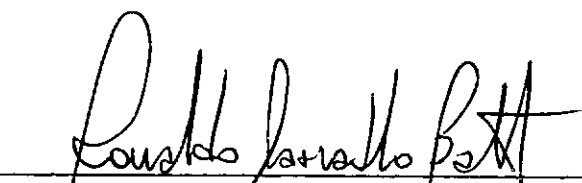


VIBRAÇÕES DE CASCAS CILÍNDRICAS DELGADAS CONTENDO FLUIDO

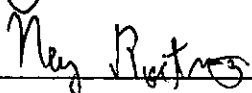
FERNANDO LUIS FORTUNY GASSER

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.) EM ENGENHARIA CIVIL

APROVADA POR:



PROF. RONALDO CARVALHO BATISTA
(PRESIDENTE)



PROF. NEY ROITMAN



PROF. SERGIO FERNANDES VILLAÇA



PROF. PAULO BATISTA GONÇALVES

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
OUTUBRO DE 1987

FORTUNY GASSER, FERNANDO LUIS

Vibrações de cascas cilíndricas delgadas contendo fluido
(Rio de Janeiro) 1987.

xiv, 124 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil,
1987)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1. Dinâmica I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

A mis padres y hermanos.

A la memoria del Nato Mónico
(1958-1986) que fue um gran
amigo y buena gente.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Ronaldo Carvalho Batista pela amizade, orientação e incentivo brindados em todos os momentos.

Ao chefe do Laboratório de Estruturas, Prof. Ney Roitman, pela amizade, interesse demonstrado e valiosa colaboração na realização dos ensaios experimentais.

Ao Prof. Paulo Batista Gonçalves por sua solicitude e auxílio na obtenção de resultados teóricos pertinentes ao seu trabalho de tese de D.Sc.

Aos funcionários do Laboratório de Estruturas, especialmente ao Sr. João Pinto pela construção e montagem do modelo experimental, e também ao Flávio e Carlos pelo auxílio durante os ensaios.

Aos colegas do Laboratório de Estruturas pela amizade e apoio inestimável.

A meus pais, irmãos e sobrinhos, pelo apoio e carinho sempre demonstrados.

Ao Laboratório de Estruturas Navais pelo empréstimo de diversos equipamentos.

A todos os colegas e professores que direta ou indireta-

mente contribuíram para a elaboração deste trabalho.

A Eneida, Regina e Mário pela confecção tipográfica e gráfica deste trabalho.

A CAPES/MEC pelo apoio financeiro.

Resumo da Tese Apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

VIBRAÇÕES DE CASCAS CILÍNDRICAS DELGADAS CONTENDO FLUIDO

Fernando Luis Fortuny Gasser

Outubro, 1987

Orientador: Ronaldo Carvalho Batista

Programa: Engenharia Civil

Apresenta-se neste trabalho um resumo dos principais resultados teóricos e experimentais da interação dinâmica entre uma casca cilíndrica delgada e fluido interno, resultante de forte acoplamento entre modos de vibração. Ênfase é dada aos resultados experimentais que têm confirmado resultados teóricos recentes sobre a interação fluido-casca delgada [6,7]. A análise, discussão e comparação desses resultados são apresentados ao longo do texto.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

VIBRATION OF THIN CYLINDRICAL SHELLS WITH INTERNAL FLUID

Fernando Luis Fortuny Gasser

October, 1987

Chairman: Ronaldo Carvalho Batista

Department: Civil Engineering

The main theoretical and experimental results for the dynamic interaction occurring between fluid and thin cylindrical shells, which result from a strong coupling among the vibration modes, are presented herein.

Emphasis is given to the used experimental techniques and obtained test results which have corroborated recently reported theoretical results [6,7] on the fluid-thin shell interactive problem. Through out the text these results are analysed and comparisons are made.

ÍNDICE

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	1
I.1. Descrição do Problema	1
I.2. Escopo do Trabalho	2
 CAPÍTULO II - MODELO TEÓRICO	 5
II.1. Introdução	5
II.2. Equações de Movimento	6
II.2.1. Equações de movimento para vibrações livres no ar da casca, com extremos simplesmente apoiados	6
II.2.2. Equação de movimento do fluido	11
II.3. Interação Fluido-Estrutura	14
II.3.1. Equações de movimento para vibrações "livres" da casca com extremos apoiados contendo flui- do em repouso	16
II.3.2. Equações de movimento para vibrações "livres" da casca contendo fluido em repouso sob a con- dição de extremos engastados	18
II.4. Equações de Movimento para Resposta em Frequência sob impacto lateral da casca cilíndrica contendo Fluido em Repouso	19

CAPÍTULO III - RESULTADOS DA ANÁLISE TEÓRICA	21
III.1. Resultados em Termos de Frequência para o Caso da Casca com Extremos Simplesmente Apoiados	21
III.2. Resultados em Termos de Frequência para o Caso da Casca com Extremos Engastados	28
III.3. Comentários sobre o Fenômeno de Acoplamento Modal	31
CAPÍTULO IV - MODELO EXPERIMENTAL	32
IV.1. Introdução	32
IV.2. Construção do Modelo	33
IV.3. Condições de Apoio	36
IV.4. Montagem do Ensaio	42
IV.5. Instrumentação	47
IV.6. Descrição dos Ensaios	49
IV.7. Sistema de Aquisição e Análise de Dados	49
CAPÍTULO V - RESULTADOS DA ANÁLISE EXPERIMENTAL	55
CAPÍTULO VI - ANÁLISE E COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS TEÓRICOS E EXPERIMENTAIS	74
VI.1. Resultados para a Casca Simplesmente Apoiada, Vibrando no Ar	75
VI.2. Resultados para a Casca Engastada Vibrando no Ar	79
VI.3. Resultados para a Casca Simplesmente Apoiada Contendo Fluido	84
VI.4. Resultados para a Casca Engastada Contendo Fluido	87
VI.5. Análise Paramétrica	97
CAPÍTULO VII - CONSIDERAÇÕES FINAIS	113

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	116
ANEXO A - SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO PELO MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS	118

NOMENCLATURA

Letras Maiúsculas

- A,B - constantes arbitrárias
- [A] - matriz de rigidez
- A_{ij} - coeficientes da matriz de rigidez
- A_{ci} - acelerômetro
- C - coeficiente de rigidez de membrana
- D - coeficiente de rigidez à flexão
- E - módulo de Young de elasticidade longitudinal
- $F(t)$ - força excitadora axial
- $F(\omega)$ - função resultante da aplicação da transformação de Fourier
- H - altura do nível de fluido
- I_n, K_n - funções modificadas de Bessel de ordem n
- [I] - matriz identidade
- L - comprimento da casca

- L^* - função de Lagrange
 L_{ij} - operadores diferenciais
 $[M]$ - matriz de massa
 M_{ij} - coeficientes da matriz de massa normalizados
 M_{ij} - momentos fletores
 N_{ij} - esforços internos
 P - carga axial
 $P()$ - módulo básico de massa
 R - raio da casca
 $S()$ - módulo básico de rigidez
 T - energia cinética
 $\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}$ - amplitude de deslocamentos
 U_i, V_i, W_i - deslocamentos (em diferenças finitas)
 V - energia potencial
 Z - número de Batdorf

Letras Minúsculas

- $f(t)$ - força excitadora radial
 $f(\omega)$ - função de frequência
 h - espessura
 m - número de semi-ondas longitudinais
 n - número de ondas circunferenciais

n_{x_0}, n_{θ_0} - esforços adimensionalizados

p - pressão radial uniforme

p_e - força pontual excitadora radial

p_r - pressão irradiada pelo fluido

$q(t)$ - função temporal

r - eixo coordenado radial

t - tempo

t_0, t_1 - tempo inicial e final

$\underline{U}_0, \underline{U}_1$ - campos de deslocamentos

u, v, w - deslocamentos

x - eixo coordenado longitudinal

Letras Gregas

β, ζ, γ - constantes dimensionais

λ - parâmetro de carga

δ - variação

$\delta()$ - vetor de deslocamento

$\delta()$ - função delta de Dirac

$\{\Delta\}$ - vetor de amplitudes de deslocamentos

ξ - parâmetro de massa de fluido adicionada

- ρ_F - densidade do fluido
- ρ_C - densidade da casca
- θ - eixo coordenado circunferencial
- ϵ_{ij} - deformação específica
- χ_{ij} - mudança de curvatura
- ν - coeficiente de Poisson
- Ω^2 - parâmetro de frequência
- ω - frequência angular
- ϕ - função potencial de velocidade

Operadores

$\nabla^2() = \nabla \cdot \nabla()$ - operador de Laplace

$F\{ \}$ - transformação de Fourier

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

I.1. DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

A variada gama de aplicações nas indústrias naval, aeroespacial, petroquímica, e nuclear e em estruturas *off-shore*, fazem das cascas cilíndricas delgadas, elementos estruturais extensivamente utilizados, sendo particularmente indicadas para suportar cargas axiais e pressões radiais.

Em muitas destas aplicações, tem-se que a casca cilíndrica se encontra em contato parcial ou total com um meio fluido de alta densidade (líquido).

A presença do fluido tem uma grande influência no comportamento estático e principalmente no comportamento dinâmico deste tipo de cascas delgadas.

As frequências naturais de vibração de uma casca contendo um fluido de alta densidade são bastante inferiores às frequências naturais de uma casca vibrando no ar. Esta diferença

é função das características físicas e geométricas da casca e do fluido.

A solução do problema de interação fluido-estrutura deformável exige a consideração da pressão resistente do fluido, que tradicionalmente tem sido considerada como proporcional à aceleração do sólido sendo tomada como uma massa adicional à massa do sólido deformável, provocando, portanto, um aumento da inércia do sistema. Deve-se enfatizar que o sucesso dessa forma de ataque ao problema físico depende obviamente da consistência da formulação matemática empregada no tratamento do fenômeno de interação fluido-estrutura, no qual a estrutura deve ser considerada como sendo localmente flexível (isto é, casca delgada).

A análise teórica deste fenômeno de interação dinâmica entre fluido e casca cilíndrica delgada contida em trabalho científico recentemente apresentado, [6], tem utilizado uma formulação matemática consistente que leva em conta a não-linearidade envolvida no problema, destacando-se aí a consideração do acoplamento não-linear entre vários modos de vibração da casca durante a resposta dinâmica.

I.2. ESCOPO DO TRABALHO

O principal objetivo deste trabalho de tese é o da investigação experimental do parâmetro de massa de fluido adicionada expresso por esta formulação teórica [6].

Adianta-se aqui que a comprovação experimental dos resultados teóricos, obtida com sucesso através de modelagem física cuidadosa, possibilitará a extensão da análise da interação dinâmica entre fluido e estrutura delgada para geometrias mais complexas, através de formulações teórico-numéricas de grande potencial em aplicações práticas, como o método dos elementos finitos.

Para tais fins foram construídos modelos experimentais de cascas cilíndricas delgadas nos quais foram simuladas as condições de extremos simplesmente apoiados e de extremos engastados, para serem ensaiados em vibração "livre", contendo ou não fluido.

Os resultados experimentais desses ensaios, juntamente com os resultados teóricos obtidos são apresentados, analisados e comparados, levando a algumas conclusões e observações importantes.

No Capítulo II apresenta-se o modelo teórico usando, um resumo do desenvolvimento teórico e as principais equações utilizadas e, no Capítulo III, são sumarizados os principais resultados obtidos através da análise teórica.

Já no Capítulo IV apresenta-se o modelo experimental o qual é ilustrado através de fotos e figuras explicativas. Além disso, apresenta-se em detalhes o projeto, fabricação e instrumentação desse modelo, descrevendo-se também os sistemas de aquisição e interpretação dos sinais dinâmicos com o intuito de permitir uma transparência da precisão das medições realizadas.

Os resultados obtidos nos ensaios do modelo experimental

para algumas condições de nível de fluido e apoios extremos são mostrados no Capítulo V, através de espectros de frequência e das respostas dinâmicas no tempo.

No Capítulo VI são analisados e comparados os resultados teóricos e experimentais obtidos para o modelo com as características da casca ensaiada e também neste capítulo é feito um estudo paramétrico para melhor aclarar o comportamento dinâmico das cascas cilíndricas delgadas com outras geometrias contendo fluidos de diversas densidades em níveis distintos.

As conclusões e considerações finais, junto com algumas sugestões, são apresentadas no Capítulo VII, onde é ressaltado o aspecto mais relevante do trabalho: a comprovação da ocorrência de forte acoplamento modal, que não tem sido considerado em análises anteriores a da referência [6] e, conseqüentemente, a comprovação experimental do novo parâmetro de massa de fluido adicionada.

CAPÍTULO II

MODELO TEÓRICO

II.1. INTRODUÇÃO

Primeiramente, apresenta-se a formulação matemática usada para o estudo da casca cilíndrica circular sob a condição de extremos simplesmente apoiados, e posteriormente a formulação para o caso da casca com extremos engastados, que foram desenvolvidas de forma independente.

Na primeira formulação, o caso de casca com apoios simples sob carga de impacto, é parte de desenvolvimento teórico apresentado na forma de Seminário de DSc. ao PEC da COPPE/UFRJ por Paulo Batista Gonçalves.

A segunda, para o caso de engaste, é parte da presente contribuição à análise de vibrações de cascas delgadas em meio fluido.

No final deste capítulo, são apresentados os principais resultados teóricos obtidos da análise de cascas com as caracte

rísticas físicas e geométricas do modelo experimental ensaiado.

II.2. EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

II.2.1. EQUAÇÕES DE MOVIMENTO PARA VIBRAÇÕES LIVRES NO AR DA CASCA, COM EXTREMOS SIMPLEMENTE APOIADOS

As equações de movimento da casca podem ser deduzidas diretamente do princípio de HAMILTON [1]

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L^* dt \quad ; \quad L^* = V - T \quad (II.1)$$

onde V é a energia potencial, T , a energia cinética e L^* , a função de Lagrange.

No estudo que segue são adotadas as seguintes hipóteses [2]

- 1 - A casca é delgada.
- 2 - Efeitos devidos a forças de inércia à rotação são desprezíveis.
- 3 - O amortecimento é excluído na análise de vibrações livres.
- 4 - Os deslocamentos são pequenos de modo que é válida a teoria elástica linear.

Considere-se uma casca cilíndrica delgada de comprimento L , espessura h e raio da superfície média R , constituída de ma-

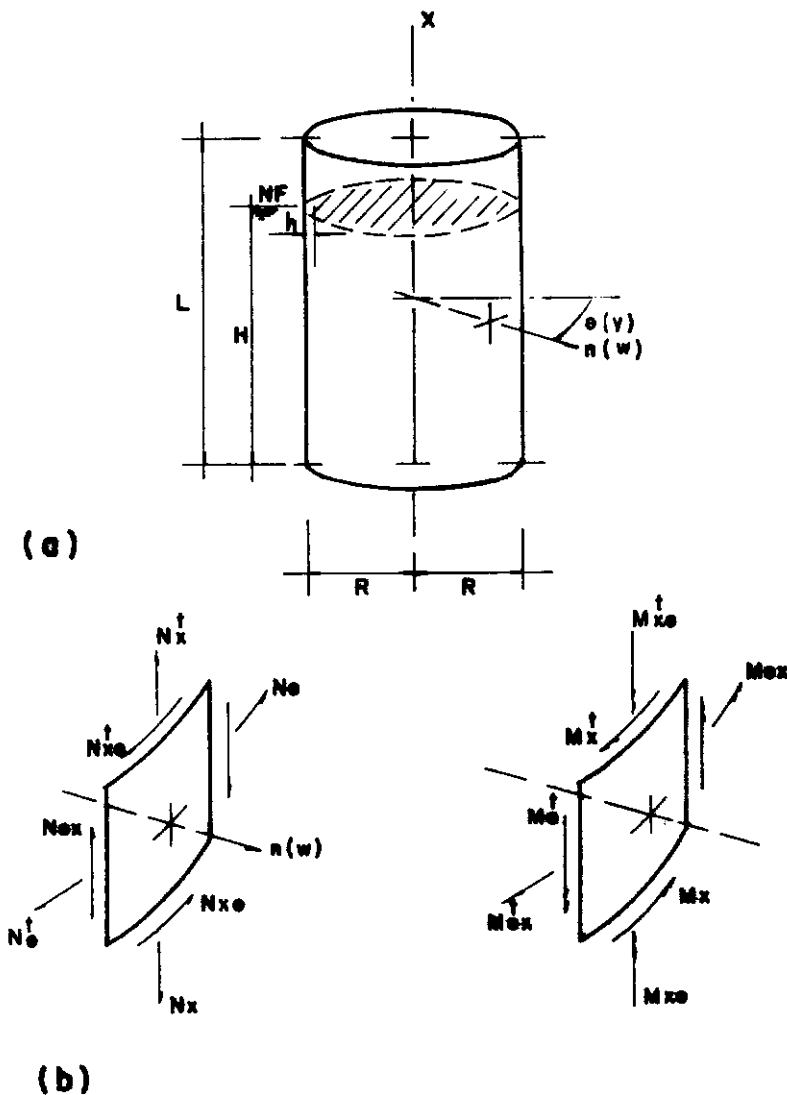


Fig (II-1) - Geometria, sistema de coordenadas da casca e direções positivas de deslocamento e resultantes de esforços internos

terial elástico, homogêneo e isótropo de densidade ρ_c . Sendo u , v e w os deslocamentos, respectivamente, na direção axial, circunferencial e radial, como mostrado na figura (II.1) tem-se que a energia cinética pode ser expressa na forma

$$T = \frac{1}{2} \rho_c h \int_0^L \int_0^{2\pi} (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) R d\theta dx \quad (\text{II.2})$$

e a energia interna de deformação, estabelecendo as relações constitutivas adequadas e integrando ao longo da espessura, na forma

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} (N_{ij} \epsilon_{ij} + M_{ij} \chi_{ij}) R d\theta dx \quad (\text{II.3})$$

onde o primeiro termo sob a integral corresponde à energia de membrana e o segundo, à energia de flexão.

Sendo o material isótropo, os esforços N_{ij} e M_{ij} são dados por:

$$\begin{aligned} N_{11} &= C(\epsilon_{11} + \nu \epsilon_{22}) & M_{11} &= D(\chi_{11} + \nu \chi_{22}) \\ N_{22} &= C(\epsilon_{22} + \nu \epsilon_{11}) & M_{22} &= D(\chi_{22} + \nu \chi_{11}) \\ N_{12} &= C(1-\nu) \epsilon_{12} = N_{21} & M_{12} &= D(1-\nu) \chi_{12} = M_{21} \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

onde ν é o coeficiente de Poisson, $C(= Eh/(1-\nu^2))$, a rigidez de membrana, $D(= Eh^3/12(1-\nu^2))$, a rigidez à flexão e E , o módulo de elasticidade longitudinal.

Adotando-se a teoria de Donnell para cascas abatidas, as deformações específicas, ϵ_{ij} , e as mudanças de curvatura, χ_{ij} , são: [2]

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{xx} &= u_{,x} & \chi_{xx} &= w_{,xx} \\
 \epsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{R} (v_{,\theta} + w) & \chi_{\theta\theta} &= \frac{1}{R^2} (w_{,\theta\theta}) \\
 \epsilon_{x\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} u_{,\theta} + v_{,x} \right) & \chi_{x\theta} &= \frac{1}{R} w_{,x\theta}
 \end{aligned}
 \tag{II.5}$$

Substituindo-se (II.5) e (II.4) em (II.3) e, a seguir, substituindo-se (II.3) e (II.2) em (II.1) e empregando as técnicas usuais do cálculo variacional [1], tem-se as seguintes equações de equilíbrio em termos dos deslocamentos

$$R^2 u_{,xx} + \frac{(1-\nu)}{2} u_{,\theta\theta} + R \frac{(1+\nu)}{2} v_{,x\theta} + R \nu w_{,x} = \gamma^2 \ddot{u}
 \tag{II.6a}$$

$$R \frac{(1-\nu)}{2} u_{,x\theta} + \nu v_{,\theta\theta} + R^2 \frac{(1-\nu)}{2} v_{,xx} + w_{,\theta} = \gamma^2 \ddot{v}
 \tag{II.6b}$$

$$R \nu u_{,x} + v_{,\theta} + w + \frac{h^2}{12 R^2} [R w_{,xxxx} + 2 R^2 w_{,xx\theta\theta} + w_{,\theta\theta\theta\theta}] = \gamma^2 \ddot{w}
 \tag{II.6c}$$

onde

$$\gamma^2 = \rho_c R^2 (1 - \nu^2) / E$$

Considerando-se que a casca \bar{e} simplesmente apoiada em ambos os bordos ($w = w_{,xx} = u_{,x} = v = 0$ em $x = 0$ e $x = L$), tem-se que os deslocamentos, cuja forma geral \bar{e} dada por

$$\delta(x, \theta, t) = g(x, \theta) \cdot f(t)
 \tag{II.7}$$

podem ser representados pelas funções

$$u(x,\theta,t) = \bar{U} \left(\cos \frac{m\pi x}{L} \cos n\theta \right) e^{i\omega t}$$

$$v(x,\theta,t) = \bar{V} \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \sin n\theta \right) e^{i\omega t} \quad (\text{II.7a})$$

$$w(x,\theta,t) = \bar{W} \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \cos n\theta \right) e^{i\omega t}$$

onde $e^{i\omega t}$ é a resposta temporal à excitação, ω é a frequência angular, m é o número de semiondas longitudinais e n , o número de ondas circunferenciais, que descrevem cada um dos modos de vibração livre.

Substituindo-se (II.7a) em (II.6), obtêm-se um problema de autovalor da forma

$$([A] - \Omega^2 [I]) \begin{Bmatrix} \bar{U} \\ \bar{V} \\ \bar{W} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (\text{II.8})$$

onde $[I]$ é a matriz identidade e Ω^2 é o parâmetro de frequência dado por

$$\Omega = \omega R \left[\frac{\rho_c (1-\nu^2)}{E} \right]^{1/2} \quad (\text{II.9})$$

A equação característica de

$$\text{DET} | A - \Omega^2 I | = 0 \quad (\text{II.8a})$$

fornece para cada configuração modal (m,n) três raízes reais

positivas que correspondem às frequências associadas aos dois movimentos tangenciais (u e v) e ao movimento radial (w). Para cascas delgadas a menor frequência corresponde ao deslocamento radial e as outras duas frequências, aos movimentos circunferencial e longitudinal.

II.2.2. EQUAÇÃO DE MOVIMENTO DO FLUIDO

Para o movimento irrotacional de um fluido Newtoniano, não-viscoso e incompressível, o potencial de velocidade $\phi(r, \theta, x, t)$ satisfaz a equação de Laplace [3]

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (\text{II.10})$$

Para pequenas amplitudes de excitação externa e de vibração da casca cilíndrica, a qual se constitui como fonte excitadora do fluido nela contido, como ilustrado na figura (II.1), tem-se que a solução da equação (II.10) é da forma

$$\phi(r, \theta, x, t) = \phi(r, \theta, x) e^{i\omega t} \quad (\text{II.11})$$

onde ϕ deve ser uma função harmônica, e satisfazer as condições de contorno:

1 - Na base da casca ($x=0$), a velocidade do fluido na direção vertical é zero

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} (r, \theta, 0, t) = 0 \quad (\text{II.12})$$

2 - A velocidade radial da casca e do fluido adjacente à

superfície da casca é a mesma

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial r} (r, \theta, x, t) \right|_{r=R} = \frac{\partial w}{\partial t} (\theta, x, t) \quad (\text{II.13})$$

No presente estudo considera-se que as pequenas amplitudes radiais de vibração da parede da casca não excitam perturbações da superfície do fluido em repouso no interior da casca. Além disso, as frequências naturais de vibração da casca delgada são muito mais elevadas que as das ondas de superfície.

Sendo os deslocamentos da casca periódicos com respeito a x e θ (veja equação (II.7a)), o movimento do fluido pode ser tomado como periódico com respeito a essas coordenadas. Tem-se pois que

$$\phi(r, \theta, x, t) = \phi(r) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} \cos n\theta e^{i\omega t} \quad (\text{II.14})$$

Esta forma adotada para o potencial de velocidade implica na existência de uma superfície livre em $x=H$ (veja figura II.1) e velocidade axial nula em $x=0$, o que concorda com as condições de contorno adotadas [2].

Substituindo-se (II.14) em (II.10), verifica-se que a solução na forma

$$\phi(r) = A I_n (m \pi r/L) + B K_n (m \pi r/L) \quad (\text{II.15})$$

satisfaz a equação diferencial, onde I_n e K_n são as funções modificadas de Bessel de ordem n [4] e A e B são constantes arbitrárias que podem ser determinadas através das condições de contorno.

Para resolver o problema de interação devem ser empregados métodos aproximados, devido à descontinuidade do fluido em $x=H$.

Observa-se que, dependendo das características do fluido e das frequências, pode-se ter diversas soluções para a amplitude $\phi(r)$.

Para a classe de problemas tratados no presente trabalho (cascas cilíndricas contendo fluido) considera-se apenas a solução (II.15).

Considerando fluido interno, K_n é singular em $r=0$, e (II.15) se reduz a

$$\phi(r) = A I_n \quad (II.16)$$

e desta forma, substituindo-se (II.16) em (II.14),

$$\phi = A I_n \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} \cos n\theta e^{i\omega t} \quad (r \leq R) \quad (II.17)$$

A constante A é obtida empregando-se a condição de compatibilidade (II.13), que fornece a partir de (II.17) e (II.7a)

$$A = \frac{i \omega \bar{W}}{I_n'} \quad (II.18)$$

onde

$$I_n' = \left. \frac{dI_n}{dr} \right|_{r=R} \quad (II.19)$$

Determinada a função potencial ϕ , pode-se, usando-se o

teorema de BERNOULLI [3], obter a pressão irradiada, p_r [2].

Em virtude de (II.13) e (II.7a), tem-se que esta pressão é dada por

$$p_r = \bar{W} \rho_F \omega^2 e^{i\omega t} f(\omega) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} \cos n\theta \quad (\text{II.20})$$

A função $f(\omega)$, usando-se as fórmulas de derivação e recorrência para funções de BESSEL [4], é dada por:

$$f(\omega) = \left\{ \beta \left[\frac{I_{n-1}(\beta)}{I_n(\beta)} - \frac{n}{\beta} \right] \right\}^{-1} \quad (\text{II.21})$$

onde

$$\beta = m \pi R/L$$

II.3. INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA

Seja uma casca cilíndrica delgada simplesmente apoiada contendo um fluido Newtoniano, não-viscoso, irrotacional, em repouso [2], [3] e [5]. A casca está submetida a uma pressão radial uniforme, p , e a uma carga axial, P . Considerando-se, por simplicidade e por ser uma hipótese razoável nos casos práticos, um estado inicial de membrana, tem-se que a casca está submetida a uma distribuição de esforços axiais e circunferenciais dados por

$$N_{x_0} = \frac{P}{2\pi R} \quad ; \quad N_{\theta_0} = p R \quad (\text{II.22})$$

que serão considerados positivos quando de tração.

Os esforços de membrana podem ser adimensionalizados com a introdução de um parâmetro de carga λ de tal modo que os torne compatíveis com o sistema (II.6)

$$n_{x_0} = \lambda \zeta \quad ; \quad n_{\theta_0} = \lambda \quad (II.23)$$

onde $\lambda = p R/Eh$ e $\zeta (= P/2\pi R^2 p)$ é uma constante adimensional que relaciona n_{x_0} e n_{θ_0} sendo que, para o caso de pressão hidrostática uniforme, tem-se $\zeta=1/2$.

O campo de deslocamentos da casca consiste em um campo de deslocamentos axissimétricos relativo ao carregamento estático \underline{U}_0 e um campo de deslocamentos adicional \underline{U}_1 resultante da excitação harmônica

$$\{U_0\}^T = \{-\lambda(\nu-\zeta) \quad , \quad 0 \quad , \quad \lambda(1-\nu\zeta)\} \quad (II.24)$$

$$\{U_1\}^T = \{u_1, v_1, w_1\}$$

Substituindo-se o campo de deslocamentos $\underline{U}_0 + \underline{U}_1$ em (II.5) e a seguir, aplicando-se o princípio de Hamilton (II.1) chega-se às equações finais de equilíbrio dinâmico da casca sob tensões iniciais vibrando em um meio fluido.

$$\left(L_{ij} - \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \underline{U} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_r + p_e \end{Bmatrix} \quad (II.25)$$

onde p_r é a pressão irradiada (II.20) devida à excitação da casca, p_e é a força pontual excitadora na direção radial e L_{ij} os operadores diferenciais que dependem da teoria de cascas adotada. Neste trabalho são usadas as expressões lineares da teoria

de Donnell para cascas abatidas [2].

II.3.1. EQUAÇÕES DE MOVIMENTO PARA VIBRAÇÕES "LIVRES" DA CASCA COM EXTREMOS SIMPLEMENTE APOIADOS CONTENDO FLUIDO EM REPOUSO

Substituindo-se (II.20) e (II.7a) no sistema (II.25), e considerando $p_e=0$, tem-se as equações de movimento finais do problema de vibração livre considerando-se o acoplamento fluido-casca esbelta. Essas equações podem ser convenientemente escritas na forma matricial

$$([A] - \Omega^2 [M]) \{\Delta\} = \{0\} \quad (II.26)$$

onde

$$\{\Delta\}^T = \{\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}\} \quad ,$$

os coeficientes de rigidez são:

$$A_{11} = \beta^2 + \frac{(1-\nu)}{2} n^2 \quad ; \quad A_{12} = - \frac{(1+\nu)}{2} \beta n = A_{21}$$

$$A_{13} = - \nu \beta = A_{31} \quad ; \quad A_{22} = n^2 + \frac{(1-\nu)}{2} \beta^2$$

$$A_{23} = n = A_{32} \quad ; \quad A_{33} = 1 + \frac{h^2}{12R^2} (\beta^2 + n^2) + \phi(n^2 + \zeta \beta^2)$$

e os coeficientes de massa normalizados dados por

$$M_{ij} = 0 \quad \text{para} \quad i \neq j \quad ; \quad M_{11} = M_{22} = 1$$

$$M_{33} = 1 + \xi \quad (II.27)$$

A solução não trivial deste problema de auto-valor fornece as frequências naturais e modos de vibração normalizados.

Verifica-se que a influência da pressão p_r aparece no termo M_{33} em consonância com o fato de, sendo o fluido não-viscoso e irrotacional, haver apenas ondas de expansão [3]. A quantidade ξ em M_{33} reflete o aumento de inercia com a consequente redução de frequência em virtude da presença do fluido. Este parâmetro ξ é dado para cascas em contato parcial com fluido, por [5]

$$\xi = \left(\frac{\rho_F}{\rho_C} \right) \left(\frac{R}{h} \right) \left[\frac{H}{L} - \frac{\text{sen } 2 m \pi H/L}{2 m \pi} \right] f(\omega) \quad (II.28)$$

Considerando o fluido incompressível e através de uma aproximação assintótica, tem-se que [2] e [3]

$$f(\omega) = \frac{1}{n} \quad (II.29)$$

Desta forma, o parâmetro ξ fica

$$\xi = \left(\frac{\rho_F}{\rho_C} \right) \left(\frac{R}{h} \right) \left(\frac{1}{n} \right) \left[\frac{H}{L} - \frac{\text{sen } 2m\pi H/L}{2m\pi} \right] \quad (II.30)$$

e pode ser chamado de "massa adicionada adimensional" ou de "massa adicionada" de fluido. Quando $H=L$ em (II.30), tem-se a solução exata obtida a partir de (II.20) e compatível com (II.27).

II.3.2. EQUAÇÕES DE MOVIMENTO PARA VIBRAÇÕES "LIVRES" DA CASCA CONTENDO FLUIDO EM REPOUSO SOB A CONDIÇÃO DE EXTREMOS ENGASTADOS

A partir das equações de equilíbrio em termos dos deslocamentos apresentadas nas equações (II.6), foi adotado um campo de deslocamentos aproximado da forma

$$\begin{aligned} u &= Ux \cdot \text{sen } n\theta \cos \omega t \\ v &= Vx \cdot \cos n\theta \cos \omega t \\ w &= Wx \cdot \text{sen } n\theta \cos \omega t \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

onde

$$Ux = U(x), \quad Vx = V(x) \quad \text{e} \quad Wx = W(x)$$

Substituindo o campo de deslocamentos adotados (II.31) nas equações (II.6),

$$R^2 U_{x,xx} - \frac{(1-\nu)}{2} n^2 Ux - R \frac{(1+\nu)}{2} n V_{x,x} + R \nu W_{x,x} = -\gamma^2 \omega^2 Ux \quad (\text{II.32a})$$

$$R \frac{(1-\nu)}{2} n U_{x,x} - n^2 Vx + R^2 \frac{(1-\nu)}{2} V_{x,xx} + n Wx = -\gamma^2 \omega^2 Vx \quad (\text{II.32b})$$

$$\begin{aligned} R \nu U_{x,x} - n Vx + Wx + \frac{h^2}{12R^2} [R W_{x,xxxx} - 2 R^2 n^2 W_{x,xx} + n^4 Wx] = \\ = -\gamma^2 \omega^2 Wx + p_r \frac{R^2(1-\nu^2)}{Eh} \end{aligned} \quad (\text{II.32c})$$

O último termo da equação (II.31c) define o efeito da pressão irradiada pelo fluido, que foi especificada na equação (II.20), que neste caso adota a forma

$$p_r = Wx \rho_F \omega^2 \frac{1}{n} \left[\frac{H}{L} - \frac{\text{sen } 2 m \pi H/L}{2 m \pi} \right] \quad (\text{II.33})$$

No Anexo A apresenta-se a forma de resolução do sistema de equações, usando o método das diferenciais finitas, e a estratégia computacional adotada.

O sistema apresentado nas equações (II.32) forma um problema de autovalor do mesmo tipo que o descrito através da equação (II.26).

II.4. EQUAÇÕES DE MOVIMENTO PARA RESPOSTA EM FREQUÊNCIA SOB IMPACTO LATERAL DA CASCA CILÍNDRICA CONTENDO FLUIDO EM REPOUSO

A resolução do problema de autovalor enunciado na equação (II.26) fornece as frequências naturais e as formas modais de vibração associadas a cada frequência.

Uma vez determinados os modos de vibração $U_{mn}(x, \theta)$, $V_{mn}(x, \theta)$ e $W_{mn}(x, \theta)$ correspondentes a uma frequência natural ω_{mn} , a solução para o problema de vibrações forçadas em termos dos modos normais é da forma [7]

$$u = \sum_m \sum_n \bar{U}_{mn} q(t) \cos(\beta x/R) \cos n\theta$$

$$v = \sum_m \sum_n \bar{V}_{mn} q(t) \sin(\beta x/R) \sin n\theta \quad (\text{II.34})$$

$$w = \sum_m \sum_n \bar{W}_{mn} q(t) \sin(\beta x/R) \cos n\theta$$

Nesta situação, o parâmetro p_e da equação (II.25) é diferente de zero e representa a força radial excitadora. Esta força excitadora de impacto é representada de maneira aproximada utilizando-se o δ de Dirac, como:

$$p_e(x, \theta, t) = \delta(t_0) \delta(x_1) \delta(\theta_1) \quad (\text{II.35})$$

Deve-se salientar aqui a consideração do acoplamento modal na formulação do problema expresso pelas equações (II.33). Assim, a pressão irradiada (II.20), passa a ser escrita na forma [8]:

$$p_r = - \sum_m \sum_n \bar{W}_{mn} \rho_F \omega^2 e^{i\omega t} \sin \frac{m\pi x}{L} \cos n\theta f_{mn}(\omega) \quad (\text{II.36})$$

Substituindo-se as expressões (II.34), (II.35) e (II.36) em (II.25), e aplicando-se Galerkin com relação às coordenadas espaciais, obtêm-se um sistema de $m \times n$ equações diferenciais ordinárias no tempo que são resolvidas por meio da transformação de Fourier que é definida por [9]

$$F \{f(x)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega t} dx \quad (\text{II.37})$$

Desta maneira são obtidas as amplitudes de deslocamento para cada valor dado de frequência.

CAPÍTULO III

RESULTADOS DA ANÁLISE TEÓRICA

Apresentam-se neste capítulo os resultados teóricos obtidos para a casca sob a condição de extremos simplesmente apoiados e de extremos engastados; também são apresentados comentários acerca do fenômeno de acoplamento modal.

III.1. RESULTADOS EM TERMOS DE FREQUÊNCIA PARA O CASO DA CASCA COM EXTREMOS SIMPLEMENTE APOIADOS

As figuras (III.1), (III.2), (III.3) e (III.4) mostram o comportamento da casca cilíndrica delgada com parâmetros físicos e geométricos definidos no Capítulo IV, com extremos simplesmente apoiados, para diversos valores da relação altura do nível do fluido sobre comprimento da casca (H/L), em espectros de frequência vs modos de vibração. Para a obtenção destes espectros foi usada a equação (II.26).

