


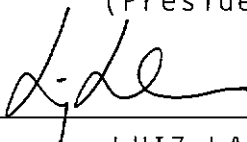
ANÁLISE ELASTO-PLÁSTICA DA PROPAGAÇÃO DE TRINCAS
NÃO-PASSANTES EM ESTRUTURAS DE SUPERFÍCIE
UTILIZANDO ELEMENTOS ESCALARES

Luiz Antonio de Souza

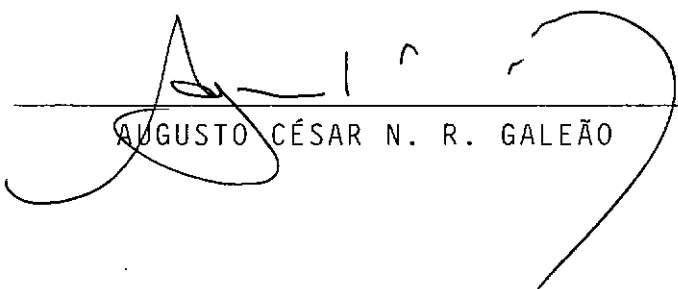
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO
DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.) EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovado por:


NELSON FRANCISCO FAVILLA EBECKEN
(Presidente)


LUIZ LANDAU


FERNANDO VENÂNCIO FILHO


AUGUSTO CÉSAR N. R. GALEÃO

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

AGOSTO DE 1986

SOUZA, LUIZ ANTONIO DE

Análise Elasto-Plástica da Propagação de Trincas Não-Passantes em Estruturas de Superfície, Utilizando Elementos Escalares (Rio de Janeiro) 1986.

x , 128 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1986).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro.

1. Fraturas.

I. COPPE/UFRJ

II. Título (série)

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Nelson Francisco Favilla Ebecken pela orientação e amizade.

Em especial ao Professor Luiz Landau pelo apoio e incentivo.

Aos colegas e companheiros de trabalho pela troca de idéias e saudável convívio.

Aos amigos Carrer, JAFS e Osni pela tolerância e convívio diário.

Aos Professores do Departamento de Estruturas da COPPE/UFRJ pelos conhecimentos transmitidos.

Ao Professor Fernando Luiz Lobo Carneiro, a quem tive a honra de ser aluno.

Aos meus pais Antonio e Conceição, aos meus irmãos, cunhados e sobrinhos pelo carinho e afeto.

Às recepcionistas do NCE-UFRJ, Iris e Eliete pela fineza no trato e atenção dispensada.

Às secretárias da COPPE/Civil, Sonia, Celma e Elizete pela presteza nos assuntos burocráticos.

À Selma Fernandes pela datilografia.

À Mônica pelos desenhos.

Àqueles que acreditam no futuro da humanidade, e lutam por uma sociedade fraterna onde não haja exploração do homem pelo homem.

RESUMO DA TESE APRESENTADA À COPPE/UFRJ COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

**ANÁLISE ELASTO-PLÁSTICA DA PROPAGAÇÃO DE TRINCAS
NÃO-PASSANTES EM ESTRUTURAS DE SUPERFÍCIE
UTILIZANDO ELEMENTOS ESCALARES**

Luiz Antonio de Souza

Agosto de 1986

Orientador: Nelson Francisco Favilla Ebecken

Programa: Engenharia Civil

O objetivo deste trabalho é analisar o comportamento de estruturas de superfície que apresentam trincas não-passantes, isto é, ao longo da espessura, utilizando elementos finitos degenerados tridimensionais quadráticos em conjunto com elementos escalares que simulam a fratura.

Na análise efetuada em regime linear elástico, obtém-se como resposta o fator de intensidade de tensões K_I . Em regime não linear elasto-plástico calcula-se a taxa de energia potencial dissipada na fratura, conhecida como integral-J. Em ambos os casos a abertura da trinca é avaliada.

Apresentam-se as hipóteses da formulação utilizada e os aspectos gerais da implementação computacional.

Alguns exemplos são discutidos e comparados com outras soluções.

Comentam-se finalmente as vantagens do modelo utilizado, limitações e desenvolvimento.

ABSTRACT OF THESIS PRESENTED TO COPPE/UFRJ AS PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIRIMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE (M.Sc.)

**ELASTO-PLASTIC ANALISE OF PROPAGATION OF
PART-THROUGH SURFACE CRACK IN SURFACE STRUCTURES
USING LINE-SPRING ELEMENTS**

Luiz Antonio de Souza

August de 1986

Chairman: Nelson Francisco Favilla Ebecken

Department: Civil Engineering

The purpose of this work is to analyse the behaviour of surface structures with part-through surface crack. The structure is modeled using degenerated tri-dimensional quadratic finite elements in conjunction with line-spring elements for crack simulation.

The analysis is performed considering linear elasticity resulting in the avaluation of the stress intensity factor K_I . For the non linear elasto-plastic case, the release rate potential energy in the crack, known as J-integral is evaluated. In both cases, the crack opening displacements (C.O.D.) are calculated.

The hypothesis and formulations are presented, as well as the general aspects of the computational implementation.

Some exemples are discussed and results compared with other solutions.

This work ends with a discussion of these advantages and limitations of the studied model and further developments.

ÍNDICE

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO II - MECÂNICA FRATURADA	5
2.1. Introdução	5
2.2. Conceitos Elementares	5
2.3. Modos Elementares de Fratura	8
2.4. Integral J e a Energia de Deformação G Dissipada na Fratura	12
2.5. Problema do Plano Fraturado	15
2.5.1. Equação Geral da Elasticidade Plana	15
2.5.2. Solução para o Plano Fraturado..	17
2.6. Superposição de Soluções	21
2.6.1. Função de Green.....	21
2.6.2. Formas Gerais de Escrever K_I	23
2.7. Elementos com Singularidade	24
2.7.1. Introdução	24
2.7.2. Elementos de "Quarter-Point" ...	25
2.8. Métodos Energéticos	29
2.9. Relação entre K_I e o Desenvolvimento da Fratura pela Fadiga	33
2.10. Mecânica da Fratura com Pequena Zona Plástica	36

CAPITULO III - ELEMENTOS ESCALARES	41
3.1. Introdução	41
3.2. O Funcional de Energia Potencial para Estruturas com Trincas Não-Passantes ..	43
3.3. Matriz de Flexibilidade dos Elementos Escalares	48
3.4. Implementação Computacional	53
3.4.1. Introdução	53
3.4.2. Matriz de Rigidez da Linha de Molas	54
3.4.3. Matriz de Rotação	56
3.5. Análise em Regime Elasto-Plástico	60
3.5.1. Introdução	60
3.5.2. Matriz de Rigidez Elasto-Plástica	61
3.5.3. Obtenção da Superfície de Escoamento para as Molas	67
3.5.4. Avaliação da Integral-J em Regime Elasto-Plástico	72
 CAPÍTULO IV - ELEMENTO ISOPARAMETRICO E CARACTERÍSTICAS DO PROGRAMA IMPLEMENTADO	 76
4.1. Elemento de Casca	76
4.1.1. Introdução	76

4.1.2. Características Gerais do Elemento de Cascas	76
4.1.3. Geometria do Elemento e Campo de Deslocamento	77
4.1.4. Definição das Deformações e Tensões	80
4.1.5. Relações Constitutivas em Regime Elasto-Plástico	82
4.1.6. Cálculo das Tensões Elasto-Plásticas	86
4.2. Programa Implementado	87
4.2.1. Descrição Sumária	87
4.3. Algoritmo Implementado para solução do Problema Não-Linear	89
4.4. Cálculo dos Resíduos	90
4.5. Método de Decomposição Parcial	91
 CAPÍTULO V - APLICAÇÕES	 94
5.1. Chapa Tracionada-Linear.....	94
5.2. Chapa à Flexão-Linear	100
5.3. Chapa Tracionada, em Regime Elasto-Plástico	102
5.4. Tubo Submetido à Pressão Interna	105
5.5. Tubo Pressurizado	108
 CAPÍTULO VI - CONCLUSÕES	 114

6.1. Conclusões Gerais	114
6.2. Futuros Desenvolvimentos	116
APÊNDICE I - OBTENÇÃO DAS FUNÇÕES g_t E g_b	117
APÊNDICE II - CALIBRAÇÃO DO ELEMENTO ESCALAR EM REGIME PLÁSTICO	121
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	123

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Estruturas de superfície, são soluções comumente utilizadas na engenharia para construção de reservatórios, tanques de combustíveis, vasos de pressão, estruturas de plataformas marítimas, centrais nucleares, cascos de navios, turbinas e componentes estruturais na indústria aero-espacial. Defeitos de fabricação (provocados por usinagem, solda, corte, furos, etc...) tensões internas residuais (devido a tratamento térmico), falhas do material (espaços vazios), corrosão, fadiga, concentrações de tensão, são as principais causas do aparecimento e crescimento de trincas. Como consequência as estruturas perdem parte de sua capacidade suporte, sem no entanto estarem comprometidas integralmente. Deve-se proceder uma análise criteriosa com objetivo de obter parâmetros capazes de medir sua segurança, determinando a velocidade da propagação da trinca e abertura, para decidir-se entre reforço ou inutilização da estrutura.

Um parâmetro bastante significativo conhecido como fator de intensidade de tensões, foi introduzido por IRWIN, que mede o nível em que se encontra a propagação da trinca quando comparado com a "Resistência à fratura" do material.

Entretanto, o conhecimento do fator de intensidade de tensões requer o conhecimento do campo de tensões do redor da extremidade da fratura ("Crack tip"), que envolve uma singularidade, uma vez que próximo deste ponto, as tensões tendem ao infinito. Entretanto, para uma dada geometria, carregamento e condições de contorno, apenas alguns casos podem ser resolvidos analiticamente, com auxílio de funções complexas.

A necessidade de analisar uma grande gama de problemas faz com que as soluções sejam buscadas via métodos experimentais ou métodos numéricos. Através de ensaios obtém-se parâmetros importantes para o conhecimento dos materiais, constroem-se tabelas e ábacos de grande utilidade para o conhecimento do comportamento das fraturas.

Os principais métodos numéricos utilizados são o Método dos Elementos Finitos (M.E.F.), e o Método dos Elementos de Contorno (M.E.C.). Uma das técnicas utilizadas é a derivação de elementos, que incorporam um campo de tensões com a mesma ordem de singularidade que aparece ao redor do "Crack-tip". Isto é conseguido através de elementos finitos isoparamétricos quadráticos, deslocando-se o nó central de um lado do elemento à distância de $1/4$ (do comprimento do lado) até o nó de extremidade e são conhecidos na literatura com o nome de "quarter-point-elements". Outra técnica utilizada é a determinação da variação de energia potencial por acréscimo de fratura, que em regime linear pode ser relacionado com o fator de intensidade de tensões, e se a análise é feita em regime elasto-plástico relaciona-se com a integral J introduzida por Rice.

Quando se analisam estruturas de superfície, que possuam em trincas não passantes, parte da seção permanece ainda ligada, com capacidade de absorver e transmitir esforços (tensões). Para se levar em conta este fato, recorre-se a uma discretização tri-dimensional, e as etapas de geração de dados e solução tornam-se onerosas, devido ao grande número de graus de liberdade envolvido. Em alguns casos apenas a análise linear é insuficiente para avaliar o grau de segurança da estrutura, deve-se

então proceder uma análise limite em regime elasto-plástico, o que acarreta custos maiores porque torna-se necessária a utilização de formulações incrementais.

Neste trabalho estuda-se problema de trincas não-pas-santes através do M.E.F., evitando-se a necessidade de uma discretização tri-dimensional. Isto é conseguido empregando-se elementos de casca, em conjunto com elementos escalares desenvolvidos por Rice e Levy. No modelo utilizado, a fratura é discretizada por uma linha de molas colocadas na superfície média da casca. Estas molas simulam a rigidez que parte da seção ainda possui pelo fato da trinca não atravessar toda a espessura, e transmitem força normal e momento fletor. Com isto, a análise pode ser feita com reduzidos graus de liberdade, diminuindo-se o volume de dados e esforço computacional.

No Capítulo II, são mostrados de uma forma geral os conceitos mais importantes da Mecânica da Fratura, sugerindo-se alguns trabalhos encontrados na literatura e comentam-se os métodos utilizados na engenharia para avaliar o fator de intensidade de tensões, a integral J, e levar em conta a zona plástica que aparece ao redor da fratura. Estes comentários são extremamente sucintos e têm como objetivo estabelecer os principais fundamentos utilizados no decorrer do texto.

O equacionamento do problema geral de trincas não-pas-santes em estruturas de superfície é feito, em termos do funcional de energia potencial, no Capítulo III. São comentadas as equações constitutivas do elemento escalar, a avaliação do fator de intensidade de tensões, e a integral J, tanto em regime elástico como elasto-plástico. Posteriormente apresentam-se as trans

formações necessárias para a implementação computacional.

As principais características do elemento finito de cascas e do sistema computacional desenvolvido são descritos no Capítulo IV.

Algumas aplicações numéricas e comparações com outras formulações são mostradas no Capítulo V.

Apresentam-se no Capítulo VI algumas conclusões, comentando-se as limitações do modelo e sugerindo-se tópicos para futuros estudos e desenvolvimentos.

Alguns tópicos que se fazem necessários para auxiliar o desenvolvimento dos elementos escalares são apresentados em Apêndice.

CAPÍTULO II

MECÂNICA DA FRATURA

2.1. Introdução

A mecânica da fratura se desenvolve ligada ao campo da metalurgia e ao conhecimento dos materiais. Não se consegue um equacionamento geral sem levar em conta as propriedades intrínsecas do material. O que é válido para materiais frágeis não é válido para materiais com capacidade de escoamento.

A dificuldade maior em se analisar estruturas (com as mais variadas geometria e casos de carregamentos) que apresentam trincas, está na determinação das tensões na extremidade da fratura, pois neste ponto tem-se uma singularidade no campo de tensões e deformações. Com isto determinado, tem-se condições de avaliar o estado em que se encontra o corpo, e determinar a velocidade de propagação da trinca.

Este trabalho restringe-se apenas a analisar os efeitos da fratura. Entretanto, o engenheiro especialista em fraturas deve não só propor soluções para os problemas, mas também ter em mente as causas que as originam. Estas podem ser as mais diversas, tais como: fadiga, corrosão, concentração de tensões, defeitos de fabricação, tensões iniciais, falha do material, etc.

2.2. Conceitos Elementares

Os primeiros estudos matemáticos da mecânica de fraturas foram de INGLIS [1] em 1913. Analisando o caso de um furo elíptico em uma chapa submetida à uma tensão uniforme σ , Figura (2.1), mostrou que a máxima tensão ocorre no ápice do maior eixo

onde o raio de curvatura $\rho = b^2/a$ é mínimo.

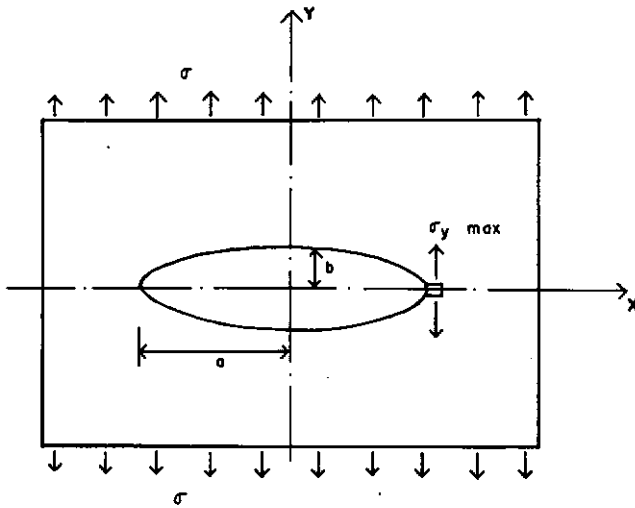


Figura 2.1 - Chapa submetida à tensão σ , com furo elíptico
Esta tensão é dada por

$$\sigma_{ym\acute{a}x} = \sigma (1 + 2a/b) \quad (2.1)$$

e no limite quando b tende a zero.

$$\sigma_{ym\acute{a}x} = 2\sigma \left(\frac{a}{\rho} \right)^{1/2} \quad (2.2)$$

As tensões na extremidade do furo tornam-se infinitas.

Como todo material suporta apenas uma tensão finita, o resultado acima mostra que uma peça fraturada não poderia suportar nenhum carregamento.

Este resultado entretanto é contrário às experiências práticas.

GRIFFITHS [2], analisou uma chapa fraturada de dimensões infinitas, submetida à tração uniforme, conforme figura (2.2). Valendo-se do princípio da conservação de energia, concluiu que a fratura tornava-se instável quando a relação entre a

energia de deformação U liberada na fratura, excedia a razão da energia W por acréscimo de fratura, ou seja

$$\frac{\partial U}{\partial a} > \frac{\partial W}{\partial a}$$

Representando-se estes valores em um gráfico, vide figura (2.3), nota-se que existe realmente um valor para o comprimento da fratura que a torna instável (crescimento instantâneo). Este valor é denominado comprimento crítico a_c .

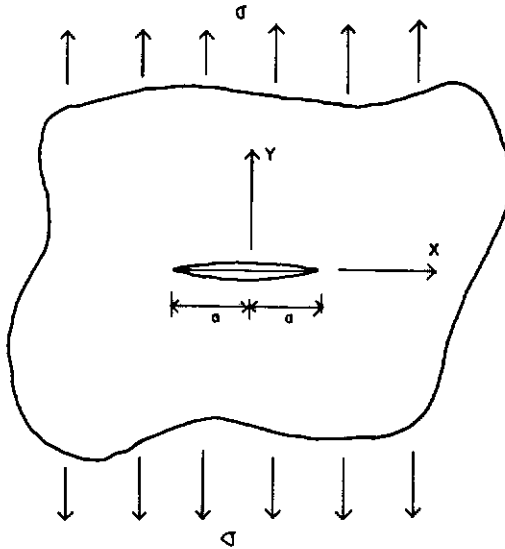


Figura 2.2 - Chapa fraturada de dimensões infinitas

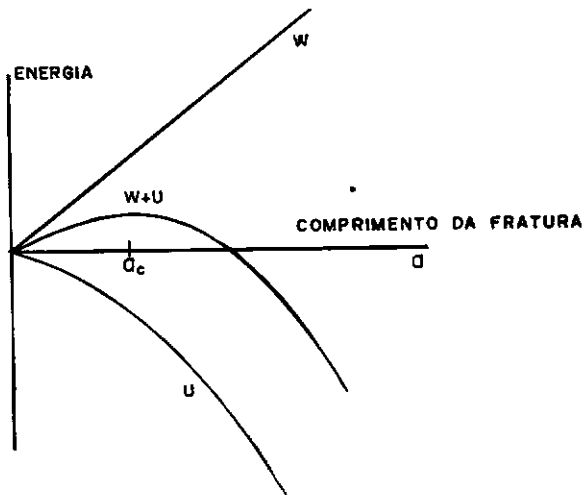


Figura 2.3 - Gráfico da energia dissipada U e a energia interna W e o avanço da fratura.

neste ponto tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial a} (W + U) = 0 \quad (2.3)$$

A teoria desenvolvida por Griffiths não envolvia a distribuição de tensões em torno da fratura e ele a utilizou apenas em materiais frágeis.

2.3. Modos Elementares de Fratura

IRWIN [3], estendendo os trabalhos de Griffiths observou que um corpo fraturado pode se deformar por vários caminhos diferentes, e que estes podem ser representados por três independentes movimentos cinemáticos, em relação as faces superior e inferior da fratura. Estes modos são ilustrados na figura (2.4) e são classificados da seguinte forma:

Modo I - ABERTURA - As duas superfícies são separadas na direção y, mas as deformações são simétricas em relação aos planos x-z e x-y.

Modo II - CISCALHANTE - As superfícies escorregam uma sobre a outra na direção x, e as deformações são simétricas em relação ao plano x-y e anti-simétrica em relação ao plano x-z.

Modo III - RASGAMENTO - As superfícies escorregam uma sobre a outra na direção z e as deformações são anti-simétricas em relação ao plano x-y e x-z.

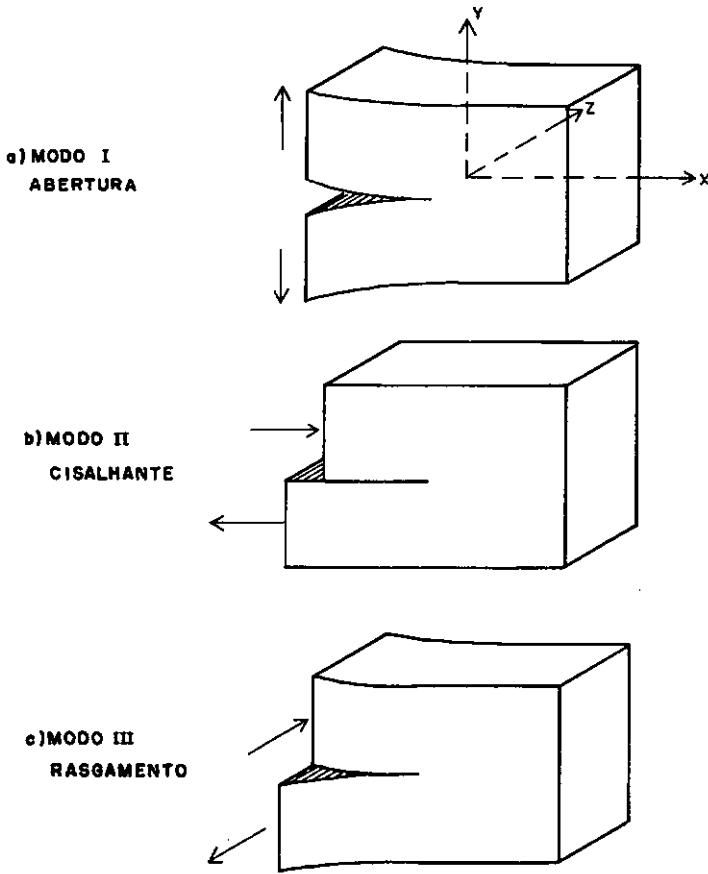


Figura 2.4 - Ilustração dos modos de fratura proposto por IRWIN.

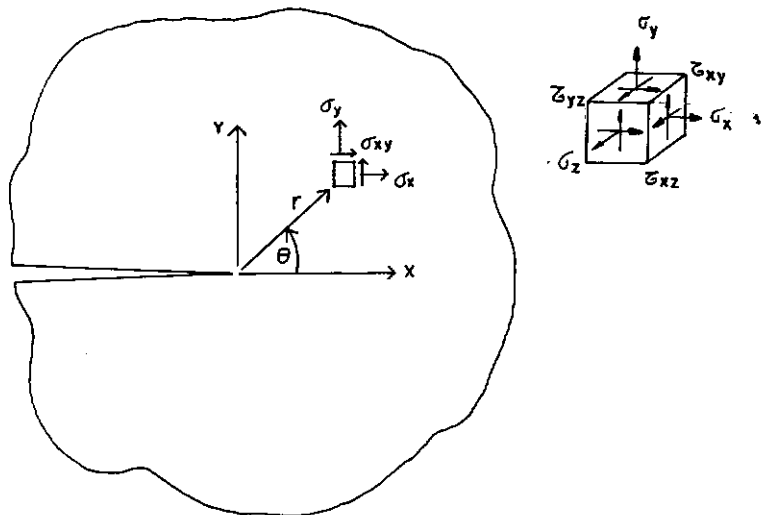


Figura 2.5 - Coordenadas r e θ do ponto p adotado nas análises das tensões

Irwin sugeriu que as deformações em um corpo fraturado podem ser representado por uma superposição apropriada dos três casos, e que na região vizinha ao "crack-tip" as componentes de tensões para cada modo é escrita como:

$$\sigma_y = \frac{K_I}{(2 \pi r)^{1/2}} \cdot f_1 (\theta) \quad (2.4a)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{(2 \pi r)^{1/2}} \cdot f_2 (\theta) \quad (2.4b)$$

$$\tau_{yz} = \frac{K_{III}}{(2 \pi r)^{1/2}} \cdot f_3 (\theta) \quad (2.4c)$$

Sendo θ e r coordenadas polares do ponto P em relação à origem da "Crack-tip", e estão mostradas na figura (2.5). Os demais parâmetros são:

$f_i(\theta)$ - função da geometria relacionada apenas com o ângulo θ .

K_I , K_{II} e K_{III} - fatores de intensidade de tensões relacionadas aos três modos de fratura.

Nas equações anteriores nota-se uma singularidade devida ao termo $1/\sqrt{r}$, pois quando r tende a zero, as tensões tendem a valores infinitos.

Uma análise de tensões deverá fornecer o valor de K_I , K_{II} e K_{III} e estes valores não deverão exceder à K_C (conhecido

como "Resistência à fratura"), para que a estrutura permaneça estável, isto é, que não haja um avanço rápido da fratura.

A determinação de valores K_C é feita de forma experimental e é uma característica de cada tipo de material. Nas literaturas [4] e [5] encontram-se valores de K_C para alguns aços, ferro fundido, alumínio e outras ligas metálicas.

Valores para K_I , K_{II} , K_{III} e funções $f_i(\theta)$ para várias configurações de fratura e carregamentos são mostrados nas Ref. [6] e [7].

A razão de energia de deformação dissipada na fratura para cada modo, em termos dos fatores de intensidade de tensões é:

$$G_I = \frac{(k+1)}{8\mu} K_I^2 \quad (2.5a)$$

$$G_{II} = \frac{(k+1)}{8\mu} K_{II}^2 \quad (2.5b)$$

$$G_{III} = \frac{1}{2\mu} K_{III}^2 \quad (2.5c)$$

$$\text{onde } k = \begin{cases} 3-4\nu & \text{p/Estado Plano de Deformação} \\ \frac{3-\nu}{1-\nu} & \text{para Estado Plano de Tensão} \end{cases}$$

μ e ν são módulo de elast.transversal e coeficiente de poisson.

Como os três modos são independentes, a energia de de-
formação total dissipada será

$$G_T = G_I + G_{II} + G_{III} \quad (2.6a)$$

ou seja

$$G_T = \frac{(k+1)}{8\mu} \left(K_I^2 + K_{II}^2 \right) + \frac{1}{2\mu} K_{III}^2 \quad (2.6b)$$

Estas relações são importantes quando se usam métodos e
nergéticos.

