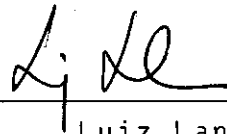


FORMULAÇÃO HIERÁRQUICA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS :
REFINAMENTO AUTO-ADAPTATIVO VERSÃO P APLICADO
A. PROBLEMAS DE ELASTICIDADE

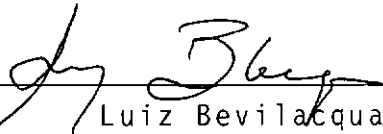
Fernando Luiz Bastos Ribeiro

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO
DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.) EM ENGENHARIA CIVIL.

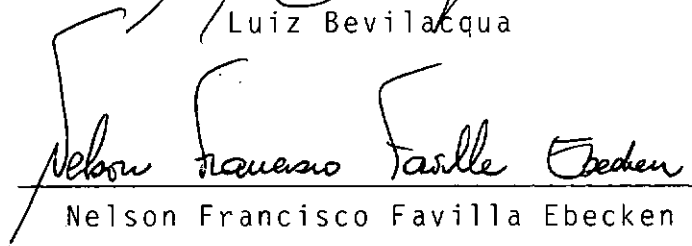
Aprovada por:



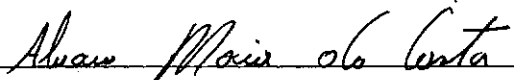
Luiz Landau
(Presidente)



Luiz Bevilacqua



Nelson Francisco Favilla Ebecken



Alvaro Maia da Costa

RIBEIRO, FERNANDO LUIZ BASTOS

Formulação Hierárquica do Método dos Elementos Finitos: Refinamento Auto-Adaptativo Versão P Aplicado a Problemas de Elasticidade (Rio de Janeiro) 1986.

viii , 80 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1986).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1. Mecânica Computacional.
 2. Método dos Elementos Finitos.
 3. Formulação Hierárquica Versão P.
 4. Análise Estrutural.
- I. COPPE/UFRJ. II. Título (Série)

Aos meus pais

Fernando e Acy

AGRADECIMENTOS

Ao professor Luiz Landau pela amizade e orientação dos trabalhos.

Ao professor Nelson Ebecken e aos colegas Alvaro L.G.A. Coutinho e José Luiz Alves pelas valiosas sugestões.

Aos colegas do Programa de Engenharia Civil da COPPE/UFRJ pelo agradável convívio.

A Fernando Bastos Ribeiro, meu pai, pelo apoio e incentivo.

A Gilberto Luziê e Cecília pela confecção dos desenhos e a Selma pelo trabalho de datilografia.

Rêsumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

**FORMULAÇÃO HIERÁRQUICA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS :
REFINAMENTO AUTO-ADAPTATIVO VERSÃO P APLICADO
A PROBLEMAS DE ELASTICIDADE**

Fernando Luiz Bastos Ribeiro

Dezembro de 1986

Orientador: Luiz Landau

Programa: Engenharia Civil

Este trabalho tem por objetivo apresentar um esquema auto-adaptativo versão p do Método dos Elementos Finitos para análise de erros **a-posteriori** e refinamento automático na resolução de problemas de elasticidade estática linear.

Utiliza-se a formulação hierárquica do método, e o refinamento seletivo de polinômios é feito automaticamente através de procedimentos iterativos, baseado na distribuição de **indicadores de erro**.

Como aplicação são apresentadas análises de problemas de elasticidade plana, flexão de placas e cascas. Os resultados obtidos são comparados com soluções analíticas.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

**HIERARCHICAL FORMULATION OF THE FINITE
ELEMENT METHOD: P VERSION SELF-ADAPTIVE REFINEMENT
APPLIED TO ELASTICITY PROBLEMS**

Fernando Luiz Bastos Ribeiro

December, 1986

Chairman: Luiz Landau

Department: Civil Engineering

This work is concerned with the development of a p version self-adaptive scheme of the Finite Element Method for **a-posteriori** error analysis and automatic refinement, in the resolution of linear static elasticity problems.

Utilizing the hierarchical formulation of the method, the selective polynomial refinement is performed by means of iterative procedures, according to an **error indicator** distribution.

As for the application of such methodology, analyses of plane elasticity, plate bending and shell problems are presented. The obtained results are compared with analytical solutions.

ÍNDICE

CAPITULO I - INTRODUÇÃO	01
CAPÍTULO II - O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS E APROXIMAÇÕES HIERÁRQUICAS	04
II.1 - O Método dos Elementos Finitos	04
II.2 - Formulação Hierárquica do Método dos Elementos Finitos	09
II.2.1 - Refinamento p	12
II.2.2 - Refinamento h	19
II.2.3 - Vantagens da Formulação Hierárquica	23
CAPÍTULO III - ANÁLISE DE ERROS	24
III.1 - Introdução	24
III.2 - Medidas de Erro	24
III.3 - Resíduos	27
III.4 - Medidas de Erro a-posteriori	33
CAPÍTULO IV - PROCESSOS AUTO-ADAPTATIVOS	36
IV.1 - Introdução	36
IV.2 - Um Programa Auto-Adaptativo Versão p	38
IV.2.1 - Introdução de Dados	39
IV.2.2 - Matriz de Rigidez de Elemento	39
IV.2.3 - Solução Inicial	42
IV.2.4 - Indicadores e Estimativa de Erro	42
IV.2.5 - Soluções Refinadas	43

CAPÍTULO V - APLICAÇÕES	46
V.1 - Introdução	46
V.2 - Elasticidade Plana	46
V.3 - Flexão de Placas	51
V.3.1 - Placa Fina	51
V.3.2 - Placa Espessa	55
V.4 - Análise de Cascas	58
V.5 - Análise de uma Junta Típica de Estrutura offshore	61
CAPÍTULO VI - CONCLUSÕES	70
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	73

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Os estudos de NAVIER [40], MAXWELL [41], CASTIGLIANO [42], Lord RAYLEIGH [43] e RITZ [44] entre outros, datando do final do século XIX, formam a base do que hoje se chama análise estrutural. Desde então, importantes ferramentas matemáticas têm sido desenvolvidas paralelamente. A introdução de métodos matriciais na análise estrutural culminou com o desenvolvimento dos computadores digitais no início dos anos 50. As primeiras aplicações envolviam apenas estruturas reticuladas (LIVESLEY [45]), mas a crescente necessidade de estruturas mais leves, tais como as encontradas na indústria aeronáutica, conduziu ao desenvolvimento de métodos numéricos que pudessem ser utilizados nas análises de problemas mais complexos. Dentre os pioneiros, pode-se citar ARGYRIS [46], TURNER [47] e CLOUGH [48].

O Método das Diferenças Finitas foi originalmente o método mais popular, mas nos dias de hoje o Método dos Elementos Finitos (MEF) é reconhecido como sendo a técnica numérica dominante.

O MEF (SPOONER [49]) é uma extensão do Método de Ritz, base dos métodos variacionais, e pode também ser associado ao Método de Galerkin.

Uma desvantagem dos métodos variacionais é que estes não fornecem informações a respeito do erro associado às aproxima

ções obtidas. A confiabilidade dos resultados é na verdade questão fundamental do MEF, e vem sendo recentemente motivo de pesquisas no sentido de se criarem procedimentos automáticos de estimativas de erro e refinamento de uma solução. Importantes trabalhos nesta área têm sido publicados desde 1978, e em 1984 realizou-se em Lisboa, Portugal, a primeira conferência internacional totalmente dedicada aos temas análise de erros e adaptatividade; International Conference on Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations (ARFEC[50]). Trabalhos como os de BABUSKA e RHEINBOLDT [9,51,52] e GAGO [4] deram considerável impulso ao desenvolvimento do assunto.

Dentro do contexto de procedimentos auto-adaptativos, a formulação hierárquica do MEF, cuja primeira utilização se atribui a ZIENKIEWICZ [2], desempenha um papel fundamental pois suas características a tornam extremamente adequada para tais tipos de metodologia.

Apresenta-se neste trabalho um esquema auto-adaptativo do MEF, com medidas de erro **a-posteriori** e refinamento polinomial para resolução de problemas de elasticidade estática linear. Utilizando-se formulação hierárquica, o refinamento seletivo de polinômios é feito automaticamente através de procedimentos iterativos, baseado na distribuição de **indicadores de erro**.

No Capítulo II descreve-se o MEF de maneira geral, introduzindo-se os conceitos de refinamento de polinômio (p), malha (h) e de aproximações hierárquicas. Apresentam-se exemplos de funções de interpolação hierárquicas em 1 e 2 dimensões, para os dois tipos de refinamento mencionados acima.

No Capítulo III procurou-se estudar alguns aspectos relativos à análise de erros. Definem-se medidas de erro **a-priori** e **a-posteriori**, fazendo-se a distinção entre **estimativas** e **indicadores** de erro. Utilizando a formulação hierárquica obtém-se medidas de erro **a-posteriori**, segundo a norma de energia.

No Capítulo IV apresentam-se as características de um processo auto-adaptativo, e descreve-se em linhas gerais o programa para análise de erros e refinamento automático versão p, desenvolvido neste trabalho.

O Capítulo V contém as aplicações do refinamento p-hierárquico nas análises de problemas de elasticidade plana, flexão de placas e cascas.

No Capítulo VI encontram-se as conclusões baseadas nos resultados obtidos, bem como sugestões para pesquisas futuras e continuidade do presente trabalho.

CAPÍTULO II

O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS E APROXIMAÇÕES HIERÁRQUICAS

II.1 - O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

No decorrer dos últimos 25 anos o Método dos Elementos Finitos (MEF) tornou-se uma ferramenta largamente utilizada na resolução por computador de complexos problemas em engenharia.

O MEF consiste basicamente em aproximar uma função ϕ satisfazendo a uma determinada equação diferencial em um domínio Ω (Figura II.1), juntamente com certas condições impostas no contorno Γ do domínio ($\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$):

$$L\phi + p = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (\text{II.1})$$

$$M\phi = 0 \quad \text{em } \Gamma_1 \quad (\text{II.2})$$

$$N\phi + q = 0 \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (\text{II.3})$$

onde L , M e N são operadores diferenciais, p e q independem de ϕ e, (II.2) e (II.3) são respectivamente as condições de contorno essenciais (homogêneas aqui no caso) e naturais.

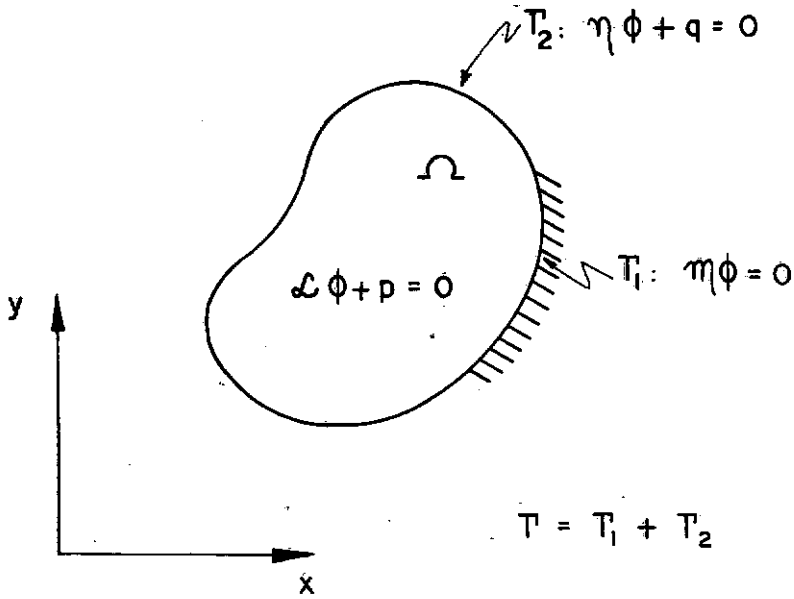


Figura II.1 - Domínio Ω e contorno Γ de um problema bidimensional

Em um problema deste tipo, a equação integral,

$$\int_{\Omega} (L\phi + p) v d\Omega = 0 \quad (\text{II.4})$$

deve ser satisfeita para todas as funções v pertencentes ao espaço H de funções suficientemente bem comportadas tais que não seja possível o cálculo da integral (II.4).

O problema de se encontrar uma função ϕ satisfazendo as condições de contorno (II.2) e (II.3) tal que,

$$\int_{\Omega} (L\phi + p)v d\Omega = 0 \quad , \quad \forall v \in H \quad (II.5)$$

constitui a formulação variacional (BECKER [1]) do problema definido por (II.1), (II.2) e (II.3).

No presente trabalho estuda-se a classe de problemas regidos por equações diferenciais elípticas lineares e independentes do tempo, tais como problemas de elasticidade estática linear.

Sendo L um operador linear elíptico (REKTORYS [11]) de ordem $2m$, a integração por partes (teorema de Green) da primeira parcela de (II.5) fornece a expressão:

$$\int_{\Omega} v L\phi d\Omega = B(\phi, v) + \int_{\Gamma} N\phi M v d\Gamma \quad (II.6)$$

onde $B(\phi, v)$ é uma integral no domínio envolvendo produtos das derivadas de ϕ e v de ordem m , e os operadores M e N possuem derivadas de ordem $0, 1, 2, \dots, m-1$ e $m, m+1, \dots, 2m-1$ respectivamente.