A influência do número de semi-ondas longitudinais, m , nas frequências naturais da casca com extremos simplesmente

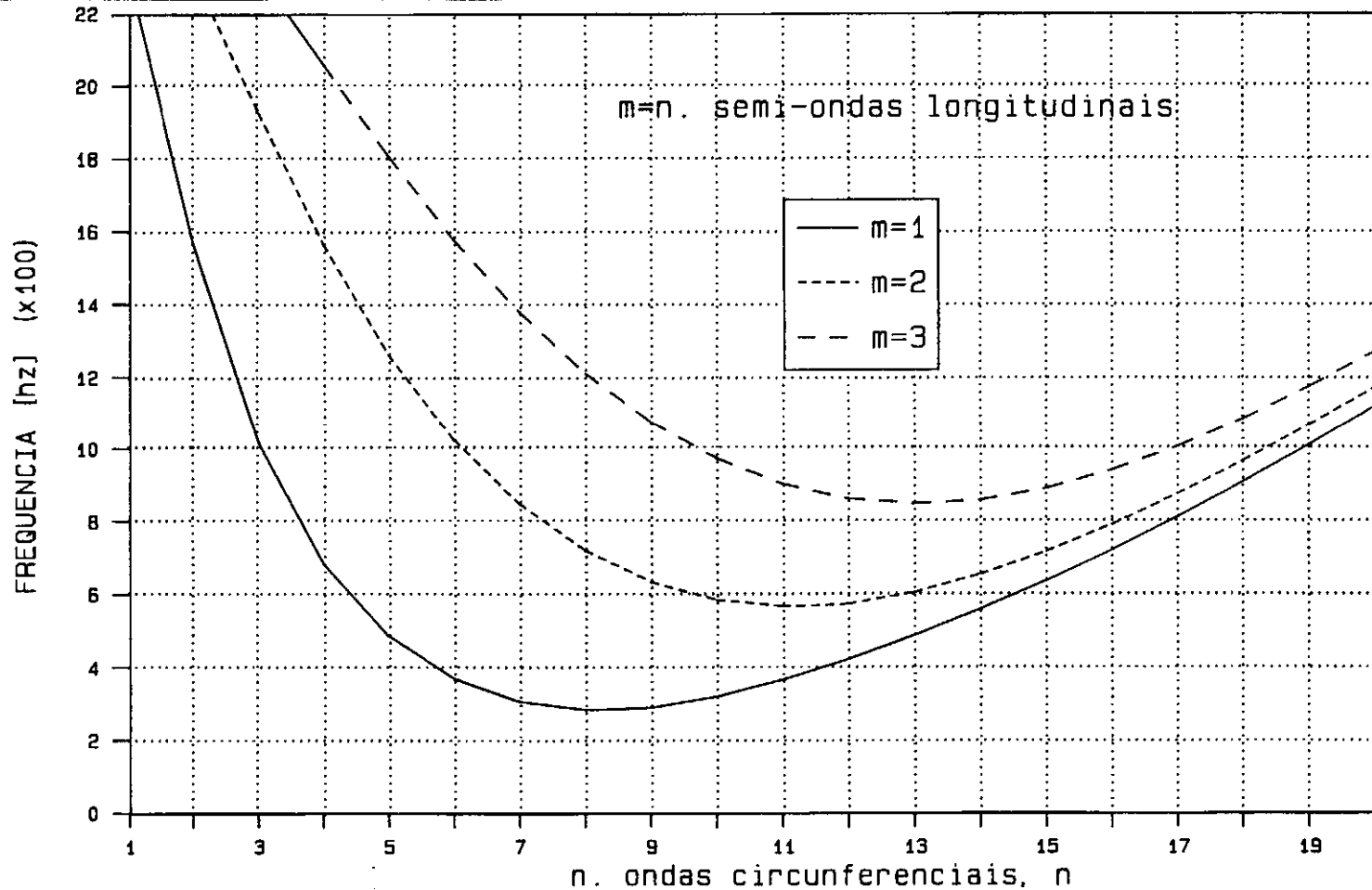


FIG.III.1. ESPECTROS DE FREQUENCIA x MODOS DE VIBRACAO - H/L=0.0 -
ANALISE TEORICA - APOIO SIMPLES - R/h=300

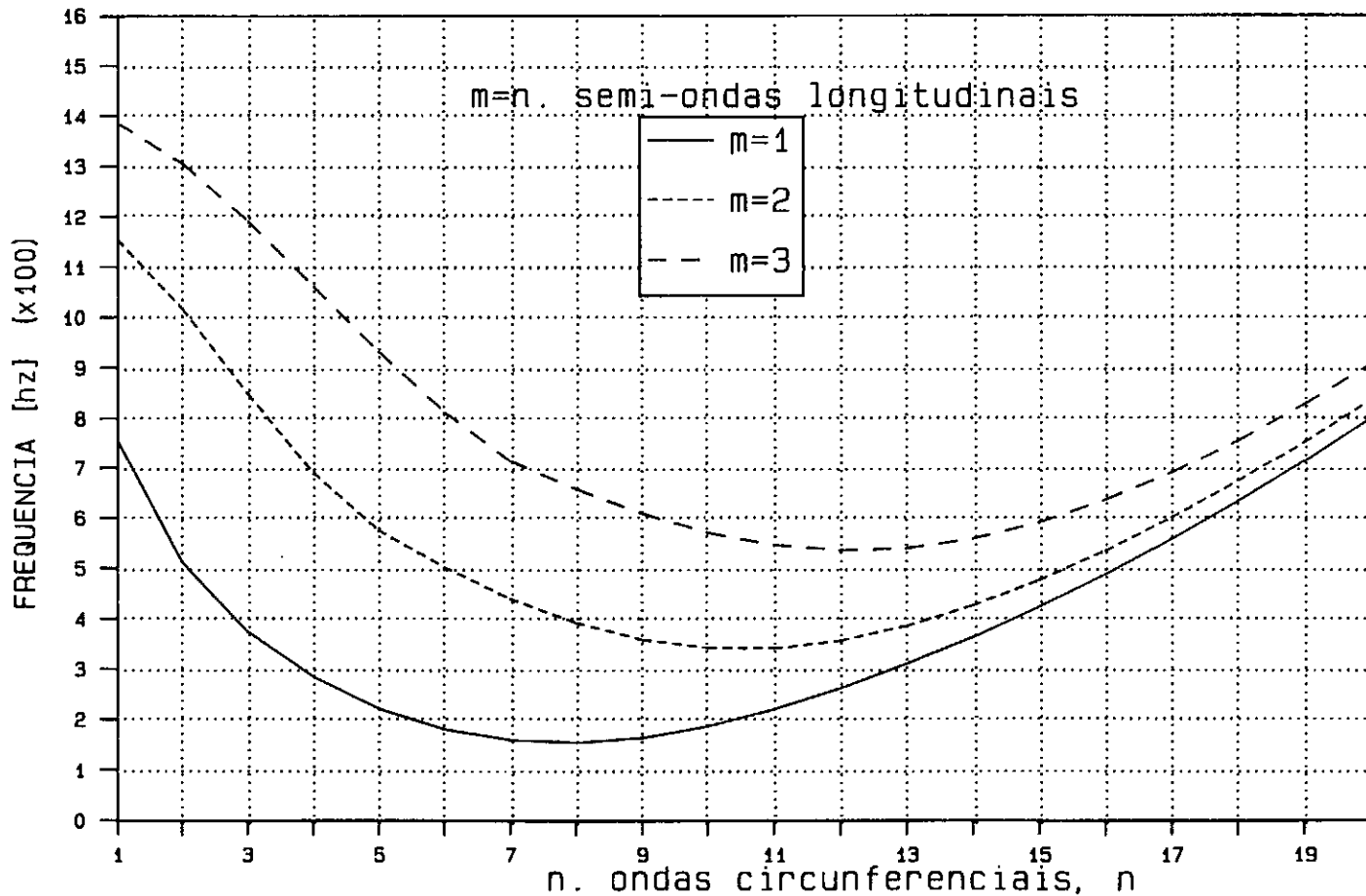


FIG.III.2. ESPECTRO DE FREQUENCIA x MODOS DE VIBRACAO - H/L=0.5
ANALISE TEORICA - APOIO SIMPLES - R/h=300

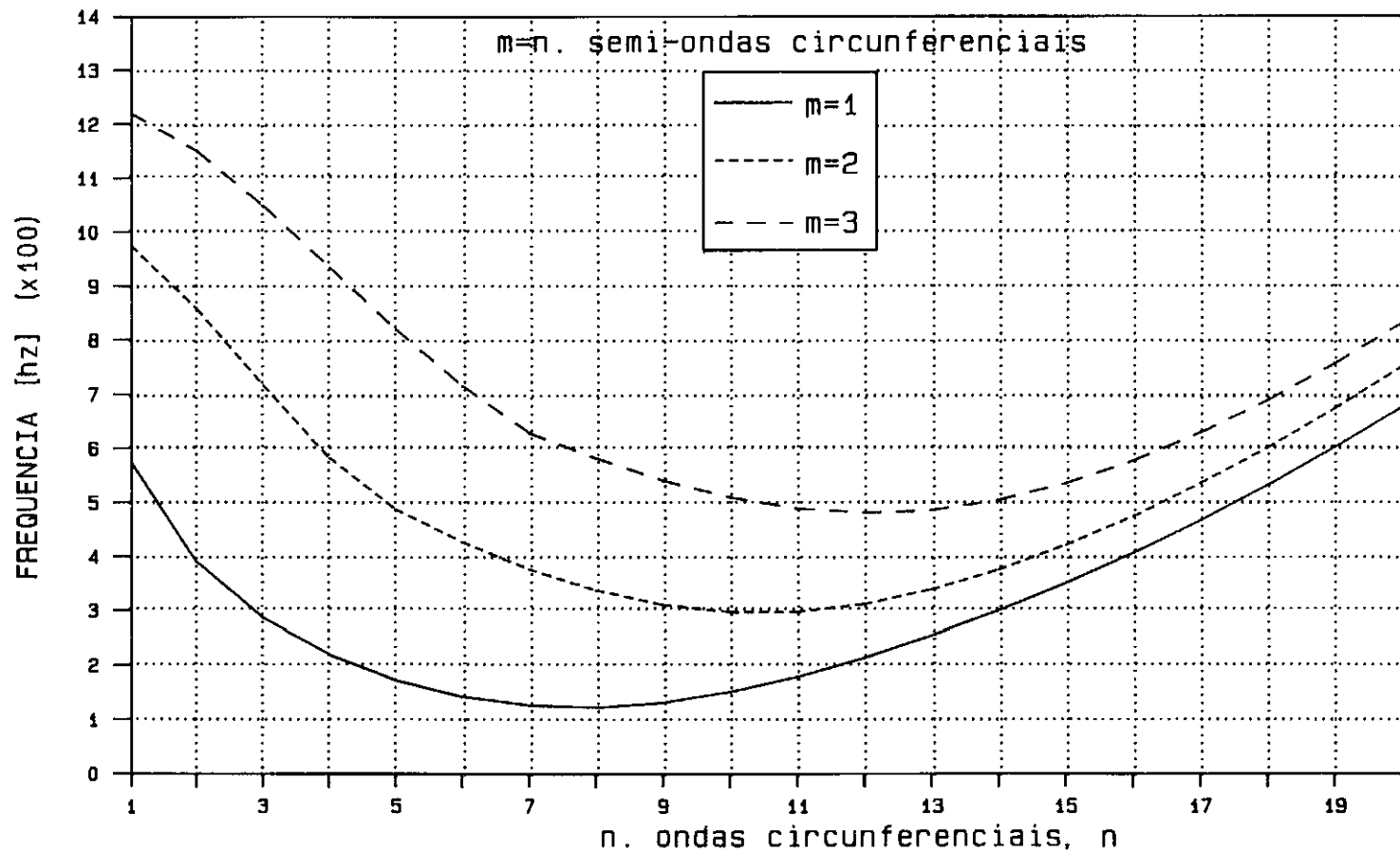


FIG.III.3. ESPECTROS DE FREQUENCIA x MODOS DE VIBRACAO - $H/L=0.75$ -
 ANALISE TEORICA - APOIO SIMPLES - $R/H=300$ -

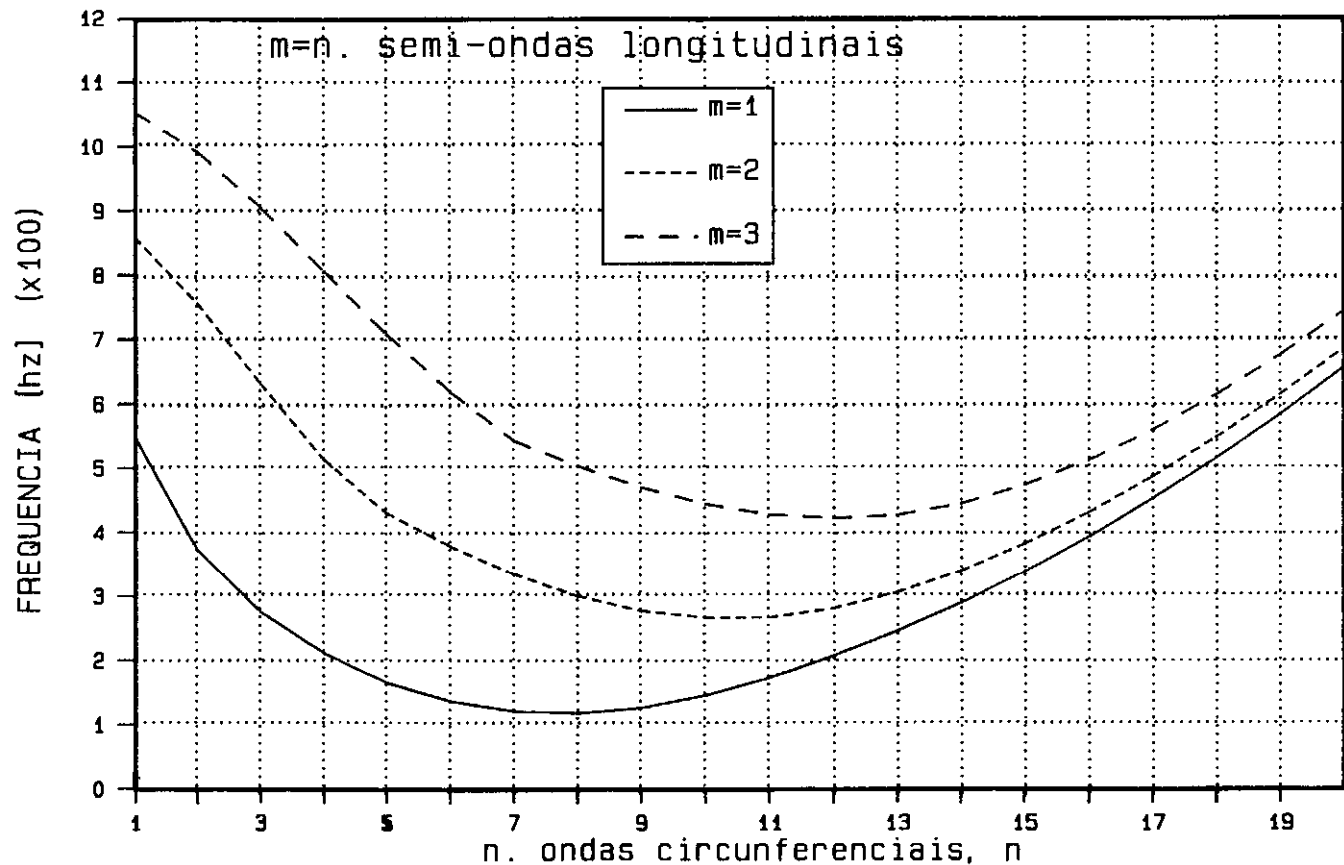


FIG.III.4. ESPECTROS DE FREQUENCIA X MODOS DE VIBRACAO - H/L=1.0
ANALISE TEORICA - APOIO SIMPLES - R/H=300 -

apoiados, pode ser verificada através das citadas figuras. Observa-se que a menor frequência natural da casca ocorre para $m=1$, ou seja, para uma semi-onda longitudinal, e que a medida que n cresce, os valores das frequências tendem a um valor comum para qualquer m , já que para modos de vibração altos (n grande), o comportamento dinâmico da casca é dominado por energia de flexão. Verifica-se também a grande influência do fluido para qualquer valor de m .

É apresentada na figura (III.5), através de um espectro de frequência vs modos de vibração, a variação da frequência, calculada a partir da equação (II.25), com o número de ondas circunferenciais, n , para uma semi-onda longitudinal ($m=1$), e distintos valores da relação H/L (0,0, 0,50, 0,75 e 1,0). Para os quatro casos, verifica-se que a frequência decresce com n até atingir um mínimo para um dado n , passando novamente a crescer a medida que n cresce. Pode-se observar o fato do aumento da divergência entre os valores de frequências com o acréscimo do número de ondas circunferenciais, n , a partir do valor de n correspondente às frequências naturais. Esta divergência é devida à influência do parâmetro de massa de fluido adicionada, que é diretamente proporcional a H/L e inversamente proporcional ao número de ondas circunferenciais, n , como pode ser visto na equação (II.30).

Observa-se nessa figura (III.5), que tanto para a casca no ar ($H/L=0,0$) quanto para aquelas contendo fluido ($H/L \neq 0$), as frequências atingem um valor mínimo (frequências naturais) para o mesmo valor de n . Isto indica que a energia interna de deformação elástica é praticamente idêntica nos quatro casos de H/L . Pode-se concluir que o decréscimo acentuado das frequências com

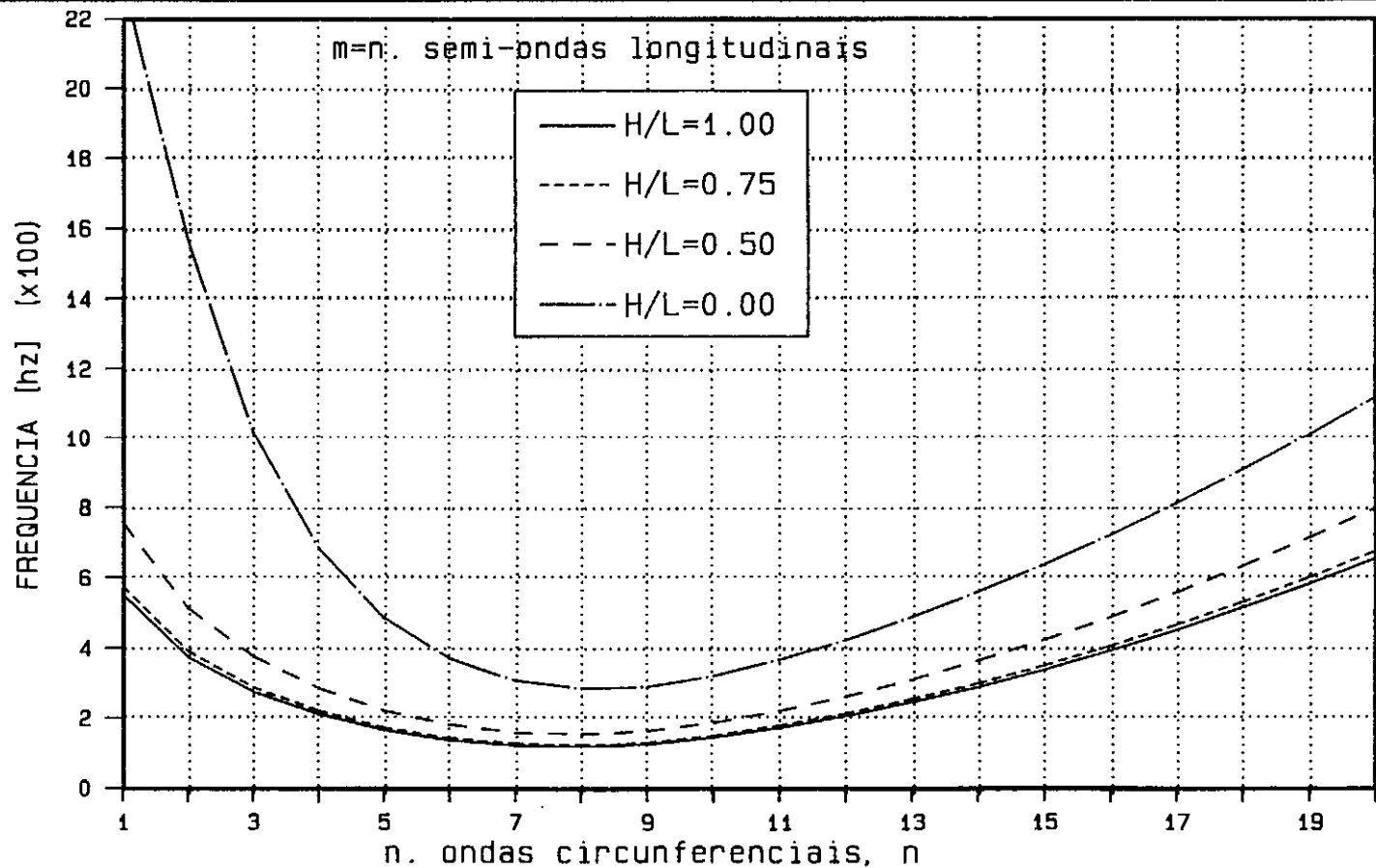


FIG.III.5. ESPECTROS DE FREQUENCIA x MODOS DE VIBRACAO - m=1 -
ANALISE TEORICA - APOIO SIMPLES - R/H=300 -

o aumento de H/L é explicado pelo aumento acentuado da energia cinética do sistema fluido-estrutura, que é traduzido pelo acréscimo do valor do parâmetro ξ (veja equação (II.30)), de massa de fluido adicionada, sem um aumento correspondente da energia potencial do sistema. Sempre que isto ocorre em um sistema dinâmico conservativo há um decréscimo nas frequências naturais.

III.2. RESULTADOS EM TERMOS DE FREQUÊNCIA PARA O CASO DA CASCA COM EXTREMOS ENGASTADOS

Na figura (III.6), para a casca com extremos engastados, verifica-se um comportamento das frequências naturais, para vários valores da relação H/L , similar ao detectado para o caso de extremos simplesmente apoiados (vide figura (III.5)). O valor mínimo das frequências ocorre também para o mesmo valor de n , devido ao acréscimo da energia cinética do sistema pela presença do fluido (parâmetro ξ de massa de fluido adicionada) sem um aumento correspondente da energia potencial. Nota-se também o aumento da divergência entre os valores de frequência dos espectros (para valores de H/L iguais a 0,0, 0,5, 0,75 e 1,0) com o acréscimo do número de ondas circunferenciais, n . Isto é devido à influência do parâmetro ξ , que é diretamente proporcional a H/L e inversamente proporcional a n .

Cabe destacar que o estudo da casca sob a condição de extremos engastados foi feito a partir da equação II.32, como indicado no Anexo A.

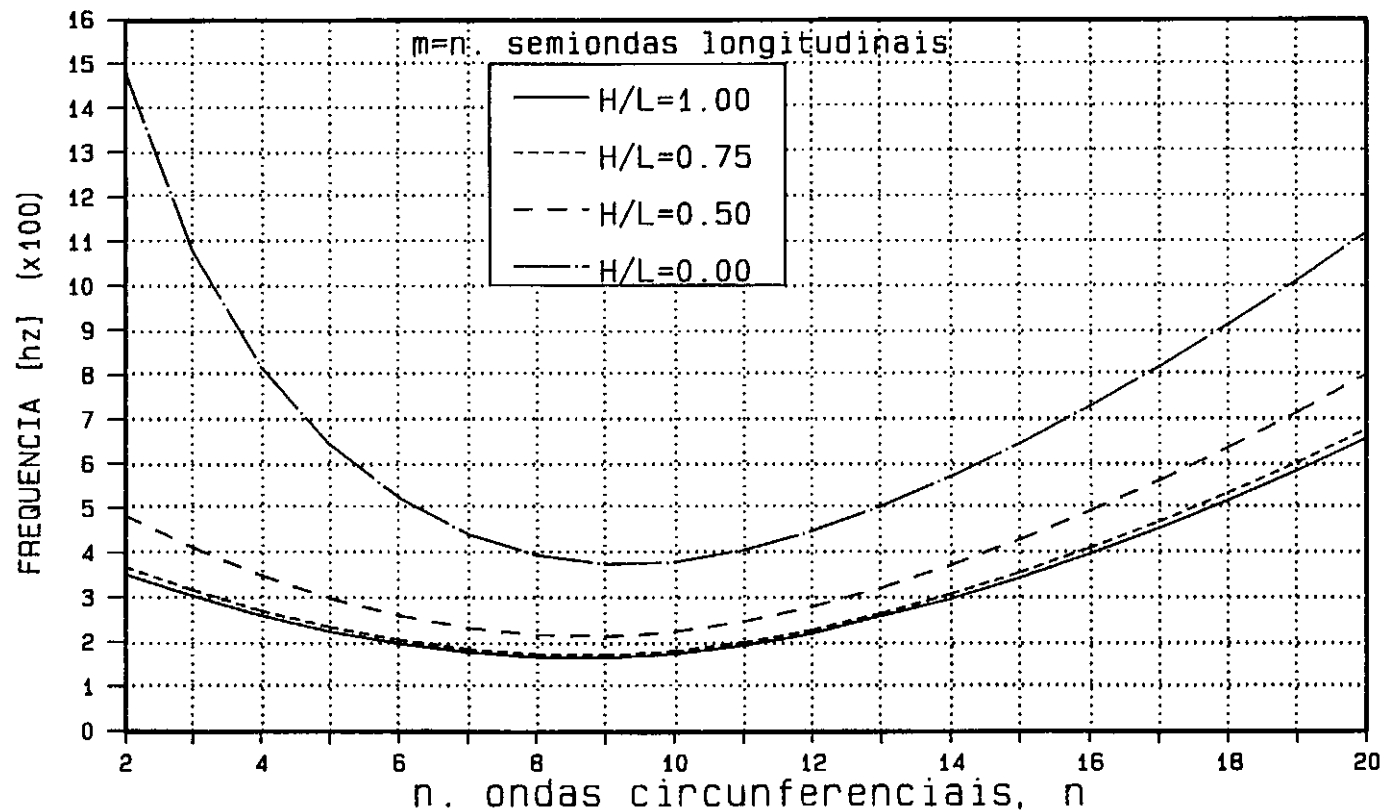
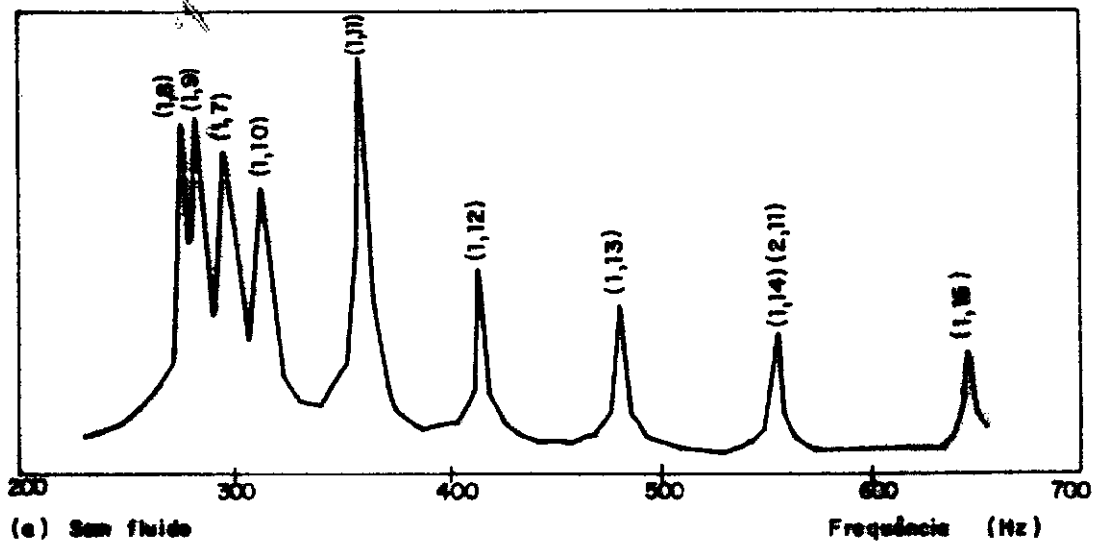


FIG.III.6. ESPECTRO DE FREQUENCIA x MODOS DE VIBRACAO - m=1
 ANALISE TEORICA - ENGASTE - R/H=300 -

Amplitude de deslocamentos



Amplitude de deslocamentos

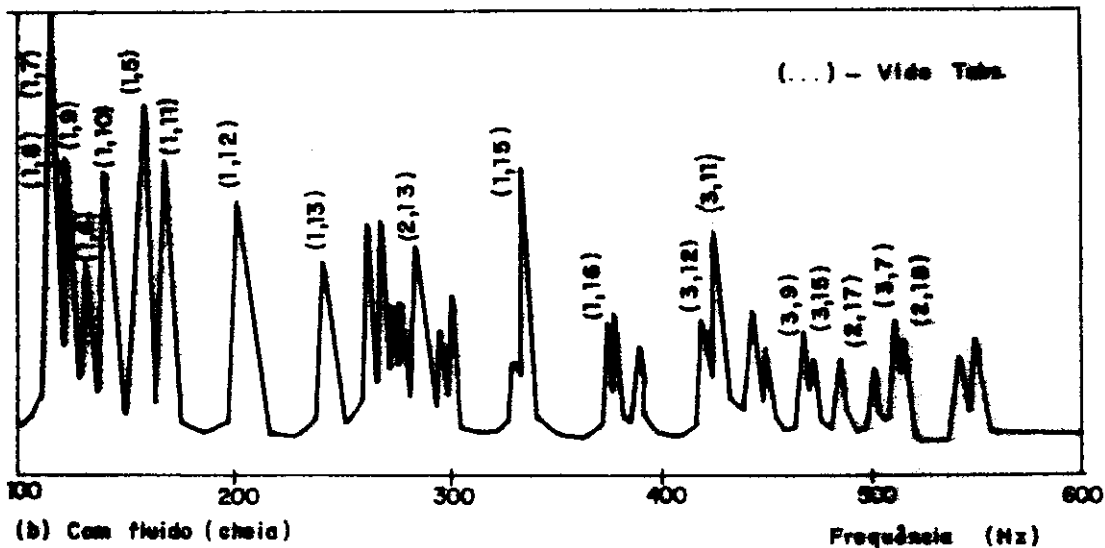


Fig III 7 - Espectros teóricos de amplitude de deslocamentos x frequência.

III.3. COMENTÁRIOS SOBRE O FENÔMENO DE ACOPLAMENTO MODAL

Observa-se nos espectros de frequência vs modos de vibração apresentados através das figuras (III.1 até III.6), a forma abatida das curvas na região de menores valores de frequência. Essa característica evidencia a possível ocorrência de acoplamento entre uma certa quantidade de modos de vibração envolvidos numa faixa estreita de frequências.

Nota-se também que a presença do fluido faz com que os espectros sejam ainda mais abatidos, aumentando desta forma a possibilidade da ocorrência do acoplamento entre modos de vibração.

Isto pode ser melhor ilustrado através da observação das figuras (III.7a) e (III.7b), que mostram espectros de amplitude de deslocamentos vs frequência, obtidos a partir das equações (II.25), (II.34), (II.35) e (II.36), para o caso da casca com extremos simplesmente apoiados sob impacto lateral pontual ($x=L/2$; $\theta=\pi$) especificado através da equação (II.35), para dois valores da relação H/L (0,0 e 1,0).

Uma análise mais ampla de todos esses resultados, assim como uma análise paramétrica do problema, será feita mais adiante no Capítulo VI à luz de comparações com observações e resultados experimentais.

CAPÍTULO IV

MODELO EXPERIMENTAL

IV.1. INTRODUÇÃO

O modelo experimental da casca cilíndrica foi projetado em função das relações raio sobre espessura, R/h , e comprimento sobre raio, L/R , sendo que foram escolhidos os valores $R/h = 300$ e $L/R \sim 1,4$ satisfazendo a condição de casca delgada.

As dimensões geométricas deste modelo são mostradas na figura (IV.1).

Os ensaios dinâmicos da casca foram realizados sob as seguintes condições:

- a - vibrações da casca sem fluido;
- b - vibrações da casca com fluido interno em distintos níveis;
- c - vibrações da casca sem fluido sob ação de uma pequena carga vertical,

todas para as condições de extremos simplesmente apoiados ou en gastados.

IV.2. CONSTRUÇÃO DO MODELO

O modelo foi construído em aço inox, conformando-se uma chapa de 1 mm de espessura, de 1885 mm de comprimento e 430 mm de largura (vide figura (IV.1)).

Foram praticados furos de 3 mm de diâmetro (segundo indi cado na figura (IV.2)) para permitir o preenchimento adequado, com material vedante, das ligações dos extremos da casca com as placas circulares de fechamento.

Uma vez conformada, a chapa foi soldada mediante um processo com resfriamento de gás argônio.

Esta costura soldada foi bem acabada, evitando-se a formação do cordão de solda para não enrijecer longitudinalmente o cilindro. A solda foi executada no laboratório do PEM - COPPE/ UFRJ.

O modelo se completa com 2 chapas circulares, de aço, de 15,9 mm de espessura, nas quais foram torneadas ranhuras, mostradas em detalhe na figura IV.3, com as quais se reproduziram aproximadamente as condições de apoio teóricas da casca estudada.

Ver fig. IV - 3

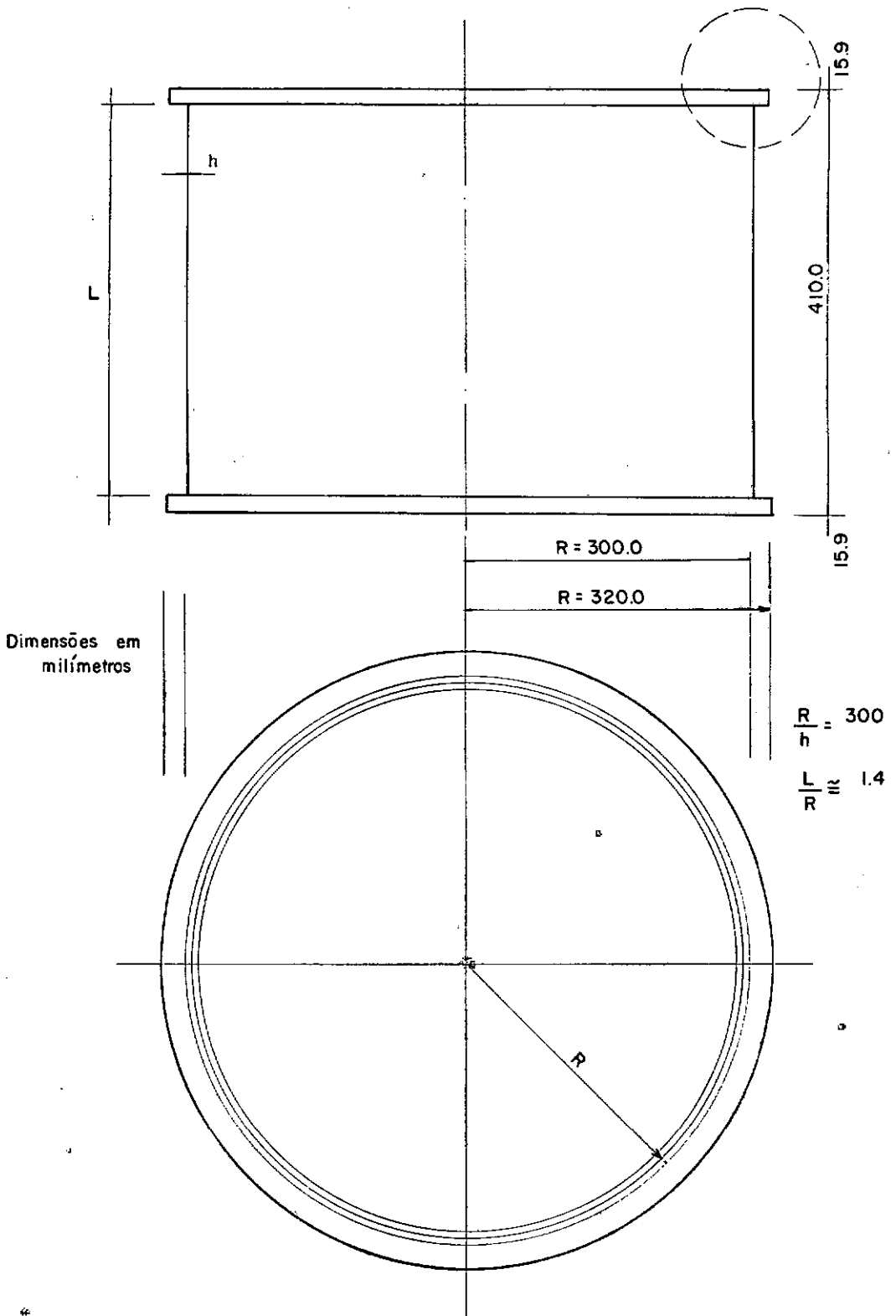


Fig. IV - 1 - Geometria e dimensões do modelo experimental.

