{l} l_1 n_1 \right)$$

$$\partial_{q_2} (n_1) = \partial_{x_2^2} (n_1) = \frac{1}{l} \left( \delta_{11} - \frac{1}{l} l_2 n_1 \right)$$

(II.5.15)

Analogamente para o elemento posterior ao nó-parâmetro:

$$\partial_{q_1} (n_1) = \partial_{x_1^1} (n_1) = \frac{1}{1} \left( \delta_{21} + \frac{1}{1} l_1 n_1 \right)$$

$$\partial_{q_2} (n_1) = \partial_{x_2^1} (n_1) = \frac{1}{1} \left( -\delta_{11} + \frac{1}{1} l_2 n_1 \right)$$

(II.5.16)

As integrais singulares (diagonais de  $\underline{H}$  e  $\underline{G}$ ) já foram obtidas analiticamente. Consequentemente procede-se à derivação também analítica destes termos.

Tem-se então, a partir das expressões (II.3.7) e (II.3.24) :

$$\partial_q \hat{H}_{ii} = 0$$

$$\partial_q C_{ii} = 0 \quad \text{(II.5.17)}$$

$$\partial_q G_{ii} = \ln \left( \frac{2}{1} \right) \cdot \partial_q (1)$$

onde  $\partial_q (1)$  deve ser tomado como em (II.5.12) e (II.5.13).

Pelo que foi exposto acima observa-se que as matrizes  $\partial_q \underline{G}$  e  $\partial_q \underline{H}$  têm apenas duas linhas e duas colunas não nulas, correspondentes aos nós fonte dos elementos adjacentes ao nó-parâmetro.



## II.6 - EXPRESSÕES PARA O CÁLCULO DA SENSIBILIDADE DA RIGIDEZ TORSIONAL E DA ÁREA DA SEÇÃO TRANSVERSAL

A área da seção transversal pode ser calculada como uma integral ao longo de seu contorno como:

$$A = \int_{\Gamma} \underline{R} \cdot \underline{n} \, d\Gamma \quad (\text{II.6.1})$$

Onde  $\underline{R}$  é um vetor ligando um ponto qualquer fixo, que será considerado a origem dos eixos coordenados, e o ponto do contorno em que está se efetuando a integração. Também  $\underline{n}$  é o vetor unitário normal como definido anteriormente.

A área da seção transversal é calculada na estrutura já discretizada, onde para elementos de geometria linear, tem-se em cada elemento:

$$\underline{R} \cdot \underline{n} = \text{constante} \quad (\text{II.6.2})$$

Logo, tomando-se  $\bar{R}_{(j)}$  como o raio de um ponto qualquer no elemento  $j$ , pode-se escrever (II.6.1) como:

$$A = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{Ne} l_j \cdot (\bar{R}_{(j)} \cdot \underline{n}_{(j)}) \quad (\text{II.6.3})$$

Desenvolvendo (II.6.3) usando (II.5.12) chega-se a:

$$A = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{Ne} (x_2^2 \cdot x_1^1 - x_1^2 \cdot x_2^1) \quad (\text{II.6.4})$$

Tem-se então:

$$\partial_q A = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{Ne} \partial_q ( x_2^2 \cdot x_1^1 - x_1^2 \cdot x_2^1 ) \quad (\text{II.6.5})$$

Logo a contribuição para a derivada da área em relação à um parâmetro dada por um elemento só não será nula se o nó-parâmetro for o nó inicial ou final do elemento em questão.

Para o caso do nó final :

$$\partial_{q_1} ( x_2^2 \cdot x_1^1 - x_1^2 \cdot x_2^1 ) = - x_2^1 \quad (\text{II.6.6})$$

$$\partial_{q_2} ( x_2^2 \cdot x_1^1 - x_1^2 \cdot x_2^1 ) = x_1^1$$

E para o nó inicial:

$$\partial_{q_1} ( x_2^2 \cdot x_1^1 - x_1^2 \cdot x_2^1 ) = x_2^2 \quad (\text{II.6.7})$$

$$\partial_{q_2} ( x_2^2 \cdot x_1^1 - x_1^2 \cdot x_2^1 ) = - x_1^2$$

O nó-parâmetro está sempre entre dois elementos como mostra a Figura (II.5.1). Das eqs. (II.6.6) e (II.6.7) chega-se a:

$$\partial_{q_1} A = \frac{1}{2} (x_2^{(NP+1)} - x_2^{(NP-1)}) \quad (\text{II.6.8})$$

$$\partial_{q_2} A = \frac{1}{2} (x_1^{(NP-1)} - x_1^{(NP+1)})$$

A rigidez torsional definida em (II.2.20) pode ser reescrita usando-se agora a notação indicial como:

$$D = - G \int_{\Omega} x_i \phi_{,i} d\Omega \quad (\text{II.6.9})$$

Exprimindo-se o integrando em função de  $(R^2 \phi_i)_{,i}$  e aplicando o teorema da divergência :

$$D = - \frac{G}{2} \int_{\Gamma} R^2 \phi_{,i} n_i d\Gamma - \int_{\Omega} R^2 d\Omega \quad (\text{II.6.10})$$

Exprimindo agora o integrando da integral de domínio em termos de  $(R^3 R_i)_{,i}$  e aplicando-se mais uma vez o mesmo teorema chega-se a:

$$D = - \frac{G}{2} \int_{\Gamma} R^2 \phi_{,i} n_i d\Gamma - \frac{G}{4} \int_{\Gamma} R^2 R_i n_i d\Gamma \quad (\text{II.6.11})$$

A eq. (II.6.11) fornece a rigidez torsional em função de valores no contorno. Esta equação discretizada e derivada em relação a um parâmetro  $q$  gera:

$$\begin{aligned} \partial_q D = & - \frac{G}{4} \sum_{j=1}^{Ne} \int_{\eta} \partial_q (R^2 R_1 n_1 |J|) d\eta - \\ & - \frac{G}{2} \sum_{j=1}^{Ne} \int_{\eta} \partial_q (p R^2 |J|) d\eta \end{aligned} \quad (II.6.12)$$

Que desenvolvida leva a:

$$\begin{aligned} \partial_q D = & - \frac{G}{4} \sum_{j=1}^{Ne} \int_{\eta} \left( R_1 n_1 |J| \partial_q (R^2) + R_1 n_1 R^2 \partial_q |J| + \right. \\ & \left. + R^2 |J| \partial_q (R_1 n_1) \right) d\eta - \\ & - \frac{G}{2} \sum_{j=1}^{Ne} \int_{\eta} \left( R^2 |J| \partial_q p_j + p_j |J| \partial_q (R^2) + \right. \\ & \left. + p_j R^2 \partial_q |J| \right) d\eta \end{aligned} \quad (II.6.13)$$

onde o único termo ainda não calculado é  $\partial_q (R^2)$ .

Da definição de  $R$  vem:

$$\partial_q (R^2) = 2 \cdot x_1 \cdot \partial_q (x_1) + 2 \cdot x_2 \cdot \partial_q (x_2) \quad (II.6.14)$$

CAPÍTULO III  
CÁLCULO DA SENSIBILIDADE À MUDANÇA DE FORMA  
PARA A ELASTICIDADE PLANA

III . 1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo o método de cálculo das sensibilidades à mudança de forma desenvolvido no capítulo anterior é aplicado à elasticidade plana. Inicialmente o M.E.C. é resumidamente desenvolvido para este tipo de problema. Desenvolvimento mais detalhado pode ser encontrado em BREBBIA, TELLES e WROBEL [16].

Igualmente ao capítulo anterior são desenvolvidas expressões gerais para o cálculo da sensibilidade das incógnitas fundamentais do método que são posteriormente especificadas para o elemento empregado nesta implementação ( elemento linear ). São desenvolvidas também expressões para o cálculo de sensibilidades de tensões no contorno.

Na implementação do cálculo das sensibilidades é usada a mesma definição de parâmetro controlador de forma utilizado no capítulo anterior incluindo a aplicação deste conceito à determinação das sensibilidades em estruturas simétricas.

Por fim são apresentadas expressões para o cálculo das

sensibilidades de funções que servirão de objetivo e restrição nas aplicações desenvolvidas.

### III.2 - IMPLEMENTAÇÃO DO M.E.C. PARA A ELASTICIDADE PLANA

Para a aplicação do M.E.C. à resolução de problemas de estado plano de tensão (E.P.T.) ou estado plano de deformação (E.P.D.) parte-se da Identidade de Somigliana aplicada a um ponto qualquer do domínio do sólido em questão. Esta expressão é escrita abaixo aplicando-se aqui também a notação cartesiana indicial descrita no capítulo anterior.

$$\begin{aligned}
 u_j(\xi) = & \int_{\Gamma} u_{i,j}^*(\xi, \mathbf{x}) p_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \\
 & - \int_{\Gamma} p_{i,j}^*(\xi, \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} u_{i,j}^*(\mathbf{x}) b_j(\mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{x})
 \end{aligned}
 \tag{III.2.1}$$

Esta expressão levada a um ponto do contorno do corpo gera:

$$\begin{aligned}
 c_{i,j}(\xi) u_j(\xi) + \int_{\Gamma} p_{i,j}^*(\xi, \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) = \\
 = \int_{\Gamma} u_{i,j}^*(\xi, \mathbf{x}) p_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} u_{i,j}^*(\mathbf{x}) b_j(\mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{x})
 \end{aligned}
 \tag{III.2.2}$$

Onde a integral do lado esquerdo deve ser interpretada como valor principal de Cauchy [18], e também:

$u_{ij}^*(\xi, x)$  e  $p_{ij}^*(\xi, x)$  - são respectivamente os deslocamentos e as forças de superfície fundamentais. Neste trabalho se adota a solução fundamental de Kelvin [19] que é a solução para uma carga concentrada aplicada em um meio infinito. Isto é,  $u_{ij}^*(\xi, x)$  e  $p_{ij}^*(\xi, x)$  são respectivamente os deslocamentos e as forças de superfície da direção  $j$  no ponto  $x$  causadas por uma carga concentrada unitária de direção  $i$  no ponto  $\xi$ .

$u_j(x)$  ;  $p_j(x)$  - são respectivamente o deslocamento e a força de superfície de direção  $j$  no ponto  $x$  do corpo que está sendo analisado devido às cargas atuantes.

$b_j(x)$  - é a força de volume atuante no ponto  $x$  do domínio  $\Omega$ .

$c_{ij}(\xi)$  - é um coeficiente que depende da solução fundamental adotada e da geometria do contorno na posição do ponto  $\xi$ .

Para a solução fundamental adotada tem-se para o EPD :

$$\begin{aligned}
 u_{1j}^*(\xi, \mathbf{x}) &= \frac{-1}{8\pi(1-\nu)Gr} \left\{ (3 - 4\nu)\delta_{1j} \ln(r) + \right. \\
 &\quad \left. + r_{,1}r_{,j} \right\} \\
 p_{1j}^*(\xi, \mathbf{x}) &= \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \left[ (1-2\nu)\delta_{1j} + r_{,1}r_{,j} \right] \frac{r_{,1}n_1}{r} + \right. \\
 &\quad \left. + (1-2\nu)(r_{,1}n_j - r_{,j}n_1) \right\}
 \end{aligned}
 \tag{III.2.3}$$

onde  $r$ ,  $r_{,1}$ ,  $r_{,j}$  e  $n_1$  já foram definidos anteriormente em (II.3.8) a (II.3.10),  $G$  é o módulo de elasticidade transversal e  $\nu$  o coeficiente de Poisson.

Para que estas expressões sejam também válidas para o EPT basta que se substitua  $\nu$  por  $\bar{\nu}$ , sendo:

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{(1 + \nu)}
 \tag{III.2.4}$$

Para que a equação (III.2.2.) seja também válida para problemas que envolvem cavidades em um meio infinito, com  $b_j = 0$ , é preciso que seja observada uma condição sobre o comportamento da solução no infinito chamada condição de regularidade.

O corpo a ser analisado é tomado então como sendo limitado pelo contorno da cavidade  $\Gamma$  e por um contorno  $\Gamma_\rho$  dado por uma circunferência de raio  $\rho$ , infinitamente distante, em torno do ponto  $\xi$ , como mostra a Figura (III.2.1).



De acordo com a equação (III.2.2) para que se analise o corpo só computando as integrais sobre  $\Gamma$  [16], deve-se ter:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_\rho} \left( p_{i,j}^*(\xi, x) u_j(x) - u_{i,j}^*(\xi, x) p_j(x) \right) d\Gamma(x) = 0$$

(III.2.5)

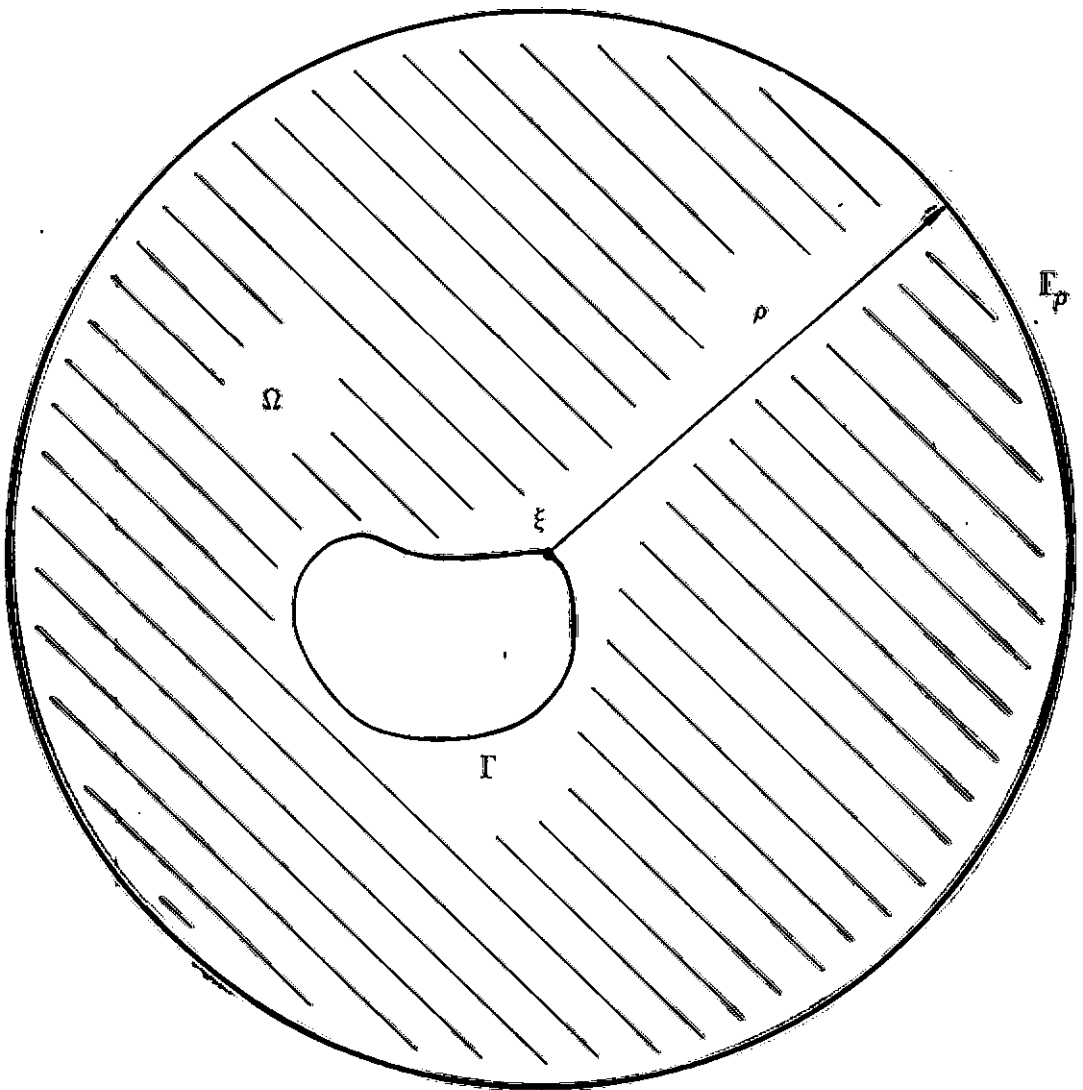


Figura (III.2.1) - Idealização de domínio infinito.

Por simplicidade não considerando as forças de volume pode-se escrever (III.2.2) de forma matricial como:

$$\underline{c} \underline{u} + \int_{\Gamma} \underline{p}^* \underline{u} d\Gamma = \int_{\Gamma} \underline{u}^* \underline{p} d\Gamma \quad (\text{III.2.6})$$

onde para o caso bidimensional:

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}; \quad \underline{p} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.2.7})$$

E também:

$$\underline{u}^* = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{bmatrix} \quad (\text{III.2.8})$$

$$\underline{p}^* = \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* \end{bmatrix}$$

Para a implementação numérica do método seguem-se os passos do capítulo anterior.

Dividindo o contorno em  $N_e$  elementos se escreve por simplicidade agora de forma matricial:

$$\begin{aligned}\underline{x} &= \underline{M} \cdot \underline{x}^k \\ \underline{u} &= \underline{N} \cdot \underline{u}^k \\ \underline{p} &= \underline{N} \cdot \underline{p}^k\end{aligned}\tag{III.2.9}$$

onde  $\underline{x}^k$  contém as coordenadas dos nós geométricos e  $\underline{u}^k$  e  $\underline{p}^k$  os deslocamentos e as forças de superfície dos nós funcionais.

Substituindo as aproximações descritas em (III.2.9) pode-se escrever para um nó  $\xi_1$ .

$$\begin{aligned}\underline{c} \underline{u} + \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\eta} \underline{p}^* \underline{N} |J| d\eta \underline{u}^k &= \\ &= \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\eta} \underline{u}^* \underline{N} |J| d\eta \underline{p}^k\end{aligned}\tag{III.2.10}$$

onde já está inserida a transformação de coordenadas para um sistema local e adimensional de coordenadas como descrito no capítulo anterior.