Nas seções que se seguem será usado K_I , ou simplesmente K para denotar fator de intensidade de tensões relativo ao Modo I, pois este modo é o mais comumente encontrado na prática. No desenvolvimento do texto será considerado apenas este modo, mas um raciocínio análogo é estendido para os outros modos.

2.4. Integral J e a energia de deformação G dissipada na fratura

Quando a análise é feita em regime linear, o fator de intensidade de tensões K , é um parâmetro suficiente para se determinar a estabilidade da trinca. Mas se a estrutura começa a apresentar plasticidade considerável em torno do "crack-tip", este parâmetro passa a não ter muito significado prático e torna-se necessário o conhecimento de outros parâmetros para avaliar a estabilidade da fratura.

ESHELBY, conforme relatado por BROOK [8], definiu a se

guinte integral de linha:

$$J = \int_{\Gamma} \left(W dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \right) \quad (2.7)$$

onde

$$W = W(\epsilon) = \int_0^{\epsilon} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}, \text{ energia de deforma\c{c}\~{a}o por unidade de volume}$$

T_i - vetor de tra\c{c}\~{a}o normal ao contorno

$$\text{e } T_i = \sigma_{ij} \cdot n_j$$

u_i - deslocamento na dire\c{c}\~{a}o i

ds - comprimento elementar de Γ

Γ - contorno fechado mostrado na figura (2.6)

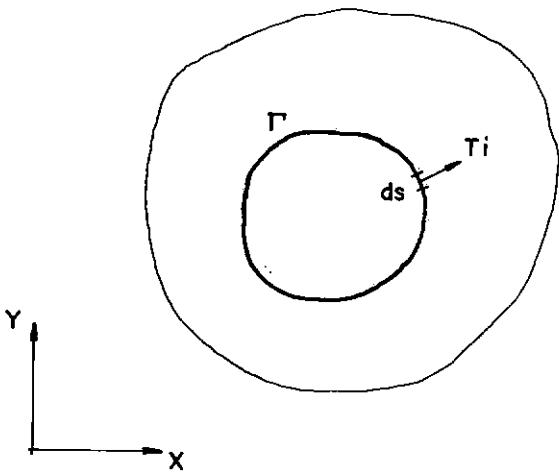


Fig. 2.6 - Contorno fechado Γ para avalia\c{c}\~{a}o de J

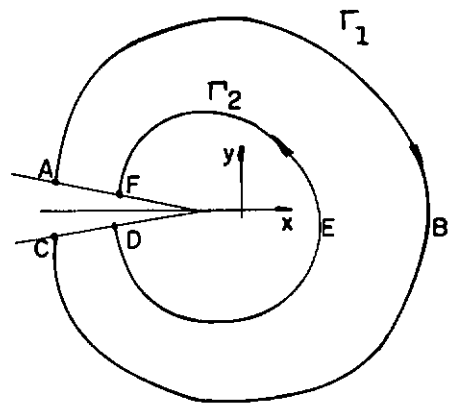


Fig.2.7-Contornos de integra\c{c}\~{a}o para avalia\c{c}\~{a}o parcial de J

Para um corpo qualquer como mostrado na figura (2.6) de acordo com o teorema da conserva\c{c}\~{a}o de energia J ser\~{a} igual a zero e independe do caminho de integra\c{c}\~{a}o.

RICE [9] utilizou esta grandeza para calcular a energia dissipada devido ao crescimento da fratura. Considerando o contorno fechado ABCDEF da Fig.(2.7), a integral J será nula. Nos trechos AF e CD, não existem cargas aplicadas e $dy = 0$, então a contribuição destes trechos para a integral será nula, implicando que a integral no contorno Γ_1 é igual a integral no contorno Γ_2 ou seja

$$J_{\Gamma_1} = J_{\Gamma_2} \quad (2.8)$$

Pelo teorema de conservação de energia RICE provou que a integral em um contorno parcial contendo o "crack-tip" representa a taxa de energia dissipada por extensão da fratura "da", isto é:

$$J = - \frac{\partial U}{\partial a} \quad (2.9)$$

onde U = energia potencial

a = extensão da fratura

Esta integral parcial é relacionada nas literaturas como simplesmente integral-J.

No caso particular de material linear-elástico tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{-\partial U}{\partial a} &= G && \text{então,} \\ G &= J && (2.10) \end{aligned}$$

A análise de fraturas utilizando-se da integral J é análoga à feita com K_c (integral-J crítico), e se $J > J_c$ o crescimento da fratura torna-se incontrolável. O valor de J_c , assim como K_c , é uma propriedade do material, sendo determinado expe-

rimentalmente.

No caso de estruturas em regime linear relaciona-se J com o quadrado de K_I através das equações (2.6) e (2.10), ou seja:

$$J = C.K^2$$

onde C = constante de proporcionalidade.

2.5. Problema Plano Fraturado

2.5.1. Equação geral da elasticidade-plana

As equações diferenciais para a elasticidade plana, desprezando-se as forças de massa, são:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.12a) \\ (2.12b) \end{array}$$

as relações entre deslocamentos e deformações são :

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.13a)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.13b)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.13c)$$

e as relações entre tensão e deformações são

$$E \cdot \epsilon_x = \sigma_x - \nu \sigma_y \quad (2.14a)$$

$$E \cdot \epsilon_y = \sigma_y - \nu \sigma_x \quad (2.14b)$$

$$\mu \gamma_{xy} = \tau_{xy} \quad (2.14c)$$

onde E = módulo de elast. longitu
dinal

ν = coef. de poisson

$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$, módulo de elasti
cidade transversal

As equações (2.12) são satisfeitas automaticamente se

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (2.15a,b,c)$$

onde

$\phi = \phi(x,y)$, conhecida como função de tensão de Airy

Substituindo (2.13) e (2.15) em (2.14) e diferenciando duas vezes tem-se:

$$\nabla^2(\nabla^2 \phi) = 0 \quad (2.16)$$

onde $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, operador harmônico de Laplace.

Então os problemas de estado plano podem ser solucionados encontrando-se uma função ϕ , que satisfaça a equação (2.16) e que também atenda às condições de contorno do problema de acordo com o indicado nas referências [12] e [13].

2.5.2. Solução para o plano fraturado

MUSKELISHVILI citado em [14] muitas funções harmônicas $\phi(x,y)$ são convenientemente representadas por duas funções na variável complexa $z = x + iy$, e que a relação entre tensões e deslocamentos é escrita da seguinte forma:

$$\phi = \text{Re} (\bar{z}\phi \pm \chi) \tag{2.17}$$

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \text{Re} \varphi' = 2(\varphi' + \bar{\varphi}') \tag{2.18}$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2 (\bar{z} \varphi'' + \chi'') \tag{2.19}$$

$$2\mu (u + iv) = k\phi - \bar{z}\varphi' - \chi' \tag{2.20}$$

onde

$$\varphi = \varphi(z) \quad \text{e} \quad \varphi' = \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z}$$

$$\chi = \chi(z) \quad \text{e} \quad \chi' = \frac{\partial \chi(z)}{\partial z}$$

Re = parte real da expressão

\bar{z} = conjugado de z , isto é $\bar{z} = x - iy$

μ, k = consts. elásticas do material

Para se obter a solução do problema plano com fratura, utilizam-se as seguintes funções, conhecidas como funções complexas de autovalores de GOURSAT, dadas abaixo

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^{\lambda_n} \qquad \chi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^{\lambda_n + 1}$$

onde λ_n são expoentes reais

A_n e B_n são constantes complexas na forma

$(a_n^1 + ia_n^2)$ e $(b_n^1 + ib_n^2)$ respectivamente, com $a_n^1, a_n^2, b_n^1, b_n^2$ reais.

Considerando a figura(2.7) nota-se que a superfície da fratura está livre de forças e as condições de contorno em termos de tensões são:

$$\sigma_y = \tau_{xy} = 0 \quad \text{para } \theta = \pm \pi$$

O procedimento necessário para a solução do problema é mostrado com detalhes no Capítulo I da referência (14), e será uma série em termos de r e θ do tipo:

$$\sigma_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} r^{\left(\frac{n}{2} - 1\right)} \cdot f_{ij}(\theta, a_n^1, a_n^2) \quad (2.22a)$$

$$u_i = \sum_{n=1}^{\infty} r^{\frac{n}{2}} \cdot g_i(\theta, a_n^1, a_n^2) \quad (2.22b)$$

A singularidade de $1/\sqrt{r}$ aparece no primeiro termo das tensões quando r tende a zero e os demais termos tornam-se nulos. Assim para $n=1$, as equações (2.22) escritas de forma completa são:

$$\sigma_x = \frac{a_1^1}{\sqrt{r}} \left(1 - \sin\frac{\theta}{2} \sin\frac{3\theta}{2} \right) \cos\frac{\theta}{2} + \frac{a_1^2}{\sqrt{r}} \left(2 + \cos\frac{\theta}{2} \cos\frac{3\theta}{2} \right) \sin\frac{\theta}{2} \quad (2.22a')$$

$$\sigma_y = \frac{a_1^1}{\sqrt{r}} \left(1 + \sin\frac{\theta}{2} \sin\frac{3\theta}{2} \right) \cos\frac{\theta}{2} - \frac{a_1^2}{\sqrt{r}} \cos\frac{\theta}{2} \cos\frac{3\theta}{2} \sin\frac{\theta}{2} \quad (2.22b')$$

$$\tau_{xy} = \frac{a_1}{\sqrt{r}} \cos\frac{\theta}{2} \cos\frac{3\theta}{2} \sin\frac{\theta}{2} - \frac{a_1^2}{\sqrt{r}} \left(1 - \sin\frac{\theta}{2} \sin\frac{3\theta}{2} \right) \cos\frac{\theta}{2} \quad (2.22c)$$

$$u = \frac{a_1\sqrt{r}}{4} \left\{ (2k-1) \cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{3\theta}{2} \right\} + \frac{a_1^2\sqrt{r}}{4\mu} \left\{ (2k+3) \sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{3\theta}{2} \right\} \quad (2.22d)$$

$$v = \frac{a_1\sqrt{r}}{4\mu} \left\{ (2k+1) \sin\frac{\theta}{2} - \sin\frac{3\theta}{2} \right\} + \frac{a_1^2}{4\mu} \left\{ (2k-3) \cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{3\theta}{2} \right\} \quad (2.22e)$$

Comparando-se as equações (2.4) com (2.22), então, pode-se escrever estas últimas em função dos modos K_I e K_{II} de fratura, da seguinte forma:

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left(1 - \sin\frac{\theta}{2} \sin\frac{3\theta}{2} \right) \cos\frac{\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(2 + \cos\frac{\theta}{2} \cos\frac{3\theta}{2} \right) \sin\frac{\theta}{2} \quad (2.23a)$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left(1 + \sin\frac{\theta}{2} \sin\frac{3\theta}{2} \right) \cos\frac{\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2} \cos\frac{3\theta}{2} \sin\frac{\theta}{2} \quad (2.23b)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left(\cos\frac{\theta}{2} \cos\frac{3\theta}{2} \sin\frac{\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(1 - \sin\frac{\theta}{2} \sin\frac{3\theta}{2} \right) \cos\frac{\theta}{2} \quad (2.23c)$$

$$u = \frac{K_I}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ (2k-1) \cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{3\theta}{2} \right\} - \frac{K_{II}}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ (2k+3) \sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{3\theta}{2} \right\} \quad (2.23d)$$

$$v = \frac{K_I}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ (2k+1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right\} + \frac{K_{II}}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ (2k-3) \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right\} \quad (2.23e)$$

Esta forma é bastante útil pois quando $\theta = 0$, tem-se

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad , \quad \sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad (2.24a,b,c)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$$

Assim, utilizando-se de métodos numéricos como por exemplo diferenças finitas, M.E.F. ou M.E.C.; para o cálculo das tensões, ao longo de uma linha com θ constante, avalia-se K_I e K_{II} , com auxílio das equações (2.23), em vários pontos para $r \rightarrow 0$ e o valor de K_I ou K_{II} para $r=0$ é obtido por extrapolação, conforme mostra a figura (2.8).

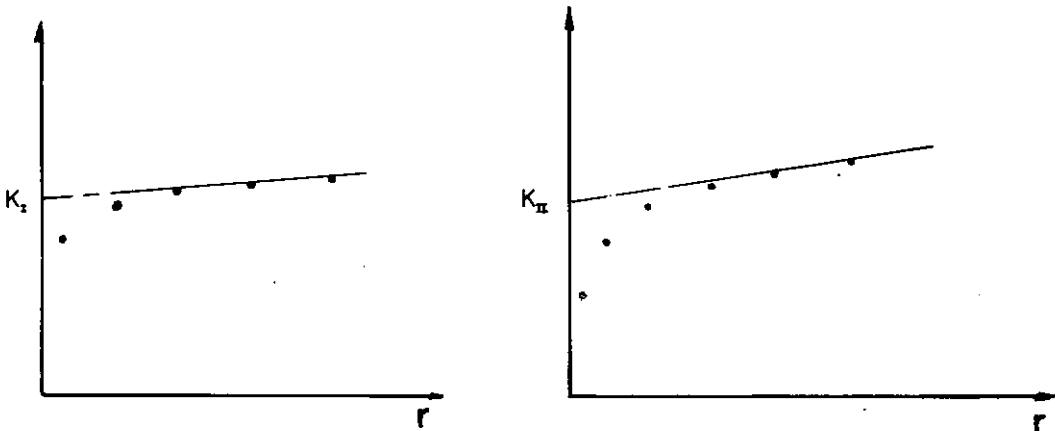


Figura 2.8 - Obtenção de K_I e K_{II} por extrapolação

2.6. Superposição de Soluções

Algumas vezes a solução para um específico caso de carregamento ou geometria da fratura não é encontrado com facilidade. Mas em regime elástico-linear pode-se lançar-se mão do "princípio da superposição". Para isto é comum utilizar-se as conhecidas funções de GREEN, cuja descrição é brevemente comentada a seguir.

2.6.1. Função de GREEN

Considere um corpo fraturado como na figura (2.9), sujeita unicamente à uma linha de força P por unidade de espessura, que pode ter uma região "Su" com deslocamentos prescritos. O fator de intensidade de tensões devido à força pode ser escrito como

$$K_I = P.G(a,x) \quad (2.25)$$

onde $G(a,x)$ é uma função que depende do comprimento da fratura, geometria do corpo e condições de contorno na superfície Su.

Ao substituir P por uma tensão distribuída arbitrariamente qualquer $\sigma(x)$, ao longo da fratura tem-se:

$$K_I = \int_0^a G(a,x) \sigma(x) \cdot dx \quad (2.26)$$

O termo $G(a,x)$ é uma função Peso conhecida como fun-

ção de GREEN e só depende da geometria do corpo e da profundidade a da fratura, podendo ser integrada para qualquer campo de tensões.

A superposição é feita da seguinte forma, ilustrado na figura (2.10).

- Análisa-se o problema como se não houvesse fratura, obtendo as tensões ao longo da linha de comprimento a .
- Calcula-se a integral (2.26) para avaliar o fator de intensidade de tensões.
- Reaplica-se as tensões ao longo de a e obtém-se a solução para todo o corpo.

Existem muitas funções $G(a,x)$ que já estão "catalogadas", e a ref. [7] mostra algumas. Na referência [14] apresenta-se uma aplicação do método.

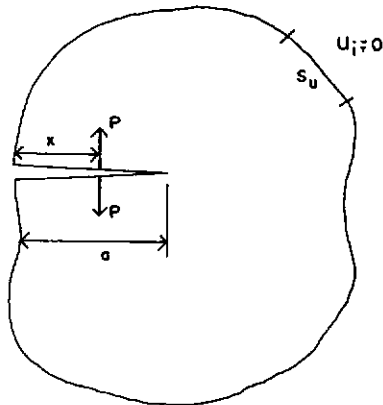


Figura 2.9 - Corpo fraturado submetido a força P distribuída ao longo da espessura.

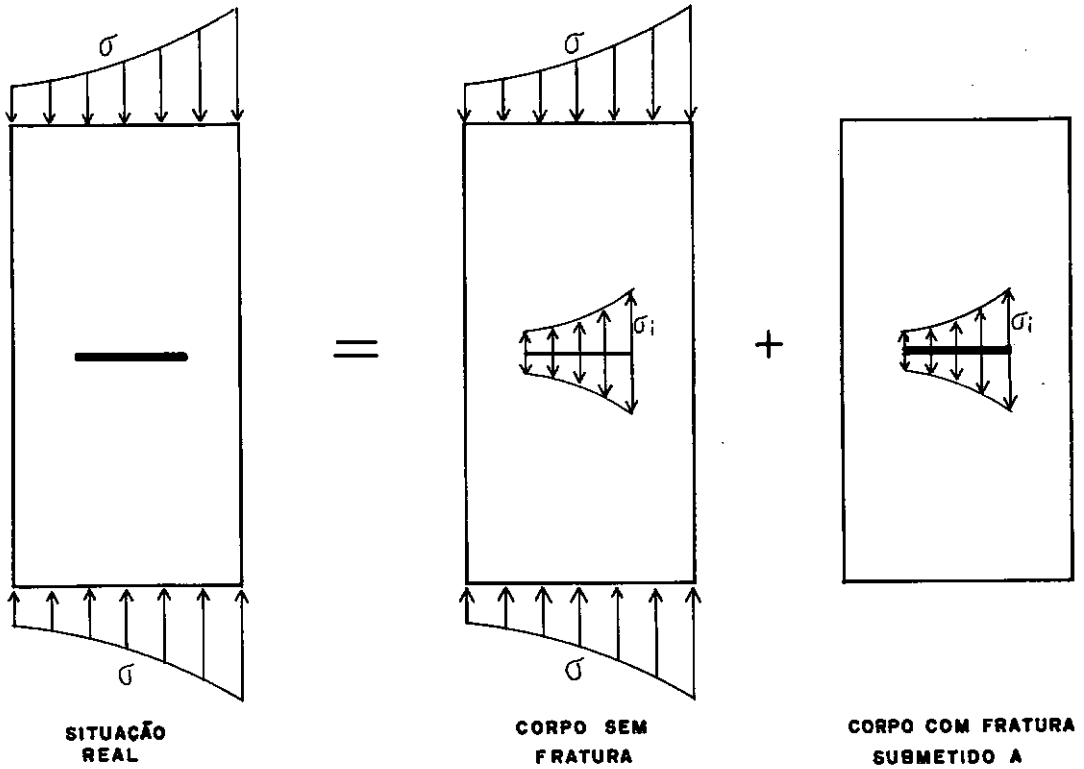


Figura 2.10 - Etapas da superposição.

2.6.2. Formas gerais de escrever K_I

Observando-se as equações (2.4a,b,c), pode-se escrever:

$$K_I = \sigma Y \sqrt{\pi a} \quad (2.27)$$

onde σ = tensão na extremidade da fratura

Y = função da geometria

a = profundidade da fratura

A equação (2.27) pode também ser escrita separando-se as partes da tensão referente ao efeito de membrana e o efeito de flexão, ficando:

$$K_I = \sqrt{\pi a} (\sigma_m F_m + \sigma_f F_f) \quad (2.28)$$

onde

σ_m, σ_f = termos de membrana e flexão respectivamente.

F_m, F_f = Fator da correção das tensões de membrana e flexão respectivamente, funções da geometria do corpo e da fratura.

Estas formas são muito usuais e serão também utilizadas nos capítulos que se seguem.

2.7. Elementos com Singularidade

2.7.1. Introdução

Os primeiros estudos envolvendo elementos finitos com a Mecânica da Fratura empregavam elementos convencionais. Isto fez com que as malhas utilizadas na discretização fossem extremamente refinadas, principalmente ao redor do "crack-tip", para melhor representar a singularidade $1/\sqrt{r}$ do campo de tensões e de de formações.

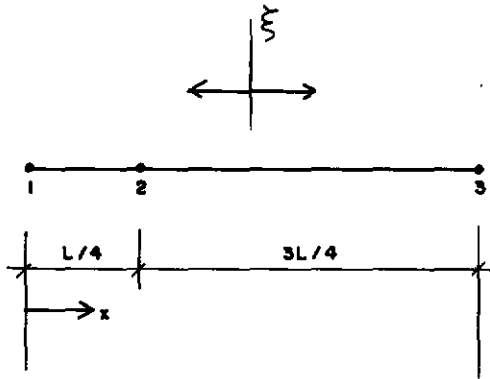
Os primeiros elementos desenvolvidos especialmente para análise de fraturas, procuravam incorporar esta singularidade, e utilizavam formulações híbridas (vide ref. [29] e [31]) e formulações complexas, necessitando para sua implementação várias rotinas especiais, e elementos de transição. Outros pesquisadores propuseram funções de interpolação, que possuíam singularidades (ref. [14]), mas que não podiam interpretar movimentos de corpo rígido, o que acabava afetando os resultados.

O desenvolvimento de elementos isoparamétricos, permitiu a incorporação da singularidade ao elemento, usando o "modo de deslocamentos", pela simples manipulação da posição dos nós. Nos elementos quadráticos, a posição do nó médio de um lado é movido para a distância de um quarto, conforme mostra a figura (2.11), e são conhecidos na literatura com o nome de "quarter-point elements". Atualmente esta forma é a mais conveniente, pois não há necessidade de modificações no programa e os resultados obtidos por este método tem-se mostrado muito bons.

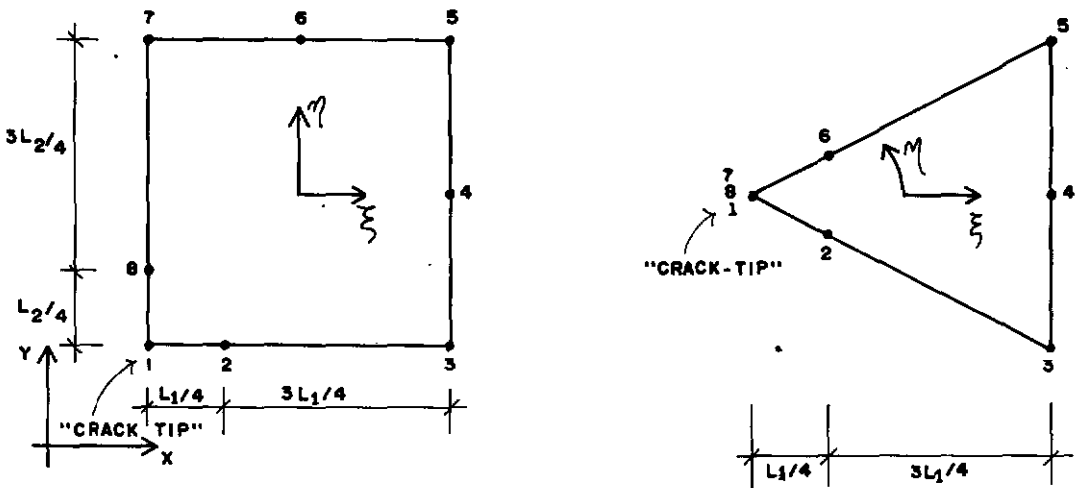
Na referência [30] são mostrados os procedimentos e provas matemáticas para elementos de estado plano e tri-dimensionais da ocorrência de singularidade $1/\sqrt{r}$. Em [31] procedimentos análogos são feitos com o elemento tri-dimensional quadrático degenerado para superfície, utilizado na análise de trincas passantes (que atravessam toda a espessura) em cascas. HIBBITH [32] mostra como introduzir singularidades em elementos de ordem qualquer, simplesmente mudando a posição dos nós. BLANDFORD [34] desenvolve elementos de contorno singulares, também deslocando os nós do elemento.

2.7.2. Elementos de "Quarter-Point"

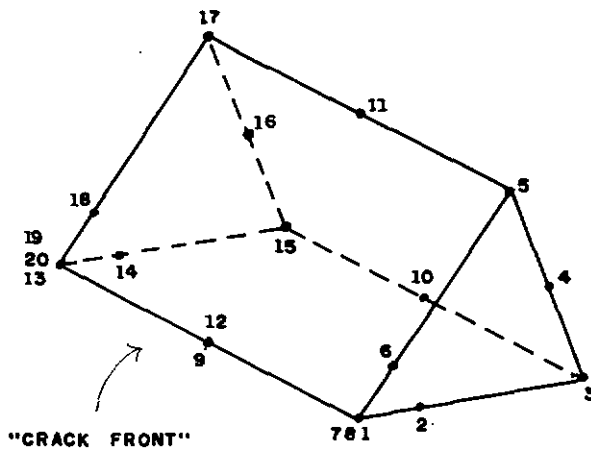
Com o objetivo de ilustrar a teoria do elemento, toma-se como exemplo a elemento uni-dimensional mostrado na figura (2.11a).



a) Unidimensional



b) Bidimensionais



c) Tridimensionais

Figura 2.11 - Quarter-Point Elements

As funções de interpolação são:

$$N_1 = -\frac{1}{2} \xi (1-\xi) \quad (2.29a)$$

$$N_2 = (1 - \xi^2) \quad (2.29b)$$

$$N_3 = \frac{1}{2} \xi (1+\xi) \quad (2.29c)$$

e as coordenadas são escritas como:

$$x = \sum_{i=1}^3 N_i x_i \quad (2.30)$$

sendo

x_i = coordenadas nodais

Para $x_1=0$ $x_2=L/4$ e $x_3=L$ tem-se

$$x = \frac{1}{2} \xi (1+\xi) L + (1-\xi^2) \frac{L}{4} \quad (2.31)$$

então

$$\xi = -1 + 2\sqrt{\frac{x}{L}} \quad (2.32)$$

O Jacobiano da matriz de transformação de coordenadas é definido como:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{L}{2} (1+\xi) = \sqrt{L \cdot x} \quad (2.33)$$

sendo que para $x = 0$ torna-se nulo.

Os deslocamentos ao longo de 1-3 são dados por:

$$u = \sum_{i=1}^3 N_i u_i \quad (2.34)$$

sendo

u_i = valores dos deslocamentos
modais

Substituindo-se ξ dado em (2.32), tem-se:

$$u = -\frac{1}{2} \left(-1 + 2\sqrt{\frac{x}{L}} \right) \left(2 - 2\sqrt{\frac{x}{L}} \right) u_1 + 4 \left(\sqrt{\frac{x}{L}} - \frac{x}{L} \right) u_2 + \frac{1}{2} \left(-1 + 2\sqrt{\frac{x}{L}} \right) \left(2\sqrt{\frac{x}{L}} \right) u_3 \quad (2.35)$$

A deformação na direção x é:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (2.36)$$

obtem-se:

$$\epsilon_x = -\frac{1}{2} \left[\frac{3}{\sqrt{xL}} - \frac{4}{L} \right] u_1 + \left[\frac{2}{\sqrt{xL}} - \frac{4}{L} \right] u_2 + \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{\sqrt{xL}} + \frac{4}{L} \right] u_3 \quad (2.37)$$

Na equação acima nota-se claramente a singularidade, devido ao termo $1/\sqrt{x}$ quando $x \rightarrow 0$, no campo de deformação e tensões.