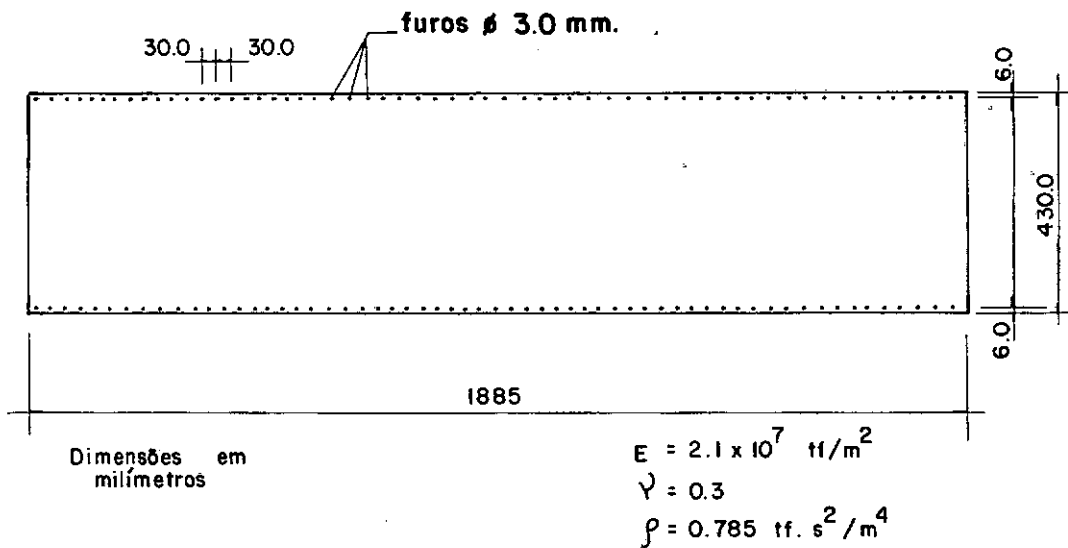


Fig. IV. 2 - Detalhe da chapa de aço inox usada para a construção do modelo.

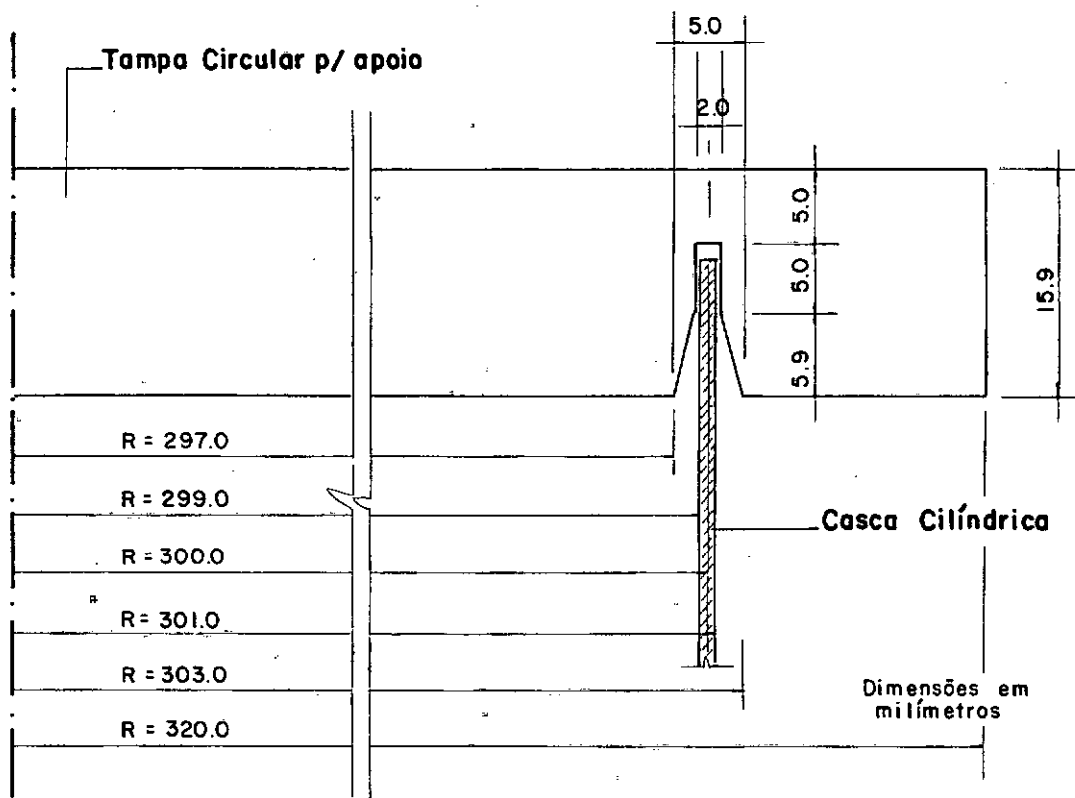


Fig. IV. 3 - Detalhe da ranhura torneada nas tampas circulares para apoio da casca.

IV.3. CONDIÇÕES DE APOIO

Foram realizados 2 tipos de apoios para o modelo:

- extremos simplesmente apoiados;
- extremos engastados.

A condição de simplesmente apoiada foi obtida introduzindo os bordos da casca nas ranhuras (descritas no item IV.2 e mostradas na figura IV.2) embebidas de silicone, o que também permitiu a vedação do cilindro (ver figura IV.4 e foto IV.1).

Para conseguir a condição de engaste nos bordos da casca, foi usada resina epóxica, sendo que para garantir um perfeito nivelamento e ajuste concêntrico das tampas com o eixo do cilindro durante o endurecimento da resina, foi construída a estrutura em perfis (mostradas nas fotos IV.2 e IV.3) que constava de parafusos niveladores e um sistema de prumos de madeira.

Para garantir o engaste perfeito entre a casca e tampas de fechamento, formas circulares foram coladas ao longo das ranhuras (ver figura IV.5), conseguindo-se assim uma maior superfície de contato entre cilindro e resina. Além disso, essa maior superfície de contato permitiu uma transferência de tensões axiais — oriundas do carregamento vertical sobre a tampa realizado por macaco hidráulico — mais uniforme ao longo dos bordos extremos da casca. Observa-se que esta transferência de tensões axiais é realizada por tensões de cisalhamento longitudinal entre a parede da casca e a resina endurecida (vide foto IV.4).

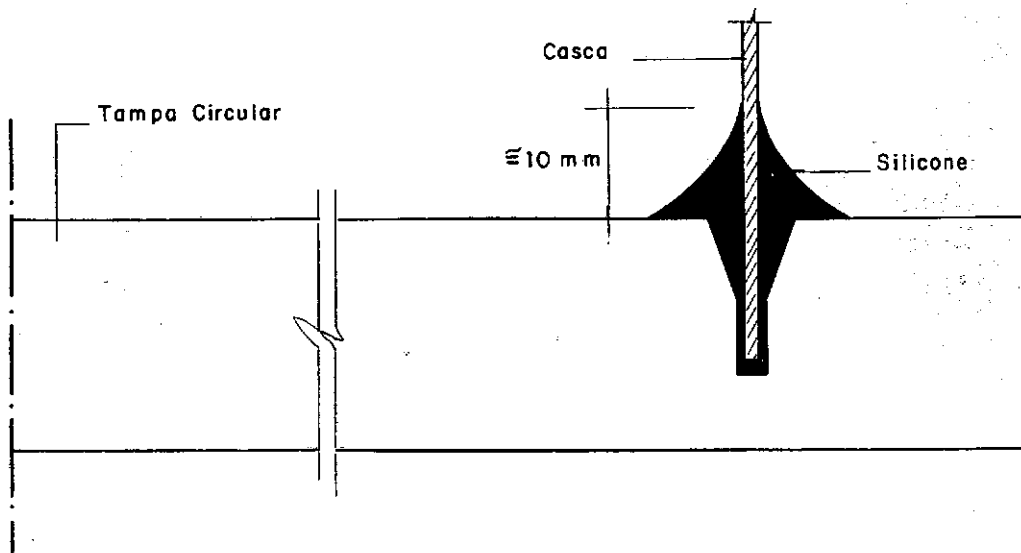


Fig IV 4 - Detalhe da ligação tampa-casca para a condição de extremos simplesmente apoiados

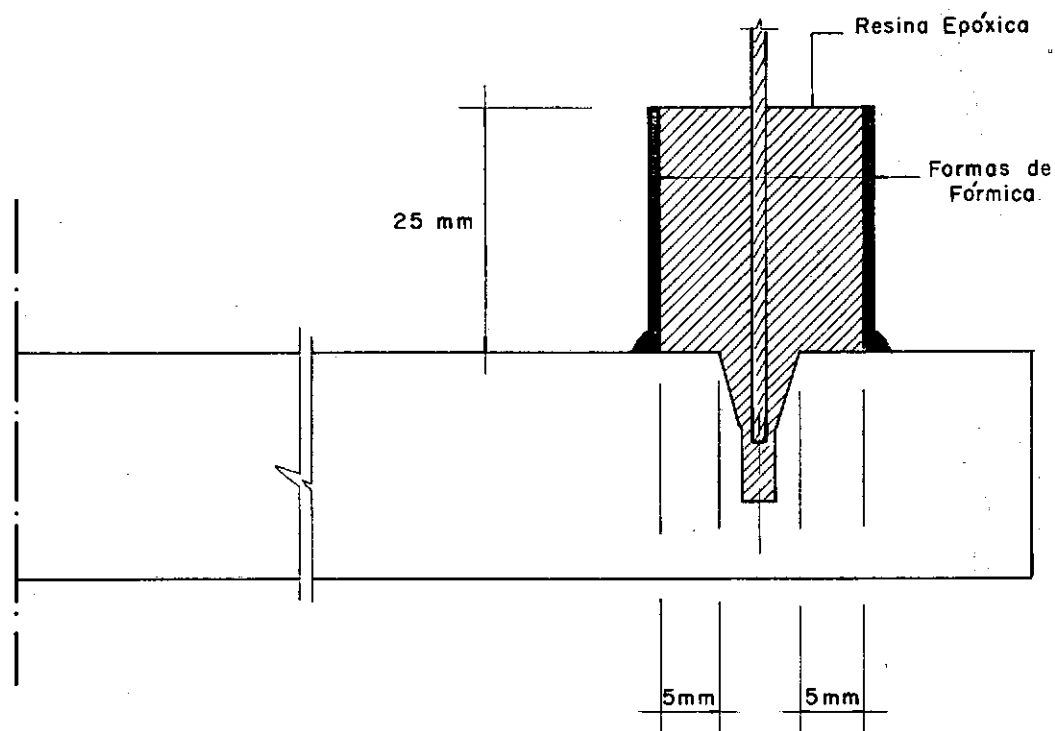


Fig IV 5 - Detalhe da ligação tampa-casca para a condição de extremos engastados.



Foto IV.1 - Detalhe da ligação casca-tampa circular mediante silicone

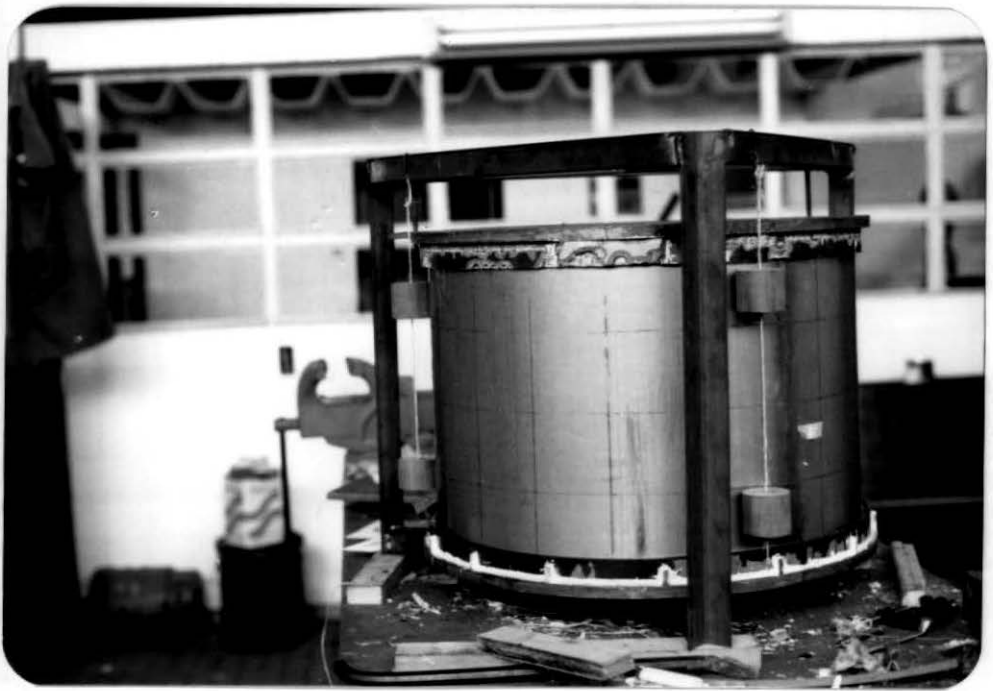


Foto IV.2 - Detalhe da estrutura para nivelamento e ajuste concêntrico das tampas com o eixo do cilindro durante o endurecimento da resina



Foto IV.3 - Montagem do modelo experimental para conseguir a condição de engaste

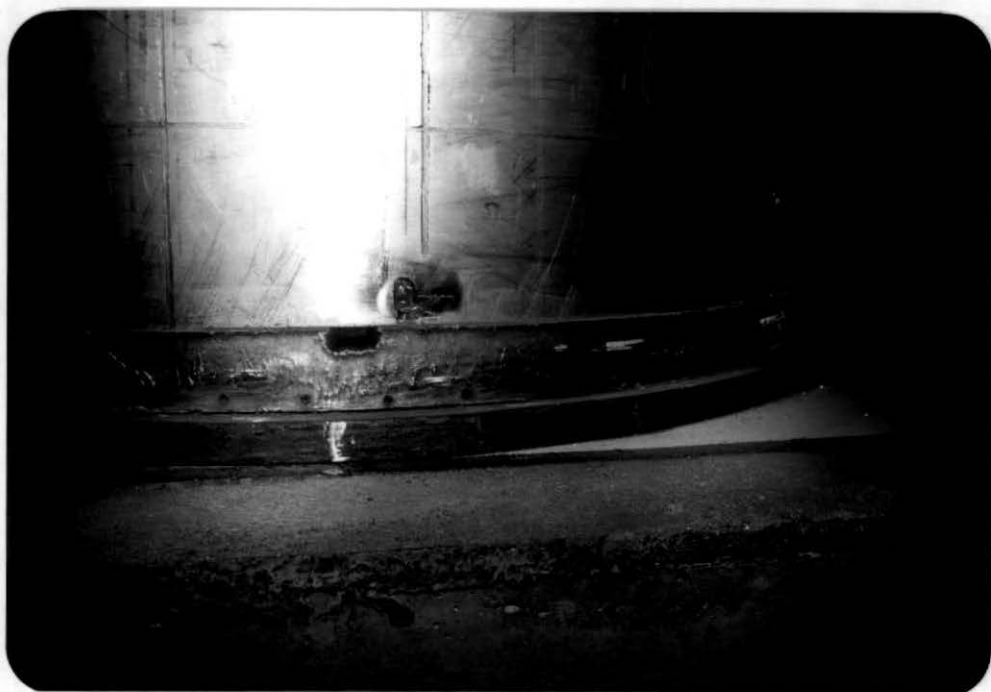


Foto IV.4 - Detalhe da ligação casca-tampa circular mediante resina epóxica

IV.4. MONTAGEM DO ENSAIO

O esquema de montagem do modelo para os ensaios é ilustrado na foto (IV.5), e figura (IV.6), e a montagem geral é apresentada na foto IV.6.

Destaca-se a utilização de aparelhos de apoio de borracha sobre a tampa de aço superior e sob a tampa inferior do modelo, com o objetivo de isolar o sistema de vibrações espúrias e de qualquer interação com o ambiente.

Para os ensaios com fluido interno, foi instalado um tubo transparente vertical para medição do nível de água conforme pode ser visto na foto (IV.7).

Ainda foi usado um bloco de concreto armado, sobre o qual foi montado todo o sistema, permitindo uma melhor observação visual durante o ensaio.

Cabe destacar que todo o conjunto foi perfeitamente nivelado.

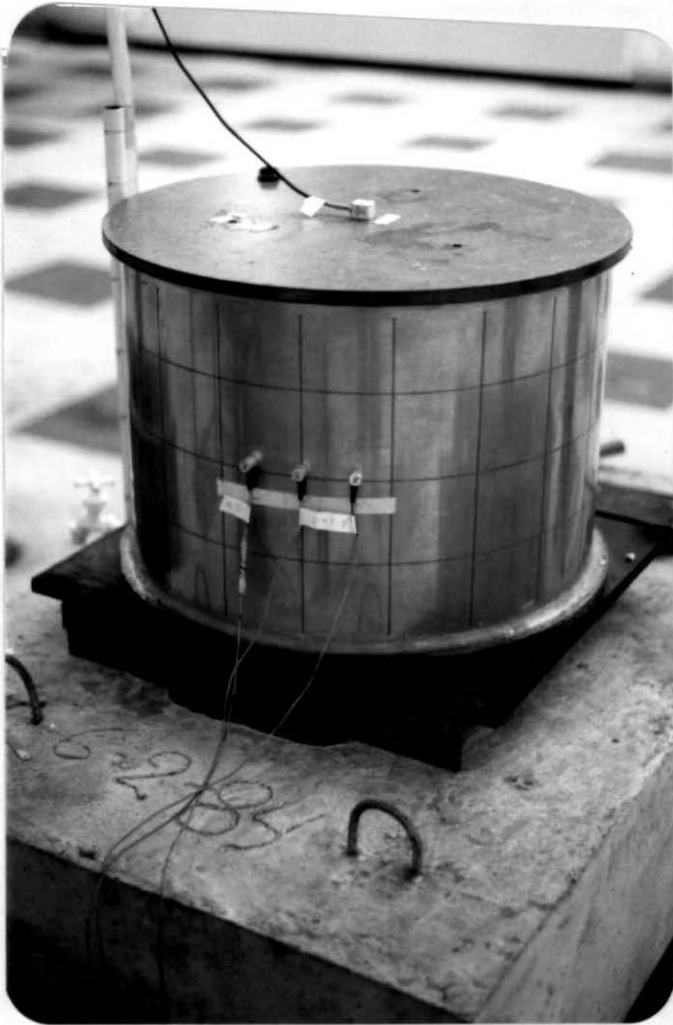


Foto IV.5 - Detalhe da montagem do modelo para os ensaios e instrumentação com acelerômetros

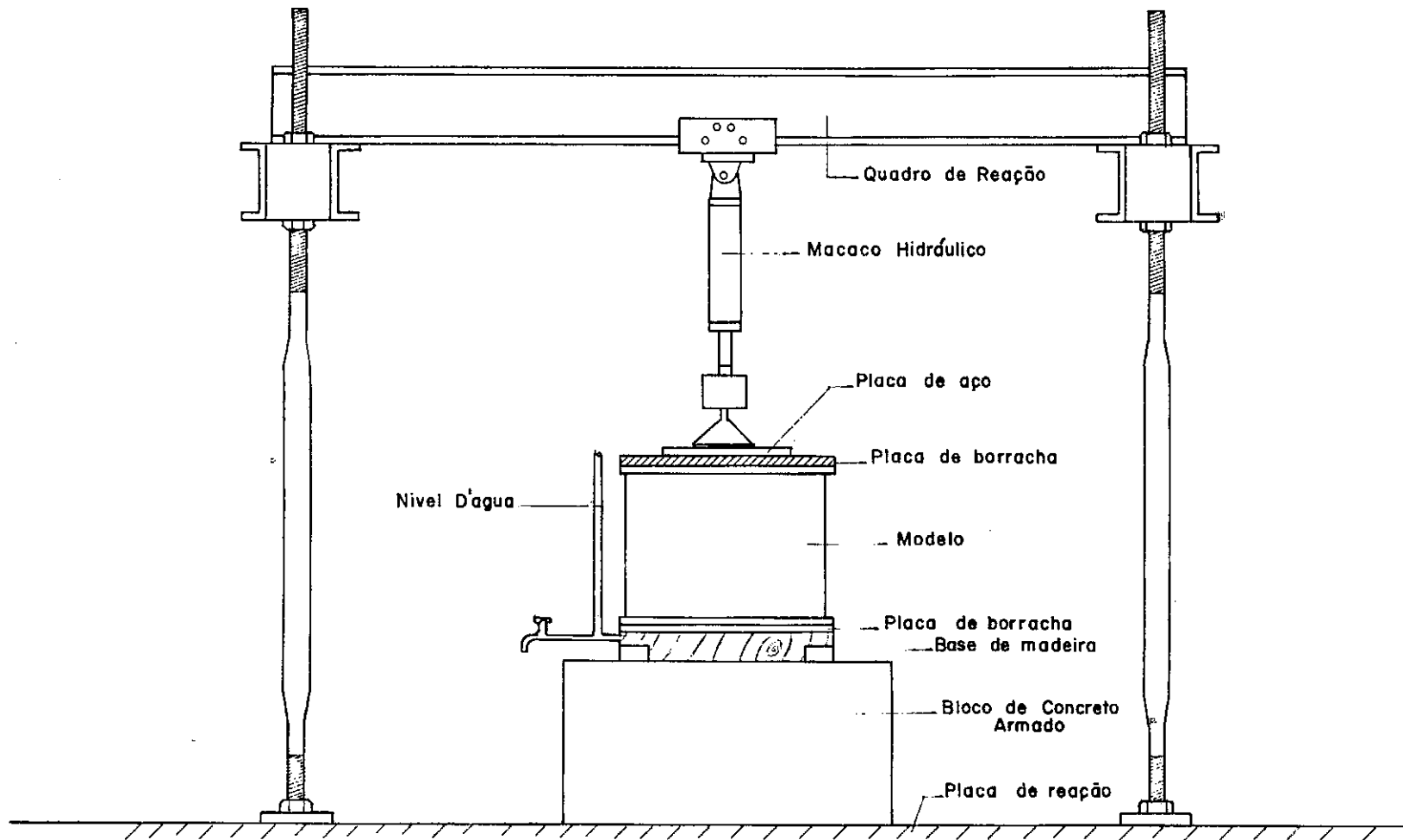


Fig. IV - 6 - Montagem do modelo para os ensaios



Foto IV.6 - Vista geral da montagem para os ensaios



Foto IV.7 - Vista do modelo e detalhe do tubo de medição do nível de fluido

IV.5. INSTRUMENTAÇÃO

Para registrar a resposta dinâmica no tempo nos ensaios realizados, foram usados três micro-acelerômetros, dispostos ao longo da circunferência da seção média, (ver figura IV.7 e foto IV.5) igualmente espaçados num comprimento equivalente a uma semi-onda do modo clássico de vibração associado à primeira frequência natural da casca cilíndrica com a geometria usada, de forma de garantir a medição ventres dos modos de vibração.

Estes acelerômetros foram colados à superfície da casca na direção radial, permitindo assim medições de componentes de acelerações transversais à parede do modelo.

Deve-se também salientar que componentes verticais e circunferenciais de aceleração foram analisadas com instrumentação das tampas de fechamento. Esta instrumentação permitiu uma avaliação das faixas de frequência relativas aos movimentos de corpo rígido da casca sobre o apoio de borracha e também aquelas relativas a vibrações das próprias tampas.

Pode-se adiantar já nessa seção que essas faixas de frequência são distintas das da casca, não mascarando portanto a interpretação dos resultados.

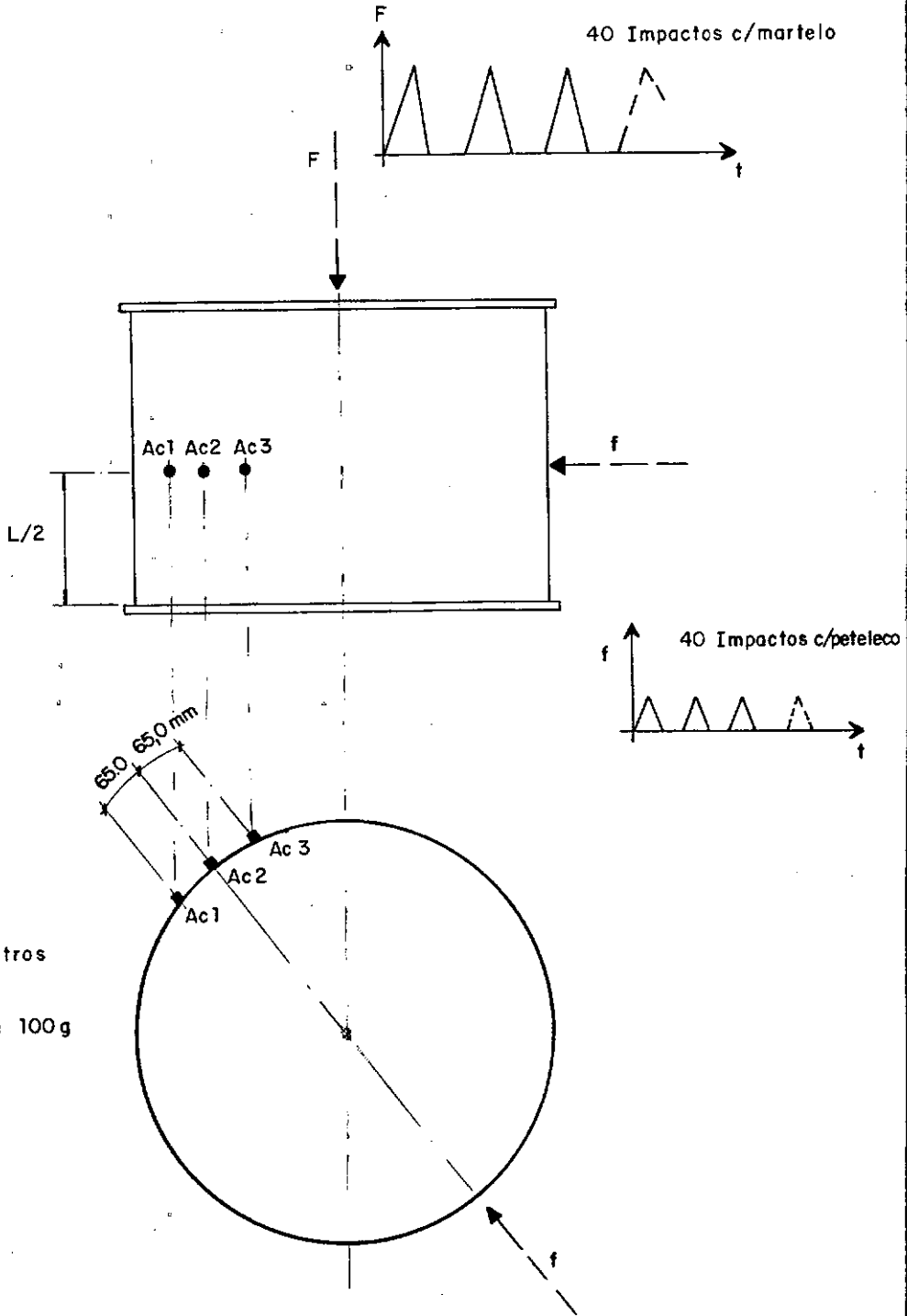


Fig IV 7 - Instrumentação com acelerômetros e direções dos impactos localizados.

IV.6. DESCRIÇÃO DOS ENSAIOS

Os ensaios foram realizados, para a casca vibrando sem fluido e com fluido interno, com preenchimento parcial ou total, e com pequeno carregamento axial.

A casca foi ensaiada sob a condição de extremos simplesmente apoiados e extremos engastados.

A vibração foi causada, ou por impactos sucessivos na parede lateral da casca dados com o dedo ("petelecos") em região diametralmente oposta à posição dos acelerômetros, ou no centro da tampa superior, dados com um martelo, como mostrado na figura IV.7.

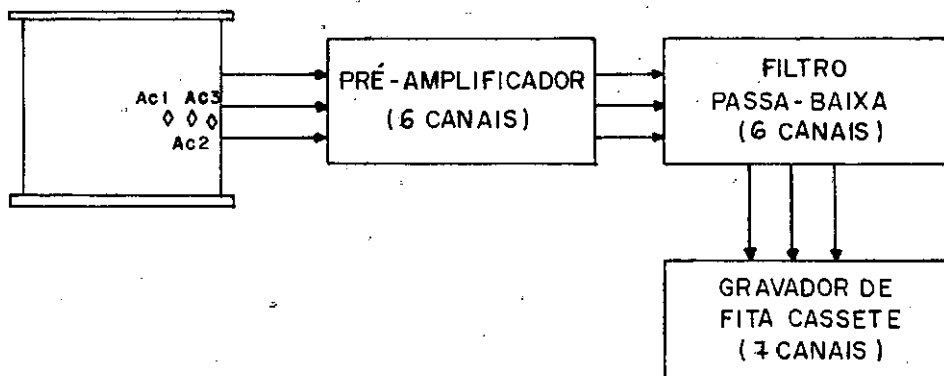
IV.7. SISTEMA DE AQUISIÇÃO E ANÁLISE DE DADOS

Durante a aplicação dos impactos sucessivos (descritos no item IV.6), os sinais dos acelerômetros, depois de amplificados e filtrados, foram gravados simultaneamente, utilizando-se um gravador de quatro canais. Isto é ilustrado no esquema A da figura IV.8, que, também, no seu esquema B, apresenta a técnica para a determinação das principais frequências naturais (relativas a modos globais).

O sinal de aceleração no tempo foi obtido através de um registrador gráfico de 3 canais.

Os equipamentos utilizados são mostrados também nas fotos IV.8, IV.9, IV.10 e IV.11.

ESQUEMA A – Gravação dos sinais dos acelerômetros nos ensaios de vibração livre.



ESQUEMA B – Análise espectral para determinação das frequências naturais.

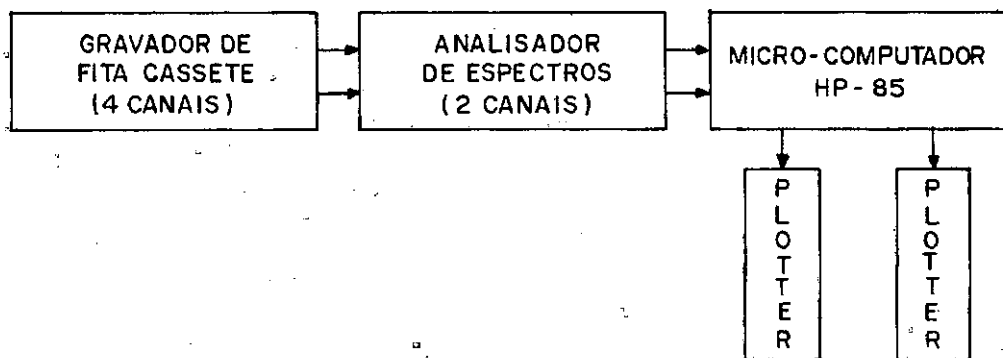


FIG. IV.8: Esquemas dos equipamentos utilizados para gravação e análise dos sinais dos acelerômetros nos ensaios de vibrações livres.

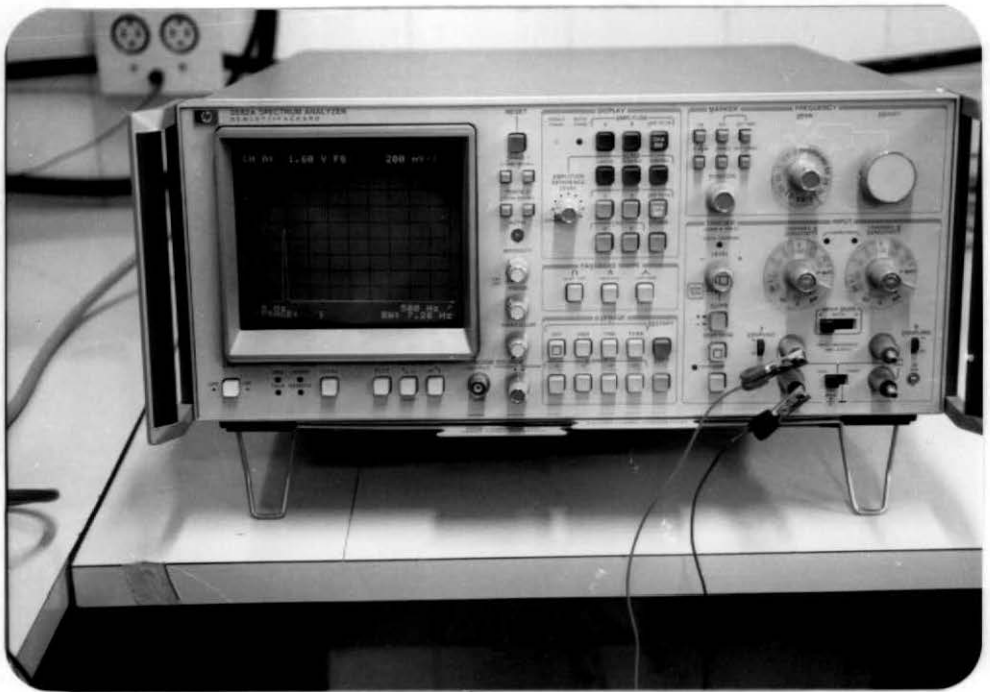


Foto IV.8 - Analisador de espectro usado na interpretação dos resultados experimentais



Foto IV.9 - Vista do computador e plotter usados na análise dos resultados experimentais



Foto IV.10 - Vista geral da montagem para os ensaios onde pode-se observar parte dos equipamentos usados (amplificador, gravador e osciloscópio)

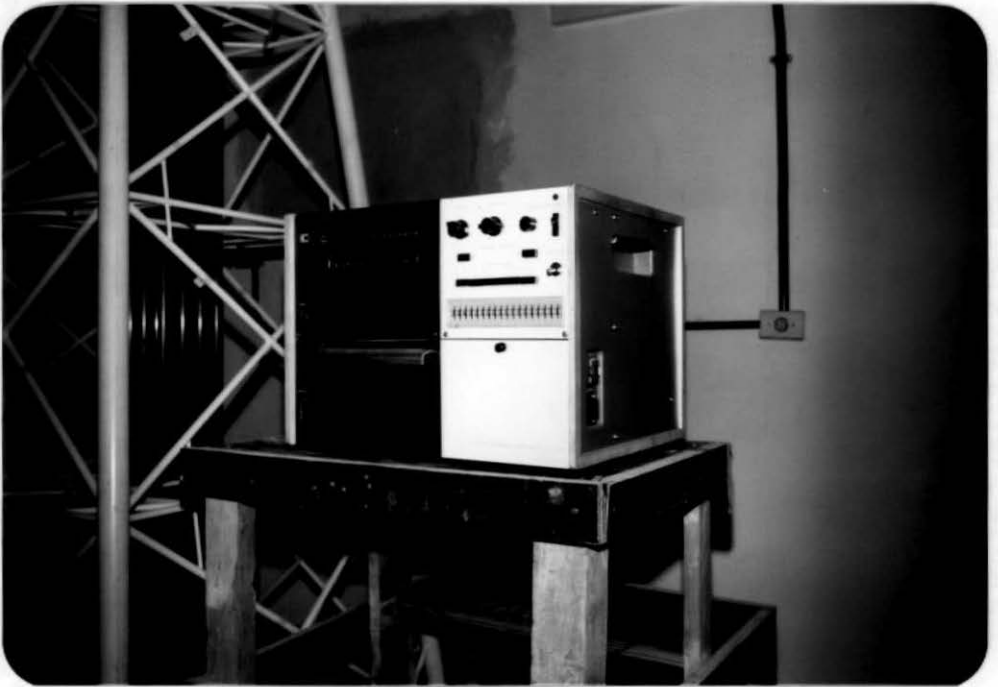


Foto IV.11 - Registrador gráfico

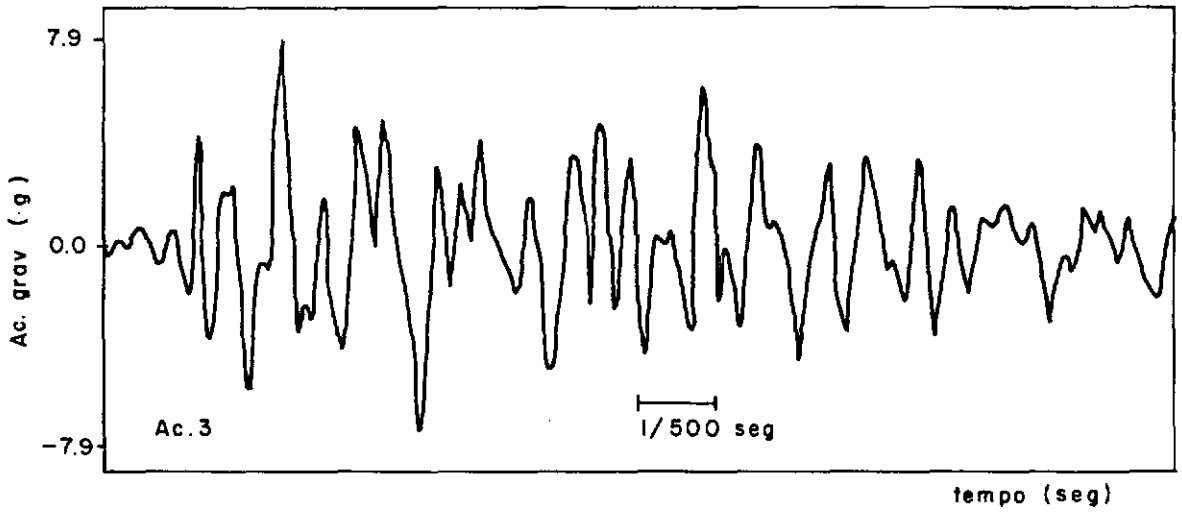
CAPÍTULO V

RESULTADOS DA ANÁLISE EXPERIMENTAL

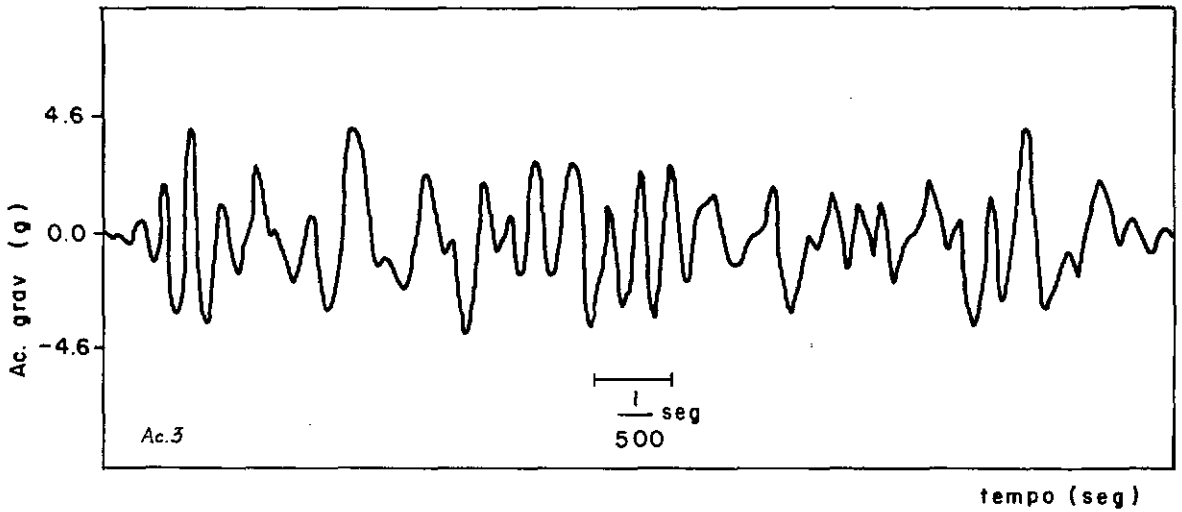
As figuras (V.1a) e (V.1b) mostram, respectivamente, para a casca em vibração livre sem fluido e cheia d'água, respostas típicas de aceleração radial no tempo.

