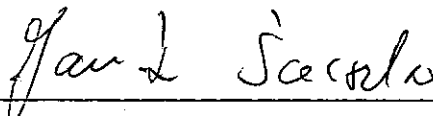


ESTUDO TEÓRICO DE UM MOTOR STIRLING DE PISTÃO LIVRE

Clarissa Lobo da Cunha Mondini Belletti

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M. Sc.) EM ENGENHARIA MECÂNICA.

Aprovada por:



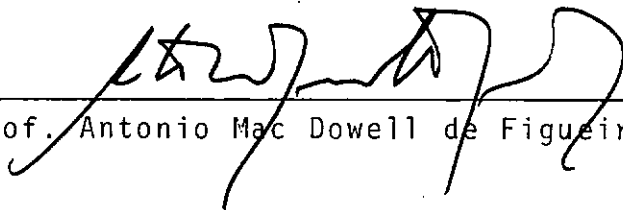
---

Prof. Jan Leon Scieszko  
(Presidente)



---

Prof. William Mittias Mansour



---

Prof. Antonio Mac Dowell de Figueiredo

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MAIO DE 1984

BELLETTI, CLARISSA LOBO DA CUNHA MONDINI

Estudo Teórico de um Motor Stirling de Pistão Livre (Rio de Janeiro) 1984

X , 181 p. 29,7 cm (COPPE-UFRJ, M. Sc., Engenharia Mecânica, 1984)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

I. Motor Stirling I. COPPE/UFRJ II. Título (Série)

À Miucha, Ana Morena e Lucia, com quem convivi nessa fase da vida, pelo companheirismo e amizade.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. W. M. Mansour, com quem iniciei este trabalho, pela oportunidade de um convívio rico em aprendizado.

Ao Prof. J. L. Scieszko, pelo seu estímulo constante, apoio indispensável, dedicação e paciência.

Ao Prof. Nisio L. C. Brum, pelo seu apoio, incentivo e ajuda nos problemas de transmissão de calor.

Ao Prof. Moyses Zindeluk, que colocou à disposição o microcomputador do laboratório com as facilidades do uso do ploter.

À minha família, pelo carinho, compreensão e apoio.

À minha irmã Carla, pelo apoio constante e ajuda na apresentação do trabalho.

Aos colegas de trabalho, Claudio, Miguel e Julio, pelas críticas construtivas.

À Daisy, pelo eficiente trabalho datilográfico.

Ao Programa de Engenharia Mecânica da COPPE/UFRJ, que possibilitou a execução deste trabalho.

RESUMO DA TESE APRESENTADA À COPPE/UFRJ COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M. Sc.)

ESTUDO TEÓRICO DE UM MOTOR STIRLING DE PISTÃO LIVRE

Clarissa Lobo da Cunha Mondini Belletti

Maio de 1984

Orientador: Jan Leon Scieszko

Programa : Engenharia Mecânica

Estudando a teoria existente sobre o Motor Stirling de Pistão livre, o modelo matemático linearizado, que fornece solução de forma fechada é analisado e novos modelos, incluindo uma não-linearidade e fenômenos inerentes ao ciclo real, são apresentados. Soluções numéricas são obtidas a partir do desempenho simulado do motor e os modelos matemáticos são avaliados e comparados entre si e com resultados experimentais. A simulação digital indicou a possibilidade de boa concordância com a experiência, caracterizando a viabilidade do uso de um modelo mais completo para uma previsão realista do desempenho do motor. O uso da teoria não-linear para a análise do ciclo termodinâmico ideal possibilitou a obtenção de soluções de forma fechada, junto com a determinação de condições para a operação satisfatória do motor.

ABSTRACT OF THESIS PRESENTED TO COPPE/UFRJ AS PARTIAL FULFILL-  
MENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE  
(M. Sc.)

THEORETICAL STUDY OF A FREE PISTON STIRLING ENGINE

Clarissa Lobo da Cunha Mondini Belletti

May 1984

Chairman: Jean Leon Scieszko

Department: Mechanical Engineering

Existing linear mathematical models for the Free Piston Stirling Engine with analytical solutions in closed form have been analysed, along with new models including one nonlinearity and some other phenomena of the real cycle. Numerical solutions are obtained based on motor simulations and the models results are compared with experiment. Good agreement is found with experiment demonstrating the adequacy of the model. The use of nonlinear theory for ideal thermodynamic cycle analysis allows the determination of conditions for the satisfactory operation of the motor.

INDICE

	<u>Pág.</u>
<u>CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO</u> .....	1
I.1 - Histórico.....	1
I.2 - Princípios Gerais de Funcionamento.....	2
I.3 - A Evolução do Motor.....	6
I.4 - O Motor Stirling de Pistão Livre.....	11
I.5 - Revisão Bibliográfica.....	18
I.6 - Objetivos do Trabalho.....	20
<u>CAPÍTULO II - O MODELO MATEMÁTICO LINEARIZADO</u> .....	22
II.1 - Considerações Gerais.....	22
II.2 - Desenvolvimento do Modelo.....	23
II.2.1 - Dinâmica do Pistão e do Deslocador.....	25
II.2.2 - Conservação de Massa.....	25
II.2.3 - Espaço de Compensação.....	26
II.2.4 - Linearização do Sistema.....	27
II.2.5 - Parâmetros de Desempenho.....	28
II.3 - Resultados.....	32
II.4 - Conclusões.....	32
<u>CAPÍTULO III - O MOTOR STIRLING DE PISTÃO LIVRE COMO CI- CLO LIMITE (UMA ABORDAGEM NÃO-LINEAR)</u> .....	35
III.1 - Considerações Gerais.....	35

	<u>Pág.</u>
III.2 - Desenvolvimento do Modelo.....	36
III.2.1 - Dinâmica do Pistão.....	38
III.2.2 - Conservação de Massa.....	40
III.2.3 - O Movimento do Deslocador.....	41
III.2.4 - Linearização da Equação de Pressão.....	42
III.2.5 - Eliminação da Variável Pressão.....	43
III.2.6 - O Deslocador como um Controlador "On-Off" com histerese.....	45
III.3 - Análise do Modelo Não-Linear.....	49
III.3.1 - O Ciclo Limite.....	49
III.3.2 - Análise do Trabalho por Ciclo.....	54
III.4 - Solução para o Sistema Não-Linear de Equações....	58
III.4.1 - Desenvolvimento da Solução.....	58
III.4.2 - Condições de Existência do Ciclo Limite.....	60
III.4.3 - Estabilidade.....	61
III.4.4 - Parâmetros de Desempenho do Motor.....	62
III.5 - Conclusões.....	66
<u>CAPÍTULO IV - O MOTOR STIRLING DE PISTÃO LIVRE: UM MODELO PARA SIMULAÇÃO DIGITAL.....</u>	<u>68</u>
IV.1 - Considerações Gerais.....	68
IV.2 - Desenvolvimento do Modelo.....	69
IV.2.1 - Os Volumes.....	70
IV.2.2 - Fluxo de Massa no Regenerador.....	71
IV.2.3 - Massa de Fluido no Regenerador.....	74



	<u>Pág.</u>
IV.2.4 - As Pressões.....	75
IV.2.5 - A Dinâmica do Pistão e do Deslocador.....	77
IV.2.6 - Os Efeitos de Mistura.....	78
IV.2.7 - O Balanço de Energia.....	81
IV.3 - Conclusões.....	90
<u>CAPÍTULO V - SIMULAÇÃO DIGITAL E ESTUDO PARAMÉTRICO.....</u>	<u>91</u>
V.1 - Modelagem para Simulação.....	91
V.2 - Os Programas Desenvolvidos para Simulação.....	94
V.3 - Simulação do Desempenho de um Motor Típico.....	97
V.3.1 - O Motor Simulado.....	97
V.3.2 - Considerações Sobre o Diagrama P-V.....	101
V.3.3 - Análise de Resultados.....	102
V.3.4 - Simulação de Condições Anormais de Operação.....	118
V.4 - Comparação de Resultados.....	120
V.5 - Conclusões.....	122
<u>CAPÍTULO VI - O MODELO MATEMÁTICO SIMPLIFICADO.....</u>	<u>124</u>
VI.1 - Considerações Gerais.....	124
VI.2 - O Sistema Simplificado de Equações.....	125
VI.3 - Simulação Digital.....	126
VI.3.1 - Desempenho Comparativo do Motor Simulado.....	127
VI.4 - Comparação de Resultados.....	134
VI.5 - Conclusões.....	136

	<u>Pág.</u>
<u>CAPÍTULO VII - CONCLUSÕES GERAIS</u> .....	137
<u>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</u> .....	140
<u>APÊNDICE A - DESENVOLVIMENTO DO MODELO MATEMÁTICO LINEARIZADO</u> .....	145
<u>APÊNDICE B - DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO MODELO NÃO-LINEAR</u> .....	160
<u>APÊNDICE C - ANÁLISE DE ESCOAMENTO COMPRESSÍVEL EM UM TUBO DE SEÇÃO CONSTANTE</u> .....	172
<u>APÊNDICE D - CONSIDERAÇÕES SOBRE A TEMPERATURA MÉDIA NO REGENERADOR</u> .....	177
<u>NOMENCLATURA</u> .....	178

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

#### I.1 - HISTÓRICO

Já se passaram mais de 160 anos desde que Robert Stirling concebeu os princípios do então chamado "Motor de Ar Quente". Stirling imaginou um motor onde a fonte quente fosse externa ao cilindro, com o fluido trabalhando em circuito fechado e deu ao problema da troca de calor uma solução elegante.

O inventor sueco John Ericsson também trabalhava em idéia semelhante, mas quando ao final do século XIX o motor de combustão interna apareceu e ainda, com o advento da distribuição de energia elétrica em torno de 1920, o motor Stirling caiu no esquecimento. Entretanto, o interesse no Ciclo Stirling não morreu e de 15 anos para cá, assistimos a um crescente esforço, em diferentes partes do mundo, no sentido de aprofundar o conhecimento e aperfeiçoar a tecnologia do Motor Stirling.

Pioneira na retomada dos estudos sobre o motor, a Philips da Holanda buscava, na época, uma solução para o problema de geração de energia para alimentação de rádio-receptores e equipamentos semelhantes, em lugares sem energia elétrica e onde o combustível necessário para o conjunto gerador seria mais fácil de se obter que baterias. Nessa época, em torno de 1938, a Philips escolheu o Motor Stirling, acreditando que, após a

introdução de técnicas mais modernas, ele seria a fonte de potência com características e propriedades mais adequadas.

Durante a 2.<sup>a</sup> Guerra Mundial, os trabalhos novamente perderam intensidade e mais tarde, as características do mercado para esse tipo de gerador se modificaram, mudando com isso os objetivos iniciais da pesquisa.

O conhecimento teórico já acumulado, entretanto, proveu meios de se reconhecer a grande potencialidade do motor, abrindo horizontes para outras aplicações, e vários modelos e configurações diferentes foram construídos e testados.

Desde então, a pesquisa continuou e se estendeu, com mais ou menos sucesso, a diferentes aplicações. O quadro da Figura (I.1) [1] ilustra as características de alguns modelos já construídos e testados em aplicações diversas.

## 1.2 - PRINCÍPIOS GERAIS DE FUNCIONAMENTO

Tal qual os motores de ciclos Otto e Diesel, o motor Stirling é uma máquina térmica de pistão. Todos três se baseiam no princípio de que trabalho será liberado do sistema se um fluido for comprimido em baixa temperatura, aquecido, expandido em alta temperatura e então resfriado para o estado inicial.







APLICAÇÕES DADOS DO MOTOR	 GRUPO GERADOR	 PEQUENOS BARCOS	 AUTOMÓVEIS	 EMBARCAÇÕES MAIORES	 ÔNIBUS URBANO	 TRATORES
Nº DE CILINDROS	2	1	4	4	4	6
POTÊNCIA MÁXIMA (KW)(INTERMITENTE*)	20	15	59*	130	147*	221*
CONSUMO ESPECÍFICO MÍNIMO (Kg/kwh)	0,250	0,245	0,250	0,225	0,230	0,230
DIMENSÕES (c x l x a) (m)	0,45 x 0,30 x 0,70	0,35 x 0,30 x 0,70	0,75 x 0,30 x 0,70	1,30 x 0,55 x 1,20	1,30 x 0,55 x 1,20	1,75 x 0,55 x 1,20

FIGURA 1.1 - QUADRO DE APLICAÇÕES.

O ciclo Stirling ideal mostrado na Figura (I.2) consiste na compressão isotérmica do fluido em baixa temperatura (a), aquecimento a volume constante (b), expansão isotérmica em alta temperatura (c) e resfriamento a volume constante (d).

Com a fonte de calor externa, o motor Stirling tem a fase em que o fluido recebe calor totalmente diversa da equivalente nos motores de combustão interna; naquele, essa troca deve ser feita através de uma parede, com energia de fonte externa ao cilindro.

Não seria, obviamente, possível aquecer e esfriar o fluido simplesmente aquecendo e esfriando a parede. Robert Stirling idealizou uma maneira de modificar periodicamente a temperatura do fluido de trabalho, fazendo com que um pistão deslocador transfira alternadamente o fluido de um espaço quente para um espaço frio, ambos a uma temperatura constante.

Se na Figura (I.3) movemos, por exemplo, o deslocador para cima, o fluido flui do espaço quente para o frio, perdendo calor durante o percurso. Se o deslocador se move para baixo, o fluido deve percorrer o caminho inverso para atingir o espaço quente; nesse percurso o fluido deve receber calor.

Os dois movimentos do deslocador serão portanto responsáveis pelas fases (b) e (d) do ciclo da Figura (I.2).

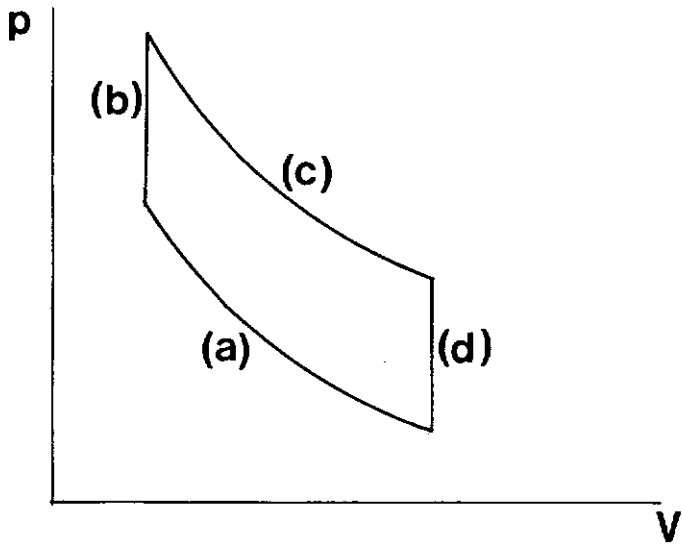


FIGURA 1.2 - CICLO STIRLING IDEAL

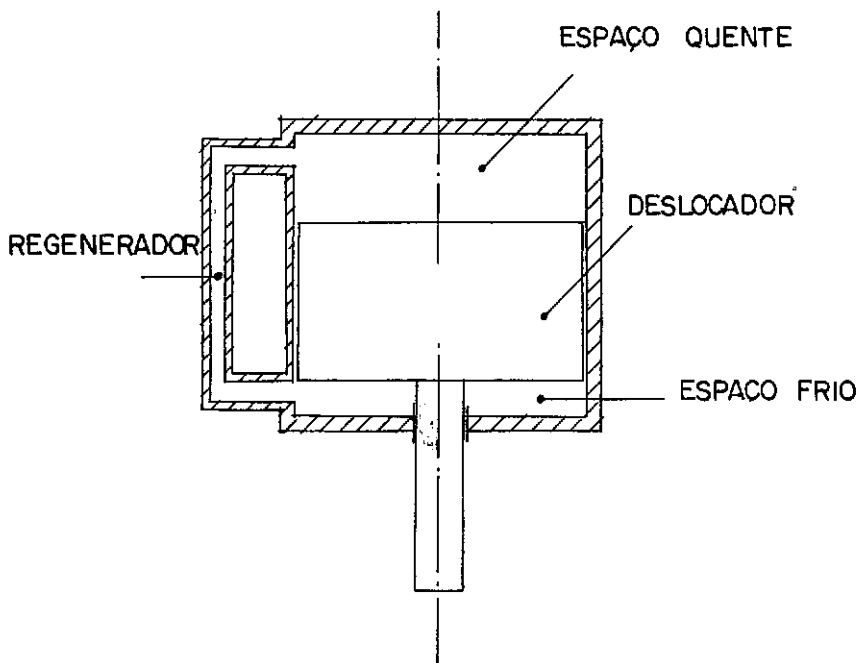


FIGURA 1.3 - PRINCÍPIO DO DESLOCADOR

Evidentemente, um aproveitamento do calor cedido numa fase do ciclo para o aumento da temperatura do fluido na outra fase, é benéfico. Esse efeito é conseguido intercalando um regenerador entre os espaços frio e quente do motor.

O regenerador tem a forma de um espaço preenchido com um elemento capaz de armazenar o calor cedido pelo fluido na fase de resfriamento para entregá-lo de volta ao fluido antes de entrar no espaço quente.

O movimento do deslocador descrito é combinado com o movimento de um pistão de potência, elemento atuante nas fases de compressão e expansão do fluido de trabalho. A Figura (I.4) mostra o esquema de um motor Stirling genérico. O volume total do fluido estará a qualquer instante distribuído em três compartimentos: os espaços quente e frio, aqui chamados de câmaras de expansão e compressão, respectivamente, e o regenerador.

Embora o princípio de funcionamento seja um só, a maneira como esses espaços estão fisicamente dispostos no motor pode variar. De acordo com o arranjo físico das partes mecânicas, o motor Stirling pode ser classificado como sendo dos tipos  $\alpha$ ,  $\beta$  ou  $\gamma$ , como mostrado na Figura (I.5).

### I.3 - A EVOLUÇÃO DO MOTOR

Com o avanço dos estudos sobre o motor, verificou-se que um aumento da pressão média do meio possibilitaria a



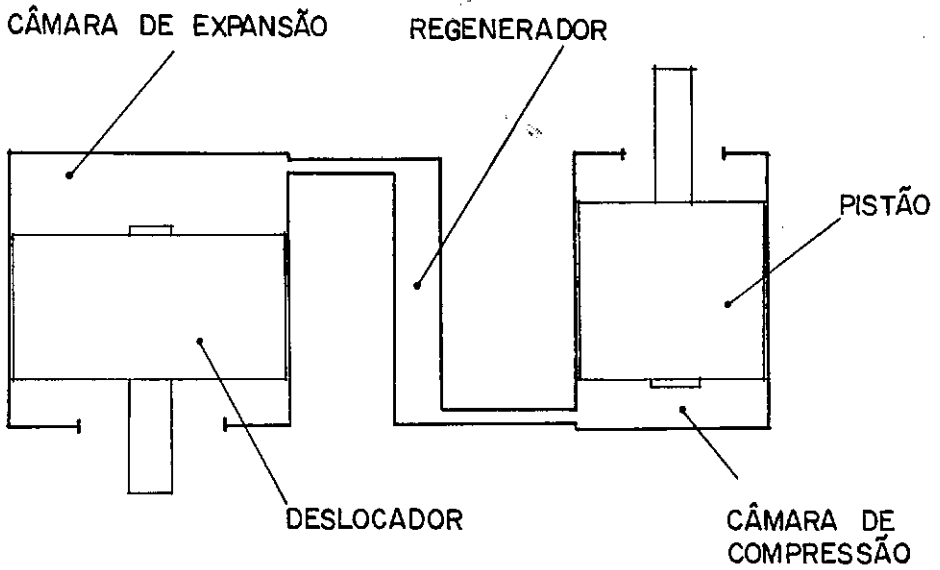


FIGURA 1.4 - MOTOR STIRLING GENÉRICO

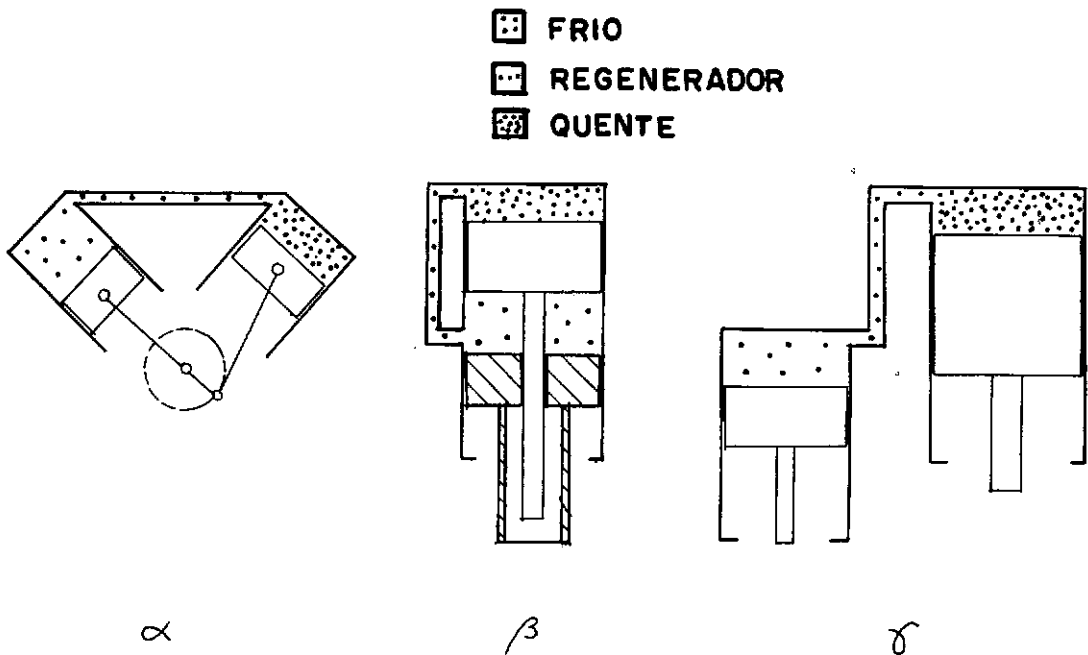


FIGURA 1.5 - AS CONFIGURAÇÕES  $\alpha$ ,  $\beta$  E  $\delta$

construção de modelos mais potentes. O desejo de aumentar a pressão do fluido de trabalho trazia algumas implicações. A transformação do movimento do pistão em um movimento rotativo minimizando as fugas, a selagem do motor, as forças unidirecionais do pistão e a defasagem pistão/deslocador eram problemas a serem enfrentados.

O desenvolvimento da tecnologia do motor foi durante algum tempo o resultado de pesquisas direcionadas para a obtenção de potência em eixo rotativo.

Numa das primeiras tentativas de se ter um motor com pressão média do meio mais alta e saída de potência em eixo rotativo foram projetados os motores com carter pressurizado (Figura (I.6)) e de dupla ação (Figura (I.7)).

Grande avanço no sentido de solucionar os problemas de fugas e balanceamento foi dado quando em 1953 foi inventado o mecanismo "Rhombic-Drive" mostrado na Figura (I.8). Esse mecanismo permitiu o balanceamento completo, inclusive do motor monocilíndrico, e consiste basicamente de dois conjuntos biela-manivela simetricamente arranjados em torno do eixo central, interligados por um par de engrenagens. O movimento simétrico e sincronizado e o arranjo coaxial dos eixos do pistão e do deslocador, simplificou a selagem do motor, possibilitou a determinação de uma defasagem fixa pistão/deslocador e facilitou a execução de projetos de motores mais potentes.

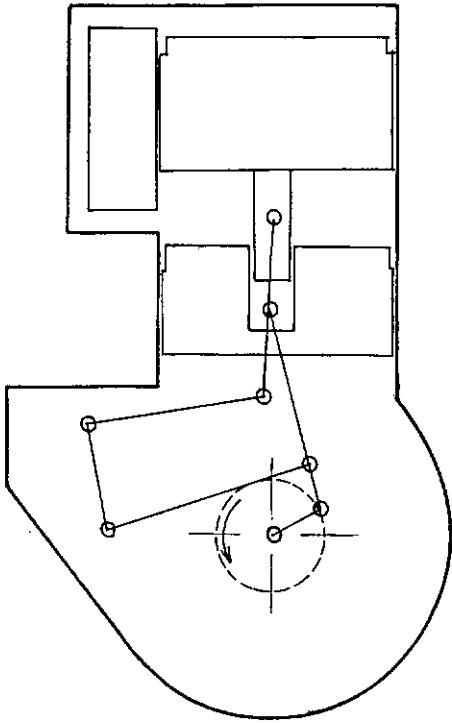


FIGURA I.6 - MOTOR COM CARTER PRESSURIZADO

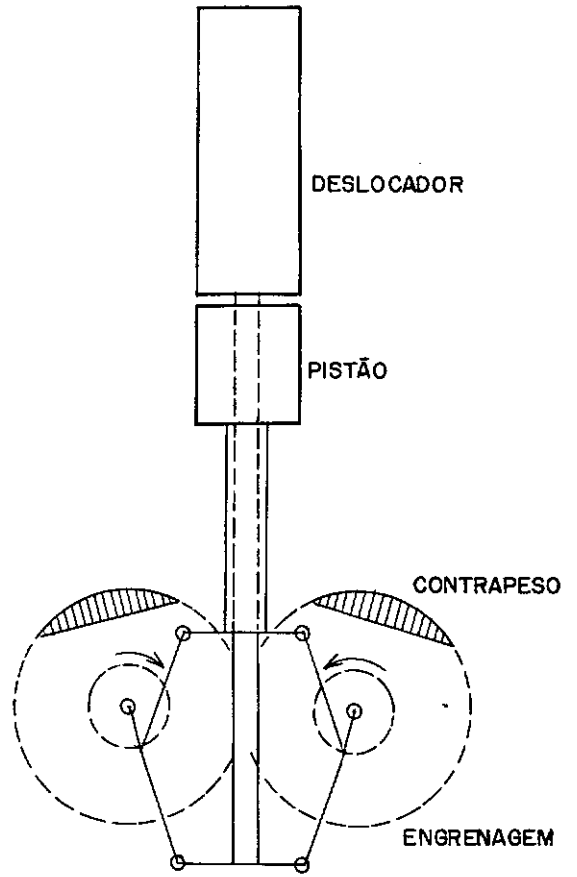


FIGURA I.8 - O MECANISMO "RHOMBIC - DRIVE"

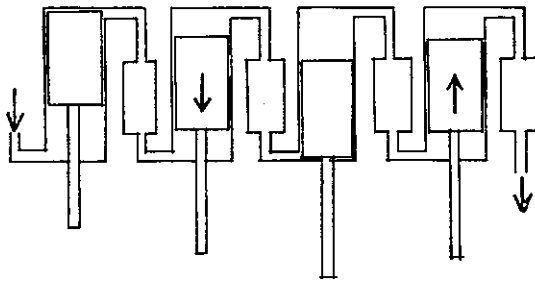


FIGURA I.7 - MOTOR DE DUPLA AÇÃO

Um selo para o eixo do deslocador, embutido no eixo do pistão e outro para o próprio eixo do pistão foram suficientes para isolar o interior do motor; um pequeno espaço pressurizado ("bounce space") aqui chamado de espaço de compensação, deve ser incluído para que o motor opere com pressão média do fluido maior que a pressão atmosférica.

Mais recentemente, com o objetivo de estudar o motor Stirling visando aplicações onde não seja necessária a tomada de potência em eixo rotativo, iniciou-se um trabalho de desenvolvimento do chamado "Free-Piston Stirling Engine" ou "Motor Stirling de Pistão Livre".

O motor Stirling de Pistão Livre tem a mesma configuração do "motor tipo deslocador", sem ter porém os eixos dirigidos, isto é, sem o "Rhombic-Drive" ou qualquer outro mecanismo análogo ao sistema biela-manivela; o movimento linear alternativo do pistão é aproveitado diretamente.

Atualmente, duas linhas de pesquisa trabalham paralelamente no aperfeiçoamento da tecnologia do motor Stirling: uma estudando a configuração com eixos dirigidos ("Rhombic Drive" e outras), visando principalmente a aplicação em propulsão de veículos; outra, estudando o Motor Stirling de Pistão Livre, visando principalmente a aplicação em geração de energia elétrica e bombeamento.

#### I.4 - O MOTOR STIRLING DE PISTÃO LIVRE

Durante a maior parte da história do desenvolvimento do motor Stirling, os pesquisadores se concentraram em encontrar soluções para os problemas surgidos durante a evolução do motor com eixos dirigidos. Para esse caso particular, grande desenvolvimento tecnológico foi atingido, sofisticadas soluções vieram acrescentar melhorias ao motor e vários modelos foram construídos e testados.

De modo diverso, o interesse no Motor Stirling de Pistão Livre surgiu mais recentemente, quando, com a crise de energia que o mundo assistiu, formas não-convencionais de geração de potência mecânica foram valorizadas. Nesse contexto, a atenção sobre essa configuração do motor surgiu a partir de três atrativos básicos:

- a) a eficiência térmica do motor que, teoricamente, pode se igualar à eficiência de Carnot, se a regeneração for perfeita;
- b) o fornecimento de calor que, sendo externo ao motor, possibilita grande versatilidade na escolha da fonte quente (inclusive fontes alternativas de energia);
- c) o baixo custo do motor devido a grande simplicidade dessa configuração.

Relativamente ao motor Stirling de eixos dirigidos, algumas características deixam o motor Stirling de Pistão Livre em boa posição.

- a ausência de mecanismo de transformação do movimento do pistão torna o motor mais simples
- o controle de potência, que exige uma instalação complexa no caso de ser feito através da pressão média do fluido de trabalho como nos motores de eixos dirigidos, no caso do motor de pistão livre, pode ser feito através da modulação da amplitude do pistão ou do deslocador, com maior simplicidade.

Nesse contexto, o motor Stirling de pistão livre foi escolhido para objeto desse estudo, já que as características apresentadas por essa forma de geração de potência mecânica pareceram bastante adequadas para o caso brasileiro.

O Motor Stirling de Pistão Livre na configuração a ser estudada aqui está mostrada na Figura (I.9). Aqui, o deslocador separa a câmara de expansão da câmara de compressão, que é fechada pelo outro lado pelo pistão de potência, ligado à carga. Em volta dessa câmara, na sua porção mais inferior, um refrigerante circula, retirando calor da parede da câmara, a fim de manter a temperatura constantemente baixa nessa região do motor.

O calor de fonte externa é recebido através da pa

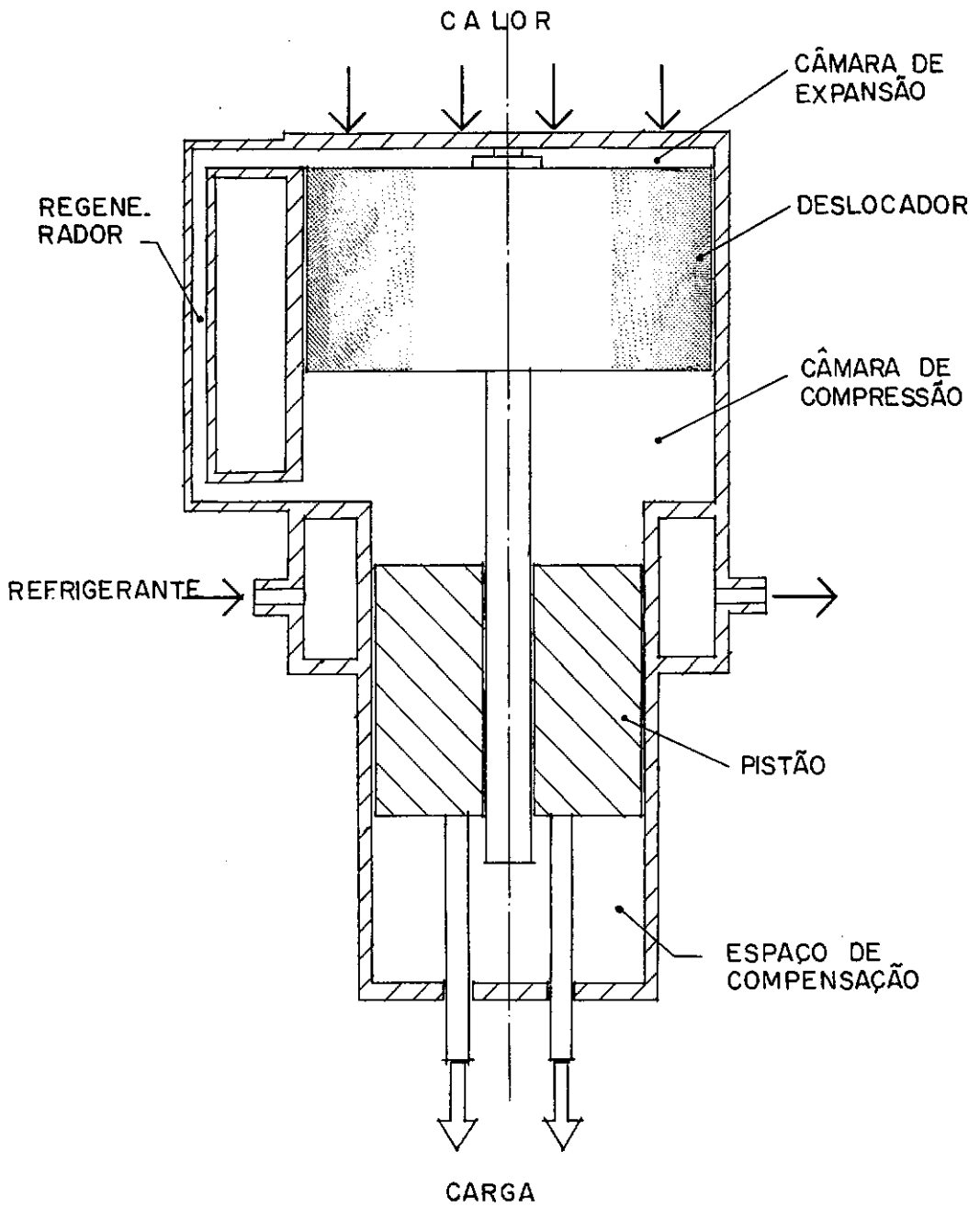


FIGURA 1.9 - O MOTOR STIRLING DE PISTÃO LIVRE.

rede do cabeçote, mantendo sempre alta a temperatura do fluido desse lado do motor.

A circulação do fluido entre as câmaras é feita via regenerador, que recebe e armazena parte do calor do fluido, quando este circula da câmara de expansão para a câmara de compressão, para devolvê-lo mais tarde numa proporção relevante, quando o fluido circula no sentido inverso.

Para uma fácil compreensão do princípio de funcionamento do Motor Stirling de Pistão Livre, podemos admitir inicialmente que as pressões nas câmaras de compressão e expansão são iguais; nesse caso, o movimento do deslocador será comandado pela diferença de pressões atuando na seção da haste do deslocador. Para o caso do motor aberto para a atmosfera, isto é, sem espaço de compensação, a parte inferior da haste do deslocador, assim como a base do pistão, estão expostos à pressão atmosférica.

As Figuras (I.10.a) e (I.10.b) ilustram as fases do ciclo pelo qual todo o sistema passa, se os movimentos forem assumidos como descontínuos, para maior clareza.