Da substituição de (II.6) em (II.5) e introduzindo-se as condições de contorno (com v satisfazendo as condições essenciais homogêneas), resulta:

$$B(\phi, v) + \int_{\Omega} p v d\Omega - \int_{\Gamma_2} q M v d\Gamma = 0 \quad , \quad \forall v \in H^* \quad (II.7)$$

sendo H^* o espaço das funções suficientemente suaves para permitirem o cálculo das integrais (II.7) e que satisfazem as condições essenciais homogêneas. Esta expressão representa a "forma fraca" da formulação variacional (II.5), e tem a vantagem de requerer uma ordem de continuidade inferior para a solução ϕ . Em problemas de elasticidade, esta formulação corresponde à utilização do princípio dos trabalhos virtuais e à minimização do funcional de energia.

No MEF o domínio é discretizado (Figura II.2) e procura-se uma solução aproximada $\hat{\phi}$ na forma,

$$\phi \approx \hat{\phi} = \sum_{i=1}^n N_i a_i = \underline{N}_n \underline{a}_n \quad (\text{II.8})$$

sendo a_i as incógnitas do problema e N_i as funções de interpolação definidas de tal modo que,

$$N_i = \begin{cases} 1 & \text{para o nó } j=i \\ 0 & \text{para os nós } j \neq i \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{II.9})$$

sendo n o número de pontos nodais.

Tal característica das funções de interpolação faz com que seja atribuído às incógnitas a_i o significado físico de valores da função aproximada $\hat{\phi}$ nos nós,

$$\hat{\phi}_i = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{II.10})$$

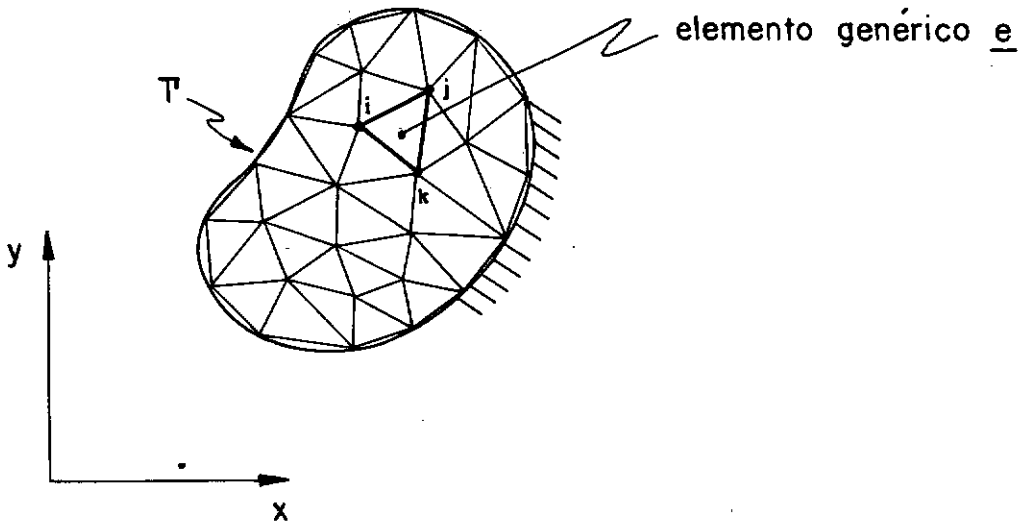


Figura II.2 - Discretização do domínio Ω em elementos finitos

Empregando o Método de Galerkin, introduz-se a aproximação (II.8) em (II.7), fazendo com que esta igualdade seja válida para n funções $v \in H^*$ escolhidas de tal modo que,

$$v_i = N_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{II.11})$$

obtendo-se então n equações lineares com n incógnitas:

$$B(\hat{\phi}, N_i) + \int_{\Omega} p N_i d\Omega - \int_{\Gamma_2} q M N_i d\Omega = 0, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (\text{II.12})$$

ou na forma matricial,

$$\underline{K}_{nn} \underline{a}_n = \underline{f}_n \quad (\text{II.13})$$

sendo ,

$$K_{ij} = B(N_i, N_j) \quad , \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (\text{II.14})$$

os coeficientes da matriz de rigidez \underline{K}_{nn} , \underline{a}_n o vetor de incógnitas nodais e \underline{f}_n o vetor de forças,

$$f_i = \int_{\Gamma_2} q M N_i d\Gamma - \int_{\Omega} p N_i d\Omega \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{II.15})$$

O sistema de equações (II.13) é obtido somando-se as contribuições individuais de cada elemento,

$$K_{ij} = \sum_e K_{ij}^e \quad , \quad f_i = \sum_e f_i^e \quad (\text{II.16})$$

com K_{ij}^e e f_i^e dados por,

$$K_{ij}^e = B^e(N_i, N_j) \quad , \quad f_i^e = \int_{\Gamma_e \subset \Gamma_2} q M N_i d\Gamma - \int_{\Omega_e} p N_i d\Omega \quad (\text{II.17})$$

II.2 - FORMULAÇÃO HIERÁRQUICA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Funções hierárquicas foram primeiramente introduzidas com o objetivo de se criarem elementos que permitissem a transição entre regiões com aproximações de graus diferentes (ZIENKIEWICZ [2]). O procedimento usual no MEF é definir as funções de interpolação N_i (ver equações II.8 e II.9) de maneira que estejam associadas à incógnitas a_i que representem os valores da aproxima

ção $\hat{\phi}$ nos nós. Tal característica faz com que aproximações de ordens diferentes tenham funções de interpolação completamente distintas. No entanto, é possível definir funções de interpolação hierárquicas, no sentido de que quando introduzidas na aproximação $\hat{\phi}$ não alterem as funções N_i ($i = 1, 2, \dots, n$) pré-existentes. Neste caso, as incógnitas a_i ($i > n$) associadas a estas funções hierárquicas não mais terão o significado físico de valores nodais da função aproximada.

Se uma solução com n graus de liberdade é refinada hierarquicamente através da introdução de novas variáveis a_m ,

$$\hat{\phi} = \sum_{i=1}^{n+m} N_i a_i = \underline{N}_{n+m} \underline{a}_{n+m} \quad (\text{II.18})$$

obté-m-se o sistema de equações:

$$\underline{K}_{n+m, n+m} \underline{a}_{n+m} = \underline{f}_{n+m} \quad (\text{II.19a})$$

ou,

$$\left[\begin{array}{c|c} \underline{K}_{nn} & \underline{K}_{nm} \\ \hline \underline{K}_{mn} & \underline{K}_{mm} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \underline{a}_n \\ \underline{a}_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{f}_n \\ \underline{f}_m \end{Bmatrix} \quad (\text{II.19b})$$

no qual a matriz \underline{K}_{nn} e o vetor \underline{f}_n permanecem inalterados. Deste modo, as matrizes correspondentes a um nível de aproximação anterior são mantidas e não precisam ser recalculadas.

Este sistema de equações pode ser resolvido através do seguinte esquema iterativo (ZIENKIEWICZ [12]):

$$\underline{a}_m^k = \underline{K}_{mm}^{-1} (\underline{f}_m - \underline{K}_{mn} \underline{a}_n^{k-1}) \quad (\text{II.20})$$

$$k = 1, 2, \dots, j$$

$$\underline{a}_n^k = \underline{K}_{nn}^{-1} (\underline{f}_n - \underline{K}_{nm} \underline{a}_m^k) \quad (\text{II.21})$$

onde uma primeira aproximação para \underline{a}_n pode ser dada pela solução original do problema com n graus de liberdade,

$$\underline{a}_n^0 = \underline{K}_{nn}^{-1} \underline{f}_n \quad (\text{II.22})$$

Existem basicamente duas alternativas para o refinamento de uma solução:

i) refinar a malha através da introdução de elementos menores.

ii) aumentar o grau dos polinômios usados, introduzindo-se novos modos de deformação, como por exemplo no caso de elasticidade.

Estas duas alternativas são denominadas refinamentos h e p respectivamente (Figura II.3).

A seguir apresentam-se exemplos de funções hierárquicas de continuidade C^0 entre elementos para estes dois tipos de refinamento.

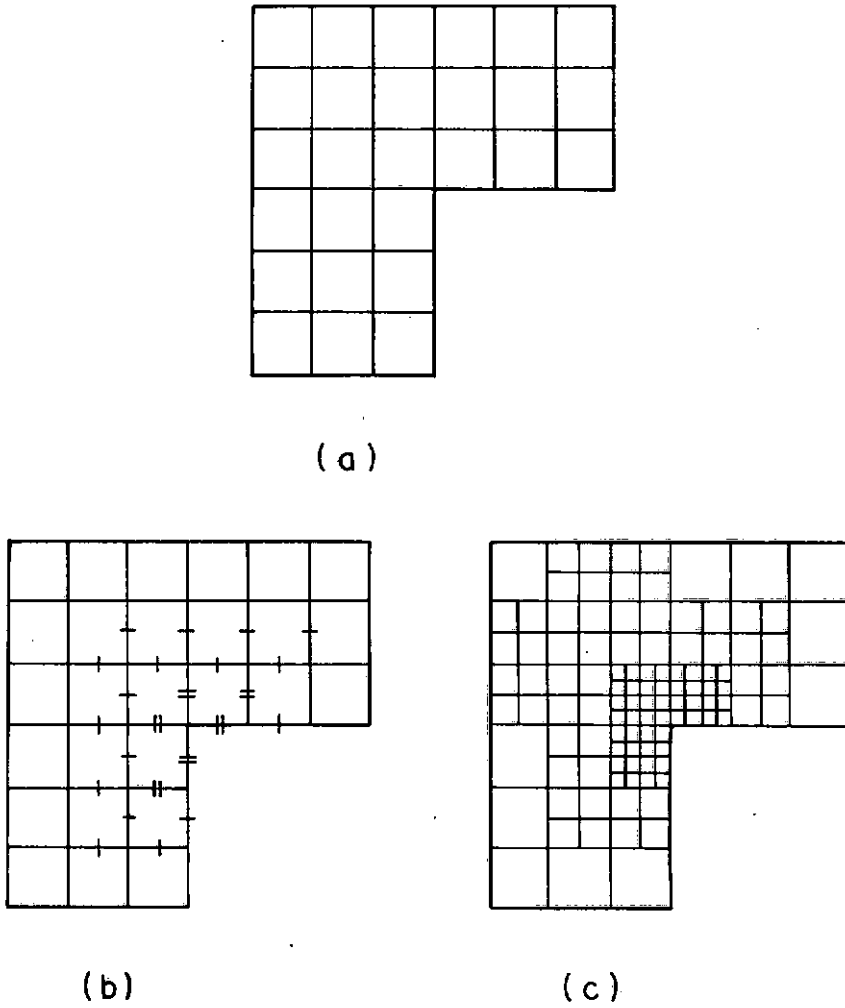


Figura II.3 - (a) Malha original

(b) Refinamento de polinômios (p)

(c) Refinamento de malha (h)

II.2.1 - Refinamento p

Define-se a versão p do MEF como sendo o enriquecimento do espaço solução através da introdução de novas funções de interpolação N_i de modo a se aumentar o grau dos polinômios usa-

dos (GAGO [4]).

Em um elemento unidimensional, as aproximações linear, quadrática e cúbica (Figura II.4) escritas em termos das coordenadas locais r são dadas por:

$$i) \text{ aproximação linear: } \hat{\phi} = N_1 a_1 + N_2 a_2 \quad (\text{II.23})$$

$$N_1 = (1-r)/2 \quad (\text{II.24})$$

$$N_2 = (1+r)/2$$

$$ii) \text{ aproximação quadrática: } \hat{\phi} = N_1 a_1 + N_2 a_2 + N_3 a_3 \quad (\text{II.25})$$

$$N_1 = r(1-r)/2$$

$$N_2 = r(1+r)/2 \quad (\text{II.26})$$

$$N_3 = (1-r)(1+r)$$

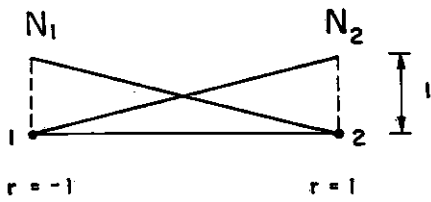
$$iii) \text{ aproximação cúbica: } \hat{\phi} = N_1 a_1 + N_2 a_2 + N_3 a_3 + N_4 a_4 \quad (\text{II.27})$$

$$N_1 = 9/16(1-r)(r+1/3)(r-1/3)$$

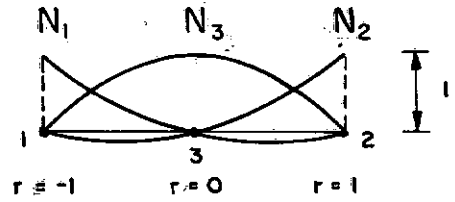
$$N_2 = 9/16(1+r)(r+1/3)(r-1/3) \quad (\text{II.28})$$

$$N_3 = 27/16(1+r)(r-1/3)(r-1)$$

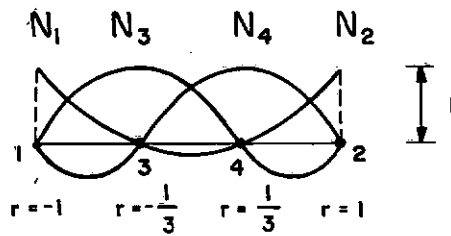
$$N_4 = 27/16(1-r)(r+1)(r+1/3)$$



(a)



(b)



(c)

Figura II.4 - Funções de interpolação **standard** unidimensionais:

- (a) lineares
- (b) quadráticas
- (c) cúbicas

Observa-se que quando se passa de um grau para outro subsequente, obtém-se funções de interpolação totalmente diferentes. Estas funções, construídas de modo a atribuírem às incógnitas valores nodais da aproximação $\hat{\phi}$ são aqui denominadas funções de interpolação **standard**.