A figura (V.2), por sua vez, mostra para a casca sob a condição de extremos simplesmente apoiados e sem fluido interno (tendo sido excitada com "petelecos"), o espectro de frequência obtido pela aplicação automática da transformação rápida de Fourier ao sinal de aceleração no tempo dos três acelerômetros com os quais foi instrumentada. Pode-se observar que os espectros destes acelerômetros têm forma e valores idênticos; fenômeno este que ficou evidenciado em todos os ensaios realizados.

Da mesma forma, os espectros de frequência resultantes dos ensaios com excitação mediante impacto com martelo no centro da tampa superior, foram também idênticos aos anteriormente descritos. Por esta razão serão mostrados, para todos os ensaios, somente os resultados obtidos da análise do acelerômetro 2 (vide figura IV.7) correspondentes a excitações mediante impactos laterais com petelecos.



(a) Sem fluido



(b) Com fluido

Fig V - 1 - Resposta de aceleração x tempo

Casca com extremos simplesmente apoiados

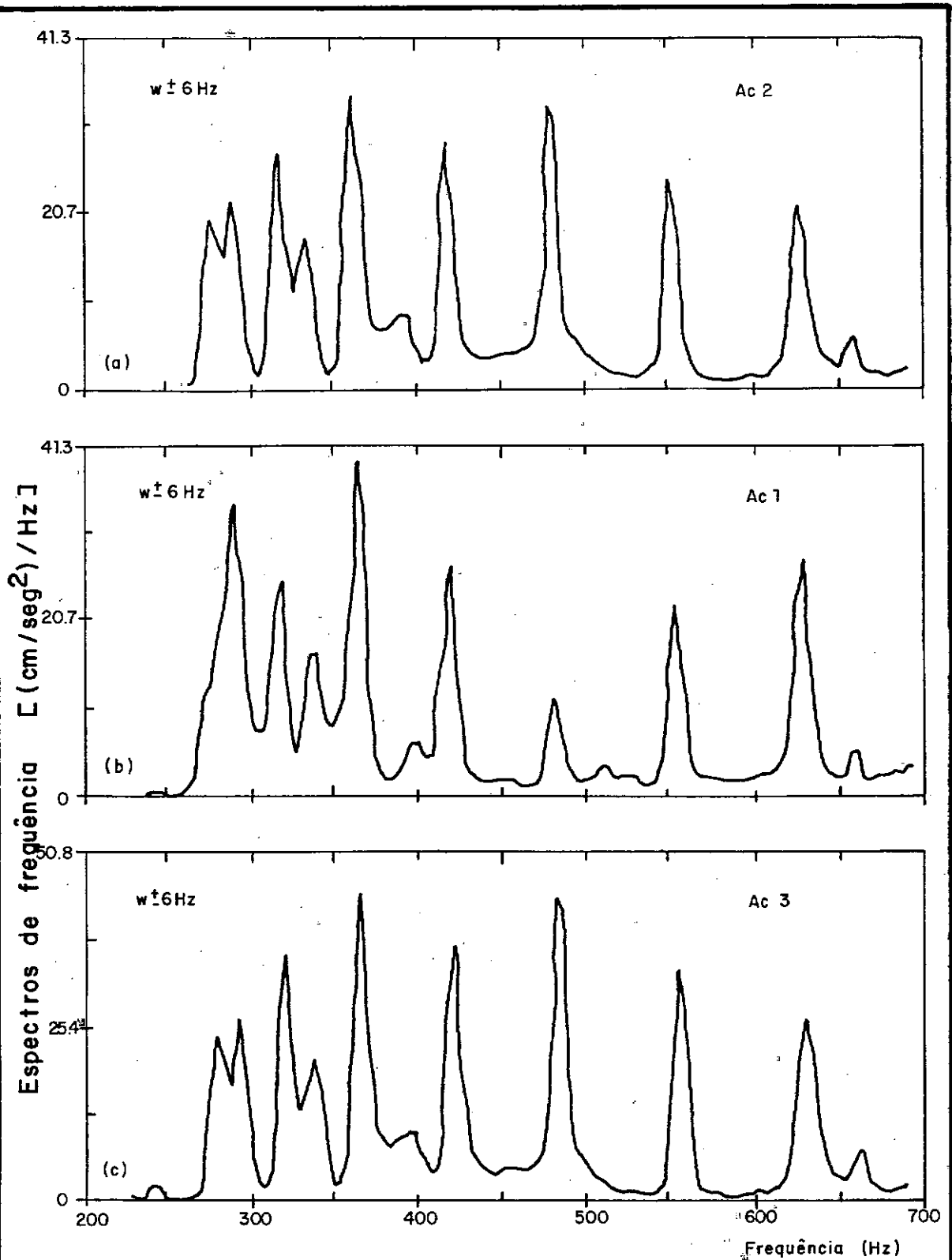


Fig V 2 - Espectros experimentais de frequência
 Apoios simples _sem fluido_ impacto lateral
 $H/L = 0.0$

A figura (V.3) mostra o espectro já ilustrado na figura (V.2a) em forma ampliada.

Pode-se observar através da figura (V.4) o espectro de frequência para o caso da casca cheia d'água, com extremos simplesmente apoiados.

Os ensaios realizados sob a condição de extremos engastados, estão ilustrados através dos espectros apresentados através das figuras (V.5), (V.6), (V.7) e (V.8) mostrando, respectivamente, o caso de casca vibrando sem fluido, com água até a metade, com $3/4$ partes de água e com preenchimento total de água.

Já a figura (V.9) mostra o comportamento da casca com extremos simplesmente apoiados, através de um espectro de frequência, para o caso de vibração com uma flambagem local (mostrada na foto V.1) produzida por uma concentração de tensões na zona de apoio inferior devido sob a aplicação de uma pequena carga com o mecanismo mostrado na figura (IV.6). Pode-se observar neste espectro, ao ser comparado com o da figura (V.3), que a flambagem local não altera as características dinâmicas da casca, fato já comprovado para pequenas imperfeições geométricas. Este fenômeno será abordado mais adiante no Capítulo VII.

Os espectros de frequência x modos de vibração mostrados nas figuras (V.10), (V.11), (V.12), (V.13), (V.14) e (V.15) foram obtidos a partir de comparações com os resultados teóricos, considerando-se a proximidade dos valores de frequências, já que resulta praticamente impossível reconhecer experimentalmente os modos de vibração da casca.

Uma análise mais profunda destes resultados será feita

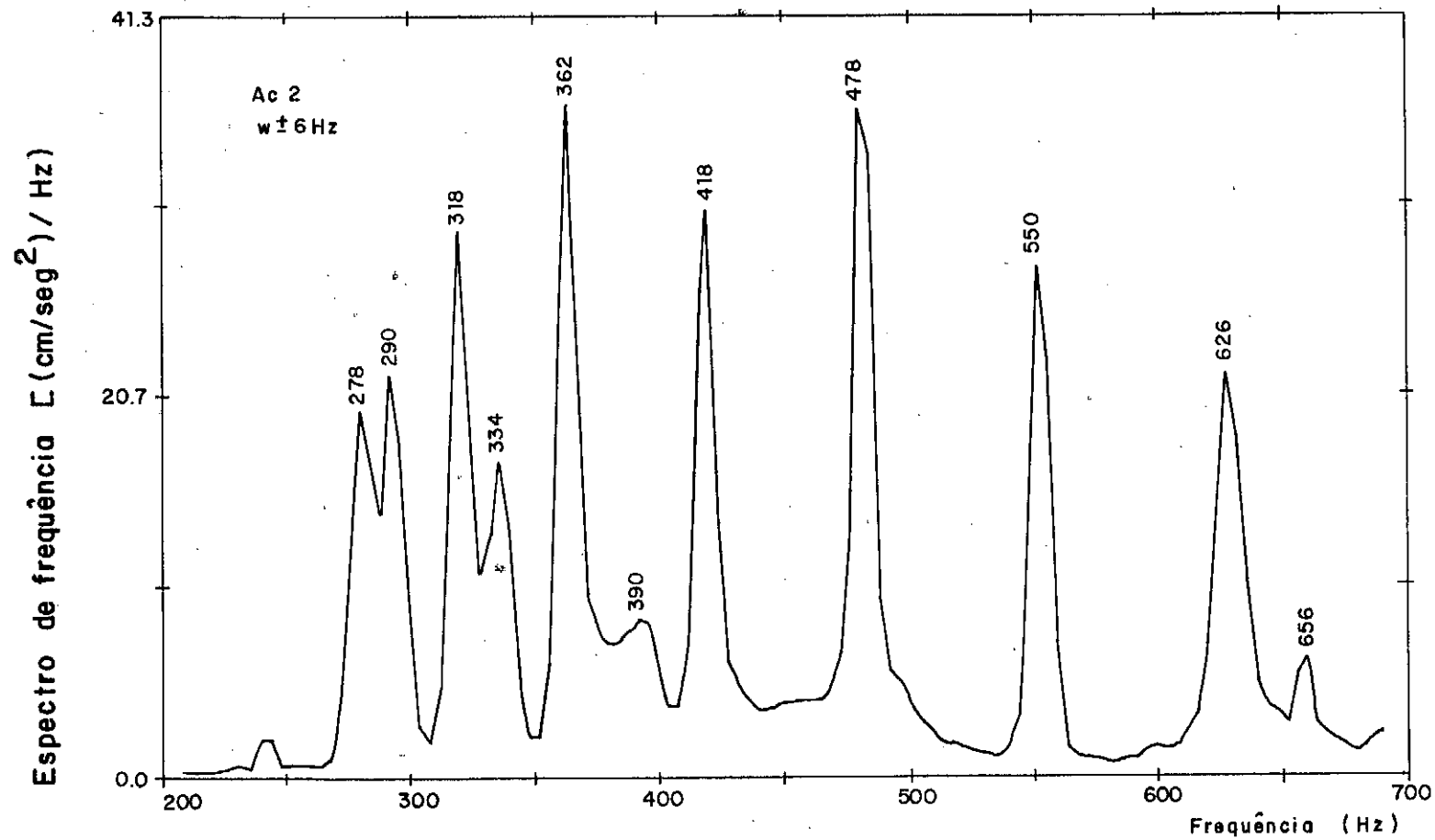


Fig V 3 - Espectro experimental de frequência - casca simplesmente apoiada
H/L = 0.00 - Impacto lateral

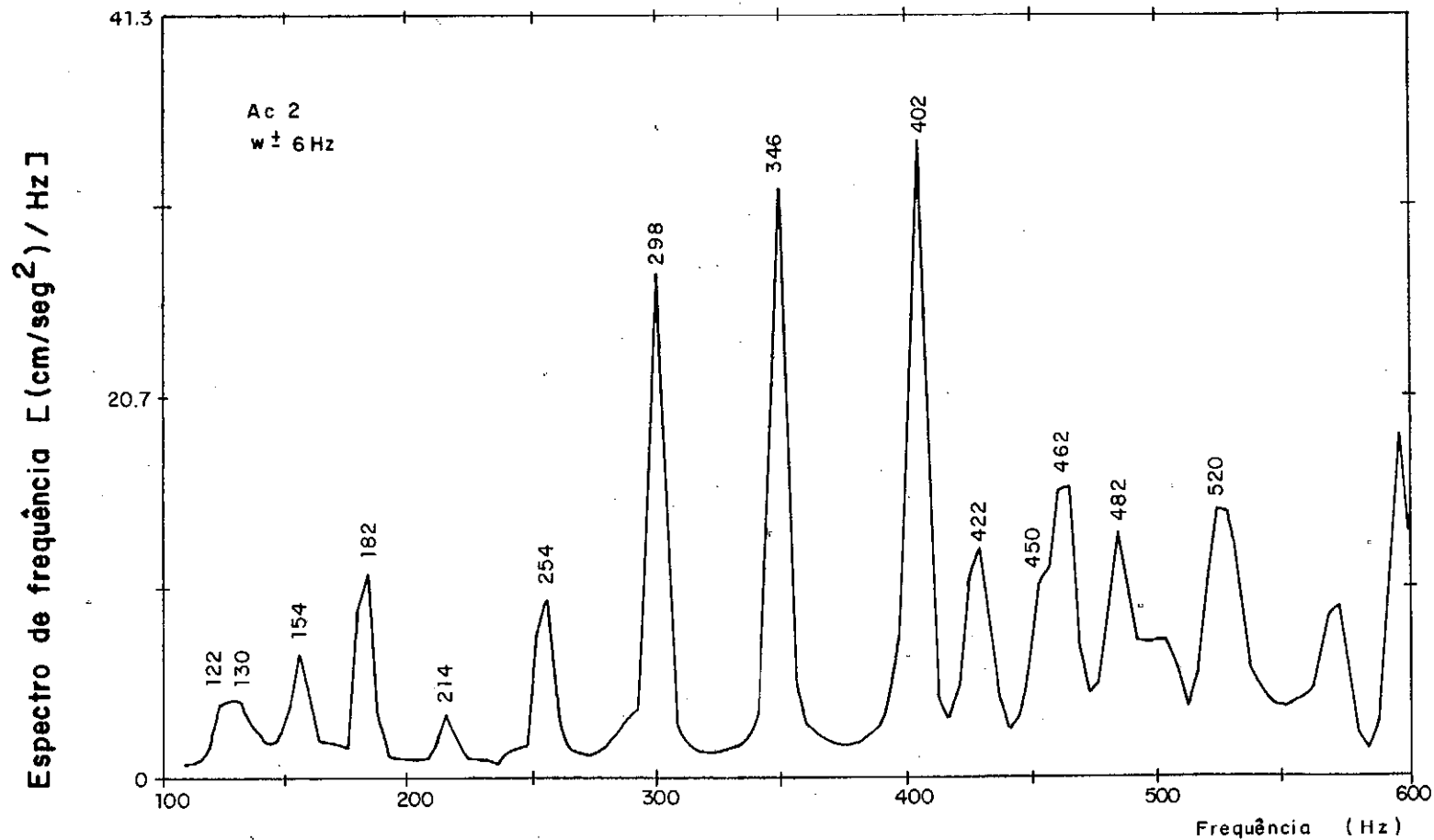


Fig V 4 - Espectro experimental de frequência - casca simplesmente apoiada
 $H/L = 1.00$ - Impacto lateral

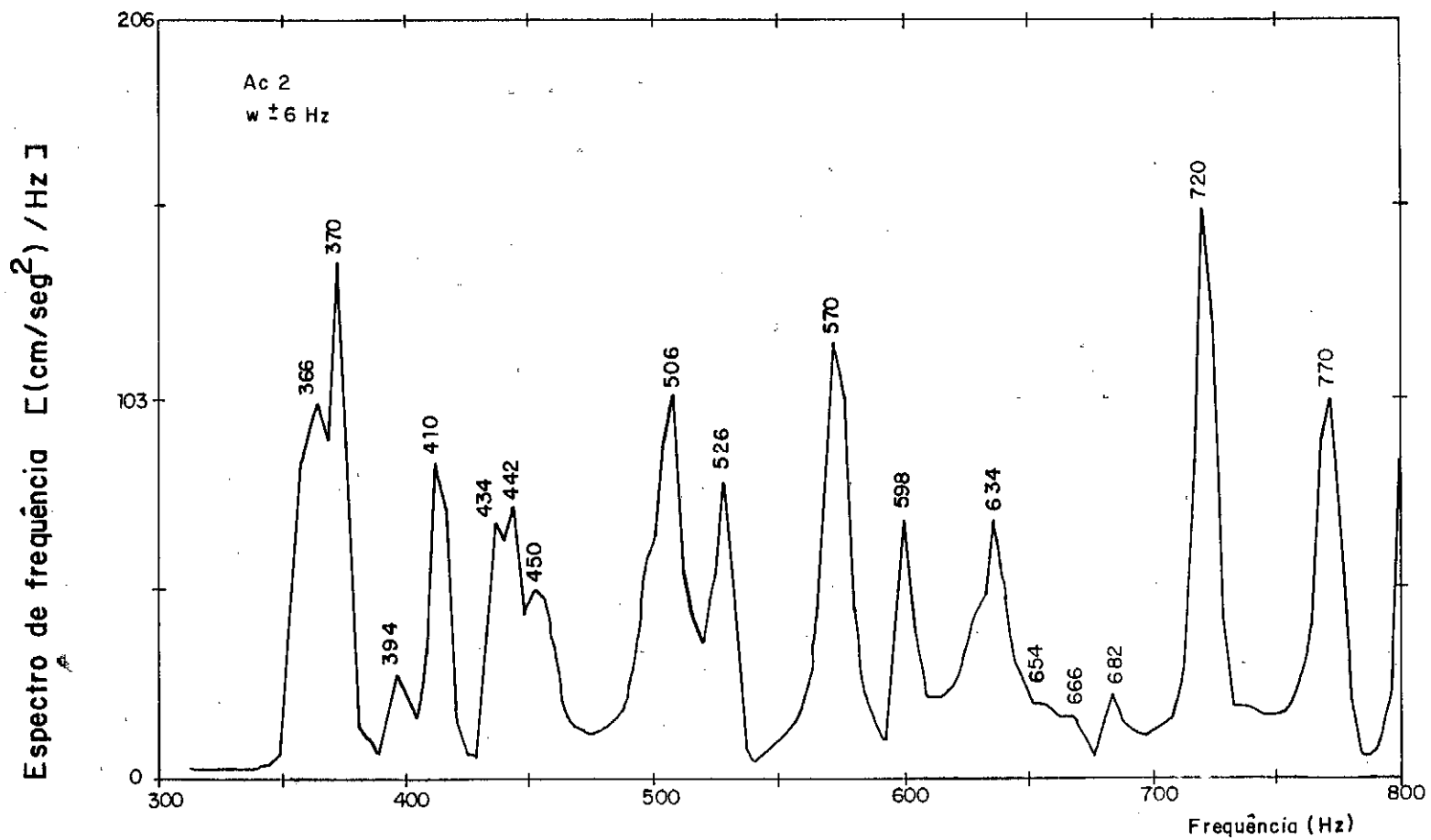


Fig V 5 - Espectro experimental de frequência - casca engastada
H/L = 0.0 - Impacto lateral

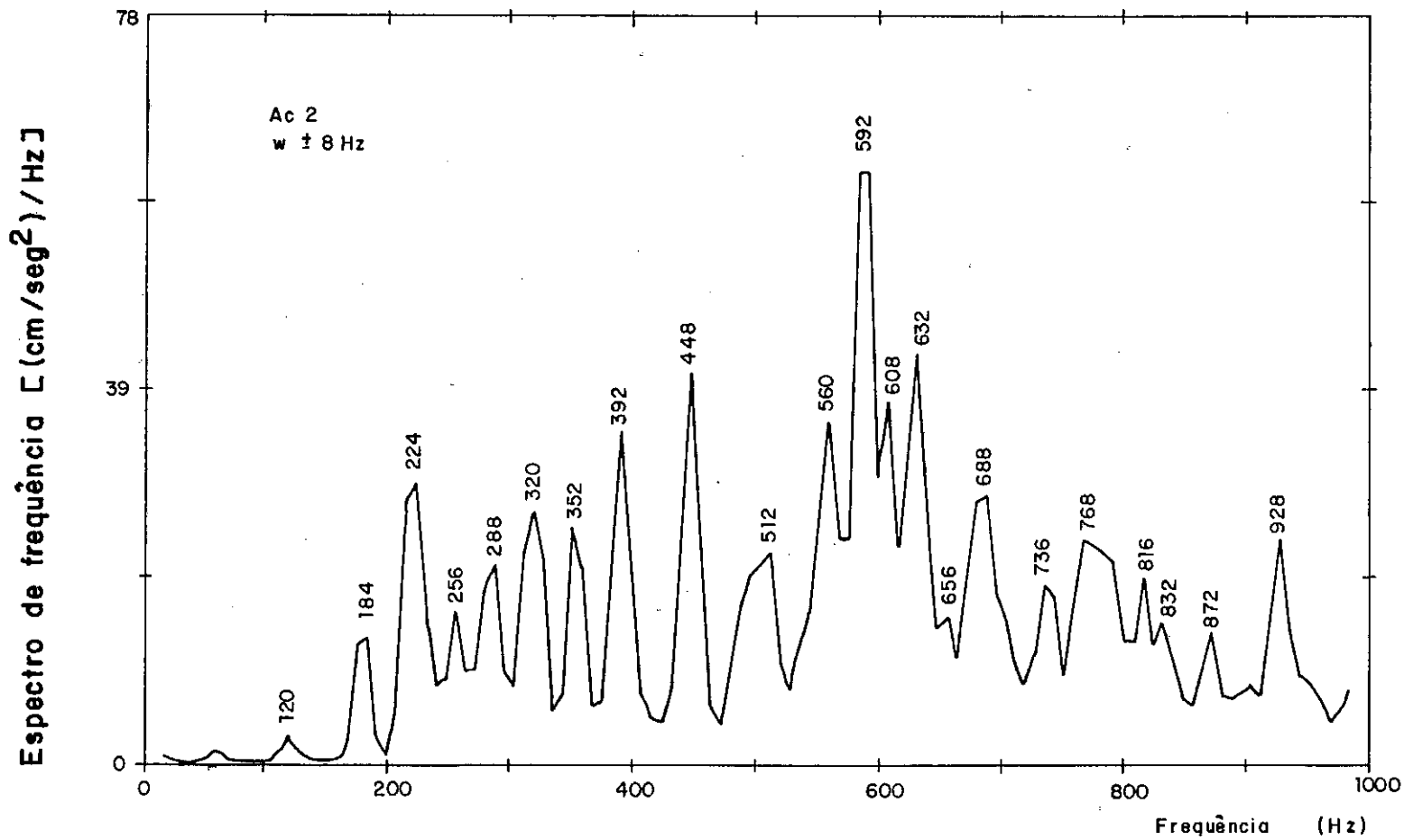


Fig V 6 - Espectro experimental de frequência - casca engastada
H/L = 0.5 - Impacto lateral

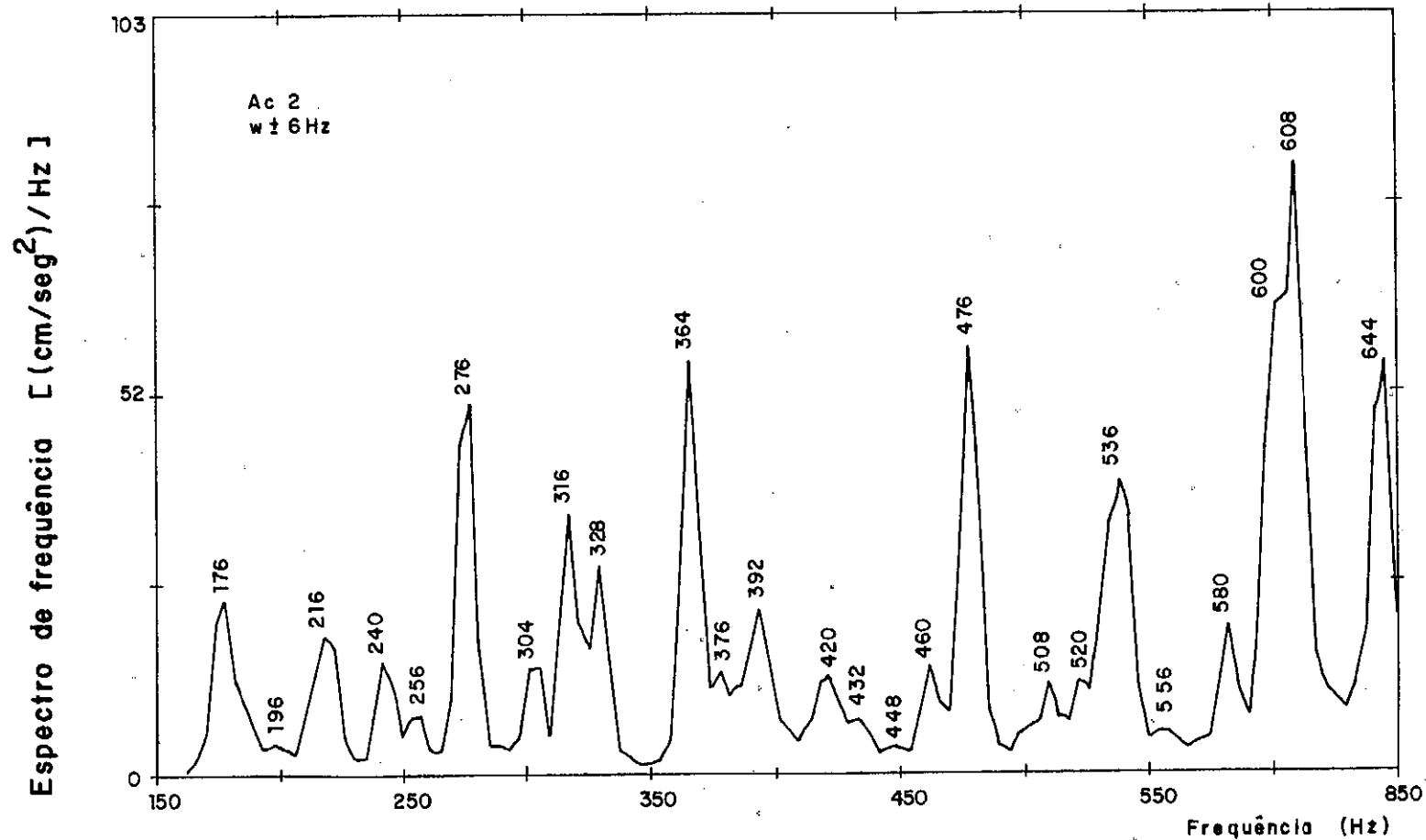


Fig V 7 - Espectro experimental de frequência – casca engastada
H/L = 0.75 - Impacto lateral.

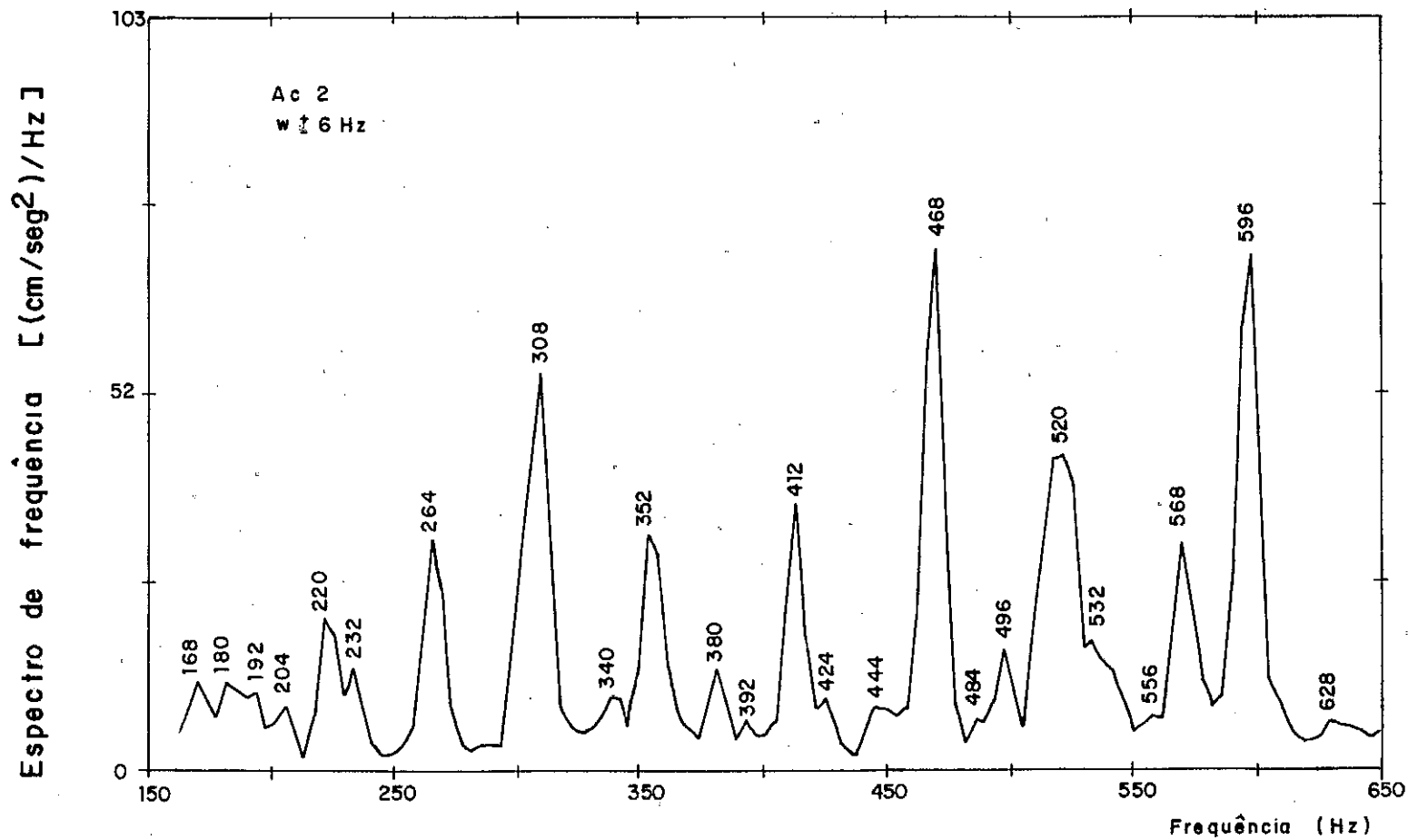


Fig V 8 - Espectro experimental de frequência – casca engastada
H/L = 1.0 - Impacto lateral.