No ponto (1) das Figuras (I.10.a) e (I.10.b) o pistão está iniciando a fase de compressão. O fluido de trabalho está praticamente todo do lado frio e a pressão ( $p$ ) do fluido de trabalho deve estar menor que a pressão atmosférica ( $p_0$ ). O pistão comprimirá o fluido até ( $p$ ) se igualar a ( $p_0$ ) (ponto 2). Pas



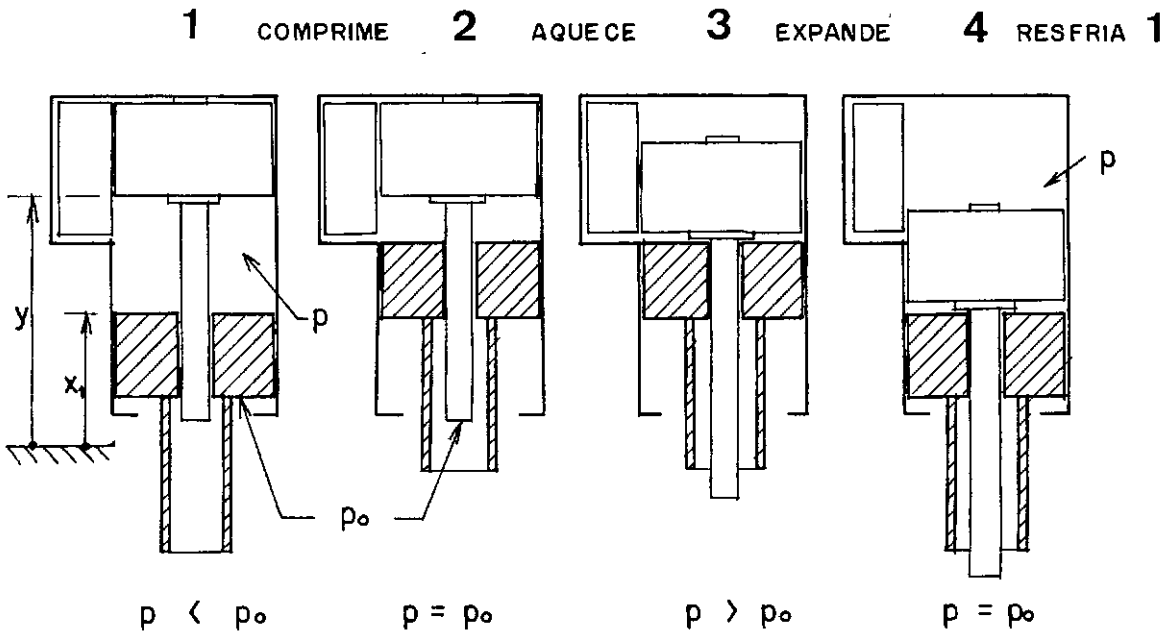


FIGURA 1.10.a - ESQUEMA DE POSIÇÕES NAS FASES DO CICLO

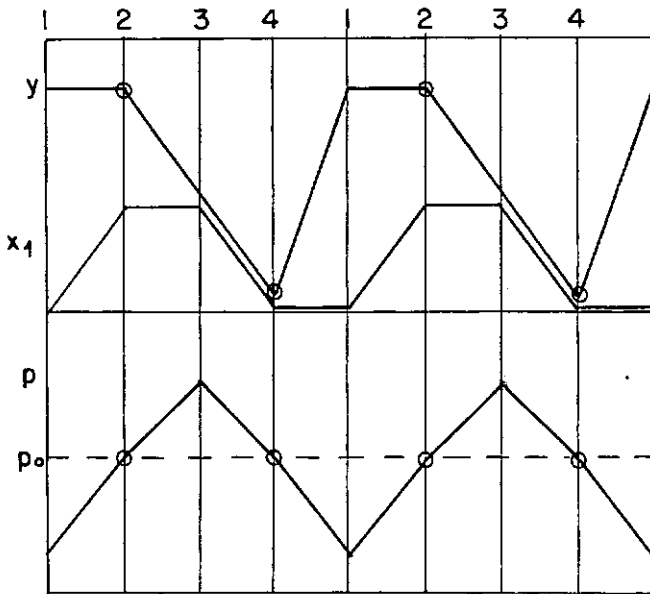


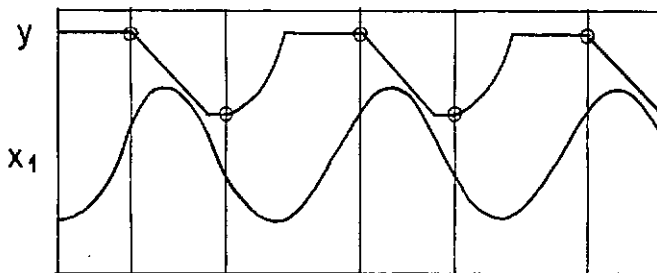
FIGURA 1.10.b - EVOLUÇÃO DE DESLOCAMENTOS E PRESSÃO

sando desse ponto, a diferença ( $p - p_0$ ) será positiva e o deslocador será impelido para baixo. O movimento descendente do deslocador caracteriza a fase de aquecimento. A maior parte do fluido é então transferida para o lado quente do motor, provocando um aumento na pressão ( $p$ ) (ponto 3). Com a pressão ( $p$ ) agora bem maior do que ( $p_0$ ), o pistão será impulsionado para baixo, aumentando o volume total deslocado e diminuindo a pressão ( $p$ ). Nessa fase de expansão, o deslocador acompanhará o pistão até que a pressão se iguale novamente à pressão atmosférica (ponto 4). Passando desse ponto, o deslocador iniciará o seu movimento ascendente, transferindo o fluido novamente para a câmara de compressão, a temperatura baixa, provocando uma queda de pressão (ponto 1). Com a pressão ( $p$ ) agora bem menor que a pressão atmosférica, o pistão será novamente impulsionado para cima, iniciando um novo ciclo.

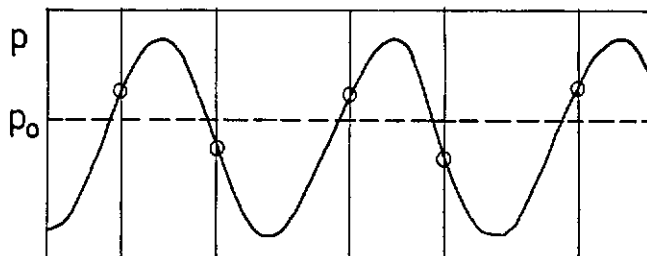
Na realidade, levando em conta a inércia do pistão e o limite físico para a posição de mínimo do deslocador, os deslocamentos e a pressão evoluirão como nas Figuras (I.11.a) e (I.11.b).

Deve-se notar que o efeito do peso do pistão desloca, nesse caso, a pressão média do ciclo para um valor pouco menor que o da pressão atmosférica.

Como já mencionado, a pressão média do fluido de trabalho é um parâmetro decisivo para a potência do motor; motores que operam com pressões médias bem maiores que a pressão at-

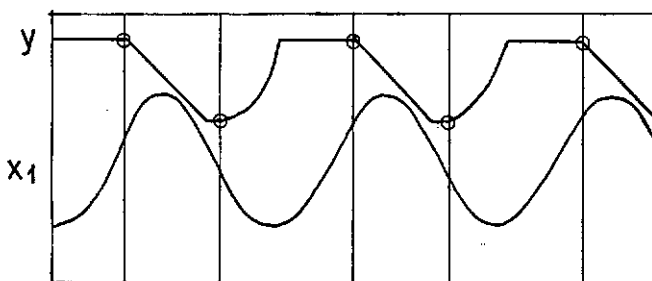


(a) DESLOCAMENTOS

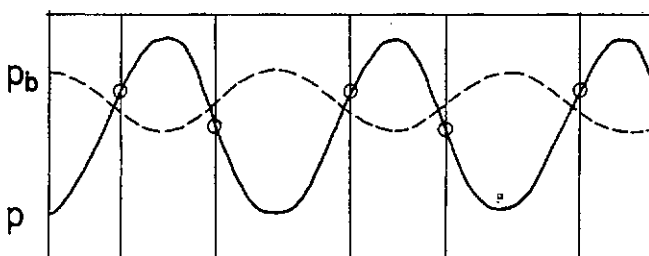


(b) PRESSÃO

FIGURA 1.11 - DESLOCAMENTOS E PRESSÃO NO CICLO REAL



(a) DESLOCAMENTOS



(b) PRESSÃO

FIGURA 1.12 - DESLOCAMENTOS E PRESSÃO PARA O MOTOR COM ESPAÇO DE COMPENSAÇÃO.

mosférica, terão o movimento do deslocador comandado pela diferença entre as pressões do fluido de trabalho e do espaço de compensação ( $p_b$ ). A pressão do espaço de compensação, localizado logo abaixo do pistão, como na Figura (I.9), atuará de maneira análoga à pressão atmosférica no motor aberto, sendo que nesse caso será variável e defasada da curva de pressão do fluido de trabalho. Quando o pistão sobe diminuindo o volume total do fluido na compressão, aumenta o volume do espaço de compensação, aliviando a pressão ( $p_b$ ) e vice-versa.

Nas Figuras (I.12.a) e (I.12.b) estão mostradas as curvas de deslocamentos e pressões para o motor com espaço de compensação.

## I.5 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Com o advento da crise mundial de energia na década de setenta, grande interesse foi despertado em torno do motor Stirling para aplicação em automotores, geração de energia elétrica, utilização da energia solar etc., e a pesquisa se estendeu a muitos outros campos.

A evidência desse interesse está no grande número de artigos publicados no 14<sup>th</sup> IECEC em 1979, quando foram apresentados trabalhos relativos aos estudos teórico e experimental do motor.

No que diz respeito ao estudo teórico do motor, os métodos de análise tem sido divididos em três classes ou níveis de sofisticação: as análises de 1º, 2º e 3º nível.

Inicialmente proposto por Schmidt <sup>[2]</sup>, o modelo matemático de 1º nível que emprega a análise do ciclo ideal, foi posteriormente revisto e modificado por Berchowitz et alia <sup>[3]</sup>, Beans <sup>[8]</sup> e outros <sup>[9]</sup>, <sup>[10]</sup>, <sup>[11]</sup>, mantendo, porém, as hipóteses da análise ideal.

Amplamente discutido por Urieli <sup>[12]</sup> e outros <sup>[13]</sup>, <sup>[14]</sup>, <sup>[15]</sup>, <sup>[16]</sup>, o método de 3º nível, emprega a análise nodal, constituindo o modelo mais rigoroso apresentado na literatura.

Na busca de um método mais simples, que pudesse ser repetidamente empregado na otimização do projeto, Martini <sup>[17]</sup>, <sup>[18]</sup> introduziu o modelo de 2º nível, evitando a complexidade e os largos tempos de processamento do modelo de 3º nível e incorporando ao modelo isotérmico de 1º nível não-linearizado relações que contabilizam alguns efeitos não equacionados pela análise ideal.

A tecnologia e as aplicações do motor Stirling de pistão livre foram resumidas por Goldwater <sup>[19]</sup> e estudando especificamente essa configuração do motor, Beale <sup>[20]</sup>, <sup>[21]</sup>, <sup>[22]</sup> descreveu os resultados de alguns modelos construídos, testados e simulados pela análise do ciclo ideal. Rauch <sup>[23]</sup> rela-

tou o desenvolvimento do projeto de um modelo do motor atuando como alternador linear e Chiu et alia <sup>[24]</sup> descreveram os resultados dos testes feitos com o motor acoplado a um compressor formando um sistema de "bomba de calor".

Junto com Beale <sup>[22]</sup>, Prast e Jonge <sup>[25]</sup> estudaram a utilização de energia solar como fonte quente para o motor Stirling de pistão livre.

No Brasil, poucos trabalhos foram publicados a respeito do motor Stirling de pistão livre. Scieszko <sup>[26]</sup> descreve os resultados obtidos nos testes feitos com um protótipo construído na UFRJ e Macedo <sup>[27]</sup> apresenta algumas equações básicas, desenvolvidas a partir de valores experimentais, para a escolha de parâmetros para o projeto do motor Stirling de pistão livre, com alternador-linear.

Mansour e Scieszko <sup>[28]</sup> apresentaram ainda o modelo matemático para o motor Stirling de pistão livre tomado como base inicial para o desenvolvimento do presente trabalho.

## I.6 - OBJETIVOS DO TRABALHO

Partindo de uma revisão geral da bibliografia disponível, um dos objetivos iniciais do trabalho foi conhecer o estado atual da teoria, analisando os principais modelos matemáticos existentes.

Uma vez estudada a teoria usualmente empregada no projeto, fazer uma análise crítica, propondo alterações e inclusões no sentido de desenvolver novos modelos matemáticos que possibilitem uma descrição mais completa do desempenho do motor, oferecendo facilidades na execução do projeto.

Uma segunda etapa do trabalho teve como objetivos principais a avaliação global desses modelos teóricos através de um estudo de caso, comparando-os entre si e com resultados experimentais, estudando a sua aplicabilidade no projeto do motor e o grau de concordância com a experiência.

Como objetivo final, este trabalho se propõe a oferecer ferramentas para a execução do projeto do motor, determinando a influência particular de alguns parâmetros no comportamento dinâmico do sistema através de um estudo paramétrico.

## CAPÍTULO II

### O MODELO MATEMÁTICO LINEARIZADO

#### II.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS

Analisando a bibliografia disponível sobre motores Stirling de pistão livre, encontra-se um modelo matemático já consagrado no estudo teórico do motor, como ferramenta usualmente utilizada para iniciar o projeto.

O modelo de primeiro nível, como é chamado, embora sujeito às limitações impostas pelas hipóteses inerentes à análise ideal, assumiu especial importância no estudo teórico do motor Stirling.

Constituindo o único modelo matemático conhecido que apresenta solução de forma fechada, esta análise resulta em expressões analíticas para frequência, potência e outros parâmetros de desempenho do motor.

Não pretendendo substituir a simulação em computador, este modelo oferece a possibilidade de uma avaliação prévia do desempenho de uma determinada configuração do motor, na fase inicial do projeto.

Embora essa modelagem seja geral, podendo ser aplicada a qualquer motor Stirling de Pistão Livre, as soluções



das equações não são gerais e dependem da configuração particular estudada. As soluções a que se chega nesse capítulo referem-se ao motor mostrado na Figura (II.1), com o referencial utilizado nessa análise.

## II.2 - DESENVOLVIMENTO DO MODELO

Para o desenvolvimento desta análise, as seguintes hipóteses são necessárias:

- (i) o fluido de trabalho na câmara quente está a uma temperatura constante  $T_e$  e na câmara fria a uma temperatura constante  $T_c$ ;
- (ii) a eficiência de regeneração é 100%;
- (iii) as perdas de carga ao longo do motor e as perdas de massa ou fugas de fluido são negligenciadas;
- (iv) o fluido de trabalho é um gás perfeito;
- (v) todos os processos são reversíveis;
- (vi) a distribuição de temperaturas ao longo do regenerador é considerada como tendo um perfil linear;
- (vii) os efeitos do campo gravitacional são desprezados;

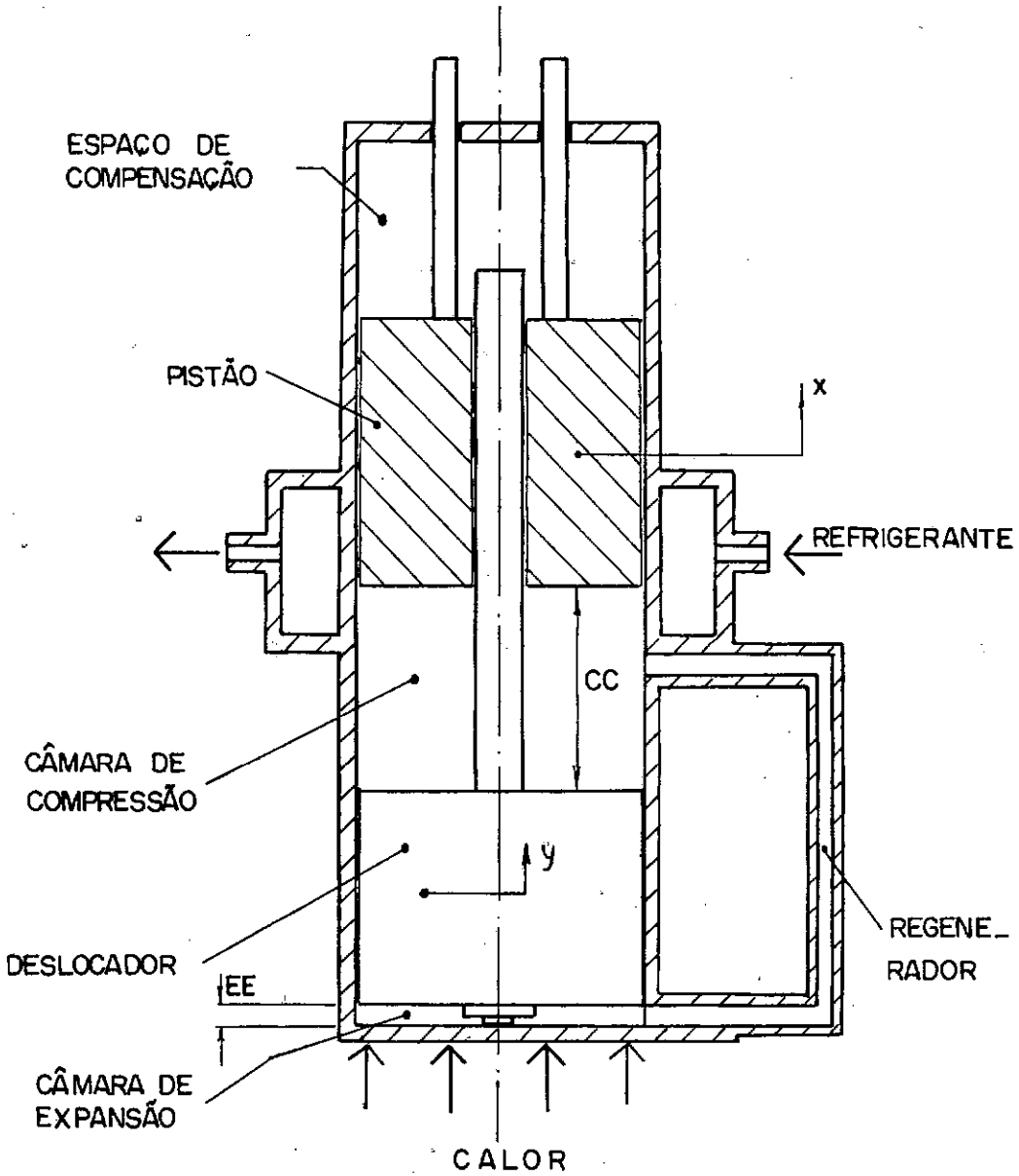


FIGURA 11.1 - REFERENCIAL E NOTAÇÕES

- (viii) o atrito entre a haste do deslocador e o pistão é desprezado;
- (ix) a carga no pistão pode ser representada por um dissipador simples, dependente da velocidade do pistão;
- (x) o espaço de compensação é considerado adiabático.

Embora não necessária para essa abordagem, foi assumido ainda que o cilindro está fixo, não se envolvendo com a dinâmica do sistema.

### II.2.1 - Dinâmica do Pistão e do Deslocador

As equações para a dinâmica do pistão e do deslocador são:

$$m_p \ddot{x} = (a_p - a_r) (p - p_b) - (f_\ell + c_1) \dot{x} \quad (\text{II.1})$$

$$m_d \ddot{y} = a_r (p - p_b) - c_2 \dot{y} \quad (\text{II.2})$$

### II.2.2 - Conservação de Massa

Expressando os volumes segundo:

$$V_e = a_d (EE + y) \quad (\text{II.3})$$

$$V_c = (a_p - a_r) (CC + x) - (a_d - a_r) y \quad (\text{II.4})$$

$$V_g = a_g \cdot \ell_g \quad (\text{II.4.a})$$

e aplicando a conservação de massa

$$m_e + m_c + m_g = m_a \quad (\text{II.4.b})$$

pode-se encontrar uma equação para a pressão (p):

$$p = m_a R / [V_e/T_e + V_c/T_c + V_g \ln(T_e/T_c)/(T_e - T_c)] \quad (\text{II.5})$$

Aqui, a massa ( $m_g$ ) do fluido no regenerador foi encontrada integrando-se uma massa infinitesimal ( $dm_g$ ) ao longo do regenerador de seção constante ( $a_g$ ), com um perfil linear de temperatura. Esse procedimento está descrito com detalhes no Apêndice A.

### II.2.3 - Espaço de Compensação

Para o espaço de compensação, considerado adiabático, temos:

$$V_b = V_B - (a_p - a_r)x - a_r \cdot y \quad (\text{II.6})$$

e

$$p_b = \bar{p} \cdot (V_B/V_b)^\gamma \quad (\text{II.7})$$

onde  $V_B$  é um volume de referência correspondente ao valor de  $V_b$  quando o espaço de compensação está a pressão média do fluido ( $\bar{p}$ ).

#### II.2.4 - Linearização do Sistema

Substituindo as expressões (II.3) a (II.7) nas equações (II.1) e (II.2) temos:

$$\ddot{x} = - \frac{(f_{\ell} + C_1)}{m_p} \dot{x} + (a_p - a_r) [f_1(x, y) - f_2(x, y)]$$

$$\ddot{y} = - \frac{C_2}{m_d} \dot{y} + a_r [f_1(x, y) - f_2(x, y)]$$

onde:

$$f_1(x, y) = m_a R / \{ a_d (EE + y) / T_e + [(a_p - a_r) P (CC + x) - (a_d - a_r) y] / T_c + V_g \ln(T_e / T_c) / (T_e - T_c) \} \quad (II.8)$$

e

$$f_2(x, y) = \bar{p} V_B^{\dot{y}} / [V_B - (a_p - a_r)x - a_r y]^{\gamma} \quad (II.9)$$

A linearização das funções (II.8) e (II.9), expandindo em séries de Taylor em torno do ponto de operação e a solução para o sistema linearizado estão desenvolvidas no Apêndice A.

As equações linearizadas são:

$$\ddot{x} = a_1 \dot{x} + a_2 x + a_3 y + a_4 \quad (A.6)$$

$$\ddot{y} = b_1 \dot{y} + b_2 y + b_3 x + b_4 \quad (\text{A.7})$$

onde  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  e  $b_3$  estão definidos no Apêndice A.

E as soluções são:

$$x = CC \text{ sen}(wt + \phi) \quad (\text{A.16})$$

e

$$y = EE \text{ sen}(wt) \quad (\text{A.17})$$

com:

$$CC = EE \cdot a_3 / [(-w^2 - a_2)^2 + (a_1 w)^2]^{1/2} \quad (\text{A.15})$$

$$w = (a_1 b_1 - a_2 - b_2)^{1/2} \quad (\text{A.11})$$

e

$$w = [-(a_2 b_1 + a_1 b_2) / (a_1 + b_1)]^{1/2} \quad (\text{A.12})$$

$$\phi = \text{tg}^{-1} [-a_1 w / (w^2 + a_2)] \quad (\text{A.14})$$

O sistema se resolve se a frequência de operação satisfizer simultaneamente as equações (A.11) e (A.12).

## II.2.5 - Parâmetros de Desempenho

Os volumes deslocados nas câmaras serão:

- Expansão:

$$V_e = (VE/2) (1 + \text{sen } wt) \quad (\text{A.18})$$

- Compressão:

$$V_c = (VC/2) [1 + \text{sen}(wt - \alpha)] \quad (\text{A.20})$$

onde:

$$VE = 2 a_d EE \quad (\text{A.19})$$

$$VC = 2(a_p - a_r) \cdot [(CC \text{ sen } \phi)^2 + (CC \cdot \text{cos } \phi - EE)^2]^{1/2} \quad (\text{A.22})$$

e

$$\alpha = \text{tg}^{-1} [-CC \text{ sen } \phi / (CC \text{ cos } \phi - EE)] \quad (\text{A.21})$$

Para a pressão (p) e para a pressão média ( $\bar{p}$ ) do fluido de trabalho tem-se:

$$p = m_a R / \{s [1 + a/s \text{ cos}(wt + \beta)]\} \quad (\text{A.23})$$

e

$$\bar{p} = m_a R / [s(1 - a^2/s^2)^{1/2}] \quad (\text{A.27})$$

onde:

$$s = VE/2T_e + VC/2T_c + [V_g \ln(T_e/T_c)](T_e - T_c) \quad (\text{A.24})$$

$$a/s = [(\cos \alpha + \varepsilon/\tau)^2 + \text{sen}^2 \alpha]^{1/2} / [\varepsilon/\tau + 2\rho(\ln \tau)/(\tau-1)+1] \quad (\text{A.25})$$

e

$$\beta = \text{tg}^{-1} [(\cos \alpha + \varepsilon/\tau)/\text{sen} \alpha] \quad (\text{A.26})$$

com  $\varepsilon = VE/VC$ ,  $\tau = T_e/T_c$  e  $\rho = V_g/V_c$

Fazendo-se:

$$\cos(\omega t + \beta) = -1$$

na equação da pressão ( $p$ ) obtem-se a pressão máxima do ciclo:

$$p_{m\bar{x}} = m_a R / [s(1-a/s)] \quad (\text{A.28})$$

ou ainda em termos da pressão média ( $\bar{p}$ ),

$$p_{m\bar{x}} = \bar{p} [s(1-a^2/s^2)]^{1/2} / (s-a)$$

A integral de  $p dV_e$  no ciclo nos dará o calor transferido na câmara de expansão ( $Q_e$ ):

$$Q_e = VE p_{m\bar{x}} \delta_{\star} \cos \beta \quad (\text{A.30})$$

onde

$$\delta_{\star} = \pi(s/a-1) [1-1/(1-a^2/s^2)]^{1/2} \quad (\text{A.29})$$



Em procedimento análogo encontra-se o calor transferido na câmara de compressão ( $Q_c$ ):

$$Q_c = VC p_{m\bar{a}x} \delta_* \cos(\beta + \alpha) \quad (\text{A.31})$$

Somando-se as expressões (A.30) e (A.31) obtém-se o trabalho por ciclo:

$$w = p_{m\bar{a}x} \delta_* [VE \cos \beta + VC \cos(\alpha + \beta)] \quad (\text{A.32})$$

A eficiência térmica do ciclo será a eficiência de Carnot já que foi suposto regeneração perfeita:

$$\eta = (\tau - 1)/\tau \quad (\text{A.33})$$

Os parâmetros do desempenho do motor podem ser adimensionalizados, ficando funções apenas de  $\epsilon$ ,  $\rho$ ,  $\tau$  e  $\alpha$ :

$$p^* = p/p_{m\bar{a}x} = (1 - a/s) / [1 + (a/s) \cos(\omega t + \beta)] \quad (\text{II.10})$$

$$Q_e^* = Q_e / (VT p_{m\bar{a}x}) = \epsilon \delta_* \cos \beta / (1 + \epsilon) \quad (\text{II.11})$$

$$Q_c^* = Q_c / (VT p_{m\bar{a}x}) = \delta_* \cos(\beta + \alpha) / (1 + \epsilon) \quad (\text{II.12})$$

e

$$w^* = w / (VT p_{m\bar{a}x}) = \delta_* [\epsilon \cos \beta + \cos(\alpha + \beta)] / (1 + \epsilon) \quad (\text{II.13})$$

onde  $VT = VE + VC$

### II.3 - RESULTADOS

A dependência da frequência ( $w$ ) em relação à carga ( $f_\ell$ ) foi obtida por Berchowitz e Wyatt-Mair <sup>[3]</sup> para um motor típico como o da Figura (II.1) e está reproduzida na Figura (II.2). Embora a frequência cresça inicialmente com a carga, a amplitude do pistão ( $CC$ ) e o trabalho por ciclo ( $W$ ) decrescem sempre, fazendo com que o máximo da curva de potência aconteça antes do máximo da curva de frequência.

Berchowitz e Wyatt-Mair <sup>[3]</sup> apresentaram ainda as curvas generalizadas mostradas na Figura (II.3). Como o trabalho por ciclo adimensionalizado, (equação (II.13)) depende apenas das relações  $\epsilon$ ,  $\rho$ ,  $\tau$  e  $\alpha$ , otimizando-se  $w^*$  em relação a  $\epsilon$  e a  $\alpha$ , uma vez conhecidos  $\rho$  e  $\tau$ ,  $\epsilon$ ,  $\alpha$  e  $w^*$  estão unicamente determinados para o motor mais compacto.

### II.4 - CONCLUSÕES

Tudo indica que as hipóteses baseadas no ciclo ideal resultam numa previsão otimista do desempenho do motor. Segundo Walker <sup>[4]</sup>, fatores de correção de 0.5 a 0.7 devem ser aplicados à potência prevista pelo modelo matemático linearizado, para que sejam obtidos resultados mais realistas.

Os resultados apresentados por Berchowitz e Wyatt-Mair <sup>[3]</sup> são, entretanto, úteis na primeira etapa do projeto do motor, após a qual uma simulação completa da operação do

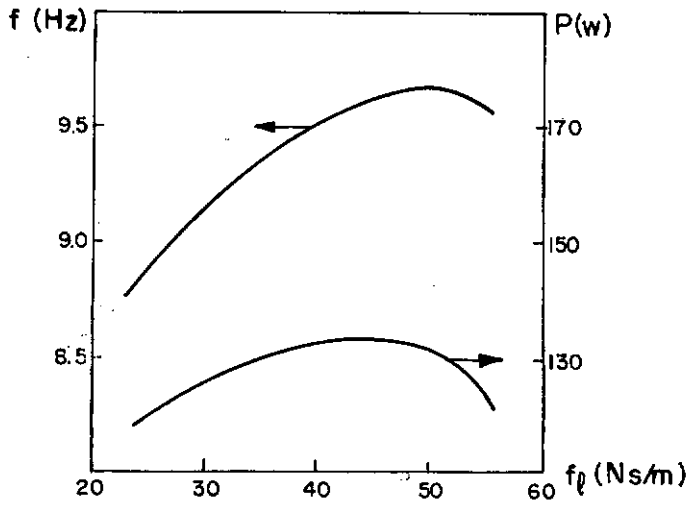


FIGURA 11.2 - CURVAS CARACTERÍSTICAS

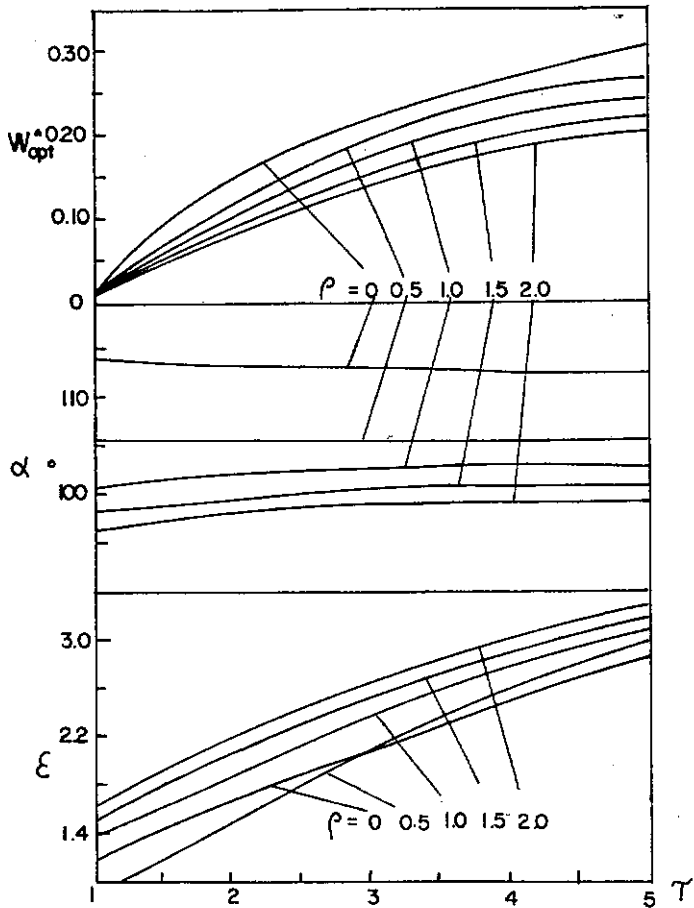


FIGURA 11.3 - CURVAS GENERALIZADAS

motor é recomendada.

As soluções a que se chega através dessa análise estão até certo ponto limitadas pela linearização imposta ao modelo, parecendo ser viável a obtenção de soluções analíticas simples para os parâmetros de desempenho do motor, levando em conta pelo menos uma não-linearidade do sistema.

### CAPÍTULO. III

#### O MOTOR STIRLING DE PISTÃO LIVRE COMO CICLO LIMITE (UMA ABORDAGEM NÃO-LINEAR)

##### III.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS

Através da análise linear feita no capítulo anterior, foi obtida uma solução senoidal para descrever o comportamento do deslocador dentro do sistema.

Na prática, o movimento do deslocador é descontínuo, com subidas e descidas rápidas, para que transfira o fluido de trabalho de uma câmara para outra em tempo curto, ou seja, enquanto o pistão varia pouco o volume total do fluido, aproximando as fases de aquecimento e resfriamento de processos isométricos.

Neste capítulo esse fenômeno do ciclo real será analisado.

A consideração dos efeitos relativos a outros fenômenos que ocorrem no ciclo Stirling real forneceria, sem dúvida, uma descrição mais realista do comportamento dinâmico do motor. A introdução de tais efeitos, como será visto no Capítulo IV, são possibilita, entretanto, soluções numéricas.

Os métodos numéricos constituem ferramentas bastante poderosas, especialmente quando utilizados através de computa-

dores de grande porte. Infelizmente, como aponta Mansour [30], a solução numérica não revela muito sobre a influência particularmente exercida pelos diferentes parâmetros do sistema na resposta. Em outras palavras, essa é uma boa solução para um caso particular apenas e nenhuma generalização pode ser feita.

Por esse motivo, levando em conta apenas o ciclo ideal, o motor Stirling de pistão livre será tratado nesse capítulo, através da teoria não-linear, com o objetivo de se obter soluções analíticas simples que revelem a função de cada parâmetro no comportamento do motor, considerando apenas uma não-linearidade do sistema: o movimento descontínuo do deslocador.

### III.2 - DESENVOLVIMENTO DO MODELO

O referencial a ser usado nesse capítulo está mostrado na Figura III.1 com as notações a serem empregadas.

Para o desenvolvimento dessa análise, as seguintes hipóteses são necessárias:

- (i) o fluido de trabalho na câmara quente está a uma temperatura constante  $T_e$ , na câmara fria a uma temperatura  $T_c$
- (ii) a distribuição de temperatura no regenerador é considerada como tendo um perfil linear
- (iii) a eficiência de regeneração é 100%

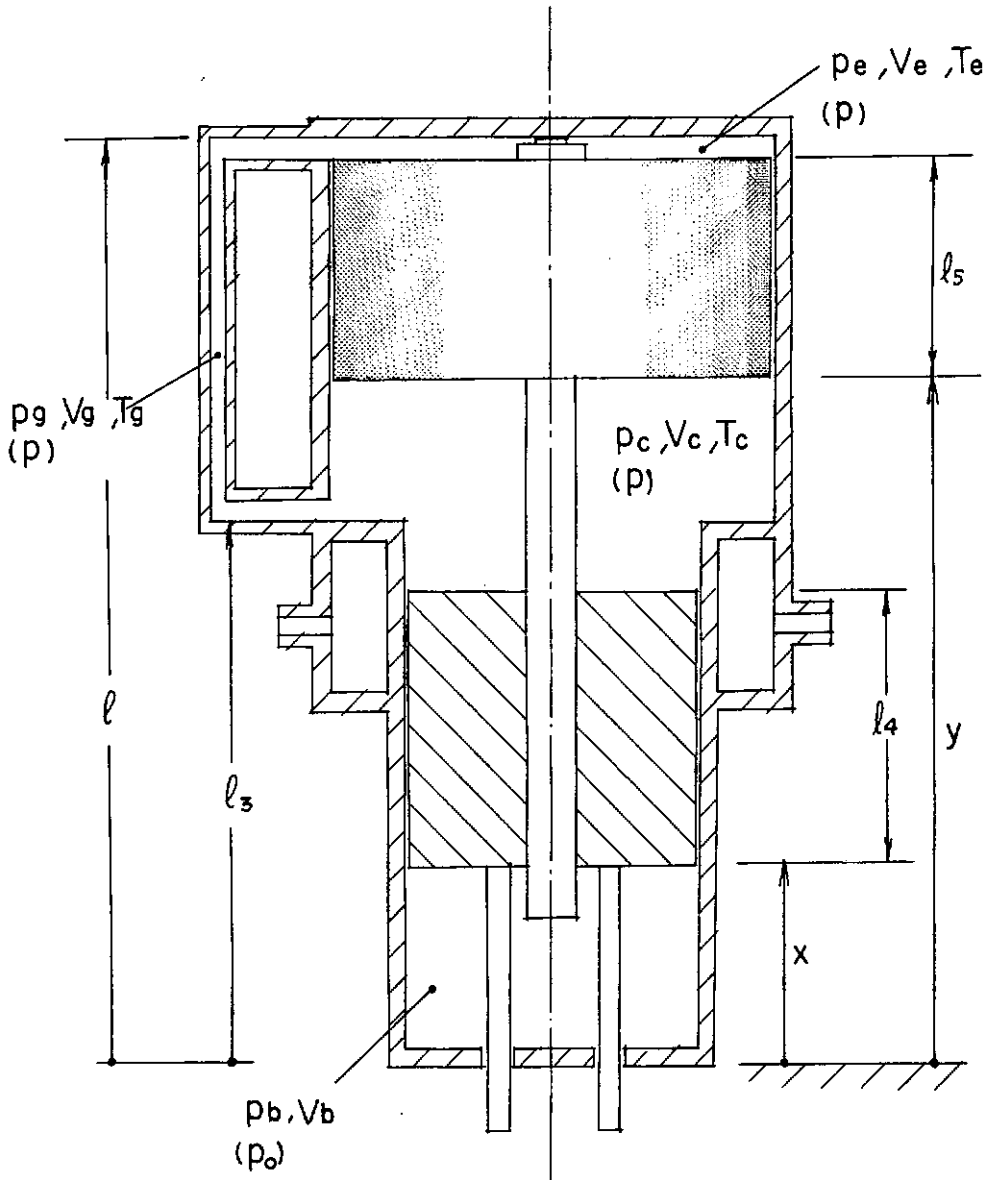


FIGURA III.1 - REFERENCIAL E NOTAÇÕES

- (iv) as perdas de carga ao longo do motor e as perdas de massa ou fugas de fluido são negligenciadas
- (v) o fluido de trabalho é um gás perfeito
- (vi) os processos termodinâmicos são reversíveis
- (vii) a carga no pistão pode ser representada por um dissipador simples, dependente da velocidade do pistão
- (viii) o atrito entre o pistão e a haste do deslocador é desprezado.

Embora não necessária para essa abordagem, a pressão de compensação será considerada constante e igual a  $(p_0)$ , ou seja, será analisado apenas o caso do motor aberto.