Para elementos bi-dimensionais o procedimento é análogo, considerando as coordenadas x e y e os deslocamentos u e v ,

e para tri-dimensionais x,y,z e u,v,w.

Para os casos bi-dimensionais as equações (2.22) podem ser modificadas para avaliar diretamente o fator de intensidade de tensões, ficando

$$K_I \begin{Bmatrix} (2k-1)\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{3\theta}{2} \\ (2k+1)\sin\frac{\theta}{2} - \sin\frac{3\theta}{2} \end{Bmatrix} = 4\mu \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \begin{Bmatrix} 4u_2 - u_3 - 3u_1 \\ 4v_2 - v_3 - 3v_1 \end{Bmatrix} \quad (2.38)$$

e

$$K_{II} \begin{Bmatrix} -(2k+3)\sin\frac{\theta}{2} - \sin\frac{3\theta}{2} \\ (2k-3)\cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{3\theta}{2} \end{Bmatrix} = 4\mu \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \begin{Bmatrix} 4u_2 - u_3 - 3u_1 \\ 4v_2 - v_3 - 3v_1 \end{Bmatrix} \quad (2.39)$$

sendo o ângulo θ , coordenada polar do lado 1-3 e u e v deslocamentos nodais.

2.8. Métodos Energéticos

Processos numéricos que utilizam a energia de deformação dissipada na fratura são muito úteis para a avaliação do fator de intensidade de tensões.

Nesta seção faz-se um breve relato de suas aplicações, baseados nas referências [37] e [42].

Se uma fratura de comprimento "a" avança de uma quantidade "da", causará uma dissipação na energia de deformação "dU". Definida como energia dissipada na fratura:

$$G = -\frac{dU}{da} \quad (2.40)$$

que está diretamente relacionada com o fator de intensidade de tensões, como mostrado na seção 2.3. Para o caso particular de K_I , tem-se:

$$K_I = \left(\frac{8\mu G_I}{1+k} \right)^{1/2} \quad (2.41)$$

Então pode-se calcular K_I avaliando a energia dissipada pela progressão da fratura.

A figura (2.12), mostra esquematicamente a idealização de uma estrutura discretizada com elementos finitos, incluindo uma fratura.

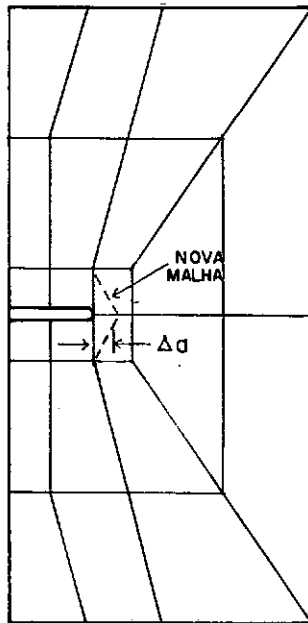


Figura 2.12 - Reajustamento da malha para uma extensão Δa da fratura.

A energia potencial é então avaliada para duas diferentes posições da fratura separada por uma quantia Δa , e aproximadamente tem-se:

$$\frac{\Delta\pi}{\Delta a} \approx \frac{\pi_1 - \pi_2}{\Delta a} \quad (2.42)$$

sendo

$$\pi = \frac{1}{2} \underline{u}^T \underline{K} \underline{u} + \underline{u}^T \underline{f}$$

com

\underline{u} = vetor de deslocamento

\underline{K} = matriz de rigidez da estrutura

\underline{f} = vetor de cargas aplicadas na estrutura.

Finalmente pode-se aproximar $\frac{dU}{da}$ como $\frac{\Delta\pi}{t\Delta a}$, sendo t a espessura do modelo analisado.

Contudo este processo é anti-econômico pois implica em resolver a estrutura duas vezes. Alternativamente pode-se avaliar diretamente $\Delta\pi$ procedendo-se da seguinte forma:

Avalia-se inicialmente \underline{K} , \underline{u} , \underline{f} , para a estrutura com a posição original da fratura. Chamando de $\Delta\underline{K}$ e $\Delta\underline{u}$ a variação destas grandezas devido a extensão Δa da fratura, com \underline{f} constante.

Para a posição original tem-se:

$$\underline{K} \underline{u} + \underline{f} = 0 \quad (2.43)$$

e a energia potencial é:

$$\pi = \frac{1}{2} \underline{u}^T \underline{K} \underline{u} + \underline{u}^T \underline{f} \quad (2.44)$$

Escrevendo a variação da energia potencial como:

$$\Delta\pi = \frac{1}{2} (\underline{u} + \Delta\underline{u})^T (\underline{K} + \Delta\underline{K})(\underline{u} + \Delta\underline{u})^T + (\underline{u} + \Delta\underline{u})^T \cdot \underline{f} - \frac{1}{2} \underline{u}^T \underline{K} \underline{u} + \underline{u}^T \underline{f} \quad (2.45)$$

Negligenciando os termos de segunda ordem e $\Delta\underline{u}^T \underline{f}$, obtém-se:

$$\Delta\pi = \frac{1}{2} \underline{u}^T \Delta\underline{K} \underline{u} \quad (2.46)$$

então a determinação de $\Delta\pi/\Delta a$ é feita nas seguintes etapas:

- a) Avalia-se \underline{u} para uma única solução
- b) Determina-se a variação $\Delta\underline{K}$ calculando a variação da matriz de rigidez quando a configuração da fratura altera-se de " Δa ".
- c) Avalia-se $\Delta\pi$ de acordo com a equação (2.46).

A etapa b) do processo envolve apenas os elementos ao redor do "crack-tip" que sofreram mudanças de geometria. Este processo é bastante simples e econômico, sendo usado tanto na análise bi-dimensional como na tri-dimensional.

Outra alternativa para avaliar a energia dissipada é utilizando a integral J proposta por RICE. No caso bi-dimensional, escrito na forma:

$$J = \int_{\Gamma} \left(U - \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} - \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dy + \int_{\Gamma} \left(\tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx \quad (2.47)$$

sendo:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \underline{\sigma} \underline{\varepsilon} \quad , \text{ densidade de energia de deformação}$$

e

Γ = contorno definido pelos lados dos elementos ao redor do "Crack-tip".

A vantagem da integral acima é que ela pode ser aplicada nos casos elástico não-linear ou elástico-plástico. E é um parâmetro suficiente para o conhecimento do estado da fratura.

Qualquer procedimento adotado na determinação da energia dissipada, a malha utilizada na modelação da singularidade é essencial para se obter uma boa precisão dos resultados. Pode-se refinar a malha usando elementos "standard", entretanto a sua convergência é lenta. Mais adequado é utilizar elementos singulares de ordem superior, como por exemplo os "quarter-point elements".

2.9. Relação entre K_I e o Desenvolvimento da Fratura pela Fadiga

Faz parte também da mecânica da fratura, o estudo da propagação da trinca quando submetida à cargas cíclicas, principalmente porque um dos fatores que provoca o aparecimento e o crescimento da fratura é justamente a fadiga do material.

Um dos métodos mais usados para estabelecer a vida

útil da estrutura é relacionando-se K (Fator de Int. de Tensões) e a razão de crescimento da fratura por ciclo da/dN porque estes dois fatores estão intimamente ligados; conforme mostram as experiências.

De uma forma genérica pode-se escrever:

$$\frac{da}{dN} = f(\Delta K) = f\left\{(S_{m\acute{a}x} - S_{m\acute{i}n}) \sqrt{\pi a}\right\} = f\left(2 S_a \sqrt{\pi a}\right) \quad (2.48)$$

onde

$S_{m\acute{a}x}$ e $S_{m\acute{i}n}$ = máxima e mínima tensão em cada ciclo.

S_a = amplitude da tensão.

Os primeiros estudos tentando relacionar estas grandezas foram feitos por PARIS em sua tese de Ph.D (1962).

Ele propôs uma simples função exponencial do tipo

$$\frac{da}{dN} = C. (\Delta K)^n \quad (2.49)$$

onde C e n são constantes que dependem do material.

A integração desta equação pode ser feita quando temos uma relação entre a e K, por exemplo

$$K = S \sqrt{\pi a} \quad (2.50)$$

substituindo (2.50) em (2.49) tem-se:

$$\frac{da}{dN} = C (\Delta S \sqrt{\pi a})^n \quad (2.51)$$

e a integração de (2.51) é simples, obtendo-se

$$N = \frac{2}{C(\Delta S \sqrt{\pi})^n (2-n)} \cdot \left[a_f^{(2-n)/2} - a_i^{(2-n)/2} \right] \quad (2.52)$$

onde a_i = abertura inicial da fratura

a_f = abertura final da fratura

Então obtem-se uma equação simples para avaliar o número de ciclos que a estrutura poderá suportar até atingir um valor crítico para a_f .

Os valores de n costumam variar entre 2 e 4 e C em torno de 10^{-2} para os aços comuns.

Entretanto esta função não apresenta resultados satisfatórios para pequenos valores de ΔK , pois dados experimentais mostram que existe um valor limite para ΔK , que abaixo deste não ocorrerá nenhum crescimento da fratura, então N não pode ser determinado desta forma.

Tentando contornar este problema ERDOGAN [10] propôs uma equação mais geral do tipo

$$\frac{da}{dN} = C K_{m\acute{a}x}^m \Delta K^n \quad (2.53)$$

que ele modifica para introduzir um efetivo $\overline{\Delta K}$ definindo como

$$\overline{\Delta K} = S_{m\acute{a}x} (1 - R)^m \sqrt{\pi a} \quad (2.54)$$

$$\text{com } R = \frac{S_{\max}}{S_{\min}}$$

FORMAN e outros [11], argumentam que $\frac{da}{dN}$ pode tornar-se infinita quando K_{\max} está próximo de K_{Ic} , e modificam a equação (2.53) para

$$\frac{da}{dN} = \frac{C \Delta K^m K_{\max}}{K_{Ic} - K_{\max}} \quad (2.55)$$

As diferenças entre as expressões de $\frac{da}{dN}$ geralmente não são muito grandes, mas nenhuma delas tem uma aplicação geral. Cada uma delas pode ser usada com resultados satisfatórios dentro de uma dada região do campo de variação de K.

Muitas outras expressões para $\frac{da}{dN}$ são propostas nas literaturas correlatas que levam em conta outros fatores que influenciam na vida útil da estrutura. Entretanto as relatadas aqui são as mais comumente usadas.

2.10. Mecânica da Fratura com Pequena Zona Plástica

De acordo com as equações (2.4), ao redor do "crack-tip" existe uma singularidade no campo de tensão. Entretanto muitos materiais possuem uma tensão de escoamento, principalmente metais, e esta singularidade não pode existir, conforme mostra a figura (2.13)

Com o objetivo de corrigir esta lacuna, vários autores propõem uma forma de corrigir o valor de K_I , e isto é plenamente aceitável quando a zona de plastificação é pequena.

Um dos métodos mais utilizados, o proposto por IRWIN [16], é relatado nesta seção:

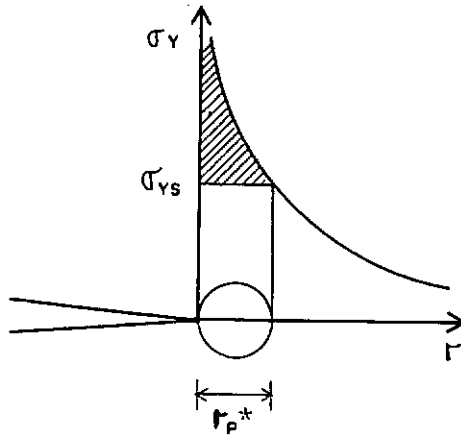


Figura 2.13 - Região de plastificação proposta por Irwin

Conforme a figura (2.13) r_p^* é a distância do "crack-tip" até o ponto onde a tensão torna-se igual à σ_{ys} (tensão de escoamento), isto é feito substituindo σ por σ_{ys} na equação (2.24), tem-se:

$$\sigma_y = \sigma_{ys} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r_p^*}} \quad (2.56)$$

ou seja

$$r_p^* = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_{ys}^2} = \frac{\sigma^2 a}{2\sigma_{ys}^2} \quad (2.57)$$

onde σ = tensão no crack-tip

a = profundidade da fratura

e o efetivo comprimento da fratura a_{ef} , será:

$$a_{ef} = a + r_p^* \quad (2.58)$$

Na verdade r_p^* é muito maior pois a zona plástica tende a espalhar devido ao crescimento da fratura.

A figura (2.14) ilustra a nova situação.

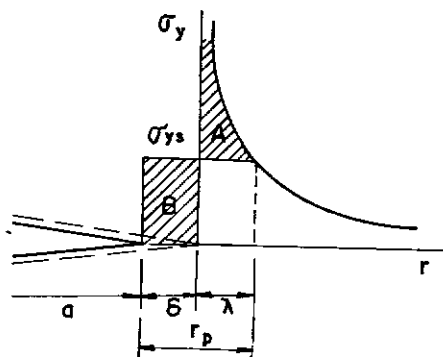


Figura 2.14 - Espalhamento da zona plástica

A nova profundidade da fratura será

$$a_{ef} = a + \delta \quad (2.59)$$

e é necessário uma nova estimativa para o comprimento da zona plástica r_p . Assumindo que a área A será igual a área B, es creve-se

$$\sigma_{ys} = \frac{K}{\sqrt{2\pi\lambda}} = \sigma \sqrt{\frac{a+\delta}{2\lambda}} \quad \text{ou} \quad (2.60)$$

$$\lambda = \frac{\sigma^2 (a+\delta)}{2 \sigma_{ys}^2} \approx r_p^* \quad \text{se } a \ll \delta \quad (2.61)$$

A área B será igual à $\sigma_{ys} \cdot \delta$;

então pode-se escrever:

$$\sigma_{ys} \cdot \delta = \left[\int_0^\lambda \sigma \sqrt{\frac{a+\delta}{2r}} dr \right] - \sigma_{ys} \cdot \lambda \quad (2.62)$$

negligenciando δ em relação a a usando (2.61) e (2.62) obtem-se o seguinte:

$$\begin{aligned} (\delta + r_p^*) \sigma_{ys} &= \sigma \sqrt{2ar_p^*} \quad \text{ou} \\ (\delta + r_p^*)^2 &= 2ar_p^* \frac{\sigma^2}{\sigma_{ys}^2} = 4 r_p^{*2} \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$\text{então } \delta = r_p^* \quad \text{e} \quad r_p = \lambda + \delta = 2r_p^*$$

e a zona plástica é encontrada como sendo duas vezes maior que a primeira estimativa.

Então, se uma correção na zona plástica é aplicada, deve-se também corrigir o fator K, e a tensão também

$$K = \sigma \sqrt{\pi(a + r_p^*)} = \sigma \sqrt{\pi \left(a + \frac{K^2}{2\pi \sigma_{ys}^2} \right)} \quad (2.64)$$

$$\sigma = K / \sqrt{\pi(a + r_p^*)} \quad (2.64a)$$

As correções que foram feitas aqui são válidas tanto para o E.P.T. ou caso de E.P.D., e neste caso pode-se avaliar o deslocamento de abertura da fratura, conhecido como C.O.D. (crack opening displacement). Este é escrito como:

$$\text{C.O.D.} = 2v = \frac{4\sigma}{E} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (2.65)$$

onde $x = a$ no "crack-tip".

Se está ocorrendo plasticidade, existirá um deslocamento também do "crack-tip", que é chamado de C.T.O.D. (crack tip opening displacement). em regime linear teremos que C.T.O.D. = 0, mas aplicando uma correção na zona plástica, este valor pode ser determinado. A figura (2.15) ilustra o C.O.D. e o C.T.O.D. Aplicando a correção r_p^* em (2.65) obtém-se

$$C.O.D. = \frac{4\sigma}{E} \sqrt{(a+r_p^*)^2 - x^2} \quad (2.66)$$

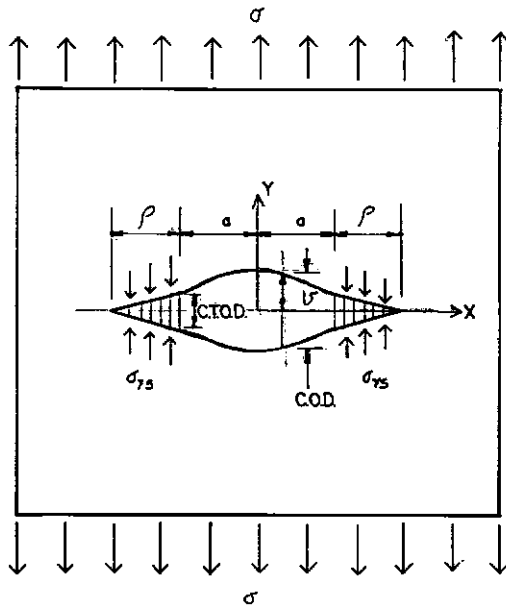


Figura 2.15 - C.O.D. e C.T.O.D.

Agora para $x=a$, tem-se que

$$C.T.O.D. = \frac{4\sigma}{E} \sqrt{2ar_p^*} = \frac{4K^2}{\pi E \sigma_{ys}} \quad (2.67)$$

É claro que trata-se de uma forma aproximada para levar em conta a plasticidade que se desenvolve no "crack-tip", e uma análise mais aprofundada deverá levar em conta a curva tensão deformação do material e as soluções são em geral por métodos numéricos, de forma incremental.

CAPÍTULO III

3. ELEMENTOS ESCALARES

3.1. Introdução

Na análise de fraturas parciais (trincas) em estruturas de superfície, figura (3.1), deve-se obrigatoriamente levar em conta a parte da seção que ainda permanece ligada, pois a parte remanescente pode absorver e transmitir tensões e deformações (esforços).

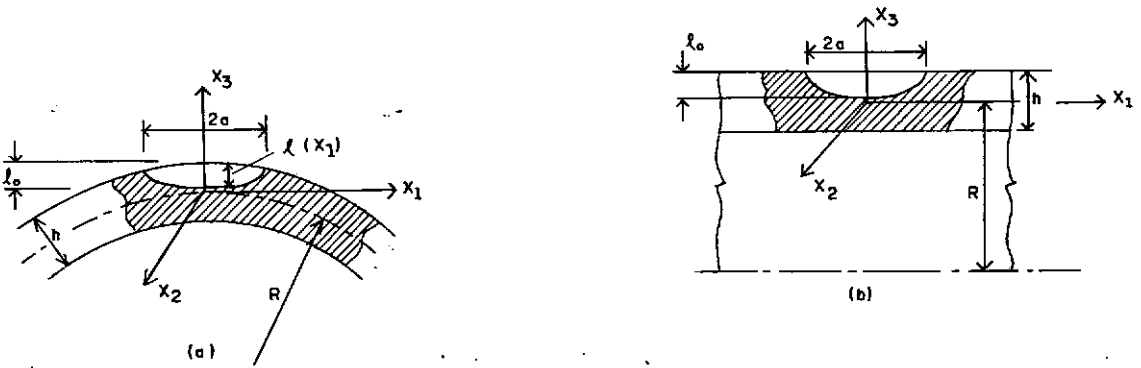


Figura 3.1 - Trincas em estruturas de superfície (tubulações).

O tratamento rigoroso deste efeito deve receber uma abordagem tri-dimensional, isto impossibilita a utilização de métodos analíticos, e como forma usual recorre-se ao M.E.F. Entretanto a discretização ao longo da espessura, é sempre uma solução onerosa. Quando se processa uma análise em regime não linear este enfoque torna-se ainda mais crítico, devido ao fato da solução ser obtida via processos incrementais-iterativos.

Com o objetivo de minimizar estas deficiências, desenvolve-se neste capítulo um elemento escalar capaz de simular o comportamento da fratura e que é acoplado diretamente ao elemento de casca, reduzindo-se uma dimensão do problema. O equacionamento é feito em termos do funcional de energia potencial, e a equação constitutiva do elemento escalar é obtida pela solução de problemas (2-D), tanto para o regime linear quanto para o elasto-plástico. Mostram-se também as transformações necessárias para a implementação computacional, a avaliação do fator de intensidade de tensões k_I e a integral J , ao longo da fratura, parâmetros estes suficientes para caracterizar o desenvolvimento da mesma.

A utilização de elementos escalares na mecânica da fratura foi proposto inicialmente por RICE e LEVY [18], que desenvolveram um modelo de linha de molas contínua em conjunto com a teoria de membrana e a teoria de Kirchoff para flexão, para estudar o problema de trincas em placas; a solução do problema é obtida via "Método das diferenças Finitas". Outros como DELALE e ERDOGAM [19] e [20] utilizaram o modelo em conjunto com a teoria de REISSNER para a flexão. GERMAN [21] obtém uma matriz de rigidez para os elementos escalares e a implementaram no Sistema Adina, que é usado em conjunto com elementos finitos de casca, generalizando sua aplicação para problemas de fraturas em estruturas de superfície com geometria qualquer. RICE [24] propôs também o modelo elasto-plástico perfeito e PARKS [22] e PARKS e WHITE [23], introduziram considerações de endurecimento do material.

3.2. O Funcional de Energia Potencial para Estruturas com Trin- cas não Passantes

A figura (3.2) representa de forma generalizada o problema de uma placa com dimensões infinitas e espessura h , submetida à remotas tensões normais σ_∞ e de flexão m_∞ , na direção x_1 e x_2 respectivamente, possuindo em uma determinada seção uma trinca não-passante (que não atravessa toda a espessura). A profundidade varia de acordo com x_1 e é denotada por $l(x_1)$, e para facilitar o equacionamento é considerada simétrica ao plano x_2x_3 . O comprimento total é $2a$ e no ponto $x_1 = x_2 = 0$ tem-se a profundidade máxima l_0 .

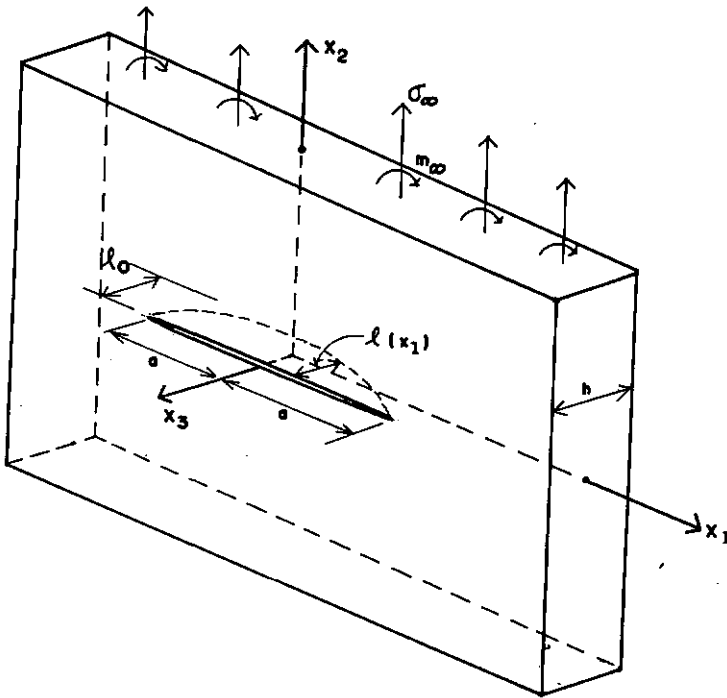


Figura 3.2 - Placa genérica com trinca não passante.

O tensor de tensões para um ponto qualquer do corpo quando σ_∞ e m_∞ são constantes é escrito como função apenas das coordenadas x_1 , x_2 e x_3 , como:

$$\tilde{\tau}_{ij} = \tau_{ij} (x_1, x_2, x_3) \quad (3.1)$$

e os esforços ao longo do eixo x_1 são:

$$N_{22} (x_1, 0) = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{22} (x_1, 0, x_3) dx_3 \quad (3.2a)$$

$$M_{22} (x_1, 0) = \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \cdot \tau_{22} (x_1, 0, x_3) dx_3 \quad (3.2b)$$

sendo:

N_{22} - força normal

e

M_{22} - momento fletor, transmitido pela seção transversal fraturada.

Os deslocamentos relativos das faces fraturadas são denotados por $\delta (x_1)$ e $\theta(x_1)$, ao longo da linha de descontinuidade. Os deslocamentos reais são indicados com o sinal "+" e "-" para representar deslocamentos da face superior e inferior respectivamente como mostra a figura (3.3).

Ao longo da linha de descontinuidade tem-se:

$$\delta(x_1) = u_2^+ (x_1, 0) - u_2^- (x_1, 0) \quad (3.3a)$$

$$\theta(x_1) = \frac{\partial u_3^-(x_1, 0)}{\partial x_2} - \frac{\partial u_3^+(x_1, 0)}{\partial x_2} \quad (3.3b)$$

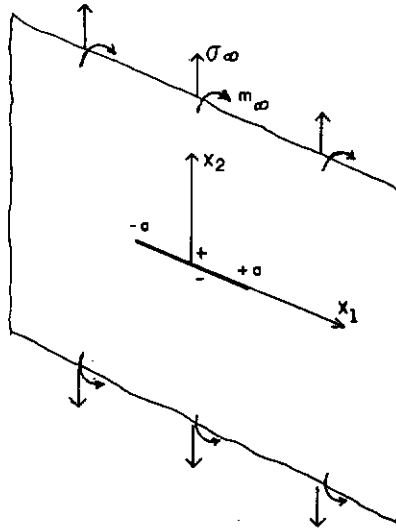


Figura 3.3 - Chapa Fraturada, sinais convencionados.

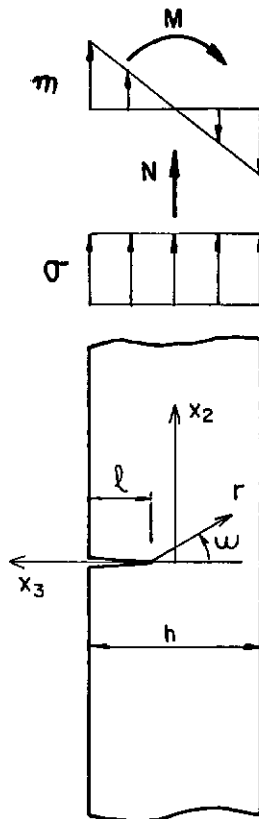


Figura 3.4 - Chapa com Fratura em E.P.D. submetida à cargas de tração e flexão.