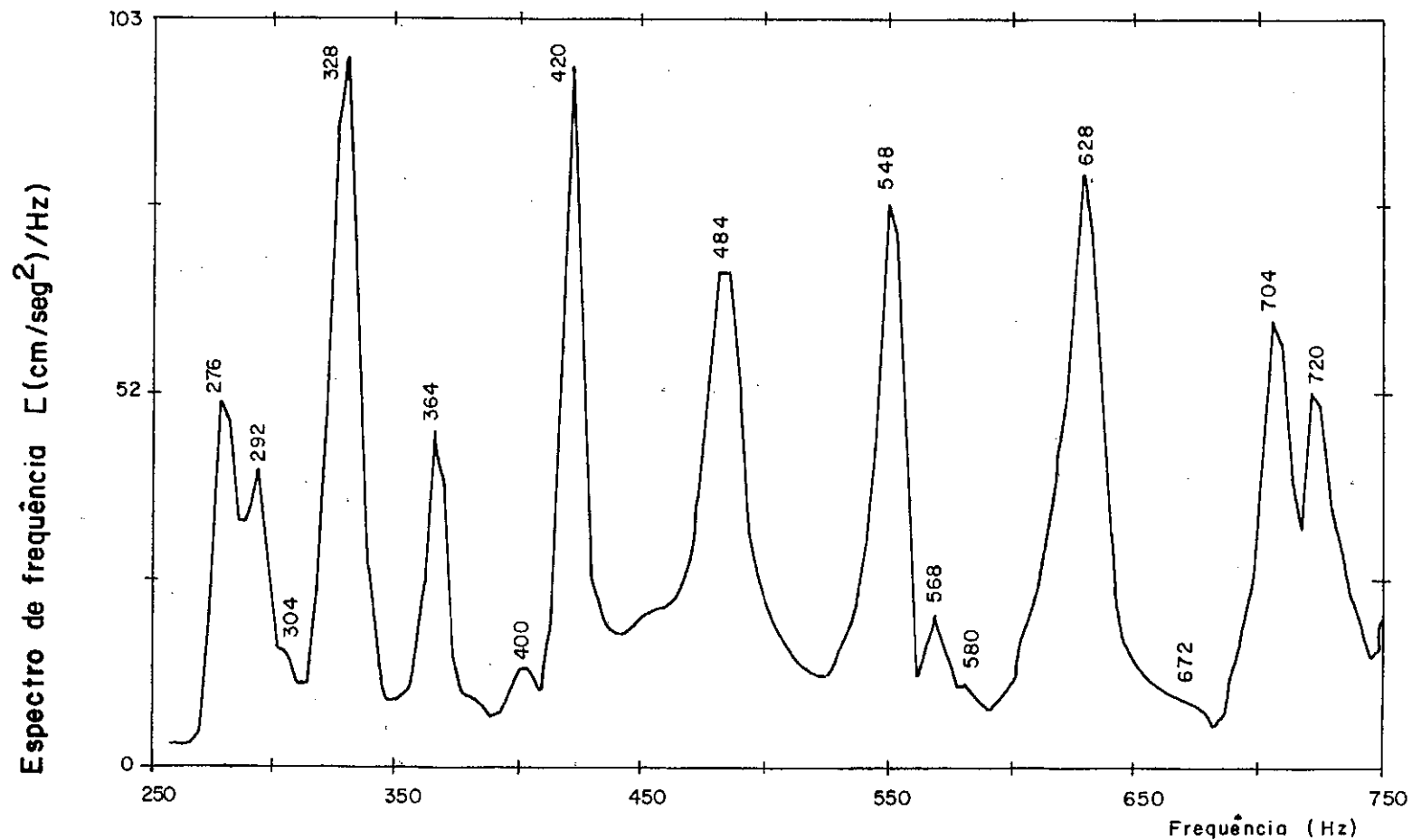


Fig V 9 - Espectro experimental de frequência - casca engastada
 H/L = 0.00 - Impacto lateral # flambagem local #

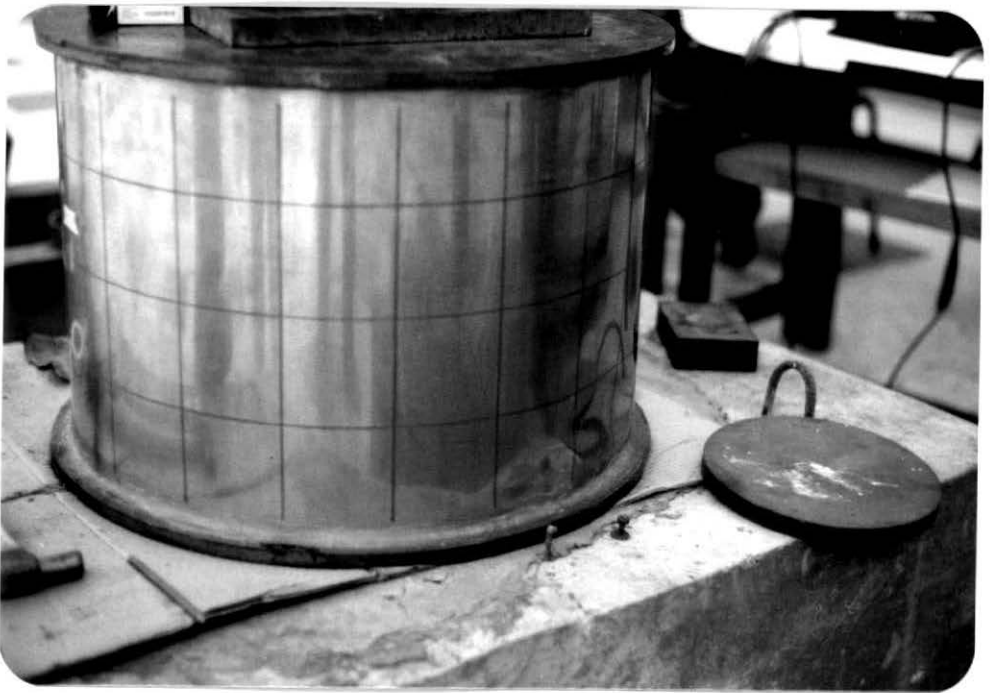


Foto V.1 - Flambagem local devida a concentração de tensões no apoio sob a aplicação de uma pequena carga axial

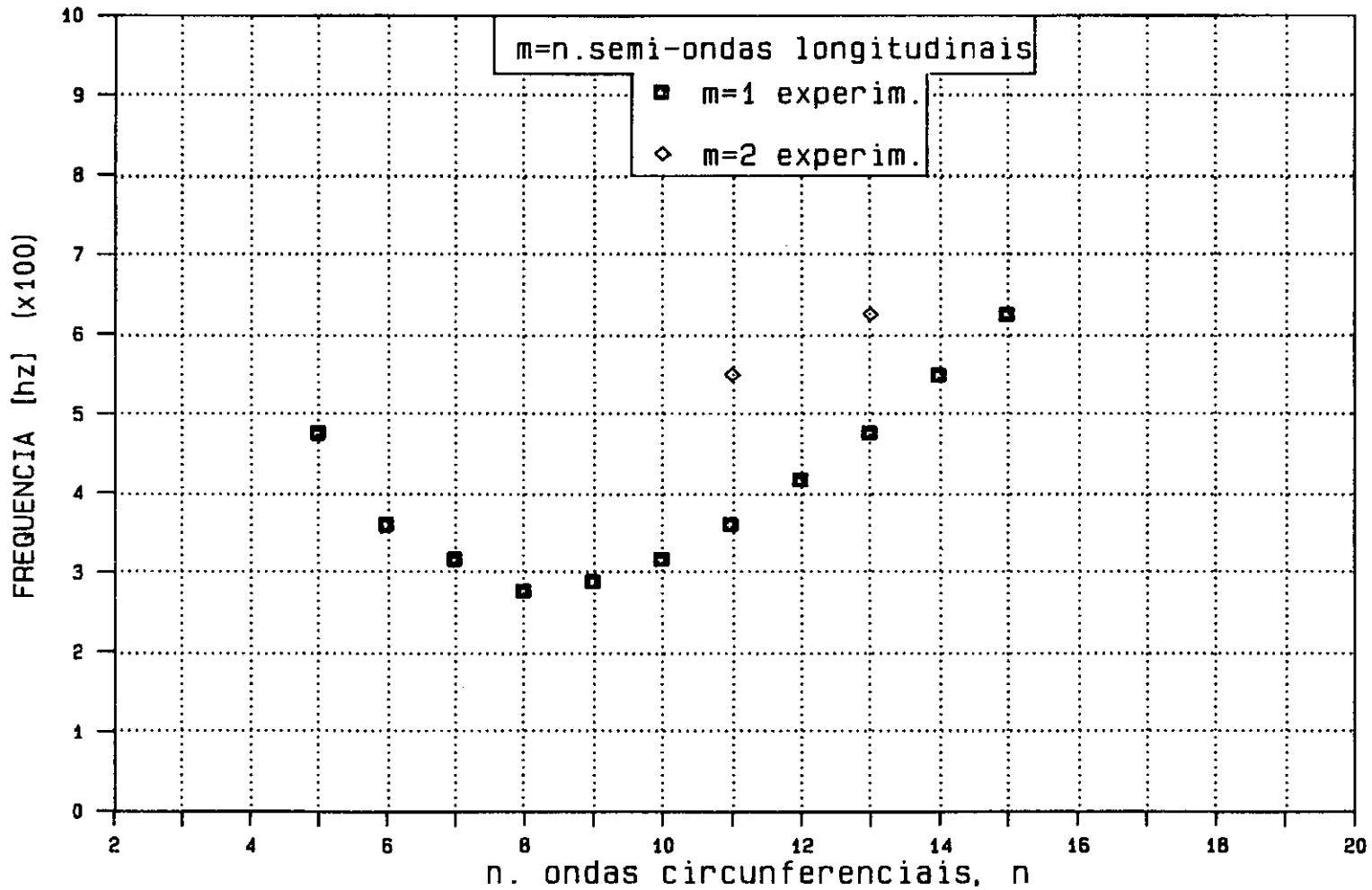


FIG.V.10. ESPECTRO DE FREQUENCIA x MODOS DE VIBRACAO
 ANALISE EXPERIMENTAL - APOIO SIMPLES - H/L=0.0 - R/h=300

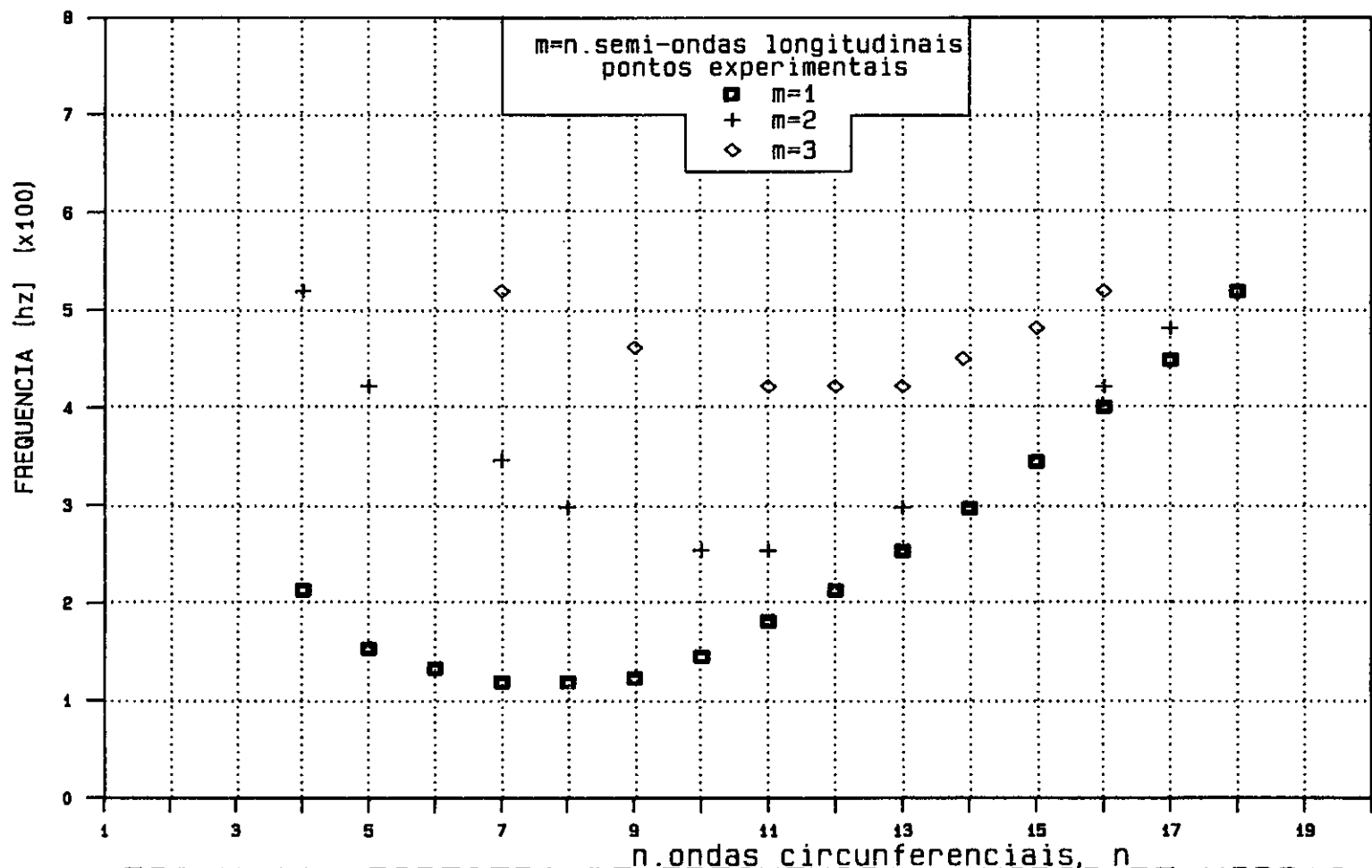


FIG. V. 11. ESPECTRO DE FREQUENCIA x MODOS DE VIBRACAO
 ANALISE EXPERIMENTAL - APOIO SIMPLES - $H/L=1.0$ - $R/h=300$

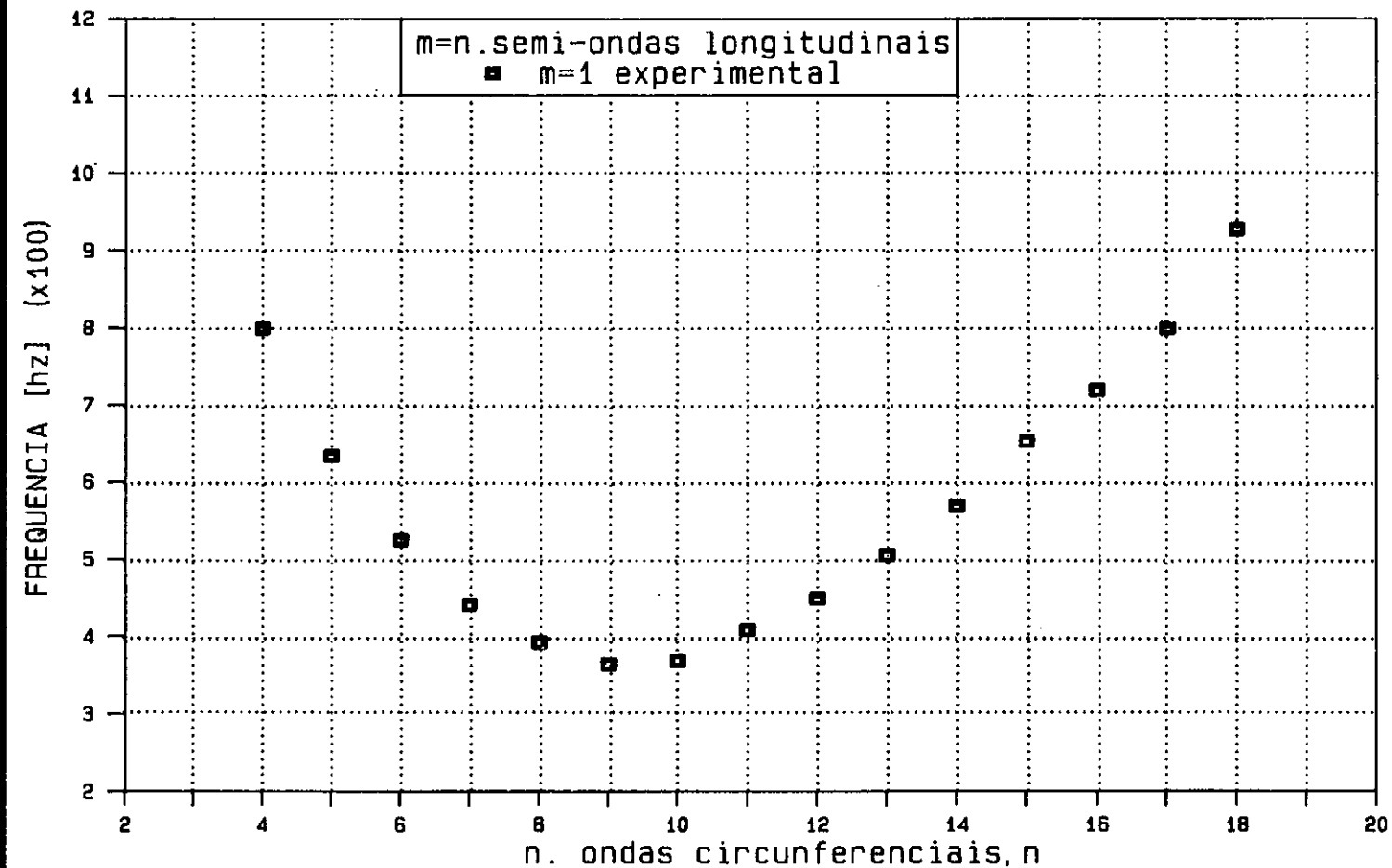


FIG.V.12. ESPECTRO DE FREQUENCIA X MODOS DE VIBRACAO
 ANALISE EXPERIMENTAL - ENGASTE - H/L=0.0 - R/h=300

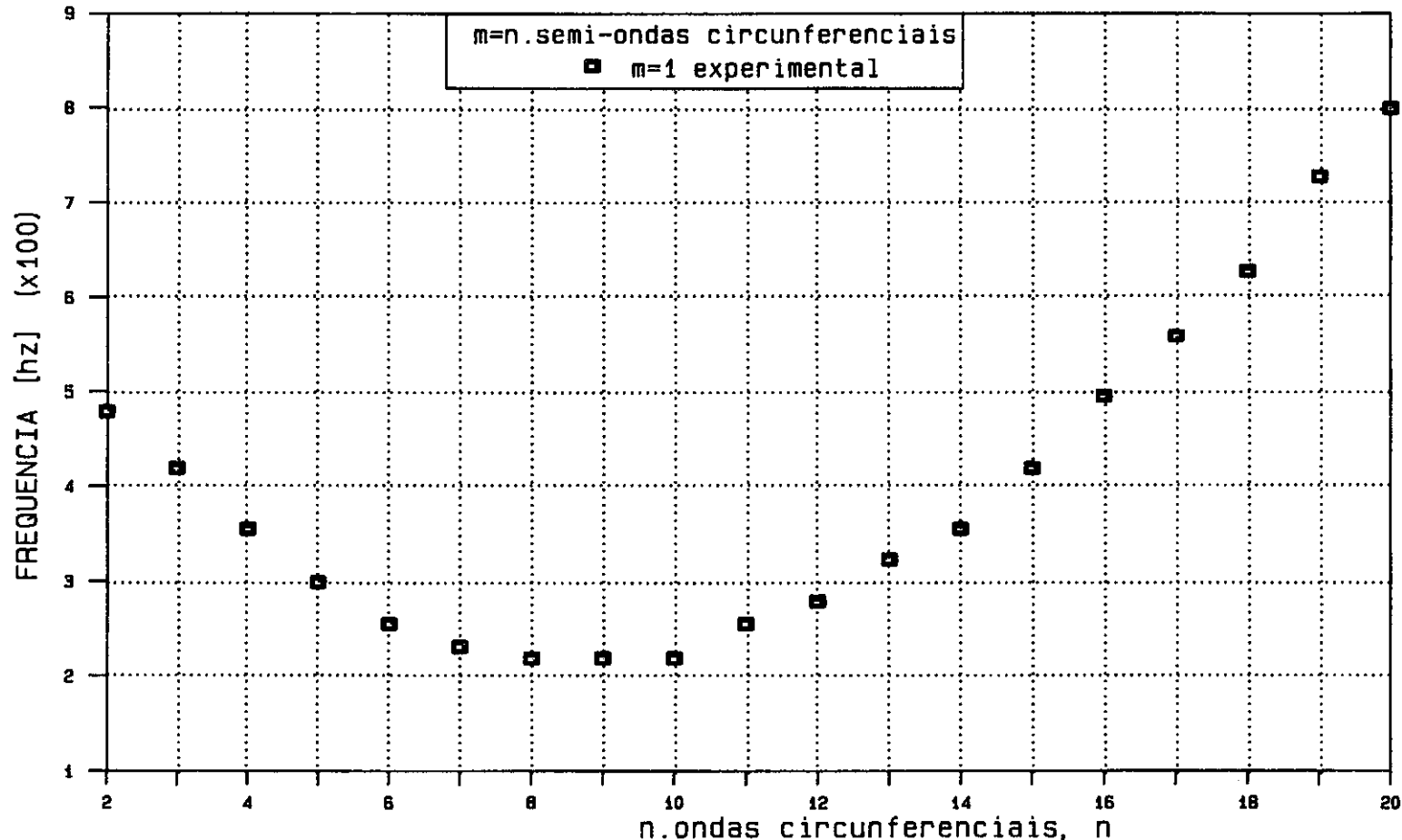


FIG.V.13.ESPECTRO DE FREQUENCIA x MODOS DE VIBRACAO
 ANALISE EXPERIMENTAL - ENGASTE - $H/L=0.50$ - $R/h=300$

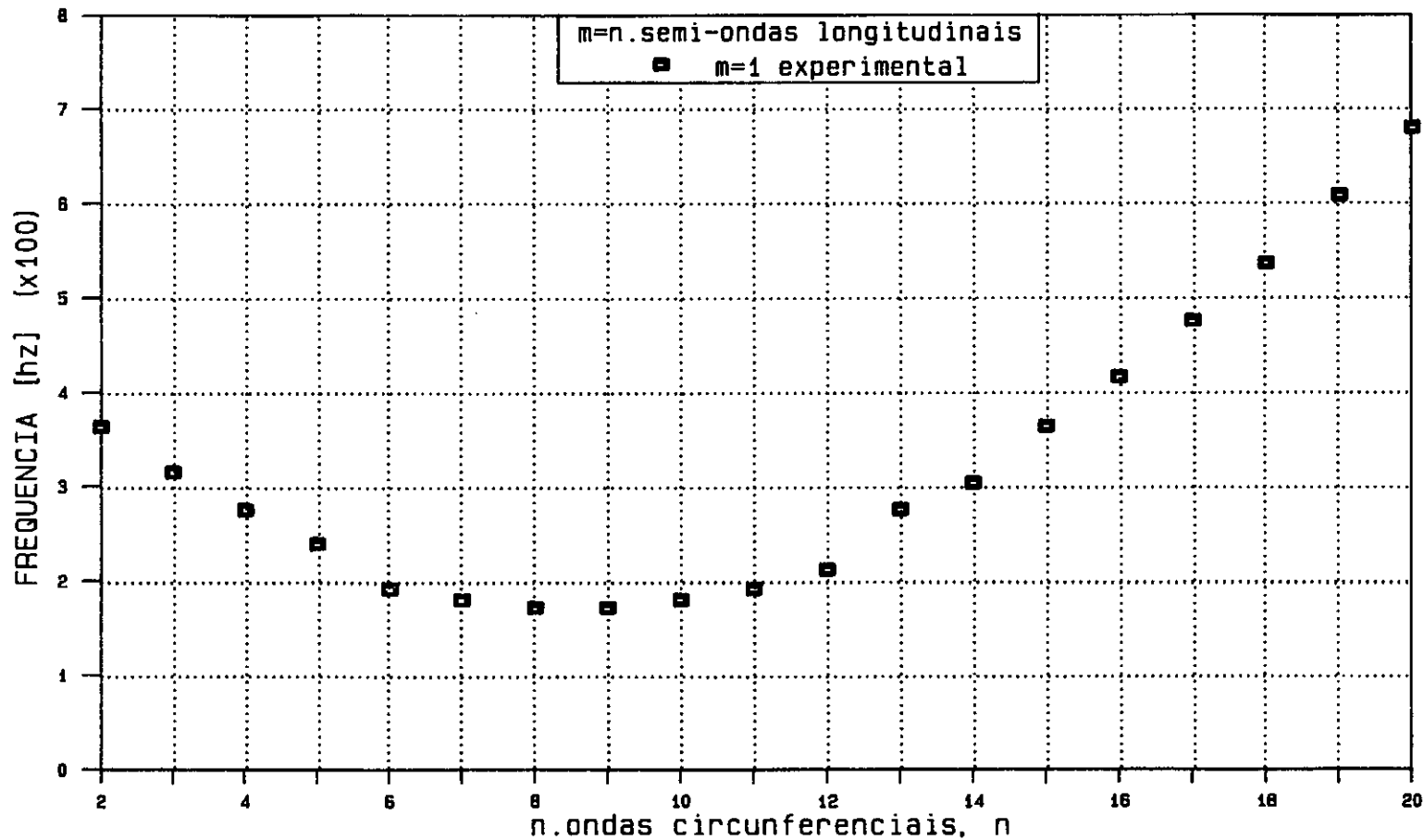


FIG.V.14. ESPECTRO DE FREQUENCIA x MODOS DE VIBRACAO
 ANALISE EXPERIMENTAL - ENGASTE - H/L=0.75 - R/h=300

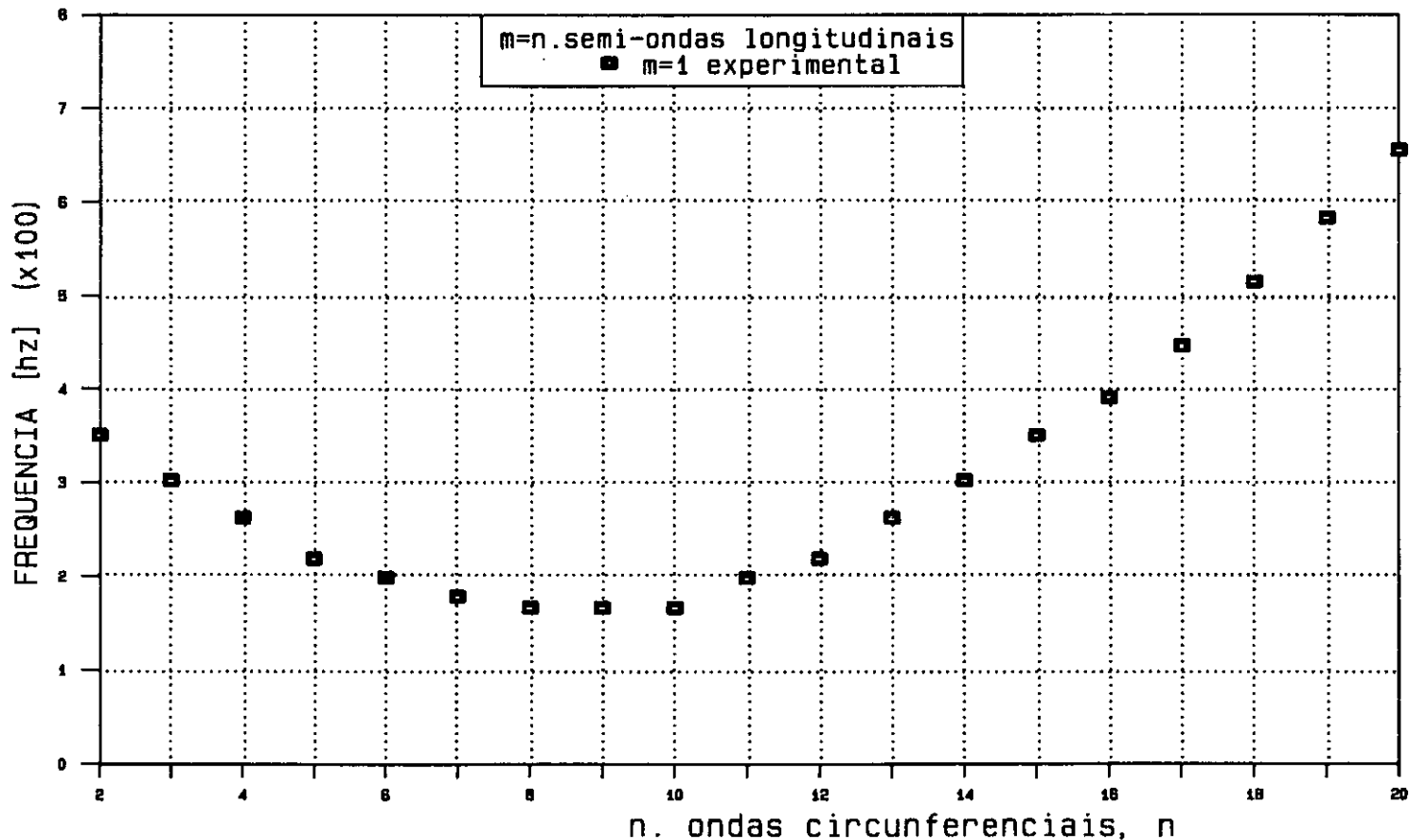


FIG.V.15. ESPECTRO DE FREQUENCIA x MODOS DE VIBRACAO
 ANALISE EXPERIMENTAL - ENGASTE - H/L=1.0 - R/h=300

no Capítulo VI, onde serão comparados aos resultados obtidos através da análise teórica realizada.

CAPÍTULO VI

ANÁLISE E COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS TEÓRICOS E EXPERIMENTAIS

Pode ser notada, nos sinais experimentais de aceleração vs tempo ilustrados nas figuras (V.1a) e (V.1b), a diversidade de modos de vibração envolvidos na resposta dinâmica, indicando a ocorrência de acoplamento modal, fenômeno que se torna evidente pela quantidade e proximidade de picos de banda estreita de frequência, nos espectros experimentais apresentados nas figuras (V.2) e (V.3).

A análise e comparação teórico-experimental desses e outros resultados é feita a seguir para a casca com a geometria e características físicas do modelo experimental apresentado no Capítulo IV.

VI.1. RESULTADOS PARA A CASCA SIMPLEMENTE APOIADA, VIBRANDO NO AR

É notável a proximidade entre valores das frequências naturais teóricas e experimentais, indicada pela comparação entre picos dos espectros ilustrados nas figuras (VI.1), para o caso da casca vibrando no ar, sob a condição de extremos simplesmente apoiados.

Deve-se enfatizar que a boa comparação entre esses resultados é devida, principalmente, à formulação teórica adotada.

Esta formulação, apresentada no Capítulo II, permitiu a identificação dos modos de vibração associados às frequências naturais, pois leva em conta o acoplamento modal resultante. Esta identificação modal seria impraticável através da simples utilização dos resultados clássicos encontrados na literatura técnica, os quais não levam em conta o acoplamento entre modos de vibração.

A correlação favorável entre os valores experimentais e teóricos, indica ainda uma simulação experimental adequada da condição de apoio simples nos extremos da casca.

Através da figura (VI.2), pode-se observar a concordância entre valores teóricos e experimentais, em um espectro de frequência vs modos de vibração, onde os valores teóricos foram representados por linhas contínuas e os valores experimentais por símbolos. A concordância entre ambos os estudos podem ser vista também através da tabela VI.1, que indica ainda os modos de vibração associados às frequências.

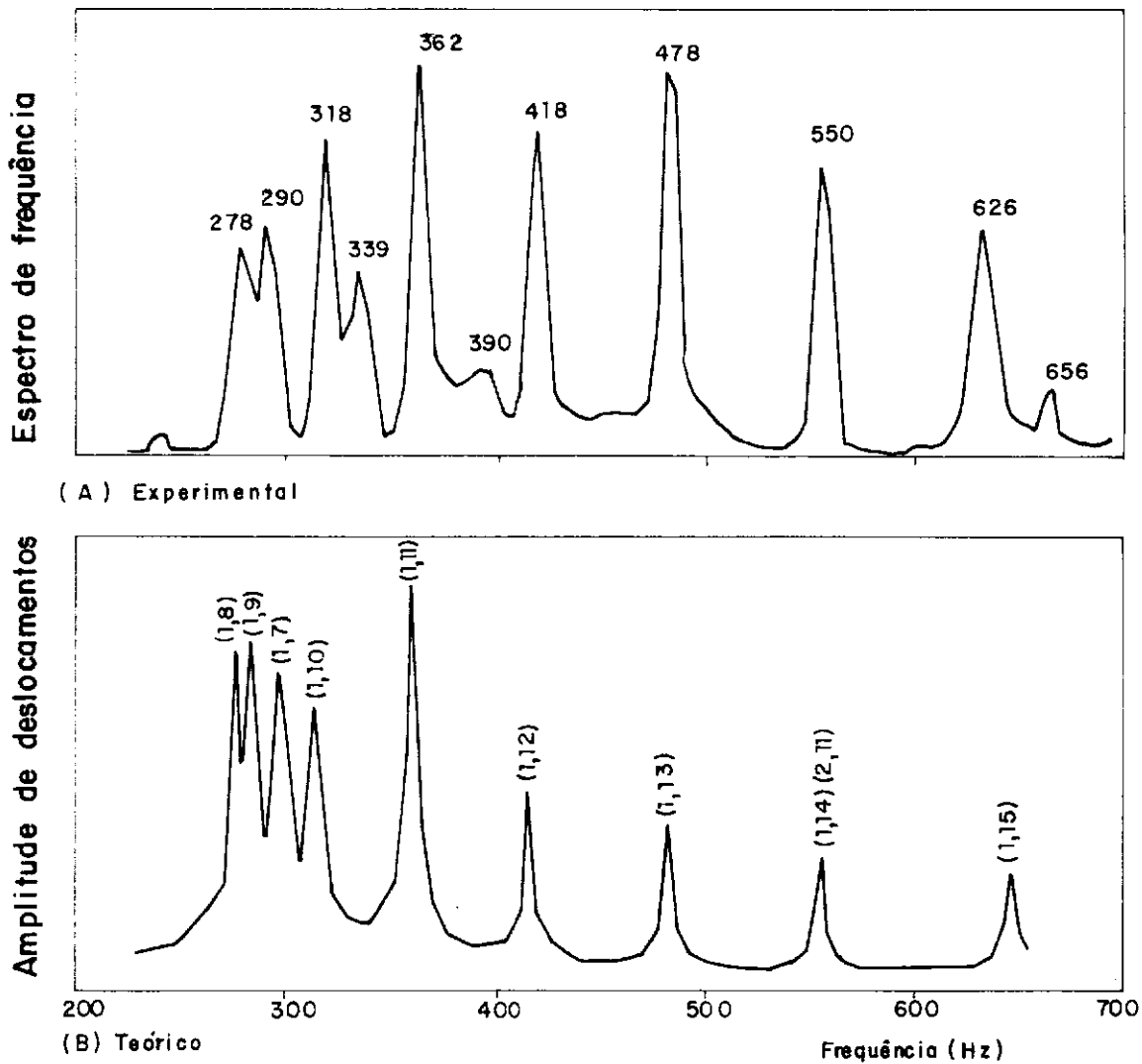


Fig VI 1 - Espectros de frequência - Vibrações da casca sem fluido extremos simplesmente apoiados.

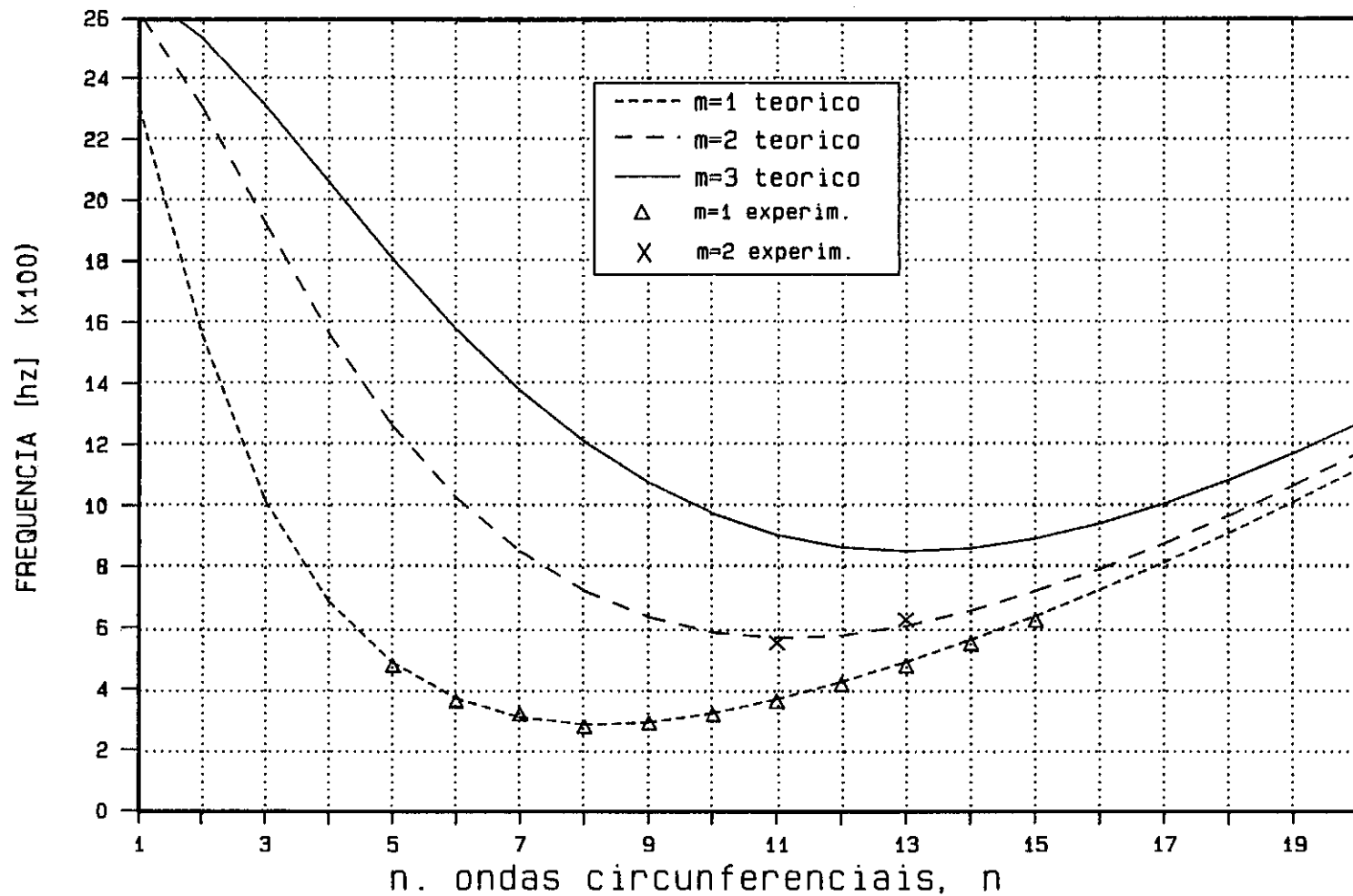


FIG.VI.2. ESPECTRO DE FREQUENCIA x MODOS - APOIO SIMPLES - H/L=0.0
ANALISE TEORICA E EXPERIMENTAL

Tabela VI.1 - Comparação teórica-experimental e modos de vibração - Casca simplesmente apoiada - $H/L = 0.0$

Frequência [Hz]		Modo (m,n)
Teórico	Experim.	
283	278	(1,8)
292	290	(1,9)
306	318	(1,7)
322		(1,10)
367	362	(1,11)
369		(1,6)
424	418	(1,12)
486	478	(1,5)
489		(1,13)
561	550	(1,14)
566		(2,11)
608	626	(2,13)
640		(1,15)

VI.2. RESULTADOS PARA A CASCA ENGASTADA VIBRANDO NO AR

A condição de extremos engastados teve também uma simulação experimental adequada. Pode-se concluir isto através da comparação entre os valores teóricos e experimentais ilustrados na figura (VI.3), e especificados através da tabela (VI.2).

Novamente, conclui-se que a formulação teórica adotada, com a consideração de acoplamento modal, permitiu a identificação modal e conseqüente correlação entre os resultados experimentais e teóricos.

Na figura (VI.4) faz-se uma comparação entre resultados teóricos e experimentais da casca no ar sob condição de extremos simplesmente apoiados e engastados, através de espectros de frequência vs modos de vibração. Nestes espectros é possível notar que os valores mínimos de frequência dos dois espectros ocorrem para valores diferentes do número de ondas circunferenciais, devido à influência das condições de apoio. É possível comprovar ainda que a medida que n cresce, os valores de frequências da casca engastada e simplesmente apoiada, tendem rapidamente a um mesmo valor. Este fenômeno é devido ao fato de ser dominante a energia de flexão, para valores de n superiores ao correspondente à frequência natural.

Cabe lembrar que um dos parâmetros que influencia o comportamento dinâmico da casca, é a variação da relação L/R . Um estudo da influência deste parâmetro será feito mais adiante, com a análise dos resultados obtidos.