Se a equação (III.2.10) é escrita para um dos  $N$  nós funcionais  $\xi_1$  do contorno, tem-se:

$$\begin{aligned}
 \tilde{c}_1 \tilde{u}_1 + \left\{ \begin{array}{cccc} \hat{h}_{11} & \hat{h}_{12} & \dots & \hat{h}_{1N} \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \dots \\ \tilde{u}_N \end{array} \right\} \\
 = \left\{ \begin{array}{cccc} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1N} \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_N \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

(III.2.11)

onde  $\tilde{u}_j$  e  $p_j$  são as incógnitas do nó  $j$  e  $\hat{h}_{1j}$  e  $g_{1j}$  são os coeficientes de influência resultantes das integrais da eq. (III.2.10) que são usualmente calculadas por um procedimento numérico como em (II.3.24).

A equação (III.2.11) pode então ser escrita para todos os  $N$  nós  $\xi_1$  do contorno como:

$$\begin{bmatrix} \tilde{h}_{11} & \tilde{h}_{12} & \dots & \tilde{h}_{1N} \\ \tilde{h}_{21} & \tilde{h}_{22} & \dots & \tilde{h}_{2N} \\ \vdots & & & \\ \tilde{h}_{N1} & \tilde{h}_{N2} & \dots & \tilde{h}_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \vdots \\ \tilde{u}_N \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} & \dots & \tilde{g}_{1N} \\ \tilde{g}_{21} & \tilde{g}_{22} & \dots & \tilde{g}_{2N} \\ \vdots & & & \\ \tilde{g}_{N1} & \tilde{g}_{N2} & \dots & \tilde{g}_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \tilde{p}_1 \\ \tilde{p}_2 \\ \vdots \\ \tilde{p}_N \end{Bmatrix}$$

(III.2.12)

Onde:

$$\tilde{h}_{ij} = \begin{cases} \hat{\tilde{h}}_{ij} & \text{se } i \neq j \\ \hat{\tilde{h}}_{ij} + \tilde{c}_1 & \text{se } i = j \end{cases} \quad (\text{III.2.13})$$

E estas equações podem ser escritas na forma:

$$\tilde{H} \cdot \tilde{U} = \tilde{G} \cdot \tilde{P} \quad (\text{III.2.14})$$

Introduzindo as condições de contorno, que podem ser prescrições de força de superfície ou de deslocamento e reordenando vem:

$$\tilde{A} \cdot \tilde{Y} = \tilde{F} \quad (\text{III.2.15})$$

Os termos das submatrizes da diagonal de  $\tilde{H}$  podem ser obtidos indiretamente através de considerações de movimento de corpo rígido.

Para uma translação em uma direção 1 tem-se:

$$\tilde{H} \cdot \tilde{I}_1 = \tilde{0} \quad (\text{III.2.16})$$

onde  $\tilde{I}_1$  é um vetor que define os deslocamentos da translação.

Pode-se então escrever:

$$\tilde{h}_{1i} = -\sum_{i \neq j} \tilde{h}_{1j} \quad (\text{III.2.17})$$

Para o problema de cavidades em meio infinito, usando a mesma idéia e considerando a violação da equação (III.2.5) tem-se:

$$\tilde{h}_{1i} = I - \sum_{i \neq j} \tilde{h}_{1j} \quad (\text{III.2.18})$$

Uma vez resolvido o sistema de equações (III.2.15) tem-se os deslocamentos e as forças de superfície no contorno, inicialmente desconhecidos. Os deslocamentos em qualquer ponto do interior do corpo podem ser obtidos através da equação (III.2.1) onde as integrais são avaliadas seguindo o mesmo procedimento numérico.

Para se calcular as tensões em qualquer ponto do domínio deriva-se a expressão (III.2.1) em relação as coordenadas do ponto  $\xi$  obtendo assim as deformações que são combinadas com a lei de Hooke (A.6).

As tensões no contorno são obtidas de maneira simples. Adotando um sistema de coordenadas Cartesianas local tangente ao contorno, como na Figura (III.2.2), os deslocamentos em relação a este referencial podem ser expressos como:

$$\bar{u} = \bar{N} \cdot \bar{u}^k \quad (\text{III.2.19})$$

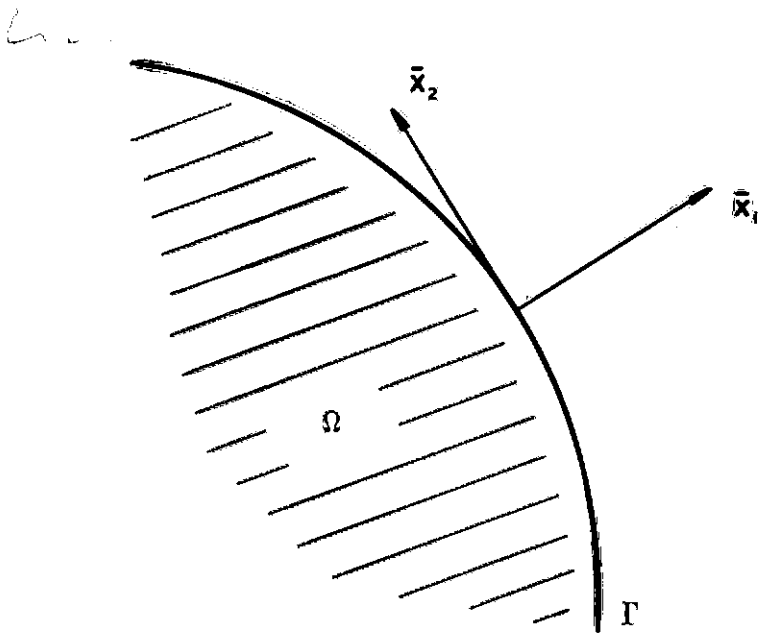


Figura (III.2.2) - Sistema de coordenadas local para cálculo das tensões.

E as deformações :

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_i} \right) \quad (\text{III.2.20})$$

Obtendo-se para o caso bidimensional:

$$\bar{\varepsilon}_{22} = \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_2} \quad (\text{III.2.21})$$

Adotando-se um valor aproximado para  $\bar{\varepsilon}_{22}$ , em função dos deslocamentos já calculados, as tensões neste referencial são calculadas pelas expressões (III.2.22) e depois transformadas para o referencial global.

$$\bar{\sigma}_{11} = \bar{p}_1$$

$$\bar{\sigma}_{12} = \bar{p}_2 \quad (\text{III.2.22})$$

$$\bar{\sigma}_{22} = \frac{1}{(1-\nu)} \left( \nu \bar{\sigma}_{11} + 2 G \bar{\varepsilon}_{22} \right)$$

Para simular adequadamente descontinuidades nas forças de superfície se aplica o conceito de nó duplo. Isto é, são utilizados dois nós com a mesma posição porém sem nenhum elemento ligando-os. Pode-se então prescrever diferentes forças de superfície para cada um deles. Deve-se salientar que este procedimento não admite que se prescreva a mesma componente de deslocamento nos dois nós, isto poderia



violar a condição de continuidade de deslocamentos, tornando a matriz  $\underline{A}$  singular. Esta limitação pode ser superada com a utilização do elemento interpolado [20].

Uma potencialidade do M.E.C. é a possibilidade de analisar estruturas simétricas em relação a um ou mais eixos coordenados, discretizando-se apenas a parte do contorno que gera integralmente o contorno do corpo por reflexão em relação ao(s) eixo(s) de simetria.

Considerando-se o sistema de equações gerado por um corpo com simetria em relação aos dois eixos coordenados tem-se:

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix}$$

(III.2.23)

Onde tendo em vista a Figura (III.2.3) :

$\underline{h}_{ij}$  ;  $\underline{g}_{ij}$  são as submatrizes de  $\underline{H}$  e  $\underline{G}$  que multiplicam os valores nodais da região  $j$  quando  $\xi$  está na região  $i$ .

$\underline{u}_j$  ;  $\underline{p}_j$  são os subvetores que contém os valores nodais da região  $j$ .

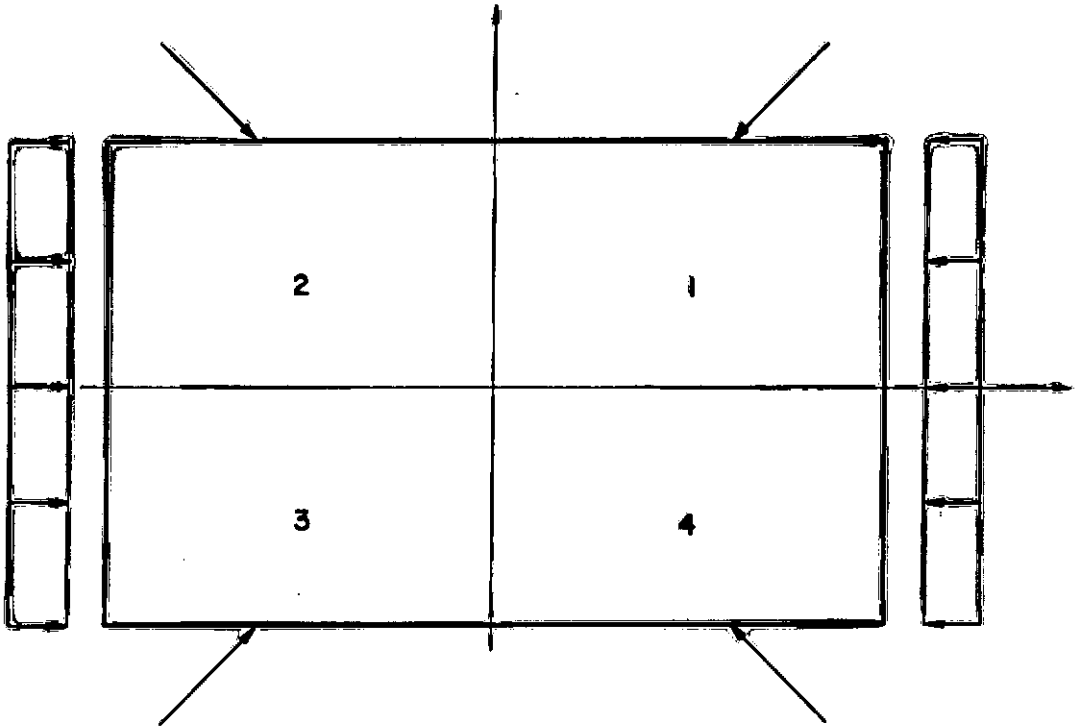


Figura (III.2.3) - Corpo com dupla simetria.

O primeiro grupo de equações se escreve:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{11} \cdot \tilde{u}_1 + \tilde{h}_{12} \cdot \tilde{u}_2 + \tilde{h}_{13} \cdot \tilde{u}_3 + \tilde{h}_{14} \cdot \tilde{u}_4 &= \\ &= g_{11} \cdot p_1 + g_{12} \cdot p_2 + g_{13} \cdot p_3 + g_{14} \cdot p_4 \end{aligned} \quad (\text{III.2.24})$$

Como os valores de  $\tilde{u}_i$  para os nós simétricos são iguais em módulo, bem como os  $p_i$  pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{11} \cdot \tilde{u}_1 + \tilde{h}'_{12} \cdot \tilde{u}_1 + \tilde{h}'_{13} \cdot \tilde{u}_1 + \tilde{h}'_{14} \cdot \tilde{u}_1 &= \\ &= g'_{11} \cdot p_1 + g'_{12} \cdot p_1 + g'_{13} \cdot p_1 + g'_{14} \cdot p_1 \end{aligned} \quad (\text{III.2.25})$$

Onde  $\tilde{h}'_{ij}$  e  $g'_{ij}$  são as matrizes  $\tilde{h}_{ij}$  e  $g_{ij}$  afetadas do sinal adequado. Por exemplo, em  $\tilde{h}'_{12}$  e  $g'_{12}$  os termos que respectivamente multiplicam  $\tilde{u}_2$  e  $p_2$  na direção  $x_1$  trocam de sinal e assim por diante.

A equação (III.2.25) pode ser então escrita acoplando-se respectivamente as matrizes  $\tilde{h}'_{ij}$  e  $g'_{ij}$  às matrizes  $\tilde{h}_{ij}$  e  $g_{ij}$  como:

$$\bar{H}_{11} \cdot \tilde{u}_1 = \bar{G}_{11} \cdot p_1 \quad (\text{III.2.26})$$

É importante observar que a equação (III.2.26) só tem as incógnitas relativas ao contorno da região 1 e que como

as condições de simetria já estão embutidas a matriz  $\bar{H}_{11}$  não é mais singular.

Pode-se então realizar todas as integrações relativas à formação da matriz  $\bar{H}_{11}$  refletindo-se os elementos do primeiro quadrante. Porém é computacionalmente mais eficiente se refletir os nós fonte ao invés dos elementos, acarretando ainda outras trocas de sinal, como em TELLES [21].

A implementação para elasticidade plana, neste trabalho, foi feita com o elemento linear. Este elemento tem os nós funcionais coincidentes com os nós geométricos.

Tem-se então:

$$\tilde{u}_{(j)}^k = \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix} ; \quad p_{(j)}^k = \begin{Bmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_1^2 \\ p_2^2 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.2.27})$$

E também :

$$\tilde{N} = \tilde{M} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.2.28})$$

Sendo  $\phi_1$  e  $\phi_2$  dados pela expressão (II.3.17) que é repetida aqui por conveniência.

$$\phi_1 = \frac{1}{2} (1 - \eta)$$

(III.2.29)

$$\phi_2 = \frac{1}{2} (1 + \eta)$$

Como o sistema adimensional local é dado também neste caso pela equação (II.3.17) tem-se:

$$|J| = \frac{1}{2} \cdot l_{(j)}$$

(III.2.30)

Assim como na implementação do capítulo anterior, as integrais não singulares são calculadas pelo método de Gauss. As singulares são efetuadas analiticamente, sendo que as submatrizes da diagonal principal de  $\tilde{H}$  são obtidas através das considerações de corpo rígido mostradas acima.

Para o cálculo das tensões,  $\bar{\epsilon}_{22}$  é tomada como constante em cada elemento valendo:

$$\bar{\epsilon}_{22} = \frac{\bar{u}_2^2 - \bar{u}_2^1}{l_{(j)}}$$

(III.2.31)

As tensões em um nó do contorno são então aproximadas pela média aritmética entre as tensões encontradas com base nas deformações dos elementos adjacentes ao mesmo.

### III.3 - EXPRESSÕES PARA O CÁLCULO DA SENSIBILIDADE

Seguindo procedimento análogo ao desenvolvido no item II.4 pode-se também calcular as sensibilidades dos deslocamentos e forças de superfície em relação a um parâmetro. Surgem assim expressões idênticas às equações (II.4.10) à (II.4.12) com  $\underline{u}$ ,  $\underline{u}^*$ ,  $\underline{p}$  e  $\underline{p}^*$  representando agora deslocamentos e forças de superfície como no item (III.2).

Na implementação efetuada, os termos das matrizes  $\underline{H}$  e  $\underline{G}$  que resultam de integrações singulares e foram integrados analiticamente são derivados também de forma analítica. Os termos das submatrizes da diagonal principal de  $\partial_{\underline{q}} \underline{H}$  são obtidos pelas considerações de movimento de corpo rígido e as demais integrais são efetuadas pelo método de Gauss.

Para que tal procedimento seja adotado são obtidas expressões para  $\partial_{\underline{q}} \underline{u}^*$  e  $\partial_{\underline{q}} \underline{p}^*$  em função de derivadas mais simples.

Tendo em vista (III.2.3), vem:

$$\partial_q(u_{1j}^*) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)G.r} \left\{ \left[ (3-4\nu)\delta_{ij} + 2r_i r_j \right] r_i \partial_q(r_i) + \right. \\ \left. + \left[ r_j \partial_q(r_i) + r_i \partial_q(r_j) \right] \right\}$$

(III.3.1)

$$\partial_q(p_{1j}^*) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ \left[ (1-2\nu)\delta_{ij} + 2(r_i r_j) \right] \partial_q\left(\frac{r_i n_i}{r}\right) + \right. \\ \left. + 2 \frac{r_i n_i}{r} \partial_q(r_i r_j) - \frac{(1-2\nu)}{r} \partial_q(r_i n_j - r_j n_i) - (1-2\nu)(r_i n_j - r_j n_i) \cdot \partial_q\left(\frac{1}{r}\right) \right\}$$

(III.3.2)

Onde as derivadas que não foram explicitadas no capítulo anterior são dadas abaixo:

$$\partial_q(r_i r_j) = \frac{1}{r} \left[ (r_j \partial_q(r_i) + r_i \partial_q(r_j)) - 2r_i r_j (r_i \partial_q(r_i)) \right]$$

(III.3.3)

$$\partial_q(r_i n_j - r_j n_i) = \frac{1}{r} \left[ n_j \partial_q(r_i) + r_i \partial_q(n_j) \right] + (r_i n_j) \cdot \partial_q\left(\frac{1}{r}\right)$$

(III.3.4)

Como a interpolação geométrica para esta implementação é a mesma que a utilizada na implementação do problema de potencial as expressões desenvolvidas no capítulo anterior para  $\partial_q r_1$ ,  $\partial_q n_1$  e  $\partial_q |J|$  continuam válidas.

As tensões no contorno são expressas como função dos deslocamentos e forças de superfície nodais, além de cossenos diretores das normais aos elementos (devido à transformação para o referencial global). Como as sensibilidades destas quantidades já foram calculadas, as sensibilidades das tensões são calculadas pela simples aplicação da regra da cadeia às expressões que a definem.

Para que possam ser otimizadas estruturas simétricas, em relação à um ou mais eixos coordenados calcula-se a sensibilidade em relação à um parâmetro que varia a forma mantendo simetria. Isto é conseguido com a utilização da equação (II.5.1) onde se define um parâmetro  $Q$  de modo que  $\partial_Q q_1$  tenha módulo unitário e sinal afetado pelo posicionamento do nó parâmetro em relação ao(s) eixo(s) de simetria, bem como, direção da derivada em questão.