Pode-se obter para este mesmo elemento uma aproximação hierárquica quadrática do tipo,

$$\hat{\phi} = N_1 a_1 + N_2 a_2 + N_3 a_3 \quad (\text{II.29})$$

onde N_1 e N_2 são as funções lineares de (II.24) e N_3 é uma função hierárquica do segundo grau satisfazendo as condições $N_3 = 0$ em $r = \pm 1$, para que seja mantida a continuidade C^0 entre elementos. Toda função na forma,

$$N_3 = \alpha (1-r)(1+r) \quad (\text{II.30})$$

onde α é um parâmetro real qualquer, satisfaz a estas condições. Escolhendo-se por simplicidade $\alpha=1$ tem-se a função hierárquica quadrática,

$$N_3 = (1-r)(1+r) \quad (\text{II.31})$$

Neste caso, pode-se relacionar a incógnita hierárquica a_3 às incógnitas nodais a_1 e a_2 em (II.29):

$$a_3 = \hat{\phi} \Big|_{r=0} - \frac{1}{2} (a_1 + a_2) \quad (\text{II.32})$$

Para se obter uma aproximação hierárquica cúbica basta somar o termo $N_4 a_4$ à aproximação (II.29),

$$\hat{\phi} = N_1 a_1 + N_2 a_2 + N_3 a_3 + N_4 a_4 \quad (\text{II.33})$$

sendo N_4 uma função cúbica que se anule em $r=\pm 1$. Seleccionando-se por exemplo uma destas funções para a qual $dN_4/dr = 1$ em $r=0$, obtém-se a função cúbica hierárquica,

$$N_4 = r(1-r^2) \quad (\text{II.34})$$

sendo a incógnita hierárquica a_4 associada a esta função igual a:

$$a_4 = \left. \frac{d\hat{\phi}}{dr} \right|_{r=0} - \frac{1}{2} (a_2 - a_1) \quad (\text{II.35})$$

A Figura II.5 ilustra as aproximações hierárquicas quadrática e cúbica. Deve-se observar que não é necessário associar nós às funções hierárquicas.

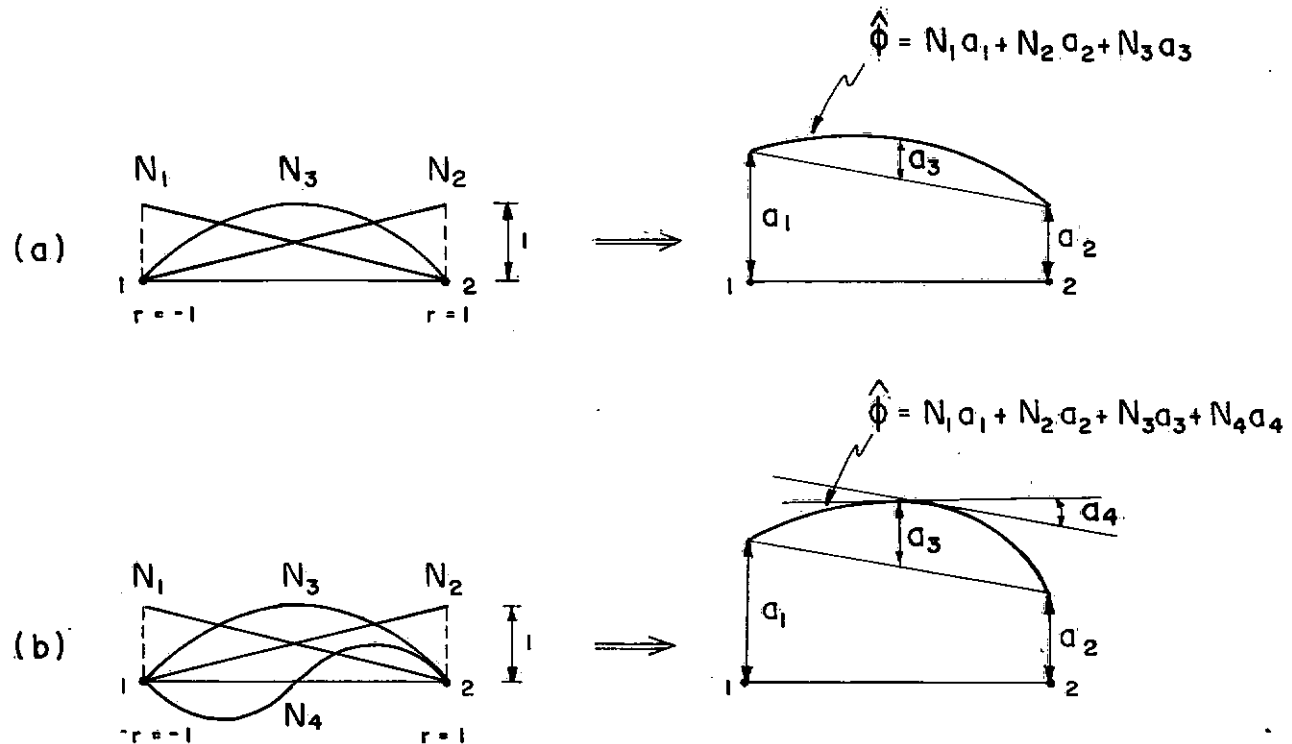


Figura II.5 - Aproximações hierárquicas unidimensionais:

(a) quadrática (b) cúbica

Procedendo de maneira semelhante pode-se construir funções hierárquicas de graus superiores.

Analogamente ao que foi feito para o caso unidimensional, obtém-se aproximações hierárquicas para um elemento bidimensional de coordenadas locais r e s (Figura II.6). Sendo a aproximação bilinear dada por,

$$\hat{\phi} = \sum_{i=1}^4 N_i a_i \quad (\text{II.36})$$

com,

$$\begin{aligned} N_1 &= 1/4 (1+r) (1+s) \\ N_2 &= 1/4 (1-r) (1+s) \\ N_3 &= 1/4 (1-r) (1-s) \\ N_4 &= 1/4 (1+r) (1-s) \end{aligned} \quad (\text{II.37})$$

a aproximação quadrática hierárquica tem a forma,

$$\hat{\phi} = \sum_{i=1}^4 N_i a_i + \sum_{i=5}^8 N_i a_i \quad (\text{II.38})$$

sendo N_i ($i=1,2,3,4$) as funções de (II.37) e N_i ($i=5,6,7,8$) as funções hierárquicas associadas aos lados do elemento:

$$\begin{aligned} N_5 &= 1/2 (r^2-1) (1+s) \\ N_6 &= 1/2 (s^2-1) (1-r) \\ N_7 &= 1/2 (r^2-1) (1-s) \\ N_8 &= 1/2 (s^2-1) (1+r) \end{aligned} \quad (\text{II.39})$$

Para a aproximação hierárquica cúbica tem-se,

$$\hat{\phi} = \sum_{i=1}^4 N_i a_i + \sum_{i=5}^8 N_i a_i + \sum_{i=9}^{12} N_i a_i \quad (\text{II.40})$$

com N_i ($i \leq 8$) dadas por (II.37) e (II.39) e N_i ($i = 9, 10, 11, 12$) iguais a:

$$\begin{aligned} N_9 &= 1/6 (1+s) (r^3-r) \\ N_{10} &= 1/6 (1-r) (s^3-s) \\ N_{11} &= 1/6 (1-s) (r^3-r) \\ N_{12} &= 1/6 (1+r) (s^3-s) \end{aligned} \quad (\text{II.41})$$

Para estas funções, as incógnitas hierárquicas relacionam-se às incógnitas **standard** de maneira semelhante ao caso unidimensional. Por exemplo, no lado 2-1 do elemento tem-se:

$$a_5 = \frac{1}{2} (a_1 + a_2) - \hat{\phi} \Big|_{\substack{r=0 \\ s=1}} \quad (\text{II.42})$$

$$a_9 = -3 \left[\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r} \Big|_{\substack{r=0 \\ s=1}} + \frac{1}{2} (a_2 - a_1) \right] \quad (\text{II.43})$$

As funções de interpolação definidas por (II.37), (II.39) e (II.41) garantem apenas continuidade C^0 entre elementos. WANG, KATZ e SZABO [5] desenvolveram um elemento triangular hierárquico de continuidade C^1 para problemas de flexão de placas.

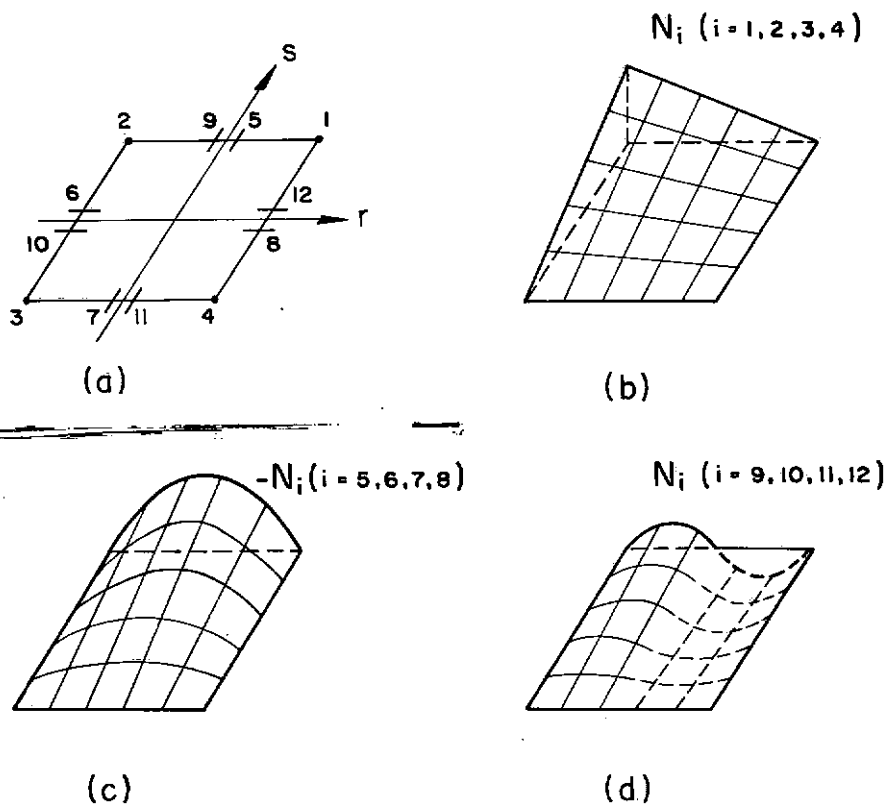


Figura II.6 - (a) Elemento quadrilátero bidimensional
 (b) Funções **standard** bilineares
 (c) Funções hierárquicas quadráticas
 (d) Funções hierárquicas cúbicas

II.2.2 - Refinamento h

Denomina-se versão h do MEF ao refinamento da malha através da introdução de elementos menores, mantendo-se inalterado o grau dos polinômios usados (GAGO [4]). Na Figura II.7 apre-

senta-se um elemento hierárquico unidimensional para refinamento h .

As funções de interpolação deste elemento são dadas por:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= 1/2 (1-r) \\
 N_2 &= 1/2 (1+r) \\
 N_3 &= \begin{cases} 1+r & \text{para } r \leq 0 \\ 1-r & \text{para } r > 0 \end{cases} \\
 N_4 &= \begin{cases} 2(1+r) & \text{para } r \leq -1/2 \\ -2r & \text{para } -1/2 < r \leq 0 \\ 0 & \text{para } r > 0 \end{cases} \\
 N_5 &= \begin{cases} 0 & \text{para } r < 0 \\ 2r & \text{para } 0 \leq r \leq 1/2 \\ 2(1-r) & \text{para } r > 1/2 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{II.44}$$

Observa-se na Figura II.7 que as incógnitas hierárquicas no refinamento h têm o significado físico de deslocamentos relativos.

Uma vez estabelecidas as funções hierárquicas unidimensionais, torna-se fácil a geração de funções de interpolação para o refinamento h em duas dimensões. A Figura II.8 apresenta uma comparação entre os refinamentos **standard** e hierárquico de um elemento bidimensional. O caso tridimensional é apenas uma extensão dos conceitos aplicados em uma e duas dimensões.