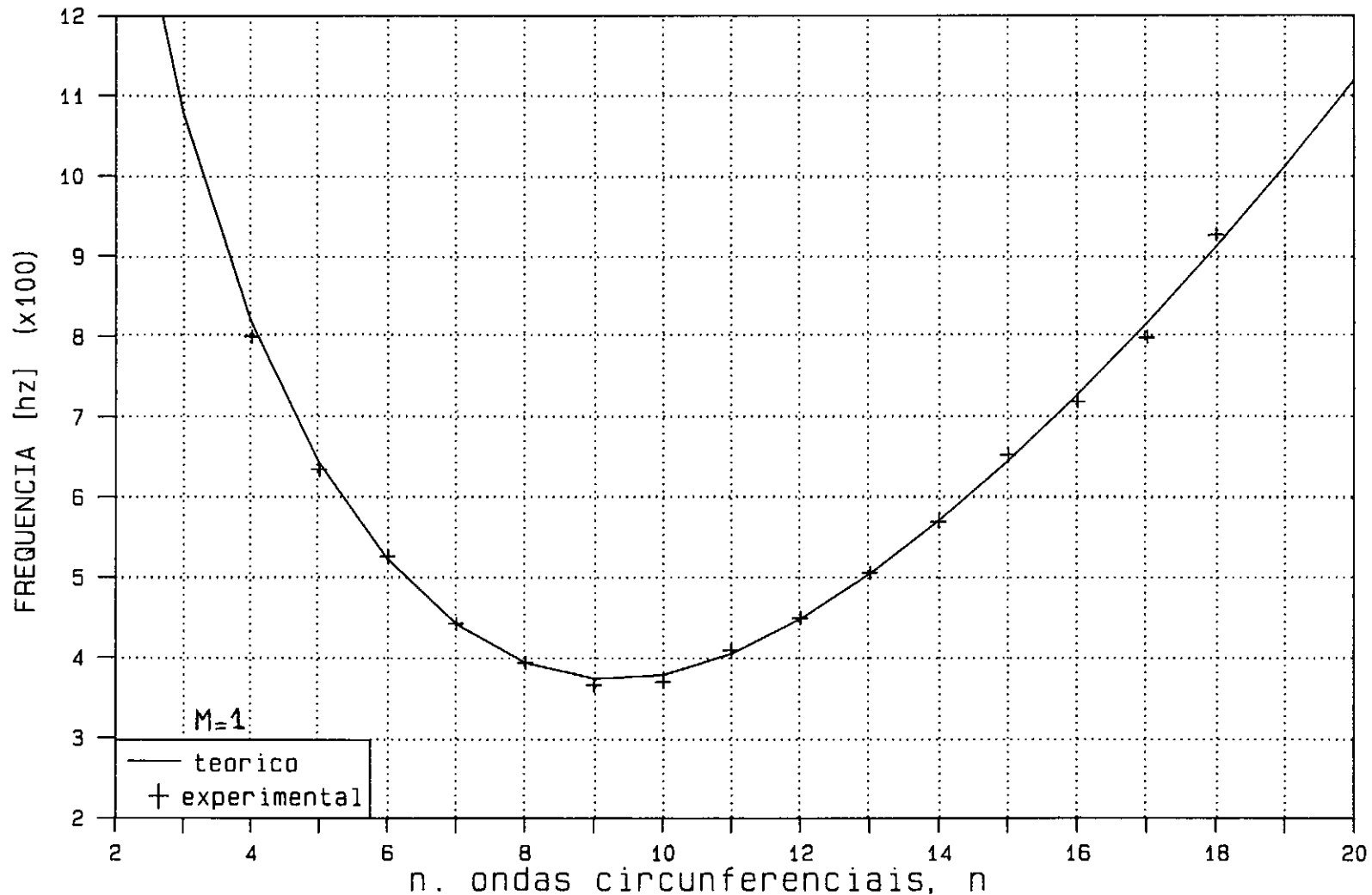


FIG.VI.3. ESPECTRO DE FREQUENCIA x MODOS - ENGASTE - H/L=0.0
ANALISE TEORICA E EXPERIMENTAL

Tabela IV.2 - Comparação teórica-experimental e modos de vibração. Casca engastada - $H/L = 0.0$

Frequência [Hz]		Modo (m,n)
Teórico	Experim.	
373	366	(1,9)
379	370	(1,10)
393	394	(1,8)
405	410	(1,11)
441	442	(1,7)
449	450	(1,12)
505	506	(1,13)
522	526	(1,6)
571	570	(1,14)
643	634	(1,5)
646	654	(1,15)
728	720	(1,16)
817	800	(1,17)
818		(1,4)
913	928	(1,18)

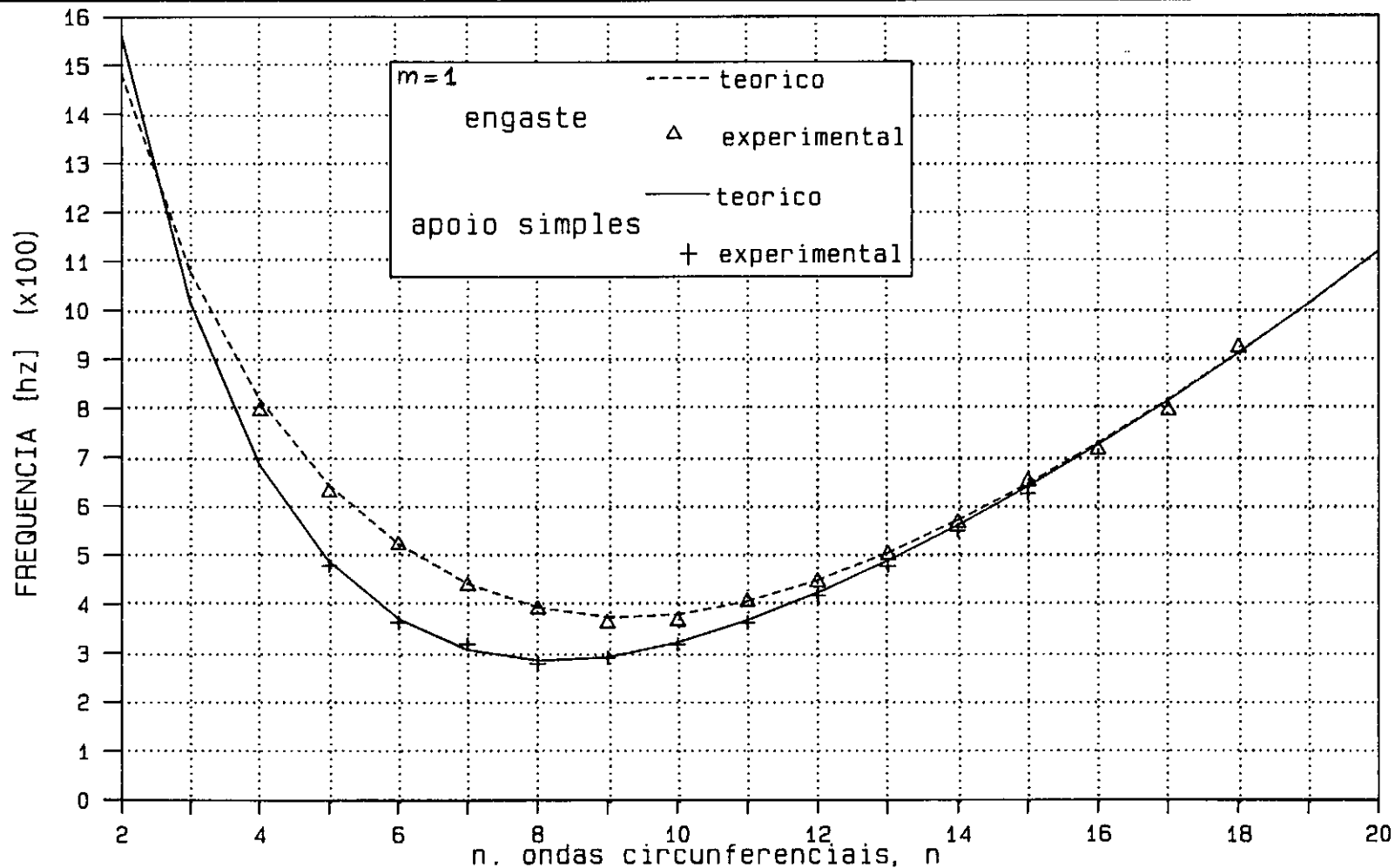


FIG.VI.4. ESPECTRO DE FREQUENCIA x MODOS - $H/L=0.0$ -
 COMPARACAO ENTRE AS CONDICÕES DE ENGASTE E APOIO SIMPLES

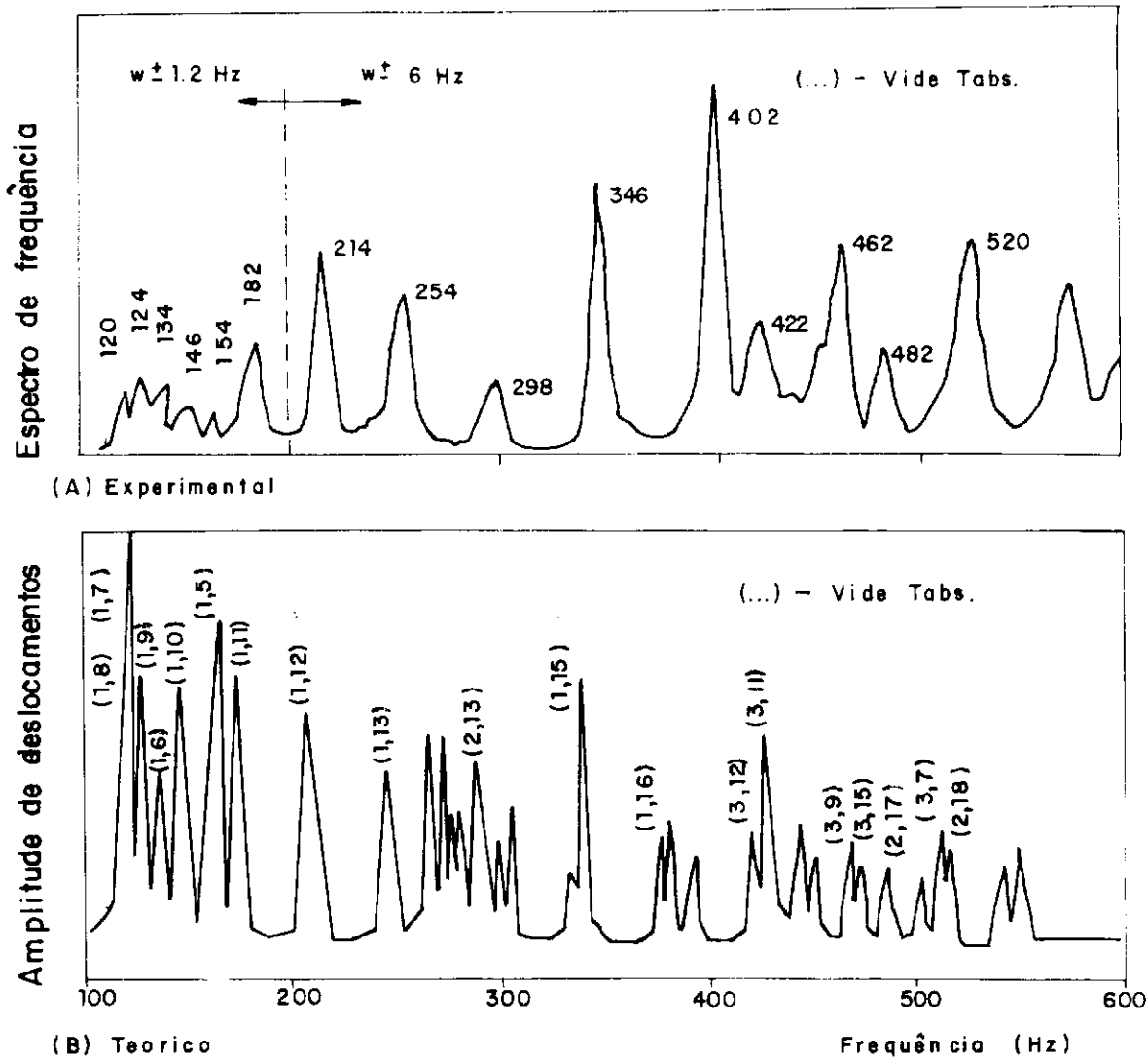


Fig VI.5 - Espectros de frequência - vibrações da casca com fluido.
Extremos simplesmente apoiados.

VI.3. RESULTADOS PARA A CASCA SIMPLEMENTE APOIADA CONTENDO FLUIDO

O fenômeno de acoplamento modal, mencionado anteriormente, é mais forte e evidente com a presença de fluido.

Foi visto no Capítulo III que o aumento da energia cinética do sistema (que na formulação teórica adotada é traduzido através do acréscimo do parâmetro ξ de massa de fluido adicionada) implica na redução dos valores das frequências naturais. Esta redução torna os espectros mais abatidos, envolvendo uma quantidade maior de modos de vibração em faixas estreitas de frequência, indicando a ocorrência de acoplamento modal.

Isto pode ser comprovado através dos espectros de frequência ilustrados na figura (VI.5), para a casca completamente cheia de fluido ($H/L=1,0$), onde a grande quantidade de picos envolvidos em faixas estreitas de frequência confirma a ocorrência do fenômeno. Também nas figuras (VI.5) pode-se comparar os resultados teóricos e experimentais para a casca cheia d'água sob a condição de extremos simplesmente apoiados.

A figura (VI.6) mostra, através do espectro de frequência vs modos de vibração, a boa comparação entre os resultados teóricos e experimentais. Isto pode ser observado mais claramente através da tabela (VI.3), e pela forma desses espectros, que, como comentado anteriormente neste item, é mais abatida que no caso da casca vibrando no ar.

A influência da altura do nível de fluido (traduzido pelo parâmetro H/L) nas frequências naturais da casca simplesmente

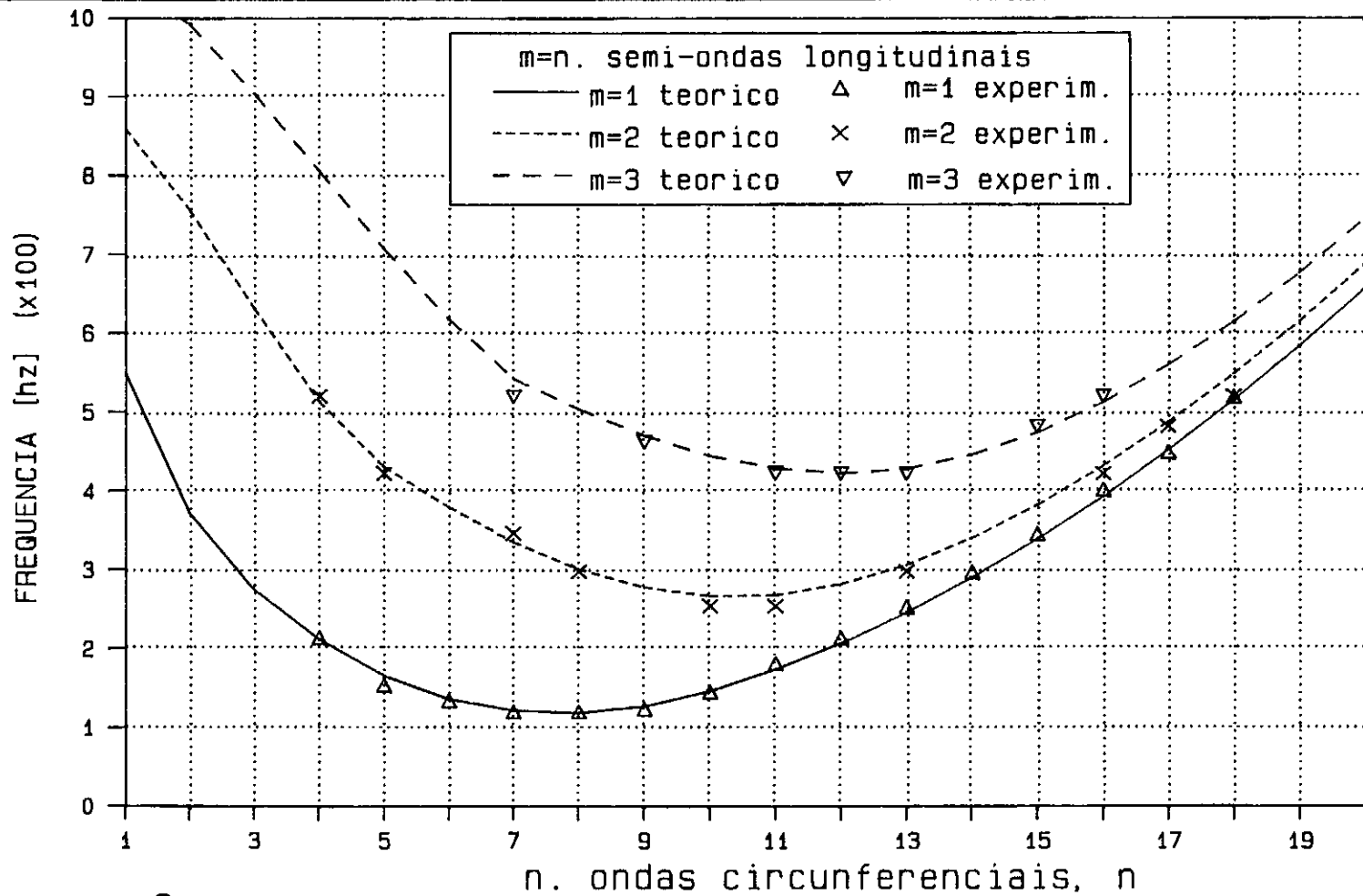


FIG.VI.6. ESPECTRO DE FREQUENCIA x MODOS - APOIO SIMPLES -
 ANALISE TEORICA E EXPERIMENTAL - H/L=1.0 -

Tabela VI.3 - Comparação teórica-experimental e modos de vibração. Casca simplesmente apoiada - $H/L = 1.0$

Frequência [Hz]		Modo (m,n)
Teórico	Experim.	
118	120	(1,8)
120		(1,7)
127	124	(1,9)
136	134	(1,6)
146	146	(1,10)
165	154	(1,5)
173	182	(1,11)
207	214	(1,12)
210		(1,4)
246	254	(1,13)
266		(2,10)
267		(2,11)
290	298	(1,14)
300		(2,8)
306		(2,13)
334	346	(2,7)
340		(1,15)(2,14)
394	402	(1,16)
422	422	(3,12)
427		(3,11)
429		(2,5)(3,13)
431		(2,16)
452	450	(1,17)
469	462	(3,9)
474	482	(3,15)
512	520	(2,4)(3,16)
516		(1,18)

te apoiada foi comentada no Capítulo III com auxílio da figura (III.5). Sendo o comportamento, sob influência de H/L similar ao da casca com extremos engastados, a análise dos resultados será feita na próxima seção.

VI.4. RESULTADOS PARA A CASCA ENGASTADA CONTENDO FLUIDO

Os resultados teóricos e experimentais do estudo do comportamento da casca sob a condição de extremos engastados contendo fluido em repouso são apresentados através dos espectros de frequência x número de ondas circunferenciais ilustrados nas figuras (VI.7), (VI.8) e (VI.9) para valores da relação H/L iguais a 0,5, 0,75 e 1,0 respectivamente.

Nota-se nestes espectros a excelente concordância entre os valores teóricos e experimentais, o que pode ser visualizado também através das tabelas (VI.4), (VI.5) e (VI.6).

Ainda para os casos de H/L iguais a 0,5, 0,75 e 1,0, mostra-se nas figuras (VI.10), (VI.11) e (VI.12), comparações entre esses últimos resultados para casca com extremos engastados e aqueles obtidos do estudo da casca sob a condição de extremos simplesmente apoiados.

Dessas figuras, pode-se notar os efeitos sobre valores de frequência natural (frequência mínima) das duas condições de extremos distintas. Observa-se que, embora o comportamento das cascas seja bastante similar, principalmente no caso de modos mais altos na direção circunferencial, a casca simplesmente

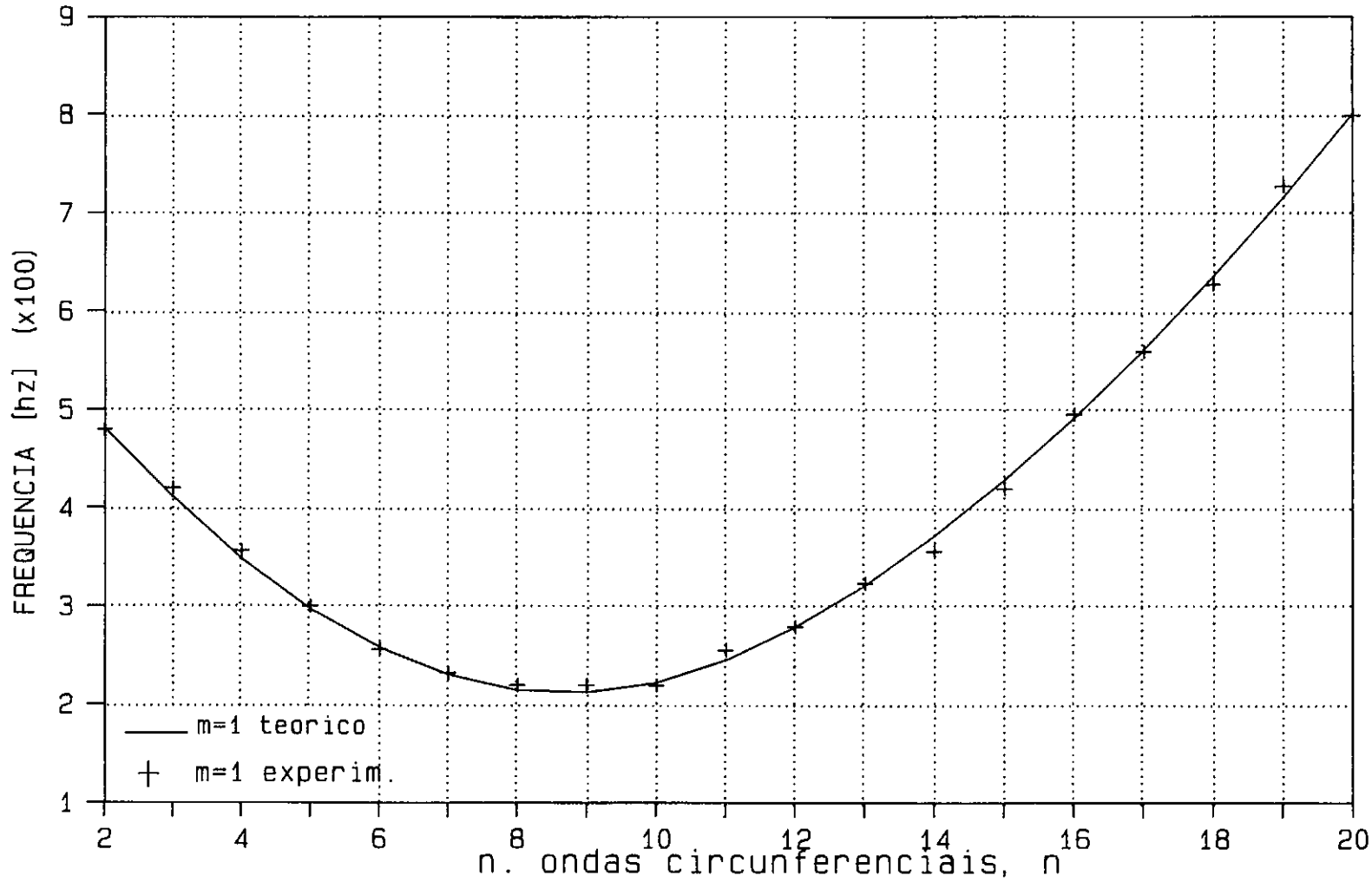


FIG.VI.7. ESPECTRO DE FREQUENCIA x MODOS - ENGASTE - H/L=0.5
ANALISE TEORICA E EXPERIMENTAL

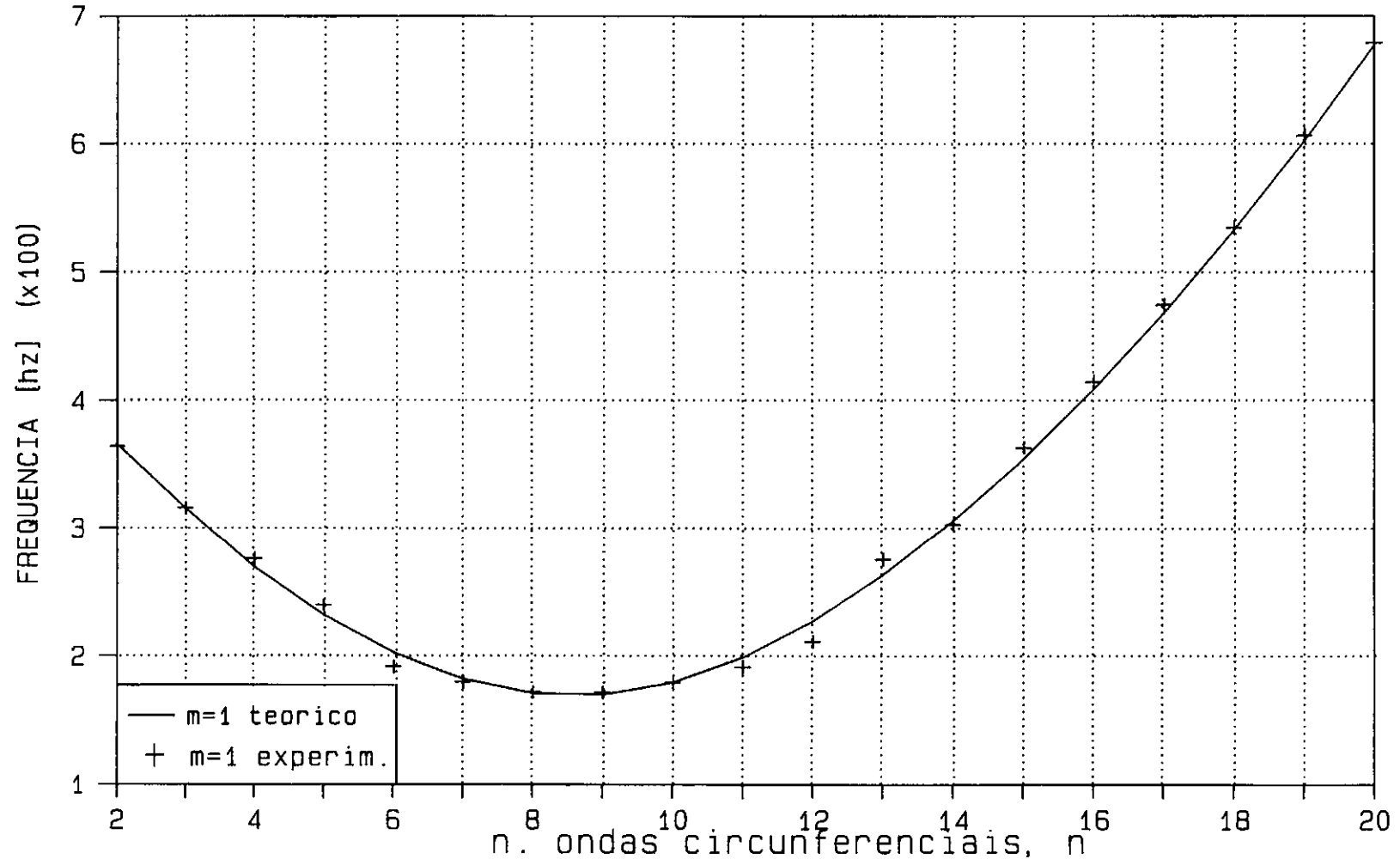


FIG.VI.8. ESPECTRO DE FREQUENCIA x MODOS - ENGASTE - H/L=0.75
 ANALISE TEORICA E EXPERIMENTAL

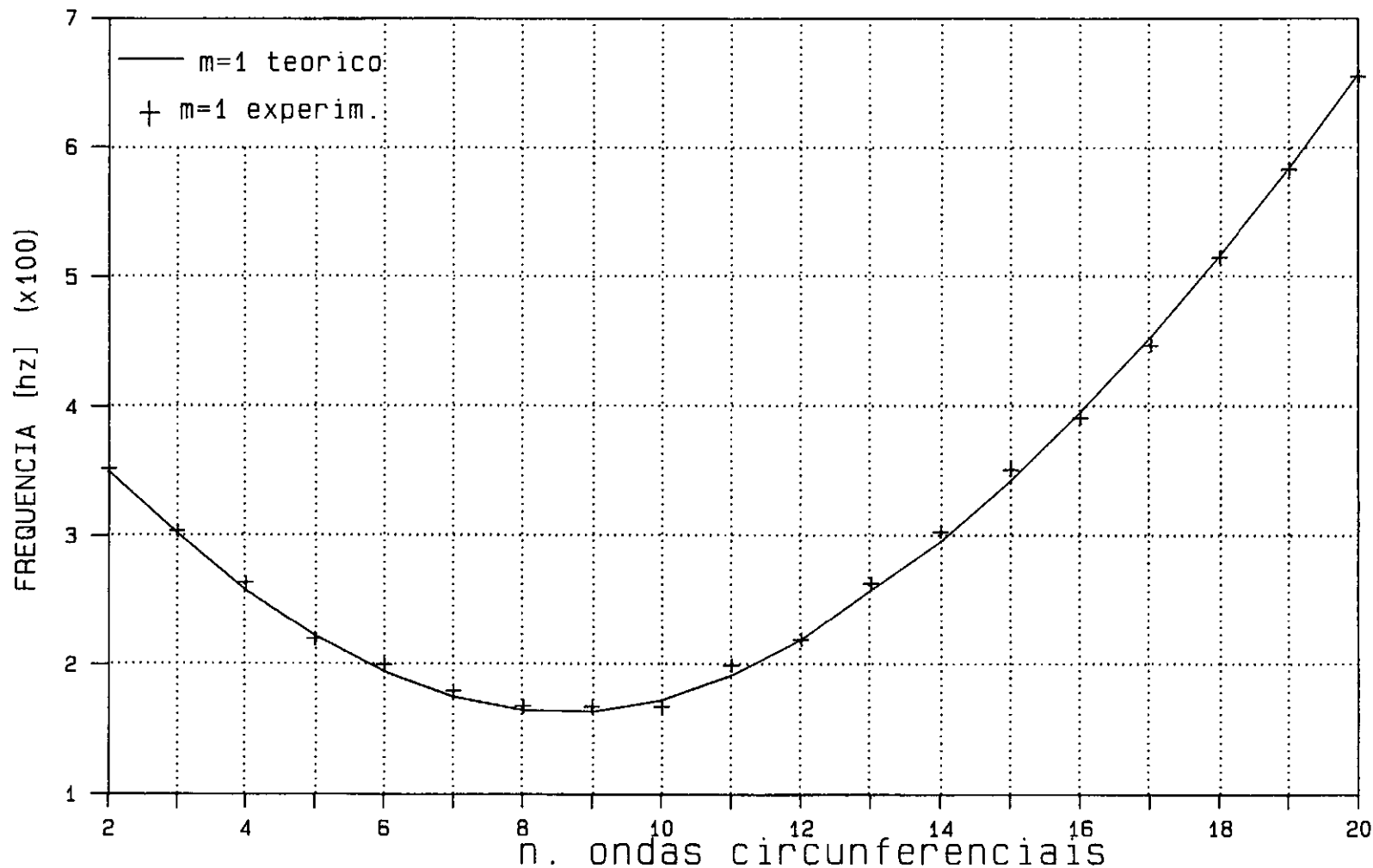


FIG.VI.9. ESPECTRO DE FREQUENCIA x MODOS - ENGASTE - H/L=1.0
 ANALISE TEORICA E EXPERIMENTAL

Tabela VI.4 - Comparação teórica-experimental e modo de vibração. Casca engastada - $H/L = 0.50$

Frequência [Hz]		Modo (m,n)
Teórico	Experim.	
212	220	(1,9)
214		(1,8)
222		(1,10)
230	232	(1,7)
245	256	(1,11)
257		(1,6)
279	280	(1,12)
297	300	(1,5)
322	324	(1,13)
347	356	(1,4)
372		(1,14)
411	420	(1,3)
429		(1,15)
482	480	(1,2)
492	496	(1,16)
561	560	(1,17)
636	628	(1,18)
716	728	(1,19)
802	800	(1,20)

Tabela VI.5 - Comparação teórica-experimental e modos de vibração. Casca engastada - $H/L = 0.75$

Frequência [Hz]		Modo (m,n)
Teórico	Experim.	
170	172	(1,9)
171		(1,8)
180	180	(1,10)
182		(1,7)
199	192	(1,11)
202		(1,6)
228	212	(1,12)
231	240	(1,5)
264	276	(1,13)
269		(1,4)
307	304	(1,14)
315	316	(1,3)
355	364	(1,15)
366		(1,2)
410	416	(1,16)
469	476	(1,17)
533	536	(1,18)
603	608	(1,19)
678	680	(1,20)

Tabela VI.6 - Comparação teórica-experimental e modos de vibração. Casca engastada - $H/L = 1.00$

Frequência [Hz]		Modo (m,n)
Teórico	Experim.	
163	168	(1,9)
164		(1,8)
173		(1,10)
175	180	(1,7)
192	200	(1,11)
194		(1,6)
220	220	(1,12)
222		(1,5)
258	264	(1,4)
259		(1,13)
296	304	(1,14)
301		(1,3)
343	352	(1,15)
350		(1,2)
396	392	(1,16)
455	448	(1,17)
517	516	(1,18)
584	584	(1,19)
657	656	(1,20)