O funcional de energia potencial para o problema, já integrado ao longo de x_3 para h constante é:

$$\begin{aligned}
 P = \frac{h}{2} \int_A \left[\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{h}{6} m_{ij} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_i \partial x_j} \right] dx_1 dx_2 + \\
 \frac{h}{2} \int_{-a}^a \left[\sigma \cdot \delta + \frac{h}{6} m \cdot \theta \right] dx_1 + \\
 - \int_S \left[N_i u_i + M_i \frac{\partial u_3}{\partial x_i} \right] dS \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

onde:

$$i, j = 1, 2$$

A = área da placa

S = contorno da placa

$$\delta = \delta(x_1), \theta = \theta(x_1)$$

Pode-se ver claramente que o primeiro termo representa a energia interna de deformação; a segunda integral é a energia de deformação dissipada na fratura, e a última integral é a energia potencial das cargas aplicadas no contorno.

A primeira variação do funcional é

$$\begin{aligned}
 \Delta P = \frac{h}{2} \int_A \left[\left(\Delta \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \sigma_{ij} \frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{h}{6} \left(\Delta m_{ij} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_i \partial x_j} + \right. \right. \\
 \left. \left. m_{ij} \frac{\partial^2 \Delta u_3}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right] dx_1 dx_2 +
 \end{aligned}$$

$$\frac{h}{2} \int_{-a}^a \left[(\Delta\sigma\delta + \sigma\Delta\delta) + \frac{h}{6} (\Delta m\theta + m\Delta\theta) \right] dx_1$$

$$- \int_S \left[N_i \Delta u_i + M_i \frac{\partial \Delta u_3}{\partial x_i} \right] dS \quad (3.5)$$

A relação de IRWIN'S [16], mostrada no capítulo II, entre a energia dissipada por acréscimo de fratura, em estado plano de deformação é:

$$- \Delta P = \int_S G \Delta \eta ds \quad (3.6)$$

onde:

S - comprimento do arco ao longo do crack-tip.

$\Delta \eta$ - é o avanço da fratura, normal a esta.

G - taxa de energia de deformação dissipada na fratura.

Como em regime elástico linear é válido o princípio da superposição dos efeitos. Pode-se admitir que a fratura é formada por várias chapas em E.P.D., como mostrada na figura 3.4, agindo simultaneamente. Então escreve-se:

$$G = G(x_1) \quad (3.7)$$

$$\Delta \eta = \Delta l(x_1) \quad (3.8)$$

e a equação (3.6) neste caso fica:

$$- \Delta P = \int_{-a}^a G(x_1) \cdot \Delta l(x_1) dx_1 \quad (3.9)$$

Iguando-se (3.5) e (3.9), obtém-se a equação geral que traduz o problema estudado:

$$\begin{aligned} & \frac{h}{2} \int_A \left[\left(\Delta \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \sigma_{ij} \frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_j} \right) + \frac{h}{6} \left(\Delta m_{ij} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_i \partial x_j} + m_{ij} \frac{\partial^2 \Delta u_3}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right] dx_1 dx_2 \\ & + \frac{h}{2} \int_{-a}^a \left[\left(\Delta \sigma \delta + \sigma \Delta \delta \right) + \frac{h}{6} \left(\Delta m \theta + m \Delta \theta \right) \right] dx_1 \\ & - \int_S \left[N_i \Delta u_i + M_i \frac{\partial \Delta u_3}{\partial x_i} \right] dS + \int_{-a}^a G \cdot \Delta l \cdot dx_1 = 0 \quad (3.10) \end{aligned}$$

Na forma em que se encontra a equação (3.5), sua solução analítica é de difícil obtenção, necessitando portanto efetuar a integração por meio de um método aproximado (ref.[18] e [19]). Neste trabalho adotou-se o método dos elementos finitos.

3.3. Matriz de Flexibilidade dos Elementos Escalares

Os esforços $N_{22}(x_1,0)$ e $M_{22}(x_1,0)$, transmitidos através da seção remanescente não-fraturada entre $-a$ e $+a$, relacio-

nam-se com os deslocamentos por meio de constantes de reciprocidade elástica determinadas a cada ponto ao longo da fratura, função apenas da profundidade $l(x_1)$. São escritos como:

$$\left\{ \begin{array}{l} h \cdot \delta = A_{tt} \sigma_{22} + A_{tf} m_{22} \\ h \frac{2\theta}{6} = A_{ft} \sigma_{22} + A_{ff} m_{22} \end{array} \right. \quad (3.11a)$$

$$(3.11b)$$

onde:

os índices t,f representam tração e flexão respectivamente.

A_{ij} - constantes de reciprocidade elástica.

Após a integração das equações (3.2), obtém-se:

$$\begin{aligned} \sigma_{22} &= \frac{N_{22}}{h} \\ m_{22} &= \frac{6M_{22}}{h^2} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Denotando σ_{22} e m_{22} como σ e m respectivamente, pelo princípio dos trabalhos virtuais tem-se:

$$\begin{aligned} \int_S \left((N_i \Delta u_i + M_i \frac{\partial \Delta u_3}{\partial x_i}) \right) ds &= h \int_A \left[\sigma_{ij} \frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j} + \frac{h}{6} m_{ij} \frac{\partial^2 \Delta u_3}{\partial x_i \partial x_j} \right] dx_1 dx_2 \\ &+ h \int_{-a}^a \left[\sigma \Delta \delta + \frac{h}{6} m \Delta \theta \right] dx_1 \end{aligned} \quad (3.13)$$

substituindo-se (3.13) em (3.5) obtém-se:

$$\Delta P = \frac{h}{2} \int_A \left[\left(\Delta \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \sigma_{ij} \frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j} \right) + \frac{h}{6} \left(\Delta m_{ij} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_i \partial x_j} - m_{ij} \frac{\partial^2 \Delta u_3}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right] dx_1 dx_2 +$$

$$\frac{h}{2} \int_{-a}^a \left[\left(\Delta \sigma \delta - \sigma \Delta \delta \right) + \frac{h}{6} \left(\Delta m \theta - m \Delta \theta \right) \right] dx_1 \quad (3.14)$$

Por reciprocidade de tensões a integral de área desaparece, e a equação (3.14) fica:

$$- \Delta P = \frac{h}{2} \int_{-a}^a \left[\left(\sigma \Delta \delta - \Delta \sigma \delta \right) + \frac{h}{6} \left(m \Delta \theta - \Delta m \theta \right) \right] dx_1 \quad (3.15)$$

Pelas equações (3.11a), obtém-se:

$$h \left(\sigma \Delta \delta - \Delta \sigma \delta \right) = \sigma \Delta \left(A_{tt} \sigma + A_{tf} m \right) - \Delta \sigma \left(A_{tt} \sigma + A_{tf} m \right) \quad (3.16a)$$

$$= \sigma \left(\frac{dA_{tt}}{d\ell} \sigma + \frac{dA_{tf}}{d\ell} m \right) \Delta \ell + \sigma \left(A_{tt} \Delta \sigma + A_{tf} \Delta m \right) - \Delta \sigma \left(A_{tt} \sigma + A_{tf} m \right)$$

$$(3.16b)$$

analogamente para (3.11b), tem-se:

$$\frac{h^2}{6} \left(m\Delta\theta - \Delta m\theta \right) = m \left(\frac{dA_{ft}}{d\ell} \cdot \sigma + \frac{dA_{ff}}{d\ell} m \right) \Delta\ell +$$

$$m \left(A_{ft} \Delta\sigma + A_{ff} \Delta m \right) - \Delta m \left(A_{ft} \sigma + A_{ff} m \right)$$

(3.16b)

substituindo as equações (3.16a,b) em (3.15) resulta:

$$- \Delta P = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \left[\sigma \left(\frac{dA_{tt}}{d\ell} \sigma + \frac{dA_{tf}}{d\ell} m \right) + m \left(\frac{dA_{ft}}{d\ell} \sigma + \frac{dA_{ff}}{d\ell} m \right) \right] \Delta\ell dx_1$$

(3.17)

Comparando-se as equações (3.9) e (3.17), escreve-se ao longo da linha fraturada:

$$\int_{-a}^a G \Delta\ell dx_1 = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \left[\sigma \left(\frac{dA_{tt}}{d\ell} \sigma + \frac{dA_{tf}}{d\ell} m \right) + m \left(\frac{dA_{ft}}{d\ell} \sigma + \frac{dA_{ff}}{d\ell} m \right) \right] \Delta\ell dx_1$$

(3.18)

Neste ponto introduz-se uma aproximação para se avaliar as constantes de reciprocidade A_{ij} , supostas iguais àquelas obtidas pela solução de uma chapa em E.P.D., com fratura, como mostrado na figura (3.4). Várias soluções são propostas para este problema, e podem ser encontradas em [7], [18], [19]. Adotou-se a solução proposta por KAIA e ERDOGAN [43] na forma polinomial, que tem apresentado bons resultados, sendo válida para $0 < \ell/h \leq 0,8$, e encontra-se relatada no Apêndice I.

Com auxílio destes polinômios o fator de intensidade de tensões pode ser escrito como:

$$K_I = h^{1/2} (\sigma \cdot g_t + m \cdot g_f) \quad (3.19)$$

onde g_t e g_f são funções de forma que em regime linear relacionam-se com G pela equação

$$G = \frac{(1-\nu^2)}{E} K_I^2 \quad (3.20)$$

Assim para cada ponto ao longo da linha $(-a,+a)$, utilizando-se a equação (3.18) escreve-se:

$$\begin{aligned} (1 - \nu^2) h \left(\sigma^2 g_t^2 + 2\sigma \cdot m \cdot g_t g_f + m^2 g_f^2 \right) = \\ \frac{1}{2} \sigma \left(\frac{dA_{tt}}{d\ell} \cdot \sigma + \frac{dA_{tf}}{d\ell} \cdot m \right) + \frac{1}{2} m \left(\frac{dA_{ft}}{d\ell} \sigma + \frac{dA_{ff}}{d\ell} \cdot m \right) \end{aligned} \quad (3.21)$$

definindo

$$\alpha_{ij} = \int_0^{\ell} g_i g_j d\ell \quad (3.22)$$

para $i, j = t, f$

e ℓ - profundidade da fratura

Após agrupar os termos semelhantes e substituído em (3.11) obtém-se para cada ponto ao longo da fratura

$$\left\{ \delta(x_1) = \frac{2(1-\nu^2)}{E} \cdot h \cdot \left(\alpha_{tt} \sigma(x_1) + \alpha_{tf} m(x_1) \right) \right. \quad (3.23a)$$

$$\left. \theta(x_1) = \frac{12(1-\nu^2)}{E} \left(\alpha_{ft} \sigma(x_1) + \alpha_{ff} \cdot m(x_1) \right) \right\} \quad (3.23b)$$

substituindo as equações (3.12) em (3.23) resulta:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta(x_1) = \frac{2(1-\nu^2)}{E} \left(\alpha_{tt} N(x_1) + \alpha_{tf} \cdot \frac{6 M(x_1)}{h} \right) \end{array} \right. \quad (3.24a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta(x_1) = \frac{12(1-\nu^2)}{E} \left(\alpha_{ft} \frac{N(x_1)}{h} + \alpha_{ff} \frac{6 M(x_1)}{h^2} \right) \end{array} \right. \quad (3.24b)$$

Colocando (3.24) na forma matricial, tem-se:

$$\underline{D} = \underline{C} \underline{P} \quad (3.25)$$

onde

$$\underline{D} = \left\{ \begin{array}{l} \delta(x_1) \\ \theta(x_1) \end{array} \right\} \quad \text{vetor de deslocamentos}$$

$$\underline{C} = \frac{(1-\nu^2)}{E} \begin{bmatrix} \alpha_{tt} & \frac{6}{h} \alpha_{tf} \\ \frac{6}{h} \alpha_{ft} & \frac{36}{h^2} \alpha_{ff} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{matriz dos coeficientes} \\ \text{de reciprocidade.} \end{array}$$

$$\underline{P} = \left\{ \begin{array}{l} N(x_1) \\ M(x_1) \end{array} \right\} \quad \text{vetor dos esforços}$$

Pode-se ver claramente em (3.25) que a matriz \underline{C} é em última instância uma matriz de flexibilidade e a fratura pode ser interpretada como sendo uma linha de molas continuamente distribuída ao longo da linha (-a, +a).

3.4. Implementação Computacional

3.4.1. Introdução

Após a obtenção da matriz de flexibilidade para a linha de molas, algumas transformações são necessárias para sua utilização em um sistema computacional em conjunto com o elemento finito de cascas.

3.4.2. Matriz de rigidez da linha de molas

No método dos deslocamentos trabalha-se com matrizes de rigidez e forças nodais equivalentes.

A matriz de rigidez de mola é obtida pela inversão da matriz \underline{C} dada pela equação (3.25), que fica:

$$\underline{P} = \underline{S} \underline{D} \quad (3.26)$$

onde

$$\underline{S} = \underline{C}^{-1}$$

Assim

$$\begin{Bmatrix} N(x_1) \\ M(x_1) \end{Bmatrix} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \cdot \frac{1}{\det} \begin{bmatrix} \alpha_{ff} & -\frac{h}{6} \alpha_{tf} \\ -\frac{h}{6} \alpha_{tf} & \frac{h^2}{36} \alpha_{tt} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta(x_1) \\ \theta(x_1) \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

com

$$\det = \left(\alpha_{tt} \alpha_{ff} - \alpha_{ft}^2 \right)$$

O acoplamento da linha contínua de molas com o elemento finito é feito através dos nós, então uma rigidez equivalente é avaliada a nível de nós integrando-se ao longo do comprimento do lado a que está ligada. E a cada mola discreta é associada um comprimento efetivo W_e .

O comprimento W_e irá obviamente depender das funções de interpolação utilizadas. A figura (3.5) mostra os detalhes deste acoplamento.

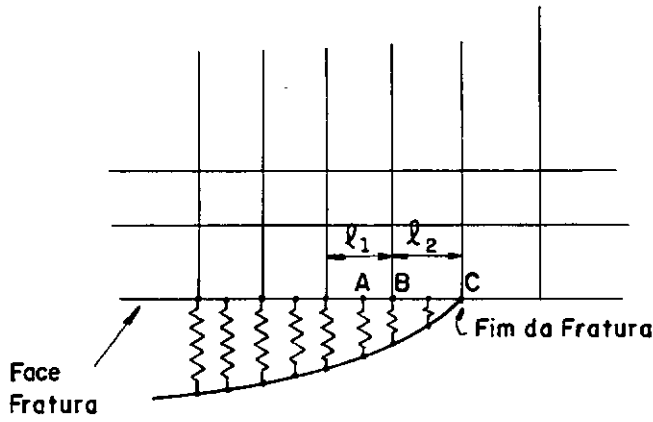


Figura 3.5 - Acoplamento dos elementos escalares com o elemento finito.

Para o caso do elemento quadrático este comprimento efetivo é:

$$We = \begin{cases} 2/3l_1 & \text{(nó A no meio do lado do elemento)} \\ 1/6(l_1+l_2) & \text{(nó B entre elementos)} \\ 1/6l_2 & \text{(nó C no fim da fratura)} \end{cases}$$

Com isto a equação (3.27) fica modificada para:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \frac{E \cdot We}{2(1-\nu^2)} \cdot \frac{1}{\det} \begin{bmatrix} \alpha_{ff} & -\frac{h}{6} \alpha_{tf} \\ -\frac{h}{6} \alpha_{tf} & \frac{h}{36} \cdot \alpha_{tt} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_c \\ \theta_c \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

onde:

F_1 e F_2 são as cargas concentradas no nó, normal e de flexão

δ_c e θ_c são deslocamentos nodais de translação e rotação.

3.4.3. Matriz de rotação

A relação entre forças e deslocamentos nos elementos escalares dada pela equação (3.28) está no sistema de coordenadas locais. Entretanto a fratura pode ter uma orientação arbitrária qualquer com respeito ao sistema de coordenadas global.

A figura (3.6) mostra o sistema local dos elementos escalares e a figura (3.7) o sistema global dos elementos de casca.

No sistema local r, s e t escreve-se (3.28) de forma compacta:

$$\begin{bmatrix} N_s \\ M_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_s \\ \theta_r \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

onde N_s e δ_s - são força e deflexão na direção do eixo S
 M_r e θ_r - são momento e rotação na direção sobre o eixo r .
 S_{ij} - coeficientes de rigidez.

No elemento degenerado as deflexões e forças são dadas em termos do sistema global x, y, z enquanto as rotações e momentos em cada ponto são fornecidos no sistema local da casca, des

crito pelos vetores unitários V_{1i} , V_{2i} e V_{3i} , sendo V_{3i} normal ao plano no ponto i enquanto V_1 e V_2 são no plano da casca, mas não necessariamente coincidentes com os dados do elemento.

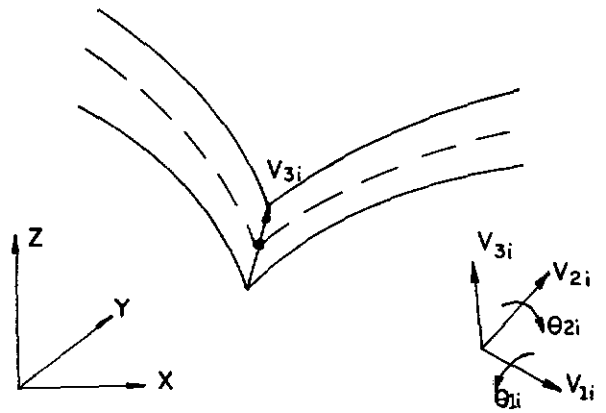
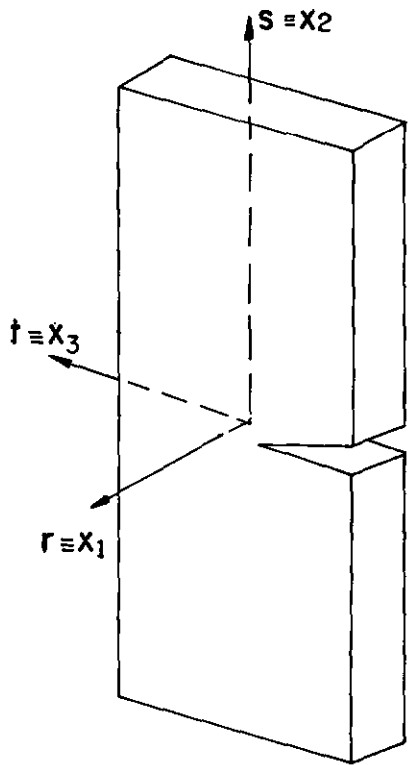


Figura 3.6 - Sistema local da fratura dado pelos eixos r , s , t .

Figura 3.7 - Sistema global do elemento dados pelos eixos x , y , z e os vetores V_{1i} , V_{2i} e V_{3i} .

Designando o vetor de deflexões nodal como

$$\underline{u} = (u_x, u_y, u_z) \quad (3.30)$$

a magnitude das deflexões na direção do eixo s será:

$$\delta_s = \underline{s} \cdot \underline{u} \quad (3.31)$$

onde

\underline{s} = vetor formado pelos cossenos diretores do eixo s , com os eixos x, y, z .

As rotações θ_1 e θ_2 são dadas nos eixos locais V_1 e V_2 , podendo-se formular o vetor $\underline{\theta}$ de rotação por:

$$\underline{\theta} = \theta_1 \underline{V}_1 + \theta_2 \underline{V}_2 \quad (3.32)$$

então

$$\theta_r = \underline{r} \cdot \underline{\theta} \quad (3.33)$$

A relação entre os deslocamentos locais da mola e o sistema global fica:

$$\begin{bmatrix} \delta_s \\ \theta_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & s_y & s_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & rV_1 & rV_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

analogamente o vetor de forças é obtido por:

$$\begin{bmatrix} N_s \\ M_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & s_y & s_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{rV}_1 & \underline{rV}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

substituindo-se (3.34) e (3.35) em (3.29), tem-se

$$\underline{S}_G = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ s_y & 0 \\ s_z & 0 \\ 0 & \underline{rV}_1 \\ 0 & \underline{rV}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & s_y & s_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{rV}_1 & \underline{rV}_2 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

De uma forma mais sucinta (3.36) fica:

$$\underline{S}_G = \underline{R}^T \underline{S} \underline{R} \quad (3.37)$$

\underline{S} = matriz de rigidez local

\underline{R} = matriz de rotação do elemento es
calar

\underline{S}_G = matriz de rigidez global.

É importante notar que os deslocamentos e deflexões em relação ao plano da trinca são simétricos, e são dados por $\frac{1}{2}u_x$, $\frac{1}{2}u_y$, $\frac{1}{2}u_z$, $\frac{1}{2}\theta_1$, $\frac{1}{2}\theta_2$. Fisicamente este elemento funciona como uma mola, e a matriz de rigidez (3.37) deve ser multiplicada pelo fator 2, se esta estiver sobre o eixo de simetria.

Após formado \underline{S}_G , esta é espalhada adequadamente na matriz de rigidez total que forma um sistema de equações do método dos deslocamentos.

3.4.4. Cálculo do fator K_I e da integral J

A avaliação de K_I e da integral J, é feita no sistema local, ao longo da linha de molas, em cada ponto discretizado da fratura.

Com a resolução do sistema de equações, obtém-se os deslocamentos, com auxílio da equação (3.34), tem-se δ_s e θ_r , de (3.29) determinam-se as forças nodais e por (3.12) calculam-se as tensões. E K_I é avaliado por (3.19) como:

$$K_I = h^{1/2} (\sigma \cdot g_t + m \cdot g_f)$$

$$\text{onde } \sigma = \frac{N_s}{h \cdot W_e}$$

$$m = \frac{6M_r}{h^2 W_e}$$

e por (3.20) explicita-se:

$$G_I = J_I = K_I^2 \left(\frac{1-\nu^2}{E} \right)$$

Estes dois parâmetros são suficientes para verificação da estabilidade da fratura.

3.5. Análise em Regime Elasto-Plástico

3.5.1. Introdução

Muitas vezes tem-se a necessidade de um maior conhecimento da segurança da estrutura e somente uma análise linear

torna-se insuficiente. Neste caso uma análise limite em regime plástico dá uma distância melhor aproximada entre a estabilidade e a ruína, e o coeficiente de segurança pode ser avaliado com mais precisão.

Com auxílio da teoria clássica da plasticidade o elemento de mola pode representar tensões e deformações em regime não linear. As equações constitutivas são escritas de forma incremental e a superfície de escoamento é construída a partir do conhecimento prévio das soluções de uma chapa em E.P.D. com carregamento e condições de contorno mostrada na figura (3.4).

3.5.2. Matriz de rigidez elasto-plástica

A matriz de rigidez elasto-plástica para o elemento escalar é derivada a partir das equações (3.28). Para cada mola tem-se:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ \theta \end{Bmatrix}$$

Redefinindo os esforços e deslocamentos como $Q_1 = N$, $Q_2 = M$, $q_1 = \delta$ e $q_2 = \theta$, e os coeficientes da matriz de rigidez como S_{ij} , com i, j variando de 1 a 2, a equação (3.28) é escrita como:

$$Q_i = S_{ij}^e q_j \quad (3.38)$$

Sendo que o índice superior "e" denota regime elástico. Utilizando conceito de matriz de rigidez tangente, a equa-

ção (3.38) é escrita de forma incremental:

$$\dot{Q}_i = S_{ij}^{ep} \dot{q}_j \quad (3.39)$$

onde:

\dot{Q}_i e \dot{q}_j são os incrementos de esforços e deslocamentos respectivamente.

S^{ep} = matriz de rigidez de módulo tangente, conhecida também como matriz de rigidez elasto-plástica.

Assume-se que \dot{q}_j é formado por duas parcelas, uma elástica e outra completamente plástica.

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j^e + \dot{q}_j^p \quad (3.40)$$

Seguindo a teoria clássica de plasticidade, introduz-se uma superfície convexa de escoamento Φ do tipo:

$$\Phi = \Phi(Q_i, a, t, \sigma_0) = 0 \quad (3.41)$$

onde:

a = profundidade da fratura

t = espessura da chapa no ponto considerado

σ_0 = tensão uniaxial de escoamento

Q_i = forças generalizadas.

A obtenção desta superfície é mostrada com maiores detalhes na seção seguinte.

No campo de tensões limitado por esta superfície, podem ocorrer três situações distintas:

1º) Numa região do espaço de tensões onde $\bar{\Phi} < 0$, a resposta é elástica, sendo:

$$S_{ij}^{ep} = S_{ij}$$

2º) Se $\bar{\Phi} = 0$ então o estado de tensões está no limite de escoamento e se no descarregamento ocorre

$$\dot{q}_j \cdot \bar{\Phi}_{,j} \leq 0$$

onde

$$\bar{\Phi}_{,j} \equiv \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial Q_j} \text{ normal para fora da superfície de escoamento}$$

então

$$S_{ij}^{ep} = S_{ij} \text{ e a resposta ainda é elástica}$$

3º) Se o estado de tensões está sobre a superfície de escoamento e $\dot{q}_j \bar{\Phi}_{,j} > 0$, significa que está havendo carregamento capaz de plastificar a estrutura neste ponto.

Quando o terceiro caso está ocorrendo, a parte plástica dos deslocamentos generalizados é calculada como:

$$\dot{q}_j^p = \Lambda \bar{\Phi}_{,j} \tag{3.42}$$

sendo

Λ - escalar, que relaciona o gradiente da superfície de escoamento com os deslocamentos.

O escalar Λ é avaliado impondo-se a "condição de consistência" que, durante o escoamento plástico, o estado de tensões permanece sobre a superfície $\Phi = 0$, desta forma escreve-se

$$0 = \dot{\Phi} = \Phi_{,i} \dot{Q}_i + \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_0} \cdot \dot{\sigma}_0 \quad (3.43)$$

Colocando \dot{Q}_j em termos da matriz de rigidez elástica, tem-se:

$$\dot{Q}_j = S_{ij}^e \dot{q}_i^e = S_{ij}^e (\dot{q}_i - \dot{q}_i^p) \quad (3.44a)$$

ou utilizando-se (3.39)

$$\dot{Q}_j = S_{ij}^e \dot{q}_i - \Lambda S_{ij}^e \Phi_{,i} \quad (3.44b)$$

A variação da tensão de escoamento $\dot{\sigma}_0$ equivalente à variação da deformação plástica $\dot{\epsilon}_0^p$ pode ser escrito como:

$$\dot{\sigma}_0 = h \dot{\epsilon}_0^p \quad (3.45)$$

onde h = parâmetro de endurecimento do material.