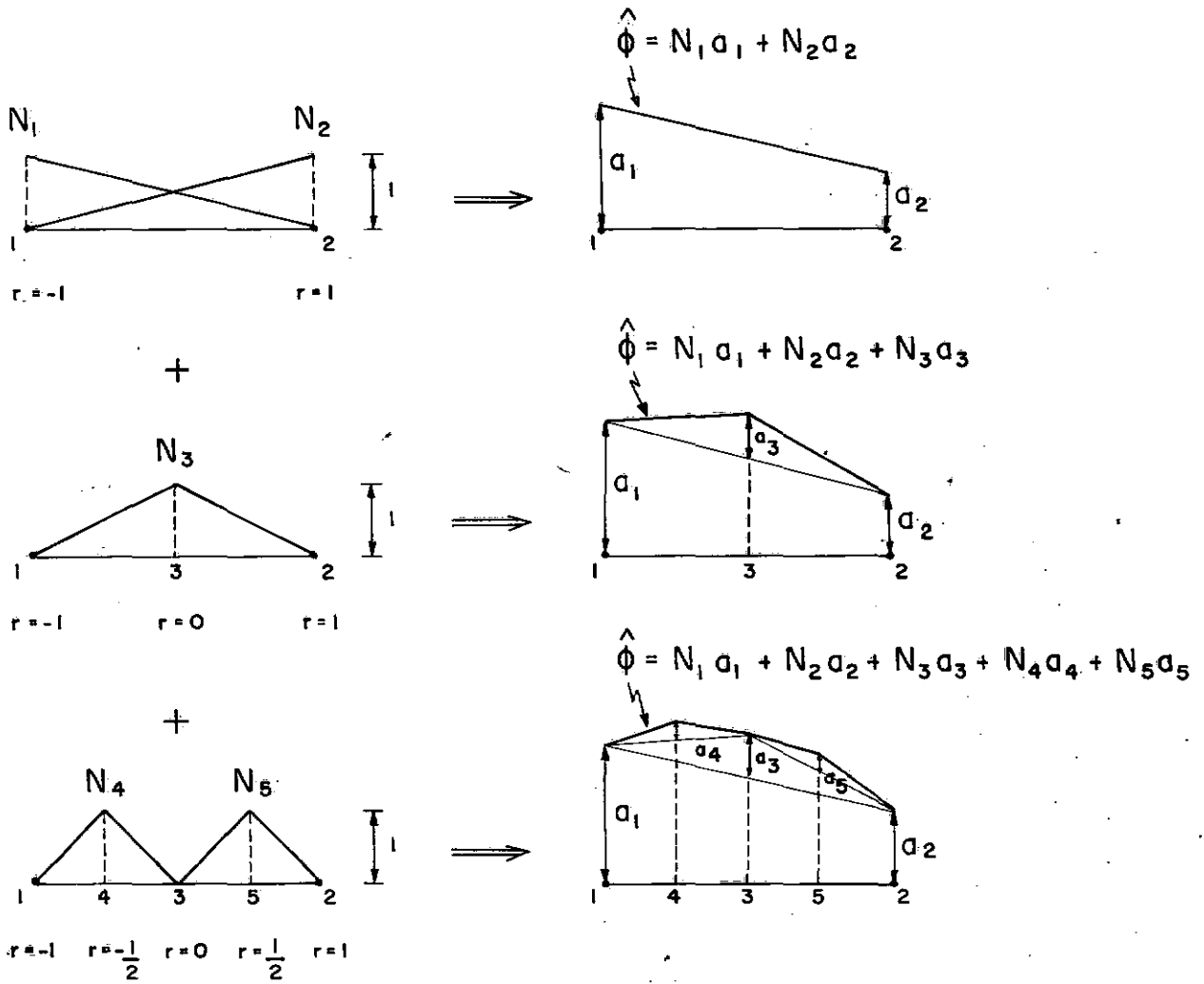
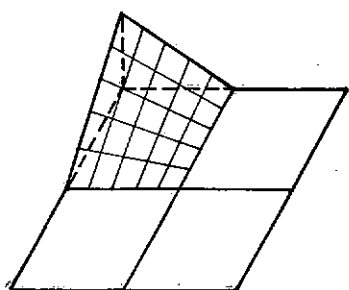
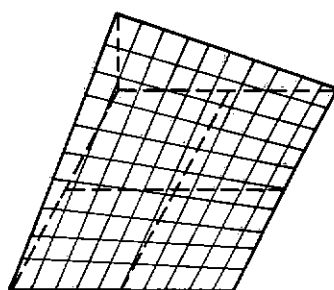
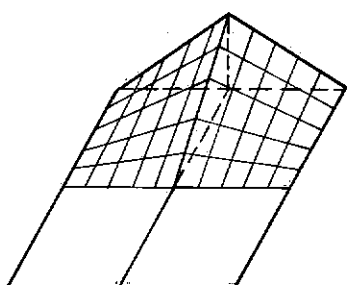
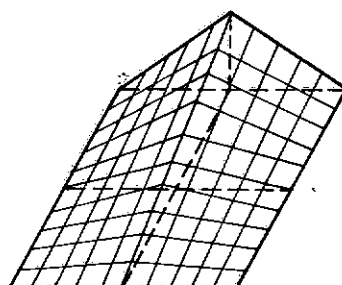
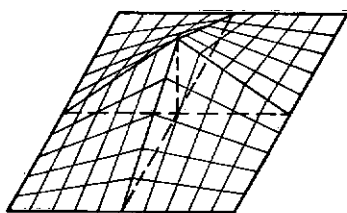
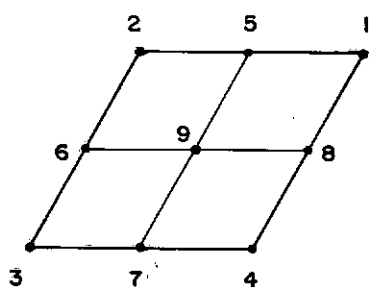
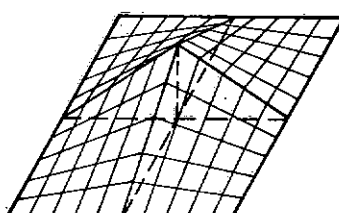
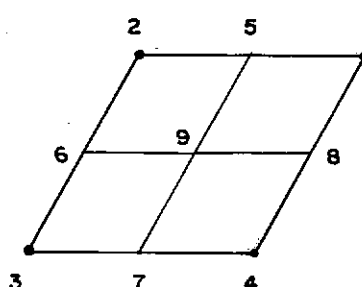


Figura II.7 - Funções de interpolação hierárquicas unidimensionais para refinamento h

$N_i (i=1,2,3,4)$  $N_i (i=1,2,3,4)$  $N_i (i=5,6,7,8)$  $N_i (i=5,6,7,8)$  N_9  N_9 

(a)



(b)

Figura II.8 - Funções de interpolação bidimensionais para refinamento h :

(a) **standard**(b) **hierárquicas**

II.2.3 - Vantagens da Formulação Hierárquica

Primeiramente, a formulação hierárquica do MEF apresenta a vantagem de fornecer sistemas de equações mais bem condicionados do que a formulação **standard**. Isto se deve a maior ortogonalidade entre funções hierárquicas, resultando em matrizes de rigidez predominantemente diagonais (ZIENKIEWICZ [3]). No trabalho de GAGO [4] encontram-se exemplos de comparação de condicionamento de matrizes de rigidez utilizando-se ambas as formulações.

A segunda vantagem da formulação hierárquica é que as informações correspondentes a um nível de discretização são mantidas quando o problema é refinado (ver equação II.19). Esta característica, associada a sistemas com melhor condicionamento favorecem a utilização de métodos iterativos de resolução de sistemas de equações (ZIENKIEWICZ [6]).

Uma vez definidas as versões p e h do MEF, surge a questão da necessidade ou não do refinamento de uma solução. Será visto no capítulo seguinte que a formulação hierárquica facilita o cálculo de medidas de erro **a-posteriori**.

Além da bibliografia referenciada neste capítulo, informações a respeito de formulações hierárquicas, bem como refinamentos de malha e de polinômio podem ser encontradas no trabalho de CAREY e ODEN [7].

CAPÍTULO III

ANÁLISE DE ERROS

III.1 - INTRODUÇÃO

Ao empregar-se um método numérico tal como o Método dos Elementos Finitos (MEF) na resolução de um problema físico, ocorrem três tipos de erro. O primeiro e mais importante é o erro devido à discretização, que se traduz no não cumprimento das equações diferenciais que regem o problema. O segundo corresponde aos erros de truncamento ocorridos durante o cálculo computacional, os quais podem ser minimizados utilizando-se computadores de alta precisão. O terceiro tipo de erro é causado pelas simplificações envolvidas na construção do modelo matemático representativo do problema.

Neste capítulo trata-se do primeiro tipo de erro, ou seja, dos erros provenientes da discretização de um problema. Para um estudo mais criterioso da questão, recomenda-se a leitura dos trabalhos de GAGO [4], CAREY [7], ODEN [8], BABUSKA [9] e KELLY [10].

III.2 - MEDIDAS DE ERRO

Seja o problema linear independente do tempo definido por,

$$L\phi + p = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (\text{III.1})$$

$$M\phi = 0 \quad \text{em } \Gamma_1 \quad (\text{III.2})$$

$$N\phi + q = 0 \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (\text{III.3})$$

onde L , M e N são operadores diferenciais lineares.

Como já foi dito anteriormente, o MEF consiste em determinar uma solução aproximada na forma,

$$\tilde{\phi} = \sum_{i=1}^n N_i a_i \quad (\text{III.4})$$

O erro associado a uma aproximação deste tipo é uma função e definida como sendo a diferença entre a solução exata e a solução aproximada,

$$e = \phi - \hat{\phi} \quad (\text{III.5})$$

Por outro lado, a magnitude de uma função g definida em um domínio Ω é medida através do número real $\|g\|$, conhecido por norma de g , com as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \|g\| &\geq 0 \\ \|g\| &= 0 \iff g \equiv 0 \quad \text{em } \Omega \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

Como os erros são funções, é natural que sejam medidos por normas, tais como definidas anteriormente. Uma das normas mais utilizadas é a de energia do erro:

$$\|e\|_E^2 = \int_{\Omega} eLe d\Omega + \int_{\Gamma_2} eNed\Gamma \quad (\text{III.7})$$

Esta norma é representativa da correção com que as equações (III.1) e (III.3) são satisfeitas pela aproximação $\hat{\phi}$, e será adotada ao longo deste trabalho.

Frequentemente procura-se determinar limites superiores das medidas de erro. Isto significa, dado um domínio discretizado por uma malha de elementos finitos de tamanhos iguais a h , estabelecer uma inequação (válida para valores pequenos de h) do tipo (BECKER [1]),

$$\|e\| \leq Ch^p \quad (\text{III.8})$$

onde C é uma constante dependente dos dados do problema, e p é um inteiro que depende da função de interpolação utilizada. O expoente p é chamado de taxa de convergência com relação a norma $\|\cdot\|$ empregada. Se p for positivo, a medida de erro $\|e\|$ se aproxima de zero quando o tamanho h dos elementos tende a zero. Diz-se então que a aproximação converge na norma $\|\cdot\|$. O fato de se ter convergência em relação a uma determinada norma não significa que o mesmo ocorra quando se emprega outras normas. A noção de convergência está, pela própria definição, associada a uma norma (REKTORYS [11]).

Estimativas de erro do tipo (III.8) são chamadas **a-priori**, uma vez que podem ser obtidas antes de se calcular a solução. Por outro lado, quando avaliadas a partir de informa-

ções fornecidas pela solução aproximada, denominam-se estimativas de erro **a-posteriori**.

III.3. - RESÍDUOS

A solução aproximada introduz resíduos nas equações (III.1) e (III.3),

$$L\hat{\phi} + p = r \quad \text{em } \Omega \quad (\text{III.9})$$

$$N\hat{\phi} + q = \xi \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (\text{III.10})$$

sendo r e ξ os resíduos no domínio e no contorno Γ_2 respectivamente.

É possível estabelecer então uma relação entre os resíduos r, ξ e a energia do erro $\|e\|_E^2$, considerando-se as equações (III.1), (III.3), (III.5), (III.9) e (III.10):

$$Le = L(\phi - \hat{\phi}) = L\phi - L\hat{\phi} = -p - (-p + r) = -r \quad (\text{III.11})$$

$$Ne = N(\phi - \hat{\phi}) = N\phi - N\hat{\phi} = -q - (-q + \xi) = -\xi \quad (\text{III.12})$$

e a partir de (III.7),

$$\|e\|_E^2 = -\int_{\Omega} e r d\Omega - \int_{\Gamma_2} e \xi d\Gamma \quad (\text{III.13})$$

Imaginando um sistema de forças e deslocamentos, pode-se interpretar fisicamente a energia do erro como sendo o trabalho realizado pelas forças residuais de volume r e de superfície ξ em um campo de deslocamentos definido por e .

Com o intuito de evidenciar alguns aspectos dos resíduos r e ξ , considere-se o modelo matemático:

$$-\frac{\partial}{\partial x} (a(x,y)\frac{\partial \phi}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y} (a(x,y)\frac{\partial \phi}{\partial y}) + b(x,y)\phi(x,y) + f(x,y) = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (\text{III.14})$$

ou de forma compacta,

$$-\nabla \cdot (a\nabla \phi) + b\phi + f = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (\text{III.15})$$

com as condições de contorno,

$$\phi = 0 \quad \text{em } \Gamma_1 \quad (\text{III.16})$$

$$a\frac{\partial \phi}{\partial n} = q \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (\text{III.17})$$

onde $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ é a derivada de ϕ na direção da normal externa ao contorno.

Multiplicando (III.15) por funções de ponderação $v \in H^*$ e integrando por partes obtém-se:

$$\int_{\Omega} a(\nabla \phi \cdot \nabla v) d\Omega - \int_{\Gamma_2} qv d\Gamma + \int_{\Omega} b\phi v d\Omega + \int_{\Omega} f v d\Omega = 0, \quad \forall v \in H^* \quad (\text{III.18})$$

sendo H^* o espaço das funções com derivadas primeiras de quadrado integrável e que se anulam em Γ_1 .