Tomando como exemplo o corpo da Figura (III.2.3) onde são considerados parâmetros os quatro nós do canto, tem-se para o cálculo das sensibilidades simétricas dos deslocamentos:



$$\partial_{q_1} \tilde{u} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial q_{1_1}} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial q_{2_1}} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial q_{3_1}} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial q_{4_1}}$$

$$\partial_{q_2} \tilde{u} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial q_{1_2}} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial q_{2_2}} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial q_{3_2}} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial q_{4_2}}$$

(III.3.5)

Como o sistema de equações que é resolvido para o cálculo das sensibilidades é linear, pode-se montar um único segundo membro para que as sensibilidades simétricas sejam calculadas. Para isso basta que se somem algebricamente os segundos membros relativos aos nós-parâmetro em questão, considerando os sinais introduzidos pela condição de simetria.

Na realidade para as estruturas simétricas só se discretiza a parte do contorno que gera as demais por reflexão em torno dos eixos coordenados. Então, seguindo procedimento de condensação análogo ao descrito no item anterior se conseguem efetuar todas as integrações necessárias com a mesma discretização efetuada para a análise do problema.

#### III.4 - SENSIBILIDADES DA 'COMPLIANCE' E DA TENSÃO DE VON MISES NO CONTORNO

Nos problemas de otimização tratados neste trabalho

surtem ainda duas funções que tomam lugar de função objetivo e restrição que são tensão de Von Mises,  $\sigma_e$ , em um ponto do contorno e a 'compliance' da estrutura,  $\psi_0$ , definidas respectivamente pelas expressões (III.4.1) e (III.4.2) abaixo.

$$\sigma_e = \left\{ \frac{1}{2} \left[ (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6\sigma_{12}^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III.4.1})$$

$$\psi_0 = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} p_i u_i \, d\Gamma \quad (\text{III.4.2})$$

Tais funções devem ter então suas sensibilidades expressas em termos de sensibilidades já conhecidas, o que não oferece nenhuma dificuldade.

Para a tensão de Von Mises se obtém:

$$\begin{aligned} \partial_q(\sigma_e) = \frac{1}{\sigma_e} \left( (B.\sigma_{11} - C.\sigma_{22}) \cdot \partial_q(\sigma_{11}) + \right. \\ \left. + (B.\sigma_{22} - C.\sigma_{11}) \cdot \partial_q(\sigma_{22}) + 3 \cdot \partial_q(\sigma_{12}) \right) \end{aligned} \quad (\text{III.4.3})$$

Onde:

$$A = \begin{cases} \nu, & \text{para o EPD} \\ 0, & \text{para o EPT} \end{cases}$$

$$B = (1 - A + A^2)$$

(III.4.4)

$$C = (0.5 + A + A^2)$$

Para a 'compliance', a integral em forma discretizada fica:

$$\partial_q(\varphi_0) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{Ne} \int_{\eta} \left[ (u_1 |J|) \cdot \partial_q(p_1) + (p_1 |J|) \cdot \partial_q(u_1) + (u_1 p_1) \cdot \partial_q |J| \right] d\eta$$

(III.4.5)

## CAPÍTULO IV

### O ALGORÍTMO DE OTIMIZAÇÃO

#### IV.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresenta-se os conceitos básicos do problema de otimização bem como o algoritmo adotado.

Como o propósito do presente trabalho não inclui testes exaustivos com diferentes algoritmos de otimização, adotou-se um algoritmo simples que já havia sido utilizado com sucesso para a otimização de forma. Tal algoritmo foi apresentado por GRACIA e DOBLARE em [22] .

#### IV.2 - CONCEITOS BÁSICOS

O problema de otimização pode ser escrito como:

Determinar	$x_i$	
Minimizando	$F(x_i)$	; $i=1, n$

De forma que:

$$G_j(x_i) \leq 0 \quad ; \quad j=1,m \quad (\text{IV.2.1})$$

$$H_k(x_i) = 0 \quad ; \quad k=1,l \quad (\text{IV.2.2})$$

$$x_i^{\text{inf}} \leq x_i \leq x_i^{\text{sup}} \quad (\text{IV.2.3})$$

Onde  $x_i$  são as variáveis do problema de otimização, também chamadas de variáveis de projeto e que são representadas daqui para frente pelo vetor  $\underline{x}$ .  $F$  é chamada a função objetivo e as expressões (IV.2.1) a (IV.2.3) são as restrições.

As funções  $G_j$  são as restrições de desigualdade enquanto as funções  $H_k$  são ditas restrições de igualdade. Estas funções podem ser funções implícitas ou explícitas das variáveis de projeto, porém devem ser assim como  $F$  funções contínuas e de primeiras derivadas contínuas, exceto para algumas classes de problemas de otimização. Quando um projeto satisfaz todas as restrições diz-se que ele é factível.

A inequação (IV.2.3) define limites para as variáveis de projeto que poderiam ser incluídos como restrições de desigualdade, porém são usualmente tratados separadamente pois definem uma região de procura do ótimo.

Pode-se escrever três condições que devem ser necessariamente satisfeitas para o caso de  $\underline{x}$  ser um ótimo.

Tais condições são conhecidas como condições de Kuhn-Tucker e são escritas matematicamente como:

$$1) \underline{x} \text{ é factível .} \quad (\text{IV.2.4})$$

$$2) \lambda_j \cdot G_j(\underline{x}) = 0$$

$$\text{com } j=1, m \text{ e } \lambda_j \geq 0 \quad (\text{IV.2.5})$$

$$3) \nabla F(\underline{x}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla G_j(\underline{x}) + \sum_{k=1}^l \lambda_{m+k} \nabla H_k(\underline{x}) = \underline{0}$$

$$\text{com } \lambda_j \geq 0 \quad (\text{IV.2.6})$$

$$\lambda_{m+k} \text{ quaisquer}$$

A expressão (IV.2.4) diz que  $\underline{x}$  deve satisfazer todas as restrições. A segunda condição (IV.2.5) impõe que se  $G_j(\underline{x})$  não é crítica (isto é,  $G_j(\underline{x}) < 0$ ) então o correspondente multiplicador de lagrange é nulo. E a terceira impõe que, em um ponto de ótimo, um vetor de mesmo módulo, direção e sentido oposto ao gradiente de  $F$  em relação as variáveis de projeto ( $\nabla F(\underline{x})$ ) é obtida por uma combinação linear dos gradientes das funções restrição de desigualdade críticas e dos gradientes das funções de restrição de igualdade, sendo que os coeficientes daquelas devem ser positivos.

Tais condições só são suficientes quando tanto a função objetivo quanto as funções restrição são convexas. A definição precisa de convexidade pode ser encontrada em

VANDERPLATS [23] , que também desenvolve as condições de Kuhn-Tucker de modo bastante claro.

### IV.3 - IMPLEMENTAÇÃO

No presente trabalho trata-se apenas do problema de otimização com uma única função restrição que será uma restrição de igualdade. Sendo assim, define-se este problema mais simples como:

Determinar  $\underline{x}$

Minimizando  $F(\underline{x})$  (IV.3.1)

De forma que:

$H(\underline{x}) = 0$  (IV.3.2)

Para este caso as condições de Kuhn-Tucker se resumem a:

$H(\underline{x}) = 0$  (IV.3.2)

$\nabla F(\underline{x}) + \lambda \nabla H(\underline{x}) = 0$  (IV.3.3)

Sendo que a eq. (IV.3.3) pode ser reescrita como:

$$\frac{\nabla F(\underline{x}) \cdot \nabla H(\underline{x})}{|\nabla F(\underline{x})| \cdot |\nabla H(\underline{x})|} = -1 \quad (\text{IV.3.4})$$

Estas restrições só são satisfeitas numericamente, de forma aproximada. Portanto deve-se atender:

$$-\varepsilon_{\text{abs}} \leq H(\underline{x}) \leq \varepsilon_{\text{abs}} \quad (\text{IV.3.5})$$

$$\frac{\nabla F(\underline{x}) \cdot \nabla H(\underline{x})}{|\nabla F(\underline{x})| \cdot |\nabla H(\underline{x})|} \leq \cos(\pi - \varepsilon_{\theta}) \quad (\text{IV.3.6})$$

Onde foram introduzidos  $\varepsilon_{\text{abs}}$  e  $\varepsilon_{\theta}$  que podem ser entendidos respectivamente como uma tolerância de projeto ao valor absoluto da restrição e uma tolerância angular na determinação do ponto ótimo.

O espaço das variáveis de projeto pode ser representado graficamente para o caso de duas variáveis como nas Figuras (IV.3.1) e (IV.3.2) onde são evidenciados os significados geométricos de  $\varepsilon_{\text{abs}}$  e  $\varepsilon_{\theta}$ .

Pode-se observar então que a restrição de igualdade inicial é substituída por uma faixa de restrição de largura  $2\varepsilon_{\text{abs}}$  ( Figura (IV.2.2) ).



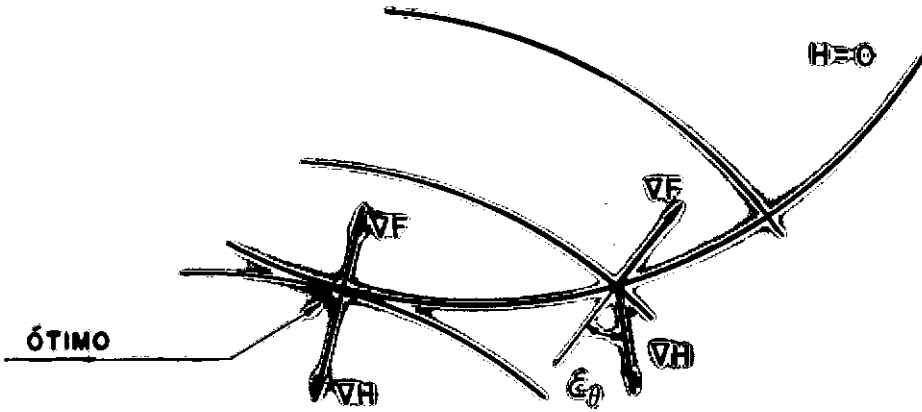


Figura (IV.3.1) - Significado geométrico de  $\epsilon_\theta$ .

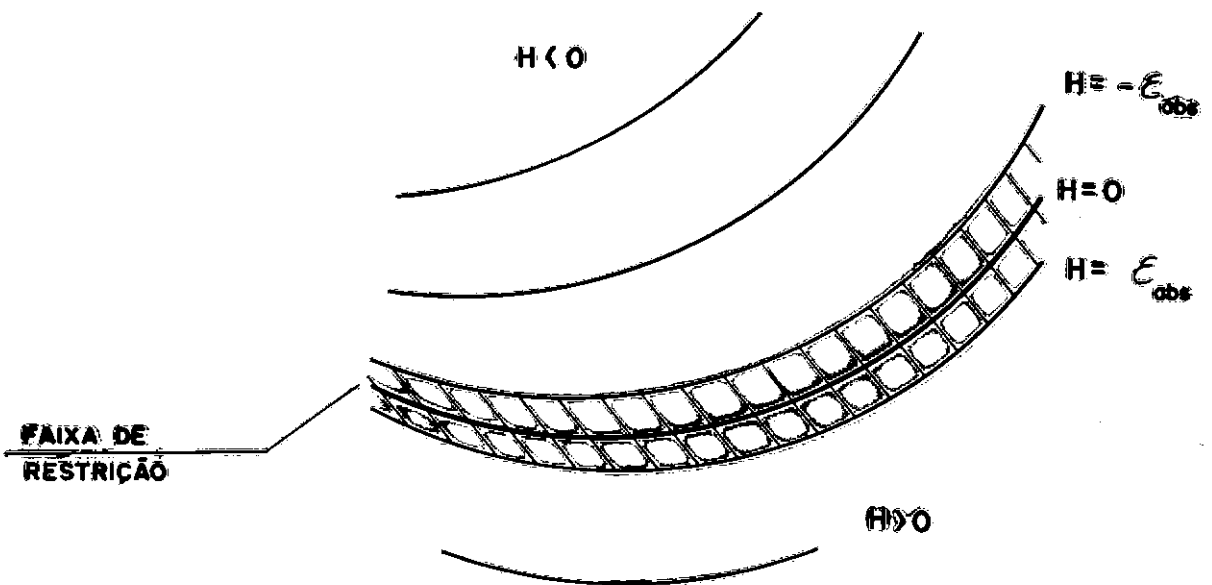


Figura (IV.3.2) - Significado geométrico de  $\epsilon_{abs}$ .

A otimização é efetuada através de um processo iterativo. Se em um dado momento deste processo, por exemplo na iteração  $K$ , são satisfeitas as equações (IV.3.5) e (IV.3.6), então foi atingido o ótimo e o processo para. Caso contrário, tenta-se obter um projeto, isto é, um ponto mais próximo do ótimo através de estratégias que variam de acordo com a posição do ponto inicial em relação a faixa de restrição.

Para o caso em que o ponto inicial  $\underline{x}_k$  fica na região do espaço de projeto em que  $H(\underline{x}_k) < -\epsilon_{abs}$  a direção de procura é a direção do gradiente da função objetivo porém de sentido contrário. Pode-se então escrever o novo ponto  $\underline{x}_{k+1}$  como:

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + \alpha_k \cdot (-\nabla F) \quad (\text{IV.3.7})$$

Impondo a condição de que o novo ponto satisfaça a restrição vem:

$$H(\underline{x}_k + \alpha_k \cdot (-\nabla F(\underline{x}_k))) = 0 \quad (\text{IV.3.8})$$

Adotando uma aproximação linear para a função  $H$  na vizinhança de  $\underline{x}_k$  tem-se:

$$H(\underline{x}_k + \alpha_k \cdot (-\nabla F(\underline{x}_k))) = H(\underline{x}_k) - \alpha_k \nabla F(\underline{x}_k) \cdot \nabla H(\underline{x}_k)$$

$$(\text{IV.3.9})$$

Portanto, levando-se em conta (IV.3.8) e (IV.3.9) vem:

$$\alpha_k = \frac{H(\underline{x}_k)}{\nabla F(\underline{x}_k) \cdot \nabla H(\underline{x}_k)} \quad (\text{IV.3.10})$$

Para o caso em que o ponto inicial se localiza na região em que  $H(\underline{x}_k) > \varepsilon_{\text{abs}}$  a direção de busca de um novo ponto é a direção do gradiente da função restrição e sentido contrário a ele:

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + \alpha_k \cdot (-\nabla H(\underline{x}_k)) \quad (\text{IV.3.11})$$

Da mesma forma que no caso anterior, impondo a condição de que o novo ponto deva satisfazer à restrição e adotando uma aproximação linear para  $H$  na vizinhança de  $\underline{x}_k$  tem-se:

$$H(\underline{x}_k) - \alpha_k \nabla H(\underline{x}_k) \cdot \nabla H(\underline{x}_k) = 0 \quad (\text{IV.3.12})$$

$$\therefore \alpha_k = \frac{H(\underline{x}_k)}{\nabla H(\underline{x}_k) \cdot \nabla H(\underline{x}_k)} \quad (\text{IV.3.13})$$

Se o ponto se encontra dentro da faixa de restrição o novo ponto é obtido através de um movimento no espaço de projeto constituído de duas etapas. Uma visando minimizar a função objetivo com a direção do gradiente de  $F(\underline{x}_k)$  e sentido contrário e a outra objetivando manter o ponto dentro da faixa de restrição com a direção da projeção do gradiente de  $H(\underline{x}_k)$  sobre o hiperplano tangente a função

objetivo ( $\underline{s}_k$ ).

O novo ponto é dado então por:

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}'_k + \beta_k \cdot \underline{s}_k \quad (\text{IV.3.14})$$

$$\underline{x}'_k = \underline{x}_k + \alpha_k \cdot ( -\nabla F(\underline{x}_k) )$$

Ou então de forma mais compacta:

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + \alpha_k \cdot ( -\nabla F(\underline{x}_k) ) + \beta_k \cdot \underline{s}_k \quad (\text{IV.3.15})$$

O vetor  $\underline{s}_k$  pode ser obtido, como mostra esquematicamente a Figura (IV.3.3), pela soma da componente de  $\nabla H(\underline{x}_k)$  na direção de  $\nabla F(\underline{x}_k)$  e  $-\nabla H(\underline{x}_k)$ , isto é:

$$\underline{s}_k = \left( \nabla H(\underline{x}_k) \cdot \frac{\nabla F(\underline{x}_k)}{|\nabla F(\underline{x}_k)|} \right) \cdot \frac{\nabla F(\underline{x}_k)}{|\nabla F(\underline{x}_k)|} - \nabla H(\underline{x}_k) \quad (\text{IV.3.16})$$

Para o caso de  $-\varepsilon_{\text{abs}} < H(\underline{x}_k) < 0$  (Figura (IV.3.4) ) a obtenção de  $\alpha_k$  se faz tentando atingir o extremo oposto da faixa de restrição, isto é:

$$H( \underline{x}_k - \alpha_k \cdot \nabla F(\underline{x}_k) ) = \varepsilon_{\text{abs}} \quad (\text{IV.3.17})$$

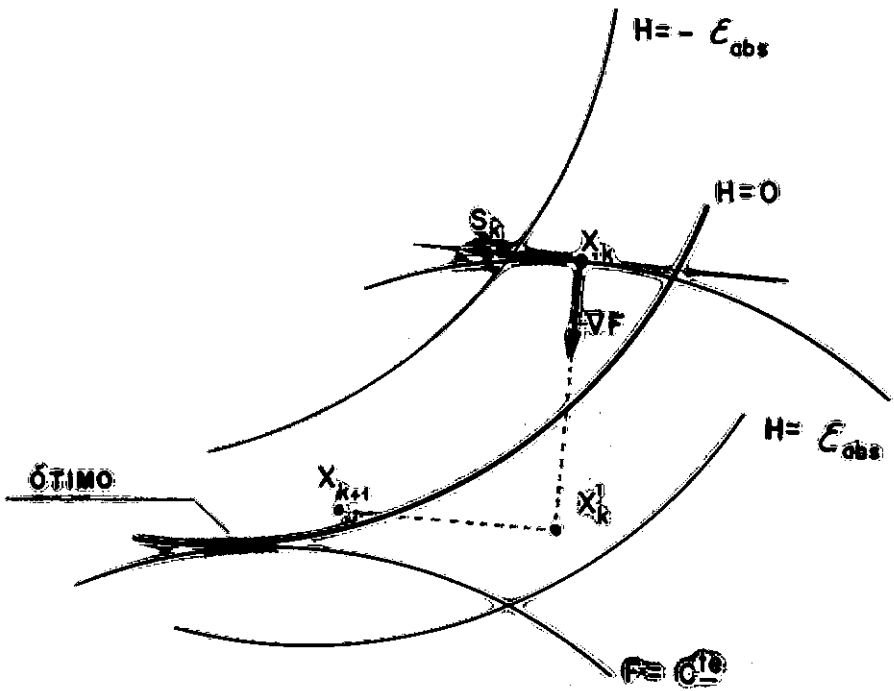


Figura (IV.3.3) - Obtenção de  $s_k$ .