A variação do trabalho de deformação plástica \dot{W}^p é avaliada em dois níveis. A nível macroscópico, é o trabalho reali-

zado pelas forças devido a variação dos deslocamentos em regime plástico,

$$\dot{W}^P = Q_i \dot{q}_i^P = \Lambda Q_i \dot{\Phi}_{,i} \quad (3.46)$$

ou a nível microscópico é o trabalho de deformação realizado pela variação de deformações na região onde a plastificação está ocorrendo, e é calculado pela integral na área A^* plastificada, da seguinte forma:

$$\dot{W}^P = \int_{A^*} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dA = \int_{A^*} \bar{\sigma} \dot{\bar{\epsilon}}^P dA \quad (3.47)$$

onde $\bar{\sigma}$ e $\dot{\bar{\epsilon}}$ são valores locais da tensão equivalente e variação plástica da deformação na área A^* .

Assumindo que a deformação plástica na faixa de influência do elemento é restrita ao ligamento remanescente, de comprimento $c = t - a$, então pode-se esperar que a área A^* será proporcional a c^2 . Com isto aproxima-se a equação (3.47) por:

$$\dot{W}^P = f \cdot \sigma_0 \cdot \dot{\epsilon}_0 \cdot c^2 \quad (3.48)$$

f = constante de proporcionalidade entre A^* e c^2 , esperado de ordem 1.

As equações (3.42 - 3.48) são combinadas de forma adequada a obter-se:

$$\Lambda = \frac{\Phi_{,i} S_{ij}^e \dot{q}_j}{\Phi_{,k} S_{kl} \Phi_{,l} - \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_0} \cdot \frac{h \cdot Q_m \Phi_{,m}}{f \cdot \sigma_0 c^2}} \quad (3.49a)$$

ou mais reduzidamente

$$\Lambda = \frac{\eta_j \dot{q}_j}{D} \quad (3.49b)$$

onde:

D = escalar que representa o denominador da equação (3.49a)

η_j = vetor normal à superfície de plastificação multiplicado pelas rigidezes elásticas.

Com Λ determinado escreve-se a equação da matriz de rigidez tangente S_{ij}^{ep} da seguinte forma:

$$S_{ij}^{ep} = S_{ij}^e - \frac{1}{D} \cdot \eta_i \eta_j \quad (3.50)$$

Com a matriz de rigidez determinada a resolução do sistema de equações não linear é obtida utilizando-se procedimentos incrementais-iterativos.

Na equação (3.48) incorporou-se um escalar f , e também foi suposto que A^* é proporcional a c^2 . Isto é necessário para levar em conta o efeito do endurecimento do material. Se o material é suposto como perfeitamente plástico, tem-se que $h = 0$ e não há aproximação no valor de Λ . Entretanto, a escolha de f não é crítica e obtém-se boas respostas quando h é diferente de

zero.

O apêndice II mostra a influência deste escalar e como escolhê-lo de forma adequada.

3.5.3. Obtenção da Superfície de Escoamento para Molas

A obtenção da superfície de escoamento para o modelo de molas, pode ser obtida pelo estudo de uma chapa fraturada, em E.P.D., submetida à flexão pura e à extensão-pura. As duas soluções limite são conhecidas como solução de GREEM e HUNDY, para flexão pura e extensão pura, respectivamente. A figura (3.8) ilustra estes dois casos. Para tensões de carregamento em uma superfície que apresenta trincas, pode-se generalizar assumindo que Φ e N irão ser positivos ao longo da linha de molas. Então os mais importantes casos estarão entre estes dois extremos.

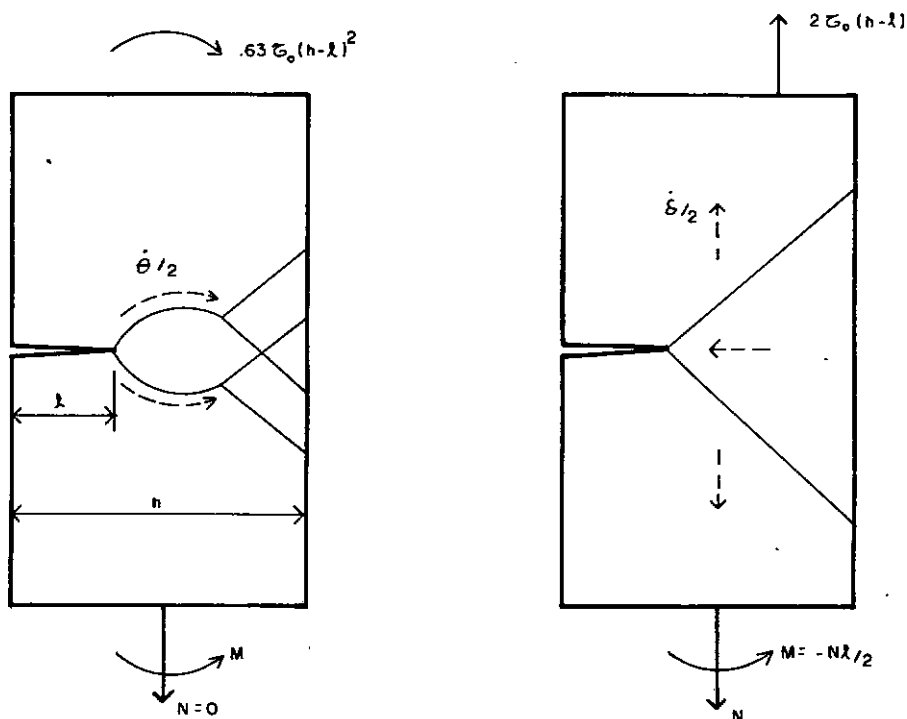


Figura 3.8 - Casos limites de uma chapa fraturada

Para a flexão pura isto é $N = 0$, a carga limite é

$$M = 0,63 \tau_0 (h-l)^2 \quad (3.51)$$

onde

τ_0 = tensão de escoamento ao cisalhamento.

para o caso de pura-extensão ($\theta=0$), a carga limite será

$$N = 2\tau_0 (h-l) \quad (3.52)$$

com a linha de ação de N passando pelo centro do ligamento da seção fraturada.

A carga limite para todos os casos de $N > 0$ e $\theta \geq 0$, pode ser obtido pela teoria do "upper bound". Variando-se os parâmetros da figura (3.9), consegue-se abranger os casos entre as soluções limites de Green e Hundy. A linha de ruptura é escolhida como sendo um arco circular de raio R com centro a uma distância L do lado direito da chapa.

O momento total agindo na seção fraturada é dado por:

$$M' = M + Nh/2 \quad (3.53)$$

Para uma rotação unitária da linha de ruptura a inequação do "upper bound" fica:

$$M' + NL \leq \tau_0 R^2 (\alpha - \beta) \quad (3.54)$$

Escolhendo-se um valor para L , apenas um dos parâmetros

R , α , β será independente, e isto é feito de forma a otimizar a linha de ruptura, e pelas relações geométricas da figura (3.9) escreve-se:

$$L = R \cdot \sin \beta \quad (3.55a)$$

$$L + (h - \ell) = R \cdot \sin \alpha \quad (3.55b)$$

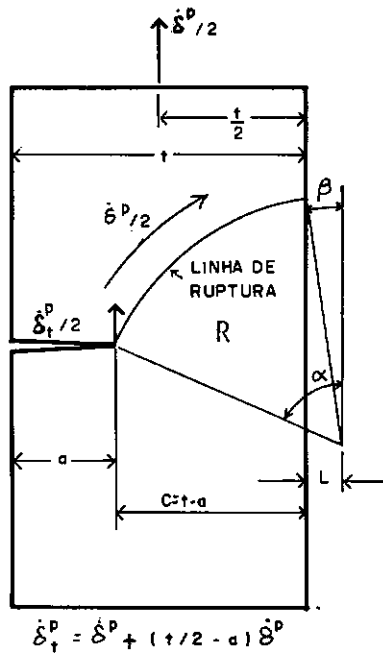


Figura 3.9 -

Substituindo as equações (3.55) em (3.54) e minimizando a equação em relação a L obtém-se mais uma equação adicional,

$$2(\alpha - \beta) = \tan \alpha - \tan \beta \quad (3.56)$$

então R , α e β são agora determinados em termos de L .

Para cada escolha do valor de L a inequação (3.54) fornece um valor limite para $M' + NL$ e estes valores são plotados na figura (3.10). A linha cheia representa uma aproximação "su-

perior" para a superfície de escoamento e foi construída graficamente variando-se os valores de β , conseqüentemente de L , entre -45° e $+45^\circ$. Nota-se que quando $\beta = 45^\circ$ é exatamente a carga limite para o caso de extensão pura. Entretanto, mostra-se que este ponto é um vértice pois a normal à superfície em cada ponto deve ser proporcional a

$$(h - l) \dot{\theta}^P \quad (3.57)$$

e

$$(\dot{\delta}^P - \dot{\theta}^P h/2) \quad (3.57)$$

na direção de M' e N respectivamente. A construção da envoltória é completada para pequenos valores de N desenhando-se a superfície de escoamento, tangente ao ponto onde M' representa flexão pura, pelo conhecimento da proporção entre as componentes da normal neste ponto, isto é

$$\dot{\delta}^P - \dot{\theta}^P h/2 = -0,63 (h - l) \dot{\theta}^P \quad (3.58)$$

de acordo com a solução de Green e Hundy.

Esta forma de se obter a superfície de escoamento foi originalmente proposta por RICE [24], que também propõe uma aproximação elíptica para esta superfície com $\Phi = 0$,

$$\Phi = \left\{ \frac{N/2\tau_0(h-l) - 0,3}{0,7} \right\}^2 + 9 \left\{ \frac{M'}{2\tau_0(h-l)^2} - \frac{N}{4\tau_0(h-l)} \right\}^2 - 1 = 0 \quad (3.59)$$

que está representado na figura (3.10) pela linha tracejada.

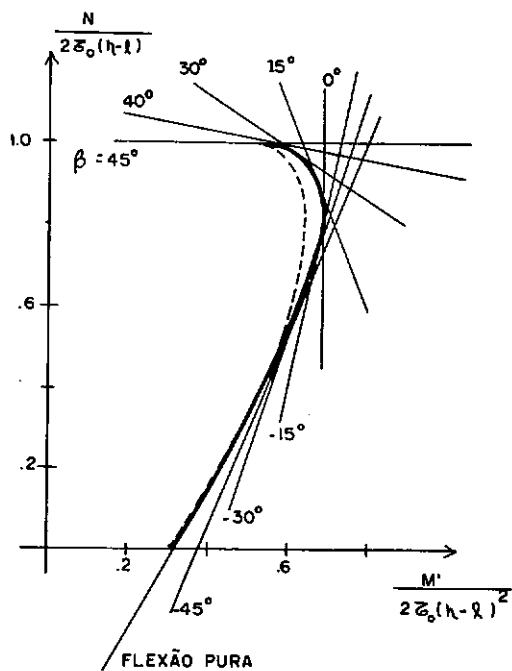


Figura 3.10 - Superfície de escoamento combinado tração e flexão

A figura (3.11) mostra Φ variando-se a relação $\xi = a/t$,

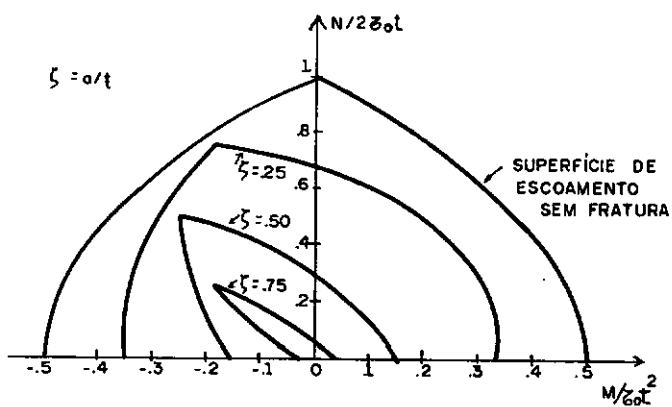


Figura 3.11 - Superfície de escoamento proposta por RICE [24]

Esta equação coincide exatamente com o ponto de flexão pura ($\beta = 45^\circ$), e representa muito bem a curva original, para os casos perto da flexão pura. Alguma divergência aparece no "trecho" intermediário. Se for necessário pode-se melhorar a aproximação de $\bar{\Phi}$, propondo-se outra equação. Entretanto com uma ligeira observação na figura (3.10) verifica-se que a curva elíptica está a favor da segurança ou seja valores ligeiramente menores para M' e N provocarão uma plastificação no ponto considerado. Isto dá uma pequena margem de segurança e os resultados obtidos são muito bons comparados com outras soluções, e que são mostrados no capítulo V.

3.5.4. Avaliação da integral-J em regime elasto-plástico

A avaliação da integral-J pode ser feita separando-a em duas parcelas distintas, uma elástica e outra plástica, e o valor total de J será a soma destas parcelas:

$$J = J^e + J^p \quad (3.60)$$

A parte elástica pode ser calculada diretamente, com os valores das tensões generalizadas, avaliando o fator K_I e de acordo com a equação (3.20), que estão transcritas abaixo:

$$J^e = K_I^2 (1 - \nu^2)/E$$

Este valor torna-se constante quando a mola atinge o escoamento, a menos que o material apresente endurecimento. Neste caso avalia-se a parte elástica de θ e δ e determina-se o incremento dK_I e conseqüentemente de J^e e (3.20) fica

$$J_e = (K_I + dK_I)^2 (1 - \nu^2)/E \quad (3.61)$$

com

$$dK_I = h^{1/2} (\Delta\sigma g_t + \Delta m g_f)$$

A avaliação da parcela plástica deve seguir a história do carregamento e será feita de forma incremental, estando relacionada com a variação do deslocamento de abertura do "crack-tip", $\dot{\delta}_t^p$.

$$\dot{J}^p = m \sigma_o \dot{\delta}_t^p \quad (3.62)$$

onde:

σ_o = tensão instantânea do escoamento.

m = constante que depende do caminho das deformações em regime plástico.

De acordo com a geometria da figura (3.9) tem-se

$$\dot{\delta}_t^p = \dot{\delta}^p + (t/2 - a) \dot{\Theta}^p \quad (3.63a)$$

em termos da constante Λ ,

$$\dot{\delta}_t^p = \Lambda (\bar{\Phi}_{,1} + (t/2 - a)\bar{\Phi}_{,2}) \quad (3.63b)$$

A integral J é definida conforme [28], como sendo a

variação (em relação a profundidade da fratura) do trabalho interno de deformação do corpo por unidade de espessura, ou seja

$$J = - \int_0^{q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial a} \Big|_{q_j} dq_i \quad (3.64)$$

Trocando-se os parâmetros da derivada, com respeito à profundidade da fratura pelo respectivo ligamento, tem-se

$$- \partial Q_i / \partial a = + \partial Q_i / \partial c = Q_{i,c} \quad (3.65)$$

RICE [28] mostra que a equação (3.64) pode também ser usada no caso de material perfeitamente plástico e a equação é escrita de forma incremental

$$\dot{J}^P = Q_{i,c} \dot{q}_i^P \quad (3.66)$$

ou seja

$$\dot{J}^P = \Lambda \Phi_{,i} Q_{i,c} \quad (3.67)$$

Λ = constante definida na seção anterior.

Examinando-se as equações (3.66) e (3.67) nota-se a necessidade do conhecimento da derivada parcial dos esforços em relação ao ligamento c para um valor fixo de \dot{q}_i^P . Para isto considere-se que a derivada total de $\Phi = 0$ em relação a c é nula,

$$0 = \left. \frac{d\bar{\Phi}}{dc} \right|_{q_i} = \bar{\Phi}_{,j} Q_{j,c} + \bar{\Phi}_{,c} \quad (3.68)$$

e introduzindo um artifício que

$$\left. \frac{\partial \left(\frac{\dot{\delta}^p / \dot{\theta}^p}{\partial c} \right)}{\partial c} \right|_{\delta^p, \theta^p} = \frac{\left(\frac{\bar{\Phi}_{,1}}{\bar{\Phi}_{,2}} \right)}{\partial c} \quad (3.69)$$

após efetuado as derivadas em (3.64), obtém-se

$$= \frac{1}{(\bar{\Phi}_{,2})} \left[\bar{\Phi}_{,2} (\bar{\Phi}_{,1i} Q_{i,c} + \bar{\Phi}_{,1c}) - \bar{\Phi}_{,1} (\bar{\Phi}_{,2i} Q_{i,c} + \bar{\Phi}_{,2c}) \right] \quad (3.70)$$

Entretanto, não haverá deformação a menos que

$\dot{\theta}^p = \Lambda \bar{\Phi}_{,2}$ seja não nula, que é a condição de validade do termo entre colchetes.

Então as equações (3.68) e (3.70) formam um sistema de duas equações e duas incognitas e os valores de $Q_{1,c}$ e $Q_{2,c}$, são assim determinados.

Comparando-se as equações (3.62) e (3.66) obtém-se o valor para m:

$$m = \frac{\bar{\Phi}_{,i} Q_{i,c}}{\sigma_0 (\bar{\Phi}_{,1} + (t/2 - a) \bar{\Phi}_{,2})} \quad (3.71)$$

PARKS em [23] comenta que o valor de m deve estar entre 1 e 2 e que quando a plasticidade é atingida, o valor de J^p cresce rapidamente, tornando-se dominante em relação a J^e .

CAPÍTULO IV

ELEMENTO ISOPARAMÉTRICO

E CARACTERÍSTICAS DO PROGRAMA IMPLEMENTADO

4.1. Elemento de Casca

Entre os vários elementos finitos encontrados na literatura optou-se pelo elemento quadrático tri-dimensional degenerado por discretizar superfícies curvas com boa aproximação, além de apresentar uma rápida convergência, mesmo com malhas singelas. Pode-se utilizá-lo tanto na análise de cascas grossas como as finas, em regime elástico ou plástico.

O desenvolvimento teórico pode ser encontrado nas referências [37] e [38] e nas diversas literaturas sobre o M.E.F.

Este elemento foi implementado a primeira vez na COPPE /UFRJ por HALBRITTER [35], e posteriormente adaptado para representar tensões/deslocamentos em regime elasto-plástico por LANDAU [36].

Neste capítulo mostram-se as características principais deste elemento e também os aspectos gerais do programa desenvolvido para a análise de trincas não-passantes em estruturas de superfície.

4.1.2. Características gerais do elemento de casca

Este elemento é derivado pela degeneração do elemento tri-dimensional quadrático de vinte nós, com três graus de liberdade por nó, para a superfície média da casca, obtendo-se um

elemento de oito nós com cinco graus de liberdade cada um. Isto é conseguido devido ao conhecido fato de que tanto para cascas grossas ou finas as normais à superfície média permanecem praticamente retas depois da deformação.

O elemento pode experimentar deformações de corte, que são imprescindíveis para uma análise correta de cascas grossas. Entretanto isto pode dificultar a convergência na análise de cascas finas, e neste caso torna-se imperativo a utilização de um esquema de integração reduzida.

4.1.3. Geometria do elemento e campo de deslocamento

O elemento é degenerado prescrevendo-se uma variação linear do deslocamento ao longo da espessura e desprezando-se a energia de deformação provocada pelas tensões normais ao plano da superfície média. A figura (4.1) mostra as etapas da degeneração.

A geometria do elemento é definida em relação às coordenadas naturais η , ξ e ζ , variando entre -1 e 1.

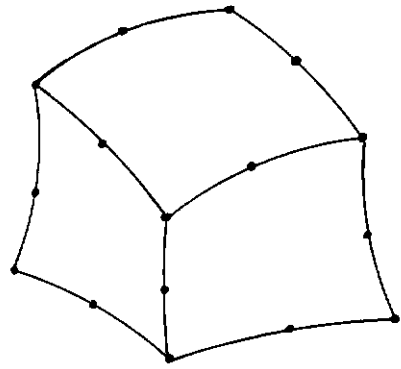
$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^k N_i(\xi, \eta) \frac{(1+\zeta)}{2} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{\text{sup}} + \sum_{i=1}^k N_i(\xi, \eta) \frac{(1-\zeta)}{2} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{\text{inf}} \quad (4.1)$$

onde

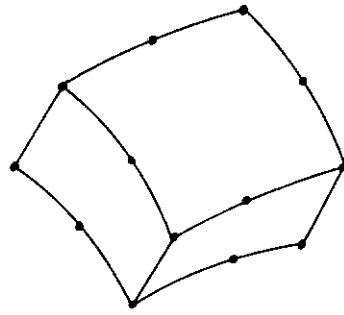
k = número de nós do elemento

N_i = funções de interpolação

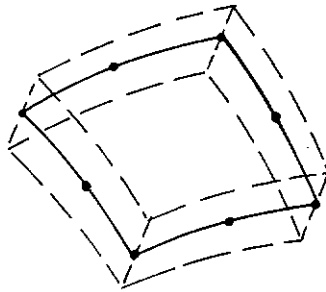
isto é escrito convenientemente definindo-se



a) ELEMENTO TRI-DIMENSIONAL QUADRÁTICO

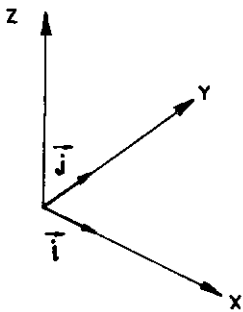


b) ELEMENTO TRI-DIMENSIONAL COM GEOMETRIA E DESLOCAMENTOS COM VARIACÃO LINEAR AO LONGO DA ESPESURA.

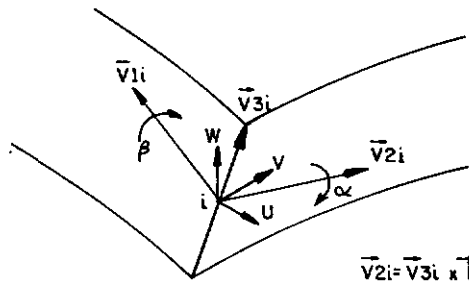


c) ELEMENTO DEGENERADO PARA A SUPERFÍCIE MÉDIA

Figura 4.1 - Fases da degeneração do elemento tridimensional.



SISTEMA GLOBAL



$$\vec{V}_{2i} = \vec{V}_{3i} \times \vec{T}$$
$$\vec{V}_{1i} = \vec{V}_{2i} \times \vec{V}_{3i}$$

SISTEMA LOCAL

Figura 4.2 - Representação dos deslocamentos α e β .

$$V_{3i} = \left\{ \begin{array}{c} x_i \\ y_i \\ z_i \end{array} \right\}_{\text{sup}} - \left\{ \begin{array}{c} x_i \\ y_i \\ z_i \end{array} \right\}_{\text{inf}} \quad (4.2)$$

que é o vetor normal à superfície média, no ponto nodal i , e (4.1) fica

$$\left\{ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right\} = \sum_{i=1}^k N_i (\xi, \eta) + \sum_{i=1}^k \frac{\zeta}{2} N_i V_{3i} \quad (4.3)$$

Analogamente à geometria, os deslocamentos são colocados apenas em função das três componentes cartesianas u_i , v_i e w_i , dos nós da superfície média e de duas rotações normais ao vetor V_{3i} . A direção destas duas rotações são dadas pelos vetores \bar{v}_{1i} e \bar{v}_{2i} de grandeza unitária, que corresponde as rotações β_i e α_i respectivamente:

$$\left\{ \begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array} \right\} = \sum_{i=1}^k N_i \left\{ \begin{array}{c} u_i \\ v_i \\ w_i \end{array} \right\} + \sum_{i=1}^k \zeta \cdot \frac{t}{2} \left[\bar{v}_{1i}, \bar{v}_{2i} \right] \left\{ \begin{array}{c} \alpha_i \\ \beta_i \end{array} \right\} \quad (4.4)$$

Assim a geometria e o campo de deslocamentos ficam definidos pelas equações (4.2) e (4.4).

A figura (4.2) representa fisicamente os vetores v_{1i} , v_{2i} e os deslocamentos α_i e β_i .

4.1.4. Definição das deformações e tensões

As deformações são tomadas nos eixos locais da superfície, formado pela normal, num ponto qualquer com ζ constante, e dos eixos ortogonais. E são obtidas diretamente das relações do elemento tri-dimensional, desprezando-se a deformação ξ'_z normal à superfície,

$$\underline{\epsilon}' = \begin{Bmatrix} \epsilon_{x'} \\ \epsilon_{y'} \\ \gamma_{xy}'' \\ \gamma_{xz}'' \\ \gamma_{yz}'' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \\ \frac{\partial w'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial z'} \\ \frac{\partial w'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial z'} \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

O símbolo plica (') denota que as grandezas são consideradas em sistema local.

As tensões relativas às deformações (4.5) são

$$\underline{\sigma}' = \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'z'} \end{Bmatrix} = \underline{D}' (\underline{\epsilon}' - \underline{\epsilon}'_0) + \underline{\sigma}'_0 \quad (4.6)$$

onde $\underline{\epsilon}'_0$ e $\underline{\sigma}'_0$ representam as deformações e tensões iniciais.

\underline{D}' representa a matriz de características elásticas.

A matriz D' é uma matriz 5x5, obtida diretamente da matriz tri-dimensional,

$$D' = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & \nu & & & \\ \nu & 1 & & & \\ \hline & & 0 & & \\ & & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ & 0 & & \frac{1-\nu}{2k} & 0 \\ & & \text{Sim} & & \frac{1-0}{2k} \end{array} \right] \quad (4.7)$$

onde

E e ν são módulo de elasticidade longitudinal e coef. de poisson
 k = constante

A constante k nos dois últimos termos é feita igual a 1,2 que segundo ZIENKIEWICZ melhora a aproximação das deformações por efeito cortante.

É importante notar que (4.7) não é obtida simplesmente deletando-se as linhas e colunas relativas a ϵ_z' . Deve-se substituir $\sigma_z' = 0$, na equação completa de \underline{D} (4.8) tri-dimensional, e efetuar as eliminações necessárias.

$$D = \frac{E (1 - \nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & & & \\ \text{Sim} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & & & 0 \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ & 0 & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ & & & \text{Sim} & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{array} \right] \quad (4.8)$$

4.1.5. Relações constitutivas em regime elasto-plástico

A matriz de características elasto-plástica é obtida através da teoria clássica da plasticidade, e a análise é feita de forma incremental.