A solução por elementos finitos é obtida introduzindo-se em (III.18) uma aproximação $\hat{\phi}$ de continuidade C^0 fazendo $v = N_j$ ($j=1,2,\dots,n$):

$$\int_{\Omega} a(\nabla\hat{\phi} \cdot \nabla N_j) d\Omega - \int_{\Gamma_2} q N_j d\Gamma + \int_{\Omega} b\hat{\phi} N_j d\Omega + \int_{\Omega} f N_j d\Omega = 0 \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (\text{III.19})$$

Supõe-se que as funções N_j sejam continuamente diferenciáveis no interior dos elementos e tenham derivadas descontínuas nas interfaces dos elementos.

Chega-se a estas mesmas equações (III.19) ponderando-se os resíduos r e ξ no domínio e no contorno Γ_2 respectivamente em relação a n funções $v = N_j$:

$$\int_{\Omega} r N_j d\Omega + \int_{\Gamma_2} \xi N_j d\Gamma = 0 \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (\text{III.20})$$

Os resíduos r e ξ são dados por,

$$r = -\nabla \cdot (a \nabla \hat{\phi}) + b \hat{\phi} + f \quad \text{em } \Omega \quad (\text{III.21})$$

$$\xi = a \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial n} - q \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (\text{III.22})$$

Substituindo estas expressões em (III.20) com $N_j = v$,

$$\int_{\Omega} r v d\Omega + \int_{\Gamma_2} \xi v d\Gamma = \int_{\Omega} (-\nabla \cdot (a \nabla \hat{\phi}) + b \hat{\phi} + f) v d\Omega + \int_{\Gamma_2} (a \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial n} - q) v d\Gamma \quad (\text{III.23})$$

e integrando por partes obtém-se,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} r v d\Omega + \int_{\Gamma_2} \xi v d\Gamma &= \int_{\Omega} a(\underline{\nabla}\hat{\phi} \cdot \underline{\nabla}v) d\Omega - \int_{\Gamma_2} a \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial n} v d\Gamma + \int_{\Omega} b \hat{\phi} v d\Omega + \\
+ \int_{\Omega} f v d\Omega + \int_{\Gamma_2} (a \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial n} - q) v d\Gamma &= \int_{\Omega} a(\underline{\nabla}\hat{\phi} \cdot \underline{\nabla}v) d\Omega - \int_{\Gamma_2} q v d\Gamma + \\
+ \int_{\Omega} b \hat{\phi} v d\Omega + \int_{\Omega} f v d\Omega & \quad (III.24)
\end{aligned}$$

Observe-se que,

$$\int_{\Omega} r v d\Omega + \int_{\Gamma_2} \xi v d\Gamma = 0 \quad \text{com } v = N_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (III.25)$$

corresponde às equações (III.19) e que,

$$\int_{\Omega} r v d\Omega + \int_{\Gamma_2} \xi v d\Gamma \quad (III.26)$$

não se anula para toda função $v \in H^*$

Retornando à equação (III.24), integrando por partes a primeira parcela do lado direito e efetuando as integrais elemento por elemento tem-se que,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} r v d\Omega + \int_{\Gamma_2} \xi v d\Gamma &= \sum_i \int_{\Omega_i} -\underline{\nabla} \cdot (a \underline{\nabla} \hat{\phi}) v d\Omega + \sum_j \int_{\Gamma_j \cap \Gamma} [J(a \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial n})] v d\Gamma + \\
+ \sum_j \int_{\Gamma_j \subset \Gamma_2} a \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial n} v d\Gamma - \sum_j \int_{\Gamma_j \subset \Gamma_2} q v d\Gamma + \sum_i \int_{\Omega_i} b \hat{\phi} v d\Omega + \sum_i \int_{\Omega_i} f v d\Omega, \quad \forall v \in H^* & \quad (III.27)
\end{aligned}$$

sendo $J(a \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial n}) = \rho_j$ o salto ou descontinuidade de $a \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial n}$ nas interfaces dos elementos.

Finalmente, reagrupando os termos de (III.20) pode-se escrever,

$$\int_{\Omega} r v d\Omega + \int_{\Gamma_2} \xi v d\Gamma = \sum_i \int_{\Omega_i} [-\underline{\nabla} \cdot (a \underline{\nabla} \hat{\phi}) + b \hat{\phi} + f] v d\Omega + \sum_j \int_{\Gamma_j} \rho_j v d\Gamma + \sum_j \int_{\Gamma_j \subset \Gamma_2} (a \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial n} - q) v d\Gamma, \quad \forall v \in H^* \quad (\text{III.28})$$

Esta expressão corresponde a formulação variacional do problema:

$$(-\underline{\nabla} \cdot (a \underline{\nabla} \hat{\phi}) + b \hat{\phi} + f) \Big|_{\Omega_i} + \rho = -r \quad \text{em } \Omega \quad (\text{III.29})$$

$$a \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial n} - q = \xi \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (\text{III.30})$$

onde,

$$(-\underline{\nabla} \cdot (a \underline{\nabla} \hat{\phi}) + b \hat{\phi} + f) \Big|_{\Omega_i} = r_i \quad (\text{III.31})$$

e,

$$\rho = \delta_j \rho_j = \delta_j [J(a \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial n})] \quad (\text{III.32})$$

sendo δ_j a função de Dirac concentrada nas interfaces dos elementos.

Observando (III.29) e (III.30) verifica-se que a solução aproximada $\hat{\phi}$ satisfazendo as condições de contorno em Γ_1 corresponde a solução exata do problema original com perturbações introduzidas nas parcelas f e q :

$$-\nabla \cdot (a \nabla \hat{\phi}) + b \hat{\phi} + f^* = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (\text{III.33})$$

$$a \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial n} = q^* \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (\text{III.34})$$

sendo,

$$f^* = f - r = f - r_i - \rho \quad (\text{III.35})$$

$$q^* = q + \xi \quad (\text{III.36})$$

Por sua vez, de acordo com (III.11) e (III.12), o erro é solução do problema original com r e $-\xi$ no lugar de f e q :

$$-\nabla \cdot (a \nabla e) + be + r = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (\text{III.37})$$

$$e = 0 \quad \text{em } \Gamma_1 \quad (\text{III.38})$$

$$a \frac{\partial e}{\partial n} = -\xi \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (\text{III.39})$$

Na analogia com um sistema de forças e deslocamentos, as forças residuais r são compostas por uma parcela ρ concentrada nas interfaces dos elementos e por uma parte r_i distribuída no interior dos elementos. O resíduo ξ corresponde às forças de superfície em Γ_2 .

Finalmente, de (III.25) pode-se dizer que o erro global é auto-equilibrado, isto é,

$$\int_{\Omega} r v d\Omega = - \int_{\Gamma_2} \xi v d\Gamma \quad (\text{III.40})$$

ou,

$$\sum_i \int_{\Omega_i} r_i v d\Omega + \sum_j \int_{\Gamma_j} \rho_j v d\Gamma = - \int_{\Gamma_2} \xi v d\Gamma \quad (\text{III.41})$$

A validade desta expressão implica no equilíbrio global entre forças aplicadas e reações.

III.4 - MEDIDAS DE ERRO "A-POSTERIORI"

Como foi definido no item (III.2), medidas de erro **a-posteriori** são aquelas obtidas com base na própria solução cujo erro deseja-se estimar. Utilizando a formulação hierárquica do MEF, apresenta-se a seguir um procedimento para obtenção de medidas de erro **a-posteriori** (ZIENKIEWICZ [6]).

Conhecendo-se duas soluções sucessivas, com n e $n+m$ graus de liberdade, o erro pode ser estimado como sendo a diferença entre estas duas aproximações,

$$e \approx \hat{\phi}_{n+m} - \hat{\phi}_n \quad (\text{III.42})$$

Entretanto, este erro pode ser obtido sem o recurso de se calcular a segunda solução. Sendo $\hat{\phi}_n$ e $\hat{\phi}_{n+m}$ dados por,

$$\hat{\phi}_n = \tilde{N}_n \tilde{a}_n^0 \quad (\text{III.43})$$

$$\hat{\phi}_{n+m} = \tilde{N}_n \tilde{a}_n + \tilde{N}_m \tilde{a}_m \quad (\text{III.44})$$

uma aproximação para o erro em (III.42) pode ser obtida com a primeira iteração para \tilde{a}_m , dada pela equação (II.20),

$$\tilde{a}_m^1 = \tilde{K}_{mm}^{-1} (\tilde{f}_m - \tilde{K}_{mn} \tilde{a}_n^0) \quad (\text{III.45})$$

Com o resultado acima, e considerando-se $\tilde{a}_n \approx \tilde{a}_n^0$ em (III.44), obtém-se a seguinte estimativa,

$$e \approx \tilde{N}_m \tilde{a}_m^1 = \tilde{N}_m \tilde{K}_{mm}^{-1} (\tilde{f}_m - \tilde{K}_{mn} \tilde{a}_n^0) \quad (\text{III.46})$$

Refinando uma solução \tilde{a}_n (com n graus de liberdade) introduzindo-se apenas um grau de liberdade, a energia do erro será igual a (ver equação III.13),

$$\|e_{n+1}\|_E^2 = - \int_{\Omega} e_{n+1} r d\Omega - \int_{\Gamma_2} e_{n+1} \xi d\Gamma \quad (\text{III.47})$$

e com a aproximação de e_{n+1} dada por (III.46),

$$e_{n+1} \approx \tilde{N}_{n+1} (f_{n+1} - \tilde{K}_{n+1,n} \tilde{a}_n^0) / K_{n+1,n+1} \quad (\text{III.48})$$

o valor aproximado de $\|e_{n+1}\|_E^2$ se escreve,

$$\|e_{n+1}\|_E^2 \approx u_{n+1}^2 = \left[(f_{n+1} - \tilde{K}_{n+1,n} \tilde{a}_n^0) / K_{n+1,n+1} \right] \left(- \int_{\Omega} \tilde{N}_{n+1} r d\Omega - \int_{\Gamma_2} \tilde{N}_{n+1} \xi d\Gamma \right) \quad (\text{III.49})$$

Mas de acordo com (III.20) tem-se que,

$$-\int_{\Omega} N_{n+1} r d\Omega - \int_{\Gamma_2} N_{n+1} \xi d\Gamma \equiv f_{n+1} - K_{n+1, n} a_n^0 \quad (\text{III.50})$$

e finalmente, substituindo este resultado em (III.49) obtém-se:

$$\|e_{n+1}\|_E^2 \approx \mu_{n+1}^2 = \frac{(f_{n+1} - K_{n+1, n} a_n^0)^2}{K_{n+1, n+1}} \quad (\text{III.51})$$

ou,

$$\|e_{n+1}\|_E^2 \approx \mu_{n+1}^2 = \frac{(\int_{\Omega} N_{n+1} r d\Omega + \int_{\Gamma_2} N_{n+1} \xi d\Gamma)^2}{K_{n+1, n+1}} \quad (\text{III.52})$$

Estas medidas, conhecidas como indicadores de erro, podem ser calculadas separadamente para cada possível novo grau de liberdade, indicando assim onde as correções seriam mais desejáveis. Somando-se todos os indicadores de erro dos m possíveis novos graus de liberdade obtém-se uma estimativa da energia total do erro:

$$\|e\|_E^2 \approx \sum_{i=n+1}^{n+m} \mu_i^2 \quad (\text{III.53})$$

com μ_i^2 dado por,

$$\mu_i^2 = \frac{(f_i - K_{i, n} a_n^0)^2}{K_{i, i}} = \frac{(\int_{\Omega} N_i r d\Omega + \int_{\Gamma_2} N_i \xi d\Gamma)^2}{K_{i, i}} \quad (\text{III.54})$$

CAPÍTULO IV

PROCESSOS AUTO-ADAPTATIVOS

IV.1 - INTRODUÇÃO

Processos auto-adaptativos em elementos finitos (GAGO [13,14]) são algoritmos capazes de minimizar os erros associados a uma solução. Diferem dos programas usuais do MEF por possuírem rotinas de análise de erros (normalmente análises **a-posteriori**) e de refinamento seletivo, baseado na distribuição de erros.

Os programas auto-adaptativos empregam medidas de erro locais (indicadores de erro), que servem para apontar as regiões da malha de elementos finitos com maior carência de refinamento, e medidas globais (estimativas de erro), que fornecem informações a respeito da necessidade ou não de se melhorar a solução. Estes programas podem utilizar refinamento de malha (versão h) ou de polinômio (versão p). A eficiência do tipo de refinamento (h ou p) depende das características do problema analisado (BABUSKA [15,16]), mas BABUSKA e DORR [17] mostram em seu trabalho que a combinação de ambas estratégias fornece melhores aproximações.

O fluxograma de um programa de elementos finitos auto-adaptativo pode ser visto na Figura IV.1.