### III.2.1 - Dinâmica do Pistão

As forças atuando no pistão estão mostradas na Figura III.2.ã. Aplicando-se um balanço de forças ao pistão, obtém-se:

$$m_p \ddot{x} + (c_1 + f_\ell) \dot{x} + (p - p_0) (a_p - a_r) + m_p g = 0$$

ou

$$\ddot{x} + \alpha_1 \dot{x} + \alpha_2 = - \alpha_3 p \quad (\text{III.1})$$



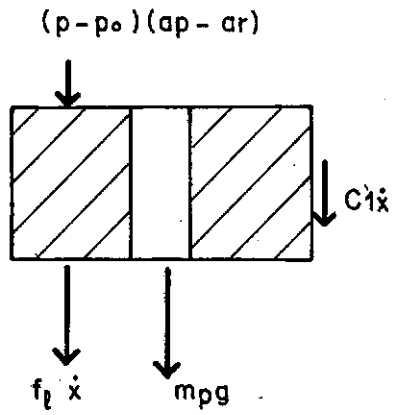


FIGURA III.2.a - DIAGRAMA DE FORÇAS ATUANDO NO PISTÃO

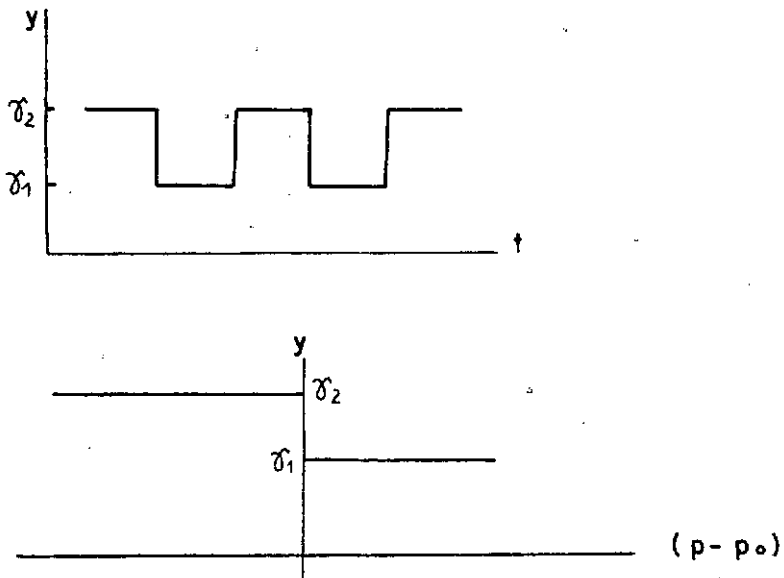


FIGURA III.2.b - O DESLOCADOR COMO UM CONTROLADOR "ON-OFF" SIMPLES

$$\text{onde } \alpha_1 = (c_1 + f_\ell)/m_p$$

$$\alpha_2 = g - \alpha_3 p_0$$

$$\alpha_3 = (a_p - a_r)/m_p$$

### III.2.2 - Conservação de Massa

Através da aplicação da equação de conservação de massa (II.4.b) encontra-se uma expressão para a pressão como mostrado no Capítulo II, equação (II.5):

$$p = m_a R / [V_e/T_e + V_c/T_c + V_g \ln(T_e/T_c)/(T_e - T_c)] \quad (\text{II.5})$$

Como os volumes são funções das posições do pistão e do deslocador, equações (B.17.a) e (B.17.b) do Apêndice B, a pressão pode ser escrita:

$$p = 1/(A - Bx + Cy) \quad (\text{III.2})$$

$$\text{onde } A = \{a_d(\ell - \ell_s)/T_e + [a_r \ell_4 - a_d \ell_3 + a_p(\ell_3 - \ell_4)]/T_c +$$

$$+ V_g \ln(T_e/T_c)/(T_e - T_c)\}/m_a R$$

$$B = [(a_p - a_r)/T_c]/m_a R$$

$$C = [(a_d - a_r)/T_c - a_d/T_e]/m_a R$$

### III.2.3 - O Movimento do Deslocador

O deslocador será modelado nessa análise como um controlador do tipo "on-off", assumindo a posição superior ( $\gamma_2$ ) se  $p < p_0$  e a posição inferior ( $\gamma_1$ ) se  $p > p_0$ , como mostrado na Figura III.2.b.

Fisicamente, a hipótese de que o deslocador sobe e desce em intervalo de tempo nulo equivale a assumir que possui massa desprezível. Realmente, a experiência mostra que nos motores Stirling, a massa do deslocador deve ser muito menor que a massa do pistão, a fim de se obter a rápida movimentação do fluido.

As equações para o movimento do deslocador são:

$$y: \gamma_2 \rightarrow \gamma_1, \text{ se } p > p_0 \text{ e } y = \gamma_2 \quad (\text{III.3.a})$$

$$y: \gamma_1 \rightarrow \gamma_2, \text{ se } p < p_0 \text{ e } y = \gamma_1 \quad (\text{III.3.b})$$

$$\text{com } \gamma_2 = \ell - \ell_5$$

$$\gamma_1 = \ell_3$$

$$\text{e } \gamma_2 > \gamma_1$$

### III.2.4 - Linearização da Equação da Pressão

No Apêndice A está mostrado o procedimento para linearização da equação da pressão (III.2) através da expansão em série de Taylor. Para essa análise, entretanto, a escolha do ponto em torno do qual a equação será expandida deve ser cuidadosa, porque a posição do deslocador ( $y$ ) é uma função descontínua e isso estaria em desacordo com as exigências para expansão em séries de Taylor. Esse problema pode ser contornado, entretanto, se o ponto escolhido representar um ponto médio da posição do deslocador como aproximação, ou seja:

$$b = (\gamma_1 + \gamma_2)/2 \quad (\text{III.4.a})$$

A posição do pistão correspondente a essa posição do deslocador pode ser escolhida supondo que, nessa condição, o pistão está imediatamente abaixo do deslocador, ou seja,

$$a = b - \ell_4 \quad (\text{III.4.b})$$

A expansão em série de Taylor em torno do ponto  $x = a$  e  $y = b$ , nos leva a:

$$p = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 \quad (\text{III.5})$$

onde:  $\beta_1 = B/D^2$ ;  $\beta_2 = -C/D^2$  e  $\beta_3 = D - \beta_1 \cdot a - \beta_2 \cdot b$  e  
 $D = 1/(A - Ba + Cb)$

### III.2.5 - Eliminação da Variável Pressão (p)

Substituindo a equação da pressão (III.5) na equação da dinâmica do pistão (III.1) tem-se:

$$\ddot{x} + \alpha_1 \dot{x} + \alpha_2 = -\alpha_3(\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3) \text{ ou}$$

$$\ddot{x} + \alpha_1 \dot{x} + (\alpha_3 \beta_1 x + \alpha_2 + \alpha_3 \beta_3) = -\alpha_3 \beta_2 y$$

Fazendo a transformação linear de x em z, de tal forma que:

$$z = \alpha_3 \beta_1 x + \alpha_2 + \alpha_3 \beta_3 \quad (\text{III.5.a})$$

e

$$\dot{z} = \alpha_3 \beta_1 \dot{x}, \quad \ddot{z} = \alpha_3 \beta_1 \ddot{x}$$

então a equação em z se torna:

$$\ddot{z} + \mu_1 \dot{z} + \mu_2 z = \mu_3 y$$

onde  $\mu_1 = \alpha_1$ ;  $\mu_2 = \alpha_3 \beta_1$  e  $\mu_3 = -\alpha_3^2 \beta_1 \beta_2$

Escrevendo agora as condições para subida e descida do deslocador em termos de x e y temos:

$$p > p_0 \text{ e } y = \gamma_2 + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 > \bar{p}_0 \text{ e } y = \gamma_2 \quad (\text{III.6.a})$$

$$p < p_0 \text{ e } y = \gamma_1 + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 < p_0 \text{ e } y = \gamma_1 \quad (\text{III.6.b})$$

Substituindo  $x$  por  $z$  de acordo com a expressão (III.5.a) e utilizando para  $y$  os valores de cada caso, as inequações (III.6.a) e (III.6.b) ficam:

$$z + \alpha_3 \beta_2 \gamma_2 - \alpha_2 - \alpha_3 p_0 > 0 \quad (\text{III.7.a})$$

$$z + \alpha_3 \beta_2 \gamma_1 - \alpha_2 - \alpha_3 p_0 < 0 \quad (\text{III.7.b})$$

Definindo as seguintes constantes como:

$$\rho_1 = \alpha_3 \beta_2; \rho_2 = -(\alpha_2 + \alpha_3 p_0) = -g$$

As condições para movimentação do deslocador (III.3.a) e (III.3.b) podem ser resumidas na forma:

$$y: \gamma_2 \rightarrow \gamma_1, \text{ se } z + \rho_1 \gamma_2 + \rho_2 > 0 \quad (\text{III.8.a})$$

$$y: \gamma_1 \rightarrow \gamma_2, \text{ se } z + \rho_1 \gamma_1 + \rho_2 < 0 \quad (\text{III.8.b})$$

Com a eliminação da equação da pressão, o movimento do deslocador está agora comandado pela posição do pistão ( $z$ ). É natural que exista uma certa posição ( $z_D$ ) do pistão, na fase de compressão do ciclo, em que a pressão do fluido de trabalho equivale à pressão atmosférica; se o pistão passa dessa posição ( $z_D$ ) na fase de compressão, com o deslocador, na posição superior ( $\gamma_2$ ), a pressão do fluido aumenta e a diferença ( $p-p_0$ ) é positiva, impulsionando o deslocador para baixo. Com a descida do deslocador, a pressão aumentará mais ainda pelo aquecimento

do fluido e o pistão terá que expandir o fluido de trabalho para que a pressão se iguale à pressão atmosférica novamente. Com o deslocador agora na posição inferior ( $\gamma_1$ ), existirá uma posição ( $z_s$ ) do pistão para a qual, na fase de expansão do ciclo, a pressão ( $p$ ) se iguala a  $p_0$ . Os deslocamentos do pistão e do deslocador descritos estão resumidos na Figura (III.3)..

As posições do pistão para as quais a pressão ( $p$ ) se iguala à pressão atmosférica são:

$$z_D = - \rho_1 \gamma_2 - \rho_2 \quad (\text{III.9.a})$$

na fase de compressão, com  $y = \gamma_2$  e

$$z_S = - \rho_1 \gamma_1 - \rho_2 \quad (\text{III.9.b})$$

na fase de expansão, com  $y = \gamma_1$

### III.2.6 - O Deslocador com um Controlador "On-Off" com Histerese

Utilizando as expressões (III.9.a) e (III.9.b), podemos descrever o movimento do deslocador segundo:

$$y: \gamma_2 \rightarrow \gamma_1, \text{ se } z > z_D \text{ e } y = \gamma_2$$

$$y: \gamma_1 \rightarrow \gamma_2, \text{ se } z < z_S \text{ e } y = \gamma_1$$

com  $z_D \neq z_S$

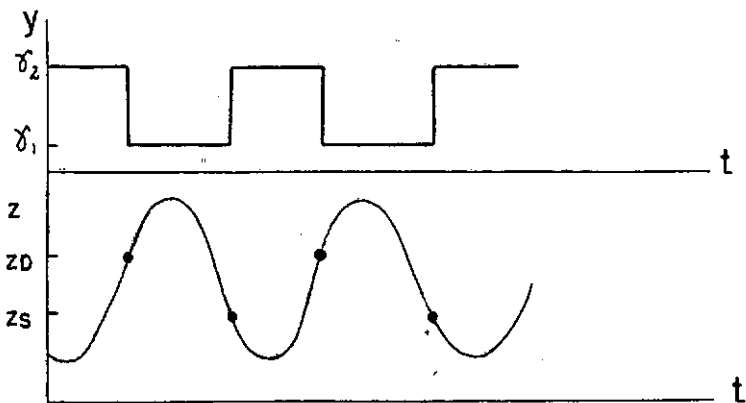


FIGURA III.3 - DIAGRAMA DE DESLOCAMENTOS

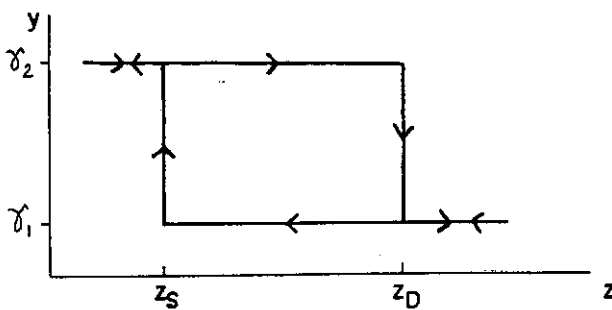


FIGURA III.4 - O DESLOCADOR COMO UM CONTROLADOR "ON-OFF" COM HISTERESE

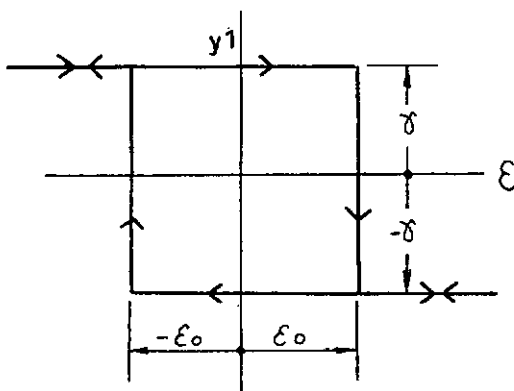


FIGURA III.5 - CONTROLADOR "ON-OFF" COM HISTERESE USUAL



A descrição do movimento do deslocador feita acima equivale ao comportamento de um controlador "on-off" com histerese, regulado por  $z$ , como mostrado na Figura (III.4).

A maneira como se apresenta na Figura (III.4) não é a usualmente encontrada na teoria não-linear para a análise de controladores "on-off". Para que se obtenha um diagrama como o da Figura (III.5), as seguintes transformações são necessárias

$$y = b + y_1$$

onde  $b = (\gamma_1 + \gamma_2)/2$  e  $y_1 = \pm \gamma$

com  $\gamma = (\gamma_2 - \gamma_1)/2$

$$\epsilon = z - z_m$$

e

$$\epsilon_0 = -\rho_1 \gamma$$

onde

$$z_m = -\rho_1 b - \rho_2$$

se tivermos, por exemplo,

$$\epsilon > \epsilon_0,$$

então:

$$z - z_m - \epsilon_0 > 0$$

ou substituindo os valores de  $z_m$  e  $\epsilon_0$ ,

$$z + \rho_1 b + \rho_2 + \rho_1 \gamma > 0$$

Ressaltando que:

$$b + \gamma = \gamma_2 \quad \text{e} \quad b - \gamma = \gamma_1$$

então a inequação acima fica:

$$z + \rho_1 \gamma_2 + \rho_2 > 0$$

e equivale à condição de descida do deslocador.

De maneira análoga pode-se mostrar que

$$\epsilon < \epsilon_0$$

equivale à condição de subida do deslocador.

De acordo com o que foi estabelecido, o modelo não-linear pode ser reescrito:

$$\ddot{z} + \mu_1 \dot{z} + \mu_2 z = \mu_3 y \quad (\text{III.10})$$

$$y_1: + \gamma \rightarrow - \gamma, \text{ se } \epsilon > \epsilon_0 \text{ e } y_1 = \gamma \quad (\text{III.11.a})$$

$$y_1: - \gamma \rightarrow + \gamma, \text{ se } \epsilon < \epsilon_0 \text{ e } y_1 = - \gamma \quad (\text{III.11.b})$$

$$y = y_1 + b \quad (\text{III.12})$$

$$\varepsilon = z - z_m \quad (\text{III.13})$$

O diagrama de blocos mostrado na Figura (III.6) corresponde ao sistema de equações (III.10) a (III.13) do modelo não-linear.

### III.3 - ANÁLISE DO MODELO NÃO-LINEAR

#### III.3.1 - O Ciclo Limite

Analisando a equação da dinâmica do pistão,

$$\ddot{z} + \mu_1 \dot{z} + \mu_2 z = \mu_3 y \quad (\text{III.10})$$

separadamente para as posições  $y = \gamma_1$  e  $y = \gamma_2$  do deslocador, concluímos tratar-se da equação de um sistema massa-mola amortecido.

Se  $y = \gamma_1$ , por exemplo, a solução particular para a equação é

$$z_1 = \mu_3 \gamma_1 / \mu_2$$

ou

$$z_1 = -\rho_1 \gamma_1 \quad (\text{III.14.a})$$

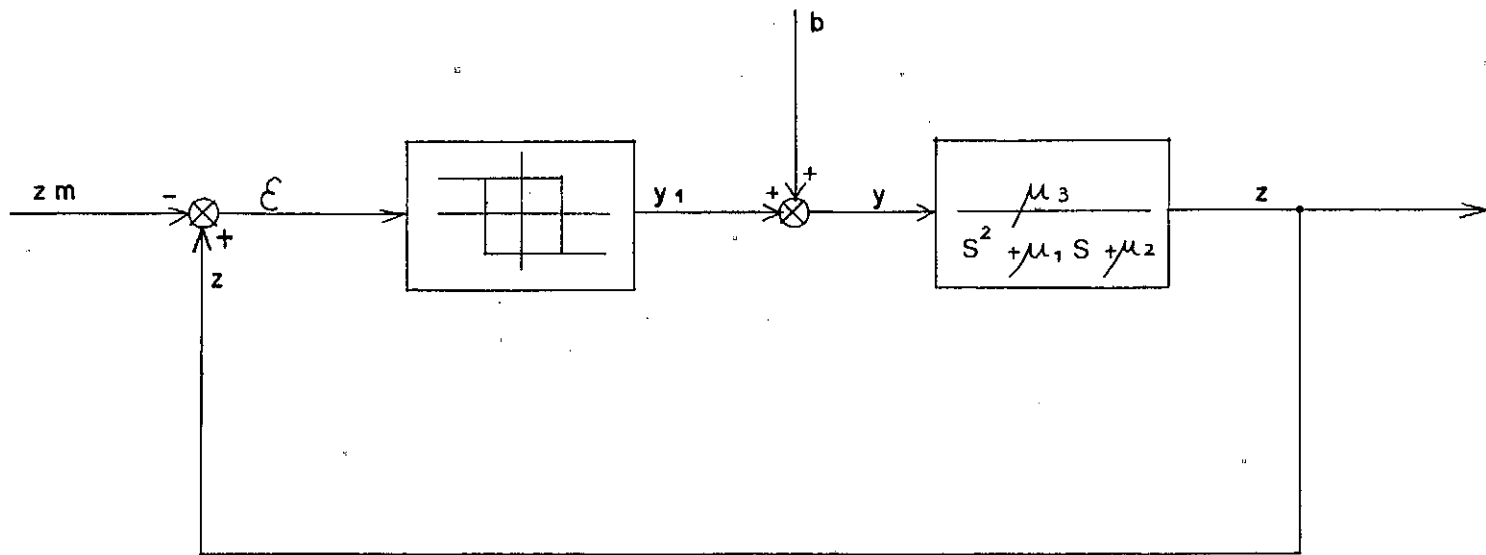


FIGURA III.6 - DIAGRAMA DE BLOCOS DO SISTEMA

De maneira análoga, se  $y = \gamma_2$ , o sistema possui a solução particular

$$z_2 = -\rho_1 \gamma_2 \quad (\text{III.14.b})$$

Supondo uma condição de sistema sub-amortecido, a Figura (III.7) mostra a resposta no tempo para a equação da dinâmica do pistão, separadamente para cada posição do deslocador, dada uma condição inicial  $(z_0, \dot{z}_0)$ . As trajetórias no plano de fase  $(\dot{z}, z)$ , correspondentes a essas soluções, podem ser vistas na Figura (III.8). Deve-se notar que, dependendo da posição do deslocador, quando o tempo tende a infinito, o pistão tende a se estabilizar numa certa posição particular ( $z_1$  ou  $z_2$ ), este fato pode ser entendido, se levarmos em conta que se o deslocador está sempre embaixo, a maior parte do fluido está na câmara quente, numa pressão mais alta que se estivesse na câmara fria.

Na Figura (III.9) está mostrada a resposta no tempo do sistema. No seu movimento descontínuo, o deslocador desce e sobe nas posições  $z_D$  e  $z_S$  do pistão, respectivamente. Dependendo dos valores de  $z_D$  e  $z_S$ , uma defasagem pistão/deslocador estará definida. Na realidade, como o deslocador leva algum tempo no seu percurso de subida ou descida, a evolução da posição do deslocador será próxima da curva tracejada na Figura (III.9).

Na Figura (III.10) o comportamento do pistão é mostrado no plano de fase; as regiões em que  $y = \gamma_2$  e  $y = \gamma_1$  estão limitadas pelas retas

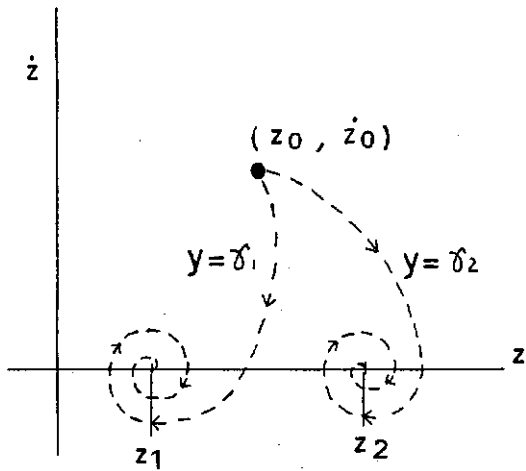


FIGURA III.8 - RESPOSTA NO PLANO DE FASE

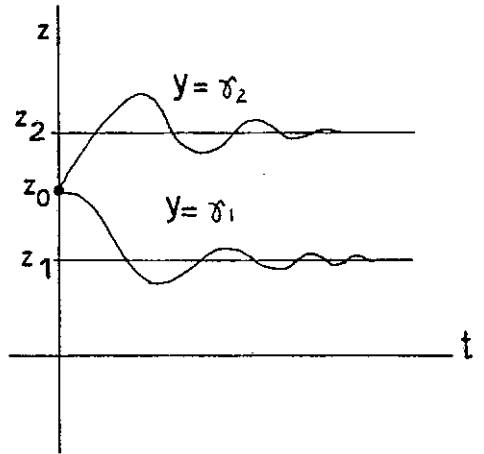


FIGURA III.7 - RESPOSTA NO TEMPO

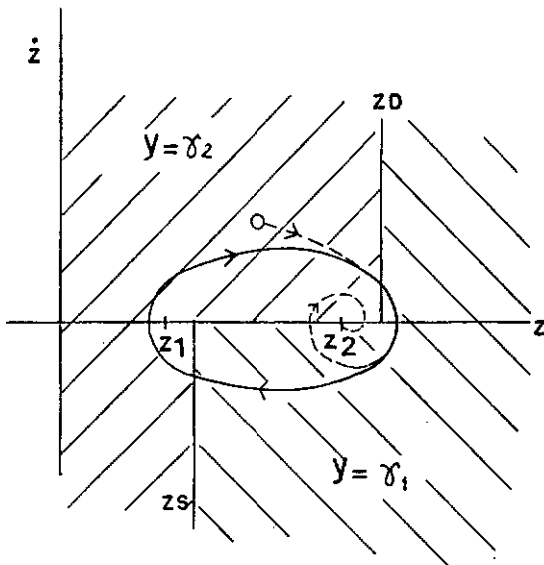


FIGURA III.10 - RESPOSTA DO SISTEMA NO PLANO DE FASE (CICLO LIMITE)

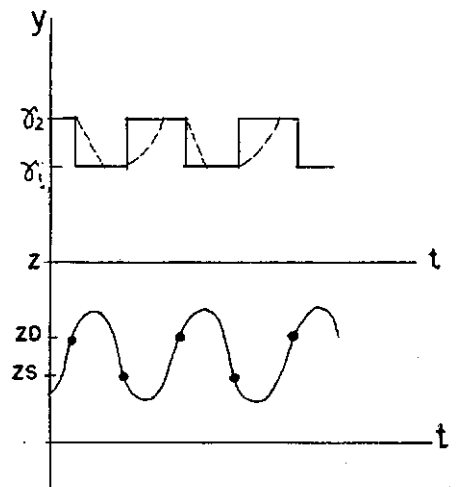


FIGURA III.9 - RESPOSTA DO SISTEMA NO TEMPO

$$z = z_D, \text{ para } \dot{z} > 0 \text{ e } z = z_S, \text{ para } \dot{z} < 0$$

Dada uma condição inicial  $(z_0, \dot{z}_0)$  e uma posição inicial para o deslocador, o movimento do pistão tenderá a seguir uma das trajetórias da Figura (III.8) (dependendo do valor inicial de  $y$ ), até o momento em que cruzar uma fronteira; nesse ponto, mudando o valor de  $y$ , o pistão tenderá a se estabilizar numa outra posição e movimento do pistão tenderá a seguir a outra trajetória da Figura (III.8). Em outras palavras, quando o pistão está na região do plano de fase em que  $y = \gamma_2$ , o seu movimento é regido pela equação,

$$\ddot{z} + \mu_1 \dot{z} + \mu_2 z = \mu_3 \gamma_2$$

e a sua posição de estabilidade é  $z_2$ ; quando está na região do plano de fase em que  $y = \gamma_1$ , o seu movimento é regido por

$$\ddot{z} + \mu_1 \dot{z} + \mu_2 z = \mu_3 \gamma_1$$

e a sua posição de estabilidade é  $z_1$ .

De acordo com o que foi exposto, está clara a possibilidade de existência de um ciclo limite, ou seja, uma trajetória estável no plano de fase que a posição do pistão tenderá a seguir qualquer que seja a condição inicial dada.

As condições para a existência do Ciclo Limite serão discutidas no item (III.4) desse capítulo.

### III.3.2 - Análise do Trabalho/Ciclo

O diagrama pressão-volume do ciclo termodinâmico do motor está mostrado na Figura (III.11) para uma defasagem pistão/deslocador como a da Figura III.9.

Verifica-se que, dependendo dos valores de  $z_D$  e  $z_S$ , pode-se tirar proveito do fato de, no seu movimento real, o deslocador dispender algum tempo no percurso.

Para o caso mostrado, se levarmos em conta o movimento real tracejado do deslocador na Figura (III.9), o pistão comprimirá o fluido, enquanto o deslocador força o seu aquecimento; com isso, o diagrama p-V real seria próximo ao tracejado na Figura (III.11), aumentando o trabalho do ciclo em relação ao previsto pelo ciclo teórico.

Como já pode ser concluído, uma boa escolha dos valores de  $z_D$  e  $z_S$  será decisiva para o projeto do motor. Vale lembrar que os parâmetros  $z_D$  e  $z_S$  dependem basicamente da geometria do motor e uma análise da defasagem pistão/deslocador através do uso dos parâmetros  $z_D$  e  $z_S$  pode ser uma boa ferramenta para a fase inicial do projeto.

Teoricamente, a melhor condição para o trabalho por ciclo do motor seria a mostrada nas Figuras (III.12), (III.13) e (III.14). Aqui o valor de  $z_D$  coincide com o ponto de máximo da posição do pistão e  $z_S$  com o ponto de mínimo. Essa



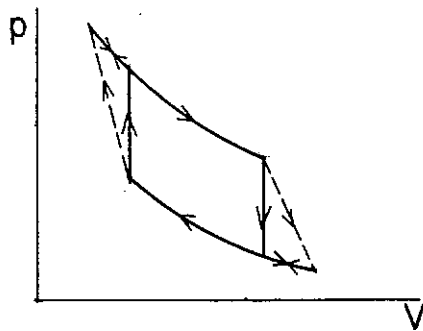


FIGURA III.11 - DIAGRAMA p-V

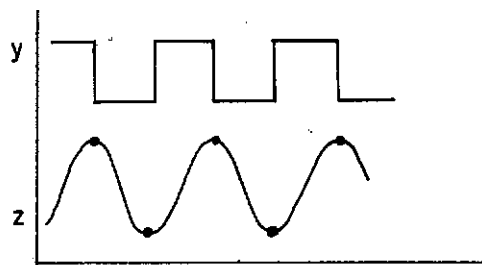


FIGURA III.12 - DESLOCAMENTOS PARA MELHOR CONDIÇÃO DE TRABALHO / CICLO

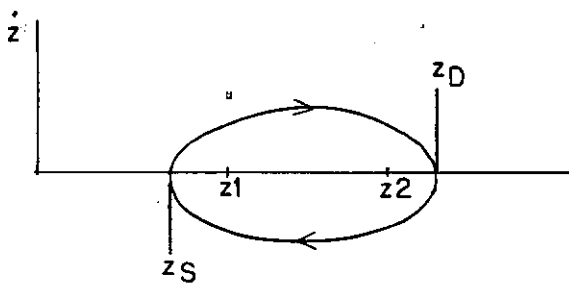


FIGURA III.13 - CICLO LIMITE PARA MELHOR CONDIÇÃO DE TRABALHO / CICLO

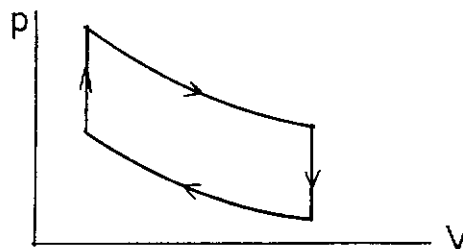


FIGURA III.14 - DIAGRAMA p-V PARA MELHOR CONDIÇÃO DE TRABALHO / CICLO

condição corresponderia a uma defasagem pistão/deslocador de  $90^\circ$ .

Na realidade, analisando as expressões de  $z_s$  e  $z_l$ , como

$$\rho_2 = -g$$

concluimos que  $z_s > z_l$  sempre e essa configuração do Ciclo Limite é impossível de se obter.

Analogamente, a pior condição para o trabalho por ciclo seria a de  $180^\circ$  de defasagem pistão/deslocador, mostrada nas Figuras (III.15), (III.16) e (III.17).

Podemos concluir ainda que, se  $z_D < z_s$ , como mostrado nas Figuras (III.18) e (III.19) o trabalho por ciclo do motor é negativo. Essa condição pode ser evitada se impusermos:

$$z_D > z_s$$

ou

$$-\rho_1 \gamma_2 > -\rho_1 \gamma_1$$

Com

$$\gamma_2 > \gamma_1$$

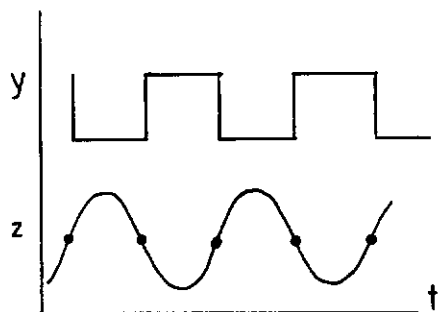


FIGURA III.15 - DESLOCAMENTOS PARA TRABALHO / CICLO. NULO.

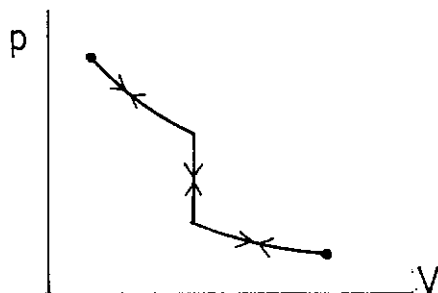


FIGURA III.17 - DIAGRAMA p-V PARA TRABALHO / CICLO NULO

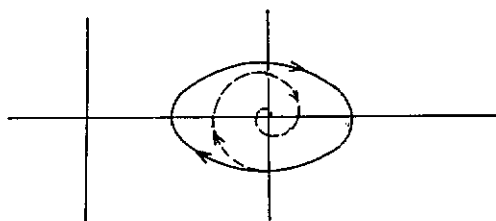


FIGURA III.16 - CICLO LIMITE PARA TRABALHO / CICLO NULO.

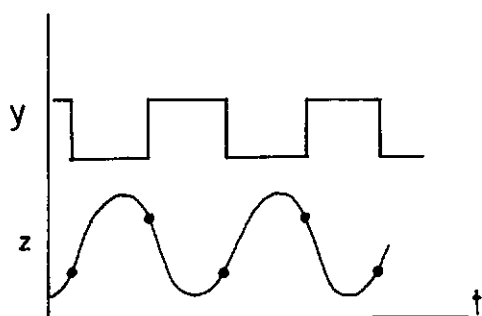


FIGURA III.18 - DESLOCAMENTOS PARA TRABALHO / CICLO NEGATIVO.

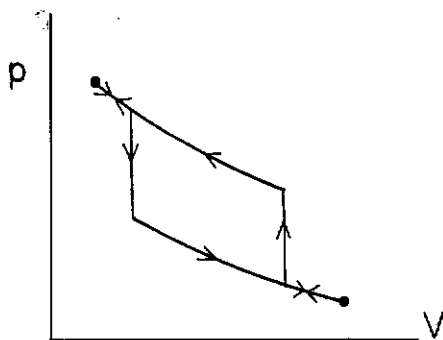


FIGURA III.19 - DIAGRAMA p-V PARA TRABALHO / CICLO NEGATIVO.

por definição, e  $\gamma_2, \gamma_1$  positivos, então devemos ter

$$\rho_1 < 0$$

ou

$$\alpha_3 \beta_2 < 0$$

como  $\alpha_3$  deve ser positivo, com  $\beta_2$  negativo chega-se a:

$$(a_d - a_r)/T_c > a_d/T_e \quad (\text{III.15})$$

### III.4 - SOLUÇÃO PARA O SISTEMA NÃO-LINEAR

#### III.4.1 - Desenvolvimento da Solução

Para a solução do sistema não-linear de equações (III.10) a (III.13) o método de Krylov e Bogoliubov será utilizado. O desenvolvimento do método está descrito com detalhes por Mansour <sup>30</sup> e não será reproduzido aqui.

Como a posição do deslocador ( $y$ ) é uma função da posição do pistão ( $z$ ), o sistema de equações pode ser reescrito na forma:

$$y = f(z) \quad (\text{III.15.a})$$

e

$$\ddot{z} + \mu_1 \dot{z} + \mu_2 z - \mu_3 f(z) = 0 \quad (\text{III.15.b})$$

Supondo uma solução do tipo:

$$z = Z \operatorname{sen} \Omega t + Z_0 \quad (\text{III.16})$$

onde  $Z$  e  $\Omega$  devem ser determinados e  $Z_0$  pode ser obtido a partir de condições iniciais e definindo

$$F(z, \dot{z}) = \mu_1 \dot{z} + \mu_2 z - \mu_3 f(z)$$

e

$$\psi = \Omega t$$

então a expressão (III.15.b) pode ser escrita:

$$\ddot{z} + F(z, \dot{z}) = 0$$

e a condição para a existência do Ciclo Limite  $\bar{e}$  que o seguinte sistema tenha solução:

$$\int_0^{2\pi} F(Z_L \operatorname{sen} \psi + Z_0, Z_L \Omega_L \cos \psi) \cos \psi \, d\psi = 0 \quad (\text{III.17.a})$$

e

$$\Omega_L^2 = (1/\pi Z_L) \int_0^{2\pi} F(Z_L \operatorname{sen} \psi + Z_0, Z_L \Omega_L \cos \psi) \operatorname{sen} \psi \, d\psi \quad (\text{III.17.b})$$

onde  $\Omega_L$  e  $Z_L$  são os valores da frequência e da amplitude que satisfazem simultaneamente às equações (III.17.a) e (III.17.b).

### III.4.2 - Condições de Existência do Ciclo Limite

Embora a frequência de oscilação ( $\Omega_L$ ) possa ser obtida pela equação (III.17.b), segundo o método utilizado, essa frequência é muito próxima da frequência de oscilação do sistema linear,

$$w_a = (\mu_2 - \mu_1^2/4)^{1/2} \quad (\text{III.18.a})$$

e a seguinte aproximação pode ser feita:

$$\Omega_L \cong w_a \quad (\text{III.18.b})$$

O desenvolvimento da integral da equação (III.17.a) está descrito no Apêndice B. Resolvendo-se essa integral chega-se a:

$$Z_L^2 = 4 \mu_3 \varepsilon_0 \gamma / (\pi \mu_1 \Omega_L) \quad (\text{B.6})$$

que nos dá uma expressão para a amplitude do movimento do pistão em função dos parâmetros do projeto do motor.

Segundo essa expressão, a condição de existência do Ciclo Limite será:

$$\mu_3 \varepsilon_0 \gamma / (\pi \mu_1 \Omega_L) > 0$$

como  $\gamma$  e  $\mu_1$  são parâmetros positivos e  $\varepsilon_0 = -\rho_1 \gamma > 0$ , com

$\rho_1 < 0$  para que o sistema produza trabalho, então devemos ter:

$$\mu_3 > 0$$

Essa desigualdade nos leva às seguintes condições para a existência do ciclo limite do motor:

$$a_p > a_r \quad (\text{III.19.a})$$

e

$$(a_d - a_r)/T_c > a_d/T_e \quad (\text{III.19.b})$$

sendo que a última condição está relacionada com a existência de um ciclo termodinâmico onde trabalho seja liberado do sistema.

Para que existam oscilações, devemos ter:

$$\mu_1^2/4 < \mu_2 \quad (\text{III.19.c})$$

Esta é uma condição que limita a carga suportada pelo motor, já que  $(\mu_1)$  representa a soma do atrito com a carga aplicada ao pistão.