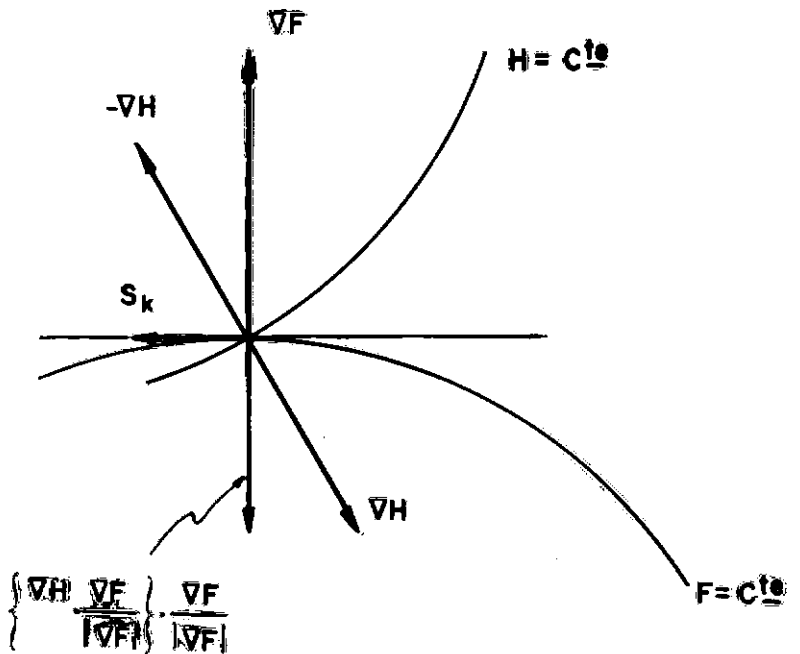


Figura (IV.3.4) - Pontos dentro da faixa de restrição.

Mais uma vez adotando a mesma aproximação para  $H(\tilde{x}_k)$ :

$$H(\tilde{x}_k) - \alpha_k \nabla F(\tilde{x}_k) \cdot \nabla H(\tilde{x}_k) = \varepsilon_{abs} \quad (\text{IV.3.18})$$

$$\therefore \alpha_k = \frac{H(\tilde{x}_k) - \varepsilon_{abs}}{\nabla F(\tilde{x}_k) \cdot \nabla H(\tilde{x}_k)} \quad (\text{IV.3.19})$$

A obtenção de  $\beta_k$  é feita tentando satisfazer à restrição :

$$H(\tilde{x}'_k + \beta_k \cdot \tilde{s}_k) = 0 \quad (\text{IV.3.20})$$

Com a aproximação adotada para  $H$  :

$$H(\tilde{x}_k) + \beta_k \cdot (\tilde{s}_k \cdot \nabla H(\tilde{x}_k)) = 0 \quad (\text{IV.3.21})$$

Portanto:

$$\beta_k = \frac{-\varepsilon_{abs}}{\tilde{s}_k \cdot \nabla H(\tilde{x}_k)} \quad (\text{IV.3.22})$$

Analogamente se obtém para  $0 < H(\tilde{x}_k) < \varepsilon_{abs}$  :

$$\alpha_k = \frac{\varepsilon_{abs}}{\nabla F(\tilde{x}_k) \cdot \nabla H(\tilde{x}_k)} \quad (\text{IV.3.23})$$

$$\beta_k = \frac{-H(\tilde{x}_k) - \varepsilon_{abs}}{\tilde{s}_k \cdot \nabla H(\tilde{x}_k)} \quad (\text{IV.3.24})$$

Quando o ponto  $\tilde{x}_k$  se aproxima do mínimo dentro da faixa de restrição o segundo passo do movimento tende a se tornar singular, isto é,  $s_k \cdot \nabla H(\tilde{x}_k)$  tende para 0 e  $\beta_k$  para infinito fazendo com que  $\tilde{x}_{k+1}$  se afaste muito do ótimo e inviabilizando o processo de otimização. Para prevenir o aparecimento desta singularidade a faixa de restrição tem sua largura corrigida a cada iteração. Isto é feito afetando-se sua semi-largura  $\varepsilon_{abs}$  pelo ângulo  $\varphi$  entre os dois gradientes  $\nabla H(\tilde{x}_k)$  e  $\nabla F(\tilde{x}_k)$  da seguinte forma:

$$\varepsilon_{abs}^k \leq \gamma \text{ sen}(\varphi) \quad (\text{IV.3.25})$$

Onde  $\gamma$  é um parâmetro que depende do tipo de problema em questão.

A figura (IV.3.5) mostra um fluxograma do algoritmo apresentado.

Neste trabalho a etapa do processo de otimização de cálculo de H compreende a montagem da matriz  $\underline{A}$ , do termo independente  $\underline{d}$ , a resolução do sistema de equações assim formado e, finalmente, o cálculo da função restrição H propriamente dita. De maneira análoga, o cálculo dos gradientes de F ou H, na mesma iteração, compreende a formação dos termos independentes  $\partial_q \underline{d}$  correspondentes à cada nó-parâmetro, a resolução do sistema assim formado e, a partir das sensibilidades de  $\underline{u}$  e  $\underline{p}$  assim obtidas, o cálculo das sensibilidades de F ou H em relação aos parâmetros de otimização.

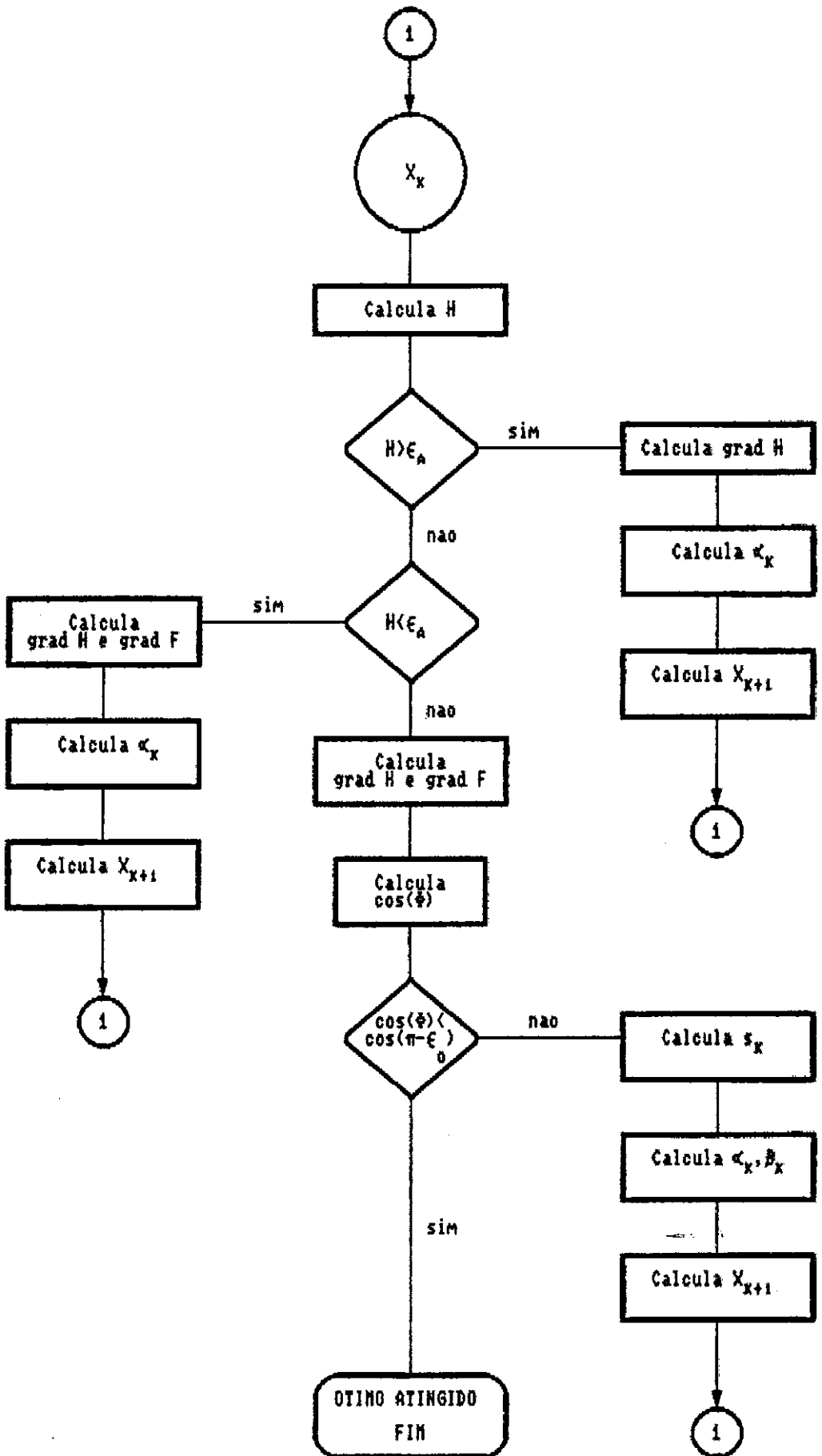


Figura (IV.3.5) – Fluxograma do Algoritmo de Otimização.



## CAPÍTULO V

### APLICAÇÕES

#### V.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo são descritos os exemplos nos quais foi testado o método desenvolvido.

O primeiro exemplo tem como objetivo verificar a convergência e a precisão. Os três que se seguem mostram aplicações do método à otimização de forma.

#### V.2 - FURO ELÍPTICO NO MEIO INFINITO TRACIONADO

O cálculo das sensibilidades em questão se refere ao problema da elasticidade plana da determinação dos deslocamentos e tensões, ao longo de um furo de forma elíptica em um meio infinito tracionado na direção perpendicular ao eixo maior da referida elipse, como mostra a Figura (V.2.1).

Este problema tem sua solução analítica desenvolvida por MUSKHELISHVILI [12], sendo que as expressões para os deslocamentos e tensões são aqui repetidas no apêndice B.

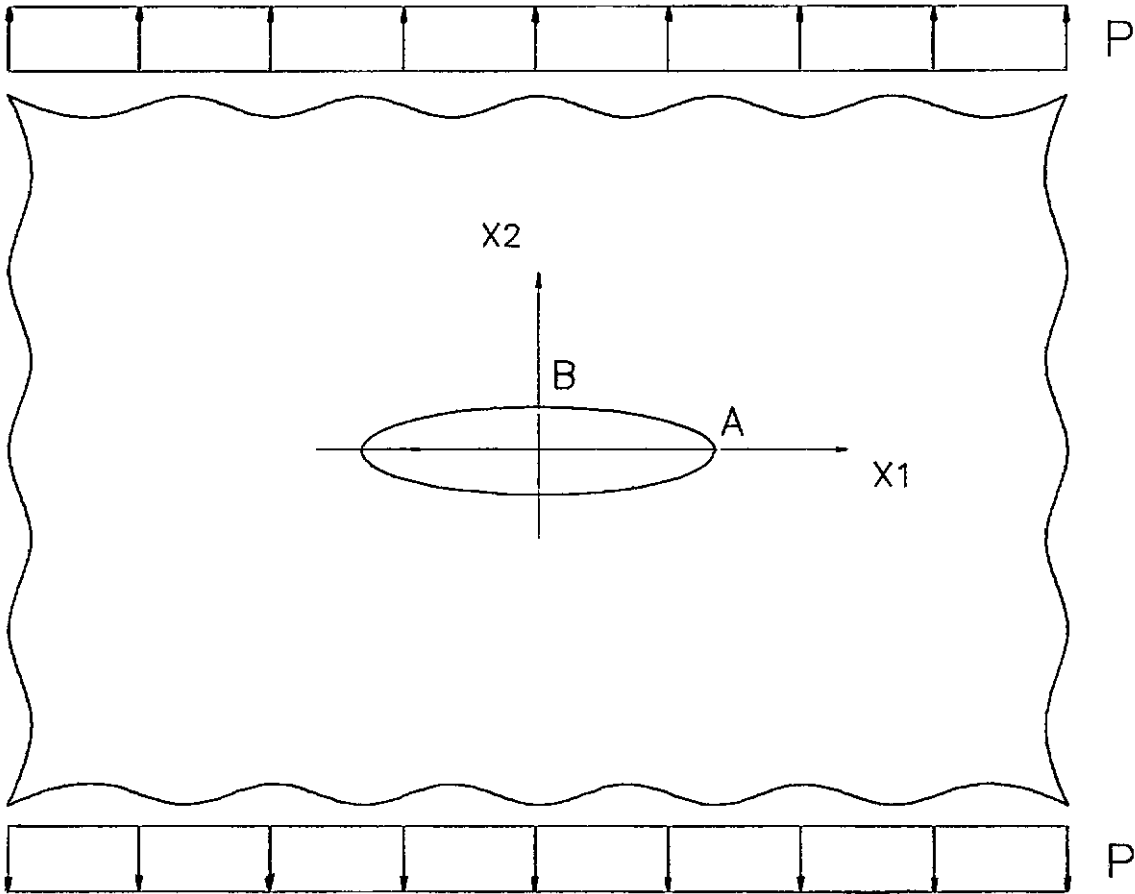


Figura (V.2.1) – Furo elíptico no meio infinito tracionado.

Deseja-se verificar a convergência e a precisão do método desenvolvido na determinação da sensibilidade de deslocamentos e tensões no contorno. Para isto são comparadas as sensibilidades numéricas em relação à variação do eixo maior da elipse com as sensibilidades calculadas de forma analítica. Estas últimas podem ser obtidas através da derivação da solução analítica conforme [10] e são apresentadas no Apêndice B.

São comparadas as respostas para furos elípticos com três razões entre eixos diferentes: 1, 4 e 8.

A modelagem do problema foi feita usando-se a característica de dupla simetria do problema. Os nós ao longo do quarto de elipse discretizado foram gerados de forma automática. Uma maior concentração de nós é obtida na região onde existe uma variação mais 'rápida' da resposta do problema.

Sendo as coordenadas dos pontos da elipse dadas por suas equações paramétricas como:

$$\begin{aligned} x &= a \cdot \cos(\theta) \\ y &= b \cdot \text{sen}(\theta) \end{aligned} \tag{V.2.1}$$

Os ângulos  $\theta$  correspondentes aos nós foram obtidos, então, através da atribuição de valores a  $\zeta$ , entre 0 e 1 igualmente espaçados, na transformação quadrática dada abaixo:

$$\theta = \frac{\pi}{4} ( 1 - \zeta^2 ) \quad (V.2.2)$$

A concentração dos nós é mostrada pela Figura (V.2.2) para uma discretização com 20 elementos para as diversas razões entre eixos estudadas.

Foram testados dois modelos diferentes. Um em que é simulado o meio infinito por uma região de forma quadrada de lado igual a 100 vezes o eixo maior da elipse ( com 5 elementos por semi-lado ) e é aplicada a tração como força de superfície em um dos lados. O outro modelo utilizado está baseado no princípio da superposição dos efeitos. É considerado que o problema inicial equivale a superposição da resposta de dois problemas. O primeiro deles consiste em um meio infinito tracionado, sem furo algum. O segundo é o meio infinito com um furo elíptico no qual se aplicam forças de superfície. Estas forças são as que se desenvolvem no primeiro problema ao longo de uma superfície imaginária com a mesma forma do furo e sinal contrário, como mostra a Figura (V.2.3).

## Discretização dos Furos Elípticos com 20 elementos

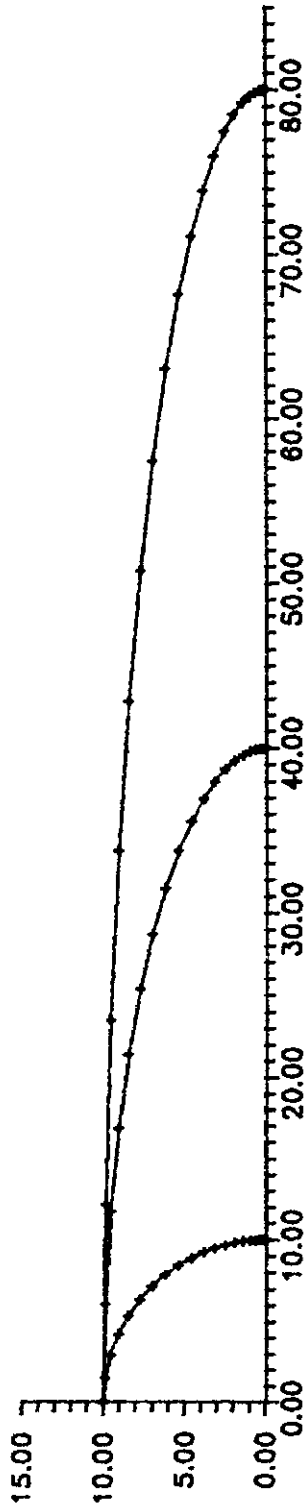
Razão entre eixos (  $a/b$  ) : 1 , 4 e 8

Figura (V.2.2) – Discretização dos furos elípticos.