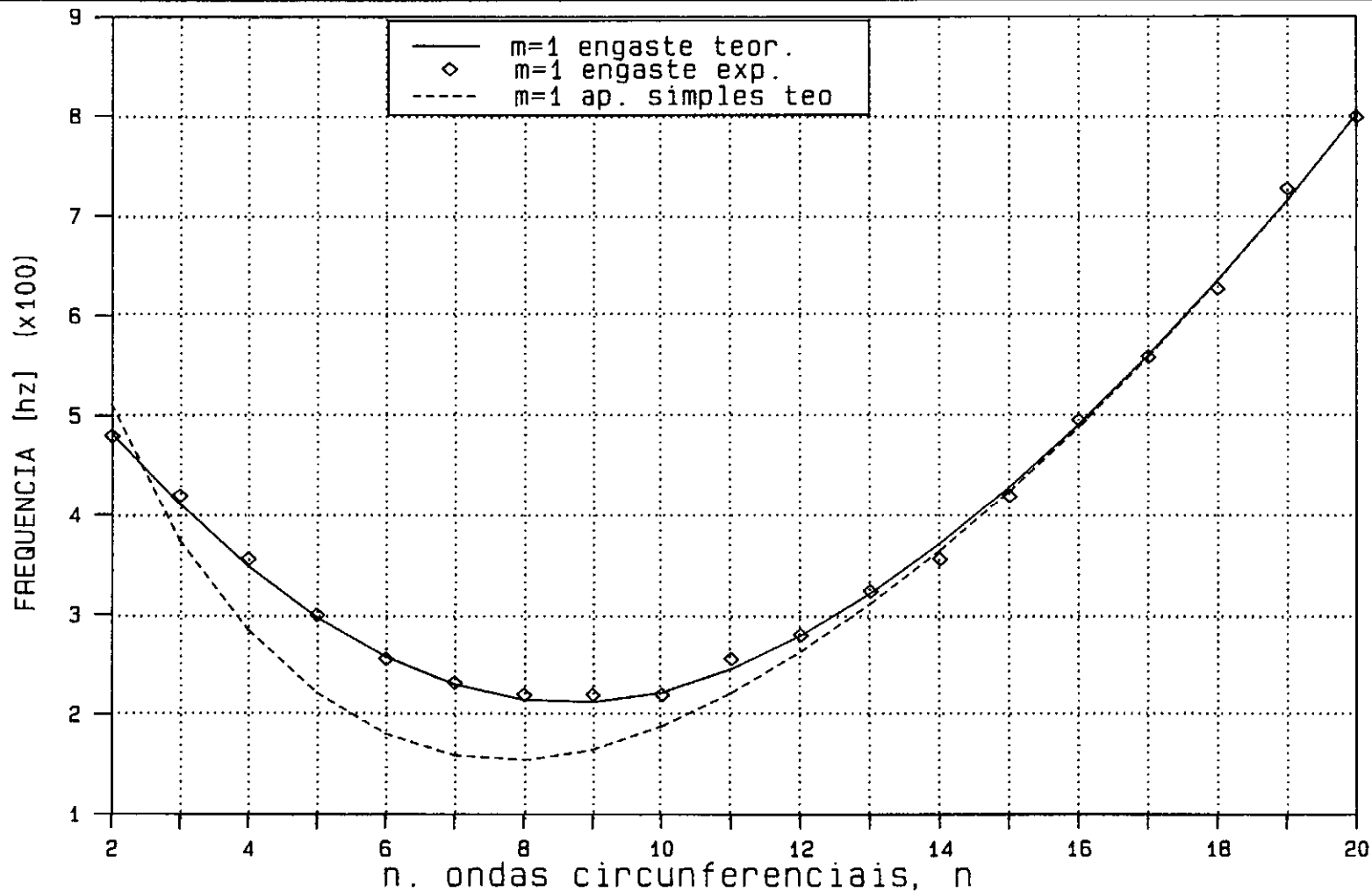


FIG.VI.10. ESPECTRO DE FREQUENCIA x MODOS - $H/L=0.50$
 COMPARAÇÃO ENTRE AS CONDIÇÕES DE ENGASTE E APOIO SIMPLES

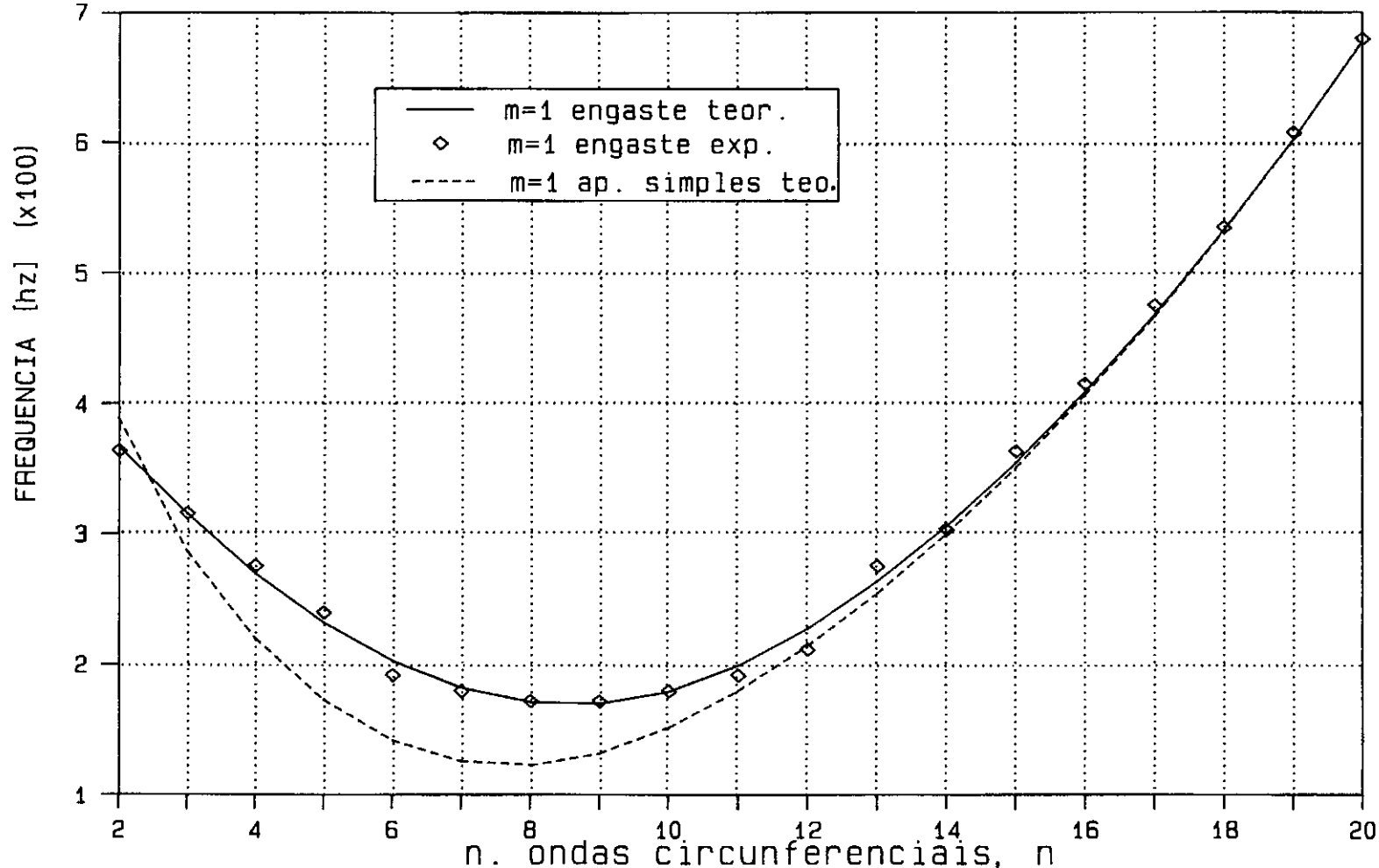
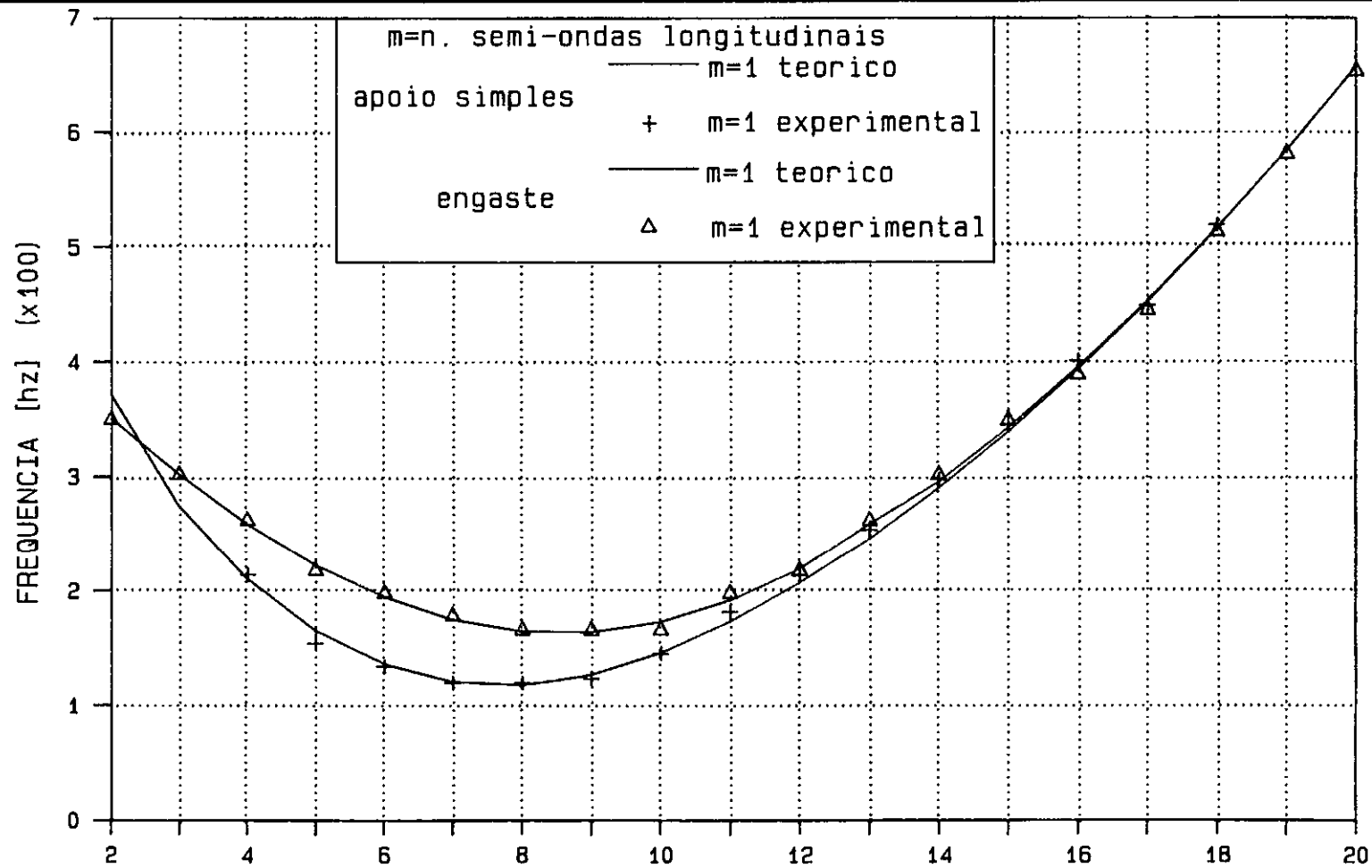


FIG.VI.11. ESPECTRO DE FREQUENCIA x MODOS - $H/L=0.75$ -
 COMPARACAO ENTRE AS CONDICOES DE ENGASTE E APOIO SIMPLES



n. ondas circunferenciais, n
 FIG.VI.12. ESPECTRO DE FREQUENCIA x MODOS - H/L=1.0 -
 COMPARACAO ENTRE AS CONDICOES DE ENGASTE E APOIO SIMPLES

apoiada apresenta um valor de frequência natural cerca de 28% inferior ao da casca engastada para essa geometria.

VI.5. ANÁLISE PARAMÉTRICA

A seguir, apresentam-se os resultados da análise paramétrica realizada tanto para o caso da casca com apoios simples quanto para o caso de engaste.

As figuras (VI.13 até 18) ilustram a influência da densidade do fluido sobre o comportamento da casca.

Foi feita uma análise para valores do parâmetro ρ_F/ρ_C iguais a 0,09, 0,127 e 0,173, que correspondem aos ρ_F do éter, água e mercúrio, respectivamente, e ao ρ_C do aço. Foram escolhidos éter e mercúrio por apresentar valores extremos de densidade de líquidos. Assim, através dos espectros de frequência vs modos de vibração para uma semi-onda longitudinal ($m=1$) e vários valores da relação H/L , e para as condições de casca simplesmente apoiada e engastada, mostrados nas figuras (VI.13 até VI.18), pode-se observar que a medida que a relação ρ_F/ρ_C aumenta, os valores das frequências decrescem. É também destacável o fato do aumento da divergência entre os valores de frequências com o acréscimo do número de ondas circunferenciais, n , a partir do valor de n correspondente às frequências naturais, isto é, mínimas. Esta divergência é mais acentuada para o caso da casca completamente cheia de fluido ($H/L=1,0$), já que as frequências dependem do parâmetro de massa de fluido adicionada ξ , o qual é inversamente proporcional ao número de ondas circunferenciais, n e diretamente proporcional à relação ρ_F/ρ_C .

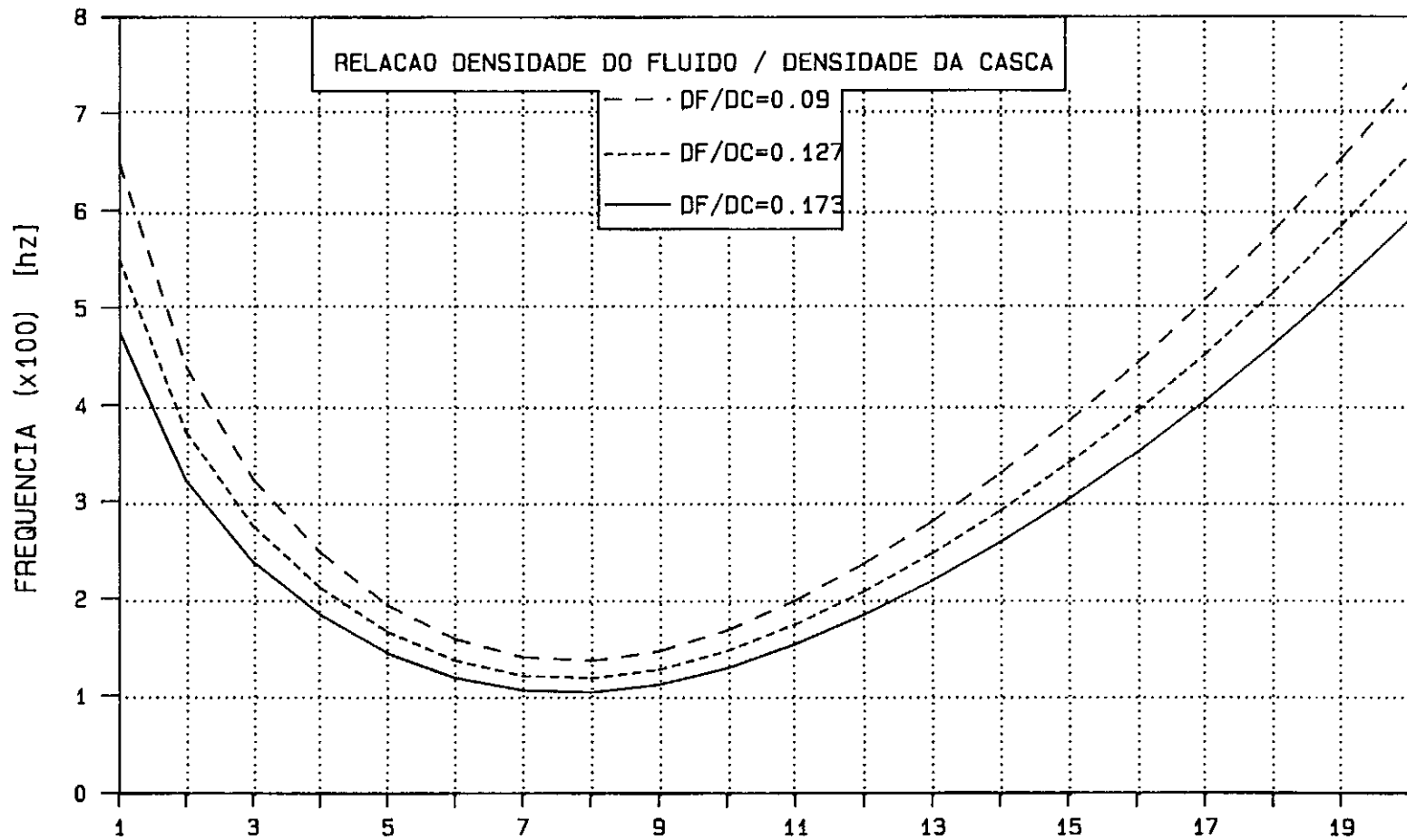


FIG.VI.13. ESPECTRO DE FREQUENCIA x MODOS - H/L=1.0 - APOIO SIMPLES
 VARIACAO DO PARAMETRO DF/DC

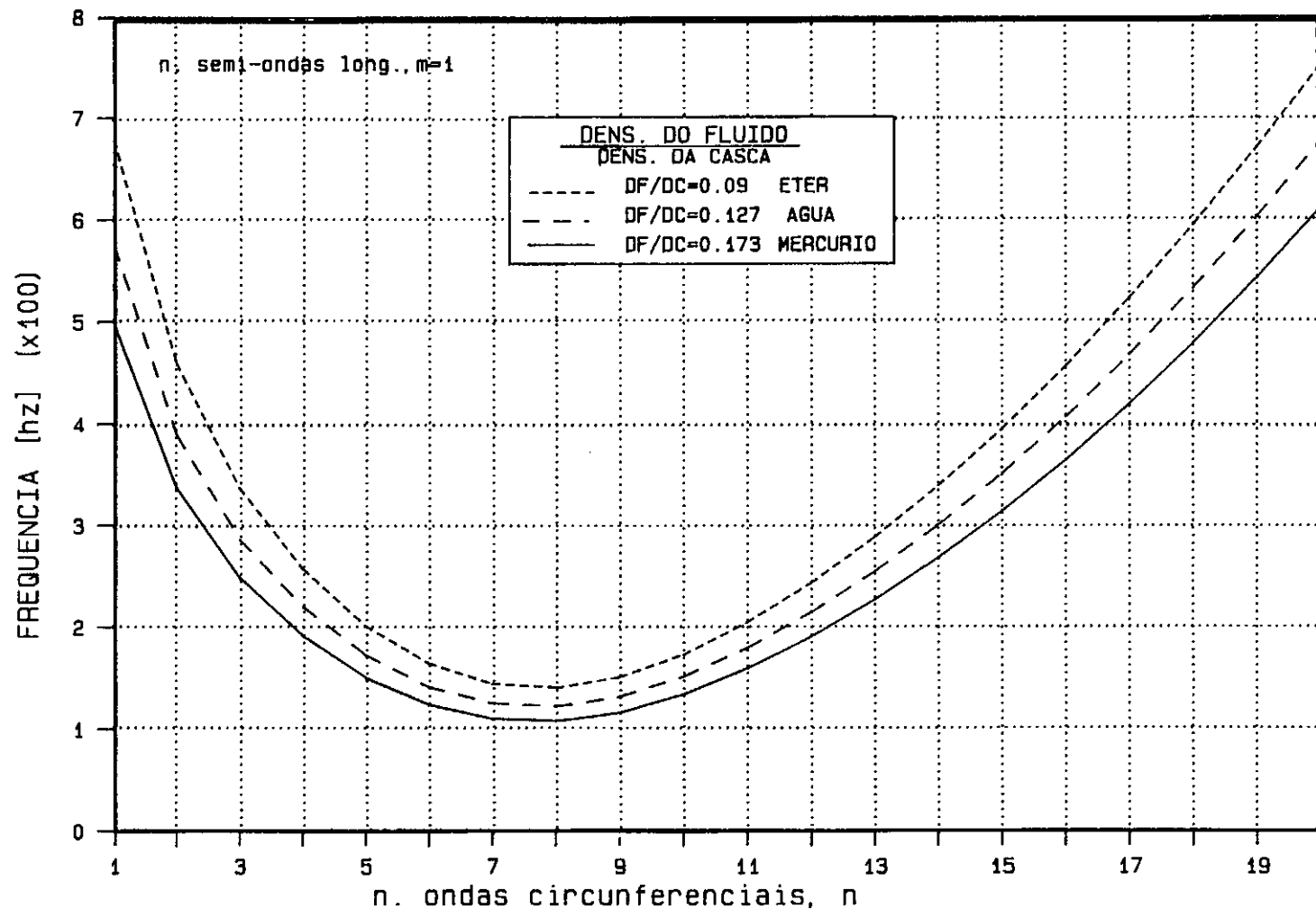


FIG.VI.14. ESPECTRO DE FREQUENCIA x MODOS - APOIO SIMPLES - H/L=.75
PARA DIFERENTES VALORES DA DENSIDADE DO FLUIDO

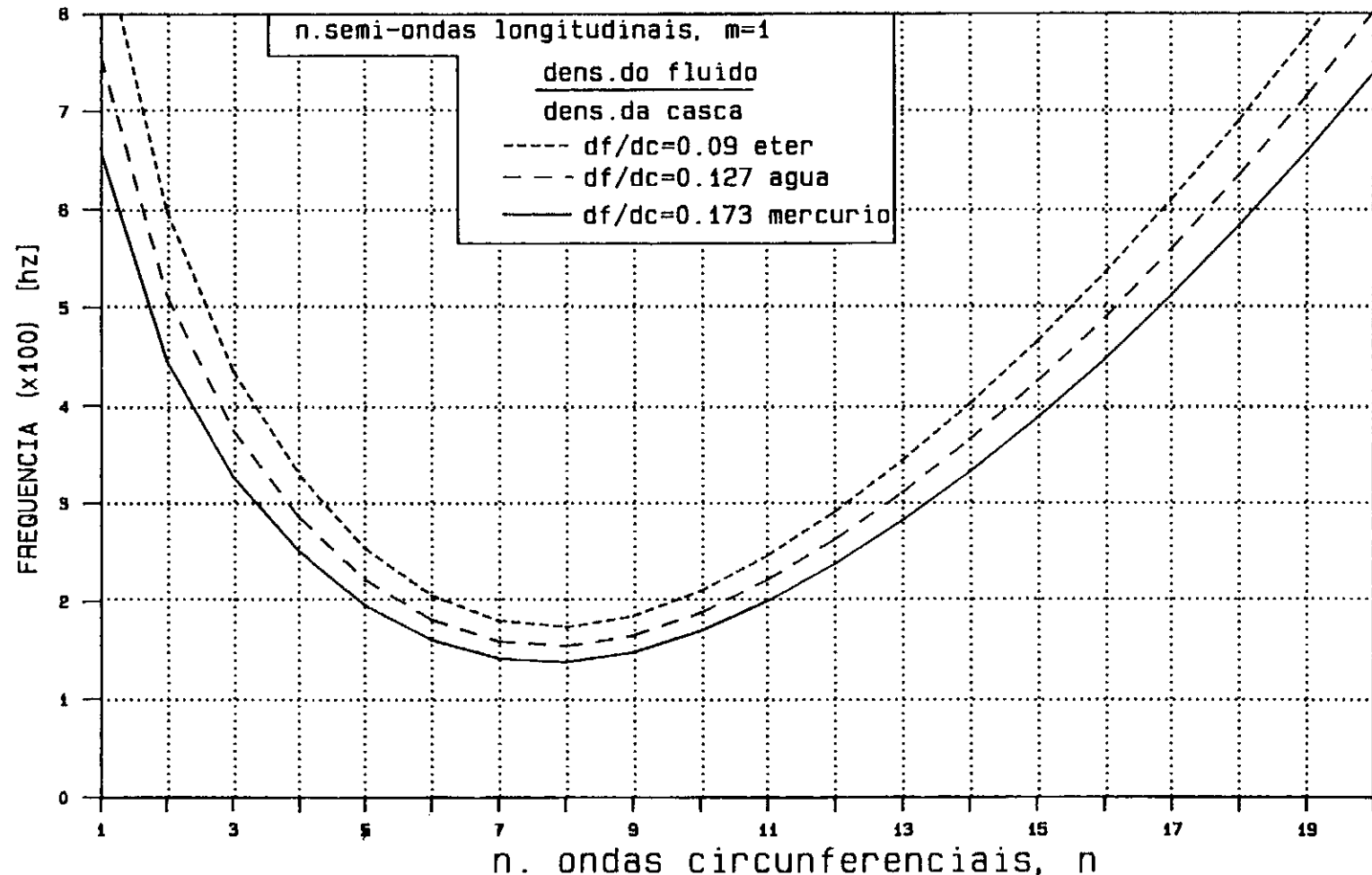


FIG.VI.15. ESPECTRO DE FREQUENCIA x MODOS - APOIO SIMPLES - $H/L=0.5$
PARA DIFERENTES VALORES DA DENSIDADE DO FLUIDO

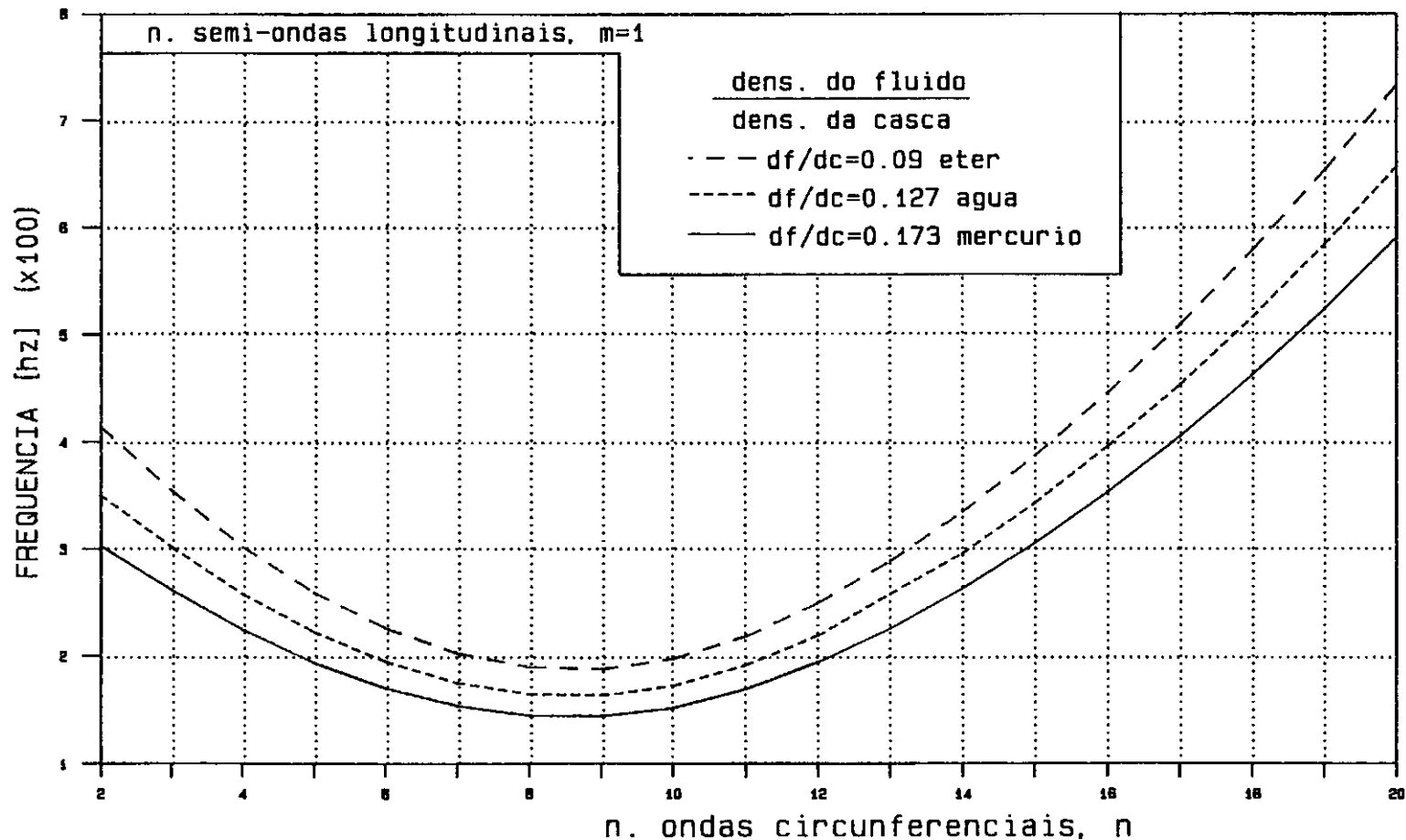


FIG.VI.16. ESPECTRO DE FREQUENCIA x MODOS - ENGASTE - $H/L=1.0$
PARA DIFERENTES VALORES DA DENSIDADE DO FLUIDO

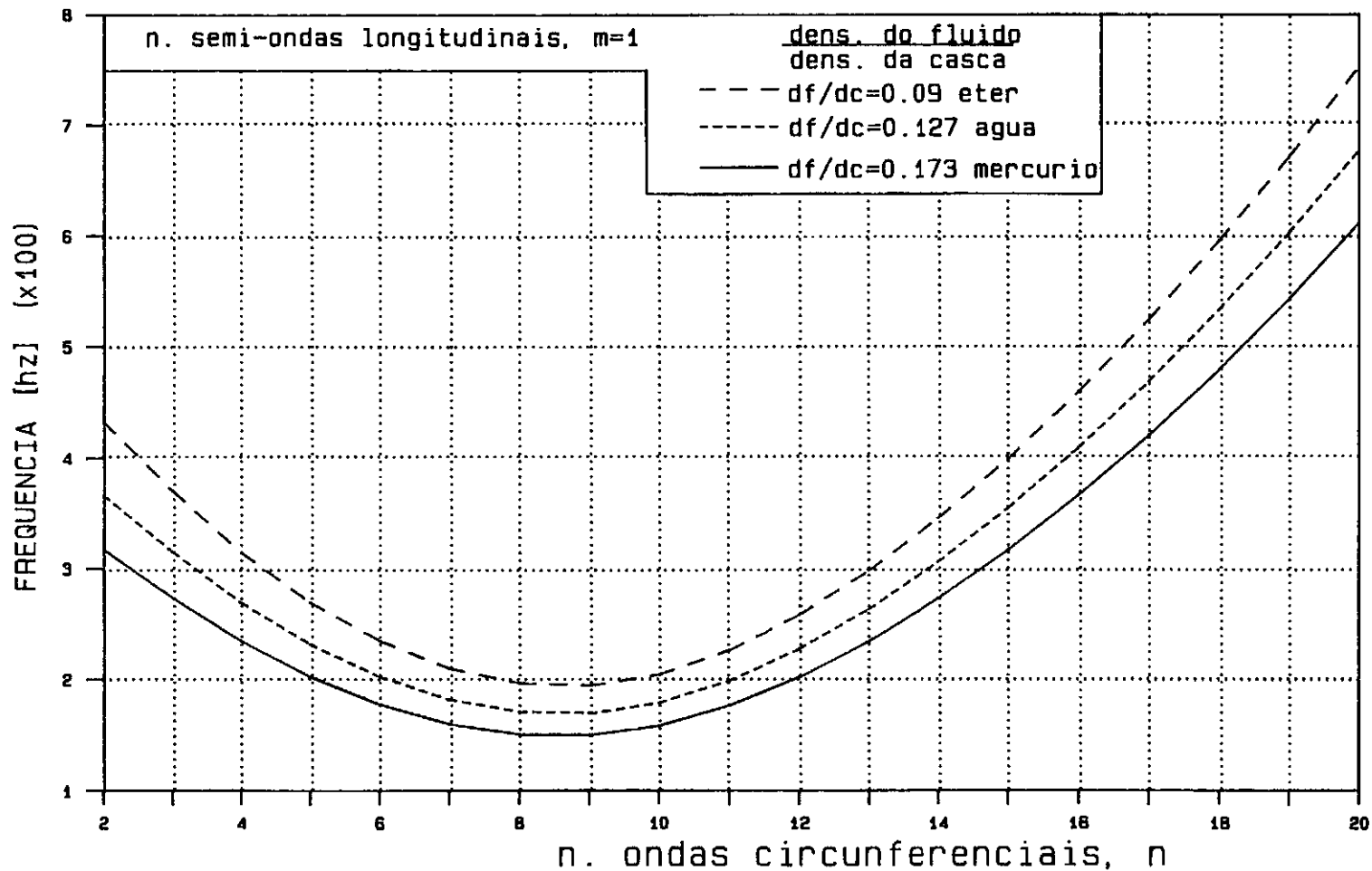


FIG.VI.17. ESPECTRO DE FREQUENCIA x MODOS - ENGASTE - $H/L=0.75$
PARA DIFERENTES VALORES DA DENSIDADE DO FLUIDO

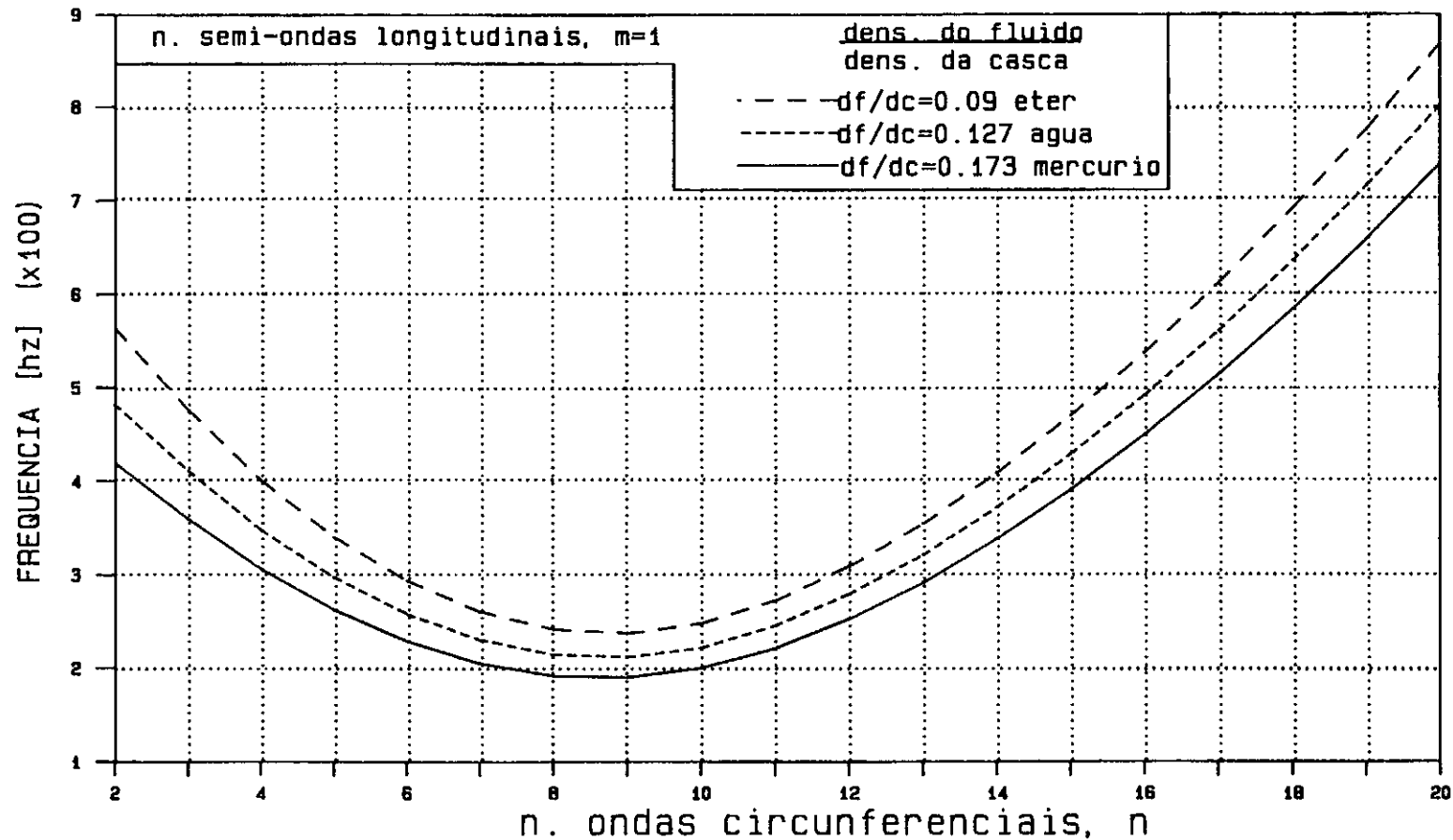


FIG.VI.18. ESPECTRO DE FREQUENCIA x MODOS - ENGASTE - $H/L=0.5$
PARA DIFERENTES VALORES DA DENSIDADE DO FLUIDO

Ao se desenvolver a análise paramétrica, verifica-se que a frequência da casca no ar (Ω), obtida a partir do desenvolvimento do determinante da equação (II.8a), é função de quatro parâmetros, a saber:

$$m\pi R/L; n; h^2/12 R^2; (1-\nu)/2$$

Na formulação teórica usada (teoria de Donnell para cascas abatidas), pode-se calcular as frequências como função de apenas dois parâmetros adimensionais: o parâmetro

$$\bar{n} = \frac{n (L/m)}{\pi R} = \frac{n \bar{L}}{\pi R} \quad (\text{VI.1})$$

onde \bar{L} é o comprimento de uma semi-onda longitudinal, e o parâmetro

$$Z = \frac{\bar{L}^2}{R h} (1-\nu^2)^{1/2} = \left(\frac{\bar{L}}{R}\right)^2 \left(\frac{R}{h}\right) (1-\nu^2)^{1/2} \quad (\text{VI.2})$$

conhecido como parâmetro de Batdorf e que engloba, juntamente com o coeficiente de Poisson, todos os parâmetros geométricos da casca.

O parâmetro \bar{n} é tratado como uma variável contínua, hipótese válida para cascas abatidas.

Usando-se (VI.1) e (VI.2) pode-se escrever a expressão para a frequência mínima de cascas abatidas no ar, na forma

$$\bar{\Omega}^2 = (1+n^2)^2 + \frac{1}{(1+\bar{n}^2)^2} \frac{12}{\pi^4} Z^2 \quad (\text{VI.3})$$

onde $\bar{\Omega}$ é o parâmetro adimensional de frequência dado por

$$\bar{\Omega} = \frac{\sqrt{12} \bar{L}}{R h \pi^2} \Omega = \frac{\omega \bar{L}}{\pi^2 h} \left[\frac{12 (1-\nu^2) \rho}{E} \right]^{1/2} \quad (\text{VI.4})$$

A partir de (VI.3) pode-se calcular o valor de \bar{n} que torna esta expressão um mínimo. Este valor é dado por

$$\bar{n}^* = \left\{ -1 + \left[\frac{(12)^{1/2} Z}{\pi^2} \right]^{1/2} \right\}^{1/2} \quad (\text{VI.5})$$

Substituindo-se (VI.5) em (VI.4) verifica-se que a frequência mínima é função exclusiva de Z ou seja da geometria da casca como expressa por Z. As curvas Z vs \bar{n}^* e Z vs $\bar{\Omega}_{\min}$ são apresentadas nas figuras (VI.19) e (VI.20). Observa-se que a medida que Z cresce (a casca se torna mais longa e/ou mais delgada), o parâmetro $\bar{\Omega}$ cresce. Isto é, para um dado R, a frequência natural ω decresce quando Z cresce, já que ω é inversamente proporcional ao quadrado de Z o qual é diretamente proporcional a (R/h) e ao quadrado de (L/R).

Conhecida a geometria e \bar{n}^* , pode-se determinar o número de ondas circunferenciais n^* correspondente à frequência mínima.