Define-se uma superfície de escoamento F , e quando a condição de plasticidade é atingida tem-se:

$$F(\underline{\sigma}, \underline{\varepsilon}_p, k) = 0 \quad (4.9)$$

onde:

$\underline{\sigma}$ - vetor de tensões

$\underline{\varepsilon}_p$ - vetor de deformações plásticas

k - constante do material

A cada incremento as deformações totais são:

$$d\tilde{\epsilon} = d\tilde{\epsilon}_e + d\tilde{\epsilon}_p \quad (4.10)$$

sendo:

$d\tilde{\epsilon}_e$ - deformações elásticas

$d\tilde{\epsilon}_p$ - deformações plásticas

E cada parcela de $d\tilde{\epsilon}$ é avaliada separadamente.

Para a parte elástica tem-se

$$d\tilde{\epsilon}_e = \tilde{D}^{-1} \cdot d\tilde{\sigma} \quad (4.11)$$

A parte plástica da equação (4.10) relaciona-se com (4.9), por:

$$d\tilde{\epsilon}_p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \tilde{\sigma}} \quad (4.12)$$

O escalar λ é o coeficiente de proporcionalidade entre as deformações plástica e a normal à superfície de escoamento e é calculada a cada incremento. O vetor $\frac{\partial F}{\partial \tilde{\sigma}}$ é definido para cada estado de tensão representa o gradiente da função de carregamento.

Em regime plástico $F=0$, portanto,

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{\sigma}} \right) \cdot d\tilde{\sigma} + \frac{\partial F}{\partial k} \cdot dk + \left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{\epsilon}_p} \right) \cdot d\tilde{\epsilon}_p = 0 \quad (4.13)$$

Definindo

$$\tilde{a} = \frac{\partial F}{\partial \tilde{\sigma}} \quad \text{e} \quad A = \frac{1}{\lambda} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial k} dk + \left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{\epsilon}_p} \cdot d\tilde{\epsilon}_p \right) \right) \quad (4.14)$$

A equação (4.13) é escrita como:

$$\underline{a}^T \cdot d\underline{g} - A \cdot \lambda = 0 \quad (4.15)$$

e o incremento total de deformação (4.10), fica

$$d\underline{\varepsilon} = \underline{D}^{-1} d\underline{g} + \lambda \underline{a} \quad (4.16)$$

Substituindo $d\underline{g}$ dado pela equação (4.15) em (4.16) e pré-multiplicando ambos os lados por $\underline{a}^T \cdot \underline{D}$ obtém-se uma equação onde apenas λ é incógnita

$$\underline{a}^T \cdot \underline{D} d\underline{\varepsilon} = A \lambda + \lambda \underline{a}^T \cdot \underline{D} \underline{a} \quad (4.17)$$

que é explicitada por:

$$\lambda = \frac{1}{A + \underline{a}^T \underline{D} \underline{a}} \cdot \underline{a}^T \cdot \underline{D} \cdot d\underline{\varepsilon} \quad (4.18)$$

substituindo (4.18) em (4.16) obtém-se

$$d\underline{g} = (\underline{D} - \underline{D}_p) d\underline{\varepsilon} \quad (4.19)$$

com

$$\underline{D}_p = \frac{1}{A + \underline{a}^T \underline{D} \underline{a}} \cdot \underline{D} \cdot \underline{a} \underline{a}^T \underline{D} \quad (4.20)$$

e define-se uma matriz tangente de características elásticas

\underline{D}_T , dada por:

$$\underline{D}_T = \underline{D} - \underline{D}_p \quad (4.21)$$

O vetor \underline{a} definido em (4.14) irá depender da função escolhida para representar a superfície de escoamento $F = 0$.

Segundo o critério de VON-MISES,

$$F = \sqrt{3} \cdot \bar{\sigma} - y(k) = 0 \quad (4.22)$$

e segundo o critério de TRESCA

$$F = 2 \bar{\sigma} \cdot \cos \phi - y(k) = 0 \quad (4.23)$$

onde

$\bar{\sigma} = J_2^{1/2}$, sendo J_2 o segundo invariante de tensões.

$$\phi = \frac{1}{3} \text{sen}^{-1} \left[\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{\bar{\sigma}^3} \right], \text{ sendo } J_3$$

o terceiro invariante de tensões, válido para

$$-\frac{1}{6} \pi \leq \phi \leq \frac{1}{6} \pi$$

$y(k) =$ tensão de

escoamento, função da história das deformações plásticas.

Estas duas funções são muito conhecidas e apresentam bons resultados para materiais homogêneos, como por exemplo os metais.

4.1.6. Cálculo das tensões elasto-plásticas

Analogamente à equação (4.10), as tensões são escritas de forma incremental.

$$d\tilde{\sigma} = d\tilde{\sigma}_e + d\tilde{\sigma}_p \quad (4.24)$$

com $\tilde{\sigma}_e$ = parcela elástica da tensão
 $\tilde{\sigma}_p$ = parcela plástica da tensão.

A primeira parcela pode ser calculada diretamente com \tilde{D} elástico e $d\tilde{\epsilon}_e$ da equação (4.10),

$$d\tilde{\sigma}_e = \tilde{D} \cdot d\tilde{\epsilon}_e \quad (4.25)$$

Porém a parte plástica deve ser calculada pela integral:

$$d\tilde{\sigma}_p = \int_0^{\Delta\tilde{\epsilon}_p} \tilde{D}_p d\tilde{\epsilon}_p \quad (4.26)$$

pois a matriz de características plástica varia com a história das deformações.

Uma forma aproximada de avaliar (4.26) é dividir em n intervalos a deformação plástica, de forma a transformar a integral em uma somatória, e (4.26) fica

$$d\tilde{\sigma}_p \approx \sum_{i=1}^n \tilde{D}_{pi} \cdot \frac{\Delta \tilde{\epsilon}_p}{n} \quad (4.27)$$

Com o cálculo das tensões, encerra-se a formulação plástica do elemento de casca.

Com muito maior ênfase e profundidade LANDAU [36] analisa critérios de convergência do elemento, o desenvolvimento da teoria em regime elasto-plástico, e outras considerações.

4.2. Programa Implementado

4.2.1. Descrição sumária

Com o objetivo de testar a validade do elemento escalar, foi desenvolvido um programa em Linguagem FORTRAN IV, no computador BURROUGHS 6800 do NCE/UFRJ.

A estruturação seguiu àqueles utilizadas na programação M.E.F.:

- Entrada de Dados
- Avaliação das Cargas
- Montagem da Matriz de Rigidez Global
- Introdução das Condições de Contorno
- Resolução do Sistema de Equações
- Cálculo das Tensões
- Impressão dos Resultados

Sendo que da terceira etapa até a última, na de análise não-linear é repetida várias vezes a cada incremento.

Inicialmente são fornecidos os dados da estrutura tais

como coordenadas, carregamentos, incidências, etc...

O armazenamento das variáveis em memória central é feito de forma dinâmica, definindo-se inicialmente um vetor de trabalho, para permitir uma utilização racional da memória.

Os tipos de carregamentos podem ser:

- Cargas aplicadas nos nós, componentes da força em relação aos eixos globais F_x , F_y , F_z , e momentos em sistema local M_α e M_β
- Tensões distribuídas sobre a superfície do elemento
- Pressão hidrostática
- Peso Próprio.

Estes carregamentos são os mais comumente encontrados.

A matriz de rigidez global é armazenada por altura efetiva, evitando-se armazenar e operações com elementos nulos.

As condições de contorno são introduzidas utilizando-se a "técnica do número grande". Para facilitar a introdução de deslocamentos prescritos.

A decomposição da matriz de rigidez é efetuada utilizando-se o Método de Cholesky, de forma parcial, isto é, triangulariza-se a parte da matriz que permanece elástica e a cada iteração após a avaliação das parcelas plásticas completa-se esta etapa. Isto permite melhor utilização do computador e ganho de tempo de processamento.

As tensões são calculadas de acordo com o exposto na Seção 4.2.4. O fator de intensidade de tensões e a integral-J

também são avaliadas neste nível do programa, de acordo com o exposto na Seção 3.5.

A cada incremento, após atingida a convergência são impressos os deslocamentos totais dos nós da estrutura, as tensões nos elementos e também os resultados relativos à fratura em cada ponto discretizado.

4.3. Algoritmo Implementado para Solução do Problema Não-Linear

Implementou-se um método misto, formado pela combinação do método puramente incremental com o método iterativo de NEWTON-RAPHSON.

A partir de um certo nível de carregamento pré-determinado, as cargas são incrementadas até o seu total e a cada incremento processa-se um número suficiente de iterações até que seja atingida a convergência. A cada iteração a matriz de rigidez é atualizada, verifica-se o equilíbrio da estrutura, e os resíduos são utilizados para a próxima iteração.

A figura (4.4) ilustra o método utilizado.

As condições de existência e unicidade das soluções obtidas por este método são discutidas por ODEN [40].

Desta forma a estrutura mantém-se equilibrada a cada incremento, evitando-se a acumulação de erros provocados pelo método puramente incremental, além de fornecer resultados das etapas intermediárias quando as cargas aplicadas estão acima da carga limite da estrutura, o que não é conseguido utilizando-se somente o método iterativo.

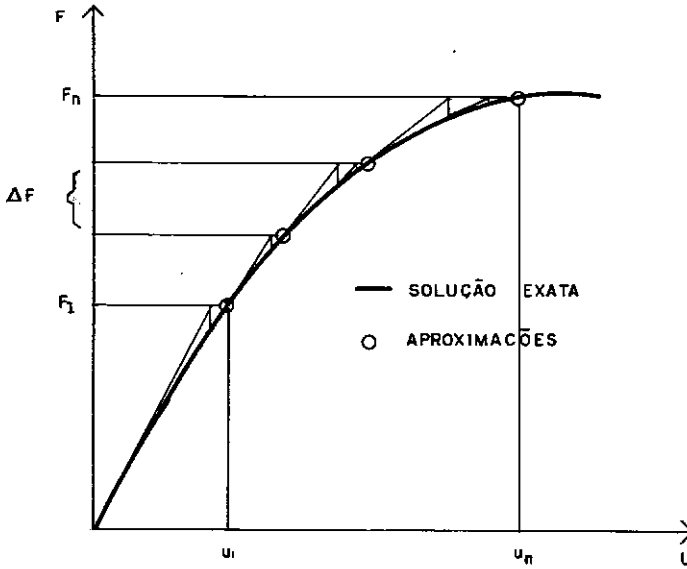


Figura 4.4 - Método Misto Implementado

4.4. Cálculo dos Resíduos

Após o cálculo das tensões, os resíduos provocados pelo desequilíbrio da estrutura, são calculados a nível de elemento por:

$$\int_V \underline{B}^T \underline{g} dV - \underline{f} = \underline{R}_e \quad (4.28)$$

onde

\underline{B} - matriz formada pelas derivadas das funções de interpolação.

\underline{g} - representa o campo de tensões

\underline{f} - vetor de cargas nodais aplicadas no elemento.

\underline{R}_e - vetor dos resíduos

V - volume do elemento

tem-se que:

$$\underline{\sigma} = \underline{D}_T \cdot \underline{\varepsilon} \quad (4.29)$$

e,

$$\underline{\varepsilon} = \underline{B} \cdot \underline{u} \quad (4.30)$$

que substituído em (4.28) obtém-se:

$$\int_V \underline{B}^T \underline{D}_T \underline{B} \underline{u} dV - \underline{f} = \underline{R}_e \quad (4.31)$$

sabe-se que

$$\int_V \underline{B}^T \underline{D}_T \underline{B} dV = \underline{K}_T \quad (4.32)$$

então

$$\underline{K}_T \cdot \underline{u} - \underline{f} = \underline{R}_e \quad (4.33)$$

Os resíduos poderiam ser calculados prontamente pela equação (4.28), entretanto, como adotou-se pela atualização de K_T a cada iteração, utilizou-se a equação (4.33).

4.5. Método da Decomposição Parcial

Em muitos casos a não-linearidade é apenas localizada e grande parte da estrutura não modifica suas características iniciais (rigidez).

Isto é muito importante pois permite que se reduza o

esforço computacional.

Muitos algoritmos surgiram para levar em conta este fato. MOREIRA [39] faz um estudo comparativo dos principais deles e suas conclusões mostraram que o método da "Subestruturação" e "Decomposição parcial" apresentam uma melhor performance, com "ligeira vantagem" para o primeiro.

No caso de estruturas que apresentam trincas, as maiores concentrações de tensões aparecem ao redor desta. Então a região de plastificação é sempre localizada, não havendo necessidade de uma análise plástica completa em toda a estrutura, e isto não gera erros de aproximação.

Optou-se pelo método da "Decomposição Parcial" pela sua facilidade de implementação, não necessitando de rotinas especiais nem mudanças estruturais do programa, bastando pequenas modificações.

As etapas são as seguintes:

- Decompõe-se \underline{A} da linha 1 até a linha p-1 (maior grau de liberdade que apresenta comportamento linear) obtendo-se \underline{A}^* .
- Gravação de \underline{A}^* em disco.

Para cada iteração:

- Leitura de \underline{A}^* em disco
- Completa-se \underline{A}^* com contribuições dos elementos plásticos.
- Decomposição a partir da linha p até a última.
- Obtenção dos deslocamentos (substituição e retro)

Para melhor aproveitamento das vantagens do método, os nós que apresentam comportamento não-linear devem ser numerados por último.

CAPÍTULO V

APLICAÇÕES

Neste capítulo procura-se comparar os resultados obtidos pela implementação computacional do elemento escalar descrito anteriormente com outras formulações.

Inicialmente analisa-se um conjunto de chapas em regime linear, variando-se os parâmetros da fratura, submetidos às cargas de tração e flexão separadamente. Posteriormente procede-se a análise em regime elasto-plástico de uma chapa submetida a tração e também um tubo submetido à pressão interna constante, com fratura axial ao longo de todo o seu comprimento. E, finalmente um tubo submetido a pressão interna constante supondo a fratura axial em apenas parte de seu comprimento, e o material possuindo capacidade de endurecimento.

5.1. Chapa Tracionada-Linear

Com objetivo de avaliar o comportamento do elemento escalar, analisa-se em regime linear um conjunto de chapas submetidas a apenas forças de tração com uma fratura de variação semi-elíptica, com profundidade máxima a e comprimento 2ℓ , conforme mostra a figura (5.1a). As relações geométricas da chapa, $2\ell/a$ e L/W são mantidas constante e igual a 10 e 1/2 respectivamente, sendo que a relação profundidade sobre espessura a/t , assume os seguintes valores 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, cobrindo assim o campo de validade da solução (2-D) utilizada na formulação do elemento.

Discretiza-se apenas 1/4 da chapa valendo-se da dupla simetria, através de 42 elementos de casca e 11 elementos escalares de fratura.

Os resultados são comparados com a solução (3-D) proposta por RAJU e NEWMAN [21], e encontram-se plotados de forma normalizada no gráfico (5.1).

A tabela (5.1) compara os valores de F no ponto de profundidade máxima da fratura.

$$F = K_I / \sigma_\infty \cdot \sqrt{a/Q}$$

a/t	ELEMENTOS ESCALARES	RAJU E NEWMAN	DIFERENÇA (%)
0,2	1,17	1,20	- 2,6
0,4	1,38	1,36	1,5
0,6	1,70	1,66	2,4
0,8	1,80	1,85	- 3,3

Tabela 5.1 - Valores de F no ponto de máxima profundidade da fratura.

No ponto onde a profundidade tende a zero isto é, ponto de nenhuma fratura, a matriz de flexibilidade torna-se nula, e conseqüentemente a matriz de rigidez torna-se infinita, e um valor de profundidade equivalente foi adotado. Procurando determinar este valor, algumas análises com a/t = 0,4 são processadas testando-se valores para a profundidade mínima atribuindo-se valores de 5%, 10% e 20% da profundidade da fratura no nó adjacente. Os resultados são plotados no gráfico (5.2).

Os valores obtidos para K_I neste ponto apresentaram erros da ordem de até 40%, e a melhor aproximação foi conseguida para 5% de profundidade da fratura no nó adjacente e os valores das tensões foram em todos os casos superiores ao esperado. Entretanto os valores de K_I ao longo da fratura foram pouco afetados, conforme mostra o gráfico (5.2), devido a relação $2l/a$ ser bem pronunciada, o que torna a escolha deste valor não crítica. GERMAN [21] chama atenção para o fato de que quando $2l/a$ tende a 1, isto é, a superfície fraturada toma formato circular os resultados são mais afetados e desaconselha o uso de elementos escalares. Nos exemplos apresentados adotou-se um valor para a "profundidade equivalente" em torno de 10% da profundidade da fratura no nó adjacente.

Dados Geométricos e Físicos

$$W = 300\text{cm}$$

$$a = 20\text{cm}$$

$$\frac{W}{L} = 1/2$$

$$E = 210000 \text{ Kgf/cm}^2$$

$$\frac{W}{2l} = 4$$

$$\nu = 0,3$$

$$Q = 1,1029$$

$$2l/a = 10$$

$$a/t = \begin{Bmatrix} 0,2 \\ 0,4 \\ 0,6 \\ 0,8 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma = \frac{N}{t}$$

OBS: O valor de Q utilizado para normalizar os valores de K_I , é a integral elíptica de segunda ordem, calculada aproximadamente como:

$$Q = 1 + 1,464 (a/l)^{1,65} \quad p/l \geq a$$

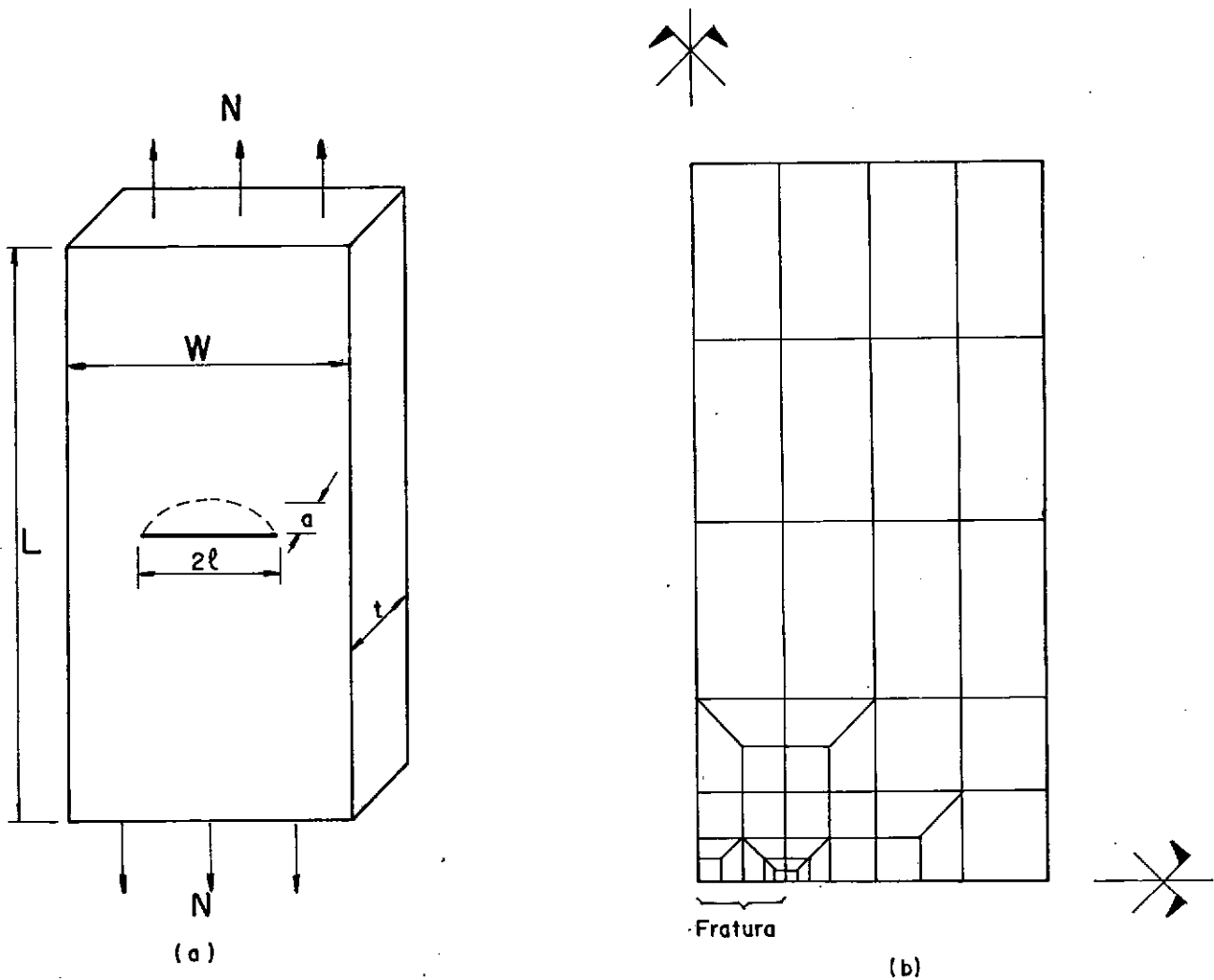


Figura 5.1 - Características geométricas e malha utilizada na discretização.

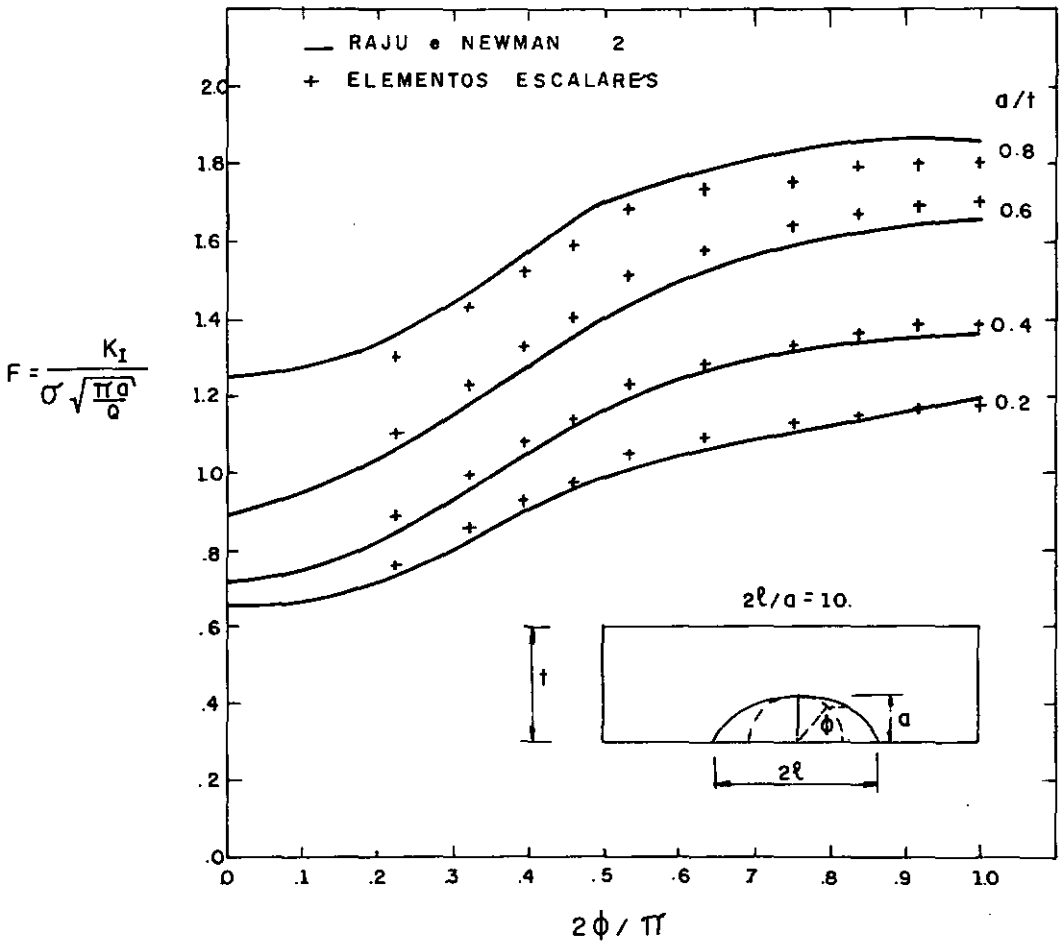


Gráfico 5.1 - Fator de intensidade de tensões ao longo da fratura, para chapa submetida à forças de tração.

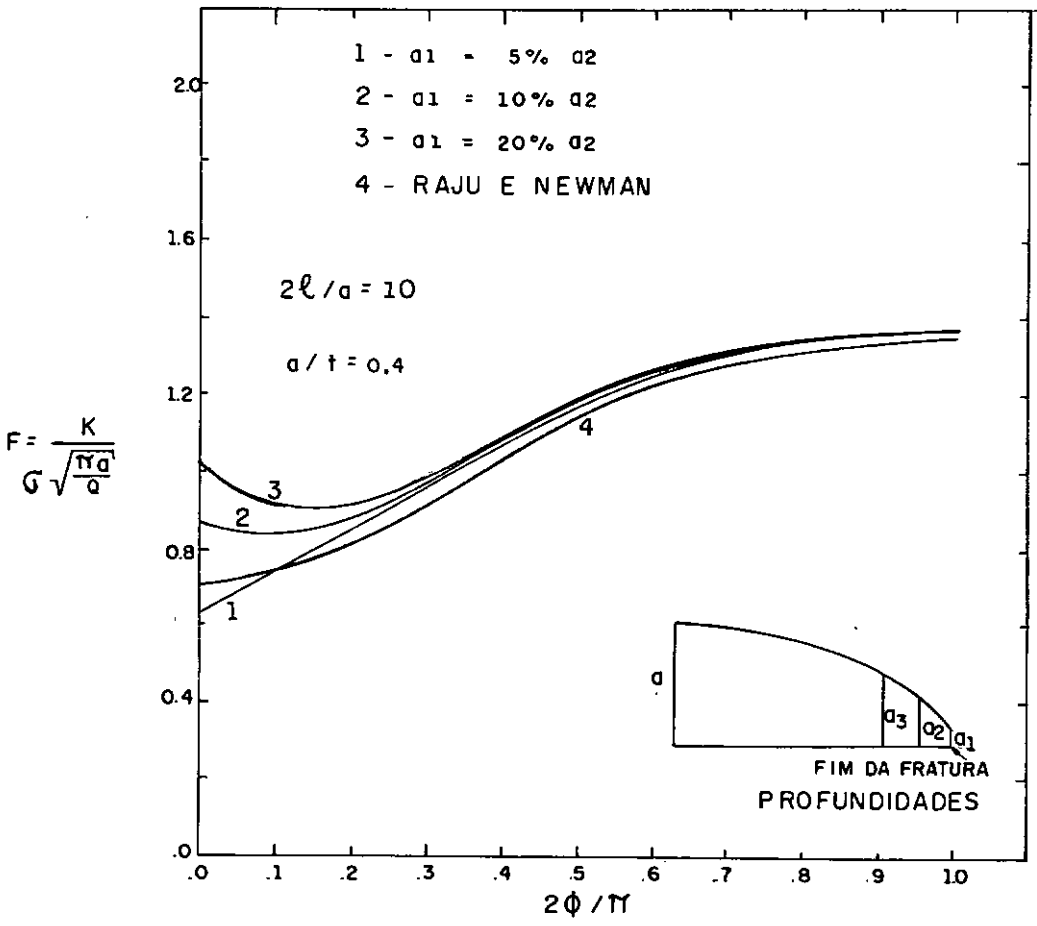


Gráfico 5.2 - Influência da "Profundidade Equivalente" nos valores de K_I ao longo da fratura.