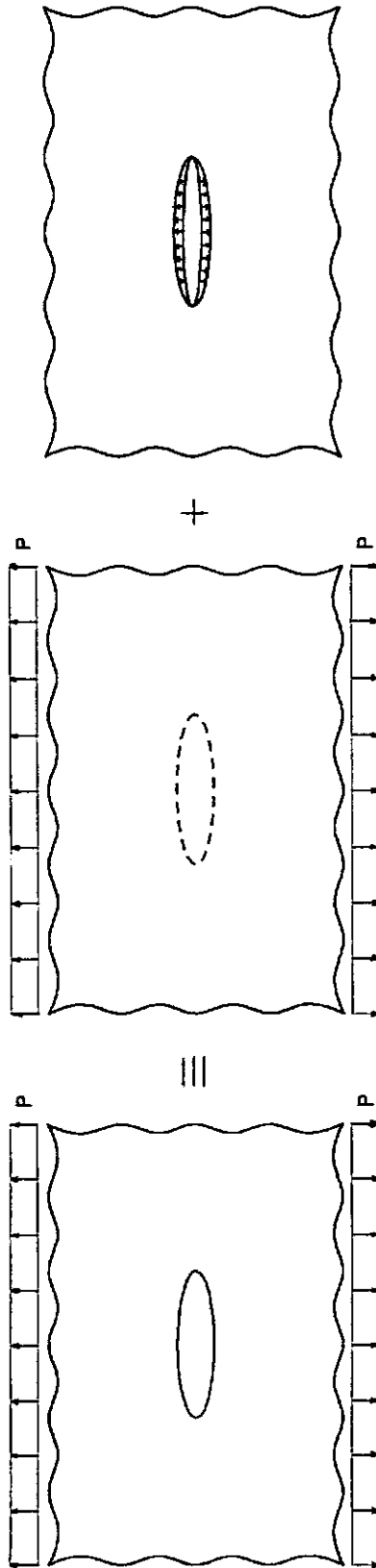


Figura (V.2.3) – Modelo da superposição dos efeitos.

Estes dois modelos serviram para comparar a variação da precisão dos resultados com a introdução das derivadas das incógnitas prescritas, forças de superfície ao longo da elipse no segundo modelo, que não são necessárias no primeiro.

A convergência do método pode ser examinada pela observação dos gráficos a seguir que mostram a variação das respostas para o deslocamento vertical no ponto B e a tensão  $\sigma_{22}$  no ponto A da Figura (V.2.1). Foram analisadas malhas com 20, 40 e 80 elementos ao longo do furo pelo modelo da superposição e para razões a/b iguais a 1, 4 e 8. Supondo o Estado Plano de Deformação, foram adotados  $\nu = 0,3$  ;  $E = 3.000$  MPa e  $P = 10$  MPa.

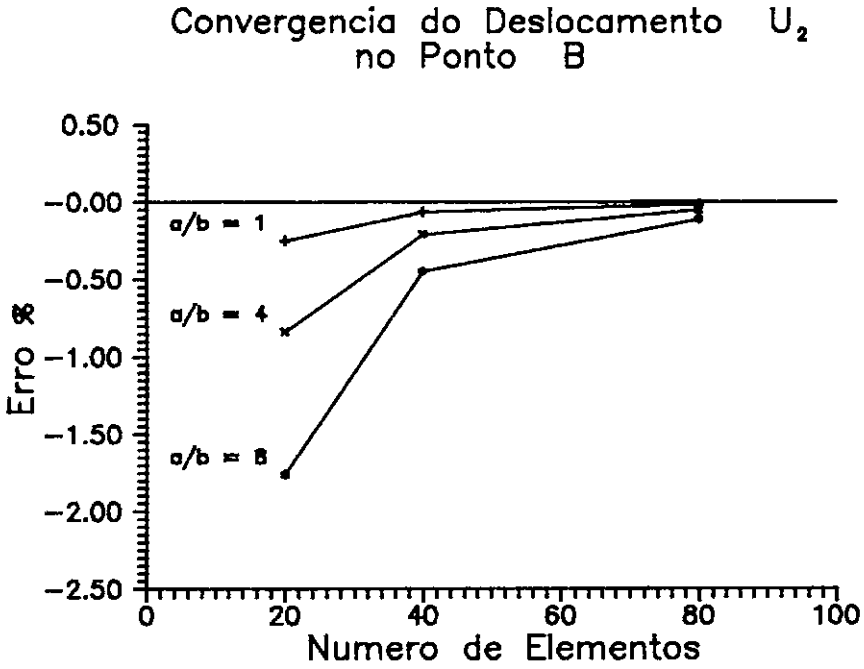


Gráfico (V.2.1.a) - Convergência de  $U_2$  .

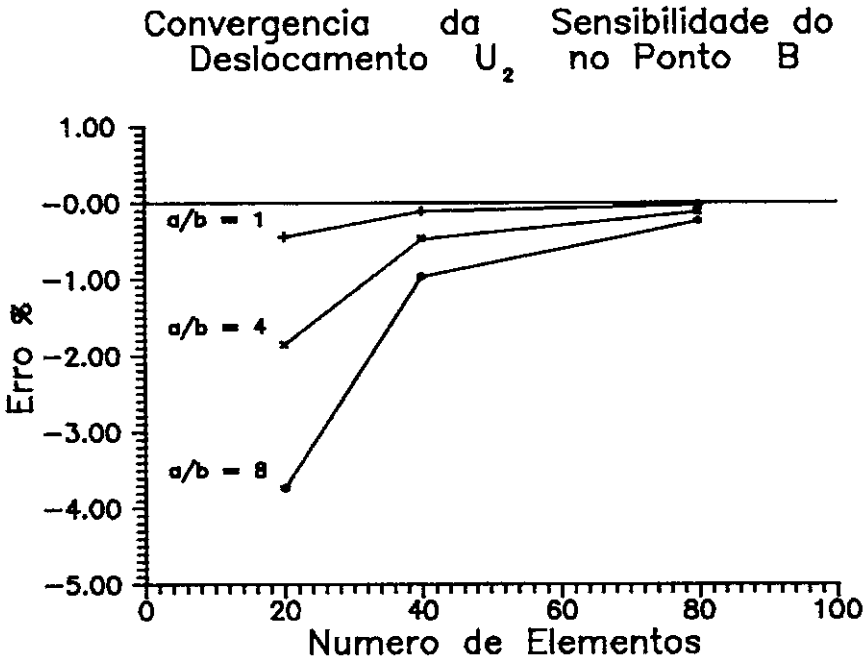


Gráfico (V.2.1.b) - Convergência de  $\partial U_2$  .



Convergencia da Tensao  $S_{22}$   
no Ponto A

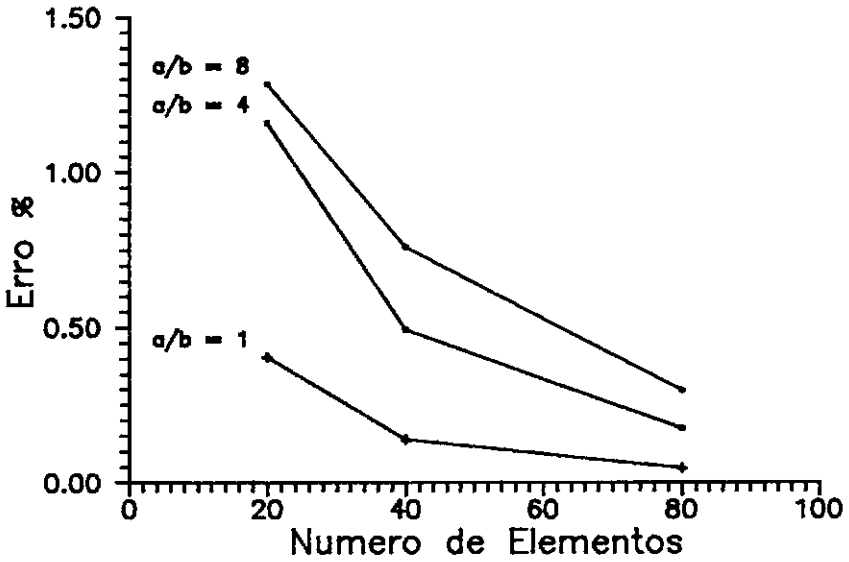


Gráfico (V.2.2.a) - Convergência de  $S_{22}$  .

Convergencia da Sensibilidade da  
Tensao  $S_{22}$  no Ponto A

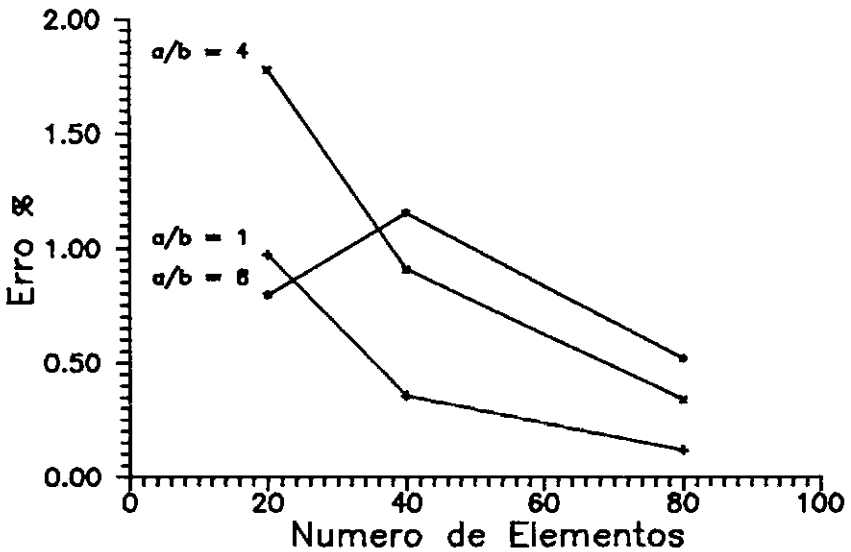


Gráfico (V.2.2.b) - Convergência de  $\partial S_{22}$  .

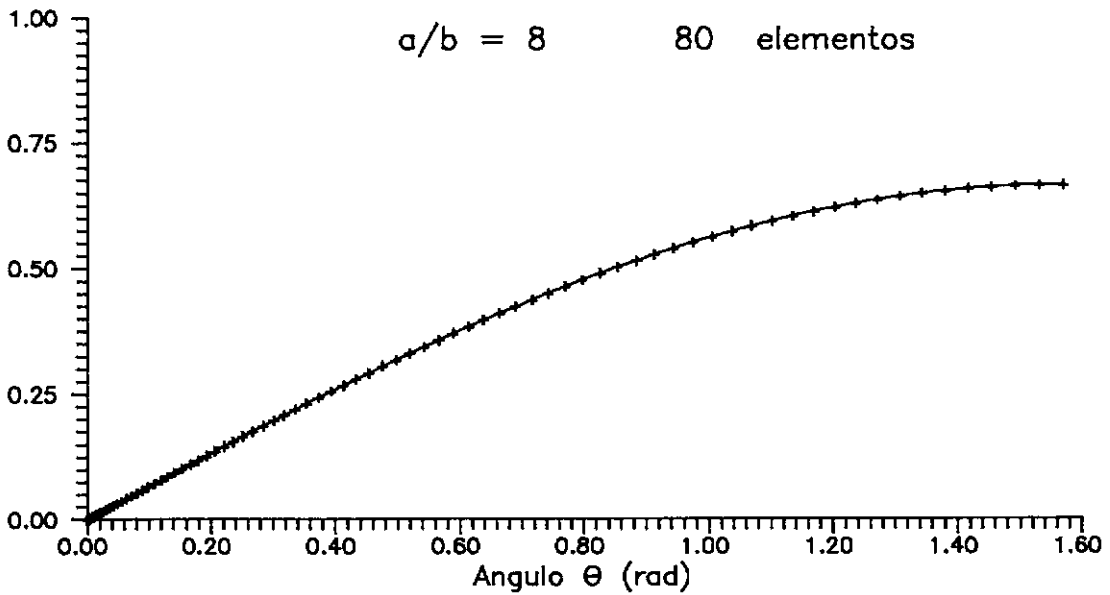
A precisão do método pode ser vista pelos gráficos que são apresentados a seguir e mostram os erros absoluto e relativo das sensibilidades do deslocamento vertical e da tensão de Von Mises ao longo do furo.

O problema também foi analisado para o Estado Plano de Tensões (mesmas constantes elásticas) utilizando os dois modelos descritos com 80 elementos lineares para a discretização da elipse com  $a/b$  igual a 8.

$d_q U_2$  (x100) Analítico e pelo Modelo da Superposição  
ao longo do furo elíptico

$a/b = 8$

80 elementos



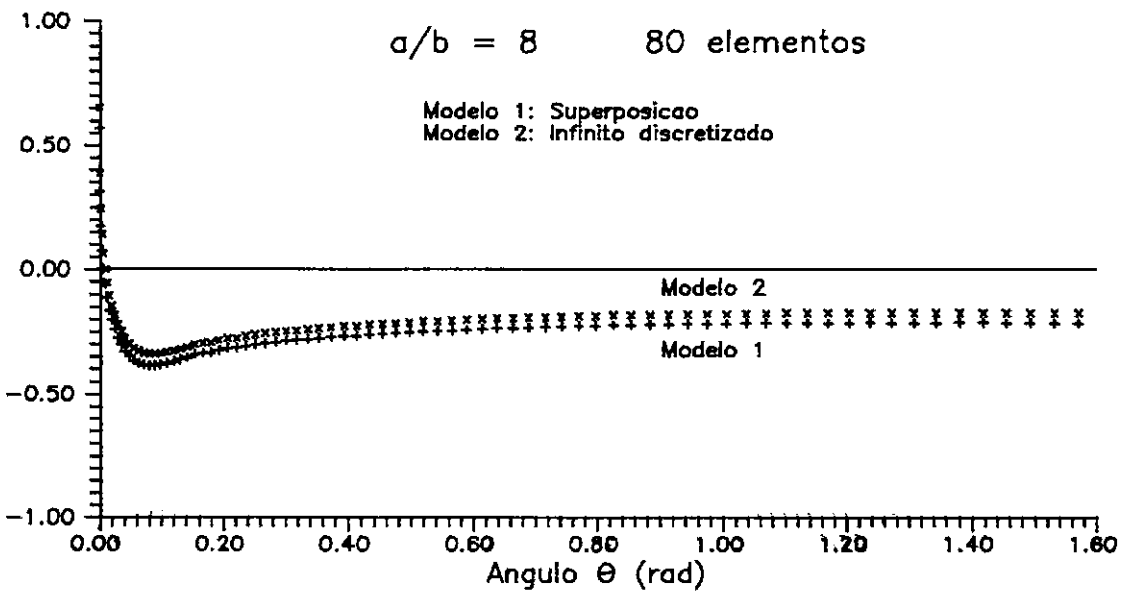
Erro Percentual Relativo da Sensibilidade  
de  $U_2$  ao longo do furo elíptico

$a/b = 8$

80 elementos

Modelo 1: Superposicao

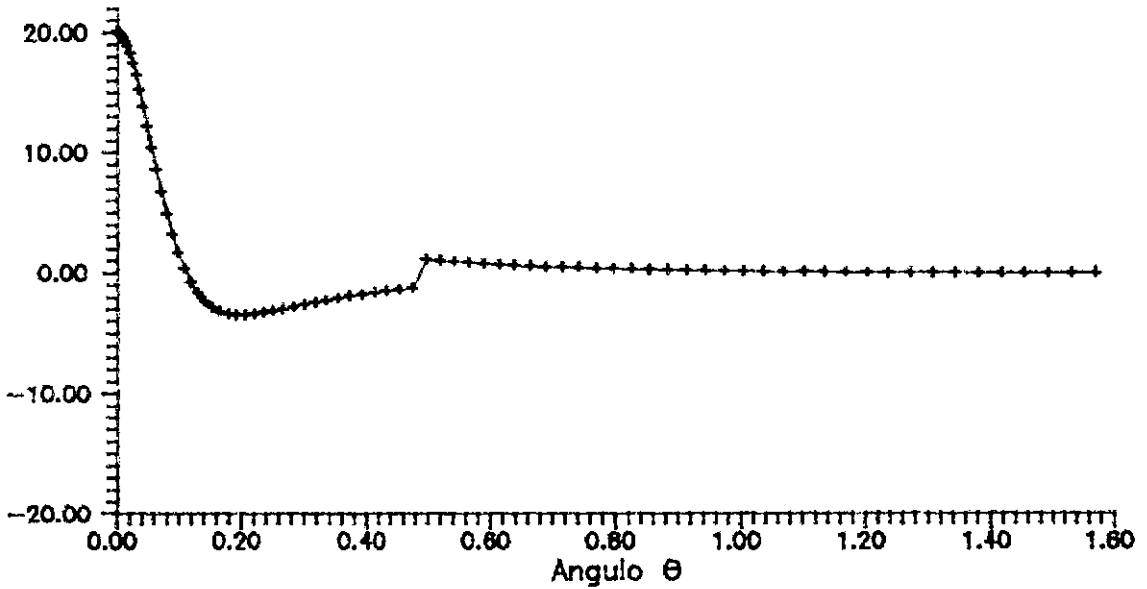
Modelo 2: Infinito discretizado



$d_q S_e . b / P$  analítico e modelo da superposição

$a/b = 8$

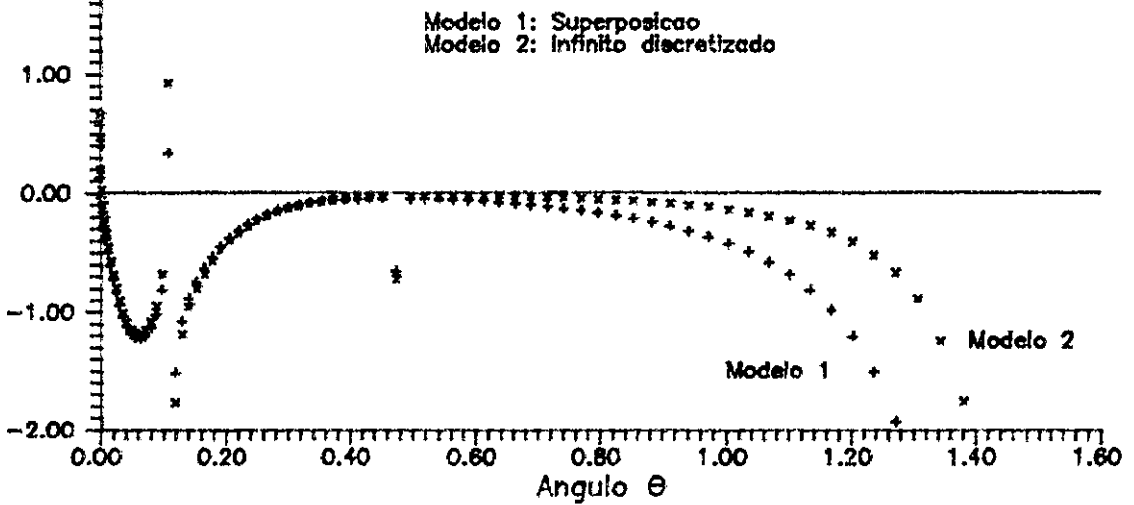
80 elementos



Erro Percentual Relativo da Sensibilidade da Tensão de Von Mises ao longo do furo elítico

$a/b = 8$

80 elementos



### V.3 - TORÇÃO DE BARRA PRISMÁTICA

Esta aplicação consiste em se obter a forma da seção transversal de um eixo de seção constante com uma rigidez torsional determinada e a área mínima.