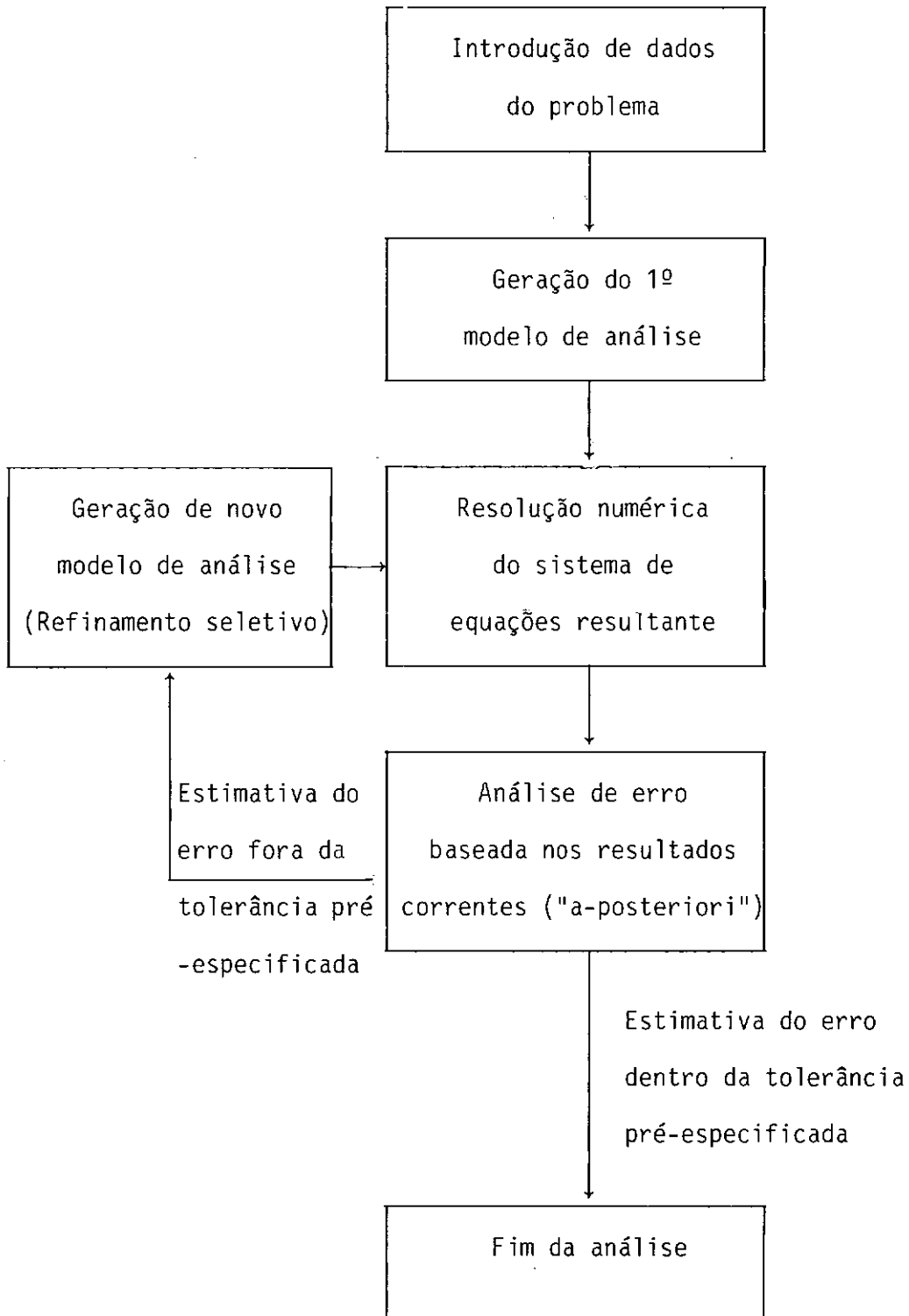


Figura IV.1 - Fluxograma de um programa de elementos finitos auto-adaptativo

IV.2 - UM PROGRAMA AUTO-ADAPTATIVO VERSÃO P

Com os conceitos apresentados, desenvolveu-se neste trabalho em linguagem **Fortran** um programa auto-adaptativo versão p do MEF para análise de problemas de elasticidade estática linear, tais como estado plano, flexão de placas e cascas.

O programa utiliza os indicadores e estimativas de erro apresentados no Capítulo III (ver equações III.53 e III.54), e segue exatamente o fluxograma da Figura IV.1.

Uma vez obtida a primeira solução para o problema analisado, são calculados os indicadores μ para cada grau de liberdade passível de introdução e a estimativa $\|e\|_E^2$ do erro. Se esta estimativa se encontrar fora da tolerância e fornecida como dado de entrada, os valores μ são comparados com uma fração γ , também pré-especificada, do máximo valor dos indicadores, e serão refinados todos os graus de liberdade para os quais $\mu > \gamma \mu_{\max}$. Este procedimento é repetido até que se obtenha um erro menor do que a tolerância e fornecida ao programa. Após sucessivos refinamentos uma distribuição aproximadamente constante de indicadores μ será atingida. Obviamente, quanto mais refinada a malha inicial, mais rapidamente esta situação será atingida. Neste estágio, de distribuição aproximadamente uniforme de indicadores, a malha será ótima no sentido de que para o número de graus de liberdade correspondente tem-se a energia do erro mínima.

Descreve-se a seguir as principais características do programa.

IV.2.1 - Introdução de Dados

Além dos dados gerais do problema, são fornecidos o parâmetro γ e a tolerância e do erro, que definem respectivamente os critérios de refinamento e parada do processo. Deve-se também fornecer a opção de refinamento que se deseja, correspondendo a um dos três seguintes casos:

- i) OPÇÃO 1: refinamento do 1º para o 2º grau
- ii) OPÇÃO 2: refinamento do 2º para o 3º grau
- iii) OPÇÃO 3: refinamento do 1º para o 3º grau

IV.2.2 - Matriz de Rigidez de Elemento

As Figuras IV.2 e IV.3 mostram esquematicamente o elemento hierárquico plano de 4-12 nós (ver também Figura II.6), isoparamétrico, implementado no programa. O elemento de casca poliédrica (ZIENKIEWICZ [18]) é obtido através da superposição dos efeitos de membrana e de flexão, na qual utilizou-se a teoria de Mindlin (HINTON [19]).

Com as funções de interpolação N_i das equações (II.37), (II.39) e (II.41), as aproximações para os deslocamentos são dadas por,

$$\hat{\phi} = \sum_{i=1}^j N_i a_i \quad (IV.1)$$

com j variando de 4 a 12. Deve-se observar que as incógnitas a_i ($i > 4$) não mais terão o significado físico de deslocamentos nodais.

XY, XYZ - Sistemas Globais
de Referência

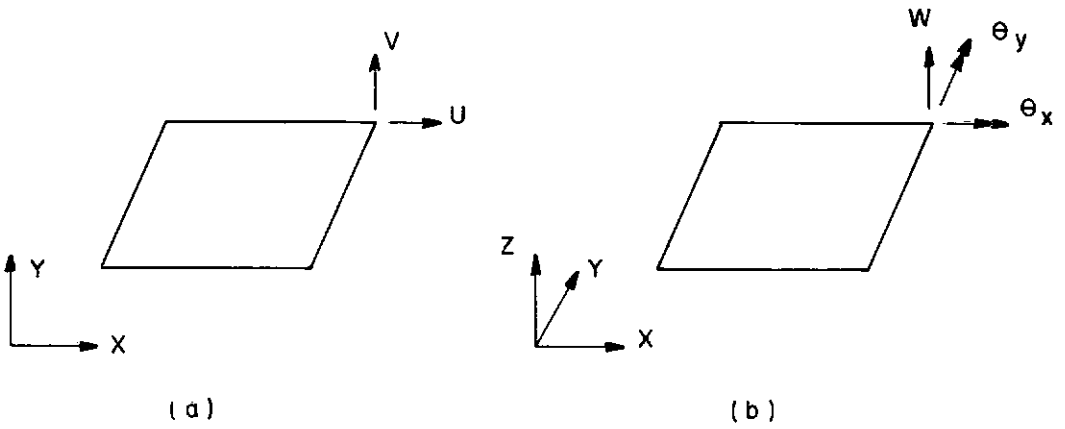


Figura IV.2 - (a) Elemento de estado plano
(b) Elemento de flexão de placas

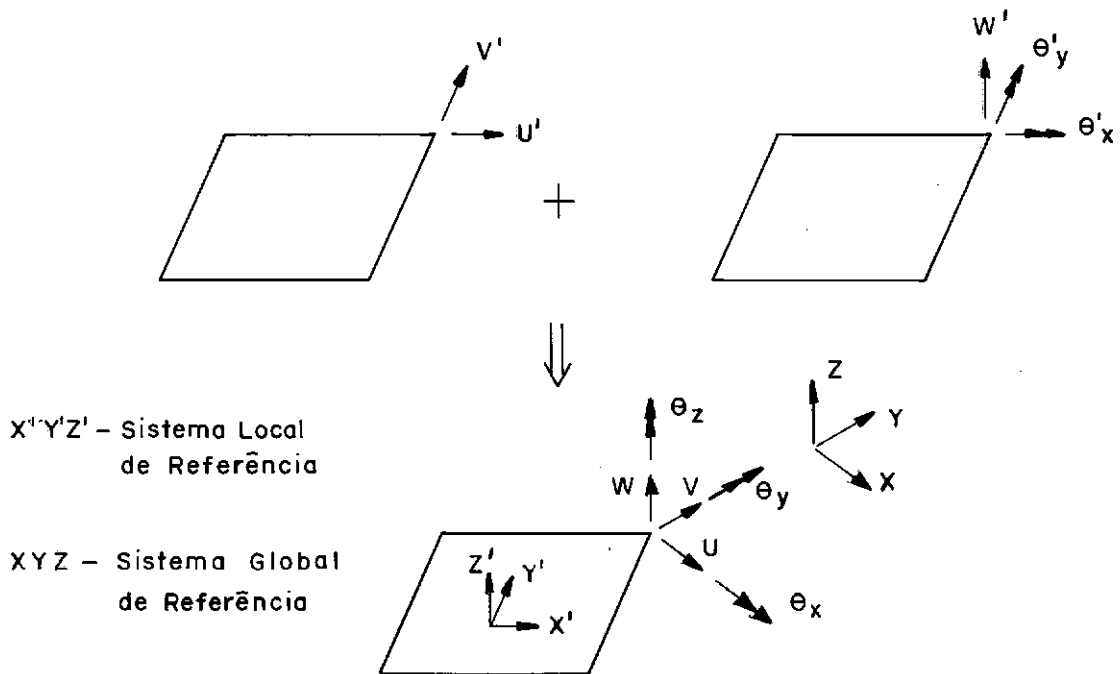


Figura IV.3 - Elemento de casca poliédrica

Efetuada a integração numérica de Gauss (BATHE [20]) obtém-se a matriz de rigidez de elemento \tilde{k}^e ,

$$\tilde{k}^e = \begin{bmatrix} \tilde{k}_{nn}^e & \tilde{k}_{nm}^e \\ \tilde{k}_{mn}^e & \tilde{k}_{mm}^e \end{bmatrix} \quad (IV.2)$$

onde n e m referem-se respectivamente aos graus de liberdade da malha inicial e aos graus de liberdade a serem refinados.

Utiliza-se integração 2x2 no caso da opção 1 de refinamento e 3x3 no caso das opções 2 e 3. Em placas e cascas, as funções de interpolação para os deslocamentos e as rotações são exatamente as mesmas, e as deformações devidas ao esforço cortante são consideradas. No caso de placas e cascas finas a integração deve ser reduzida a fim de evitar o **locking** da matriz de rigidez, isto é, o excesso de rigidez causado pela integração exata que faz com que se obtenham deslocamentos bem menores do que os verdadeiros (HUGHES [21]). Este efeito se faz notar principalmente quando a solução é linear e por este motivo deve-se preferencialmente utilizar a opção 2 de refinamento nas análises de placas e cascas finas. Neste último caso, a integração 3x3 é exata para a solução quadrática e reduzida para a cúbica (PUGH [22]) e os efeitos de **locking** que possam surgir, bem menos acentuados do que no caso linear, serão rapidamente corrigidos pelo refinamento.

Estas matrizes são armazenadas e seus coeficientes serão utilizados à medida em que forem necessários.

IV.2.3 - Solução Inicial

A primeira solução \underline{a}_n^0 com n graus de liberdade correspondente a malha inicial é obtida resolvendo-se o sistema de equações:

$$\underline{K}_{nn} \underline{a}_n^0 = \underline{f}_n \quad (\text{IV.3})$$

sendo \underline{K}_{nn} obtida a partir dos coeficientes das submatrizes \underline{K}_{nn}^e de elemento. A nível de elemento, o índice n refere-se aos graus de liberdade dos nós $i \leq 4$ nas opções 1 e 3 de refinamento e aos nós $i \leq 8$ na opção 2.

Para a resolução do sistema (IV.3) emprega-se o método direto de Cholesky (CRISFIELD [23]), com a matriz \underline{K}_{nn} armazenada em perfil. Depois de resolvido este sistema, \underline{K}_{nn} é armazenada na forma triangularizada para posterior utilização na obtenção de novas soluções, caso haja refinamento.