### III.4.3 - Estabilidade

A condição de estabilidade do sistema é:

$$\left[ d\phi(z)/dz \right]_{z=Z_L} > 0$$

onde:

$$\phi(z) = \int_0^{2\pi} F(Z \operatorname{sen} \psi + Z_0, Z \Omega \cos \psi) \cos \psi \, d\psi = 0$$

Como  $\phi(z) = \mu_1 Z \Omega / 2 - 2\mu_3 \epsilon_0 \gamma / \pi Z = 0$ , segundo integral resolvida no Apêndice B, então:

$$\left[ d\phi(z)/dz \right]_{z=z_L} = \mu_1 \Omega_L / 2 + 2\mu_3 \epsilon_0 \gamma / \pi Z_L^2 > 0$$

ou ainda, substituindo  $Z_L^2$  pela expressão (B.6) a condição de estabilidade fica:

$$\mu_1 \Omega_L > 0$$

Como  $\mu_1$  representa a carga no pistão e  $\bar{\epsilon}$  sempre positivo, então o Ciclo Limite  $\bar{\epsilon}$  sempre estável.

#### III.4.4 - Parâmetros de Desempenho do Motor

A defasagem pistão/deslocador pode ser obtida se encontrarmos os ângulos  $\phi_D$  e  $\phi_S$  para os quais o deslocador sobe e desce. Fazendo-se  $z = z_D$  e  $z = z_S$  na equação (III.16.c), temos:

$$z_D = Z_L \operatorname{sen} \phi_D + Z_0$$

e

$$z_S = Z_L \operatorname{sen} \phi_S + Z_0$$



ou

$$\phi_D = \text{sen}^{-1} [(z_D - Z_0)/Z_L] \quad (\text{III.20.a})$$

e

$$\phi_S = \text{sen}^{-1} [(z_S - Z_0)/Z_L] \quad (\text{III.20.b})$$

A equação que descreve o movimento do pistão (III.16.c) pode ser escrita em termos de  $x$ , com o uso da transformação linear feita de  $x$  em  $z$  (III.5.a).

$$x = [z - \alpha_2 - \alpha_3 \beta_3] / \alpha_3 \beta_1$$

ou

$$x = [Z_L \text{ sen } \Omega t + Z_0 - \alpha_2 - \alpha_3 \beta_3] / \alpha_3 \beta_1$$

Se fizermos:

$$X_L = Z_L / \alpha_3 \beta_1 \quad (\text{III.21.a})$$

então a equação de  $x$  fica:

$$x = X_L \text{ sen } \Omega t + X_0 \quad (\text{III.21.b})$$

onde

$$X_0 = [Z_0 - \alpha_2 - \alpha_3 \beta_3] / \alpha_3 \beta_1 \quad (\text{III.21.c})$$

O procedimento para a obtenção da expressão de  $Z_0$  está descrito no Apêndice B. Essa expressão tem a forma:

$$Z_0 = Z_{\bar{m}ax} - Z_L \quad (\text{B.7})$$

onde

$$Z_{\bar{m}ax} = e^{-\mu_1 t_*/2} (C_1^2 + C_2^2)^{1/2} - \rho_1 \gamma_1 \quad (\text{B.15})$$

$$C_1 = \mu_1 C_2 / (2 w_a) \quad (\text{B.16})$$

$$C_2 = z_D + \rho_1 \gamma \quad (\text{B.12})$$

$$t_* = (\pi/2 - \phi_0) / w_a \quad (\text{B.14})$$

e

$$\phi_0 = \text{tg}^{-1} |C_2/C_1| \quad (\text{B.11})$$

O trabalho por ciclo do motor será:

$$w = w_e + w_c$$

onde  $w_c$ ,  $w_e$  são os trabalhos de compressão e expansão, respectivamente e,

$$w_c = \int_{V_{CS2}}^{V_{CD2}} p \, dV_c, \text{ com } V_e = V_{E2} \quad (\text{III.22.a})$$

e

$$w_e = \int_{V_{CD1}}^{V_{CS1}} p \, dV_c, \text{ com } V_e = V_{E1} \quad (\text{III.22.b})$$

onde:

$V_{CS2}$ ,  $V_{CS1}$  são os volumes da câmara de compressão quando  $z = z_s$  e  $y = \gamma_2$ ,  $y = \gamma_1$ , respectivamente.

$V_{CD2}$ ,  $V_{CD1}$  são os volumes da câmara de compressão quando  $z = z_D$  e  $y = \gamma_2$ ,  $y = \gamma_1$ , respectivamente.

e  $V_{E2}$ ,  $V_{E1}$  são os volumes da câmara de expansão quando  $y = \gamma_2$ ,  $y = \gamma_1$ , respectivamente.

A solução das integrais (III.22.a) e (III.22.b) está desenvolvida no Apêndice B e utilizando essas expressões, o trabalho por ciclo será:

$$w = m_a R T_c \ln [(KD2.KS1)/(KS2.KD1)] \quad (\text{B.22})$$

onde:

$$KD2 = V_{E2}/T_e + V_{CD2}/T_c + V_g \ln(T_e/T_c)/(T_e - T_c) \quad (\text{B.18})$$

$$KS1 = V_{E1}/T_e + V_{CS1}/T_c + V_g \ln(T_e/T_c)/(T_e - T_c) \quad (\text{B.20})$$

$$KS2 = V_{E2}/T_e + V_{CS2}/T_c + V_g \ln(T_e/T_c)/(T_e - T_c) \quad (B.19)$$

$$KD1 = V_{E1}/T_e + V_{CD1}/T_c + V_g \ln(T_e/T_c)/(T_e - T_c) \quad (B.21)$$

A eficiência térmica será, obviamente a eficiência de Carnot, já que a eficiência de regeneração é, por hipótese, 100%:

$$\eta = 1 - T_c/T_e \quad (III.23)$$

### III.5 - CONCLUSÕES

Através da aplicação da teoria não-linear ao problema, chega-se a soluções analíticas, análogas àquelas obtidas no capítulo II, para os parâmetros de desempenho do motor.

Com essa abordagem, entretanto, o movimento descontínuo do deslocador é considerado e essa característica do modelo parece ajustá-lo melhor à condição real do sistema.

A utilização do conceito de Ciclo Limite, introduz uma nova maneira de abordar o sistema, trazendo grandes facilidades na compreensão e análise do comportamento do motor e possibilitando a obtenção de condições importantes para a operação satisfatória do motor.

A obtenção de solução de forma fechada só é possível, entretanto, considerando apenas o ciclo termodinâmico ideal.

Assim como para o modelo linearizado, naturalmente, o uso das soluções encontradas neste modelo na fase inicial do projeto, deve ser consciente do emprego da análise ideal na obtenção de tais soluções.

## CAPÍTULO IV

### O MOTOR STIRLING DE PISTÃO-LIVRE: UM MODELO PARA SIMULAÇÃO DIGITAL

#### IV.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS

Nos capítulos anteriores, a análise do ciclo ideal foi utilizada para estabelecer os modelos teóricos que descrevem o comportamento do motor Stirling de pistão-livre.

A obtenção de expressões analíticas simples para os parâmetros de desempenho do motor, caracteriza a importância desses modelos, possibilitando soluções de forma fechada para o sistema de equações estabelecido.

Infelizmente, como aponta Walker <sup>[5]</sup> os motores Stirling não operam na prática segundo a sequência de processos termodinâmicos ideais, conhecida como o Ciclo Stirling. O uso do ciclo ideal para a análise do motor resulta inevitavelmente em um prognóstico otimista para o desempenho.

Nesse capítulo, os efeitos de fenômenos presentes no ciclo real, como regeneração não-perfeita, transferência de calor nas câmaras, perdas de carga e câmaras não isotérmicas são analisados a fim de se obter um modelo teórico que ofereça uma descrição mais realista do comportamento dinâmico do motor.

A aparente simplicidade do motor Stirling esconde, no entanto, a real complexidade no tratamento matemático analítico do sistema como um todo. A principal dificuldade surge do fato de que diferentes porções do fluido de trabalho percorrem diferentes ciclos termodinâmicos. Além disso, o fluido de trabalho, durante a operação do motor, oscila periodicamente de uma câmara para outra, sofrendo complexos processos de transferência de calor, fluido e termodinâmicos, geralmente instáveis e interrelacionados.

Levando em conta essas dificuldades, não é possível, portanto, chegar-se a soluções de forma fechada. Com essa análise, entretanto, dispendo das facilidades dos sistemas computacionais modernos, o desempenho do motor pode ser simulado, com a ajuda de métodos numéricos simples.

Para o desenvolvimento do modelo matemático aqui proposto, além das hipóteses feitas para a obtenção de cada equação em particular, as seguintes hipóteses são necessárias:

1. o fluido de trabalho é um gás perfeito
2. a massa do fluido de trabalho é considerada constante e as fugas são negligenciadas.

#### IV.2 - DESENVOLVIMENTO DO MODELO

O referencial a ser adotado neste capítulo, é o mesmo do Capítulo III, mostrado na Figura (III.1).

O princípio de funcionamento dessa configuração foi descrito com detalhes no Capítulo I, item (I.4).

#### IV.2.1 - Os Volumes

Em qualquer instante do funcionamento do motor, a massa total de fluido ( $m_a$ ) estará distribuída em três compartimentos do motor: a câmara de expansão, o regenerador e a câmara de compressão.

Enquanto o regenerador é um compartimento fixo e seu volume ( $V_g$ ) não varia, os volumes das câmaras de expansão ( $V_e$ ) e de compressão ( $V_c$ ) são funções das posições do pistão ( $x$ ) e do deslocador ( $y$ ). O volume do espaço de compensação ( $V_b$ ) é também uma função das posições do pistão e do deslocador.

Em qualquer instante da operação do motor em que o pistão e o deslocador assumam as posições  $x$  e  $y$ , respectivamente, podemos escrever os volumes:

$$V_e = a_d(\ell - \ell_5 - y) \quad (\text{IV.1})$$

$$V_c = (a_d - a_r)(y - \ell_3) + (a_p - a_r)(\ell_3 - \ell_4 - x) \quad (\text{IV.2})$$

$$V_g = a_g \cdot \ell_g \quad (\text{IV.2.a})$$

$$V_b = V_B + a_p x + a_r y \quad (\text{IV.3})$$



onde:  $V_B$  é um volume de referência tomado aqui para as posições  $x = 0$  e  $y = 0$

$V_g$  é o volume do regenerador, visualizado aqui como um tubo de diâmetro  $d_g$  e comprimento  $l_g$ .

#### IV.2.2 - Fluxo de Massa no Regenerador

O regenerador será estudado nessa análise como um tubo que faz a ligação entre as câmaras de expansão e compressão. Nesse tubo, capaz de armazenar calor numa matriz no seu interior e/ou nas suas paredes, as perdas de calor para o exterior serão desprezadas, ou seja, o regenerador será considerado adiabático.

O que regula o sentido de movimento do fluido de uma câmara para outra via regenerador são as pressões  $p_e$  e  $p_c$ . Com o objetivo de se conhecer esse sentido, uma variável lógica ( $\delta$ ) é definida como na Tabela IV.1.

Dependendo do valor da variável lógica ( $\delta$ ), o fluido será impelido a se movimentar da câmara de expansão para a de compressão ou vice-versa.

Ao longo do caminho percorrido no regenerador, o fluido deve perder uma quantidade de calor (quando  $\delta = 0$ ) que será armazenada no regenerador. Quando  $\delta = 1$ , o fluido deve receber calor do regenerador, antes de entrar na câmara de expansão.

	$p_e > p_c$	$p_e < p_c$
$\delta$	0	1
$\bar{\delta}$	1	0

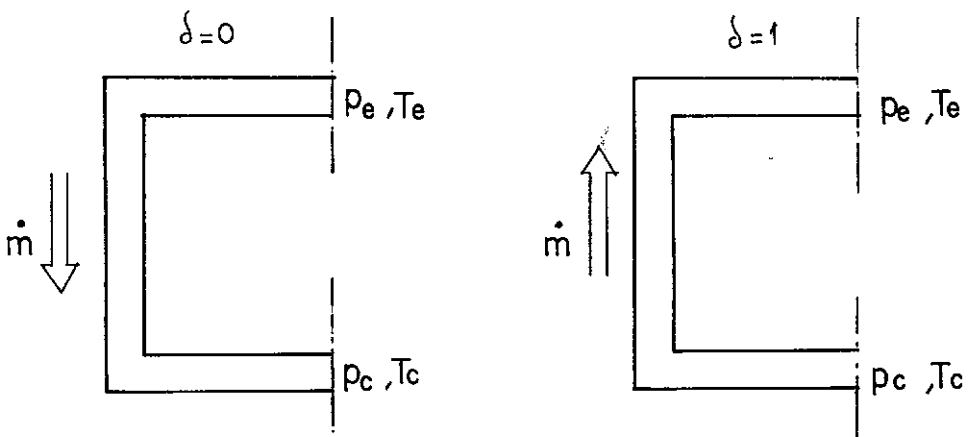
TABELA IV.1 - VARIÁVEL LÓGICA  $\delta$ 

FIGURA IV.1 - CONDIÇÕES DE CONTORNO NO REGENERADOR

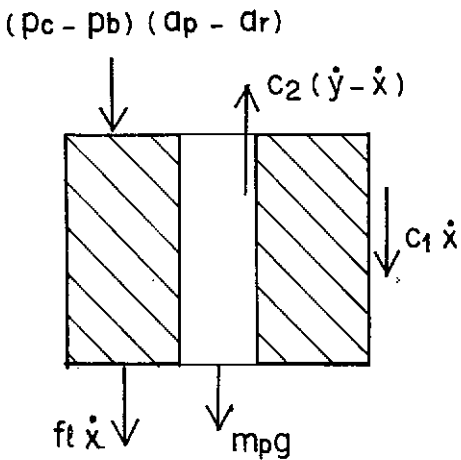


FIGURA IV.2 - DIAGRAMA DE FORÇAS ATUANDO NO PISTÃO.

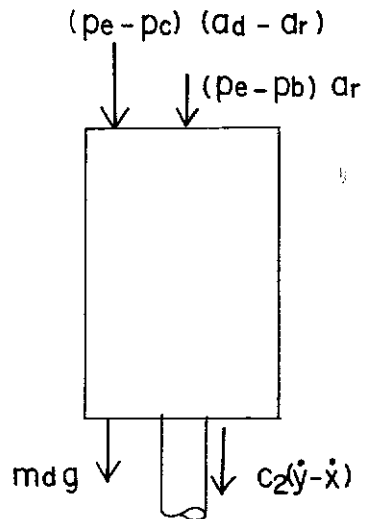


FIGURA IV.3 - DIAGRAMA DE FORÇAS ATUANDO NO DESLOCADOR

Quando analisamos o regenerador, estamos diante de um problema de escoamento de um fluido compressível com troca de calor. Nesse caso, sabemos que em um determinado instante existem gradientes de pressão e temperatura ao longo do tubo e ainda, que essas variações dependem das condições do contorno. Essas condições estão mostradas na Figura (IV.1).

No Apêndice C é desenvolvida uma análise com o objetivo de encontrar uma expressão para a queda de pressão em um fluido que escoar compressivelmente em um tubo de seção constante. Para um segmento infinitesimal do regenerador ( $d\ell$ ), essa expressão tem a forma:

$$-\rho \, dp = \frac{\dot{m}^2}{ag} \left[ \frac{2f_a}{dg} \, d\ell - \frac{d\rho}{\rho} \right] \quad (C.9)$$

onde: -  $f_a$  é o coeficiente de atrito, considerado constante, função do número de Reynolds e da rugosidade relativa do tubo

-  $\dot{m}$  é a vazão em massa através do segmento considerado.

Embora o efeito de compressibilidade possa ser introduzido, para a avaliação da vazão  $\dot{m}$  será utilizado um valor médio para a massa específica  $\rho$ , constante ao longo do regenerador, ou seja, o termo  $\frac{\partial \rho}{\rho}$  será desprezado, o que equivale a considerar escoamento instantaneamente incompressível. Segundo McAdams [6], se  $\Delta p/p < 0.1$  o efeito de compressibilidade pode ser desprezado, usando essa hipótese e integrando-se a relação (C.9) então, obtem-se:

$$\rho |p_e - p_c| = \frac{\dot{m}^2}{ag^2} \frac{2f_a \ell g}{dg}$$

Rearrmando e substituindo  $\rho$  por  $m_g/V_g$ , onde  $m_g$  é a massa instantaneamente contida no regenerador, temos:

$$\dot{m} = \left[ \frac{m_g ag^2 dg}{2V_g f_a \ell g} |p_e - p_c| \right]^{1/2}$$

Considerando que a câmara de expansão é um compartimento aberto apenas para o fluxo  $\dot{m}$ , então podemos escrever:

$$\dot{m}_e = (2\delta - 1) \dot{m}$$

ou ainda:

$$\dot{m}_e = (2\delta - 1) \left[ \frac{m_g ag^2 dg}{2V_g f_a \ell g} |p_e - p_c| \right]^{1/2} \quad (\text{IV.4})$$

#### IV.2.3 - Massa de Fluido no Regenerador

Para chegar à expressão (C.9) foi necessário supor escoamento em regime permanente. Intuitivamente, sabemos que a massa de fluido ( $m_g$ ) contida no regenerador deve variar com o tempo e portanto, o valor de  $m_g$  a ser utilizado na equação (IV.4) deve equivaler a um certo valor instantâneo, função das condições do contorno e uma expressão para  $m_g$  deve ser obtida.

Nesse modelo, os parâmetros termodinâmicos do fluido no regenerador serão tratados como médias. Pode-se concluir que a pressão e a temperatura do fluido dentro do regenerador, em

Como estamos considerando aqui separadamente a pressão da câmara de compressão ( $p_c$ ) e a da câmara de expansão ( $p_e$ ), a pressão a ser utilizada como média para o fluido no regenerador será:

$$p_g = \frac{p_e + p_c}{2}$$

Em função das considerações feitas, a massa de fluido no regenerador pode ser escrita como uma função das condições do contorno:

$$m_g = \frac{(p_e + p_c) V_g}{(T_e + T_c) R} \quad (\text{IV.5})$$

Essa expressão será utilizada nesse modelo para corrigir o valor da massa contida no regenerador a cada instante, após uma avaliação aproximada dos valores de  $p_e$ ,  $p_c$ ,  $T_e$  e  $T_c$  a partir das hipóteses feitas para o cálculo de  $\dot{m}$ .

#### IV.2.4 - As Pressões

Aplicando o princípio de conservação de massa, podemos encontrar uma expressão que relacione entre si pressões, temperaturas e volumes que a massa de fluido assume ao circular no motor.

Em qualquer instante do funcionamento do motor, a soma das massas em cada compartimento deve ser igual à massa total de fluido,  $m_a$ :

um determinado instante, qualquer que seja  $\delta$ , assumem médias que devem ficar dentro dos limites das condições do contorno, ou seja, a média de  $p_g$  ao longo do tubo deve estar entre  $p_e$  e  $p_c$  e a média de  $T_g$  deve estar entre  $T_e$  e  $T_c$ .

A hipótese inicialmente utilizada por Schmidt <sup>[2]</sup> e posteriormente por Filkenstein <sup>[7]</sup> e outros é de que o fluido no regenerador assume uma temperatura média igual à média aritmética entre as temperaturas  $T_e$  e  $T_c$  e ainda que a pressão do fluido é homogênea no interior dos três compartimentos do motor. E. W. Beans <sup>[8]</sup> se utilizou da hipótese de um regenerador adiabático para chegar a uma temperatura média no regenerador a partir da aplicação de um balanço de energia para esse compartimento; nesse procedimento, entretanto, a solução para  $T_g$  é iterativa e depende de uma avaliação das variações totais de massa em cada câmara. Entretanto, seguindo o modelo de Beans, pode-se mostrar que se tomarmos como aproximação que as variações totais de massa são iguais nas duas câmaras, a hipótese de Schmidt é válida para um regenerador adiabático. Essa será a hipótese utilizada nesse modelo para temperatura média, ou seja,

$$T_g = \frac{T_e + T_c}{2}$$

O procedimento adotado por Beans está mostrado no Apêndice D.

Tanto Schmidt quanto Beans consideram que o fluido de trabalho assume uma pressão homogênea em toda a sua massa.

$$\frac{p_c \cdot V_c}{T_c} + \frac{p_e \cdot V_e}{T_e} + \frac{p_g \cdot V_g}{T_g} = m_a R$$

Utilizando os valores médios para  $p_g$  e  $T_g$ , tem-se:

$$p_c = \left[ m_a R - p_e \left( \frac{V_e}{T_e} + \frac{V_g}{T_e + T_c} \right) \right] / \left[ \frac{V_c}{T_c} + \frac{V_g}{T_e + T_c} \right] \quad (\text{IV.6})$$

Para a câmara de expansão, a pressão  $p_e$  pode ser diretamente determinada da equação de estado:

$$p_e = m_e R T_e / V_e \quad (\text{IV.7})$$

A consideração de um espaço de compensação adiabático conduz a:

$$p_b = p_B (V_B / V_b)^\gamma \quad (\text{IV.8})$$

onde  $p_B$  é a pressão nesse espaço quando o volume é igual ao volume de referência ( $V_B$ ).

#### IV.2.5 - A Dinâmica do Pistão e do Deslocador

Os diagramas de forças atuando sobre o pistão e o deslocador estão mostrados nas Figuras (IV.2) e (IV.3).

Além do peso próprio e da ação da diferença de pressões entre a câmara de compressão e o espaço de compensação, o atrito entre a haste do deslocador e o pistão e entre o pistão

e o cilindro são considerados; a carga sobre o pistão será representada por uma força proporcional à velocidade do pistão e em sentido contrário a ela.

Da aplicação de um balanço de forças para o pistão obtem-se:

$$\ddot{x} = [-(c_1 + f_\ell) \dot{x} + c_2(\dot{y} - \dot{x}) - (p_c - p_b)(a_p - a_r) - m_p g] / m_p \quad (\text{IV.9})$$

No deslocador, além de estar atuando a diferença de pressões entre as duas câmaras, a parte inferior da sua haste está exposta à pressão da câmara de compensação; nesse caso, temos:

$$\ddot{y} = [-c_2(\dot{y} - \dot{x}) - (p_e - p_c)(a_d - a_r) - (p_e - p_b) a_r - m_d g] / m_d \quad (\text{IV.10})$$

#### IV.2.6 - Os Efeitos de Mistura

O fato do regenerador não ser ideal será levado em conta através dos efeitos de mistura.

Se a eficiência do regenerador for definida como:

$$\eta_R = \frac{\Delta T_{\text{real}}}{\Delta T_{\text{ideal}}}$$

então pode-se encontrar as temperaturas com que o fluido vindo



do regenerador incide em cada câmara:

$$\eta_R = \frac{T_e - T_{gc}}{T_e - T_c}, \text{ para } \delta = 0 \text{ e } \tilde{\eta}_R = \frac{T_c - T_{ge}}{T_c - T_e}, \text{ para } \delta = 1$$

Durante um ciclo do motor, o fluido passa duas vezes no regenerador indo de uma câmara para outra. Assim, dois tipos de mistura ocorrem com o fluido de trabalho:

- a) quando o fluido mais frio vindo da câmara de compressão circula no sentido de se misturar com o fluido mais quente já existente na câmara de expansão; o fluido incide nessa caso com  $T_{ge} < T_e$  e o efeito é um decrêscimo na temperatura média global da câmara; isso ocorre quando  $\delta = 1$
- b) quando o fluido mais quente vindo da câmara de expansão circula no sentido de se misturar com o fluido mais frio já existente na câmara de compressão; nesse caso, o fluido incide com  $T_{gc} > T_c$  e o efeito é um aumento na temperatura média global da câmara; isso ocorre quando  $\delta = 0$ .

Esses dois processos estão ilustrados nas Figuras (IV.4) e (IV.5).

Do ponto de vista de rendimento do motor, os efeitos de mistura tendem a diminuir as eficiências de expansão e compressão do fluido, diminuindo conseqüentemente o trabalho por ciclo em relação ao seu equivalente ideal.

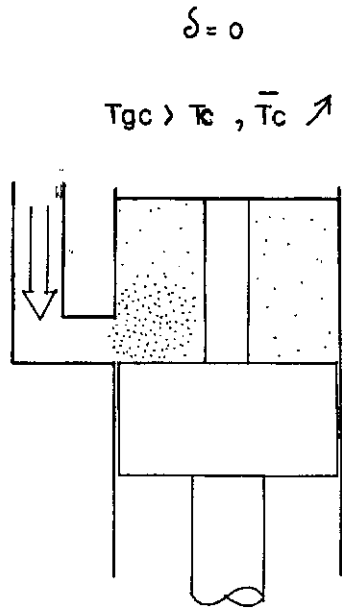
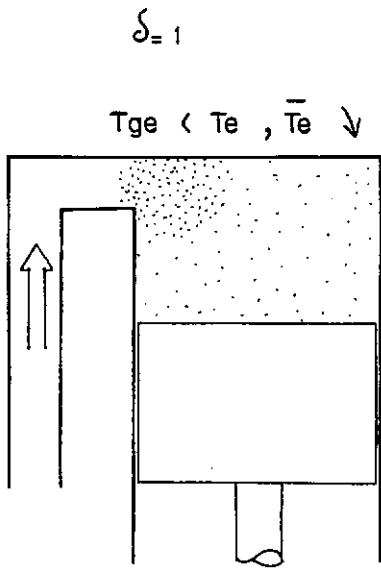
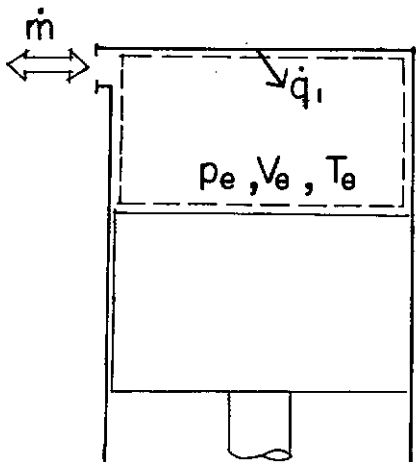
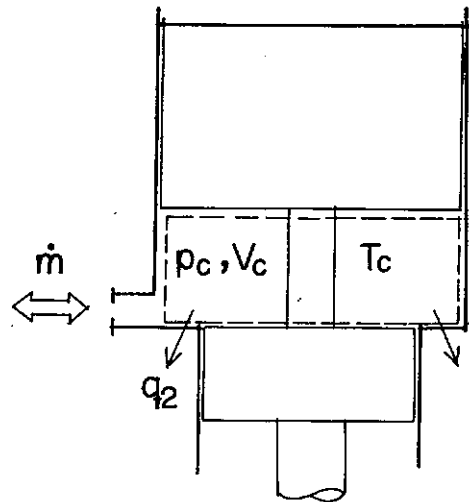


FIGURA IV.4 - EFEITO DE MISTURA NA CÂMARA DE EXPANSÃO

FIGURA IV.5 - EFEITO DE MISTURA NA CÂMARA DE COMPRESSÃO



(a) CÂMARA DE EXPANSÃO



(b) CÂMARA DE COMPRESSÃO

FIGURA IV.6 - VOLUMES DE CONTROLE

Nesse modelo, a temperatura com que o fluido incide nas câmaras será considerada sempre igual à temperatura média do fluido no regenerador ( $T_g$ ). Nesse caso, estaremos trabalhando sempre com uma eficiência de regeneração igual a 50%, ou seja:

$$\eta_R = \frac{T_e - T_g}{T_e - T_c} = \frac{T_e - (T_e + T_c)/2}{T_e - T_c} = 0.5$$

e qualquer gradiente de temperatura existente no regenerador deverá trazer melhorias à eficiência térmica.

#### IV.2.7 - O Balanço de Energia

No ciclo Stirling ideal, a compressão e a expansão se realizam isotermicamente. Na realidade os processos termodinâmicos que ocorrem no motor Stirling são bastante complexos. Na câmara de expansão, por exemplo, o fluido recebe calor do cabeçote, o volume da câmara é variável com as pressões, o fluxo de massa muda de sentido durante o ciclo e a velocidade de aquecimento da massa é variável no volume da câmara. Processos análogos ocorrem na câmara de compressão.

Embora seja difícil conhecer a distribuição de temperaturas dentro das câmaras a cada instante, podemos avaliar como variam no tempo essas temperaturas de uma maneira global.

Numa abordagem através de volumes de controle, podemos tratar os parâmetros termodinâmicos do fluido na câmara como assumindo valores médios, homogêneos em todo o espaço da câmara

ra e uma taxa de variação de temperatura média ( $\dot{T}$ ) refletirá a tendência do comportamento causada pelos vários efeitos simultâneos superpostos.

Desprezando as variações de energia cinética e potencial, e ainda, considerando como positivos o calor recebido pelo fluido e o trabalho realizado por ele, podemos aplicar um balanço de energia aos volumes de controle mostrados na Figura (IV.6.a) e (IV.6.b).

Os volumes de controle foram escolhidos de tal forma que se expandem ou se comprimem junto com os pistões. Nesse caso, devem ser incluídos termos que contabilizam o trabalho realizado pelas fronteiras dos volumes de controle.

Podemos escrever as equações do balanço de energia:

(i) Para a câmara de expansão:

$$\dot{q}_1 - \frac{\dot{w}}{J} = \oint_{SCE} (u + p/\rho) \rho \underline{v} \cdot d\underline{A} + \frac{d}{dt} \left[ \iiint_{VCE} u \rho dV \right] \quad (\text{IV.10.a})$$

Para o desenvolvimento da equação de energia, além das hipóteses iniciais já feitas, as seguintes hipóteses são usadas:

(i) o fluido de trabalho é um gás perfeito com calores específicos ( $C_p$  e  $C_v$ ) constantes

- (ii) o fluxo é unidimensional na entrada ou saída do volume de controle
- (iii) propriedades intensivas constantes em qualquer porção do fluido na câmara (homogeneidade)
- (iv) variações de energia cinética e potencial desprezíveis
- (v) perfil de velocidades uniforme em toda a área de entrada ou saída do volume de controle
- (vi) as perdas de calor para o ambiente são desprezadas

O termo de integral dupla na superfície do volume de controle contabiliza a taxa de energia interna e trabalho de fluxo da massa que cruza a fronteira. Deve-se levar em consideração, entretanto, que o fluido circula nos dois sentidos indo e vindo do regenerador. Quando  $\delta = 1$ , fluido entra no volume de controle com  $(p_g, T_g)$  e quando  $\delta = 0$ , fluido deixa o volume de controle com  $(p_e, T_e)$ .

Condensando o termo  $(u + p/\rho)$  em um termo de entalpia,

$$\oint_{SCE} (u + p/\rho) \rho \underline{V} \cdot d\underline{A} = -\delta [c_p T_g] \dot{m}_e - \bar{\delta} [c_p T_e] \dot{m}_e \quad (IV.10.b)$$

O termo de integral tripla computa o armazenamento ou decréscimo de energia interna no volume de controle. Então,

$$\frac{d}{dt} \left[ \iiint_{VCE} u \rho \, dV \right] = \frac{d}{dt} (c_v T_e m_e) = c_v \dot{T}_e m_e + c_v T_e \dot{m}_e \quad (\text{IV.10.c})$$

Finalmente, o trabalho da fronteira junto ao deslocador tem a forma:

$$\dot{w} = p_e \frac{dV_e}{dt}, \text{ ou, usando a derivada da equação (IV.1),}$$

$$\frac{dV_e}{dt} = - a_d \dot{y},$$

$$\dot{w} = - p_e a_d \dot{y} \quad (\text{IV.10.d})$$

Substituindo as expressões (IV.10.b a IV.10.d) na equação de energia (III.10.a) e explicitando  $\dot{T}_e$ , encontramos:

$$\dot{T}_e = [\dot{q}_1 + p_e a_d \dot{y}/J + c_p \dot{m}_e (\bar{\delta} T_e + \delta T_g) - c_v T_e \dot{m}_e] / c_v m_e \quad (\text{IV.11})$$

(ii) Para o cabeçote:

Embora a taxa de calor recebida de fonte externa pelo cabeçote ( $\dot{q}$ ) seja constante, a taxa de calor efetivamente entregue pelo cabeçote ao fluido na câmara de expansão ( $\dot{q}_1$ ) depende naturalmente da temperatura do fluido nessa câmara e da temperatura do cabeçote. O esquema da Figura (IV.7) ilustra o processo.

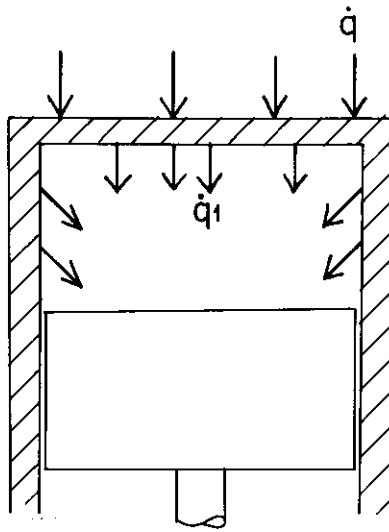


FIGURA IV.7 - TROCAS DE CALOR NO CABEÇOTE

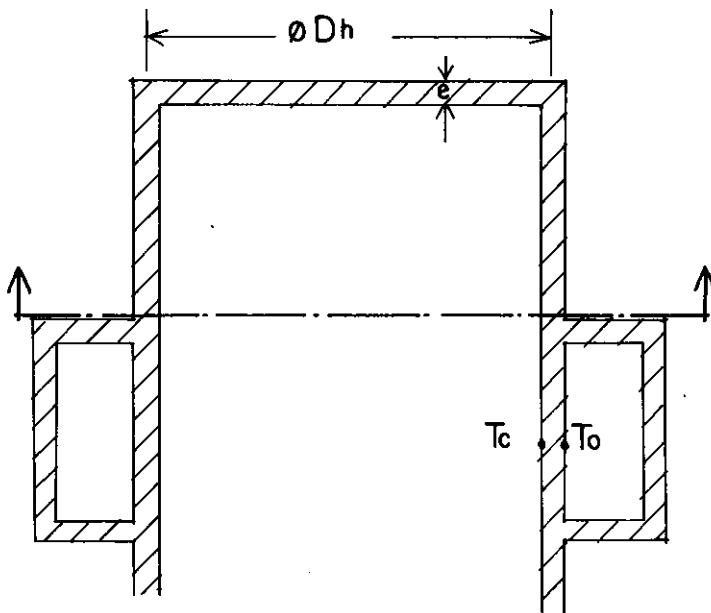
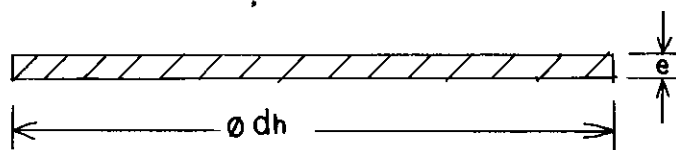


FIGURA IV.8 - REGIÃO DO CABEÇOTE ENVOLVIDA NAS TROCAS DE CALOR E O DISCO EQUIVALENTE.



DISCO EQUIVALENTE

A região do cabeçote realmente envolvida nessas trocas de calor é um cilindro fechado com diâmetro ( $D_h$ ); para facilitar os cálculos, essa região será considerada como um disco plano, de mesma área interna que o cilindro fechado real, mesma espessura de parede e um diâmetro equivalente ( $d_h$ ).

A Figura (IV.8) ilustra essa consideração:

Para essa região considerada, o número de Biot é:

$$B_i = \frac{\bar{h}}{K_t} \cdot e$$

Como geralmente a espessura da parede é pequena e a condutividade térmica é alta, o número de Biot é bastante baixo. Nesse modelo, a condução na parede do cabeçote e a radiação serão desprezadas e apenas o calor cedido ao fluido por convecção será considerado.

Segundo Holman [31] e Ösizik [32], para um disco plano de diâmetro ( $D$ ), com a face quente voltada para baixo, o coeficiente de transmissão de calor por convecção ( $h$ ) pode ser expresso por:

$$h = 0.61 \left| \frac{T_h - T_e}{D^2} \right|^{1/5} \quad |w/m^2 \text{ } ^\circ C|$$

onde  $T_h$  é a temperatura do disco.

A taxa de calor  $\dot{q}_1$  transmitida pelo cabeçote ao fluido por convecção será então:



$$\dot{q}_1 = \frac{0.61}{J} \left[ \frac{T_h - T_e}{dh^2} \right]^{1/3} a_h (T_h - T_e) \quad (\text{IV.12})$$

Um balanço de energia para o cabeçote fornece uma expressão para a temperatura ( $T_h$ ):

$$T_h = (\dot{q} - \dot{q}_1) / (m_h \cdot c) \quad (\text{IV.13})$$

onde  $m_h$  e  $c$  são a massa e o calor específico médio do cabeçote.

(iii) Para a câmara de compressão:

Da aplicação do balanço de energia para o volume de controle da Figura (IV.6.b) obtem-se:

$$\dot{q}_2 = \frac{\dot{W}}{J} = \oint_{SCC} (u+p/\rho) \rho \underline{V} \cdot d\underline{A} + \frac{d}{dt} \left[ \iiint_{VCC} u \rho dV \right] \quad (\text{IV.13.a})$$

onde  $\dot{q}_2$  é a taxa de calor que o fluido de trabalho perde na câmara de compressão, para o refrigerante.