Impõe-se como rigidez torsional aquela obtida pelo M.E.C. para a discretização de uma seção circular com 16 elementos constantes e de igual comprimento, conforme a Figura (V.3.1).

Observa-se nas figuras e tabelas que se seguem a convergência a partir de diversas formas aleatórias iniciais com 2 e 3 nós-parâmetro. Nestas tabelas é mostrada a evolução da diferença percentual entre a área da seção transversal e da rigidez torsional geradas a cada iteração e os valores correspondentes do polígono regular usado para obter o valor da rigidez imposto. Nas tabelas que se seguem as iterações em que as variáveis de otimização são representadas por um ponto dentro da faixa de restrição são assinaladas com o símbolo \* .

Como neste caso as variáveis de otimização são as coordenadas dos nós-parâmetro, temos nos exemplos que se seguem respectivamente 4 e 6 destas variáveis.

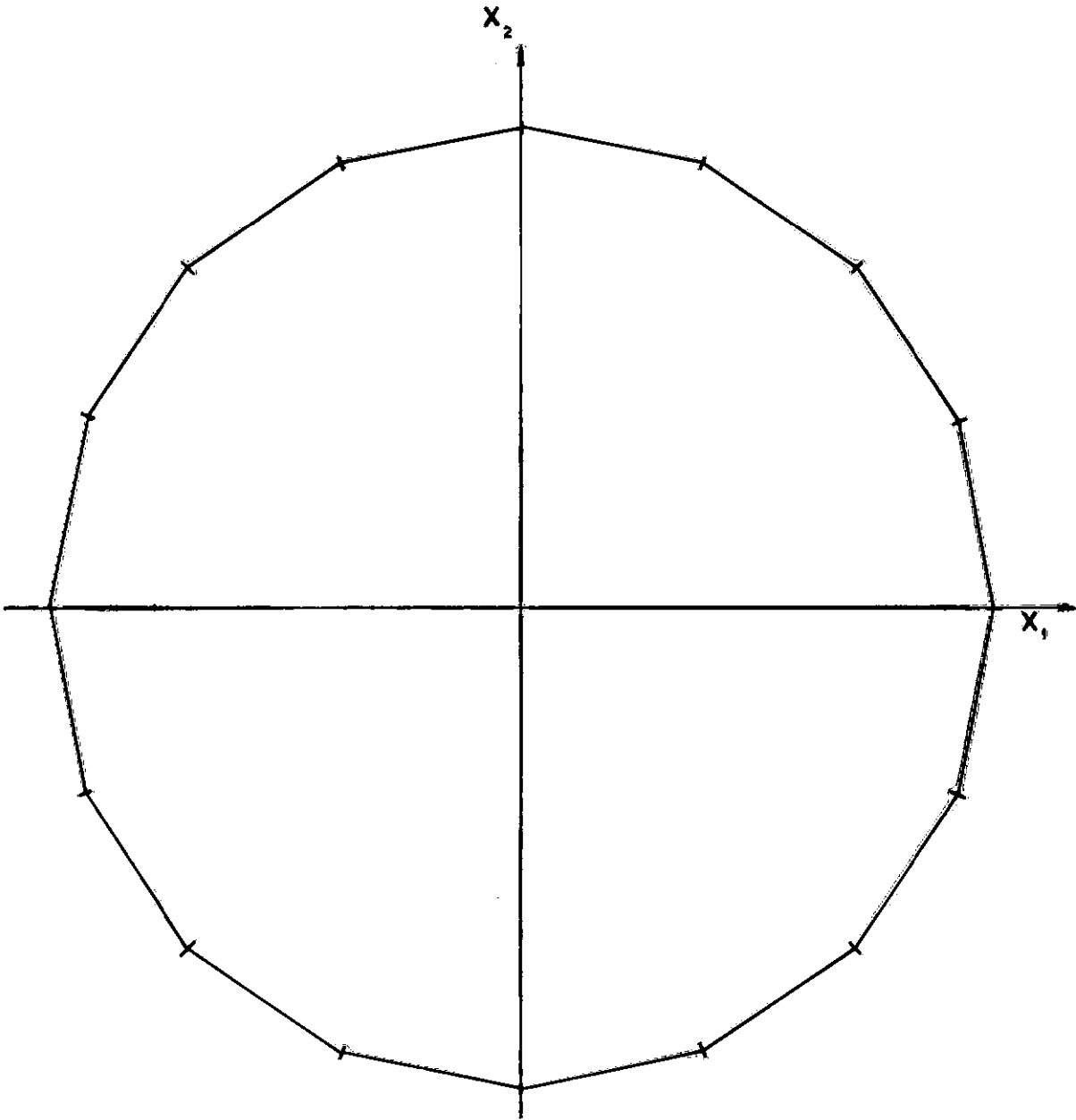


Figura (V.3.1) - Discretização do eixo circular.

## Otimização de Eixo Submetido a Torção

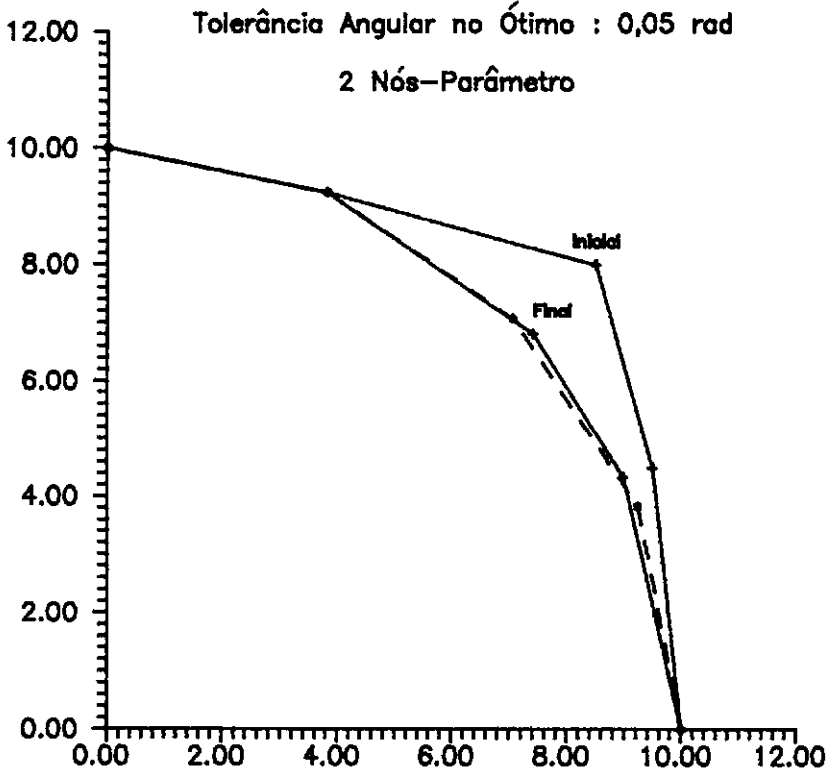


Figura (V.3.2) - Formas inicial e final do eixo.

Iteração	$\Delta\%$ Rig. Tors.	$\Delta\%$ Área	$\varphi$ (rad)
Inicial	4,76	2,99	3,076
1*	$-5,31 \times 10^{-2}$	$5,82 \times 10^{-2}$	3,044
2	$-1,92 \times 10^{-1}$	$-8,91 \times 10^{-2}$	3,127
3*	$-6,72 \times 10^{-4}$	$-7,27 \times 10^{-3}$	3,127

## Otimização de Eixo Submetido a Torção

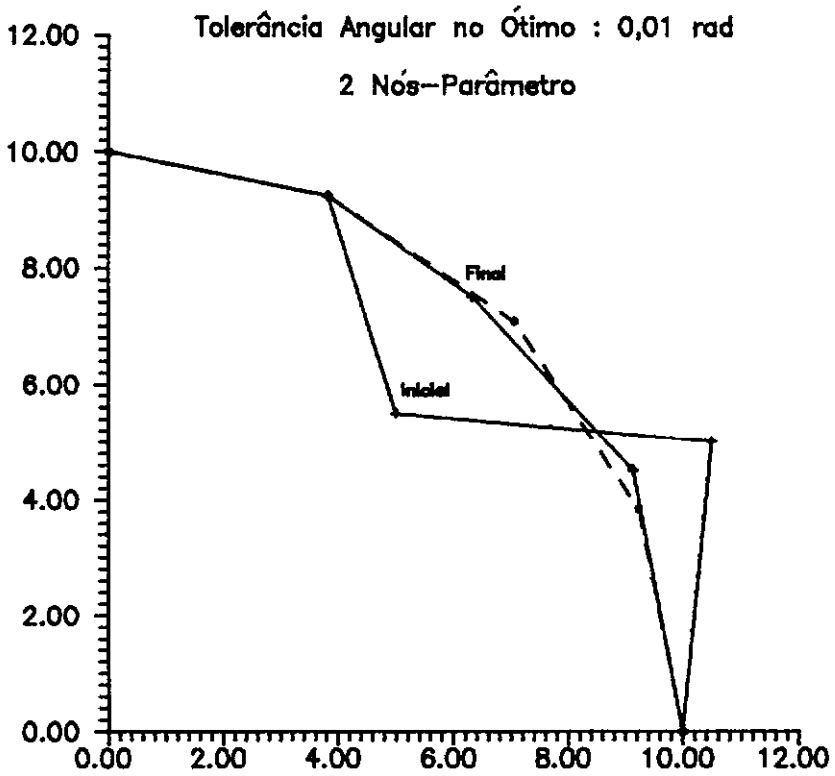


Figura (V.3.3) - Formas inicial e final do eixo.

Iteração	$\Delta\%$ Rig. Tors.	$\Delta\%$ Área	$\psi$ (rad)
Inicial	-4,14	-1,13	2,875
1	$-1,70 \times 10^{-1}$	$4,29 \times 10^{-1}$	2,941
2*	$-7,34 \times 10^{-2}$	$2,72 \times 10^{-1}$	2,941
3*	$-6,56 \times 10^{-2}$	$1,33 \times 10^{-1}$	3,014
4*	$-8,54 \times 10^{-2}$	$1,67 \times 10^{-2}$	3,063
5	$-1,56 \times 10^{-2}$	$-7,60 \times 10^{-2}$	3,134
6*	$-6,72 \times 10^{-2}$	$1,39 \times 10^{-2}$	3,135



## Otimização de Eixo Submetido a Torção

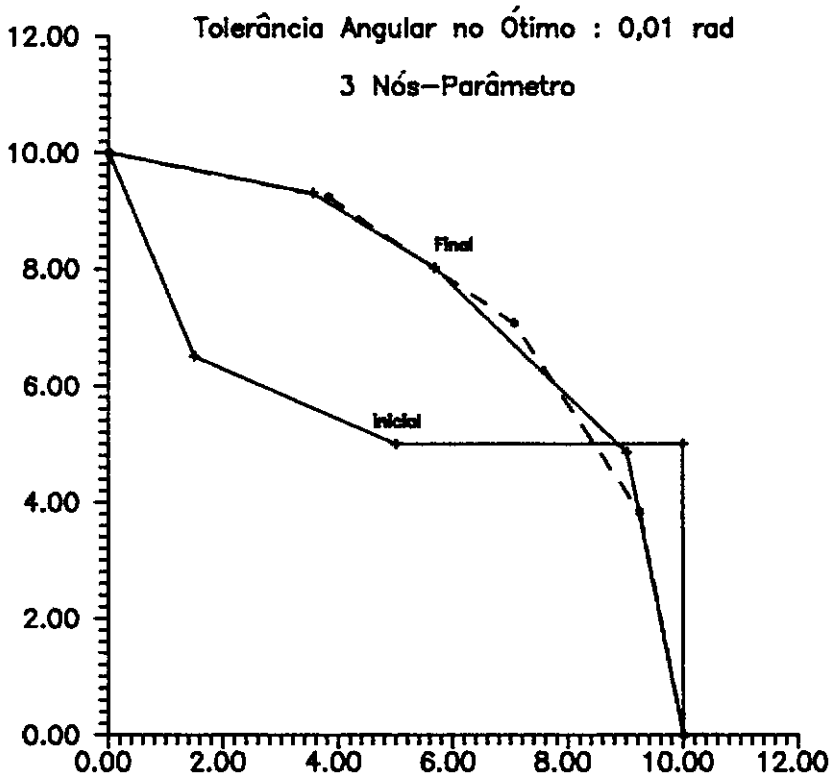


Figura (V.3.4) - Formas inicial e final do eixo.

Iteração	$\Delta\%$ Rig. Tors.	$\Delta\%$ Área	$\varphi$ (rad)
Inicial	-17,0	-6,22	2,830
1	-1,31	$-4,50 \times 10^{-2}$	2,928
3*	$-1,07 \times 10^{-2}$	$4,56 \times 10^{-1}$	2,957
5*	$-1,13 \times 10^{-2}$	$3,15 \times 10^{-1}$	2,990
7*	$-1,15 \times 10^{-2}$	$1,97 \times 10^{-1}$	3,021
9*	$-1,27 \times 10^{-2}$	$1,02 \times 10^{-1}$	3,070
11*	$-1,61 \times 10^{-2}$	$3,07 \times 10^{-2}$	3,089
13	$-3,57 \times 10^{-2}$	$-1,38 \times 10^{-2}$	3,134
14*	$6,72 \times 10^{-7}$	$3,94 \times 10^{-3}$	3,135

#### V.4 - CHAPA TRACIONADA COM FURO

Este problema consiste em se determinar a forma do furo de uma chapa elástica quadrada, de espessura constante, que confira a esta chapa a menor 'compliance' (como definido em III.4), quando tracionada por uma força de superfície constante em seus quatro lados como mostra a Figura (V.4.1).

Como restrição adota-se a área do furo que deve ser mantida em um centésimo da área da chapa sem o furo.

Tendo em vista a simetria só é discretizada um quarto da chapa. A discretização inicial apresenta 4 elementos lineares (5 nós) de mesmo comprimento por cada semi-lado da chapa, sendo que o nó do canto é duplo. O furo é inicialmente quadrado com um elemento por semi-lado.

Após ser atingida a forma ótima do furo, sua discretização foi refinada dividindo-se cada elemento ao meio e utilizando-se esta forma como forma inicial para um novo estágio de otimização. Repetiu-se este processo até que foi alcançada uma forma ótima com o furo discretizado por 8 elementos.

Neste caso, as variáveis de otimização também são as coordenadas dos nós-parâmetro e as figuras e tabelas que se seguem mostram a convergência obtida nos vários estágios.

Adotou-se neste exemplo  $\nu = 0,3$  ,  $E = 3000$  MPa e  $P = 1$ MPa.