Para o caso de presença de fluido, além dos parâmetros Z e \bar{n} , a frequência mínima é função do parâmetro ξ , que não pode ser expresso em termos de Z e \bar{n} . Entretanto, é possível estabelecer a relação [6]

$$\frac{\bar{\Omega}_F}{\bar{\Omega}_V} = \left(\frac{1}{1 + \xi} \right)^{1/2} \quad (\text{VI.6})$$

Fazendo uma aproximação para cascas curtas e cascas lon-

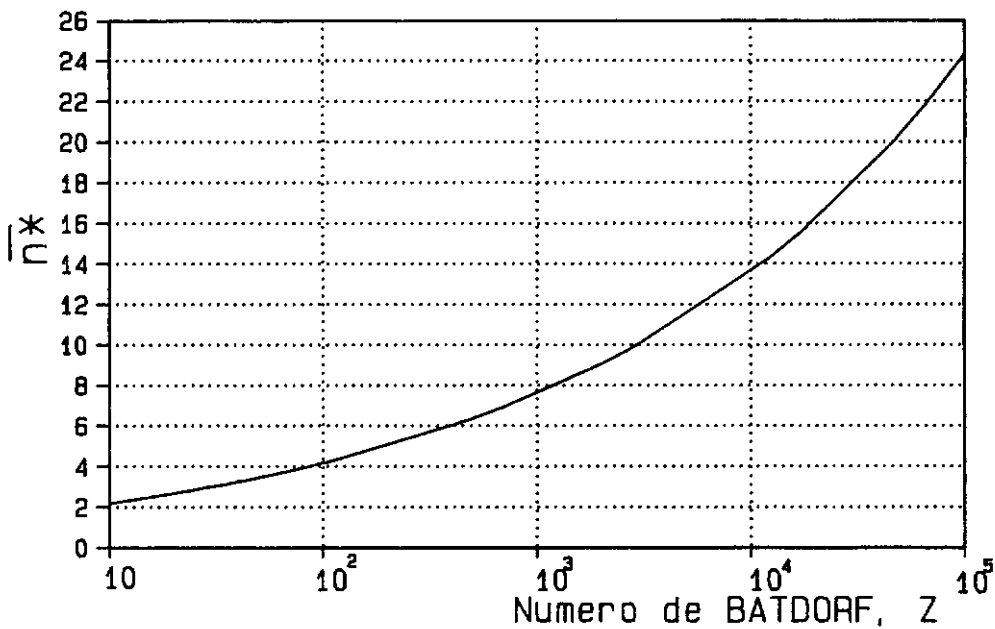


FIG.VI.19. VARIACAO DO PARAMETRO n^* EM FUNCAO DO PARAMETRO GEOMETRICO Z

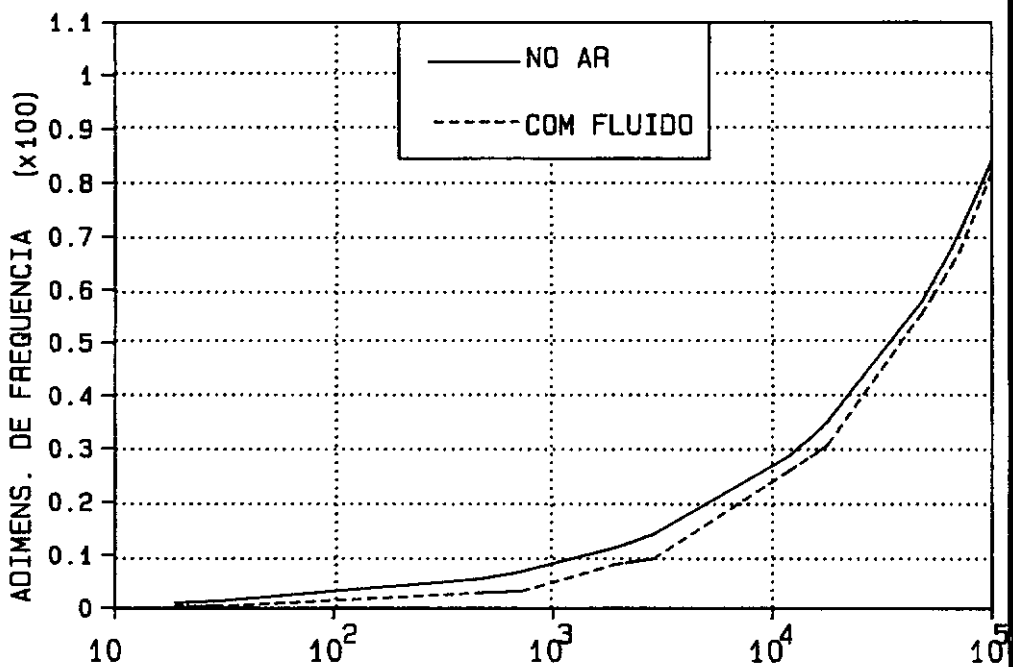


FIG.VI.20. VARIACAO DOS PARAMETROS EM FUNCAO DO PARAMETRO GEOMETRICO Z

gas [6], verifica-se que elas são iguais para $\bar{n}=1$. Assim, tem-se que para $\bar{n}<1$

$$\frac{\bar{\Omega}_F}{\bar{\Omega}_V} = \left(1 + \frac{\rho_F}{\rho_C} \frac{L}{\pi h} \right)^{-1/2} \quad (\text{VI.7})$$

e para $\bar{n}>1$,

$$\frac{\bar{\Omega}_F}{\bar{\Omega}_V} = \left(1 + \frac{\rho_F}{\rho_C} \frac{R}{h} \frac{1}{n} \right)^{-1/2} \quad (\text{VI.8})$$

Pode-se assim para valores dados de Z e \bar{n} , determinar a frequência da casca contendo fluido. Deve-se notar que nos casos de cascas curtas (Z pequeno) ou muito longas (Z grande), os valores das frequências no ar e com fluido são aproximadamente iguais (vide figura (VI.24)).

Esta formulação bastante simples, que dá uma boa aproximação para a teoria de cascas abatidas [6], pode ser usada com vantagem no projeto estrutural. Em estudos de otimização destas estruturas, quando devido ao grande número de cálculos requeridos não seria indicado o uso da teoria geral, esta vantagem é mais evidente.

Deve-se, entretanto, lembrar que esta formulação está sujeita às limitações inerentes à teoria de cascas abatidas.

Nas figuras (VI.21), (VI.22), (VI.23) e (VI.24), mostra-se através de espectros de frequência vs modos de vibração, a influência do parâmetro L/R nos casos de cascas simplesmente apoiada e engastada com e sem fluido.

Pode-se comprovar através da observação destas figuras a diminuição das frequências mínimas e do número de ondas circun-

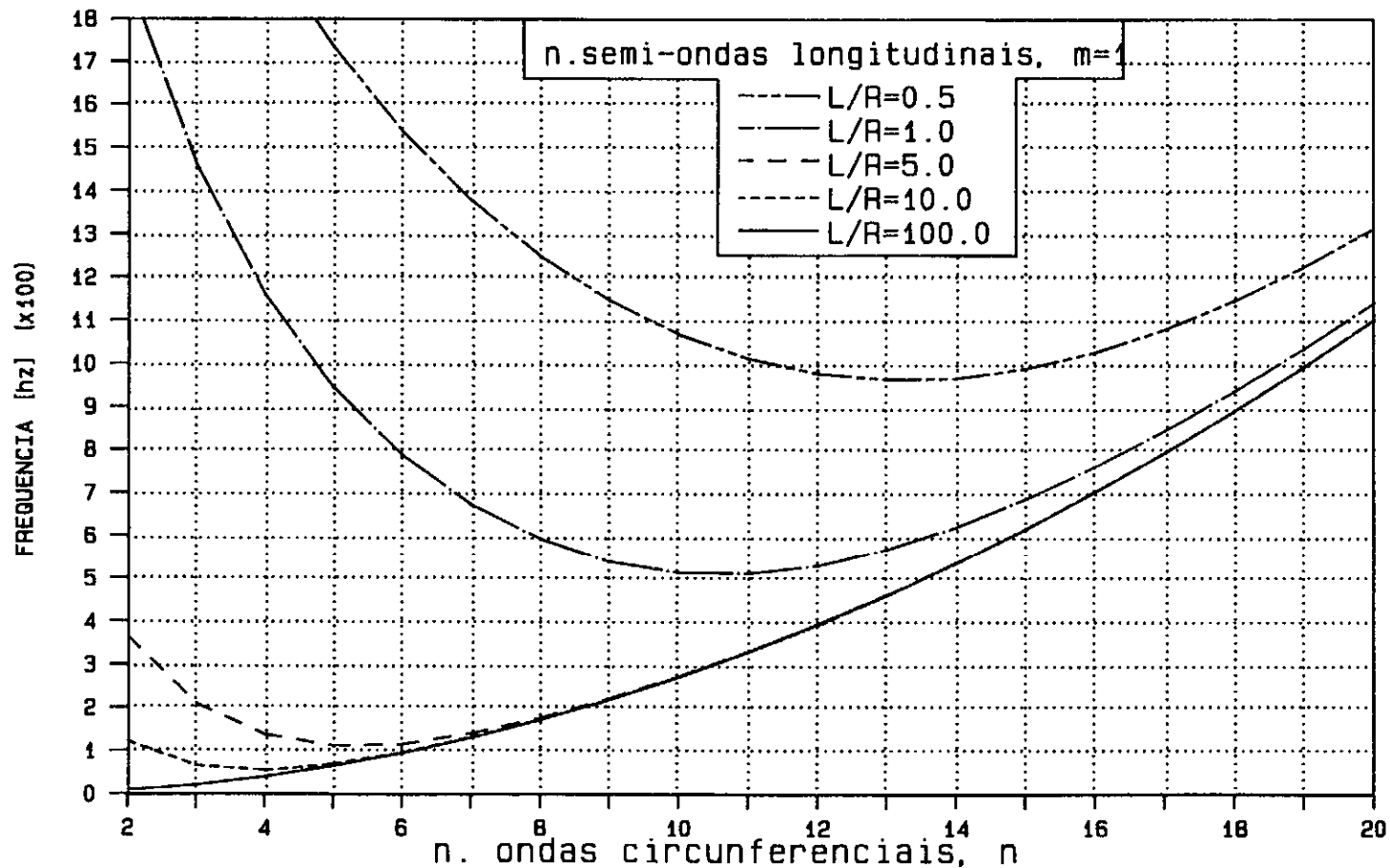


FIG.VI.21. ESPECTRO DE FREQUENCIA x MODOS - APOIO SIMPLES - PARA DIFERENTES VALORES DO PARAMETRO L/R - H/L=0.0

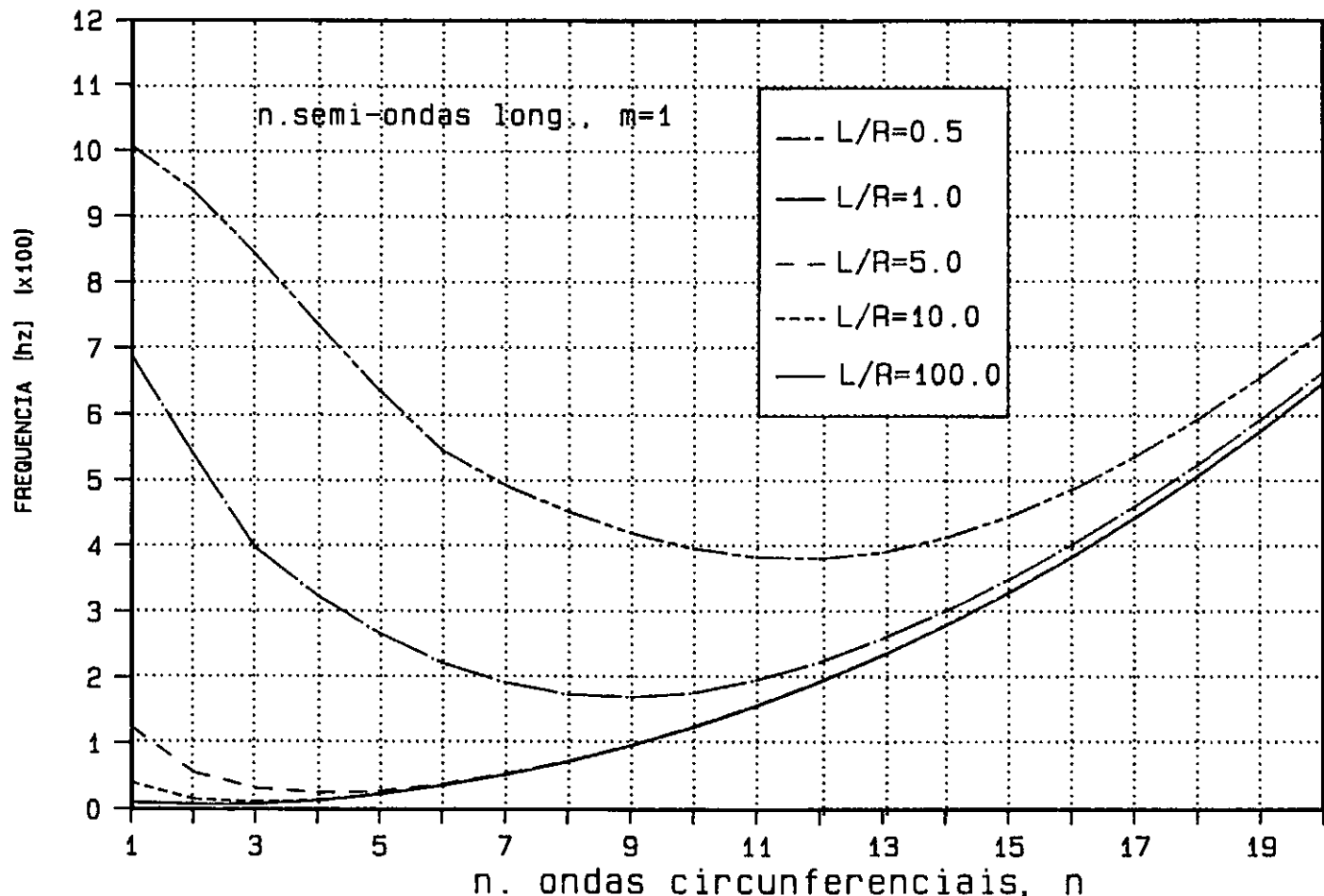


FIG VI.22 ESPECTRO DE FREQUENCIA x MODOS - APOIO SIMPLES - $H/L=1.0$
 PARA DIFERENTES VALORES DA RELACAO L/R

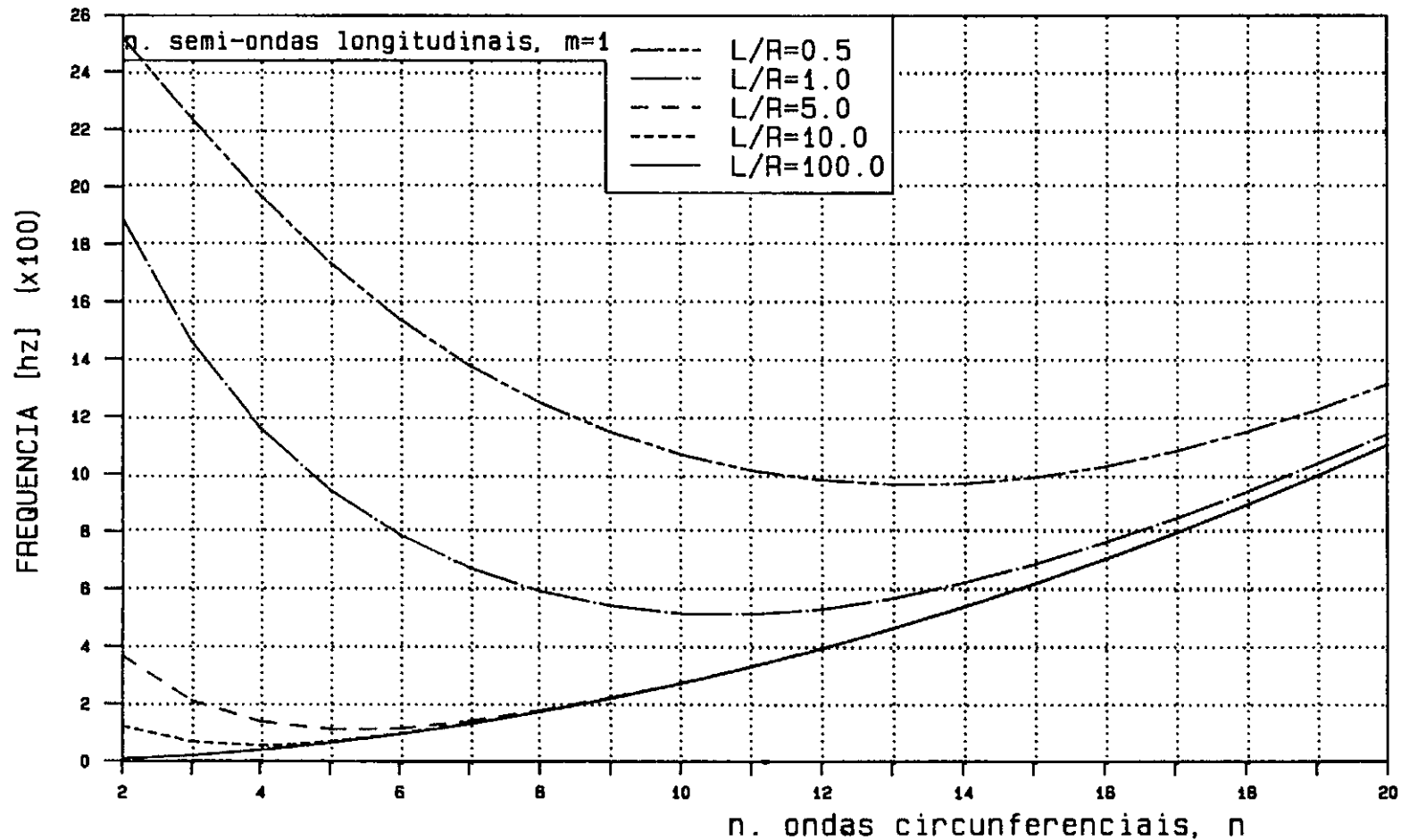


FIG.VI.23. ESPECTRO DE FREQUENCIA x MODOS - ENGASTE
 PARA DIFERENTES VALORES DO PARAMETRO L/R - $H/L=0.0$

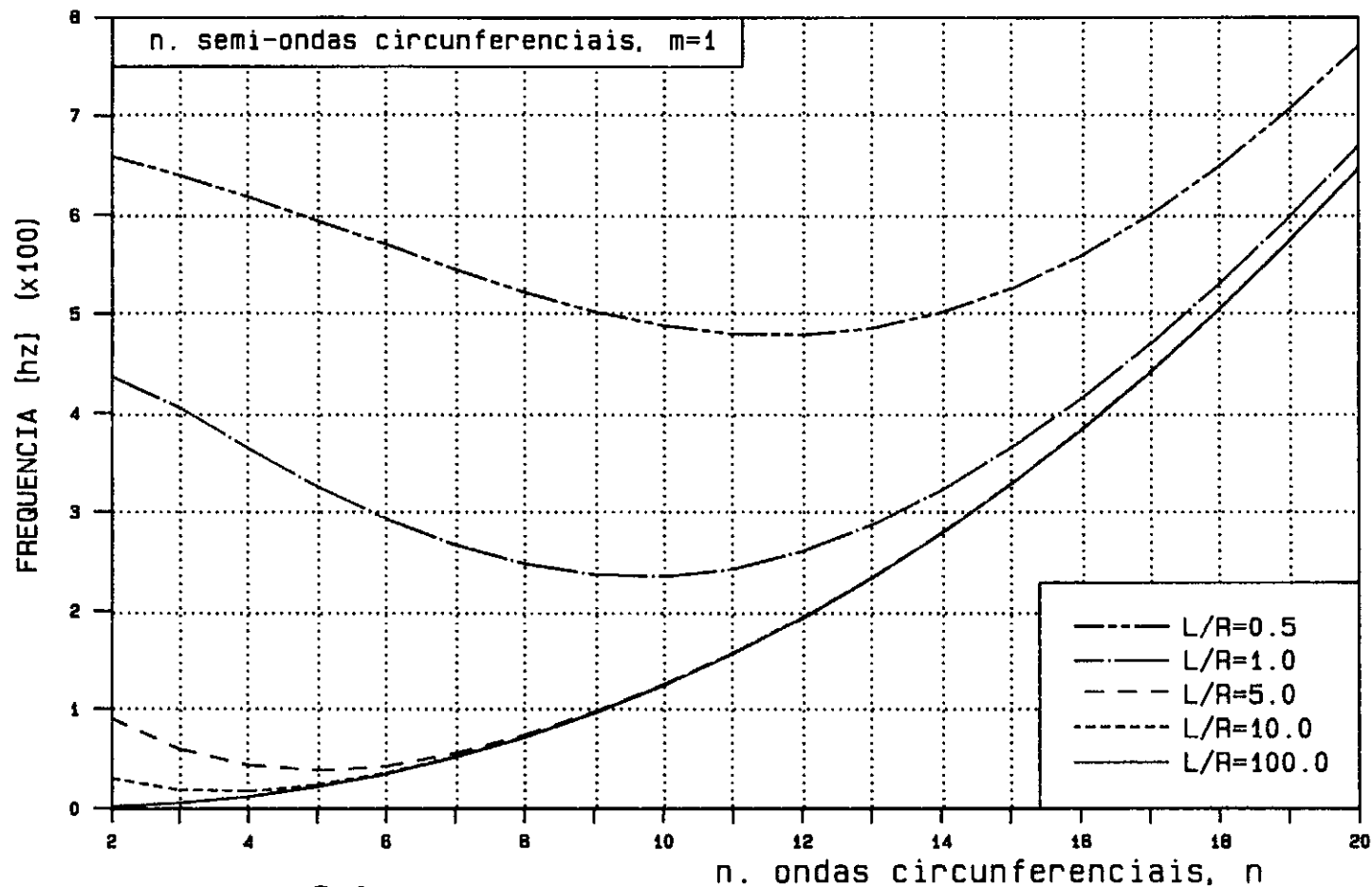


FIG.VI.24. ESPECTRO DE FREQUENCIA x MODOS - ENGASTE
 PARA DIFERENTES VALORES DO PARAMETRO L/R - H/L=1.0

ferenciais correspondente a essas frequências naturais, em função do decréscimo do parâmetro L/R .

Observa-se também que para cascas longas ($L/R > 10$) o número de ondas circunferenciais, n , correspondente à frequência mínima, é igual a 2.

Note-se também nas figuras (VI.21 até VI.24) que fixando o parâmetro R/h em um valor típico de cascas delgadas, por exemplo, $R/h=300$, as frequências naturais obtidas para cascas curtas ($L/R \geq 1$) e para cascas longas ($L/R \geq 10$) tendem a valores comuns a medida que o número de ondas circunferenciais cresce, já que o comportamento é dominado pela energia de flexão.

CAPÍTULO VII

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Foi apresentada neste trabalho, uma análise teórico-experimental do problema de vibrações de cascas cilíndricas delgadas contendo fluido não viscoso e incompressível.

A análise foi feita a partir da teoria de cascas abatedas de Donnell, e para o estudo do problema de interação entre fluido e estrutura deformável, foi aplicada a expressão teórica de "massa de fluido adicionada", obtida para cascas cilíndricas delgadas por GONÇALVES [6], com a consideração do acoplamento modal.

A análise experimental foi feita no Laboratório de Estruturas do PEC-COPPE/UFRJ, e aporta à literatura técnica novos resultados que se somam a alguns outros publicados anteriormente.

Entretanto, contrariamente a comparações teórico-experimentais anteriores [11], os resultados obtidos na presente investigação são plenamente consistentes, como demonstrado no Capítulo VI, para todo o campo de variação do parâmetro H/L analisado.

Talvez, seja esta a maior contribuição do presente trabalho que, demonstrando a validade dos modelos teóricos analíticos utilizados, possibilita a extensão da análise da interação dinâmica fluido-estrutura delgada para geometrias mais complexas, através de formulações teoricamente mais consistentes aplicadas ao método dos elementos finitos.

A partir da formulação apresentada, dos resultados obtidos através da mesma, e através da análise experimental, podem ser feitas algumas considerações importantes:

1 - Verifica-se, através da análise e comparação dos resultados experimentais e teóricos para vibrações no ar, que os modelos teórico, com a consideração do acoplamento modal do problema dinâmico, e experimental, demonstram validade e confiabilidade. Isto é objetivamente demonstrado através do estudo do problema de interação entre fluido e estrutura. Observa-se que o fluido tem uma grande influência nas frequências naturais de vibração da casca. Essa influência é expressa na formulação teórica através de uma "massa de fluido adicionada" que é função dos parâmetros do fluido e da casca. Verificam-se também excelentes comparações entre os resultados teóricos e experimentais obtidos para respostas dinâmicas sob ação de força de impacto lateral na parede da casca.

2 - Conclui-se que não é possível se detectar flambagens localizadas junto aos apoios extremos de uma casca cilíndrica delgada e alongada, pelo menos quando $L/R > 1$ como no presente modelo experimental, através de medições de frequências naturais, já que é demonstrado que estas não sofrem alterações significativas quando o fenômeno de flambagem local se apresenta.

Sugere-se fazer um estudo dos modos de vibração, que é provável que tenham alterações perceptíveis no caso da casca com grandes imperfeições geométricas como as causadas por uma flambagem local.

3 - Sugere-se também um estudo do comportamento dinâmico das cascas cilíndricas delgadas sob a ação de cargas axiais crescentes, comprovando-se experimentalmente a redução das frequências com o crescimento das tensões de compressão. Este procedimento possibilitaria se determinar através do comportamento dinâmico, a carga crítica da estrutura sem leva-la ao colapso. Neste estudo experimental deverá ser aprimorada a simulação das condições de contorno, para conseguir uma transferência uniforme de tensões axiais e evitar pontos de concentração que poderiam levar à flambagem local da estrutura na zona de apoios.

4 - O desenvolvimento de um estudo experimental do comportamento não-linear de cascas cilíndricas contendo fluido, também é sugerido, construindo-se um modelo experimental com geometria e características tais que tornem este fenômeno evidente. Tal qual o presente trabalho, esta investigação experimental seria uma forma de aferir a consistência dos resultados teóricos obtidos recentemente no PEC-COPPE/UFRJ [6].

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ELSGOLTZ, L., Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional, MIR, 1977.
- [2] GONÇALVES, P.B., Vibrações Lineares de Cascas Esbeltas em um Meio Fluido, Seminário D.Sc., COPPE/UFRJ, 1985.
- [3] LAMB, H., Hydrodynamics, Dover Publications, 1945.
- [4] WATSON, G.N., A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge University Press, 1950.
- [5] GONÇALVES, P.B., Vibrações Livres de Cascas Cilíndricas Semi-Submersas, Seminário D.Sc., COPPE/UFRJ, 1985.
- [6] _____, Interação Dinâmica Não-Linear entre Fluido e Cascas Delgadas, Tese D.Sc., COPPE/UFRJ, 1987.
- [7] GASSER, F.L.F., BATISTA, R.C., GONÇALVES, P.B., ROITMAN, N., Interação Dinâmica entre Fluido e Casca Cilíndrica Delgada, Colloquia 87, Porto Alegre, 1987.
- [8] GONÇALVES, P.B. e BATISTA, R.C., Frequency Response of Cylindrical Shells Partially Submerged or Filled with Liquid, J. of Sound and Vibration, vol. 119, nº 1, 1986.

- [9] WYLIE, C.R. and BARRET, L.C., *Advanced Engineering Mathematics*, McGraw-Hill, 1982.
- [10] WILKINSON, J.H., *Algebraic Eigenvalue Problem*, Claredon, Oxford, 1965.
- [11] LAKIS, A.A. e PAIDOUSSIS, M.P., "Free Vibration of Cylindrical Shells Partially Filled with Liquid", *J. Sound Vibration*, vol. 19, pp. 1-15, 1971.

ANEXO A

SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO PELO
MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

Considere-se o sistema de equações de equilíbrio (II.32).

Aplicando o método das diferenças finitas para pontos com espaçamento uniforme na direção x e com intervalo $\Delta=L/N$, onde N é o número de pontos adotado, as equações (II.32) podem ser escritas como:

$$R^2 \left[\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{\Delta^2} \right] - \frac{(1-\nu) n^2}{2} U_i - R \frac{(1+\nu)}{2} n \left[\frac{V_{i+1} - V_{i-1}}{2\Delta} \right] +$$

$$+ R \nu \left[\frac{W_{i+1} - W_{i-1}}{2\Delta} \right] + \gamma^2 \omega^2 U_i = 0$$

(A.1a)

$$R \frac{(1-\nu)}{2} n \left[\frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2\Delta} \right] - n^2 V_i + R^2 \frac{(1-\nu)}{2} \left[\frac{V_{i+1} - 2V_i + V_{i-1}}{\Delta^2} \right] +$$

$$+ n W_i + \gamma^2 \omega^2 V_i = 0$$

(A.1b)

$$\begin{aligned}
 R \nu \left[\frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2\Delta} \right] - n V_i + W_i + \frac{h^2}{12R^2} \left[R(W_{i+2} - 4W_{i+1} + 6W_i - 4W_{i-1} + \right. \\
 \left. + W_{i-2}) \frac{1}{\Delta^4} - 2 R^2 n^2 \left(\frac{W_{i+1} - 2W_i + W_{i-1}}{\Delta^2} \right) + n^4 W_i \right] + \\
 + \gamma^2 \omega^2 W_i - \rho_F \frac{R^2(1-\nu^2)}{Eh n} \omega^2 W_i = 0
 \end{aligned} \tag{A.1c}$$

Coletando termos,

$$\begin{aligned}
 \left[- \frac{2R^2}{\Delta^2} - \frac{(1-\nu) n^2}{2} + \gamma^2 \omega^2 \right] U_i + \frac{R^2}{\Delta^2} (U_{i+1} - U_{i-1}) - \\
 - \frac{R(1+\nu)}{4\Delta} n (V_{i+1} - V_{i-1}) + \frac{R\nu}{2\Delta} (W_{i+1} - W_{i-1}) = 0
 \end{aligned} \tag{A.2a}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{R(1-\nu) n}{4\Delta} (U_{i+1} - U_{i-1}) + \left[- n^2 - \frac{R^2(1-\nu)}{\Delta^2} + \gamma^2 \omega^2 \right] V_i + \\
 + \frac{R^2(1-\nu)}{2\Delta^2} (V_{i+1} - V_{i-1}) + n W_i = 0
 \end{aligned} \tag{A.2b}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{R\nu}{2\Delta} (U_{i+1} - U_{i-1}) - n V_i + \left(1 + \frac{6\alpha R}{\Delta^4} + \frac{4\alpha R^2 n^2}{\Delta^2} + \alpha n^4 + \gamma^2 \omega^2 - \right. \\
 \left. - \rho_F \frac{R^2(1-\nu^2)}{Eh n} \omega^2 \right) W_i + \left(- \frac{4\alpha R}{\Delta^4} - \frac{2R^2 n^2}{\Delta^2} \right) (W_{i+1} + W_{i-1}) + \\
 + \frac{\alpha R}{\Delta^4} (W_{i+2} + W_{i-2}) = 0
 \end{aligned} \tag{A.2c}$$

e reescrevendo o sistema na forma simbólica,

$$\begin{aligned}
 & [-A_{10} + M_{11}] (U_i) + [A_{11}] (U_{i+1} - U_{i-1}) + [B_{11}] (V_{i+1} - V_{i-1}) + \\
 & + [C_{11}] (W_{i+1} - W_{i-1}) = 0
 \end{aligned}
 \tag{A.3a}$$

$$\begin{aligned}
 & [A_{21}] (U_{i+1} - U_{i-1}) + [-B_{20} + M_{22}] (V_i) + [B_{21}] (V_{i+1} - V_{i-1}) + \\
 & + [-C_{20}] (W_i) = 0
 \end{aligned}
 \tag{A.3b}$$

$$\begin{aligned}
 & [A_{31}] (U_{i+1} - U_{i-1}) + [-B_{30}] (V_i) + [-C_{30} + M_{33}] (W_i) + \\
 & + [-C_{31}] (W_{i+1} + W_{i-1}) + [C_{32}] (W_{i+2} + W_{i-2}) = 0
 \end{aligned}
 \tag{A.3c}$$

onde os coeficientes A_{ij} , B_{ij} e C_{ij} são relativos à rigidez e os coeficientes M_{ii} correspondem à parte inercial do sistema.

Definido desta maneira, é possível formar dois módulos básicos que irão gerar as matrizes globais de rigidez e de massa do problema de autovalor como o da equação (II.26).

Para gerar a matriz de rigidez se define o módulo básico $S(3,13)$, (fig. A.1) e a geração da matriz de massa é feita a partir do módulo básico $P(3,13)$ (fig. A.2).

0	A11	-B11	-C11	-A10	0	0	A11	B11	C11	0	0	0
0	-A21	B21	0	0	-B20	-C20	A21	B21	0	0	0	0
C32	-A31	0	-C31	0	-B30	C30	A31	0	-C31	0	0	C32

Fig. A.1 - Módulo básico de rigidez - S(3,13)

0	0	0	0	M11	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	M22	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	M33	0	0	0	0	0	0

Fig. A.2 - Módulo básico de massa - P(3,13)

Condições de contorno:

— Engaste

$$U = V = W = W_{,x} = 0 \quad (\text{A.4})$$

que em forma de diferenças finitas, fica:

$$U_0 = 0$$

$$V_0 = 0$$

$$W_0 = 0$$

$$W_{0+1} = W_{0-1}$$

(A.5)

– Simetria axial

Nesta situação o ponto N fica no eixo de simetria, e as condições para este caso são:

$$U_n = 0$$

$$U_{n-1} = -U_{n+1}$$

$$V_{n-1} = V_{n+1}$$

$$W_{n-1} = W_{n+1}$$

$$W_{n-2} = W_{n+2}$$

(A.6)

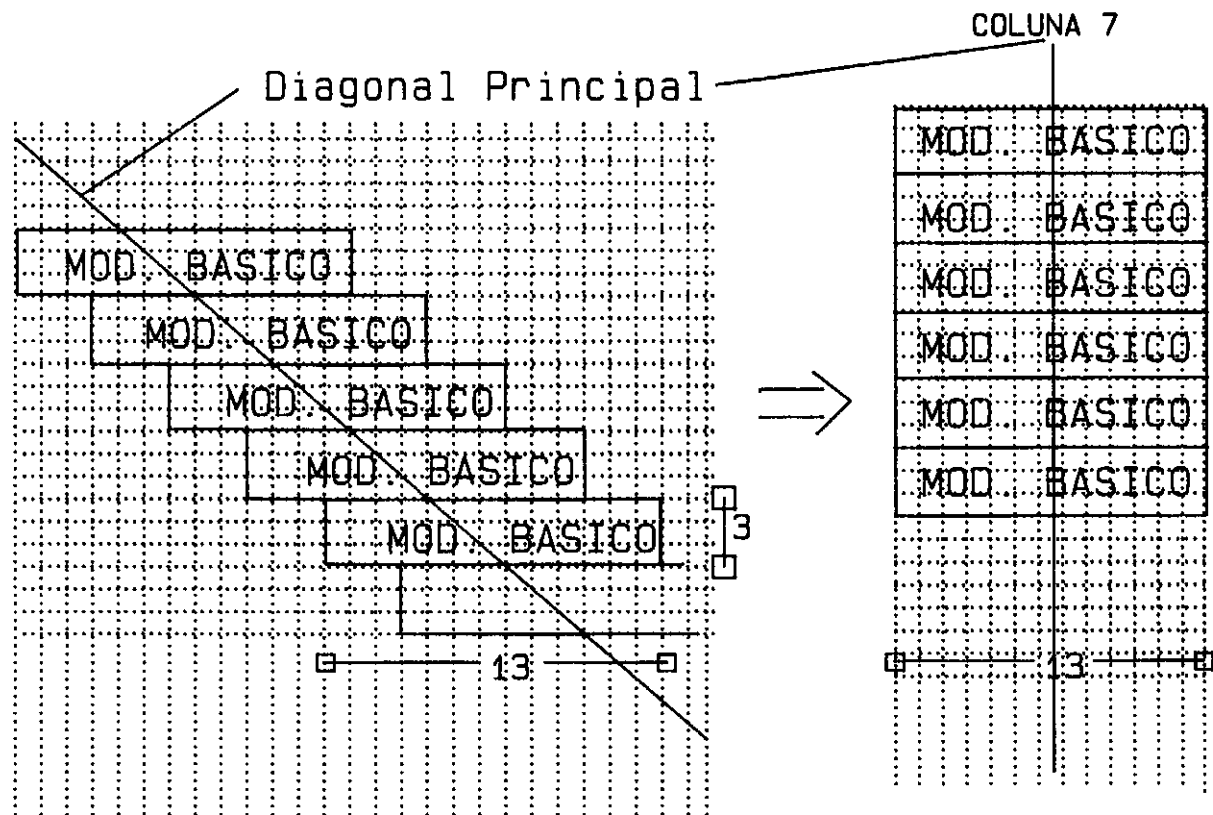
Algoritmo de formação das matrizes globais de rigidez de massa

O algoritmo usado gera as matrizes globais de rigidez e de massa em banda, tomando como referência a diagonal principal, que fica posicionada na sétima coluna das matrizes retangularizadas.

Na figura (A.3), se esquematiza a formação das matrizes em banda.

Uma vez geradas as matrizes globais, a resolução do problema de autovalor foi feita através do método *Inverse Power Iteration* com acelerador de Doolittle, cujas subrotinas são apresentadas no livro *Eigenvalue Algebraic Problems* [10] de Wilkinson.

Com o objetivo de generalizar o programa e verificar a convergência, foi considerado também, o caso de extremo simples



MATRIZ GLOBAL

MATRIZ EM BANDA

FIG.A.3. ESQUEMA DE FORMACAO DAS MATRIZES EM BANDA

mente apoiado.

Simplesmente apoiado

$$N_x = V = W = M_x = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$N_x = U_{,x} + \frac{\nu}{R} (V_{,\theta} - W) = 0$$

$$V = 0$$

$$W = 0$$

$$M_x = W_{,xx} + \frac{\nu}{R^2} (V_{,\theta} + W_{,\theta\theta}) = 0 \quad (\text{A.8})$$

Substituindo o campo de deslocamentos (II.31) e aplicando o método das diferenças finitas, as condições (A.7) ficam:

$$U_{0+1} = U_{0-1}$$

$$V_0 = 0$$

$$W_0 = 0$$

$$W_{0+1} = -W_{0-1}$$

(A.9)