Para chegar a uma expressão para a taxa de calor perdida pelo fluido do lado frio do motor as seguintes hipóteses são usadas:

(i) a temperatura da parede do lado interno da câmara é igual a temperatura do fluido ( $T_c$ ).

(ii) do lado externo da câmara, o refrigerante garante uma temperatura de parede constantemente baixa e igual a  $T_0$ .

Nesse caso, a perda de calor a ser considerada será apenas por condução e terá a forma:

$$\dot{q}_2 = - \frac{K_t}{b} a_0 (T_c - T_0) \quad (\text{IV.14})$$

onde: -  $K_t$  é a condutividade térmica média da parede  
 -  $b$  é a espessura da parede da câmara  
 -  $a_0$  é a área envolvida na troca de calor com o refrigerante

Além das hipóteses feitas acima, para o desenvolvimento da equação de energia nessa câmara serão usadas também as hipóteses (i) a (v) já feitas no item (a).

O termo de integral dupla na superfície de controle dessa câmara, levando em conta o sentido do fluxo, fica:

$$\oint_{SCC} (u+p/\rho) \rho \underline{V} \cdot d\underline{A} = - \bar{\delta}(c_p T_g) \dot{m}_c - \delta(c_p T_c) \dot{m}_c \quad (\text{IV.14.a})$$

O termo de integral tripla fica:

$$\frac{d}{dt} \left[ \iiint_{VCC} u \rho dV \right] = c_v \dot{T}_c m_c + c_v T_c \dot{m}_c$$

ou ainda substituindo  $m_c$  por  $p_c V_c / RT_c$ ,

$$\frac{d}{dt} \left[ \iiint_{V_{CC}} u \rho \, dV \right] = c_v \dot{T}_c \frac{p_c V_c}{RT_c} + c_v T_c \dot{m}_c \quad (\text{IV.14.b})$$

O trabalho realizado pela fronteira do volume de controle tem nesse caso duas componentes: trabalho realizado pela fronteira junto ao deslocador e junto ao pistão. Usando a derivada da equação (III.2), temos:

$$\dot{w} = p_c \frac{dV_c}{dt} = p_c [(a_d - a_r)\dot{y} - (a_p - a_r)\dot{x}] \quad (\text{IV.14.c})$$

Em virtude das considerações feitas sobre o fluxo de massa no regenerador ( $\dot{m}$ ) teremos instantaneamente:

$$\dot{m}_c = (2\bar{\delta} - 1)\dot{m} = -\dot{m}_e \quad (\text{IV.14.d})$$

Substituindo as equações (III.14.a) a (III.14.c) na equação do balanço de energia (III.13.a), e ainda, utilizando a equação (III.14.d) para  $\dot{m}_c$ , temos:

$$\begin{aligned} \dot{T}_c = \left\{ \dot{q}_2 - \frac{p_c}{J} [(a_d - a_r)\dot{y} - (a_p - a_r)\dot{x}] - c_p \dot{m}_e (\bar{\delta} T_g + \delta T_c) + \right. \\ \left. + c_v T_c \dot{m}_e \right\} RT_c / (c_v p_c V_c) \end{aligned} \quad (\text{IV.15})$$

As expressões (IV.1) a (IV.15) formam o sistema não-linear de equações proposto para descrever os principais fenômenos que ocorrem no Motor Stirling de Pistão Livre.

#### IV.3 - CONCLUSÕES

Através da consideração de alguns fenômenos que ocorrem no ciclo real do motor Stirling de pistão livre, um modelo matemático mais completo é estabelecido para descrever o comportamento dinâmico do sistema.

A principal diferença desta análise para aquelas desenvolvidas nos Capítulos II e III, surge das considerações de câmaras não-isotérmicas, regeneração não perfeita e perda de carga. Espera-se com a introdução de tais efeitos, oferecer a possibilidade de, numa etapa mais avançada do projeto, obter-se uma previsão realista do comportamento do sistema, com a ajuda da simulação digital.

## CAPÍTULO V

### SIMULAÇÃO DIGITAL E ESTUDO PARAMÉTRICO

Com a disponibilidade de um computador digital de grande porte, o modelo matemático estabelecido no capítulo anterior pode ser utilizado para se obter algumas respostas típicas do sistema e se conhecer, o efeito de algumas variáveis através de um estudo paramétrico.

#### V.1 - MODELAGEM PARA SIMULAÇÃO

O diagrama de blocos da Figura (V.1) mostra a estratégia de utilização das quinze equações do modelo matemático, na simulação digital do comportamento dinâmico do motor.

Examinando as equações que compoem o modelo, depa-ramos com um sistema composto por equações diferenciais de 1.<sup>a</sup> e 2.<sup>a</sup> ordem e por equações algébricas.

Usando do recurso de mudança de variáveis de tal maneira que:

$$\begin{array}{ll}
 Z1 = x & Z5 = m_e \\
 Z2 = \dot{x} & Z6 = T_e \\
 Z3 = y & Z7 = T_c \\
 Z4 = \dot{y} & Z8 = T_h
 \end{array}$$

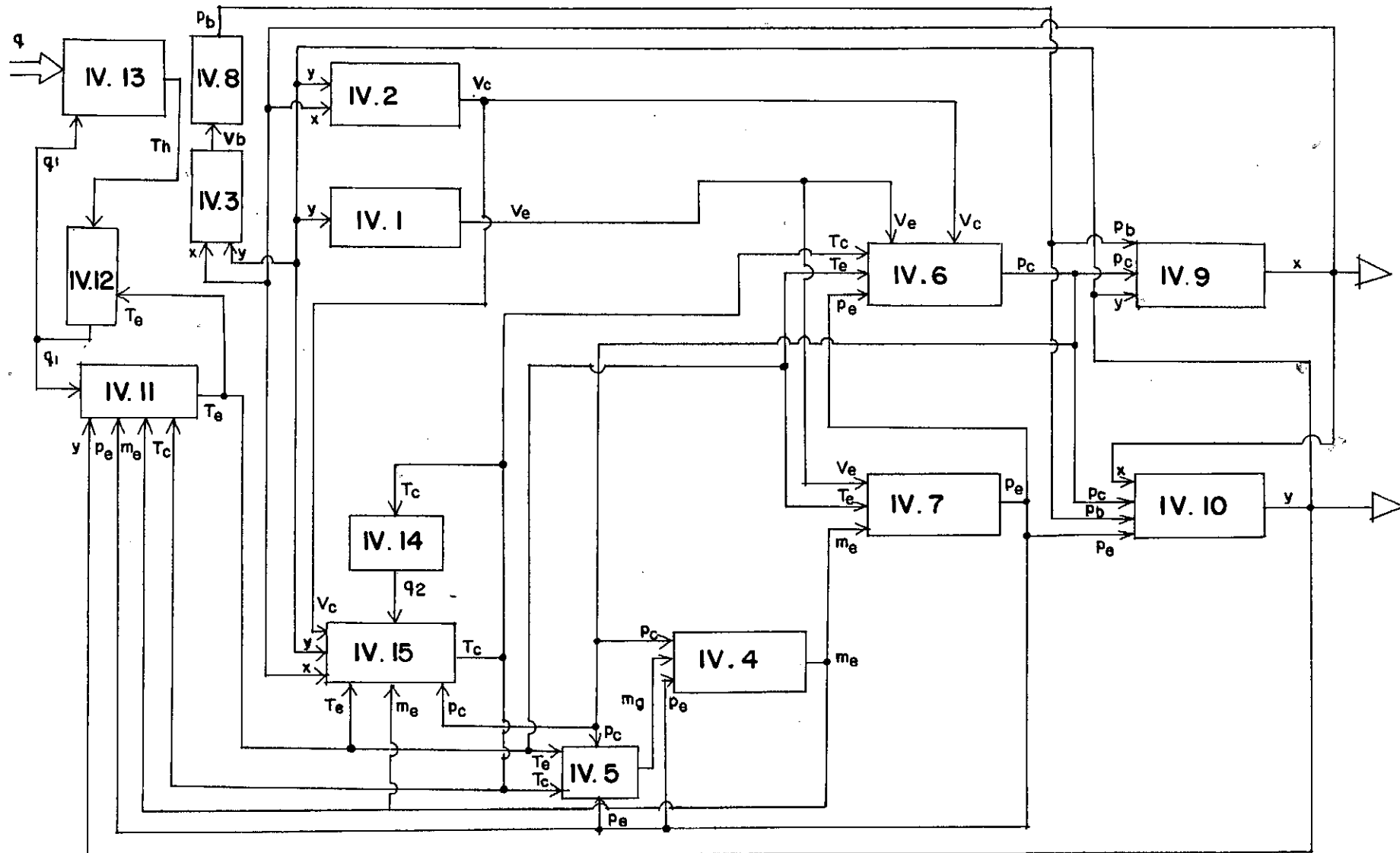


FIGURA V.1 - DIAGRAMA DE BLOCOS

podemos escrever o sistema de equações na forma canônica:

$$\dot{Z}_1 = Z_2 \quad (V.1)$$

$$\begin{aligned} \dot{Z}_2 = & [-(C_1 + f_\ell) Z_2 + C_2(Z_4 - Z_2) - (p_c - p_b)(a_p - a_r) + \\ & - m_p g] / m_p \end{aligned} \quad (V.2)$$

$$\dot{Z}_3 = Z_4 \quad (V.3)$$

$$\dot{Z}_4 = [-C_2(Z_4 - Z_2) - (p_e - p_c)(a_d - a_r) - (p_e - p_b) a_r - m_d g] / m_d \quad (V.4)$$

$$\dot{Z}_5 = (2\delta - 1) [m_g a_g^2 d_g |p_e - p_c| / (2 v_g f_a \ell g)]^{1/2} \quad (V.5)$$

$$\begin{aligned} \dot{Z}_6 = & \{ \dot{q}_1 + p_e a_d Z_4 / J + c_p \dot{Z}_5 [\bar{\delta} Z_6 + \delta(Z_6 + Z_7) / 2] + \\ & - c_v Z_6 \dot{Z}_5 \} / (c_v Z_5) \end{aligned} \quad (V.6)$$

$$\begin{aligned} \dot{Z}_7 = & \{ \dot{q}_2 - p_c [(a_d - a_r) Z_4 - (a_p - a_r) Z_2] / J - c_p \dot{Z}_5 \cdot \\ & \cdot [\delta \cdot Z_7 + \bar{\delta}(Z_6 + Z_7) / 2] + c_v Z_7 \dot{Z}_5 \} \cdot R \cdot Z_7 / (c_v p_c v_c) \end{aligned} \quad (V.7)$$

$$\dot{Z}_8 = (\dot{q} - \dot{q}_1) / (m_h \cdot C) \quad (V.8)$$

junto com as equações algébricas:

$$v_e = a_d(\ell - \ell_5 - Z_3) \quad (V.9)$$

$$V_c = (a_d - a_r) (Z3 - \ell_3) + (a_p - a_r) (\ell_3 - \ell_4 - Z1) \quad (V.10)$$

$$V_b = V_B + a_p Z1 + a_r Z3 \quad (V.11)$$

$$p_c = [m_a R - p_e (V_e / Z6 + V_g / (Z6 + Z7))] / [V_c / Z7 + V_g / (Z6 + Z7)] \quad (V.12)$$

$$p_e = Z5 \cdot R \cdot Z6 / V_e \quad (V.13)$$

$$p_b = p_B (V_B / V_b)^Y \quad (V.14)$$

$$\dot{q}_1 = 0.61 a_h (Z8 - Z6)^{4/3} / [J(d_h)^{2/3}] \quad (V.15)$$

$$m_g = (p_e + p_c) V_g / |R(Z6 + Z7)| \quad (V.16)$$

$$\dot{q}_2 = -k_t a_0 (Z7 - T_0) / b \quad (V.17)$$

Desta forma o modelo pode receber a aplicação de um método numérico com a finalidade de simular o comportamento do sistema.

## V.2 - OS PROGRAMAS DESENVOLVIDOS PARA SIMULAÇÃO

Foram desenvolvidos dois programas em linguagem FORTRAN para simular a operação do motor segundo o modelo matemático do Capítulo IV.

(i) ST/PRINTER1 - com saída em impressora

(ii) ST/PLOTTER1 - com saída gráfica



Ambos utilizam o método de Runge-Kutta de 4ª ordem, descrito com detalhes na referência [33], para integrar numericamente o sistema de equações (V.1) a (V.17), a partir de condições iniciais dadas.

Utilizando a rotina de Rung-Kutta, os programas foram desenvolvidos de tal forma que no ST/PRINTER1, a saída numérica possibilitasse a facilidade de obtenção dos valores ponto a ponto de qualquer variável e no ST/PLOTTER1, a saída gráfica possibilitasse a visualização global do desempenho do motor.

O fluxograma do programa ST/PRINTER1 está mostrado na Figura V.2. Esse programa fornecerá a resposta da simulação no tempo, ponto a ponto em intervalo desejado, com valores de posições e velocidades do pistão e do deslocador, pressões, volumes, temperaturas e massas do fluido em cada câmara e temperatura do cabeçote.

A partir da monitoração de um ciclo (passada a fase de regime transiente), fornecerá ainda a amplitude e a frequência do movimento do pistão de potência e resolverá as integrais:

$$Q_e = \oint p_e dV_e$$

e

$$Q_c = \oint p_c dV_c$$

para encontrar: calor transferido na câmara de expansão ( $Q_e$ ) e

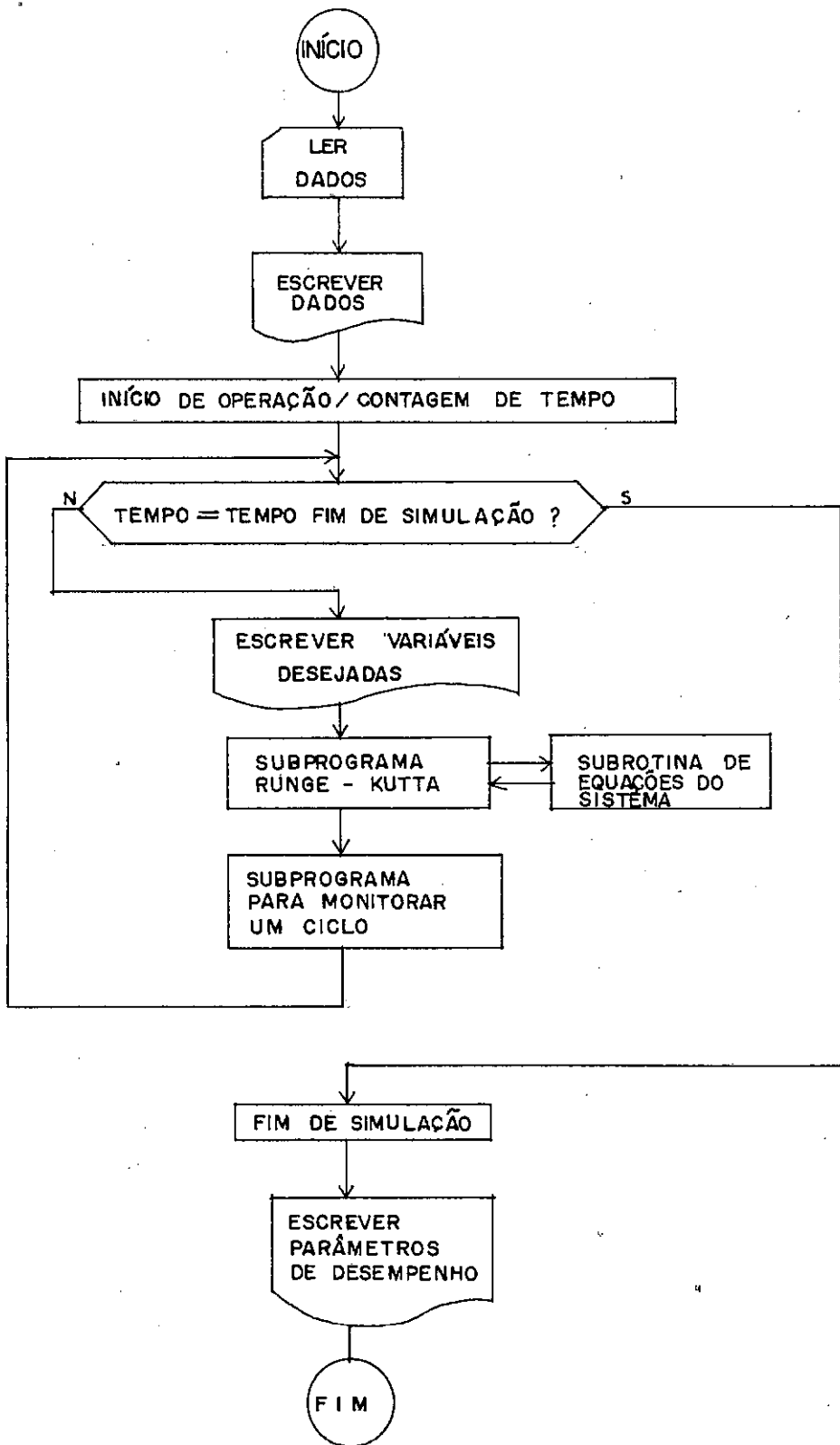


FIGURA V. 2 - FLUXOGRAMA ST / PRINTER 1

na de compressão ( $Q_c$ ) em um ciclo, trabalho por ciclo ( $w$ ) e eficiência térmica ( $\eta$ ), onde ( $w$ ) e ( $\eta$ ) são calculados segundo:

$$W = Q_e + Q_c$$

já que o regenerador é considerado adiabático e

$$\eta = W/(J \cdot Q_e)$$

Outras saídas se desejadas podem ser incluídas com facilidade dentro da rotina.

O fluxograma do programa ST/PLOTERR1, com saída gráfica, está mostrado na Figura (V.3). Esse programa foi preparado para utilizar o "plotter" CALCOMP do NCE/UFRJ fornecendo a resposta gráfica no tempo de pressões e temperaturas em cada câmara, posições do pistão e do deslocador, temperatura do cabeçote e ainda, ciclo pressão x volume, diagrama de deslocamento relativo  $[(y-x) \times V_d]$  e a trajetória do movimento do pistão no plano de fase.

### V.3 - SIMULAÇÃO DO DESEMPENHO DE UM MOTOR TÍPICO

#### V.3.1 - O Motor Simulado

O motor simulado aqui, visando a obtenção de respostas típicas para essa classe de motores Stirling, é o motor descrito por J. L. Scieszko na referência <sup>[26]</sup>, onde podem ser

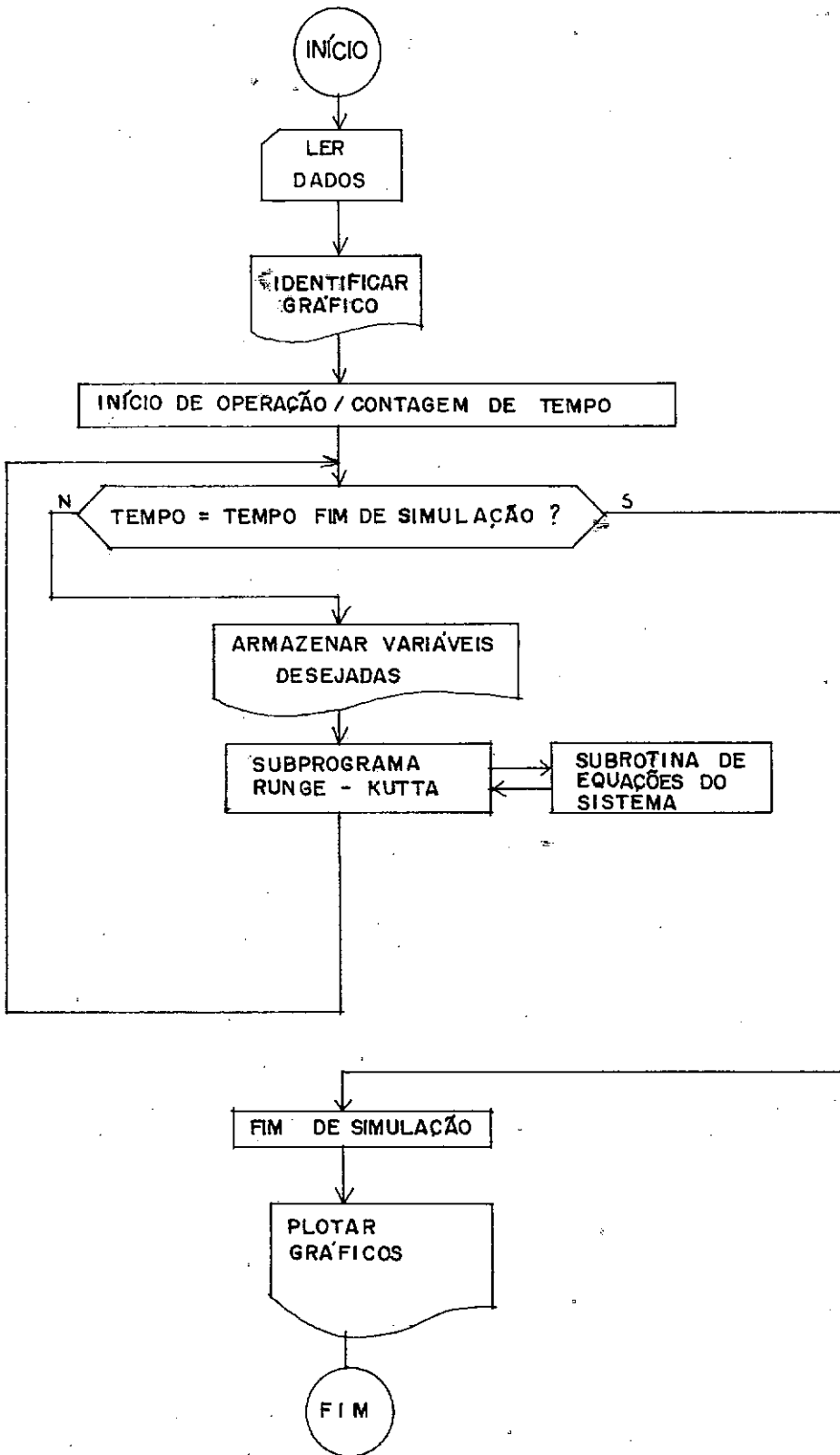


FIGURA V. 3 - FLUXOGRAMA ST/ PLOTER 1

encontrados todos os dados relativos à geometria do motor e ainda, valores do seu desempenho medido em bancada.

O esquema desse motor está reproduzido na Figura (V.4), como funcionou em bancada.

Esse motor não possui um regenerador explícito, embora a folga entre o deslocador e o cilindro também funcione como um regenerador. Para efeito de cálculos, o motor foi considerado como possuindo um regenerador de comprimento igual ao do deslocador e seção igual à área de folga, perpendicular ao eixo do motor, como visto na Figura (V.5). O atrito entre o deslocador e o cilindro ( $c_2$ ) deve, nesse caso, ser substituído pelo fator de atrito ( $f_a$ ) e uma hipótese de escoamento laminar deve ser inicialmente feita. Ao final da simulação, o número de Reynolds deve ser avaliado e no caso de escoamento turbulento, a força de atrito pode ser substituída por um termo da forma  $(-f_a |\dot{y}| \dot{y})$ .

O espaço de compensação também foi excluído e a parte inferior do motor está aberta para a atmosfera. Nesse caso, as equações para  $p_b$  e  $v_b$  foram excluídas e a pressão  $p_b$  foi substituída pelo valor constante da pressão atmosférica.

Os sinais das forças devido à ação da gravidade, também foram trocados nas equações (V.2) e (V.4), já que a posição em que funcionou em bancada é a inversa da que o modelo matemático pressupõe.

Estão disponíveis para esse motor, além da sua geometria, as temperaturas do cabeçote e do refrigerante, a amplitude do movimento do pistão e a frequência, medidos experimentalmente no motor sem carga, com ar como fluido de trabalho.



### V.3.2 - Considerações Sobre o Diagrama P-V

Como já foi apontado anteriormente, uma das dificuldades no tratamento analítico do motor Stirling surge do fato de que diferentes porções do fluido de trabalho percorrem ciclos termodinâmicos distintos. Nesse caso não seria possível traçar um único ciclo pressão e volume para o fluido de trabalho.

Numa tentativa de visualizar o comportamento termodinâmico do fluido de trabalho como um todo, os diagramas P-V foram construídos utilizando a pressão  $p_c$ , já que esta é a pressão responsável pelo trabalho produzido pelo pistão de potência, e o volume deslocado total ( $V_d$ ), onde:

$$V_d = V_e + V_c + V_g$$

Quanto ao uso da pressão  $p_c$  para todo o fluido de trabalho não existe nenhuma dificuldade, já que como será visto, as pressões  $p_c$  e  $p_e$  diferem muito pouco durante todo o ciclo. Fica entretanto necessário lembrar que, ao traçar o ciclo  $p_c \times V_d$  (com  $p_c \approx p_e$ ) para o motor, estamos traçando o ciclo termodinâmico do fluido de trabalho como se o seu volume total ( $V_d$ ) estivesse a cada instante com uma só temperatura, aqui chamada de temperatura equivalente ( $T_{eq}$ ). Essa temperatura pode ser encontrada dividindo-se o produto ( $p_c V_d$ ) pela massa total do fluido:

$$m_a R = \frac{p_c V_c}{T_c} + \frac{p_e V_e}{T_e} + \frac{p_g V_g}{T_g}$$

ou

$$T_{eq} = (p_c V_d) / (p_c V_c / T_c + p_e V_e / T_e + p_g V_g / T_g) \quad (V.18)$$

Essa é a temperatura que pode ser observada nos diagramas p-V traçados e equivale à temperatura que a massa total do fluido assumiria se o seu volume total a cada instante, estivesse todo a uma temperatura  $\bar{T}$  ( $T_{eq}$ ) e a uma  $\bar{p}$  pressão ( $p_c$ ).

Enquanto o uso de ciclos termodinâmicos distintos para cada câmara não nos fornece uma informação global sobre o motor, o ciclo  $p_c \times V_d$  traçado facilita a avaliação do desempenho do motor, uma vez que a área no interior do ciclo representa diretamente o trabalho por ciclo do motor, dentro dos limites de igualdade entre  $p_e$  e  $p_c$ , ou seja:

$$\int p_c V_d = \int p_c dV_c + \int p_c dV_e \cong (Q_c + Q_e) \cdot J = W$$

### V.3.3 - Análise dos Resultados

#### (a) Simulação do Desempenho do Motor sem Carga:

A resposta gráfica da simulação do motor sem carga e sem atrito no pistão está mostrada na Figura (V.6). Algumas observações importantes podem ser feitas a partir da análise desses seis gráficos:



\*\* RESPOSTA PARA O MODELO COMPLETO \*\*  
 INTERVALO DE INTEGRAÇÃO=0.000001 SEG  
 CALOR DE FONTE EXTERNA =1.5 CAL/SEG  
 CARGA NO PISTÃO =0.0 N/(M/S)  
 \* VALORES INICIAIS (SI) \*  
 X =0.000 XD=0.500 Y =0.066 YD=0.000  
 PE=0.763 PC=0.763 TE=500.0 TC=300.0  
 TH=620.0

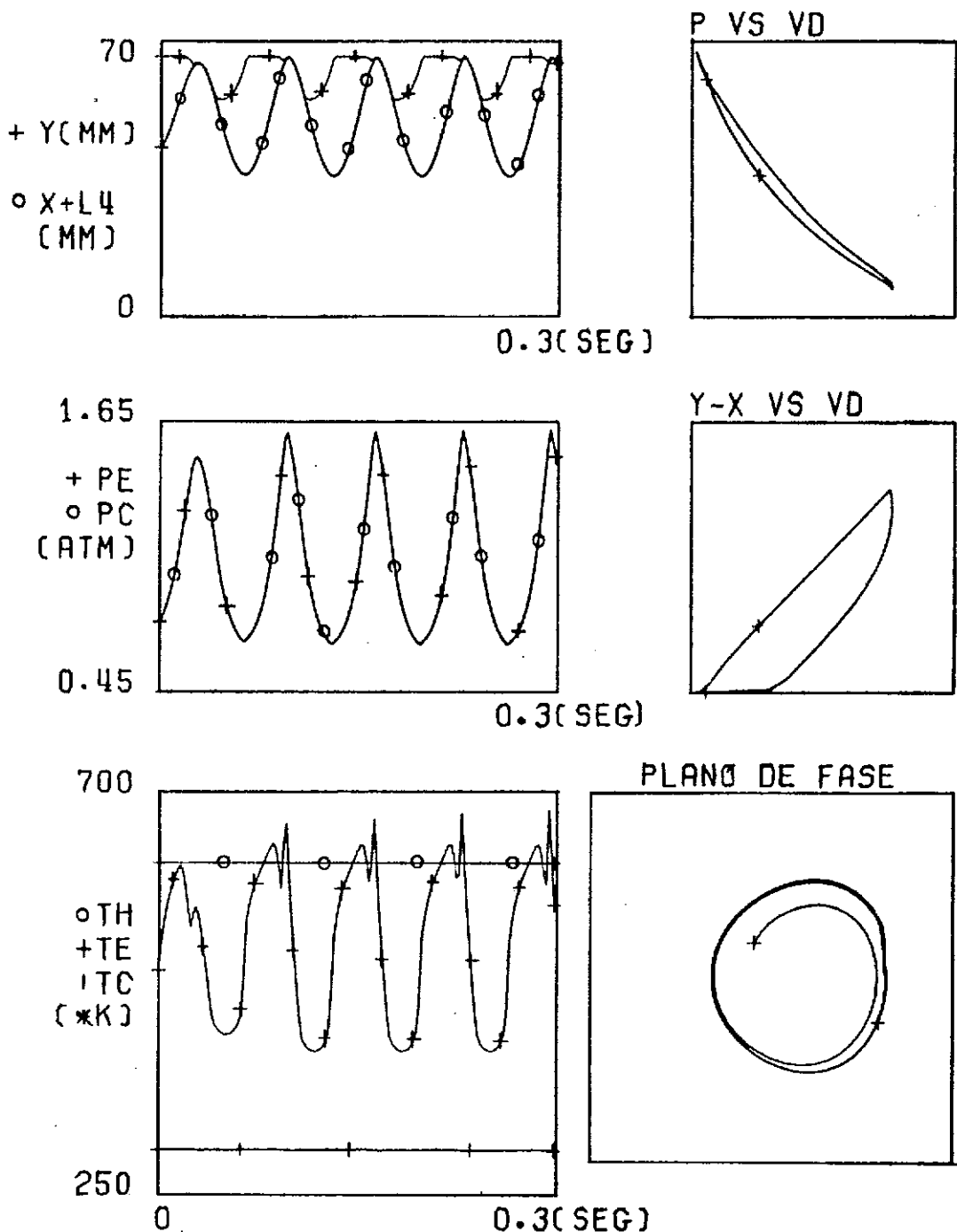


FIGURA V.6 - SIMULAÇÃO DO DESEMPENHO DO MOTOR SEM CARGA

- (i) dada uma condição inicial, o motor apresenta uma fase curta de regime transiente (aproximadamente um ciclo), entrando em seguida em regime permanente, mantendo o comportamento cíclico dos parâmetros bastante regular; a existência do ciclo limite está caracterizada pela trajetória fechada obtida no plano de fase ( $\dot{x}$ ,  $x$ ).
- (ii) nas curvas ( $x$  e  $y$ ) vemos que as fases de aquecimento e resfriamento do fluido estão longe de acontecer a volume constante, como requer o ciclo ideal; no resfriamento, o deslocador está subindo, forçando o fluido a escoar para a câmara fria, enquanto o pistão ainda está descendo, finalizando a fase de expansão e aumentando o volume total ocupado pelo fluido; a fase de aquecimento, caracterizada pela descida do deslocador, está bastante curta, pois muito cedo no seu percurso, o deslocador encontra o pistão subindo, obrigando-o a fazer um pequeno retorno; essa é uma característica do desempenho do motor sem carga. A aplicação de carga no pistão diminuiria a velocidade do pistão e conseqüentemente sua posição de máximo, possibilitando a descida livre do deslocador durante um período maior de tempo, como será visto.
- (iii) o diagrama de deslocamentos relativos, onde está mostrada a evolução da diferença de posições pistão-deslocador ( $y-x$ ) com o volume total deslocado ( $V_d$ ), ilustra a característica do ciclo apontada no item (ii).

- (iv) o gráfico de pressões mostra que as pressões ( $p_c$  e  $p_e$ ) das duas câmaras evoluem praticamente juntas e a diferença ( $p_e - p_c$ ) é desprezível ( $< 0.05$  atm); essa pode ser considerada uma característica particular dessa configuração que não possui um regenerador explícito.
- (v) o comportamento cíclico da temperatura  $T_e$  apresenta dois picos de máximo devido ao pequeno retorno do deslocador quando se choca com o pistão, logo depois de haver iniciado o seu movimento de descida; nesse retorno o volume e a massa do fluido na câmara de expansão diminuem, enquanto a pressão sobe havendo conseqüentemente um aumento na temperatura.
- (vi) a temperatura do cabeçote ( $T_h$ ) aparece constante com o tempo; obviamente a grande inércia térmica do cabeçote é a responsável por essa característica.
- (vii) o comportamento praticamente constante da temperatura ( $T_c$ ) pode ser entendido levando em conta o grande volume morto nessa câmara, como mostra a Figura (V.9.a); como a quantidade de massa de fluido nessa câmara é sempre bem maior que na câmara quente, a temperatura ( $T_c$ ) fica pouco sensível às variações de pressão; e ainda, com  $m_c$  sempre relativamente grande, o efeito de mistura é pouco sentido nessa câmara.
- (viii) após a simulação, o número de Reynolds do escoamento no regenerador foi calculado e verificou-se que o valor de  $f_a$  usado (0.035) foi um pouco superestimado, forçando uma condição desfavorável à operação.

(b) O Efeito da Posição de Operação do Motor:

Um teste com o motor operando segundo o posicionamento da Figura (V.7), ou seja, na posição inversa da que foi operado em bancada, mantendo todos os outros parâmetros da simulação anterior, gerou os gráficos da Figura (V.8). Essa simulação mostrou que:

- (i) a fase de regime transiente ficou mais longe das mesmas condições iniciais
- (ii) a amplitude do movimento do pistão aumentou cerca de 22.8%, provocando um aumento de cerca de 7,45% na amplitude das pressões, embora os pontos de máximo tenham se mantido iguais.
- (iii) a frequência do motor diminuiu cerca de 8,37% diminuindo também o trabalho por ciclo em cerca de 6,78% e a potência indicada em 14,5%.
- (iv) com essa variação do trabalho por ciclo, o rendimento térmico diminuiu em 15,4% do valor inicialmente obtido.
- (v) a posição anterior parece ser realmente mais favorável para o desempenho do motor.

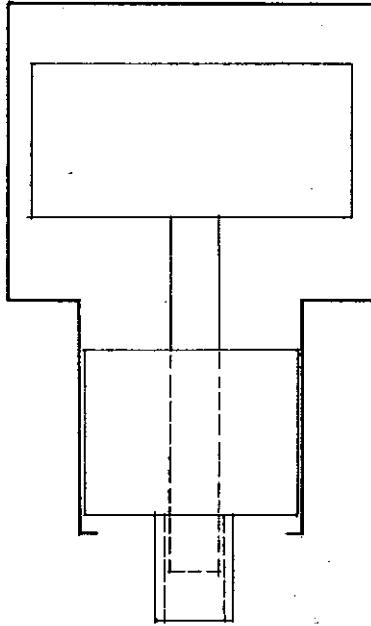


FIGURA V. 7 - POSIÇÃO  
DE OPERAÇÃO INVERTIDA

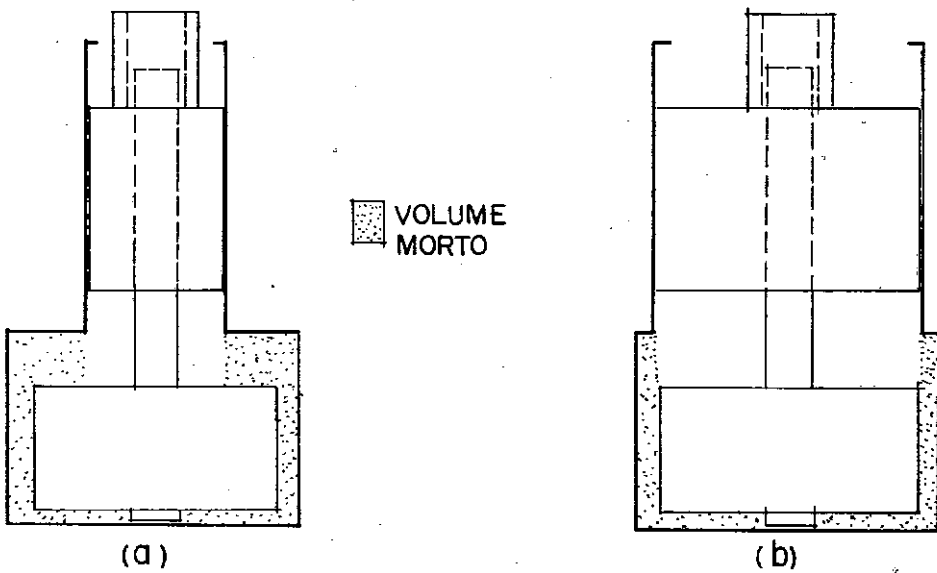


FIGURA V. 9 - MODIFICAÇÃO NO DIÂMETRO  
DO PISTÃO.