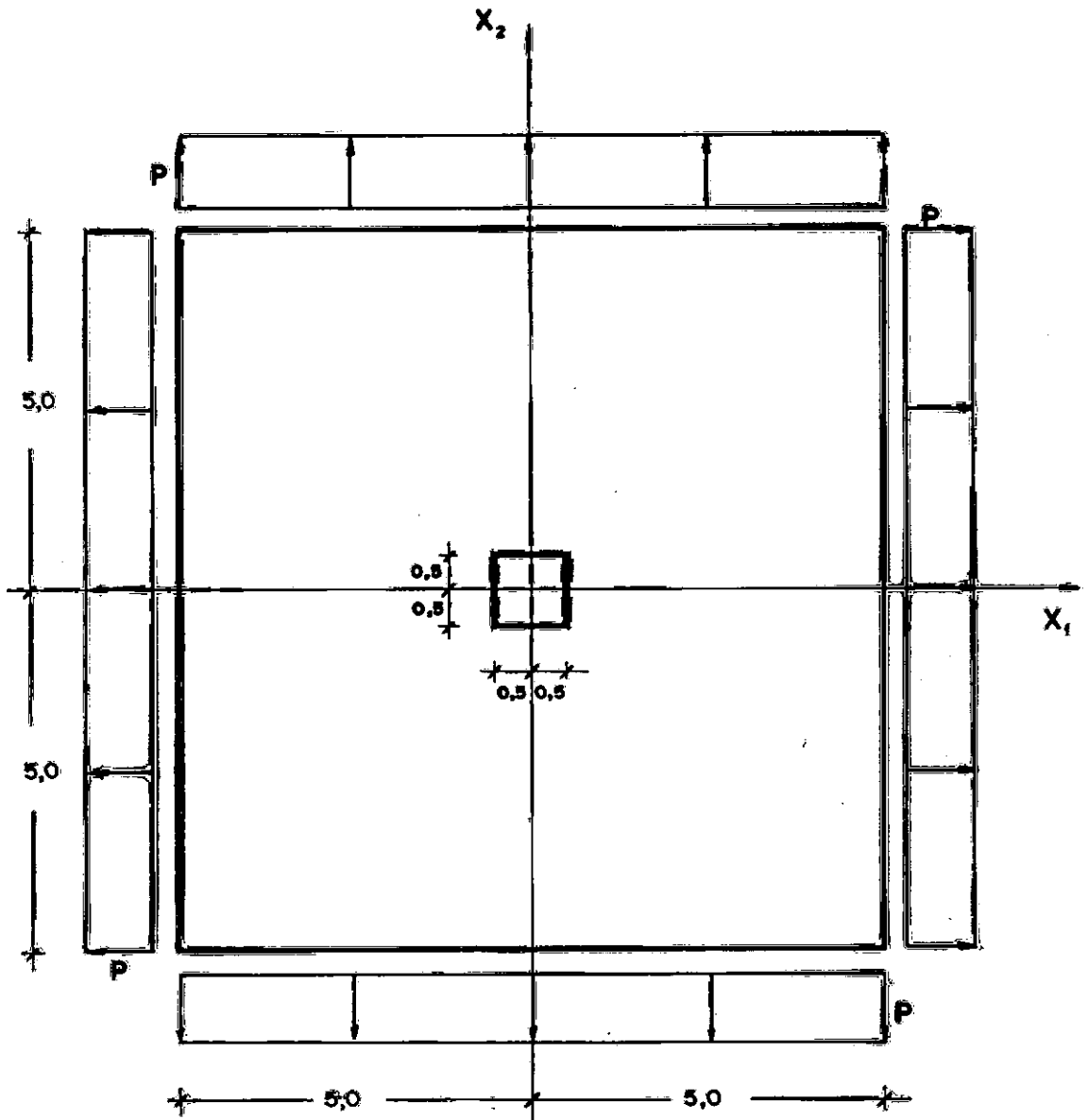


Figura (V.4.1) - Chapa tracionada com furo

Formas Inicial e Final do Furo  
na chapa tracionada

3 Nós-Parâmetro

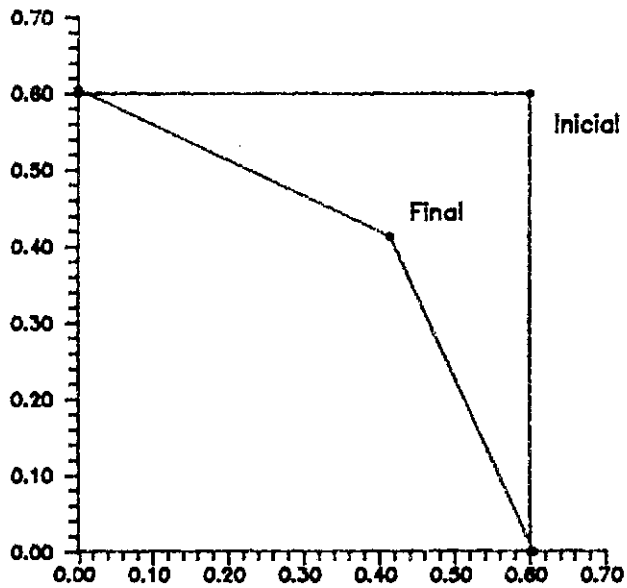


Figura (V.4.2) – Formas inicial e final do furo.

Formas Inicial e Final do Furo  
na chapa tracionada

5 Nós-Parâmetro

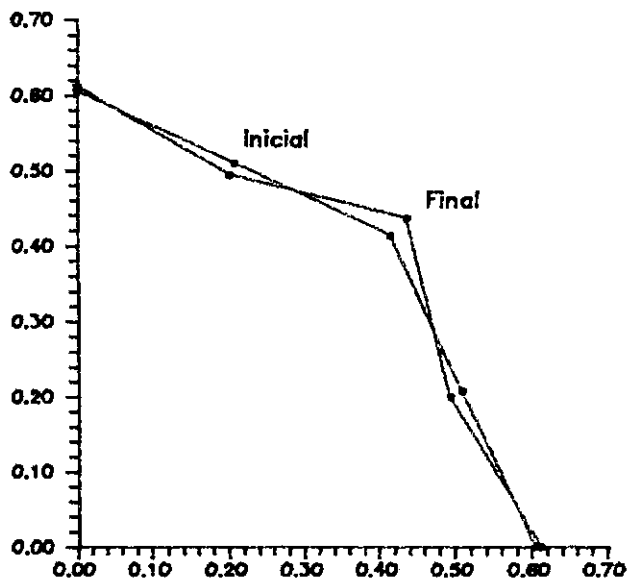


Figura (V.4.3) – Formas inicial e final do furo.

Formas Inicial e Final do Furo  
na chapa tracionada

9 Nós-Parâmetro

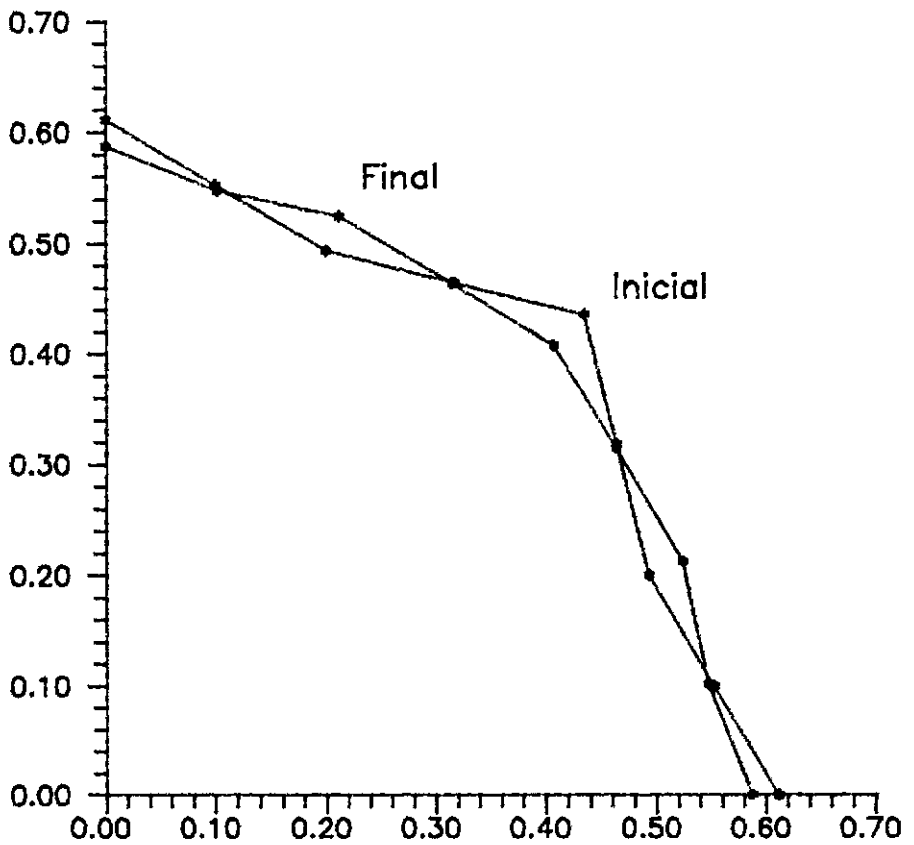


Figura (V.4.4) – Formas inicial e final do furo.

## V.5 - FILETE TRACIONADO

Este problema consiste em se encontrar a forma que determina o volume mínimo de um filete tracionado sem que ocorra escoamento em nenhum ponto do mesmo. Como se considera que o filete tem espessura constante o volume mínimo se traduz pela área mínima. Para restrição adota-se, então, que a tensão de Von Mises máxima no contorno deve ser igual a um valor de referência que seria imediatamente inferior a tensão de escoamento do material.

Com a simetria do problema só metade da barra precisa ser analisada como mostra a figura (V.5.1).

$\Gamma_2$  e  $\Gamma_3$  são as bordas do filete uniformemente carregadas e  $\Gamma_1$  é a parte do contorno que será variada e é limitada pelos pontos fixos A e B.

A Figura (V.5.2) mostra a discretização e as condições de contorno adotadas. Como se pode observar são utilizados 12 nós-parâmetro e um total de 33 elementos e 36 nós uma vez que são duplos os nós limite entre a parte carregada e a descarregada do filete.

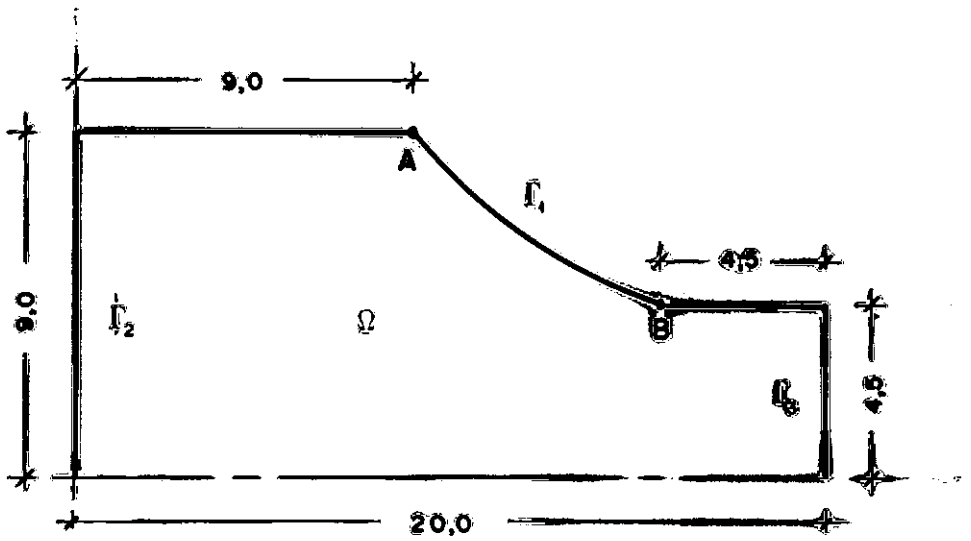


Figura (V.5.1) - Metade superior do filete simétrico.

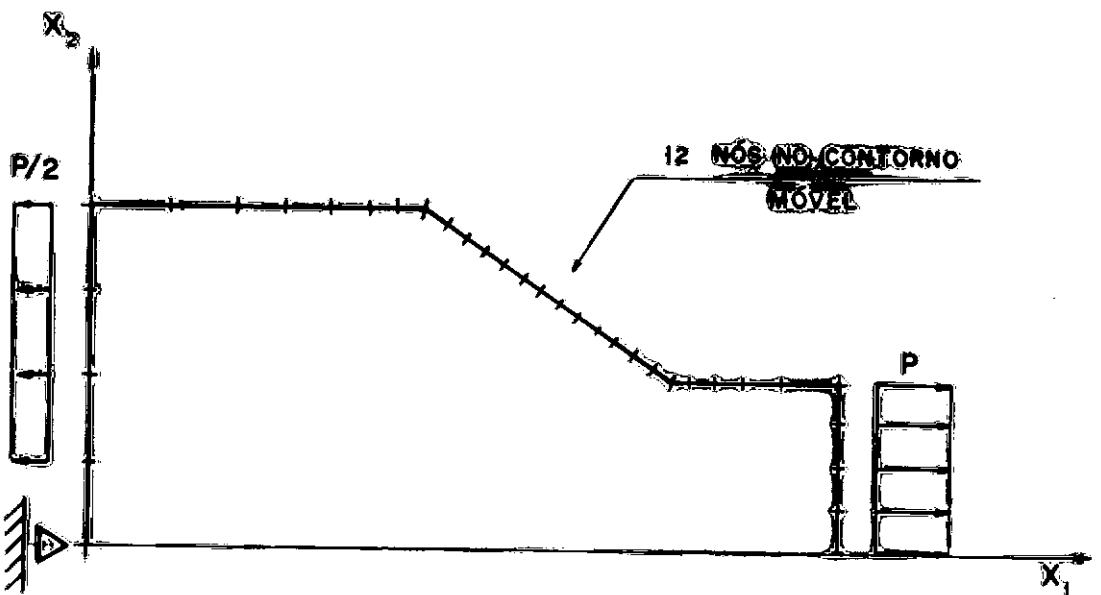


Figura (V.5.2) - Discretização do filete.

Neste problema as coordenadas dos nós-parâmetro não foram adotadas como variáveis de otimização, ao invés disso modelos matemáticos foram adotados para definir o contorno  $\Gamma_1$ . A princípio se adotou um polinômio do 2º grau em  $x_1$  que com a restrição prévia de passar por A e B passa a ser definido por um só parâmetro, a ordenada de um outro ponto pelo qual este polinômio deve passar. Posteriormente, foram adotados polinômios do 3º e do 4º graus em  $x_1$  definidos respectivamente pelas ordenadas de 2 e 3 pontos além de A e B. Com esta definição de variáveis do processo de otimização os nós da parte móvel do contorno passam a ter suas abcissas fixas em intervalos igualmente espaçados o que vai garantir uma boa gradação da malha ao longo do processo.

Repetindo-se o processo de otimização para cada caso reduzindo sucessivamente a suposta tensão de escoamento do material são obtidos os valores mínimos das tensões máximas e as formas correspondentes. Estas formas e as distribuições das tensões de Von Mises na parte móvel do filete são mostradas nas figuras que se seguem.

Neste problema foram usados  $\nu = 0,3$ ,  $E = 3000$  MPa e  $P = 1$  MPa.



Formas ótimas para o valor mínimo  
da máxima Tensão de Von Mises  
no contorno

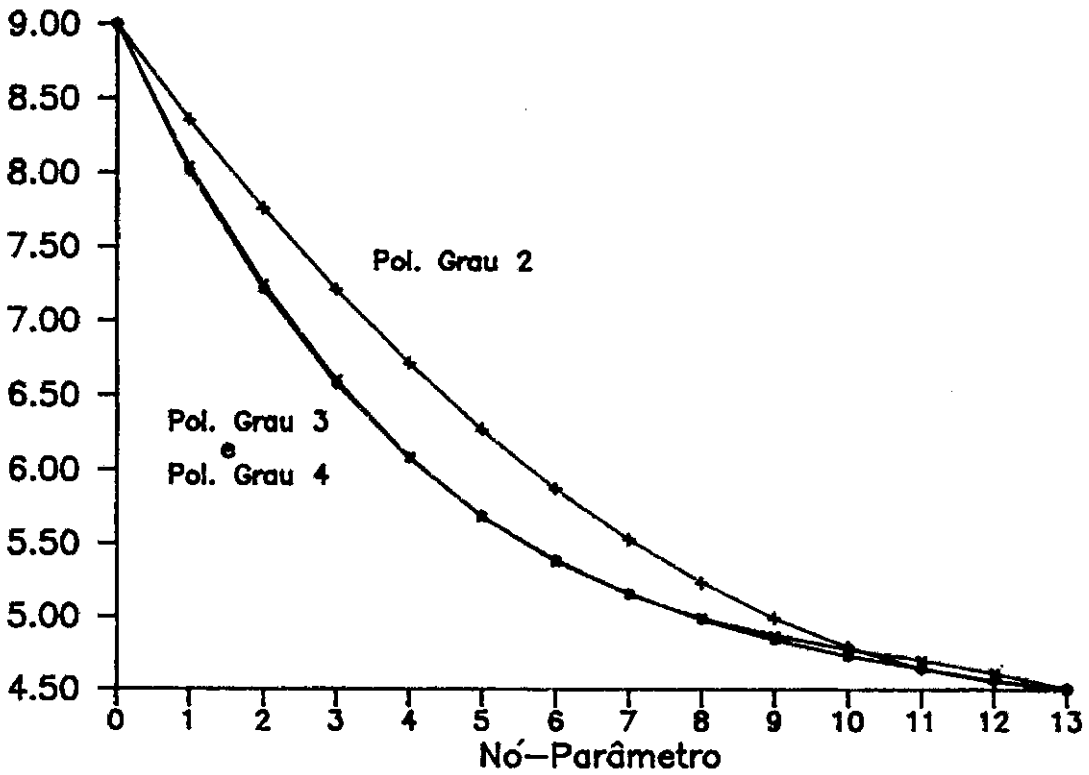
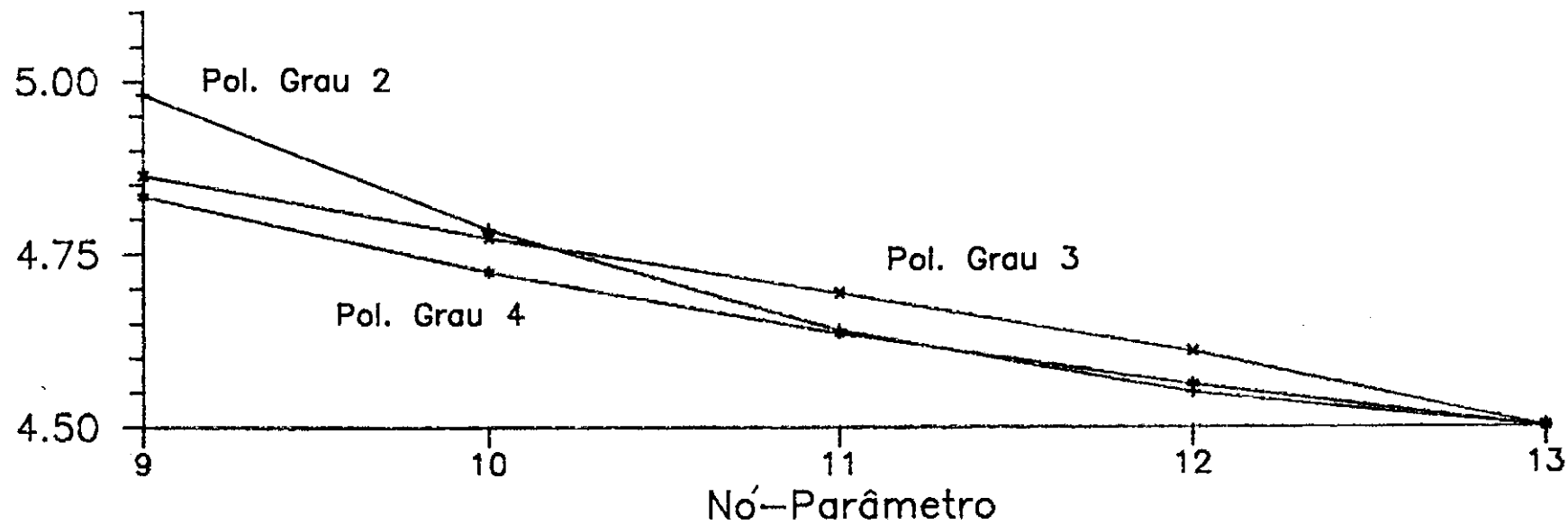