IV.2.4 - Indicadores e Estimativa de Erro

Após a obtenção de cada solução \underline{a}_n , com n graus de liberdade, são calculados os indicadores de erro segundo a equação (III.54) para o i -ésimo dos m possíveis novos graus de liberdade,

$$\mu_i^2 = \frac{(f_i - \underline{K}_{i,n} \underline{a}_n)^2}{K_{i,i}}, \quad n+1 \leq i \leq n+m \quad (\text{IV.4})$$

sendo \underline{f}_i o vetor de cargas nodais equivalentes correspondentes às novas direções introduzidas hierarquicamente, $\underline{k}_{i,n}$ e $\underline{k}_{i,i}$ obtidos a partir das submatrizes de elemento \underline{k}_{mn}^e e \underline{k}_{mm}^e .

Somando os m indicadores obtém-se a estimativa do erro dada pela norma de energia (ver equação III.53).

$$\|e\|_E^2 = \sum_{i=n+1}^{n+m} \mu_i^2 \quad (IV.5)$$

Se esta medida for maior do que a tolerância ϵ o problema será refinado introduzindo-se os graus de liberdade maiores ou iguais a uma fração γ do máximo indicador de erro,

$$\mu_i \geq \gamma \mu_{\max} \quad (IV.6)$$

IV.2.5 - Soluções Refinadas

Decidido o refinamento, torna-se necessário resolver o sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} \underline{k}_{nn} & | & \underline{k}_{nm} \\ \hline \underline{k}_{mn} & | & \underline{k}_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{a}_n \\ \underline{a}_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{f}_n \\ \underline{f}_m \end{Bmatrix} \quad (IV.7)$$

onde n refere-se aos graus de liberdade da configuração inicial da malha e m às novas direções introduzidas.

Este sistema é resolvido através do procedimento itera

tivo descrito no capítulo II (equações II.20 e II.21),

$$\tilde{a}_m^k = \tilde{K}_{mm}^{-1} (\tilde{f}_m - \tilde{K}_{mn} \tilde{a}_n^{k-1}) \quad (\text{IV.8})$$

$$k = 1, 2, \dots, j$$

$$\tilde{a}_n^k = \tilde{K}_{nn}^{-1} (\tilde{f}_n - \tilde{K}_{nm} \tilde{a}_m^k) \quad (\text{IV.9})$$

onde a primeira iteração para \tilde{a}_m é dada pela solução corrente \tilde{a}_n referida aos n graus de liberdade iniciais, ou seja, pela solução corrente para os deslocamentos nessas direções.

Observe-se que as equações (IV.8) e (IV.9) correspondem para cada valor de k a dois sistemas de equações, com m e n graus de liberdade respectivamente,

$$\tilde{a}_m^k = \tilde{K}_{mm}^{-1} (\tilde{f}_m - \tilde{f}_m^{*k-1}) \quad (\text{IV.10})$$

$$\tilde{a}_n^k = \tilde{K}_{nn}^{-1} (\tilde{f}_n - \tilde{f}_n^{*k}) \quad (\text{IV.11})$$

nos quais as parcelas,

$$\tilde{f}_m^{*k-1} = \tilde{K}_{mn} \tilde{a}_n^{k-1} \quad (\text{IV.12})$$

e,

$$\tilde{f}_n^{*k} = \tilde{K}_{nm} \tilde{a}_m^k \quad (\text{IV.13})$$

são obtidas a nível de elemento.

Estes dois sistemas, assim como é feito para a solução inicial, são resolvidos pelo método de Cholesky, com \tilde{K}_{nn} e \tilde{K}_{mm}

armazenadas em perfil. A matriz \underline{K}_{nn} já foi triangularizada quando da obtenção da primeira solução, reduzindo portanto os gastos computacionais na resolução do sistema (IV.11). Obviamente a matriz \underline{K}_{mm} só é triangularizada na primeira iteração ($k=1$), permanecendo armazenada nesta forma até o fim do procedimento iterativo. O critério de convergência deste procedimento é dado por,

$$\frac{\|\Delta \underline{a}\|}{\|\underline{a}\|} = \sqrt{\frac{\Delta \underline{a}^T \cdot \Delta \underline{a}}{\underline{a}^T \cdot \underline{a}}} \quad (\text{IV.14})$$

sendo $\Delta \underline{a} = \underline{a}^k - \underline{a}^{k-1}$, e $\underline{a} = \underline{a}^k$.

CAPÍTULO V

APLICAÇÕES

V.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentam-se exemplos de resolução de problemas estáticos lineares de elasticidade, utilizando-se o programa auto-adaptativo do MEF desenvolvido neste trabalho (RIBEIRO [24]). Faz-se um estudo da convergência das soluções destes problemas, ilustrando-se o refinamento p das malhas correspondentes.

Apresentam-se exemplos clássicos de elasticidade plana, flexão de placas e cascas, sendo os resultados comparados com soluções analíticas. Por último, realiza-se a análise de distribuição de tensões em uma junta típica de estruturas **offshore** (LANDAU [25;26]), obtendo-se os fatores de concentração numérico e empírico.

Em todos os exemplos adotou-se uma tolerância ϵ para a norma $\|e\|_E^2$ do erro, da ordem de 10^{-15} , a fim de evidenciar o caráter estacionário da solução após ser atingido um determinado número de graus de liberdade.

V.2 - ELASTICIDADE PLANA

Como exemplo de problema de elasticidade plana, analisou-se uma viga em balanço submetida a uma carga concentrada uni

tária na extremidade. Para efeitos de consideração desta carga, aplicou-se uma distribuição parabólica de tensões no extremo da viga. A Figura V.1 ilustra as características físicas e geométricas do problema.

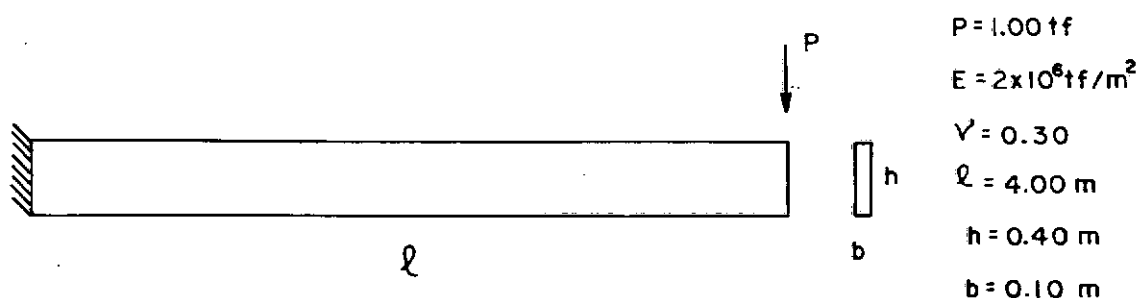


Figura V.1 - Viga em balanço

Optou-se por uma malha de 10 elementos de 4 nós, obtendo-se assim uma solução inicial linear. Com as soluções computadas a cada passo do refinamento (opção 3), construiu-se o gráfico da Figura V.2, representando o deslocamento vertical v da extremidade da viga em função do número de graus de liberdade. A solução convergiu para um valor estacionário igual a 0.01999m , correspondente a 99 graus de liberdade, enquanto que a teoria clássica de vigas fornece 0.02000m para este mesmo deslocamento.

Assim como os deslocamentos, as tensões também convergiram para a solução analítica, como pode ser visto nas Figuras V.3 e V.4. As tensões normais σ_x foram obtidas ao longo de uma linha paralela ao eixo x , distante 0.355m da face inferior da

viga, e as tensões cisalhantes em uma seção distante 2.20m da extremidade engastada.

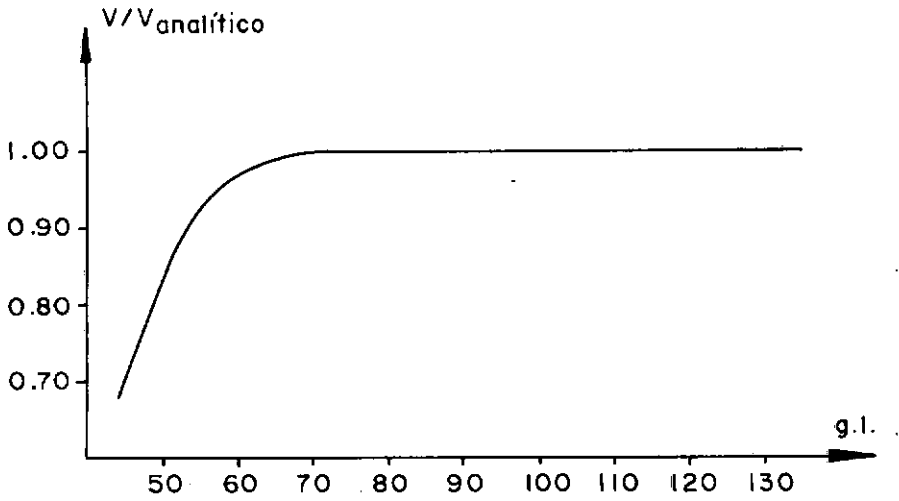


Figura V.2 - Deslocamento vertical da extremidade da viga

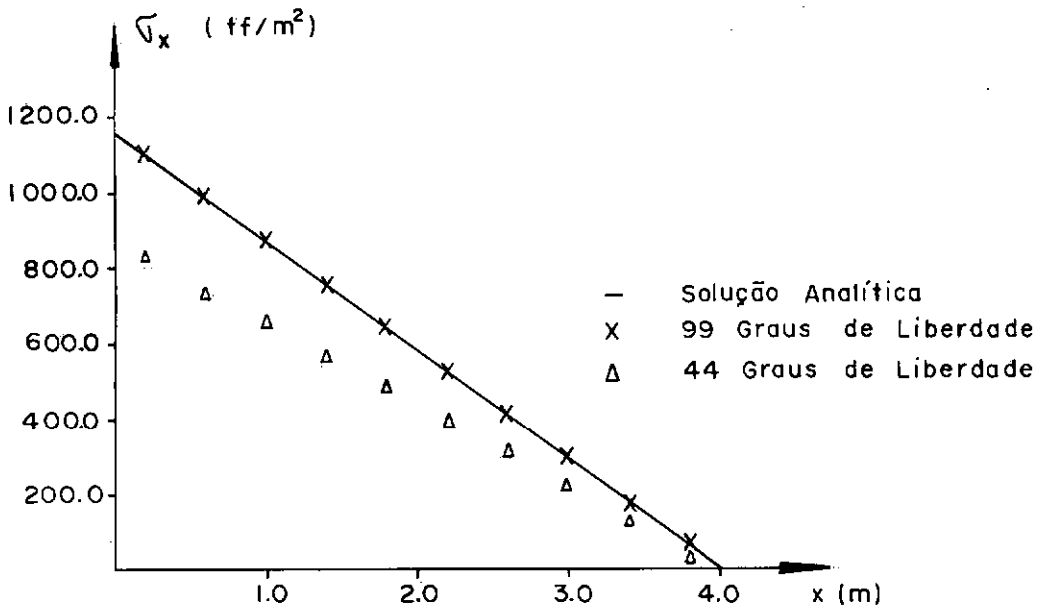


Figura V.3 - Tensões normais σ_x

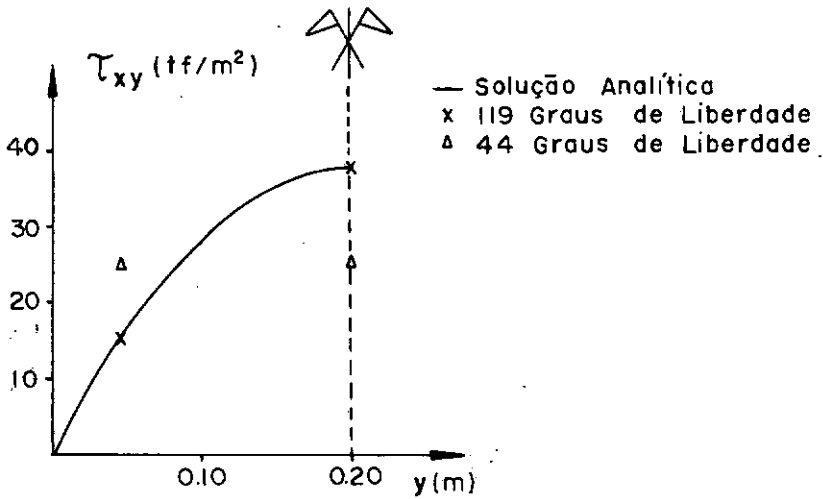


Figura V.4 - Tensões cisalhantes $\tilde{\tau}_{xy}$

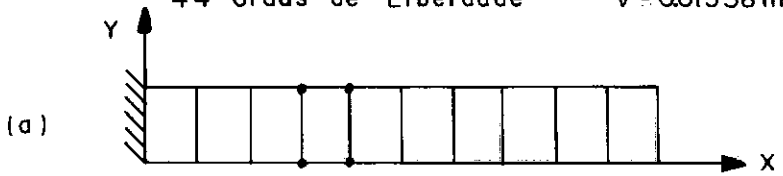
A Figura V.5 mostra a malha inicial e algumas etapas do refinamento seletivo, com $\gamma = 0.50$. Nesta figura, as setas representam os graus de liberdade refinados. Note-se que o problema é refinado inicialmente na região próxima à extremidade engastada, onde ocorrem as maiores tensões, ou seja, na região onde é maior a energia do erro.