\*\* RESPOSTA PARA O MODELO COMPLETO \*\*  
 INTERVALO DE INTEGRAÇÃO=0.000001 SEG  
 CALOR DE FONTE EXTERNA =1.5 CAL/SEG  
 CARGA NO PISTÃO =0.0 N/(M/S)

\* VALORES INICIAIS (SI) \*

X =0.000 XD=0.500 Y =0.066 YD=0.000  
 PE=0.763 PC=0.763 TE=500.0 TC=300.0  
 TH=620.0

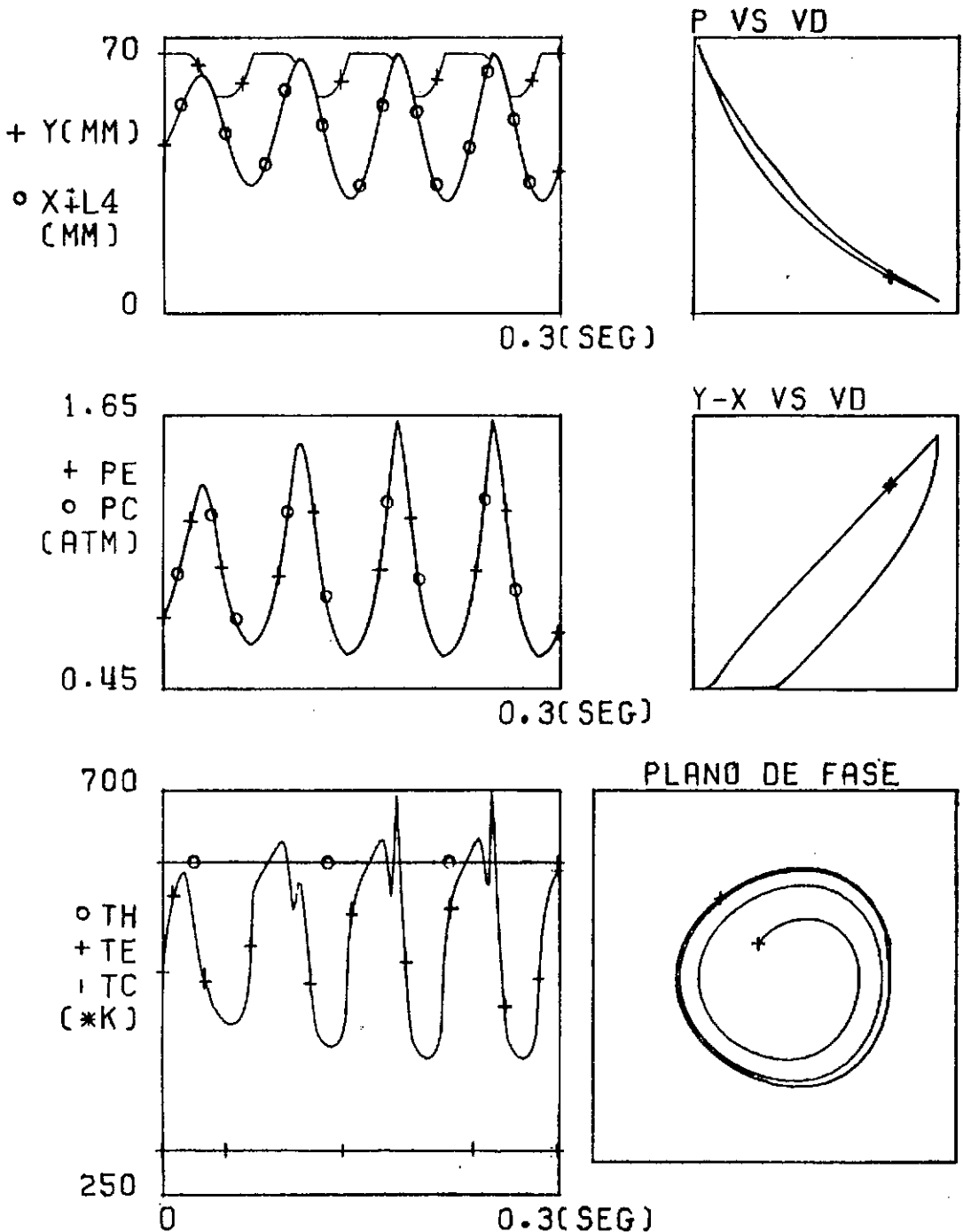


FIGURA V.8 - SIMULAÇÃO DA OPERAÇÃO EM POSIÇÃO INVERTIDA

c) O Efeito do Diâmetro do Pistão:

Para verificar a influência do diâmetro do pistão no comportamento do motor, esse diâmetro foi aumentado como mostram as Figuras (V.9.a) e (V.9.b).

A massa total do fluido de trabalho, que é calculada automaticamente pelo programa com base no volume total do fluido dado pela posição de zero do pistão, teve que ser aumentada, para manter a pressão média do fluido em torno de 1 atm., na nova geometria do motor.

Deve-se notar que com o aumento do diâmetro do pistão, o volume morto do motor foi diminuído, como mostra a Figura (V.9.b).

Na Figura (V.10) estão os resultados obtidos dessa simulação. Esses gráficos mostraram a superposição de vários efeitos, consequência do aumento do diâmetro do pistão:

- (i) a diminuição do volume morto melhorou o deslocamento relativo pistão-deslocador; aqui a fase de aquecimento do fluido está bem clara e com duração maior; quando o pistão atinge seu máximo o deslocador já evoluiu sozinho algum tempo no seu movimento de descida, aquecendo o fluido e contribuindo para o aumento das pressões.
- (ii) o aumento da área do pistão ( $a_p$ ) sobre a qual incide a pressão ( $p_c$ ) provocou também um aumento das forças resul

**\*\* RESPOSTA PARA O MODELO COMPLETO \*\***  
 INTERVALO DE INTEGRAÇÃO=0.000001 SEG  
 CALOR DE FONTE EXTERNA =1.5 CAL/SEG  
 CARGA NO PISTÃO =0.0 N/(CM/S)  
 \* VALORES INICIAIS (SI) \*  
 X =0.000 XD=0.500 Y =0.066 YD=0.000  
 PE=0.691 PC=0.691 TE=500.0 TC=300.0  
 TH=620.0

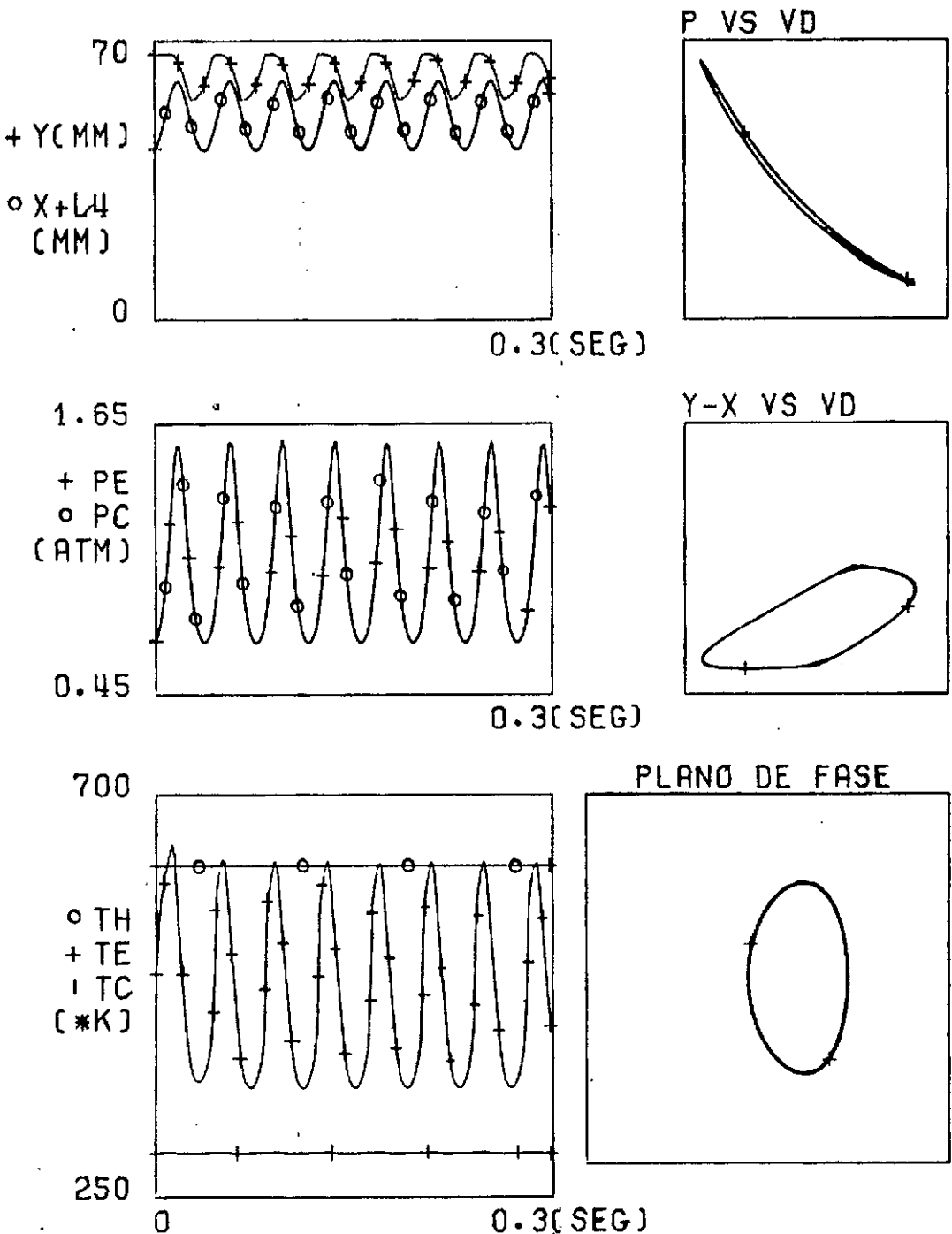


FIGURA V.10 - O EFEITO DO AUMENTO DO DIAMETRO DO PISTÃO



- tantes agindo no pistão; como consequência houve um aumento na frequência.
- (iii) embora a amplitude do movimento do pistão tenha diminuído, a amplitude das pressões se manteve praticamente inalterada.
- (iv) o efeito positivo esperado de um aumento do ponto de máximo das pressões pela fase de aquecimento mais longa não foi obtido porque um outro efeito se superpôs negativamente: a diminuição da temperatura média na câmara de expansão; a queda na média de  $T_e$  pode ser entendida levando em conta o efeito de mistura e a regeneração não-perfeita; se o deslocador desloca maior massa de fluido do regenerador para a câmara de expansão, a tendência é diminuir a temperatura média dessa câmara, caso a taxa de calor cedida ao cabeçote se mantenha constante, como foi feito.
- (v) a diminuição da amplitude do movimento do pistão pode ser entendida com base no que foi descrito no item (iv); o efeito da diminuição de  $T_e$  e  $T_g$  na pressão é maior nesse caso e portanto não é necessário que o volume ( $V_c$ ) aumente muito (ou o pistão desça muito) para fazer a pressão cair ao seu valor de mínimo.
- (vi) o efeito de mistura também teve seu reflexo na temperatura  $T_c$ ; antes, o deslocador transfêria toda a massa para

a câmara fria, antes de iniciar a fase de compressão; isso ajudou a manter uma temperatura ( $T_c$ ) constante; como nessa simulação o pistão inicia a compressão enquanto o deslocador ainda transfere a massa de fluido mais quente para a câmara fria, a consequência é um pequeno aumento cíclico na temperatura ( $T_c$ ).

- (vii) o aumento do volume deslocado ( $V_d$ ) pelo aumento do diâmetro do pistão teve um efeito maior nas temperaturas equivalentes do que a diminuição da temperatura ( $T_e$ ); a consequência foi um aumento nas temperaturas equivalentes vistas no diagrama P-V dessa simulação.

(d) O Efeito da Aplicação de Carga (Curvas Características):

O gráfico da Figura (V.11) mostra uma resposta típica da operação do motor com carga.

Como o valor do coeficiente de atrito atuando entre o pistão e o cilindro não era conhecido e já que este parâmetro atua no pistão exatamente como uma carga proporcional à velocidade, vários valores de carga total foram simulados, considerando que nessa carga está incluído o efeito do atrito desconhecido.

Dessa maneira, as curvas das Figuras (V.12.a) e (V.12.b) correspondem às respostas obtidas para os parâmetros de desempenho do motor, para os valores usados de carga total, se-

\*\* RESPOSTA PARA O MODELO COMPLETO \*\*  
 INTERVALO DE INTEGRAÇÃO=0.000001 SEG  
 CALOR DE FONTE EXTERNA =1.5 CAL/SEG  
 CARGA NO PISTAØ =2.3 N/(M/S)  
 \* VALORES INICIAIS (SI) \*  
 X =-0.023XD=1.000 Y =0.066 YD=0.000  
 PE=0.520 PC=0.520 TE=500.0 TC=300.0  
 TH=620.0

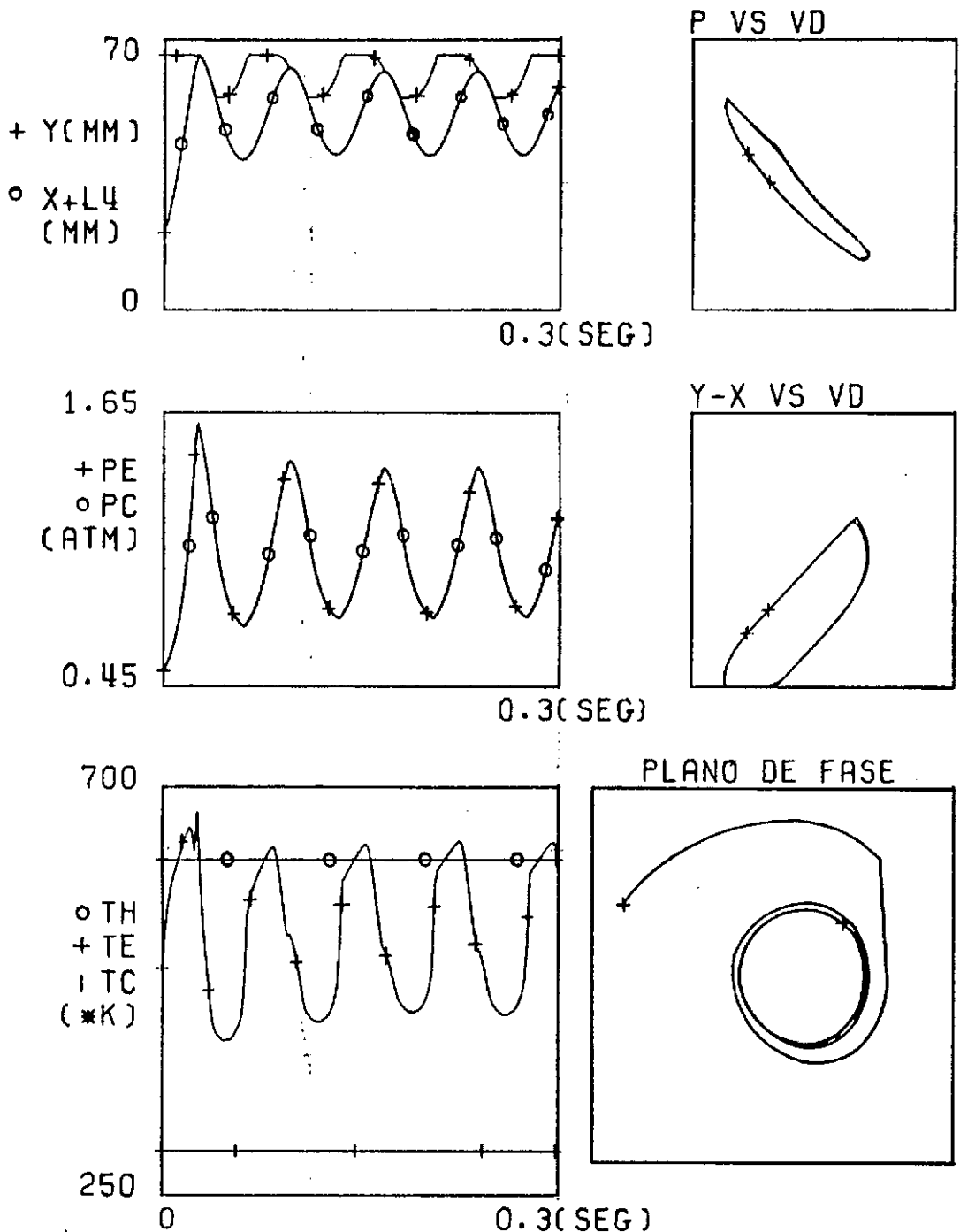


FIGURA V.11 - O EFEITO DA APLICAÇÃO DE CARGA

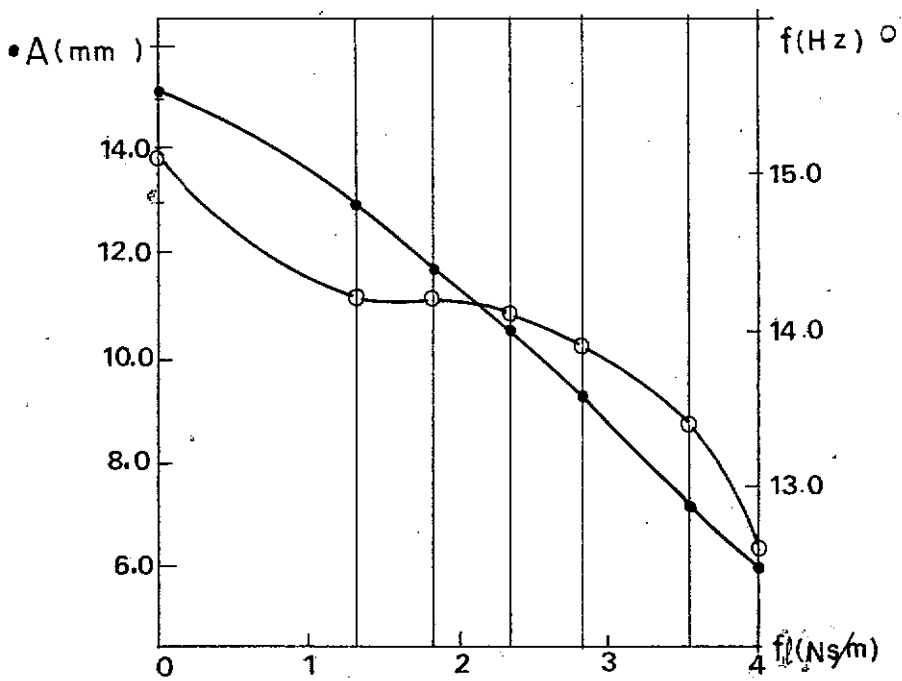


FIGURA V.12.a - CURVAS CARACTERISTICAS:  
FREQUÊNCIA E AMPLITUDE.

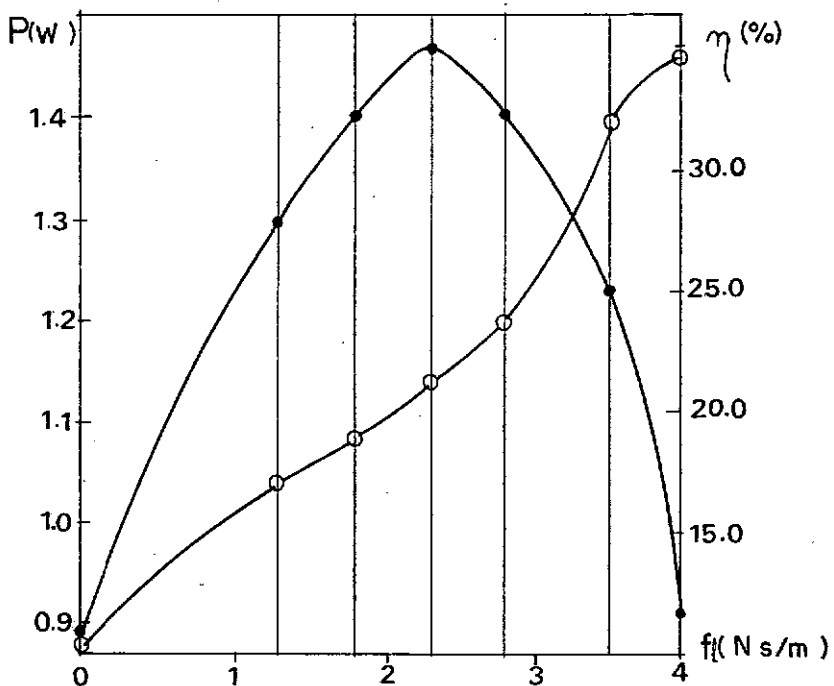


FIGURA V.12.b - CURVAS CARACTERISTICAS:  
POTÊNCIA E EFICIÊNCIA TÉRMICA.

gundo a Tabela (V.1), mantendo sempre a taxa de calor cedida ao cabeçote constante.

$f_{\ell}$ [NS/m]	0.0	1.3	1.8	2.3	2.8	3.5	4.0
W [J/ciclo]	0.059	0.090	0.099	0.104	0.101	0.092	0.072
f [Hz]	15.090	14.202	14.228	14.113	13.941	13.424	12.636
P [W]	0.890	1.278	1.409	1.468	1.408	1.235	0.910
A [mm]	15.15	12.90	11.60	10.60	9.30	7.05	6.00
$\eta$ [%]	10.4	17.0	18.9	21.2	23.5	32.1	34.4

TABELA V.1 - Resposta do sistema à aplicação de carga

Da análise das respostas do sistema à aplicação de carga, as seguintes observações podem ser feitas:

(i) Amplitude:

Como é natural para uma massa que oscila, a amplitude do movimento do pistão diminui sempre com a aplicação de carga; operando segundo a posição da Figura (V.4), o peso do pistão é favorável à compressão e desfavorável à expansão do fluido; com a aplicação de carga, a tendência é diminuir mais a fase de expansão do que a de compressão, modificando a posição média do pistão e diminuindo o valor médio do volume ( $V_c$ ) no ciclo.

(ii) Temperatura da Câmara de Expansão ( $T_e$ ):

Como já foi visto, a temperatura ( $T_e$ ) é mais sensível às variações do movimento do pistão do que a temperatura ( $T_c$ ). Com o encurtamento da fase de expansão do fluido pela aplicação de carga, o efeito é um aumento contínuo na média da temperatura ( $T_e$ ).

(iii) Temperatura Equivalente ( $T_{eq}$ ):

Levando em conta a expressão (V.18) para temperatura equivalente, dois efeitos se superpoem para aumentar a variação dessa temperatura durante um ciclo do motor:

- . a diminuição da média do volume ( $V_c$ ), como visto no item (i)
- . o aumento da média da temperatura ( $T_e$ ), como visto no item (ii)

(iv) Trabalho por Ciclo:

A diminuição da amplitude do movimento do pistão, com conseqüente diminuição do volume deslocado total, e o aumento da variação da temperatura equivalente, são os dois fatores que mais influenciam o trabalho por ciclo. A combinação desses dois fatores, com predominância inicial do segundo, faz com que o comportamento do trabalho por ciclo apresente um ponto de máximo.

## (v) Frequência:

Sobre a frequência incidem também o efeito de dois fatores opostos já descritos:

- v a aplicação de carga, que freiando o pistão tende a diminuir a sua velocidade média
- . o pequeno aumento na média da pressão ( $p_c$ ), causado pela diminuição do valor médio do volume ( $V_c$ ) e pelo aumento da média da temperatura ( $T_e$ ); como a pressão ( $p_c$ ) é, em última análise, a responsável pela movimentação do pistão, esse aumento tenderá a aumentar a velocidade média do pistão.

Na maior parte da curva característica de frequência, o primeiro efeito descrito é o predominante e as duas tendências se contrabalançam apenas num pequeno trecho da curva para formar um curto patamar.

## (vi) Potência:

A curva característica de potência acompanha a tendência da curva do trabalho por ciclo.

Embora a frequência diminua sempre, o aumento inicial do trabalho por ciclo é predominante, fazendo com que essa curva possua também um ponto de máximo.

(vii) Eficiência Térmica:

O aumento na média da temperatura ( $T_e$ ), descrito no item (ii), junto com o comportamento praticamente constante da temperatura ( $T_c$ ) são os responsáveis pelo aumento progressivo do rendimento térmico com a aplicação de carga.

#### V.3.4 - Simulação de Condições Anormais de Operação

O uso das respostas gráficas para o reconhecimento das condições em que o motor está operando pode ser muito útil no projeto do motor.

Com o objetivo de conhecer a resposta do sistema para condições anormais de operação, dois testes foram feitos:

(a) Teste de Insuficiência de Calor:

A Figura (V.13) corresponde à resposta obtida de uma simulação em que a taxa de calor de fonte externa ( $\dot{q}$ ) foi fixada em zero, partindo de uma temperatura alta do cabeçote ( $T_h$ ).

Para que a evolução das temperaturas possa ser vista em tempo curto, a massa do cabeçote foi drasticamente reduzida.

A temperatura do cabeçote cai continuamente e o fluido na câmara quente não é aquecido suficientemente para man-



\*\* RESPOSTA PARA O MODELO COMPLETO \*\*  
 INTERVALO DE INTEGRAÇÃO=0.000001 SEG

CALOR DE FONTE EXTERNA =0.0 CAL/SEG  
 CARGA NO PISTÃO =0.0 N/(M/S)

\* VALORES INICIAIS (SI) \*

X =0.000 XD=0.500 Y =0.066 YD=0.000  
 PE=0.763 PC=0.763 TE=500.0 TC=300.0  
 TH=620.0

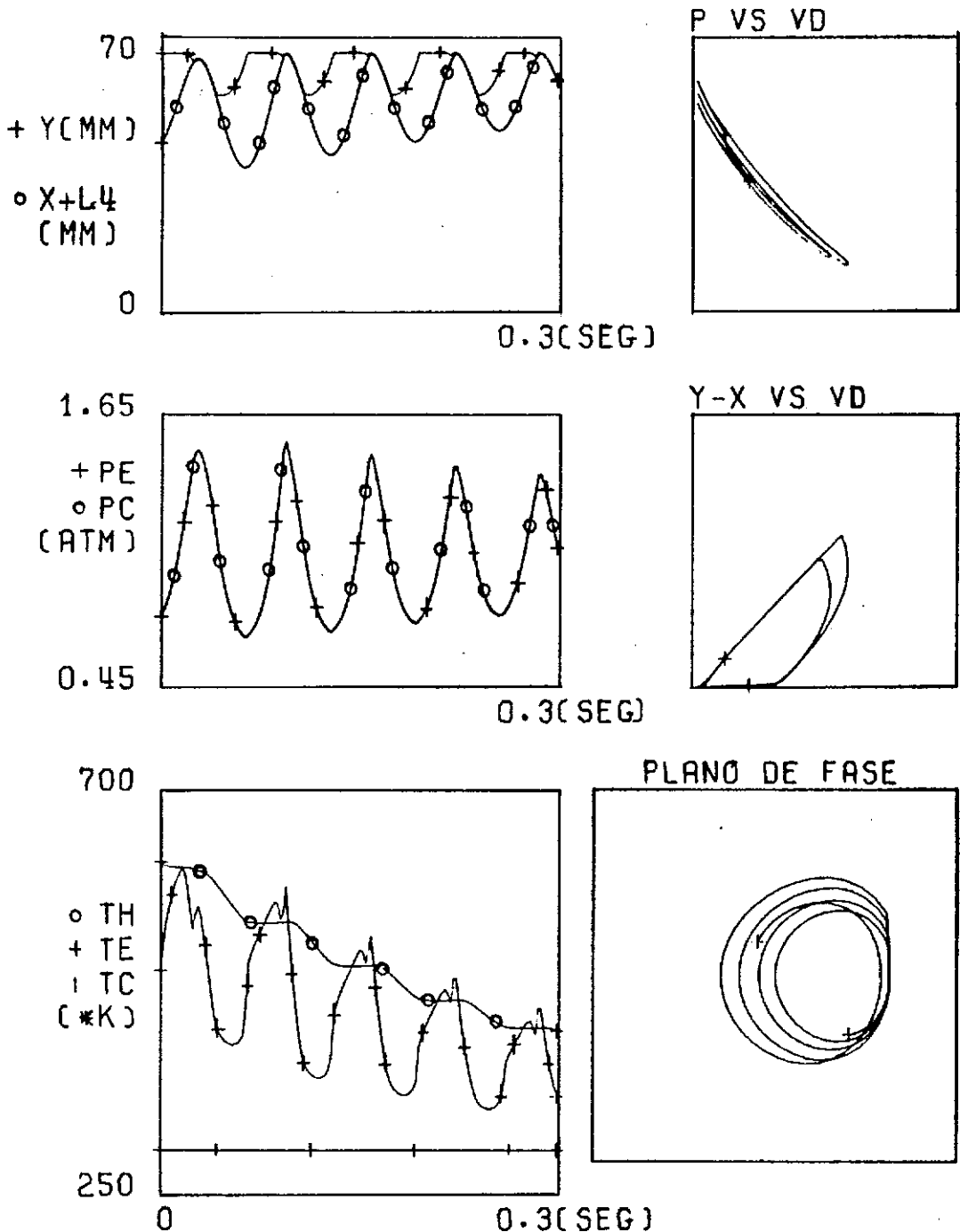


FIGURA V.13 - RESPOSTA TÍPICA DE MOTOR INSUFICIENTEMENTE AQUECIDO

ter o movimento dos pistões.

Essas configurações, principalmente as de temperaturas, são sinais concretos para o projetista de que o motor está insuficientemente aquecido.

(b) Teste de Sobrecarga:

A Figura (V.14) mostra as características do motor sobrecarregado. Aqui, o movimento do pistão é fortemente amortecido por uma carga elevada, impedindo a circulação necessária do fluido entre as câmaras e aquecendo o motor.

Essa resposta do movimento do pistão, no tempo e no plano de fase, é característica do motor sobrecarregado.

#### V.4 - COMPARAÇÃO DE RESULTADOS

Uma comparação rigorosa entre os valores experimentais obtidos e os resultados da simulação não foi possível, uma vez que o valor exato do coeficiente de atrito era desconhecido. Ainda assim, como o coeficiente de atrito equivale a uma carga aplicada ao pistão, foi verificado que para um valor virtual de:

$$C_1 = 2.8 \text{ [Ns/m]}$$

os resultados da simulação se aproximam melhor dos valores experimentais obtidos por Scieszko <sup>[26]</sup>, medidos para o motor sem carga.

\*\* RESPOSTA PARA O MODELO COMPLETO \*\*  
 INTERVALO DE INTEGRAÇÃO=0.000001 SEG  
 CALOR DE FONTE EXTERNA =1.5 CAL/SEG  
 CARGA NO PISTÃO =10.0 N/(M/S)  
 \* VALORES INICIAIS (SI) \*  
 X =-0.023XD=1.000 Y =0.066 YD=0.000  
 PE=0.520 PC=0.520 TE=500.0 TC=300.0  
 TH=620.0

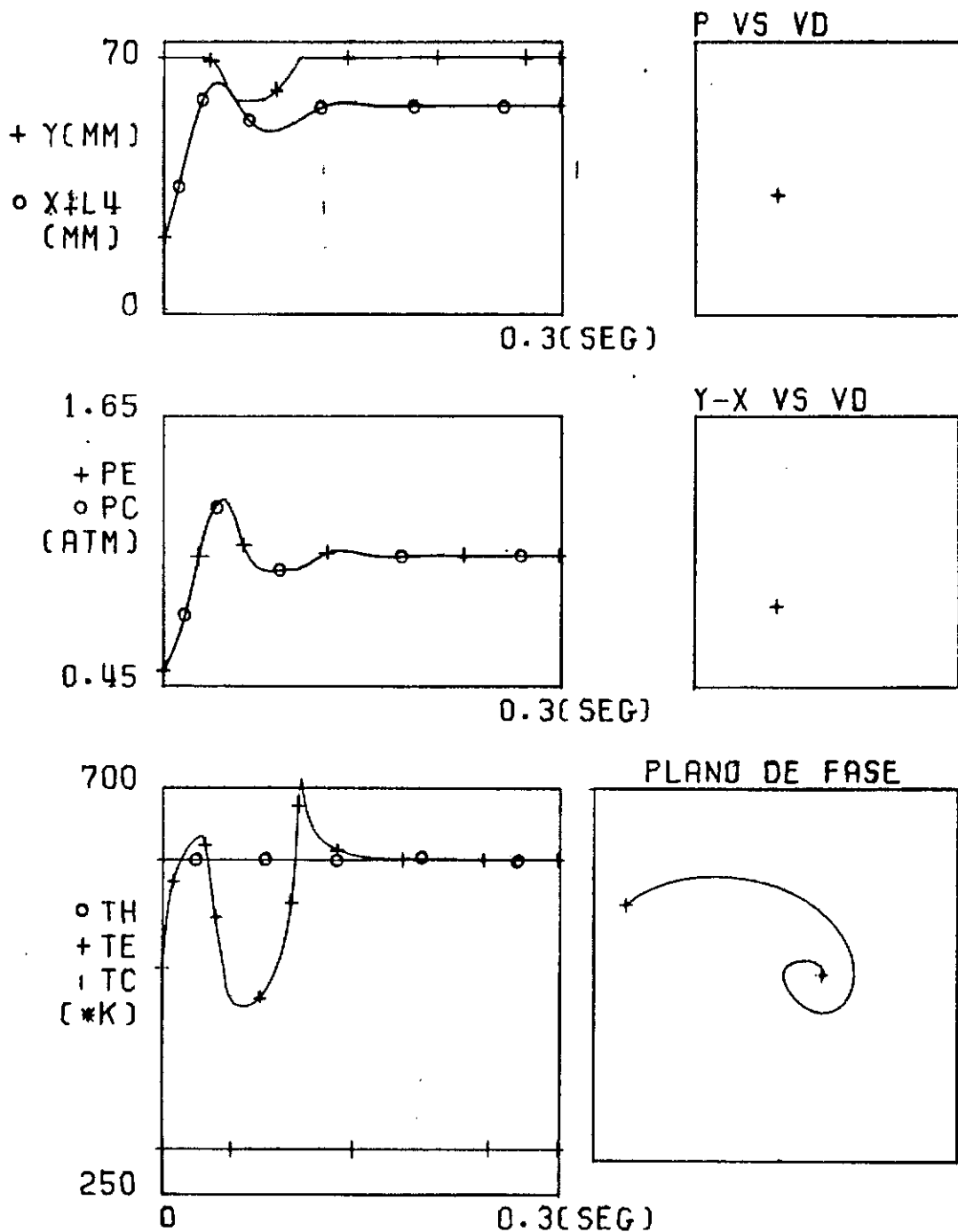


FIGURA V.14 - RESPOSTA TÍPICA P/MOTOR SOBRECARREGADO

Essa comparação está mostrada na Tabela (V.2).

PARÂMETRO	SIMULAÇÃO $C_1 = 0$	SIMULAÇÃO $C_1 = 2.8$	EXPERIMENTAL
f [Hz]	15.090	13.941	14
A [mm]	15.15	9.3	9.5

TABELA V.2 - Comparação de resultados para o motor sem carga

#### V.5 - CONCLUSÕES

A aplicação de um método numérico ao sistema de equações a que se chegou no capítulo anterior, mostrou que a simulação digital do comportamento do motor através daquele modelo é viável, oferecendo soluções numéricas para as variáveis do sistema, com os ciclos se repetindo regularmente no tempo.

Essas soluções se apresentaram sempre fisicamente compatíveis, comprovando que a introdução no modelo de alguns fenômenos, não equacionados pela análise ideal, pode ser feita, conduzindo a previsões realistas do desempenho do motor.

A comparação com resultados experimentais, embora necessitando ainda de uma avaliação mais detalhada, indicou a possibilidade de uma boa concordância.

Observou-se que o intervalo de integração satisfatório é função da geometria do motor e, para esse caso simulado, teve que assumir valores reduzidos, em detrimento do tempo total

de processamento.

A redução do tempo de processamento consumido parece atraente e a imposição de hipóteses simplificadoras ao modelo matemático para simulação digital, pode vir a oferecer vantagens nesse sentido.

## CAPÍTULO VI

### O MODELO MATEMÁTICO SIMPLIFICADO

#### VI.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS

Considerando o alto grau de não-linearidade do modelo matemático apresentado no Capítulo IV, não seria produtiva a sua utilização para a obtenção de respostas rápidas do sistema à variação dos parâmetros de projeto.

Com o objetivo de simplificar aquele modelo, diminuindo o tempo de processamento em computador e viabilizando a aplicação da simulação digital repetidamente na otimização do projeto, duas simplificações podem ser feitas:

- (i) pressão uniforme ao longo dos compartimentos do motor
- (ii) câmaras isotérmicas.

Essas considerações estão bastante frequentes na literatura [3], [6] e livram o modelo matemático das três mais fortes não-linearidades presentes.