5.2. Chapa a Flexão-Linear

Neste exemplo procede-se uma análise análoga ao exemplo 1, apenas as cargas de tração são substituídas por cargas de flexão, conforme ilustrado na figura (5.2). As características físicas e geométricas da chapa são idênticas. A relação a/t assume valores de 0,4 e 0,8. As respostas são comparadas com a solução (3-D) de RAJU e NEWMAM mostradas na referência [19], e encontram-se plotadas no gráfico (5.3).

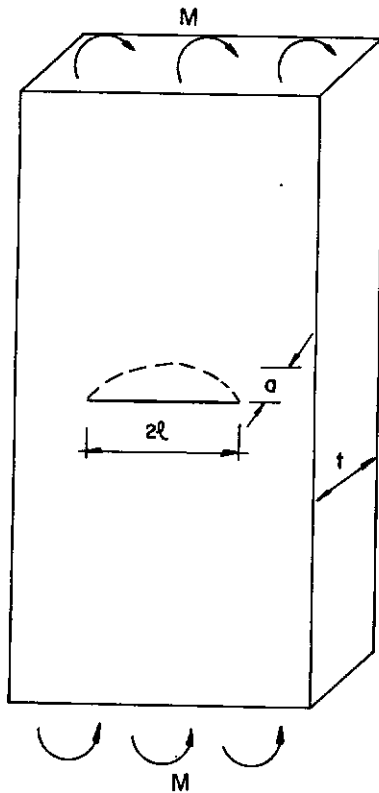


Figura 5.2 - Chapa com fratura semi-elíptica submetida a forças de flexão.

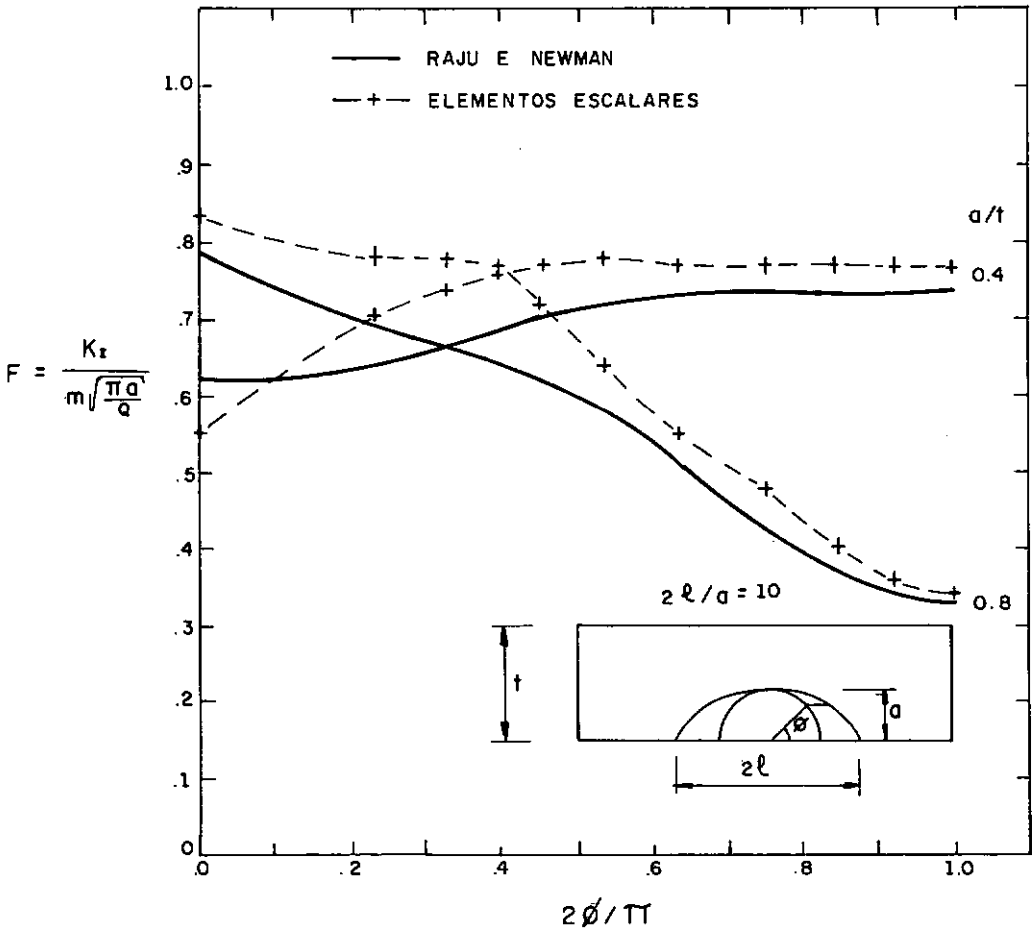


Gráfico 5.3 - Variação do fator de intensidade de tensões K_I ao longo da fratura, para uma chapa submetida a forças de flexão.

Para a chapa com $a/t = 0,4$ o fator de intensidade K_I se aproximou da solução de Raju e Newmam ao longo da fratura com uma diferença máxima de 9,5%, sendo que no ponto de profundidade máxima, onde K_I é máximo e a propagação se dará a partir daí, a diferença foi de apenas 4%. Para $a/t = 0,8$ a diferença máxima foi em torno de 15% e no ponto de máximo K_I foi de 6%. É interessante notar que a propagação neste caso se dará não no ponto de maior profundidade, mas sim perto da superfície livre, e os elementos escalares conseguiram traduzir este efeito.

5.3. Chapa Tracionada em Regime Elasto-Plástico

Com o objetivo de testar o comportamento não-linear dos elementos escalares, analisa-se uma chapa submetida a tração com a fratura formada por uma superfície semi-elástica com as mesmas características geométricas mostradas na figura (5.1). O material é suposto plástico perfeito a partir do ponto de escoamento. As grandezas físicas e geométricas são:

$$\begin{aligned} W/L &= 1/2 & E &= 210000 \text{ Kgf/cm}^2 \\ W/2\ell &= 4 & \nu &= 0,3 \\ 2\ell/a &= 12 & \sigma_y &= 45 \text{ Kgf/cm}^2 \\ & & L &= 1600\text{cm} \\ a/t &= \left\{ \begin{array}{l} 0,5 \\ 0,7 \end{array} \right\} & \ell &= 100\text{cm} \end{aligned}$$

Na discretização utilizaram-se 42 elementos de casca e 11 elementos escalares de fratura, e a malha utilizada é vista na figura(5.1b).

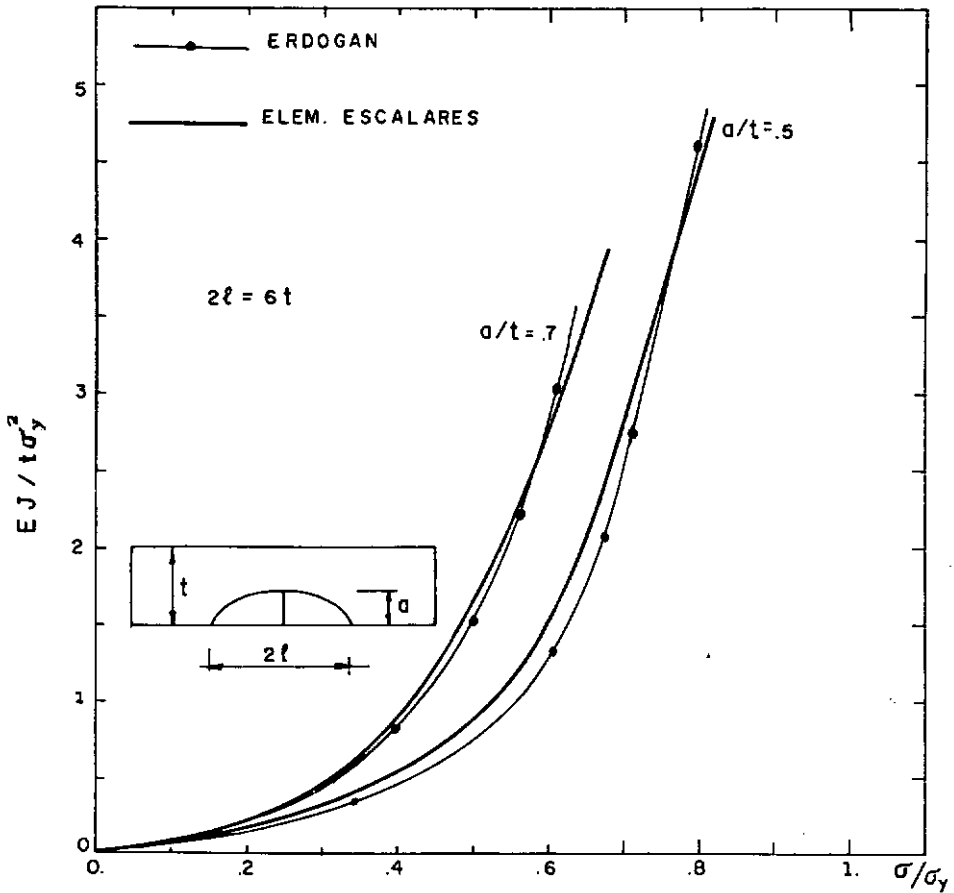


Gráfico 5.4 - Integral J versus tensão aplicada, para o ponto de maior profundidade da fratura, em uma chapa submetida a tração.

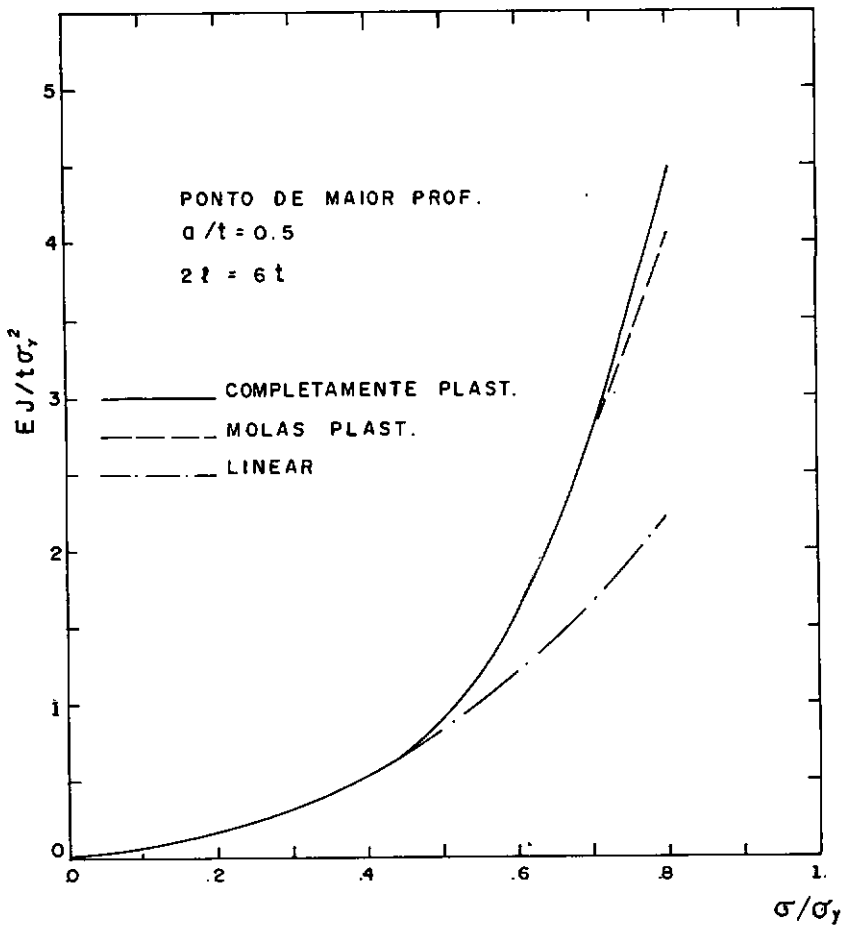


Gráfico 5.5 - Comparações de soluções obtidas com elementos escalares, para chapa tracionada.

A carga foi aplicada de forma incremental num total de 20 e a cada incremento são processados iterações até que uma tolerância de 1/1000 para a norma de deslocamentos fosse atingida sendo necessários 28 iterações quando $a/t = 0,5$ e 27 iterações para $a/t = 0,7$.

Os resultados são mostrados no gráfico (5.4) e comparados com a solução dada por ERDOGAM conforme ref. [22], para o ponto de profundidade máxima da fratura, onde a dissipação de energia é maior e conseqüentemente se dará a propagação da trinca.

No gráfico (5.5) comparam-se soluções obtidas com elementos escalares considerando-se três casos distintos. Primeiro, considera-se a estrutura linear, segundo apenas os elementos escalares não-lineares e o terceiro caso considera-se o efeito da plasticidade nos elementos adjacentes à fratura. Com isto mostra-se que uma análise bastante segura é obtida considerando-se apenas os elementos escalares lineares.

5.4. Tubo Submetido à Pressão Interna

Analisa-se um tubo de comprimento infinito com R_o/R_i igual a 11/10, submetido a uma pressão interna p de dentro para fora, com uma fratura axial interna, conforme mostra a figura (5.3). O material se comporta como plástico perfeito a partir do ponto de escoamento. O problema é tratado em estado plano de deformação e os elementos de casca foram restringidos de forma a simular este estado. Na discretização foram utilizados oito elementos de casca e três elementos escalares de fratura apro-

veitando-se a simetria do tubo. A relação a/t assume valores de 0,25, 0,50 e 0,80. O gráfico (5.6) mostra os resultados obtidos para a integral J , comparando-os com os obtidos por RICE [23], utilizando uma formulação bi-dimensional.

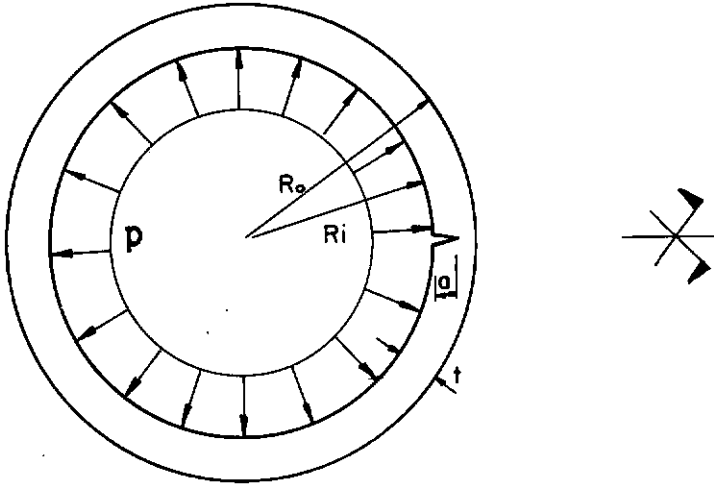


Figura 5.3 - Tubo com pressão de dentro para fora com fratura interna.

Dados Físicos e Geométricos

$$R_o/R_i = 11/10$$

$$E = 300000 \text{ Kgf/cm}^2$$

$$\nu = 0,3$$

$$\bar{R} = \frac{R_o + R_i}{2}$$

$$\sigma_y = 735 \text{ Kgf/cm}^2$$

$$a/t = \left\{ \begin{array}{l} 0,25 \\ 0,50 \\ 0,80 \end{array} \right\}$$

$$t = 1 \text{ cm}$$

Incrementos de Carga

$$P / a/t = 0,25 \quad , \quad P = 0,03 \frac{\sigma_y \cdot t}{\bar{R}}$$

$$P / a/t = 0,5 \quad , \quad P = 0,02 \frac{\sigma_y \cdot t}{\bar{R}}$$

$$P / a/t = 0,8 \quad , \quad P = 0,01 \frac{\sigma_y \cdot t}{\bar{R}}$$

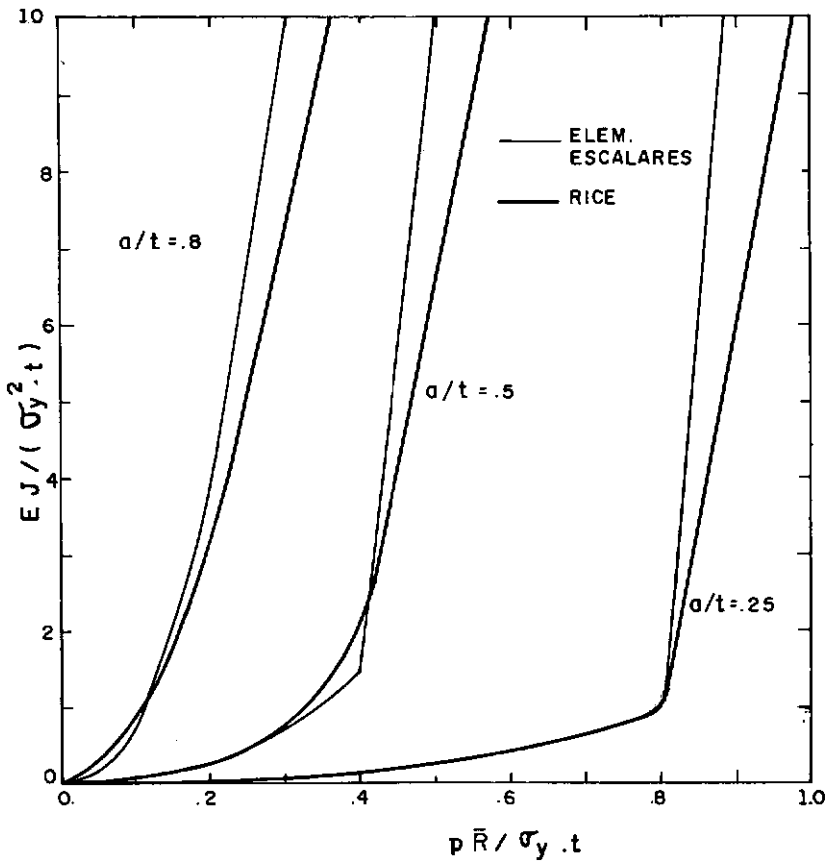


Gráfico 5.6 - Integral J normalizada versus pressão interna para um tubo com fratura axial.

5.5. Tubo Pressurizado

Neste exemplo analisa-se um tubo submetido a pressão interna constante de dentro para fora com uma fratura axialmente orientada formada por uma superfície semi-elíptica. Com a relação $2c/a_0 = 6$, onde a_0 é o valor de máxima profundidade, e $2C$ o comprimento da fratura, a_0/t é feita igual a 0,5, $R_o/R_i=11/10$, e comprimento $2L$ suposto infinito, conforme mostra a figura (5.4). A discretização é feita aproveitando a simetria do problema, consistindo em 46 elementos de casca e 17 elementos escalares de fratura, num total de 173 nós e 865 graus de liberdade e encontra-se mostrado na figura (5.5).

O material é suposto elasto-plástico com um endurecimento de 1% do módulo de elasticidade longitudinal e apenas os elementos escalares são supostos não-lineares.

O gráfico (5.7) mostra de forma normalizada o desenvolvimento da integral J versus pressão aplicada para o ponto de máxima profundidade, comparando-se os resultados com os obtidos por PARKS [23], a solução linear, a completamente plástica dos elementos escalares, e a solução (2-D). Nota-se que apesar de um pequeno endurecimento do material (1%), os resultados se aproximaram daqueles obtidos por PARKS [23] mostrando a diferença entre um regime completamente plástico, o que dá uma idéia da sensibilidade dos elementos escalares. É também interessante notar que como forma usual adotada na prática a análise bi-dimensional de apenas um anel do tubo, aonde a profundidade da fratura é máxima, representa resultados bastante conservadores, o que aparentemente comprometeria a estrutura, entretanto esta teria

plena capacidade de suporte.

O gráfico (5.8) mostra o desenvolvimento da integral J ao longo da fratura para vários níveis de carregamento. Nota-se o fato comentado por PARKS [23] de que na região de máxima profundidade J cresce rapidamente com a aplicação da carga, enquanto que perto da região livre J decresce abruptamente, quando os elementos de casca são mantidos lineares.

A pequena diferença em relação aos resultados de PARKS são devido ao tipo de elemento de casca e a malha mais refinada utilizada por este.

Os diagramas J x cargas aplicadas são similares ao diagrama deslocamento x cargas pois em regime plástico J é proporcional ao deslocamento de abertura da fratura. Com isto nos casos em que toda não-linearidade é atribuída aos elementos escalares, a carga crítica é determinada pelo ponto em que J começa a crescer linearmente, pois isto significa que a estrutura está "novamente" tendo um comportamento linear, ou seja, a partir daí apenas os elementos de casca que permanecem linear estarão resistindo.

Identificação dos Dados

R_i	=	10,0cm	E	=	210000 K_{gf}/cm^2
R_o	=	11,0cm	σ_y	=	49,0 K_{gf}/cm^2
t	=	1cm	ν	=	0,3
a_o	=	0,5cm	h	=	0,01E = 2100 K_{gf}/cm^2
c	=	1,5cm	f	=	0,4
L	=	12cm			

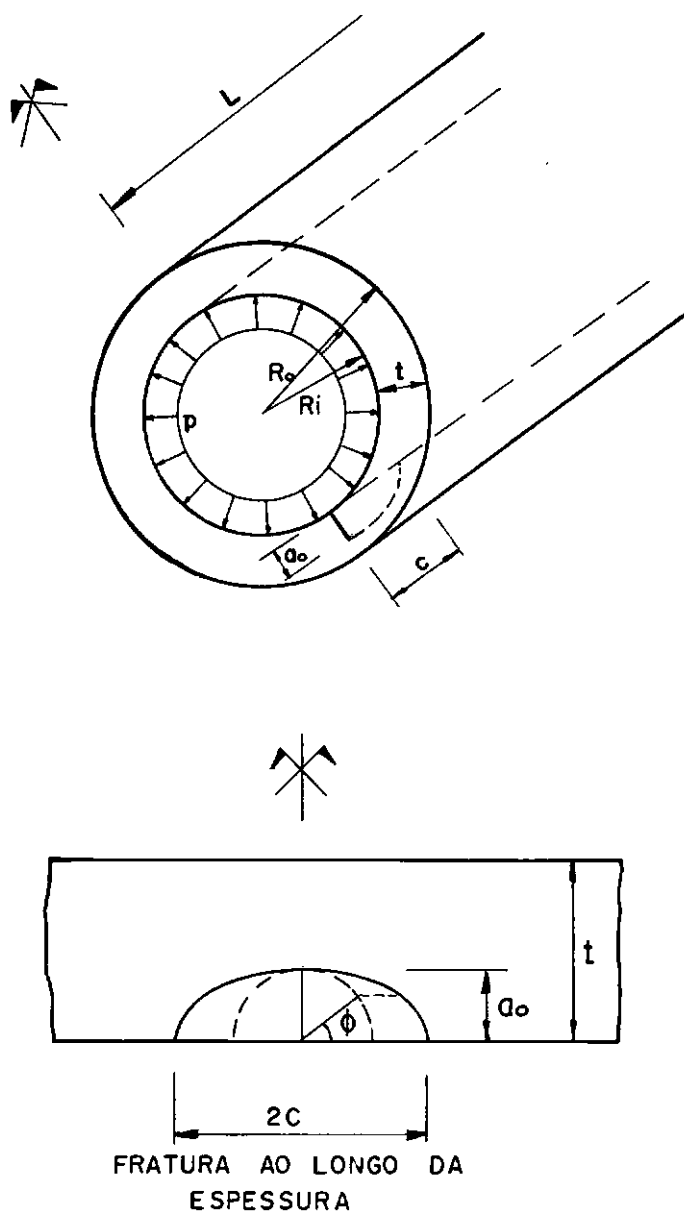


Figura 5.4 - Características geométricas do tubo com fratura axial formada por uma superfície elíptica.