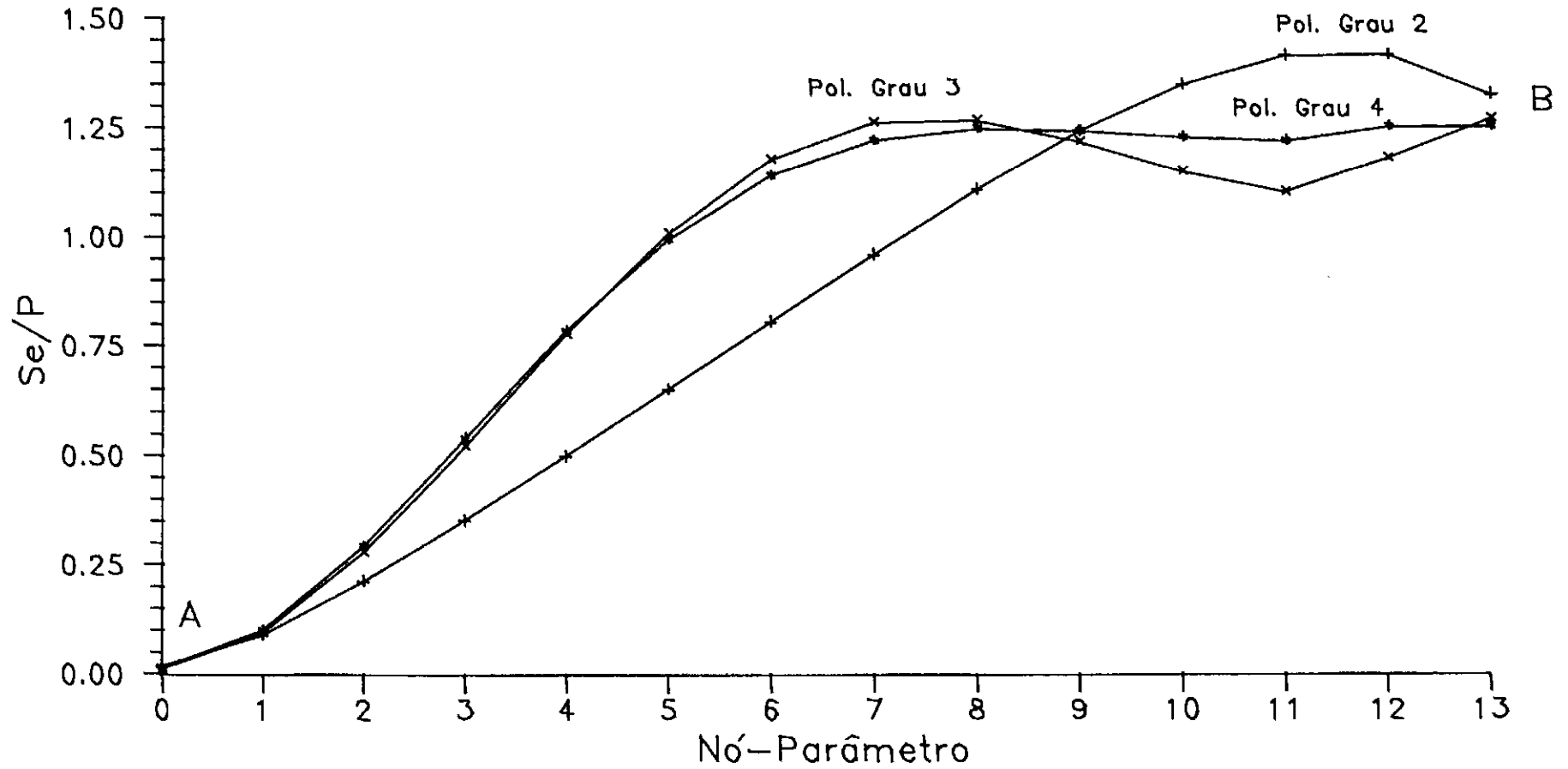
Figura (V.5.3) – Formas ótimas do contorno móvel.

## Detalhe das Formas Ótimas do Filete



# Distribuição da Tensão de Von Mises ao longo do contorno móvel

Figura (V.5.5) – Distribuição de  $S_e$  para as formas ótimas.



## CAPÍTULO VI

### CONCLUSÕES

O método da derivação implícita é uma alternativa para a análise de sensibilidades à mudança de forma capaz de ser implementada em um sistema para otimização de forma de estruturas e componentes estruturais sob o regime elástico linear.

Como pode se verificar através do primeiro exemplo o método apresenta uma convergência para os resultados analíticos com o refinamento da malha, embora não se possa garantir uma convergência monótona pelo fato de ser derivado de um método misto. A precisão dos resultados, também mostrada neste exemplo, pode ser considerada boa. SAIGAL, AITHAL e KANE [8] e BARONE e YANG [10] obtêm resultados com precisão equivalente empregando elementos quadráticos.

Através dos demais exemplos pode-se verificar que o método pode ser efetivamente aplicado à otimização de forma apresentando bons resultados.

É verificada também a facilidade com que o M.E.C. é aplicado à otimização de geometria, devido à simplicidade da redefinição de malha. Este fato e a boa precisão conseguida nos resultados tornam o M.E.C. bastante indicado para a utilização neste tipo de problema.

Foi verificado também que o algoritmo de otimização pode conduzir o processo a 'falsos ótimos', identificados por irregularidades na malha. Para a solução deste problema pode-se adotar [22] uma correção automática da discretização eliminando-se nós para garantir a suavidade da forma e adicionando-se nós para garantir uma gradação adequada da malha. Este procedimento, no entanto, leva a um aumento, talvez excessivo, do número de parâmetros quando são requeridas respostas com elevada precisão. Tal fato pode causar problemas, já que o aumento do número de parâmetros tende a elevar a complexidade do problema de otimização, o que torna a convergência mais difícil.

Os problemas mencionados acima motivam o desenvolvimento de procedimentos em que os parâmetros de otimização de forma não sejam os próprios nós da discretização, mas estejam ligados a eles de forma indireta através de funções de forma como no caso do problema do filete tracionado. Este tratamento permite a adoção de uma malha tão refinada quanto se necessite sem que sejam introduzidos com isso problemas na convergência do processo de otimização. O espaço das possíveis formas ótimas sofre uma restrição quando se procede desta maneira. Entretanto este fato não pode ser considerado, à princípio, uma desvantagem se são desejadas formas ótimas suaves.

Ainda com referência ao exemplo do filete (item V.5), deve ser observado que o algoritmo de otimização adotado não é aí empregado com eficiência máxima. Neste caso, o nó

onde ocorre a tensão de Von Mises máxima alterna ao longo do processo de otimização. Isto corresponde a uma mudança de função restrição e indica que o enfoque mais adequado seria obtido considerando um problema com várias destas funções. Deste modo, a tensão de Von Mises em cada nó seria uma função restrição.

Tendo em vista o prosseguimento deste trabalho são sugeridos dois itens básicos para seu desenvolvimento: (i) o teste de outros algoritmos de otimização e (ii) o direcionamento da pesquisa no sentido da diminuição do esforço computacional no cálculo das sensibilidades.

Por fim, vale mencionar que no curso deste trabalho foi investigada também a possibilidade do uso do cálculo das sensibilidades na otimização de malha apenas. Neste processo o reposicionamento dos nós é efetuado sem alterar a forma do corpo, com a finalidade de minimizar o erro da discretização (adaptativo tipo R). É usada neste caso a sensibilidade da resposta a uma variação da posição do nó na direção tangente ao contorno. A motivação desta investigação é a hipótese de que a malha seria tanto pior quanto maior fosse a sensibilidade de suas respostas em relação à variação da posição de cada nó. Como este desenvolvimento não era a intenção original e foram encontradas dificuldades na comprovação de tal pressuposto, a conclusão deste tema foi deixada para trabalhos futuros.

## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- [1] CHOI, K.K. e TWU, S.L., "Equivalence of Continuum and Discrete Methods of Shape Design Sensitivity Analysis", A.I.A.A. Journal, Vol.27, Num.10, pag.1418-1424, 1989.
- [2] KUMAR, V., LEE, S.-J. e GERMAN, M.D., "Finite Element Design Sensitivity Analysis and its Integration with Numerical Optimization Techniques for Structural Design", Computers & Structures, Vol.32, Num.3/4, pag.883-897, 1989.
- [3] YANG, R.J. e BOTKIN, M.E., "A Modular Approach for Three-Dimensional Shape Optimization", A.I.A.A. Journal, Vol.25., Num.3, Pag.492-497, 1987.
- [4] DEFOURNY, M., "Boundary Element Method and Design Optimization", Prec. of 9th. Conf on Boundary Elements, Vol.2, pag.472-482, 1987.
- [5] KANE, J.H., "Shape Optimization Utilizing Boundary Element Formulation", Prec. of 2nd. Boundary Element Technology Conf., pag. 781-803, 1986.
- [6] KANE, J.H., SAIGAL, S., "Design Sensitivity Analysis of Solids Using B.E.M.", Journal of Engineering Mechanics A.S.C.E., Vol.114, Num.10,

Pag.1703-1722, 1988.

- [7] SAIGAL, S., AITHAL, R. e KANE, J.H., "Conforming Boundary Elements in Plane Elasticity for Shape Design Sensitivity", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.28, Pag.2795-2811, 1989
- [8] SAIGAL, S., AITHAL, R. e KANE, J.H., "Semianalytical Structural Sensitivity Formulation in Boundary Elements", A.I.A.A. Journal, Vol.27, Num.11, 1989.
- [9] SOARES, C.A.M. e CHOI, K.K., "Boundary Elements in Shape Optimal Design Structures", Proc. of Computer Aided Optimal Design, Vol.2, Pag.145-185, Troia Portugal, 1986.
- [10] BARONE, M.R. e YANG, R.J., "Boudary Integral Equations for Recovery of Design Sensitivity in Shape Optimization", A.I.A.A. Journal, Vol.26, Pag.589-594, 1988.
- [11] ZHAO, Z. e ADEY, R.A., "Shape Design Sensitivity Analysis Using Boundary Elements", Proc. of 10th. Conf on Boudary Elements, Vol.3, Pag.515-531, 1988.
- [12] CHOI, J.H. e KWAK, B.M., "Boundary Integral Equation



Method for Shape Optimization of Elastic Structures", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.26, Pag.1579-1595, 1988.

- [13] SOKOLNIKOFF, I.S., Mathematical Theory of Elasticity, Mc Graw-Hill, N.Y., 1956.
- [14] MENDELSON, A., Plasticity: Theory and Application, New York, Macmillan, 1968.
- [15] BREBBIA, C.A., The Boundary Element Method for Engineers, Pentech Press, London, Halstead Press, N.Y., 2nd ed., 1980.
- [16] BREBBIA, C.A., TELLES, J.C.F., WROBEL, L.C., Boundary Element Techniques, Theory and Applications in Engineering, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [17] AZEVEDO, J.P.S., "Análise de Problemas não-lineares de Transferência de calor", Tese de mestrado Coppe/UFRJ, 1985.
- [18] ZABREYKO, P.P. et al., Integral Equations - A Reference Text, Noordhoff, Amsterdam, 1975.
- [19] LOVE, A.E.H., A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Dover, New York, 1944.

- [20] NEVES, A.C., Resolução de Problemas Visco-Elásticos Utilizando o Método dos Elementos de Contorno, Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, 1988.
- [21] TELLES, J.C.F., "Elastostatics Problems", Topics in Boundary Element Research - Vol. 3, Chapter 9, Brebbia Ed., Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1987.
- [22] GRACIA, L., DOBLARE, M., "Shape Optimization Using B.E.M.", Proc. of 10th. Conf. on Boundary Elements, Vol.3, pag.491-514, 1988.
- [23] VANDERPLAATS, G.N., Numerical Optimization Techniques for Engineering Design, McGraw-Hill, 1984.
- [24] MUSHKHELISHVILI, N.I., Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, P. Noordhoff Ltd., Groningen-The Netherlands, 1963.

## APÊNDICE A

## RELAÇÕES DA ELASTICIDADE LINEAR

Equações de Equilíbrio:

$$\tau_{ij,j} + B_j = 0 \quad (\text{A.1})$$

Condições de Contorno:

$$\text{— Forças Prescritas: } \bar{\rho}_i = \tau_{ij} \cdot l_j \quad (\text{A.2})$$

$$\text{— Deslocamentos Prescritos: } \bar{u}_i = u_i \quad (\text{A.3})$$

Relações Deformação-Deslocamento:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{A.4})$$

Equações de Compatibilidade de Deformações:

$$\varepsilon_{ij',kl} + \varepsilon_{kl',ij} = \varepsilon_{ik',jl} + \varepsilon_{jl',ik} \quad (\text{A.5})$$

Relações Tensão-Deformação:

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2 G \varepsilon_{ij} \quad (\text{A.6})$$

Relações entre constantes:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{A.7})$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu) \cdot (1-\nu)} \quad (\text{A.8})$$

Onde os símbolos acima representam:

$\tau_{ij}$  Tensor de Tensões.

$\epsilon_{ij}$  Tensor de Deformações.

$u_i$  Deslocamento na direção  $i$ .

$B_i$  Força de Volume de direção  $i$ .

$l_j$  Cosseno diretor do vetor normal ao contorno em relação ao eixo  $j$ .

$\bar{\rho}_i$  Força de Superfície prescrita de direção  $i$ .

$\lambda, G$  Constantes de Lamé (  $G$  também é chamada de Módulo de Elasticidade Transversal ).

$E$  Módulo de Elasticidade Longitudinal.

$\nu$  Coeficiente de Poisson.

## APÊNDICE B

## SOLUÇÃO ANALÍTICA DO PROBLEMA DO FURO ELÍPTICO

Considerando o problema descrito no item 5.2 pode-se expressar os deslocamentos ao longo do furo elíptico para o Estado Plano de Deformações como:

$$u_1 = \frac{P \cdot R}{8G} \left( \eta(m-1) \cos(\theta) + \frac{(2F - D)}{A} \right)$$

$$u_2 = \frac{P \cdot R}{8G} \left( \eta(3-m) \operatorname{sen}(\theta) - \frac{(2C - B)}{A} \right)$$

(B.1)

Onde:

$$R = \frac{(a + b)}{2}$$

$$m = \frac{(b - a)}{(a + b)}$$

$$\eta = 3 - 4\nu$$

(B.2)

$$A = 1 + m^2 + 2m \cdot \cos(2\theta)$$

$$B = (-1 - 2m^2 + m^3) \operatorname{sen}(\theta) - (2 - m + m^2) \operatorname{sen}(3\theta)$$

$$C = (-2 + 2m - 3m^2 + m^3) \operatorname{sen}(\theta) - (1 + m) \operatorname{sen}(3\theta)$$

$$D = (1 - 2m^2 + m^3) \cos(\theta) + (2 - m - m^2) \cos(3\theta)$$

$$F = (-m^2 + m^3) \cos(\theta) + (1 - m) \cos(3\theta)$$

A tensão de tração no sentido tangencial do contorno do furo pode ser expressa como:

$$\sigma_{\theta} = P \cdot \frac{1 + 2m - m^2 + 2\cos(2\theta)}{1 + m^2 + 2m \cdot \cos(2\theta)} \quad (\text{B.3})$$

Tomando o eixo maior  $a$  como parâmetro de forma as sensibilidades são obtidas derivando-se (B.1), como:

$$\frac{\partial u_1}{\partial a} = \frac{-b \cdot P}{4G(a+b)^2} \cdot \left\{ R \left( \eta \cdot \cos(\theta) + \frac{A(2F' - D') - A'(2F - D)}{A^2} \right) \right. \\ \left. \frac{-b}{(1+m)^2} \left( \eta(m-1) \cos(\theta) + \frac{(2F - D)}{A} \right) \right\}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial a} = \frac{-b \cdot P}{4G(a+b)^2} \cdot \left\{ R \left( \eta \cdot \text{sen}(\theta) + \frac{A(2C' - B') - A'(2C - B)}{A^2} \right) \right. \\ \left. \frac{-b}{(1+m)^2} \left( \eta(m-3) \text{sen}(\theta) + \frac{(2C - B)}{A} \right) \right\}$$

(B.4)

Onde:

$$A' = 2m + 2\cos(2\theta)$$

$$B' = m(3m - 4)\text{sen}(\theta) + (1 - 2m)\text{sen}(3\theta)$$

$$C' = (2 + 6m + 3m^2)\text{sen}(\theta) - \text{sen}(3\theta) \quad (\text{B.5})$$

$$D' = m(3m - 4)\cos(\theta) - (1 + 2m)\cos(3\theta)$$

$$F' = m(3m - 2)\cos(\theta) - \cos(3\theta)$$

Analogamente, a derivação de (B.3) leva a:

$$\frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial a} = \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial m} \cdot \frac{\partial m}{\partial a} = \frac{-2b}{(a+b)^2} \cdot \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial m}$$

(B.6)

Onde:

$$\frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial m} = 2P \cdot \frac{(1-m)(1+m^2+2m\cos(2\theta)) - (m+\cos(2\theta))(1+2m-m^2+2\cos(2\theta))}{(1+m^2+2m \cdot \cos(2\theta))^2}$$

(B.7)