A hipótese de pressão uniforme equivale a desconsiderar a perda de carga e leva à eliminação da equação de fluxo de massa no regenerador (IV.4); a hipótese de compartimentos isotérmicos implica na eliminação das equações do balanço de energia (IV.11), (IV.15) e será utilizada junto com a hipótese de

regeneração perfeita.

## VI.2 - O SISTEMA SIMPLIFICADO DE EQUAÇÕES

Conservando todas as outras hipóteses feitas no Canítulo IV, as equações do modelo matemático simplificado são:

$$V_e = a_d(\ell - \ell_5 - y) \quad (\text{VI.1})$$

$$V_c = (a_d - a_r)(y - \ell_3) + (a_p - a_r)(\ell_3 - \ell_4 - x) \quad (\text{VI.2})$$

$$V_b = V_B + a_p x + a_r y \quad (\text{VI.3})$$

$$p = m_a R / [V_e / T_e + V_c / T_c + V_g / T_g] \quad (\text{VI.4})$$

$$p_b = p_B (V_B / V_b)^{\gamma} \quad (\text{VI.5})$$

$$\ddot{x} = |-(c_1 + f_\ell)\dot{x} + c_2(\dot{y} - \dot{x}) - (p - p_b)(a_p - a_r) - m_p g| / m_p \quad (\text{VI.6})$$

$$\ddot{y} = |-c_2(\dot{y} - \dot{x}) - (p - p_b) a_r - m_d g| / m_d \quad (\text{VI.7})$$

onde:

-  $p_e$ ,  $p_c$  e  $p_g$  foram substituídos por  $p$ , indiferentemente para qualquer compartimento e o termo em  $(p_e - p_c)$  na equação (IV.10) desaparece.

-  $T_e$ ,  $T_c$  e  $T_g$  são constantes e  $T_g = (T_e + T_c)/2$ , mantendo a hipó

tese da temperatura do fluido no regenerador, feita no Capítulo IV.

O sistema de equações acima, a menos da hipótese de temperatura média no regenerador, é o mesmo utilizado no Capítulo II para, depois de um processo de linearização das equações, chegar a soluções analíticas de forma fechada.

### VI.3 - SIMULAÇÃO DIGITAL

Introduzindo as simplificações descritas nos programas desenvolvidos para simular o modelo mais completo, dois outros programas foram obtidos:

- (i) ST/PRINTER2 - com saída em impressora
- (ii) ST/PLOTTER2 - com saída gráfica

O mesmo motor mostrado na Figura (V.4) foi simulado através do modelo simplificado, com vistas a caracterizar os efeitos das simplificações impostas, comparando os resultados com os do modelo mais completo.

Para a escolha da temperatura ( $T_c$ ) constante na câmara de compressão foi utilizado o valor praticamente constante obtido das simulações anteriores; na escolha do valor da temperatura ( $T_e$ ) da câmara quente, embora a prática mostre que na maioria dos projetos a operação do motor é simulada com o fluido da câmara quente na mesma temperatura que o cabeçote, foram utili



zados valores médios para  $T_e$ , obtidos nas simulações anteriores, já que usar para a isotérmica de  $T_e$  o valor da temperatura do cabeçote, invalidaria uma comparação entre as respostas dos dois modelos.

### VI.3.1 - Desempenho Comparativo do Motor Simulado

#### (a) Simulação do Desempenho do Motor sem Carga:

A Figura (VI.1) mostra a resposta gráfica obtida da simulação do desempenho do motor sem carga e sem atrito no pistão.

O desempenho comparativo do motor simulado sem carga pelo modelo simplificado apresentou as seguintes características:

- (i) fase de regime transiente mais curta, dadas as mesmas condições iniciais
- (ii) amplitude do ciclo de pressão menor e amplitude do movimento do pistão maior que no modelo mais completo
- (iii) trabalho por ciclo bem maior e frequência de pistão ligeiramente menor, superestimando a potência do motor
- (iv) defasagem pistão/deslocador ligeiramente menor do que no modelo mais completo

\*\* RESPOSTA PARA O MODELO ISOTERMICO \*\*  
 INTERVALO DE INTEGRAÇÃO=0.001000 SEG  
 CARGA NO PISTÃO =0.0 N/(M/S)

\* VALORES INICIAIS (SI) \*  
 X =0.000 XD=0.500 Y =0.066 YD=0.000  
 PE=0.763 PC=0.763 TE=500.0 TC=300.0

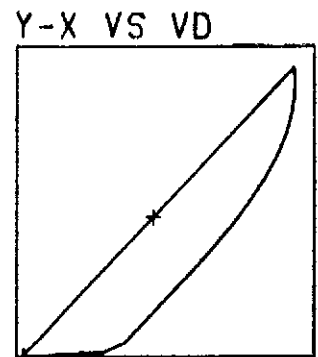
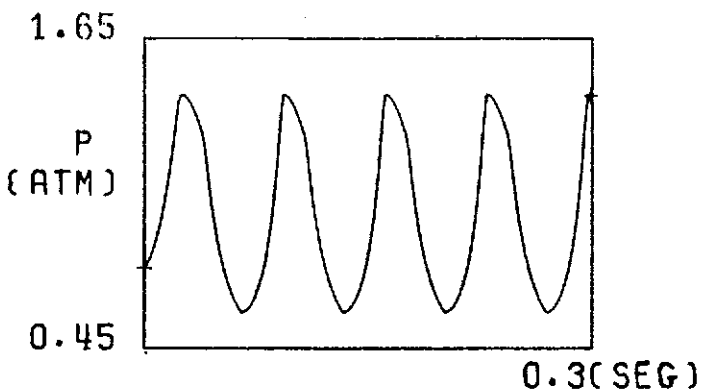
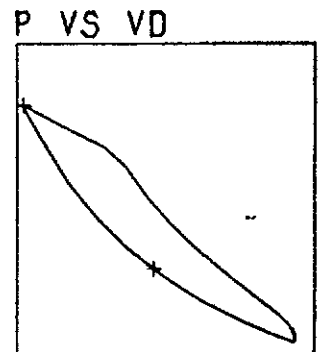
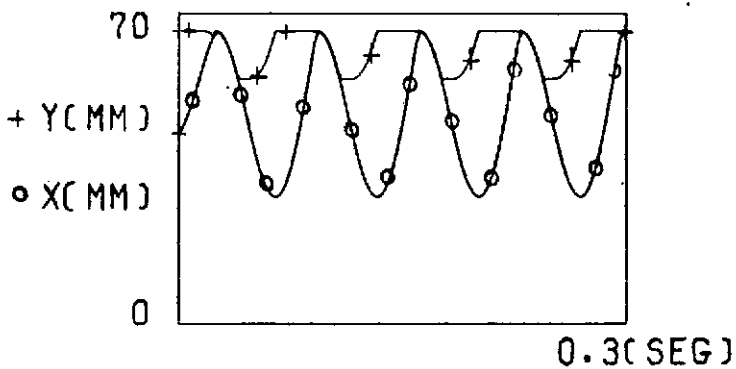


FIGURA VI.1 - SIMULAÇÃO DE DESEMPENHO DO MOTOR SEM CARGA

- (v) eficiência térmica igual à eficiência de Carnot, obviamente dentro dos limites de precisão da integração numérica.

Para o ciclo termodinâmico  $p \times V_d$  plotado, podemos escrever novamente a temperatura equivalente. Aqui entretanto, com a pressão homogênea ao longo do motor e as temperaturas constantes, essa temperatura fica função apenas da distribuição volumétrica do fluido nos compartimentos do motor, ou seja: se na equação (V.18) fizermos  $p_c = \bar{p}_e = p_g$ , teremos:

$$T_{eq} = [V_d/V_e/T_e + V_c/T_c + V_g/T_g] \quad (VI.8)$$

A equação (VI.8) descreve a evolução de temperatura do fluido no ciclo  $p \times V_d$  traçado, equivalendo à temperatura que o fluido assumiria se todo o seu volume estivesse a cada instante em um único estado termodinâmico ( $p, T_{eq}$ ).

#### (b) Simulação do Desempenho do Motor com Carga

Os gráficos gerados a partir da simulação do desempenho do motor com carga

$$f_\ell = 1.3 \text{ [Ns/m]}$$

estão na Figura (VI.2).

\*\* RESPOSTA PARA O MODELO ISOTERMICO \*\*  
 INTERVALO DE INTEGRAÇÃO=0.001000 SEG  
 CARGA NO PISTÃO =1.3 N/(CM/S)

\* VALORES INICIAIS (SI) \*  
 X =0.000 XD=0.500 Y =0.066 YD=0.000  
 PE=0.763 PC=0.763 TE=500.0 TC=300.0

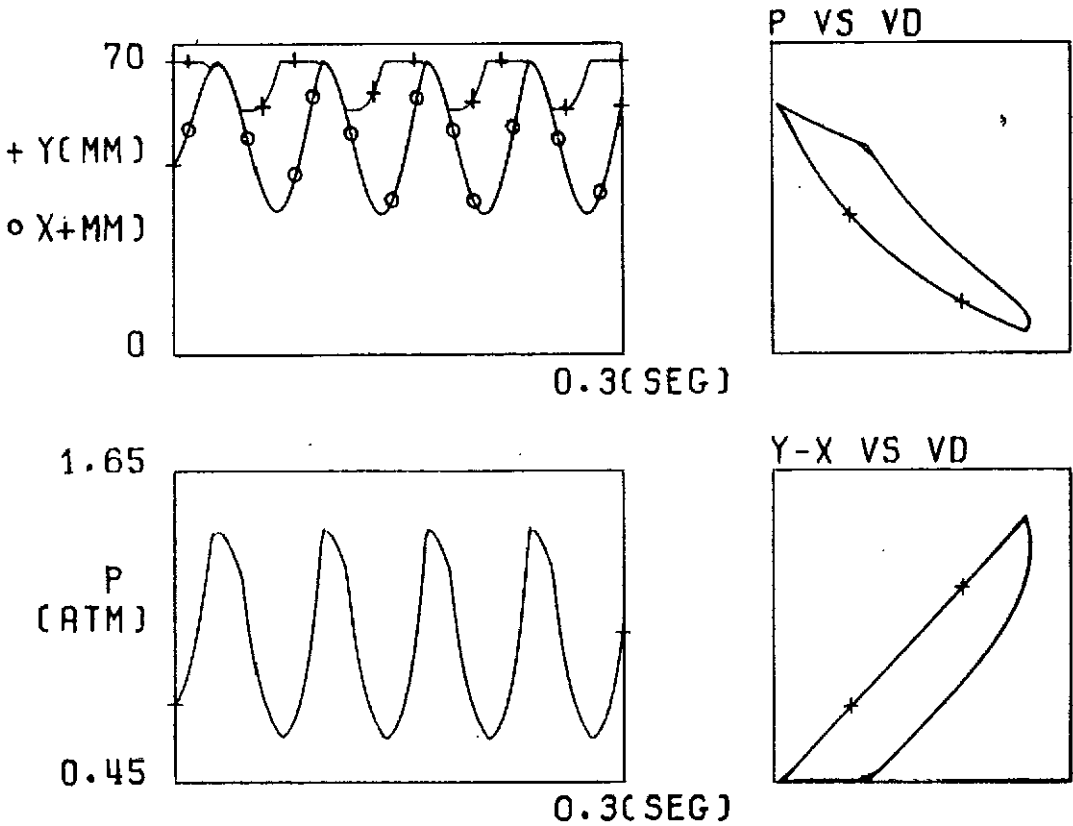


FIGURA VI.2 - SIMULAÇÃO DE DESEMPENHO DO MOTOR COM CARGA

A análise desse desempenho simulado do motor será considerada no item (c).

(c) Resposta do Sistema à Aplicação de Carga (Curvas Características):

Na Figura (VI.3) estão mostradas as curvas características obtidas a partir da simulação do desempenho do motor pelo modelo simplificado. Foram usados vários valores de carga total, assumindo que nessa carga está incluído o efeito do atrito entre o pistão e o cilindro. Os resultados numéricos estão resumidos na Tabela VI.1.

$f_l$ [Ns/m]	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
W [J/ciclo]	0.254	0.248	0.240	0.210	0.194	0.172
f [Hz]	14.706	14.521	13.994	13.507	13.565	13.353
P [W]	3.735	3.601	3.358	2.836	2.632	2.297
A [mm]	18.5	17.0	15.5	12.5	9.5	7.5
$\eta$ [%]	39.96	39.98	39.99	39.65	39.39	39.89

TABELA VI.1 - Resposta do sistema à aplicação de carga

Esses resultados mostraram que:

- (i) a amplitude do movimento do pistão cai sempre com o aumento de carga, diminuindo portanto o volume deslocado total

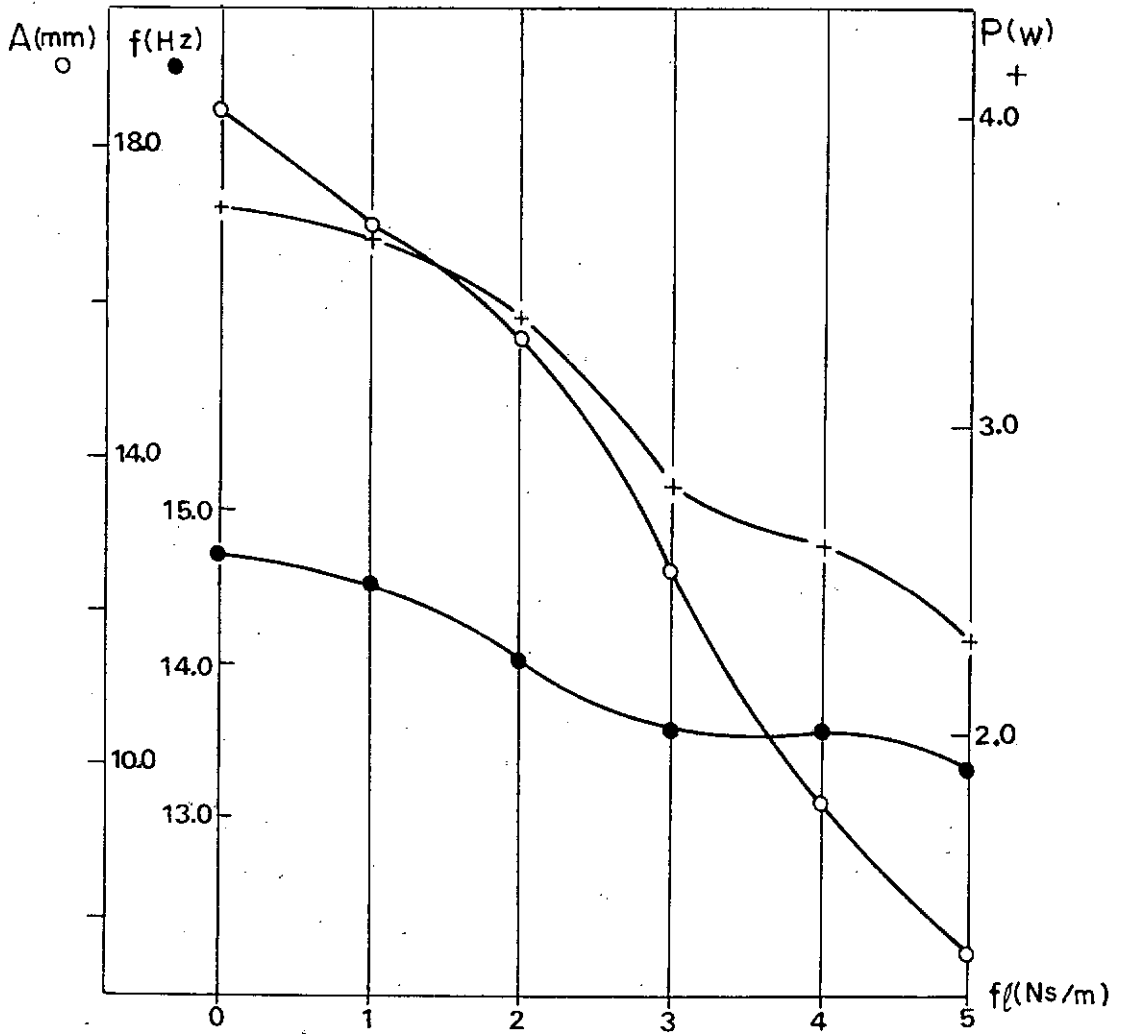


FIGURA VI.3 - CURVAS CARACTERÍSTICAS.

- (ii) o decréscimo na amplitude do movimento do pistão obriga à diminuição do trabalho por ciclo, já que as temperaturas são mantidas constantes
- (iii) embora a amplitude do movimento do pistão e o trabalho por ciclo diminuam, a eficiência térmica ficou sempre em torno da eficiência de Carnot, como era de se esperar
- (iv) com o rendimento térmico constante, a variação do calor cedido ao fluido durante um ciclo é sempre proporcional à variação do trabalho por ciclo
- (v) assim como no capítulo anterior, a frequência varia com a carga, sob a influência de dois efeitos:
- . a aplicação de carga, propriamente dita, que freando o pistão tende a diminuir a sua velocidade média
  - . o pequeno aumento na média da pressão, causada pela diminuição do valor médio do volume ( $V_c$ ), que tende a aumentar a velocidade média do pistão
- Os efeitos se contrabalançam apenas num pequeno trecho da curva que apresenta um curto patamar, ficando no restante a predominância do efeito da aplicação de carga
- (vi) com a diminuição contínua do trabalho por ciclo e o comportamento da frequência, a potência decai sempre com a aplicação de carga.

#### VI.4 - COMPARAÇÃO DE RESULTADOS

Para caracterizar a influência das simplificações introduzidas no modelo, nos parâmetros de desempenho do motor, foram feitas as comparações das Tabelas VI.2 e VI.3.

Na Tabela VI.2 ficou clara a tendência de superestimar o desempenho do motor com a imposição de hipóteses simplificadoras. Através do modelo matemático simplificado, a potência é prevista cerca de duas a quatro vezes maior do que o modelo mais completo prevê; essa diferença, entretanto, não é constante em toda a faixa útil de carga.

A comparação com resultados experimentais só foi possível para frequência e amplitude do movimento do pistão, já que outros resultados não estavam disponíveis na literatura.

Essa comparação, feita a partir da simulação de um coeficiente de atrito

$$c_1 = 2.8 \text{ [Ns/m]}$$

entre o pistão e o cilindro, confirma a tendência apontada, anteriormente.



PARÂMETRO DE DESEMPENHO	SIMULAÇÃO SEM CARGA $f_{\ell} = 0$			SIMULAÇÃO COM CARGA $f_{\ell} = 2.8$		
	MODELO COMPLETO	MODELO SIMPLIFICADO	VARIAÇÃO RELATIVA %	MODELO COMPLETO	MODELO SIMPLIFICADO	VARIAÇÃO RELATIVA
W [J/ciclo]	0.059	0.254	+ 330.5	0.101	0.212	+ 110.0
f [Hz]	15.090	14.706	- 2.5	13.941	13.508	- 3.1
P [W]	0.890	3.735	+ 319.7	1.408	2.864	+ 103.4
A [mm]	15.15	18.50	+ 22.1	9.30	13.50	+ 45.2
$\eta$ [%]	10.40	39.96	+ 284.2	23.50	39.692	+ 68.9

TABELA VI.2 - Comparação entre as previsões dos modelos teóricos

PARÂMETRO DE DESEMPENHO	MODELO COMPLETO $c_1 = 2.8$	MODELO SIMPLIFICADO $c_1 = 2.8$	EXPERIMENTAL SEM CARGA
$f$ [Hz]	13.941	13.508	14.0
A [mm]	9.30	13.50	9.5

TABELA VI.3 - Comparações teórico-experimentais para o motor sem carga

#### VI.5 - CONCLUSÕES

Com o objetivo de obter respostas rápidas do sistema à variação dos parâmetros de projeto, ao modelo matemático mais completo foram aplicadas algumas hipóteses simplificadoras.

Eliminando as mais fortes não-linearidades do sistema de equações, o desempenho do motor pode ser simulado com intervalo de integração maior e tempo total de processamento reduzido.

O desempenho simulado mostrou, entretanto, que as hipóteses simplificadoras conduzem à obtenção de previsões muito otimistas do desempenho do motor, podendo ser usado apenas para uma análise qualitativa.

## CAPÍTULO VII

### CONCLUSÕES GERAIS

O motor Stirling de Pistão Livre como forma alternativa de geração de potência mecânica, pareceu bastante adequado às características brasileiras.

Como máquina térmica de ciclo fechado, cuja fonte quente externa ao cilindro deve apenas manter um lado do motor aquecido, abre o caminho para o aproveitamento do grande potencial em energia solar existente no país; como motor de combustão externa, possibilita o uso de uma grande diversidade de combustíveis, incluindo lenha, resíduos agrícolas etc., com grande aplicabilidade nas regiões rurais.

Embora o estudo do motor Stirling não seja recente, a sistematização na execução do projeto veio receber contribuições apenas de poucos anos para cá, com as atenções ainda voltadas para outras configurações do motor.

Neste trabalho, a teoria já existente em torno do motor Stirling de pistão livre é discutida e novas propostas de modelação matemática são apresentadas.

Com o objetivo de oferecer soluções de forma fechada para os parâmetros de desempenho do motor, uma análise do ciclo ideal é feita através de uma abordagem não-linear. A utiliza

ção do conceito de Ciclo Limite vem trazer grandes facilidades na compreensão do comportamento do sistema como um todo, possibilitando a determinação de algumas condições para operação satisfatória do motor; o uso dessas soluções no lugar daquelas obtidas pelo modelo linearizado estará contabilizando pelo menos uma não linearidade do sistema.

A introdução dos efeitos de alguns fenômenos inerentes ao ciclo real no modelo teórico, veio oferecer uma descrição mais completa do motor; a simulação digital de desempenho utilizando esse modelo mais completo revelou-se uma ferramenta bastante útil na previsão do comportamento dinâmico do sistema. A influência de vários parâmetros pode ser investigada e o ponto de operação ótimo pode ser determinado.

A comparação com resultados experimentais indicou a possibilidade de uma boa concordância, embora uma comprovação com dados experimentais mais detalhados seja desejável.

Com a imposição de hipóteses simplificadoras ao modelo matemático, obtem-se um sistema de equações simples, que pode ser numericamente resolvido em curto tempo de processamento em computador. Embora oferecendo essa vantagem, o modelo simplificado não se revelou adequado o bastante para uma análise de desempenho; a simulação digital mostrou que a previsão torna-se muito otimista e os parâmetros de desempenho são superestimados.

O estudo de soluções de forma fechada resultou em um valioso auxiliar para a fase inicial do projeto, estando-se consciente do emprego da análise ideal, nesse caso.

Com a disponibilidade dos sofisticados sistemas de computação modernos, soluções numéricas para o modelo teórico mais completo, são viáveis, resultando em um prognóstico para o desempenho do motor, numa etapa mais avançada do projeto.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- | <sup>1</sup>| "The Stirling Engine", *Research Report*, KB United Stirling (S-201 10 Malmö 1), (1966).
- | <sup>2</sup>| Schmidt, G. - "Theorie der Lehmann'schen Calorischen Maschine", *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieur*, Vol. 15, Parte 1, pp. 1-12 (Jan./1871), Parte 2, pp. 97-112, (Fev./1871).
- | <sup>3</sup>| Berchowitz, D. M. e Wyatt-Mair, G. F. - "Closed-Form Solutions for a Coupled Ideal Analysis of Free-Piston Stirling Engines", *Anais do 14<sup>th</sup> I.E.C.E.C.*, pp. 1114-1119, (1979).
- | <sup>4</sup>| Walker, G. - *Stirling Engines*, Oxford University Press, 2<sup>a</sup> Edição, 1979.
- | <sup>5</sup>| Walker, G. - "Elementary Design Guidelines for Stirling Engines", *Anais do 14<sup>th</sup> I.E.C.E.C.*, pp. 1066-1068, (1979).
- | <sup>6</sup>| Mc Adams, W. H. - *Heat Transmission*, McGraw-Hill, 3<sup>a</sup> edição, pp. 144-158, (1954).
- | <sup>7</sup>| Filkenstein, T. - "Balanced Compounding of Stirling Machines", *Anais do 13<sup>th</sup> I.E.C.E.C.*, pp. 1791-1797 (1978).

- |<sup>8</sup>| Beans, E. W. - "A Mathematical Model for the Stirling Engine Cycle", *Journal of Engineering for Power*, Vol. 103, pp. 505-510, (1981).
- |<sup>9</sup>| Reader, G. T. - "The Pseudo Stirling Cycle: A Suitable Performance Criterion ?", *Anais do 13<sup>th</sup> I.E.C.E.C.*, pp. 1763-1770, (1978).
- |<sup>10</sup>| Meijer, R. J. - "The Philips Stirling Engine ", *De Ingenieur*, Artigo 621.41, (1967).
- |<sup>11</sup>| Das, R. L. e Bahrami, K. A. - "Dynamics and Control of a 15 kWe Solar Electric Generation Concept", *Anais do 14<sup>th</sup> I.E.C.E.C.*, pp. 133-139, (1979).
- |<sup>12</sup>| Urieli, I. - "A Computer Simulation of Stirling Cycle Machines", Tese Ph.D., University of Witwatersrand, (Africa do Sul), (1977).
- |<sup>13</sup>| Urieli, I., Berchowitz, D. M. e Rallis, C. J. - "A Numerical Model for Stirling Cycle Machines", *Transactions of the ASME*, Vol. 102, pp. 756-761, (1980).
- |<sup>14</sup>| Urieli, I., Berchowitz, D. M. e Rallis, C. J. - "Computer Simulation of Stirling Cycle Machines", *Anais do 12<sup>th</sup> I.E.C.E.C.*, pp. 1512-1521, (1977).

- [<sup>15</sup>] Berchowitx, D. M. e Rallis, C. J. - "A Computer and Experimental Simulation of Stirling Cycle Machines", *Anais do 13<sup>th</sup> I.E.C.E.C.*, pp. 1730-1738, (1978).
- [<sup>16</sup>] Schock, A. - "Nodal Analysis of Stirling Cycle Devices", *Anais do 13<sup>th</sup> I.E.C.E.C.*, pp. 1771-1779, (1978).
- [<sup>17</sup>] Martini, W. R. - "A Simple Method of Simulating Stirling Engines for Engine Design Optimization", *Anais do 13<sup>th</sup> I.E.C.E.C.*, pp. 1753-1762, (1978).
- [<sup>18</sup>] Martini, W. R. e Ron, B. A. - "An Isothermal Second Order Stirling Engine Calculation Method", *Anais do 14<sup>th</sup> I.E.C.E.C.*, pp. 1091-1097, (1979).
- [<sup>19</sup>] Goldwater, B. S. - "Current Free-Piston Stirling Engine Technology & Applications", *Anais do 14<sup>th</sup> I.E.C.E.C.*, pp. 1142-1151, (1979).
- [<sup>20</sup>] Beale, W. T. - "Free Piston Stirling Engines - Some Model Tests and Simulation", *International Automotive Engineering Congress*, Paper n<sup>o</sup> 690230, (1969).
- [<sup>21</sup>] Beale, W. T. et alii - "Free Piston Stirling Engine: A Progress Report", *Combined Commercial Vehicle Engineering & Operations and Power Plant Meetings*, Paper n<sup>o</sup> 730647, (1973).



- [<sup>22</sup>] Beale, W. T. et alii - "Free Cylinder Stirling Engine for a Solar Powered Water Pump", *ASME Winter Annual Meeting*, Washington, D.C., (1971).
- [<sup>23</sup>] Rauch, J. S. - "A Free-Piston Stirling/Linear Alternator Demonstrator Engine: Some Design Considerations", *Anais do 13<sup>th</sup> I.E.C.E.C.*, pp. 1853-1857, (1978).
- [<sup>24</sup>] Chiu, W. S. e Carlson, W. B. - "Performance of a Stirling Engine for a Heat Pump Applications", *Anais do 14<sup>th</sup> I.E.C.E.C.*, pp. 1181-1185, (1979).
- [<sup>25</sup>] Prast, G. e Jouge, A. K. - "A Free-Piston Stirling Engine for Small Solar Power Plants", *Anais do 13<sup>th</sup> I.E.C.E.C.*, pp. 1826-1829, (1978).
- [<sup>26</sup>] Scieszko, J. L. - "Modelo Experimental de um Motor Tipo Stirling", *Anais do V COBEM*, Paper T.T. nº 19, pp. 466-473, (1979).
- [<sup>27</sup>] Macedo, I. C. - "Restrições no Projeto de Motores Stirling de Pistão-Livre com Alternador Linear", *Anais do III CBE*, Paper nº C-24, pp. 1075-1086, (1981).
- [<sup>28</sup>] Mansour, W. M. e Scieszko, J. L. - "Mathematical Model and Simulation of a Oscillatory Pump Driven by a Stirling Engine", resumo apresentado para o *Congresso Mundial de Energia Solar*, Perth, (1983).

- |<sup>29</sup>| Piskounov, N. - *Cálculo Diferencial e Integral*, Porto, Edições Lopes da Silva, 5.<sup>a</sup> Edição, Vol. 1, pp. 386-388, 408-409, (1977).
- |<sup>30</sup>| Mansour, W. M. - *Introduction to Non-Linear Systems*, Apostila do curso ministrado na COPPE/UFRJ, Parte II, pp. 14-19, 30-31.
- |<sup>31</sup>| Holman, J. P. - *Transferência de Calor*, McGraw-Hill do Brasil, 1.<sup>a</sup> Edição, (1983).
- |<sup>32</sup>| Özisik, M. N. - *Basic Heat Transfer*, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., 1.<sup>a</sup> Edição, (1977).
- |<sup>33</sup>| Booth, A. D. - *Numerical Methods*, London Butterworths, 3.<sup>a</sup> Edição, pp. 64-65, (1966).

APÊNDICE ADESENVOLVIMENTO DO MODELO MATEMÁTICO LINEARIZADOA.1 - MASSA DE FLUIDO NO REGENERADOR

- Volume infinitesimal no regenerador

$$dV_g = a_g d\ell$$

- Perfil linear de temperatura

$$T_g = T_e + [(T_c - T_e)/L]\ell$$

- Massa infinitesimal

$$dm_g = dV_g \cdot \rho_g \text{ onde } \rho_g = p/(RT_g)$$

$$R dm_g = p a_g d\ell / \{T_e + [(T_c - T_e)/L]\ell\}$$

$$\text{ou } R dm_g = p \cdot a_g \cdot L \{1/[T_e L + (T_c - T_e)\ell]\} d\ell$$

- Massa total contida no regenerador

$$R m_g = R \int_0^L d m_g$$

$$R m_g = p \cdot a_g \cdot L \int_0^L 1/[L \cdot T_e + (T_c - T_e)\ell] d\ell$$

$$R m_g = p \cdot a_g \cdot L \left| \ln(L T_e + (T_c - T_e)\ell) \right|_0^L / (T_c - T_e)$$

$$R m_g = p a_g L [\ln(T_c/T_e)] / (T_c - T_e)$$

ou ainda, substituindo  $a_g \cdot L$  por  $V_g$ ,

$$R m_g = p V_g [\ln(T_e/T_c)] / (T_e - T_c) \quad (A.1)$$

## A.2 - Linearização das Funções (II.8) e (II.9)

$$f_1(x, y) = 1 / (A + Bx + Cy)$$

onde

$$A = [a_d EE/T_e + (a_p - a_r) CC/T_c + V_g \ln(T_e/T_c) / (T_e - T_c)] / m_a R$$

$$B = [(a_p - a_r) / T_c] / m_a R$$

$$C = [a_d / T_e - (a_p - a_r) / T_c] / m_a R \quad \text{com } a_p \approx a_d$$

Expandindo  $f_1(x, y)$  e  $f_2(x, y)$  em torno do ponto  $x = a$  e  $y = b$ , e tomando os três primeiros termos:

$$f_1(x, y) = 1 / (A + Ba + Cb) - (x - a) B / (A + Ba + Cb)^2 - (y - b) C / (A + Ba + Cb)^2$$

ou ainda, fazendo  $(A + Ba + Cb) = D_1$ ,

$$f_1(x, y) = [(D_1 + Ba + Cb) - Bx - Cy] / D_1^2 \quad (A.2)$$

$$f_2(x, y) = \bar{p} V B^Y / [V B - (a_p - a_r)x - a_r y]^Y \quad (II.9)$$

$$\begin{aligned}
 f_2(x, y) &= \bar{p} VB^\gamma / [VB - (a_p - a_r)a - a_r b]^\gamma + \\
 &+ (x - a)^\gamma (a_p - a_r) \bar{p} VB^\gamma / [VB - (a_p - a_r)a - a_r b]^{\gamma+1} + \\
 &+ (y - b)^\gamma a_r \bar{p} VB^\gamma / [VB - (a_p - a_r)a - a_r b]^{\gamma+1}
 \end{aligned}$$

ou ainda, fazendo  $D_2 = 1/[VB - (a_p - a_r)a - a_r b]$ ,

$$\begin{aligned}
 f_2(x, y) &= \bar{p}(VB \cdot D_2)^\gamma [1 - a\gamma(a_p - a_r) D_2 - b\gamma a_r D_2] + \\
 &+ \gamma \bar{p} VB^\gamma D_2^{\gamma+1} [(a_p - a_r)x + a_r y]
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

Vamos supor soluções do tipo:

$$y = EE \operatorname{sen} wt$$

e

$$x = CC \operatorname{sen}(wt + \phi)$$

onde  $\phi$  é um ângulo negativo, referente ao atraso do pistão relativo ao deslocador.

Tomando como ponto de operação a posição zero do pistão, tem-se:

$$a = 0$$

$$b = - EE \operatorname{sen} \phi$$

Substituindo esses valores nas equações (A.2) e (A.3).

$$f_1(x, y) = C_1 - \{(a_p - a_r)x/T_c + [a_d/T_e - (a_p - a_r)/T_c]y\} / m_a R D^2 \quad (A.4)$$

$$f_2(x, y) = C_2 + \gamma \bar{p} [(a_p - a_r)x + a_r y] / \tilde{V}B \quad (A.5)$$

onde

$$D = [a_d EE(1 - \sin \phi) / T_e + (a_p - a_r)(CC + EE \sin \phi) / T_c + V_g \ln(T_e / T_c) / (T_e - T_c)] / m_a R$$

$$\tilde{V}B = VB(1 + a_r EE(\sin \phi) / VB)^{\gamma+1}$$

e  $C_1$  e  $C_2$  são constantes.