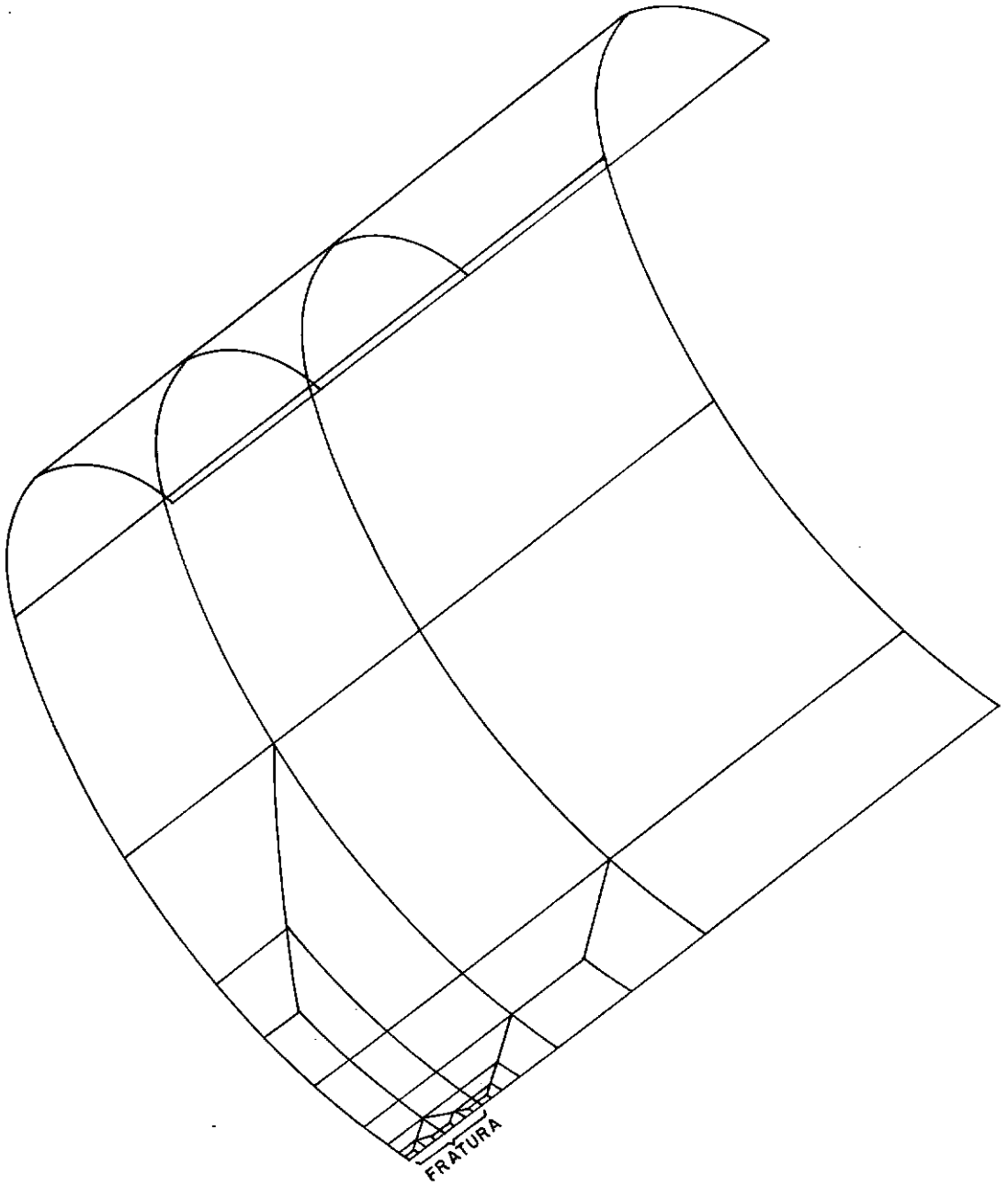


Figura 5.5 - Malha utilizada na discretização

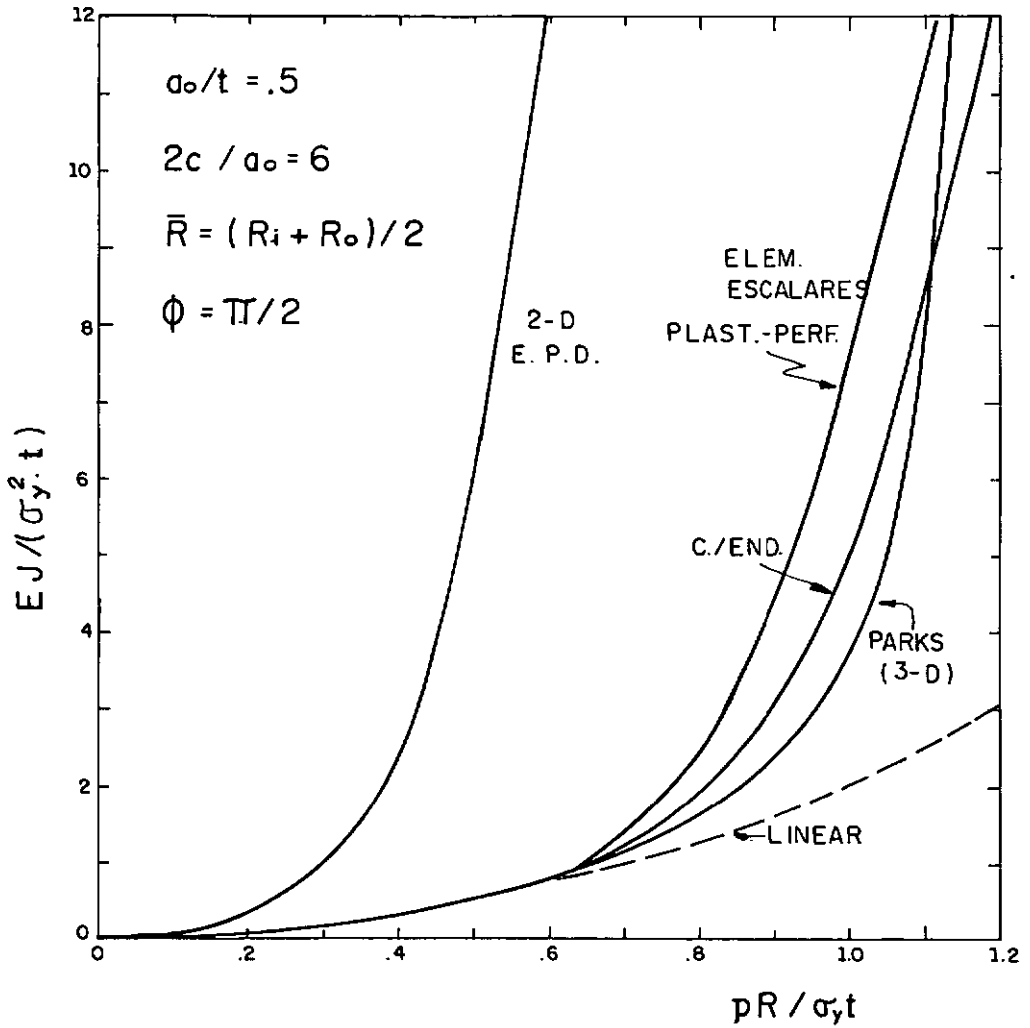


Gráfico 5.7 - Comparação de J versus pressão aplicada para máxima profundidade da fratura

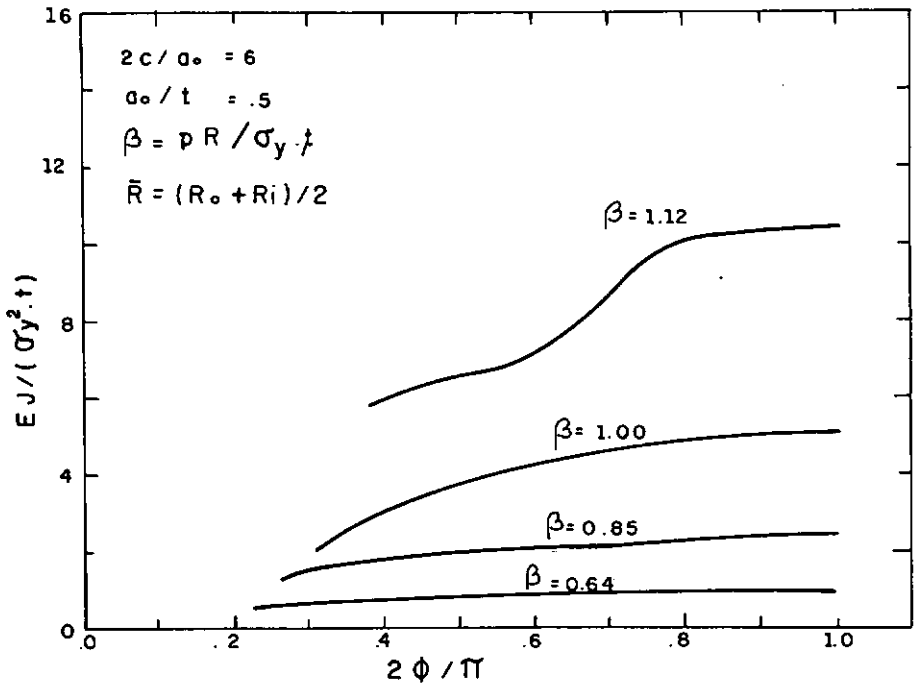


Gráfico 5.8 - Distribuição de J ao longo da fratura para vários níveis de pressão.

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES

6.1. Conclusões Gerais

A utilização de elementos escalares em conjunto com elementos de casca para análise de trincas não passantes em estruturas de superfície apresenta-se como uma opção confiável e econômica. Quando comparada com uma análise completamente tridimensional, as vantagens são grandes pois as malhas utilizadas são menos complexas com menos número de elementos e nós, o que implica num menor tempo para a geração de dados e um sistema de equações mais compacto. Alia-se a estas vantagens o fato de que tanto o fator de intensidade de tensões quanto a integral J serem avaliados em uma única etapa, sem necessidade de modificação da malha, o que acontece quando se utilizam elementos tridimensionais convencionais.

O elemento escalar apresentou uma boa convergência, característica também do elemento de casca utilizado, mostrando que a combinação de ambos é acertada, o que possibilitou a obtenção de boas respostas, mesmo com malhas medianamente refinadas, como foram os casos aqui apresentados.

A implementação do elemento escalar não requer mudanças estruturais em um sistema computacional baseado no Método dos Elementos Finitos e as rotinas necessárias não são de grande complexidade, podendo fazer parte da "biblioteca de elementos" em qualquer sistema.

Apesar de na maioria dos exemplos mostrados a superfície formada pela fratura foi admitida como semi-elíptica, nenhuma restrição se faz quanto a forma desta. Alguma atenção deve ser dada na discretização quando a profundidade variar bruscamente, tornando-se necessário um maior refinamento da malha nestes pontos. E quando a fratura tende a ser circular os resultados perdem a sua coerência, justamente pela brusca variação da profundidade, e nestes casos desaconselha-se o uso de elementos escalares.

Dentro das limitações impostas pela solução (2-D) da chapa em E.P.D. utilizada na obtenção da matriz de flexibilidade ($0 \leq a/t \leq 0,8$), as aproximações obtidas são consideradas boas tanto para os casos onde a tração predomina quanto nos casos de flexão, e casos combinados. Quando a relação a/t é maior que 0,8 rapidamente se forma uma zona de plastificação nestes pontos, e nestes casos aconselha-se tratar o problema como fratura passante, e a solução deve ser buscada por outros métodos.

A análise em regime elasto-plástico envolve uma aproximação para a superfície de escoamento para os elementos escalares e as respostas obtidas são ligeiramente mais conservadoras do que aquelas buscadas via tri-dimensional. No caso de materiais que possuem capacidade de endurecimento introduz-se um escalar f (definido em (3.40) e apêndice II) que deve ser escolhido adequadamente. Entretanto as respostas obtidas e o comportamento da fratura apresentam boa concordância em relação a outras formulações.

Com uma utilização criteriosa de elementos escalares e escolhendo-se constantes de calibração adequadas, ficam aumenta

das as opções de análise de estruturas que apresentam trincas não passantes, tanto em regime elástico quanto no caso elasto-plástico.

6.2. Futuros Desenvolvimentos

No modelo adotado, em regime elásto-plástico a carga é incrementada, mas a fratura é considerada estacionária. Entretanto sem muita dificuldade pode-se também ser incrementada a fratura, mas estes estudos são ainda recentes e existe pouca literatura a este respeito. O problema maior é como avaliar a quantidade de crescimento da fratura em função da carga.

Levou-se em conta na formulação da matriz de flexibilidade apenas o efeito do primeiro modo de fratura (abertura), isto cobre a maioria dos casos práticos onde a tração e flexão são preponderantes. Entretanto, um procedimento análogo ao mostrado aqui, pode-se desenvolver elementos escalares que levem em conta os modos II (cisalhante) e III (rasgamento) utilizando soluções (2-D) que cobrem estes casos. Estes dois modos surgem principalmente em estruturas submetidas a efeitos cisalhantes concentrados e a efeitos de torção.

APÊNDICE 1

OBTENÇÃO DAS FUNÇÕES g_t E g_b

O fator de intensidade de tensões para uma chapa em E.P.D., submetida às tensões de tração e flexão conforme mostrada na figura I.1, pode ser escrito como:

$$K_I = h^{1/2} \left[\sigma \cdot g_t + m \cdot g_f \right] \quad (I.1)$$

onde g_t e g_f são funções apenas da relação (a/h) entre a profundidade da fratura e a espessura da chapa.

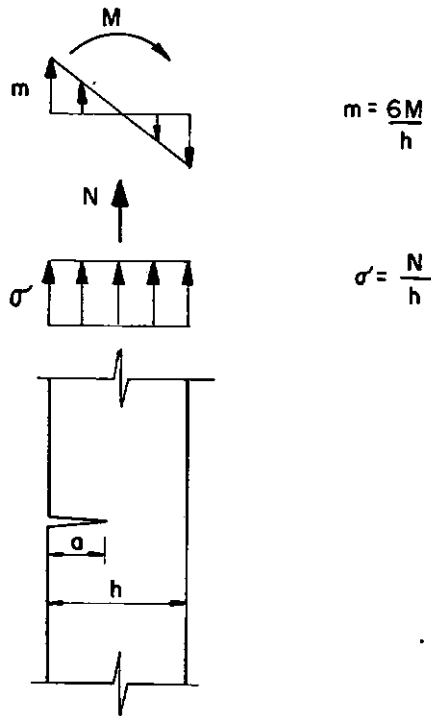


Figura I.1 - Chapa em E.P.D. analisada para obtenção das funções g_t e g_f .

Resultados obtidos por KAYA e ERGODAN [17] mostram

as funções g_t e g_f escritas como:

$$g_t(\zeta) = (\zeta\pi)^{1/2} \cdot \sum_{n=0}^6 A_n \zeta^{2n} \tag{I.2}$$

$$g_f(\zeta) = (\zeta\pi)^{1/2} \cdot \sum_{n=0}^6 B_n \zeta^n$$

sendo $\zeta = \ell/h$

os coeficientes A_n e B_n são dados na tabela I.1

n	A_n	B_n
0	1,1216	1,1202
1	6,5200	- 1,8872
2	-12,3877	18,0143
3	89,0554	-87,3851
4	-188,6080	241,9124
5	207,3870	-319,9402
6	-32,0524	168,0150

Tabela I.1 - Valor de A_n e B_n para as equações (I.2) e (I.3).

Definiram-se nas equações (3.22) os coeficientes

α_{ij} como sendo:

$$\alpha_{ij} = \int_0^{\ell} g_i g_j d_{\ell} \quad (3.22)$$

$$p/ \quad i, j = t, f$$

substituindo os valores de g_i e g_j de acordo com as equações (I.2) e (I.3), e após a integração obtém-se:

$$\alpha_{tt} = \zeta^2 \cdot \sum_{n=0}^{12} C_{tt}^{(n)} \zeta^{2n} \quad (I.4)$$

$$\alpha_{tf} = \alpha_{ft} = \zeta^2 \sum_{n=0}^{18} C_{tf}^{(n)} \zeta^n \quad (I.5)$$

$$\alpha_{ff} = \zeta^2 \sum_{n=0}^{12} C_{ff}^{(n)} \zeta^n \quad (I.6)$$

sendo os valores de C_{tt} , C_{tf} , C_{ff} dados na tabela I.2.

n	$C_{tt}^{(n)}$	$C_{tf}^{(n)}$	$C_{ff}^{(n)}$
0	1,9761	1,9735	1,9710
1	11,4870	-2,2166	-4,4277
2	7,7086	21,6051	34,4952
3	15,0143	-69,3133	-165,7321
4	280,1207	196,3000	626,3926
5	-1099,7200	-406,2608	-2144,4651
6	3418,9795	644,9350	7043,4169
7	-7686,9237	-408,9569	-19003,2199
8	12794,1279	-159,6927	37853,3028
9	-13185,0403	-988,9879	-52595,4681
10	7868,2682	4266,5487	48079,2948
11	-1740,2463	-2997,1408	-25980,1559
12	124,1360	-6050,7849	6334,2425
13		8855,3615	
14		3515,4345	
15		-11744,1116	
16		4727,9784	
17		1695,6087	
18		-845,8958	

Tabela I.2 - Valores dos coeficientes C_{tt}, C_{tf}, C_{ff}

APÊNDICE II

CALIBRAÇÃO DO ELEMENTO ESCALAR EM REGIME PLÁSTICO

Na equação (3.45) introduziu-se um escalar f . Aqui procura-se mostrar a influência deste parâmetro nos resultados.

Analisa-se uma chapa conf. figura (II.1), submetida apenas à tensão normal σ , em E.P.D., e compara-se com outra com mesmas dimensões e história do carregamento, conectada à apenas um elemento de mola e ajusta-se o parâmetro f de forma a tornar a solução o mais próximo da solução do contínuo.

Dados do EXEMPLO

$$a/t = 0,5$$

$$t = 1\text{cm}$$

$$\epsilon_y = \sigma_y/E = 2.333 \times 10^{-3}$$

$$E = 210000 \text{ Kgf/cm}^2$$

$$\sigma_y = 490 \text{ Kgf/cm}^2$$

$$\frac{h}{E} = 0.01$$

$$\sigma_{\text{max}} = 3.333 \times 10^{-3} \cdot E$$

$$L = 6t$$

A tensão σ foi incrementada de até que se atingisse o valor limite σ_{max} .

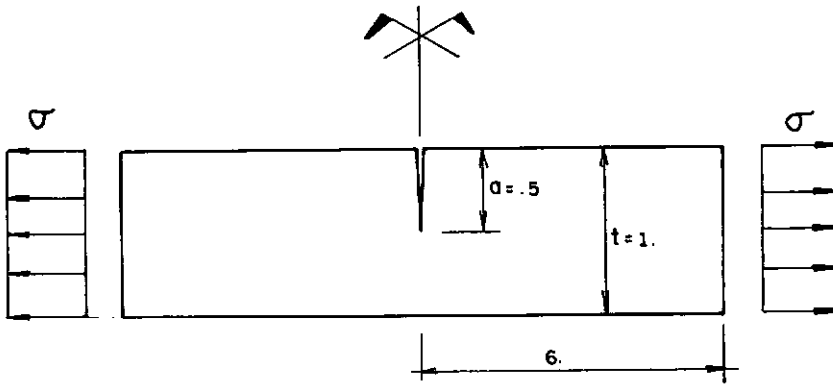


Figura II.1

São testados valores de f igual a 0.2, 0.4 e 1.0, as figuras (II.2) e (II.3) mostram a comparação.

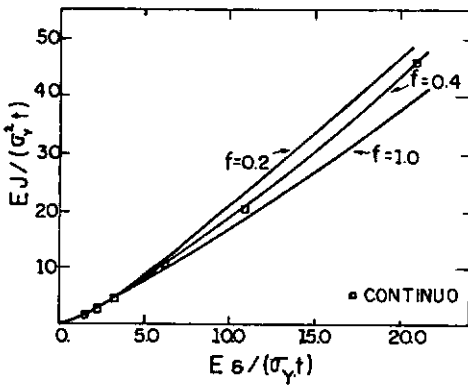


Figura (II.2)

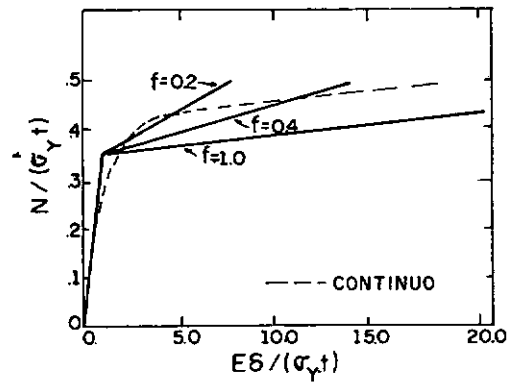


Figura (II.3)

Pode-se ver que a melhor aproximação para f é 0.4, é claro que para outros valores de h/E e outros tipos de carregamento f pode variar, entretanto PARKS [3.14] argumenta que este valor pode ser generalizado, e que obteve bons resultados mesmo quando a flexão predomina sobre a tensão axial.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] INGLIS, C.E., Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners, Proc. Inst. Naval Architects, 60 (1913).
- [2] GRIFFITHS, A.A., Proceeding of the 1st International Congress for Applied Mechanics, Delft, p.55 (1924).
- [3] IRWIN, G.R., Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Transversing a Plate, Transaction of A.S.M.E., J. Appl. Mech (1957).
- [4] MAY, M.J., Fracture Toughness, The Iron and Steel Institute, Cap. 7, pp. 101-104 (1968).
- [5] BROWN, F.W.Jr. e SRAWLEY, J.E., Plane Strain Crack Toughness Testing of High Strength Metallic Materials, ASTM, publ. 410 (1969).
- [6] LEIBOWITZ, H., Fracture, Vol. II, Academic Press, N.Y. (1968).
- [7] TADA, H.; PARIS, P.C. e IRWIN, G.R., The Stress Analysis of Cracks Handbook, Del Research Corporation, Hellertown, P.A. (1973).

- [8] BROAK, D., Elementary Engineering Fracture Mechanics, Ed. Martinns Nijhoff Publishers, The Netherlands(1982).
- [9] RICE, J.R., A Part Independent Integral and the Aproximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks, Trans. ASME - J. Appl. Mech, 35 (1968).
- [10] ERGODAN, F., Crack Propagation Theories, CR 901 (1967).
- [11] FORMAN, R.G. e outros, Numerical Analysis of Crack Propagation in a Cyclic-loded Structure, Trans. of ASME - J. Basic Eng., p.459 (1967).
- [12] TIMOSHENKO, S.P. e GOODIER, J.N., Teoria da Elasticidade, Ed. Guanabara Dois, (1968).
- [13] DYM, C.L. e SHAMES, I.M., Solid Mechanics - A Variational Approach, McGraw-Hill (1973).
- [14] OWEN, D.R.J. e FAWKES, Engineering Fracture Mechanics, Pineridge Press Ltd., Swansea, U.K. (1983).
- [15] IRWIN, G.R., Trans. of ASME, J. of B.E., Vol. 85, Série D, p. 593 (1963).
- [16] IRWIN, G.R., Fracture Mechanics, Structural Mechanics, eds. Goodier, J.H. e Hoff, N.J., Perganon Press (1960).

- [17] KAIA, A.C. e ERDOGAN, Stress Intensity factor and COD in an Orthotropic Strip, Int. J. Fracture, 16, 171 (1980).
- [18] RICE, J.R. e LEVY, N., The Part-through Surface Crack in an Elastic Plate, Trans. of A.S.M.E., J. Appl. Mech, 19, 185-194 (1972).
- [19] DELALE, F. e ERDOGAN, F., Line-Spring Model for Surface Crack in a Reissner Plate, Int. J. Engng. Sci, Vol. 19, pp.1331-1340 (1981).
- [20] DELALE, F. e ERDOGAN, F., Application of the Line-Spring Model to a Cylindrical Shell Containing a Circunferential or Axial Part-Through Crack, Trans. of ASME, J. of Appl. Mechs, vol. 49, pp. 97-102, Março (1982).
- [21] GERMAN, M.D.; KUMAR, V. e LORENZI, H.G., Analysis of Surface Cracks in Plates and Shells Using the Line - Spring Model and Adina, Computers & Structures, vol. 17, pp. 881-898 (1982).
- [22] PARKS, D.M., The Inelastic Line-Spring: Estimates of Elastic-Plastic Fracture Mechanics Parameters for Surface-Cracked Plates and Shells, Trans. of ASME J.P.V.T., Vol. 103, pp. 246-254, Agosto (1981).

- [23] PARKS, D.M. e WHITE, C.S., Elastic-Plastic Line-Spring Finite Elements for Surface-Cracked Plates and Shells, Trans. of ASME, J.P.V.T., vol. 104, pp. 287-292, Nov. (1982).
- [24] RICE, J.R., The Line-Spring Model For Surface Flaws, The Surface Crack: Physical Problems and Computational Solutions, ed. J.L. Swedlow American Society of Mechanicks Engineers,(1972).
- [25] KING, R.B., Elastic-Plastic Analysis of Surface Flaws Using a Simplified Line-Spring Model, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 18, Nº 1, pp. 217-231 (1983).
- [26] NEWMAN, J.C. Jr. e RAJU, I.S., Stress Intensity Factor for Internal Surface Cracks in Cylindrical Pressure Vessels, Trans. of ASME, J.P.V.T., Vol. 102, pp-342-346, Nov. (1980).
- [27] ERDOGAN, F. e EZZAT, H., Fracture of Pipelines and Cylinders Containing a Circunferencial Crack, Welding Research Council, Bulletin 288, Outubro (1983).
- [28] RICE, J.R., Mathematical Analysis in the Mechanics of Fracturs, Fracture, vol. II, Ed. Leiebowitz, academic Press, N.Y., pp.151-311 (1972).

- [29] ROCHA, J.A.L., Aplicação do Método dos Elementos Finitos a Problemas Planos da Mecânica da Fratura, Tese M.Sc., COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro (1976).
- [30] BARSOUM, R.S., Triangular Quarter-Point Elements as Elastic and Perfectly-Plastic Crack Tip Elements, Int. J. for Numerical Methods in Engineering, Vol. 11, pp. 85-98 (1977).
- [31] BARSOUM, R.S., A Degenerate Solid Elements for Linear Fracture Analysis of Plate Bending and General Shells, Int. J. for Numerical Methods in Eng., Vol. 10, pp. 551-564 (1976).
- [32] HIBBITT, H.D., Some Properties of Singular Isoparametric Elements, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol.11, pp. 180-184 (1977).
- [33] FARIAS, F.M. e outros, Crack Growth in Tubular Joint, 5º Congresso Int. de Eng. Off-Shore, Rio de Janeiro, Brasil (1985).
- [34] BLANDFORD, G.E., Two Dimensional Stress Intensity Factor Computations Using The Boundary Element Method, Int. J. for Num. Meth. Engng., vol. 17, pp. 387-404 (1981).
- [35] HALBRITTER, A.H., Analisis de Cáscaras Gruesas y Finas con Elementos Tridimensionales, Tese M.Sc., COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro (1974).

- [36] LANDAU, L., Análise de Grandes Deformações e Plasticidade por Meio de Elementos Finitos Isoparamétricos, Tese M.Sc., COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro (1976).
- [37] ZIENKIEWICZ, O.C., The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, London, (1971).
- [38] BATHE, K.J., Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Ed. Prentice Hall, New Jersey (1982).
- [39] MOREIRA, M.L.T., Análise Estática de Estruturas com Não-Linearidade Física Localizada, Tese M.Sc., COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro (1981).
- [40] ODEN, J.T., Finite Elements of Non Linear Continua, McGraw-Hill, 1972.
- [41] OWEN, D.R.J. e HINTON, E., Finite Element in Plasticity: Theory and Practice, Pineridge Press Ltd., (1980).
- [42] COOK, R.D., Concepts and Applications of Finite Element Analysis, Ed. John Wiley & Sons., New York, (1981)