### A.3 - SOLUÇÃO DO SISTEMA LINEARIZADO

Usando os resultados (A.4) e (A.5), as equações linearizadas são:

$$\ddot{x} = a_1 \dot{x} + a_2 x + a_3 y + a_4 \quad (A.6)$$

$$\ddot{y} = b_1 \dot{y} + b_2 y + b_3 x + b_4 \quad (A.7)$$

onde:

$$a_1 = -\frac{(c_1 + f_\ell)}{m_p}; \quad a_2 = -\frac{(a_p - a_r)^2}{m_p} \left[ \frac{1}{m_a R T_c D^2} + \frac{\gamma \bar{p}}{VB} \right]$$

$$a_3 = -\frac{a_p - a_r}{m_p} \left[ \frac{1}{m_a R D^2} \left( \frac{a_d}{T_e} - \frac{a_p - a_r}{T_c} \right) + \frac{\gamma \bar{p}}{VB} a_r \right]$$

$$a_4 = \frac{a_p - a_r}{m_p} (C_1 - C_2) = \text{constante}$$

$$b_1 = -\frac{C_2}{m_d}; \quad b_2 = \frac{a_r}{m_d} \frac{m_p}{(a_p - a_r)} a_3; \quad b_3 = \frac{a_r m_p}{m_d (a_p - a_r)} a_2$$

$$b_4 = \frac{a_r m_p}{m_d (a_p - a_r)} \cdot a_4 = \text{constante}$$

Fazendo a transformação linear de:

$$x_p = x + \frac{a_4}{a_2}, \quad \dot{x}_p = \dot{x} \quad \text{e} \quad \ddot{x}_p = \ddot{x}$$

o sistema fica:

$$\ddot{x}_p = a_1 \dot{x}_p + a_2 x_p + a_3 y \quad (\text{A.8})$$

$$\ddot{y} = b_1 \dot{y} + b_2 y + b_3 x_p \quad (\text{A.9})$$

Ou normalizando:

$$\dot{x}_p = u$$

$$\dot{y} = v$$

$$\dot{u} = a_1 u + a_2 x_p + a_3 y$$

$$\dot{v} = b_1 v + b_2 y + b_3 x_p$$

(i) Cálculo da frequência:

Como esperamos soluções senoidais, podemos escrevê-las na forma complexa:

$$x_p = \alpha_1 e^{kt}; y = \alpha_2 e^{kt}; u = \alpha_3 e^{kt} \text{ e } v = \alpha_4 e^{kt}$$

Substituindo as expressões acima no sistema normalizado,

$$\alpha_1 k - \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_2 k - \alpha_4 = 0$$

$$-a_2 \alpha_1 - a_3 \alpha_2 + \alpha_3(k-a_1) = 0$$

$$-b_3 \alpha_1 - b_2 \alpha_2 + \alpha_4(k-b_1) = 0$$

e fazendo o determinante do sistema  $\Delta(k)$  em  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  ser igual a zero, teremos a seguinte equação em  $k$ :

$$\begin{aligned} \Delta(k) = k^4 + k^2(a_1 b_1 - a_2 - b_2) - k^3(a_1 + b_1) + k(a_2 b_1 + a_1 b_2) + \\ + a_2 b_2 - a_3 b_3 = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

como  $a_2 b_2 = a_3 b_3$ , para que exista solução para a equação (A.10)



devemos impor que:

$$k^4 + k^2(a_1 b_1 - a_2 - b_2) = 0$$

e

$$k^3(a_1 + b_1) - k(a_2 b_1 + a_1 b_2) = 0$$

Conclue-se então que para que o sistema tenha solução não trivial, duas equações devem ser simultaneamente satisfeitas:

$$k = \pm i(a_1 b_1 - a_2 - b_2)^{1/2}$$

e

$$k = \pm i[-(a_2 b_1 + a_1 b_2)/(a_1 + b_1)]^{1/2}$$

ou

$$w = (a_1 b_1 - a_2 - b_2)^{1/2} \tag{A.11}$$

e

$$w = [-(a_2 b_1 + a_1 b_2)/(a_1 + b_1)]^{1/2} \tag{A.12}$$

(ii) Cálculo da Amplitude:

Chamando as amplitudes dos movimentos do deslocador e do pistão de EE e CC, respectivamente, e sabendo que: o pistão está atrasado de  $\phi$  em relação ao deslocador, podemos escrever, com a ajuda das soluções complexas:

$$\alpha_1 = CC e^{i\phi} \text{ e } \alpha_2 = EE$$

ou ainda,

$$\alpha_1/\alpha_2 = CC e^{i\phi}/EE$$

Substituindo as soluções complexas na equação (A.8), temos:

$$\alpha_1(k^2 - a_1 k - a_2) = a_3 \alpha_2$$

ou ainda

$$\alpha_1/\alpha_2 = a_3/(k^2 - a_1 k - a_2)$$

Utilizando  $k = iw$ ,

$$\alpha_1/\alpha_2 = a_3/(-w^2 - a_1 iw - a_2) = CC e^{i\phi}/EE \quad (\text{A.13})$$

A expressão (A.13) pode fornecer  $\phi$  e CC:

$$\phi = \text{tg}^{-1}[a_1 w / (-w^2 - a_2)] \quad (\text{A.14})$$

$$|\alpha_1|/|\alpha_2| = CC/EE = a_3 / [(-w^2 - a_2)^2 + (a_1 w)^2]^{1/2}$$

ou

$$CC = EE a_3 / [(-w^2 - a_2)^2 + (a_1 w)^2]^{1/2} \quad (\text{A.15})$$

Para Berchowitz e Wyatt-Mair [3],  $(a_4/a_2)$  é uma constante pequena e  $x \approx x_p$ ; com isso, a solução pode ser representada por:

$$x = CC \text{ sen}(wt + \phi) \quad (\text{A.16})$$

$$y = EE \text{ sen } wt \quad (\text{A.17})$$

#### A.4 - DESENVOLVIMENTO DAS EXPRESSÕES PARA OS PARÂMETROS DE DESEMPENHO

(i) Volumes deslocados:

. Câmara de expansão:

$$V_e = a_d (EE + y)$$

$$V_e = a_d EE(1 + \text{sen } wt)$$

ou ainda:

$$V_e = (VE/2) (1 + \text{sen } wt) \quad (\text{A.18})$$

com

$$V_E = 2a_d EE \quad (\text{A.19})$$

Da mesma forma,  $V_c$  pode ser representado por:

$$V_c = (VC/2) [1 + \text{sen}(wt-\alpha)] \quad (\text{A.20})$$

onde  $V_c$  e  $\alpha$  podem ser determinados com o uso das soluções complexas

$$V_c = (a_p - a_r) (CC + x) - (a_d - a_r) y$$

se  $a_p \approx a_d$ ,

$$V_c = (a_p - a_r) CC + (a_p - a_r) (x - y)$$

ou

$$V_c = (a_p - a_r) CC + (a_p - a_r) (CC e^{i\phi} - EE) e^{iwt}$$

$$V_c = (a_p - a_r) CC + (a_p - a_r) (CC \cos \phi + CC i \text{sen} \phi - EE) e^{iwt}$$

$$V_c = (a_p - a_r) CC + (VC/2) e^{-i\alpha} e^{iwt}$$

onde:

$$\alpha = \text{tg}^{-1} [-(CC \text{ sen } \phi)/(CC \text{ cos } \phi - EE)] \quad (\text{A.21})$$

e

$$VC = 2(a_p - a_r) [(CC \text{ sen } \phi)^2 + (CC \text{ cos } \phi - EE)^2]^{1/2} \quad (\text{A.22})$$

Se a amplitude do movimento do deslocador (EE) é bem menor que a do pistão (CC), então:

$$(a_p - a_r) CC \approx \frac{VC}{2}$$

(ii) Pressão do fluido de trabalho:

Substituindo as expressões (A.18) e (A.20) na equação da pressão (II.3), temos

$$p = m_a R / \{ VE(1 + \text{sen } wt)/2T_e + VC[1 + \text{sen}(wt - \alpha)]/2T_c + [V_g \ln(T_e/T_c)] / (T_e - T_c) \}$$

Desenvolvendo  $[\text{sen}(wt - \alpha)]$ , tem-se:

$$p = m_a R / \{ s [1 + (a/s) \text{ cos}(wt + \beta)] \} \quad (\text{A.23})$$

onde:

$$s = VE/2T_e + VC/2T_c + V_g [\ln(T_e/T_c)] / (T_e - T_c) \quad (\text{A.24})$$

$$a = [(VE/2T_e + VC \text{ cos } \alpha/2T_c)^2 + (VC \text{ sen } \alpha/2T_c)^2]^{1/2}$$

e

$$\beta = \operatorname{tg}^{-1} \left\{ \left[ \frac{VE}{2T_e} + \frac{VC(\cos \alpha)}{2T_c} \right] / \left[ \frac{VC \operatorname{sen} \alpha}{2T_c} \right] \right\}$$

Utilizando os fatores adimensionais:

$$\varepsilon = VE/VC, \quad \tau = T_e/T_c \quad \text{e} \quad \rho = V_g/VC$$

então:

$$a/s = \left[ \left( \frac{\varepsilon}{\tau} + \cos \alpha \right)^2 + \operatorname{sen}^2 \alpha \right]^{1/2} / \left[ \frac{\varepsilon}{\tau} + 2 \frac{\rho (\ln \tau)}{(\tau-1)} + 1 \right] \quad (\text{A.25})$$

e

$$\beta = \operatorname{tg}^{-1} \left[ \left( \frac{\varepsilon}{\tau} + \cos \alpha \right) / \operatorname{sen} \alpha \right] \quad (\text{A.26})$$

(iii) Pressões média e máxima do fluido de trabalho

$$\bar{p} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p \, dwt$$

$$\bar{p} = \frac{m_a R}{2\pi} \int_{\pi-\beta}^{3\pi-\beta} 1 / [s+a \cos(wt+\beta)] \, dwt$$

A integral acima se resolve fazendo a seguinte substituição de variável, descrita por Piskounov [29]:

$$z = \operatorname{tg}[(wt + \beta)/2]$$

então:

$$\cos(\omega t + \beta) = (1-z^2)/(1+z^2) \text{ e } d\omega t = [2/(1+z^2)] dz$$

e o resultado  $\bar{p}$ :

$$\bar{p} = m_a R / [s(1-a^2/s^2)^{1/2}] \quad (\text{A.27})$$

Fazendo o  $\cos(\omega t + \beta)$  se igualar a (-1) na equação (A.23) obtem-se o valor máximo da pressão:

$$p_{\text{m}\bar{x}} = m_a R / [s(1-a/s)] \quad (\text{A.28})$$

(iv) Calor transferido na câmara de expansão:

$$Q_e = \oint_{\text{ciclo}} p \, dV_e$$

Diferenciando a equação (A.18) em relação a ( $\omega t$ ):

$$dV_e = (VE/2) \cos \omega t \, d\omega t$$

e substituindo a equação (A.28) em (A.23):

$$Q_e = \oint \{ p_{\text{m}\bar{x}} (s-a) / [s+a \cos(\omega t + \beta)] \} (VE/2) \cos \omega t \, d\omega t$$

Desenvolvendo o termo  $\cos(\omega t + \beta)$  e fazendo a seguinte mudança de variável:

$$z = \text{tg}(\omega t/2)$$

então:

$$\text{sen } wt = 2z/(1+z^2)$$

$$\text{cos } wt = (1-z^2)/(1+z^2)$$

e

$$dwt = [2/(1+z^2)]dz$$

E a integral de  $Q_e$  se resolve com auxílio da decomposição da fração racional em elementos simples.

O resultado, utilizando o método descrito por Piskounov <sup>[29]</sup> é:

$$Q_e = p_{\text{m}\bar{a}x} \pi(s/a-1) \text{VE} \text{cos } \beta [1-s/(s^2-a^2)^{1/2}]$$

ou definindo  $\delta_*$  como:

$$\delta_* = \pi(s/a-1) [1-1/(1-a^2/s^2)^{1/2}] \quad (\text{A.29})$$

então:

$$Q_e = p_{\text{m}\bar{a}x} \text{VE} \delta_* \text{cos } \beta \quad (\text{A.30})$$



(v) Calor transferido na câmara de compressão:

$$Q_c = \oint_{\text{ciclo}} p \, dV_c$$

Em procedimento análogo ao descrito para a câmara de expansão chega-se a:

$$Q_c = p_{\text{m}\bar{a}x} VC \delta_* \cos(\alpha + \beta) \quad (\text{A.31})$$

(vi) Trabalho por ciclo:

Somando-se as equações (A.30) e (A.31) obtemos:

$$W = p_{\text{m}\bar{a}x} \delta_* [VE \cos \beta + VC \cos(\alpha + \beta)] \quad (\text{A.32})$$

(vii) Eficiência térmica:

$$\eta_t = (\tau - 1) / \tau \quad (\text{A.33})$$

APÊNDICE BDESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DO MODELO NÃO-LINEARB.1 - DESENVOLVIMENTO DAS EQUAÇÕES PARA EXISTÊNCIA DO CICLO LIMITE

$$F(z, \dot{z}) = \mu_1 \dot{z} + \mu_2 z - \mu_3 f(z)$$

como  $\psi = \Omega t$  ,  $z = Z \text{ sen } \psi + Z_0$  e  $\dot{z} = Z \Omega \text{ cos } \psi$

$$\begin{aligned} \text{e } F(Z \text{ sen } \psi + Z_0, Z \Omega \text{ cos } \psi) &= \mu_1 Z \Omega \text{ cos } \psi + \mu_2 Z \text{ sen } \psi + \\ &+ \mu_2 Z_0 - \mu_3 f(Z \text{ sen } \psi + Z_0) \end{aligned}$$

- Solução da integral (III.17.a)

$$\phi(Z) = \int_0^{2\pi} F(Z \text{ sen } \psi + Z_0, Z \Omega \text{ cos } \psi) \text{ cos } \psi \, d\psi$$

$$\begin{aligned} \phi(Z) &= \int_0^{2\pi} \mu_1 Z \Omega \text{ cos}^2 \psi \, d\psi + \int_0^{2\pi} \mu_2 Z \text{ sen } \psi \text{ cos } \psi \, d\psi + \\ &+ \int_0^{2\pi} \mu_2 Z_0 \text{ cos } \psi \, d\psi - \int_0^{2\pi} \mu_3 f(Z \text{ sen } \psi + Z_0) \text{ cos } \psi \, d\psi \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Resolvendo separadamente as integrais temos:

$$(i) \quad \int_0^{2\pi} \mu_1 Z \Omega \text{ cos}^2 \psi \, d\psi = \mu_1 Z \Omega \pi \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad & \int_0^{2\pi} \mu_3 f(Z \operatorname{sen} \psi + Z_0) \cos \psi \, d\psi = \mu_3 \left[ \int_0^{\phi_D} \gamma_2 \cos \psi \, d\psi + \right. \\
 & \left. + \int_{\phi_D}^{\phi_S} \gamma_1 \cos \psi \, d\psi + \int_{\phi_S}^{2\pi} \gamma_2 \cos \psi \, d\psi \right] \\
 & \int_0^{2\pi} \mu_3 f(Z \operatorname{sen} \psi + Z_0) \cos \psi \, d\psi = \mu_3 [\gamma_2 \operatorname{sen} \phi_D + \\
 & + \gamma_1 (\operatorname{sen} \phi_S - \operatorname{sen} \phi_D) - \gamma_2 \operatorname{sen} \phi_S = \\
 & = \mu_3 (\gamma_2 - \gamma_1) (\operatorname{sen} \phi_D - \operatorname{sen} \phi_S) \quad \text{(B.3)}
 \end{aligned}$$

onde  $\phi_D$  e  $\phi_S$  estão na Figura (B.1).

Para encontrar expressões para  $\phi_D$  e  $\phi_S$ , substituímos  $z_D$  e  $z_S$  na equação de  $z$ :

$$z_D = z_m + \epsilon_0 = Z \operatorname{sen} \phi_D + Z_0 \rightarrow \operatorname{sen} \phi_D = [z_m + \epsilon_0 - Z_0]/Z$$

$$z_S = z_m - \epsilon_0 = Z \operatorname{sen} \phi_S + Z_0 \rightarrow \operatorname{sen} \phi_S = [z_m - \epsilon_0 - Z_0]/Z$$

e

$$\operatorname{sen} \phi_D - \operatorname{sen} \phi_S = 2\epsilon_0/Z \quad \text{(B.4)}$$

Substituindo (B.4) em (B.3) temos:

$$\int_0^{2\pi} \mu_3 f(Z \operatorname{sen} \psi + Z_0) \cos \psi \, d\psi = 2\mu_3 (\gamma_2 - \gamma_1) \epsilon_0/Z \quad \text{(B.5)}$$

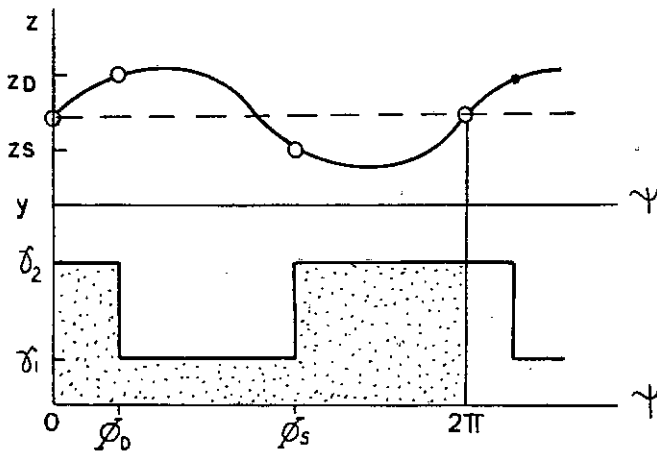
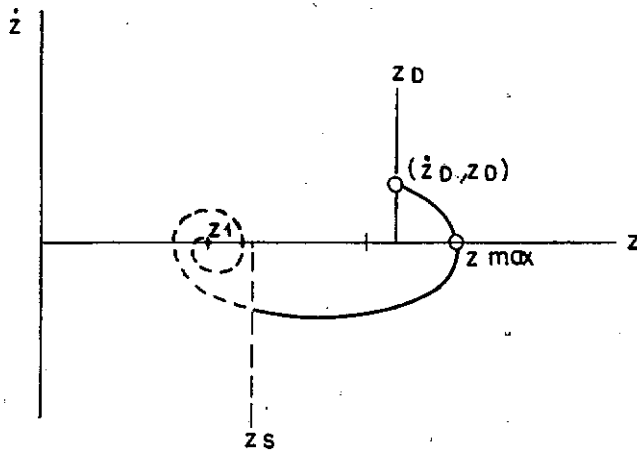
FIGURA B. 1 - INTEGRAL DE  $f(z)$ 

FIGURA B. 2 - RESPOSTA DO SISTEMA AMORTECIDO.

Substituindo (B.5) e (B.2) em (B.1) e usando  $2\gamma$  no lugar de  $(\gamma_2 - \gamma_1)$  temos:

$$\phi(Z) = \mu_1 Z \Omega \pi - 4\mu_3 \gamma \epsilon_0 / Z$$

Fazendo-se  $\phi(Z) = 0$  obtemos a equação para a amplitude:

$$\mu_1 Z_L \Omega_L / 2 = + 2\mu_3 \gamma \epsilon_0 / (Z_L \pi)$$

ou

$$Z_L^2 = + 4\mu_3 \gamma \epsilon_0 / (\pi \cdot \mu_1 \Omega_L) \quad (\text{B.6})$$

onde  $Z_L$  e  $\Omega_L$  são os valores de  $Z$  e  $\Omega$  que satisfazem a equação (B.6).

## B.2 - DESENVOLVIMENTO PARA OBTENÇÃO DA CONSTANTE $Z_0$

Na análise que se segue, usaremos a equação da dinâmica do pistão para obter a sua posição de máximo. Como

$$z = Z_L \text{ sen } \Omega_L t + Z_0$$

quando  $z = Z_{\text{m}\bar{\text{a}}\text{x}}$ ,

$$Z_0 = Z_{\text{m}\bar{\text{a}}\text{x}} - Z_L \quad (\text{B.7})$$

Com esse objetivo, podemos encontrar a velocidade do pistão quando  $z = z_D$ :

$$z_D = Z_L \text{ sen } \phi_D + Z_0 \rightarrow \text{sen } \phi_D = (z_D - Z_0)/Z_L$$

$$\dot{z} = Z_L \Omega_L \cos \Omega_L t$$

e

$$\dot{z}_D = \Omega_L [Z_L^2 - (z_D - Z_0)^2]^{1/2} \quad (\text{B.8})$$

Sabemos que se o pistão partir do ponto  $(z_D, \dot{z}_D)$  no plano de fase com o deslocador fixo na posição  $\gamma_1$ , a equação da dinâmica do pistão (na condição  $y = \gamma_1$ ) terá a solução de um sistema massa-mola amortecido, que chamaremos de  $z_*$ . Podemos concluir ainda, que o primeiro ponto de máximo dessa solução coincide com o ponto de máximo da posição  $z$  do pistão, como mostrado na Figura (B.2).

Podemos, então, escrever a solução  $z_*$ , apenas para o trecho de  $\phi_D$  a  $\phi_S$  do movimento do pistão, forçando as condições iniciais:

$$z_*(0) = z_D \quad (\text{B.9.a})$$

$$\dot{z}_*(0) = \dot{z}_D \quad (\text{B.9.b})$$

Como a equação que rege o movimento do pêndulo quando  $y = \gamma_1 \bar{e}$ :

$$\ddot{z} + \mu_1 \dot{z} + \mu_2 z = + \mu_3 \gamma_1$$

então a solução  $z_*$  é:

$$z_* = e^{-\mu_1 t/2} (C_1 \operatorname{sen} w_a t + C_2 \operatorname{cos} w_a t) - \rho_1 \gamma_1$$

onde  $(-\rho_1 \gamma_1)$  é a solução particular

$$w_a = (\mu_2 - \mu_1^2/4)^{1/2}$$

é a frequência do sistema amortecido e  $C_1, C_2$  devem ser determinados pelas condições iniciais.

Podemos escrever as soluções  $z_*$  e  $\dot{z}_*$  na forma:

$$z_* = e^{-\mu_1 t/2} (C_1^2 + C_2^2)^{1/2} \operatorname{sen}(w_a t + \phi_0) - \rho_1 \gamma_1 \quad (\text{B.10})$$

e

$$\begin{aligned} \dot{z}_* = & -(\mu_1/2) e^{-\mu_1 t/2} (C_1^2 + C_2^2)^{1/2} \operatorname{sen}(w_a t + \phi_0) + \\ & + e^{-\mu_1 t/2} (C_1^2 + C_2^2)^{1/2} w_a \operatorname{cos}(w_a t + \phi_0) \end{aligned}$$

onde:

$$\text{sen } \phi_0 = C_2 / (C_1^2 + C_2^2)^{1/2}$$

$$\text{cos } \phi_0 = C_1 / (C_1^2 + C_2^2)^{1/2}$$

e

$$\phi_0 = \text{tg}^{-1}(C_2/C_1) \quad (\text{B.11})$$

Aplicando as condições iniciais (B.9.a) e

(B.9.b), temos:

$$z_*(0) = z_D = C_2 - \rho_1 \gamma_1$$

ou

$$C_2 = z_D + \rho_1 \gamma_1 \quad (\text{B.12})$$

$$\dot{z}_*(0) = \dot{z}_D = \Omega_L [Z_L^2 - (z_D - Z_0)^2]^{1/2} = -(\mu_1/2) C_2 + w_a C_1$$

ou

$$C_1 = \{\Omega_L [Z_L^2 - (z_D - Z_0)^2]^{1/2} + \mu_1 C_2/2\} / w_a \quad (\text{B.13})$$

e fazendo

$$w_a t + \phi_0 = \pi/2$$

ou

$$t = t_* = [\pi/2 - \phi_0] / w_a \quad (\text{B.14})$$

na equação de  $z_*$  (B.10), obtemos o valor do primeiro máximo:



$$z_{\max} = e^{-\mu_1 t^*/2} (C_1^2 + C_2^2)^{1/2} - \rho_1 \gamma_1 \quad (\text{B.15})$$

Se a defasagem pistão/deslocador está próxima de  $90^\circ$ , como desejado, podemos tomar como aproximação que:

$$\dot{z}_D \approx 0$$

para simplificar a expressão de  $C_1$ . Nesse caso,

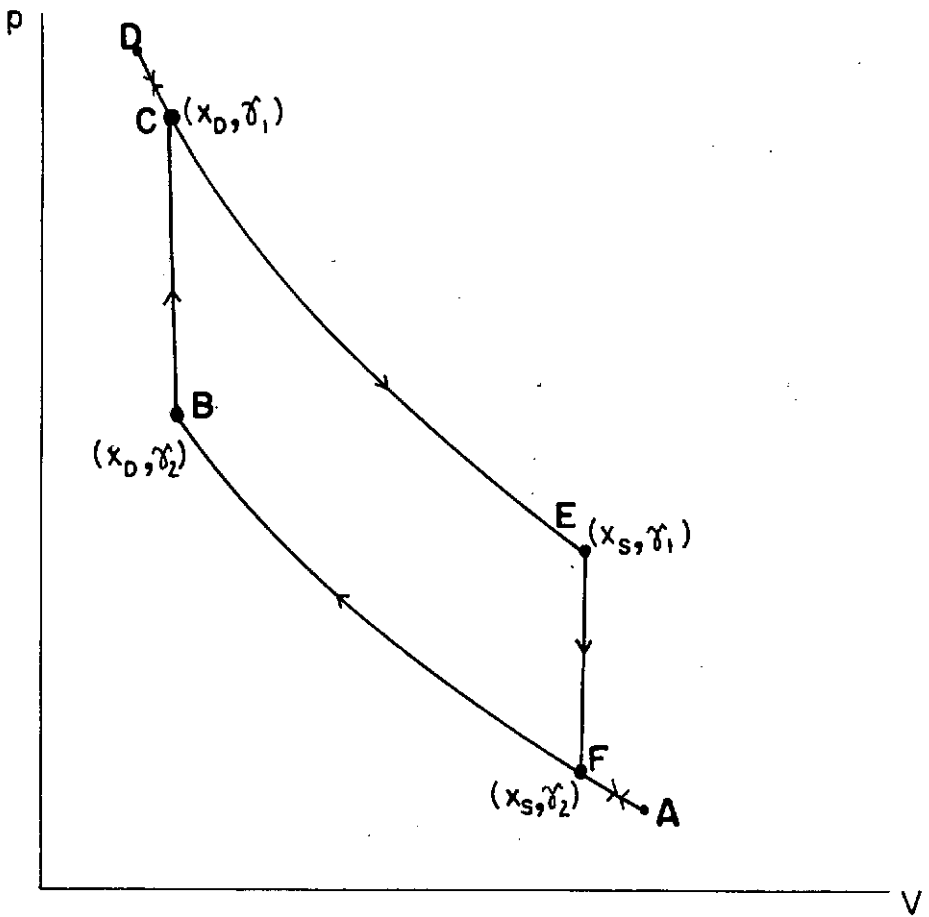
$$C_1 \approx \mu_1 C_2 / (2w_a) \quad (\text{B.16})$$

### B.3 - DESENVOLVIMENTO PARA OBTENÇÃO DO TRABALHO POR CICLO

A Figura (B.3) mostra a posição do pistão e do deslocador para os pontos importantes do ciclo p-V. Observando o ciclo, concluímos que a compressão (FB) se dá toda com o deslocador na posição superior ( $\gamma_2$ ) e a expansão (CE), com o deslocador na posição inferior ( $\gamma_1$ ). Como os trechos (CE) e (FB) são os que nos interessam para a obtenção do trabalho por ciclo, podemos calcular os volumes deslocados correspondentes aos pontos F, B, C e E da Figura (B.3).

Nos pontos C e E,  $y = \gamma_1$ , então, de acordo com a geometria do motor mostrada na Figura (III.1):

$$V_e = a_d(\ell - \ell_5 - y) \quad (\text{B.17.a})$$

FIGURA B.3\_ POSIÇÕES  $x, y$  NOS PONTOS DO CICLO

$$V_{E1} = \left[ V_e \right]_{y=\gamma_1} = a_d(\ell - \ell_5 - \gamma_1)$$

e

$$V_C = (a_d - a_r)(y - \ell_3) + (a_p - a_r)(\ell_3 - \ell_4 - x) \quad (\text{B.17.b})$$

$$\text{ponto C: } V_{CD1} = \left[ VC \right]_{\substack{x=x_d \\ y=\gamma_1}} = (a_d - a_r)(\gamma_1 - \ell_3) + (a_p - a_r)(\ell_3 - \ell_4 - x_d)$$

$$\text{ponto E: } V_{CS1} = \left[ VC \right]_{\substack{x=x_s \\ y=\gamma_1}} = (a_d - a_r)(\gamma_1 - \ell_3) + (a_p - a_r)(\ell_3 - \ell_4 - x_s)$$

onde  $x_d$  e  $x_s$  são as posições do pistão correspondentes às posições  $z_D$  e  $z_S$ , segundo a transformação linear da equação (III.5.a).

Analogamente, para os pontos F e B, onde  $y = \gamma_2$ , os volumes são:

$$V_{E2} = \left[ V_e \right]_{y=\gamma_2} = a_d(\ell - \ell_5 - \gamma_2)$$

$$\text{ponto B: } V_{CD2} = \left[ VC \right]_{\substack{x=x_d \\ y=\gamma_2}} = (a_d - a_r)(\gamma_2 - \ell_3) + (a_p - a_r)(\ell_3 - \ell_4 - x_d)$$

$$\text{ponto F: } V_{CS2} = \left[ VC \right]_{\substack{x=x_s \\ y=\gamma_2}} = (a_d - a_r)(\alpha_2 - \ell_3) + (a_p - a_r)(\ell_3 - \ell_4 - x_s)$$

O trabalho de compressão de F para B é:

$W_c = \int_{V_{CS2}}^{V_{CD2}} p \, dV_c$ , já que os volumes  $V_e$  e  $V_g$  estão fixos durante esse percurso do pistão.

Substituindo a expressão da pressão (II.5) obtida no Capítulo II pela aplicação do Princípio de Conservação de Massa, temos:

$$W_c = \int_{V_{CS2}}^{V_{CD2}} \{m_a R / [V_e/T_e + V_c/T_c + V_g \ln(T_e/T_c)/(T_e - T_c)]\} dV_c$$

substituindo  $V_e$  pelo seu valor constante nesse trecho,

$$V_e = V_{E2}$$

e integrando, obtemos:

$$W_c = m_a R T_c \ln(KD_2/KS_2)$$

onde

$$KD_2 = V_{E2}/T_e + V_{CD2}/T_c + V_g \ln(T_e/T_c)/(T_e - T_c) \quad (B.18)$$

$$KS_2 = V_{E2}/T_e + V_{CS2}/T_c + V_g \ln(T_e/T_c)/(T_e - T_c) \quad (B.19)$$

Analogamente, podemos encontrar o trabalho de expansão,  $W_e$ :

$$W_e = \int_{V_{CD1}}^{V_{CS1}} p \, dV_c$$

ou

$$W_e = m_a R T_c \ln(KS1/KD1)$$

onde

$$KS1 = V_{E1}/T_e + V_{CS1}/T_c + V_g \ln(T_e/T_c)/(T_e - T_c) \quad (B.20)$$

$$KD1 = V_{E1}/T_e + V_{CD1}/T_c + T_g \ln(T_e/T_c)/(T_e - T_c) \quad (B.21)$$

e o trabalho por ciclo será:

$$W = W_e + W_c$$

$$W = m_a R T_c \ln(KD2.KS1/KS2.KD1) \quad (B.22)$$

APÊNDICE CANÁLISE DE ESCOAMENTO COMPRESSÍVEL EM  
UM TUBO DE SEÇÃO CONSTANTE

O esquema da Figura (C.1) mostra um trecho do tubo com o escoamento a ser considerado:

Seguindo a análise feita por McAdams <sup>[6]</sup>, assumiremos que o escoamento está instantaneamente em regime permanente. Nesse caso, a equação da continuidade pode ser escrita:

$$\dot{m} = \rho_1 V_1 A = \rho_2 V_2 A = \rho V A \quad (C.1)$$

As forças agindo no elemento infinitesimal de fluido de comprimento ( $d\ell$ ) estão mostradas no diagrama da Figura (C.1). Aqui,  $\tau$  é a tensão de cisalhamento, atuando em toda a superfície cilíndrica ( $\pi D d\ell$ ), onde  $\pi D$  é o perímetro da seção A.

A massa desse elemento será ( $\rho A d\ell$ ) e a sua aceleração  $\frac{dV}{dt}$ , onde  $V$  é a velocidade do fluxo.

Aplicando um balanço de forças para esse elemento, desprezando o efeito gravitacional, temos:

$$-dpA - \tau\pi Dd\ell = \rho A d\ell dV/dt \quad (C.2)$$

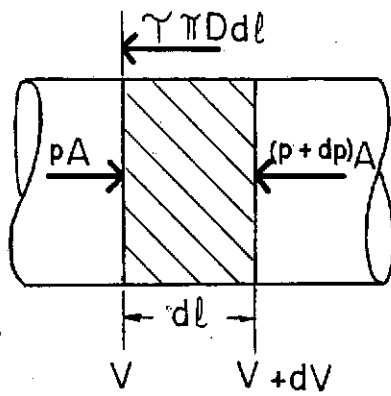


FIGURA C. 1 - ESCOAMENTO UNIDIMENSIONAL EM TUBO DE SEÇÃO CIRCULAR.

Dividindo por  $\rho A$  e substituindo  $d\ell/dt$  por  $V$  e  $A/\pi D$  por  $D/4$ , onde  $D$  é o diâmetro do tubo, temos:

$$-dp/\rho = [4\tau/(\rho D)]d\ell + V dV \quad (C.3)$$

Definindo um fator de atrito adimensional,  $f_a$ , de tal forma que:

$$f_a = 2\tau/(\rho V^2) \quad (C.4)$$

a equação (C.3) se reduz a:

$$-dp/\rho = 2f_a(V^2/D) d\ell + V dV \quad (C.5)$$

Multiplicando por  $\rho$  e substituindo  $\rho V$  por  $\dot{m}/A$  (da equação (C.1)) temos:

$$-dp = 2[f_a/\rho DA^2] \dot{m}^2 d\ell + (\dot{m}/A)dV \quad (C.6)$$

Derivando a equação (C.1) podemos encontrar uma expressão para  $dV$ :

$$\dot{m}/\rho A = V \rightarrow dV = - [\dot{m}/(\rho^2 A)]d\rho \quad (C.7)$$

Substituindo (C.7) em (C.6) e rearrumando:

$$-\rho dp = (\dot{m}^2/A^2) [(2f_a/D)d\ell - d\rho/\rho] \quad (C.8)$$



Para o caso de regenerador em que:

$$A = a'_g$$

$$D = d_g$$

a expressão se torna:

$$- \rho \, dp = (\dot{m}^2/a_g^2) [(2f_a/d_g)d\ell - dp/\rho] \quad (C.9)$$

Os valores de  $f_a$  podem ser encontrados na referência [6] como uma função do número de Reynolds e da rugosidade relativa do tubo.

APÊNDICE DCONSIDERAÇÕES SOBRE A TEMPERATURAMÉDIA NO REGENERADOR

Na sua hipótese de regenerador adiabático, E. W. Beans <sup>8</sup> procura uma expressão para a temperatura média ( $T_g$ ) da massa de fluido no regenerador. Essa hipótese obriga que a energia total dentro do regenerador seja constante em um ciclo. Beans considera a pressão uniforme ao longo do regenerador para, aplicando a primeira Lei da Termodinâmica, afirmar que a entalpia transferida do regenerador para as câmaras deve equivaler à entalpia transferida ao regenerador pelas câmaras, ou seja:

$$\Delta m_c T_c + \Delta m_e T_e = (\Delta m_c + \Delta m_e) T_g \quad (D.1)$$

onde  $\Delta m_c$  e  $\Delta m_e$  são as variações totais de massa nas câmaras de compressão e expansão, respectivamente, durante o ciclo.

Definindo a relação entre as massas

$$\mu = \Delta m_e / \Delta m_c$$

a expressão (C.1) se torna:

$$T_g = (T_c + \mu T_e) / (1 + \mu) \quad (D.2)$$

No caso do modelo de Beans, a avaliação de  $\mu$  depende de um conhecimento prévio de  $T_g$  e, portanto, a única solução para  $T_g$  é a iterativa.

Por inspeção da expressão (D.2) conclue-se que se for assumido que  $\Delta m_e = \Delta m_c$ , então:

$$T_g = (T_e + T_c)/2 \quad (D.3)$$

Nesse caso, a hipótese de Beans concorda com a de Schmidt. Para o caso do modelo proposto, em que  $m_g$  deve variar com o tempo,  $\Delta m_e = \Delta m_c$  não é uma condição geral. Essa hipótese será, entretanto, tomada como uma aproximação para a temperatura média ( $T_g$ ) no regenerador, já que a introdução de um processo iterativo traria maiores complicações ao modelo.

NOMENCLATURATERMODINÂMICA E TRANSMISSÃO DE CALOR

$p$  = pressão

$\bar{p}$  = pressão média

$P_{m\grave{a}x}$  = pressão máxima

$p_B$  = pressão de referência do espaço de compensação

$p_0$  = pressão atmosférica

$T$  = temperatura

$T_0$  = temperatura do refrigerante

$T_{eq}$  = temperatura equivalente segundo definição no texto

$V$  = volume

$V_d$  = volume total do fluido

$VE$  = amplitude de variação do volume  $V_e$

$VC$  = amplitude de variação do volume  $V_c$

$VT$  = soma de  $VE$  com  $VC$

$VB$  = volume de referência do espaço de compensação

$m_a$  = massa total do fluido

$\gamma$  = relação entre os calores específicos do fluido

$R$  = constante do gás perfeito

- $u$  = energia interna por unidade de massa  
 $\rho$  = massa específica  
 $c_v$  = calor específico a volume constante  
 $c_p$  = calor específico a pressão constante  
 $\dot{q}$  = taxa de calor cedida ao cabeçote  
 $\dot{q}_1$  = taxa de calor cedida pelo cabeçote ao fluido  
 $\dot{q}_2$  = taxa de calor perdida pelo fluido para o refrigerante  
 $h$  = coeficiente de transmissão de calor por convecção  
 $k_t$  = condutibilidade térmica  
 $J$  = constante de transformação de unidades (watts para cal/s)

### PARÂMETROS DE DESEMPENHO

- $W$  = trabalho por ciclo  
 $W_e$  = trabalho de expansão  
 $W_c$  = trabalho de compressão  
 $Q$  = calor transferido  
 $\eta$  = eficiência térmica  
 $\eta_R$  = eficiência de regeneração  
 $f$  = frequência em [Hz]

- $A$  = amplitude do movimento do pistão  
 $f_{\ell}$  = carga no pistão  
 $w$  = frequência em |Rd/s|  
 $EE$  = amplitude do movimento do deslocador no modelo linear  
 $CC$  = amplitude do movimento do pistão no modelo linear  
 $c_1$  = coeficiente de atrito no pistão  
 $c_2$  = coeficiente de atrito no deslocador  
 $t$  = tempo  
 $\Omega_L$  = frequência em |Rd/s| para o ciclo limite  
 $X_L$  = amplitude do movimento do pistão para o ciclo limite  
 $X_0$  = posição média do pistão

### GEOMETRIA DO MOTOR

- $\ell$  = comprimentos  
 $a$  = áreas  
 $d$  = diâmetros  
 $m$  = massa  
 $x$  = posição do pistão  
 $y$  = posição do deslocador

DINÂMICA DO FLUIDO

$f_a$  = fator de atrito

$\dot{m}$  = vazão em massa no regenerador

ÍNDICES

e = câmara de expansão

c = câmara de compressão

g = regenerador

b = espaço de compensação

p = pistão

d = deslocador

r = haste do deslocador

h = cabeçote

L = ciclo limite

a = amortecido

m $\bar{x}$  = máximo