Para concluir esta análise apresenta-se na Figura V.6 as estimativas do erro obtidas. Verificou-se que para uma estimativa da ordem de 10^{-6} tanto os deslocamentos como as tensões em toda a viga coincidem com os resultados analíticos segundo a teoria clássica de vigas, com exceção de uma pequena região próxima ao engaste ($\approx 40\text{cm}$) onde surgem ligeiras perturbações, uma vez

Malha Inicial:

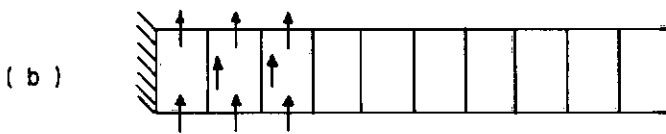
44 Graus de Liberdade

$V = 0.01358 \text{ m}$



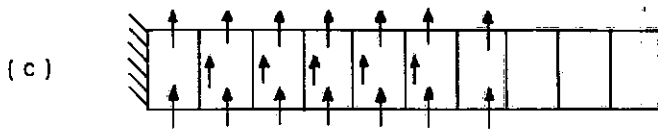
52 Graus de Liberdade

$V = 0.01760 \text{ m}$



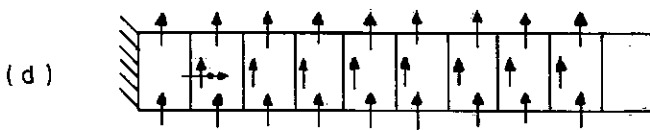
63 Graus de Liberdade

$V = 0.01965 \text{ m}$



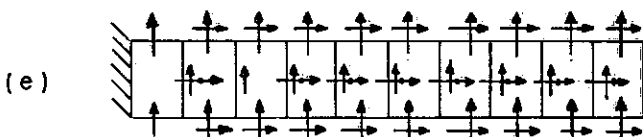
71 Graus de Liberdade

$V = 0.01992 \text{ m}$



99 Graus de Liberdade

$V = 0.01999 \text{ m}$



→ Graus de Liberdade Quadraticos
 → Graus de Liberdade Cúbicos

Figura V.5 - Refinamento seletivo

que as restrições nodais impostas não correspondem a uma distribuição parabólica de tensões cisalhantes.

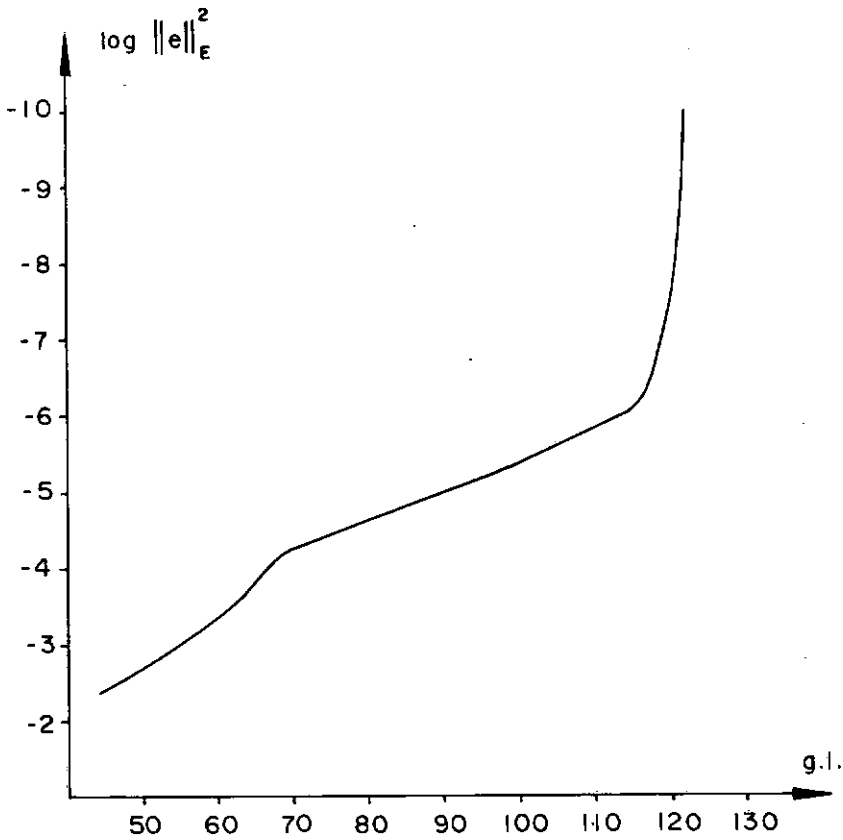


Figura V.6 - Estimativas do erro

V.3 - FLEXÃO DE PLACAS

V.3.1 - Placa Fina

Neste exemplo considera-se uma placa quadrada simplesmente apoiada em todo o contorno, submetida a uma carga concentrada no centro, como mostra a Figura V.7.

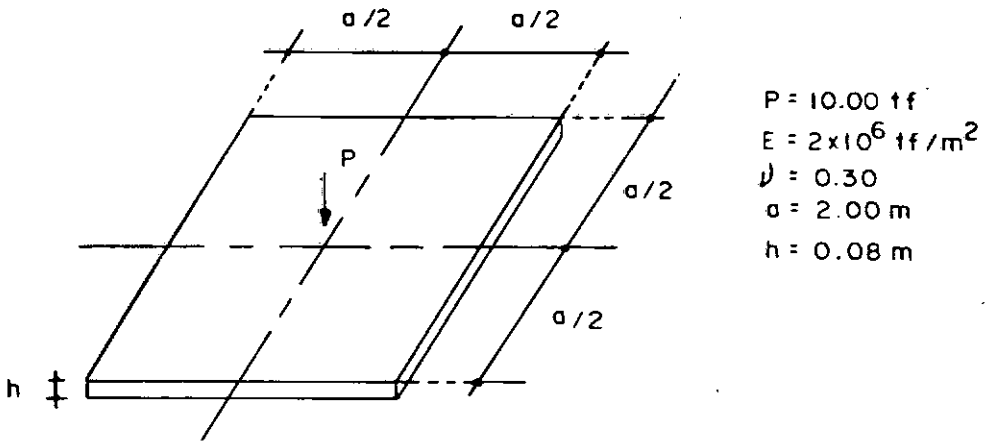


Figura V.7 - Placa fina simplesmente apoiada

Empregou-se a opção 2 de refinamento, com uma malha inicial de 4x4 elementos quadráticos.

O gráfico do deslocamento vertical W no centro da placa em função do número de graus de liberdade pode ser visto na Figura V.8. Verificou-se que a solução convergiu para 0.00499m ao atingirem-se 231 graus de liberdade, sendo que este valor apresenta uma diferença de 1% em relação a solução analítica (TIMOSHENKO [27]) $W=0.00495\text{m}$, que não considera as deformações devidas ao esforço cortante.

Na Figura V.9 tem-se os momentos fletores M_x (em torno do eixo x) na seção $y=0.944\text{m}$. Observa-se que para 247 graus de liberdade estes momentos coincidem com a solução analítica em

série (TIMOSHENKO [27]).

Utilizou-se $\gamma = 0.50$ no refinamento (Figura V.10).

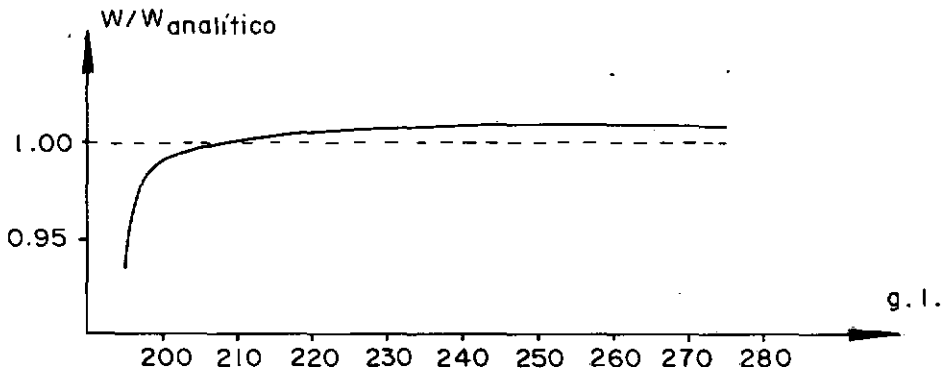


Figura V.8 - Deslocamento vertical no centro da placa

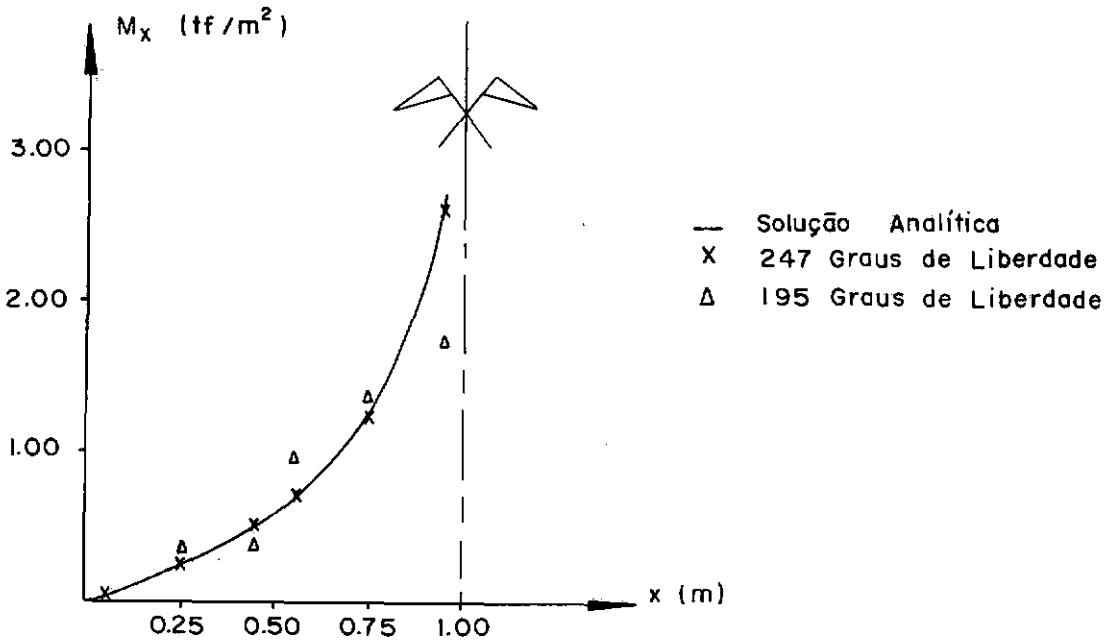
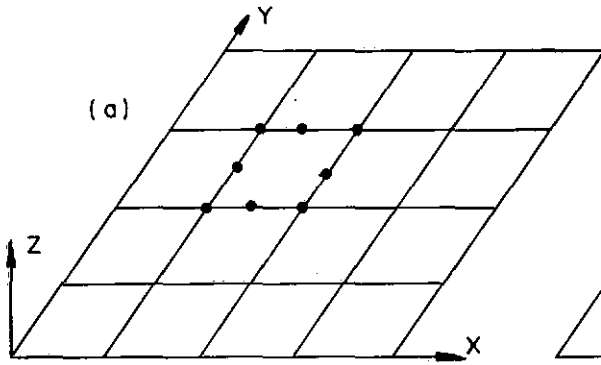


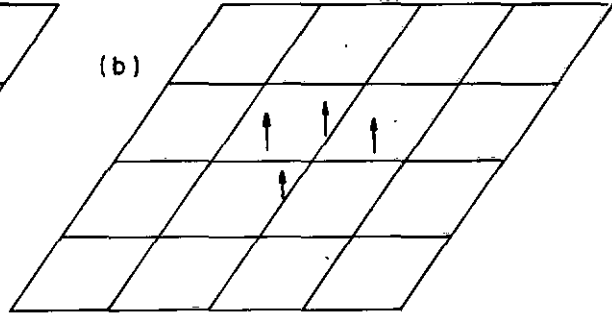
Figura V.9 - Momentos M_x

Malha Inicial:

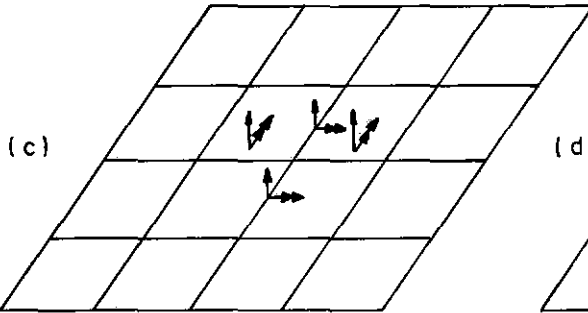
195 Graus de Liberdade
 $W = 0.00463 \text{ m}$



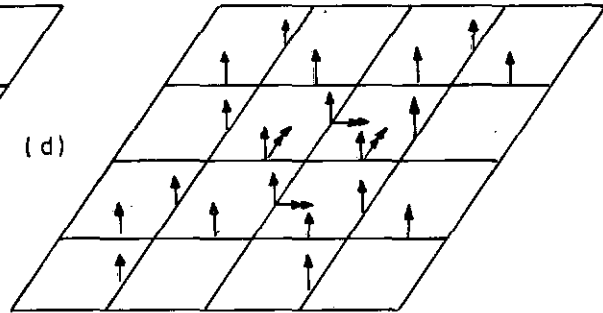
199 Graus de Liberdade
 $W = 0.00489 \text{ m}$



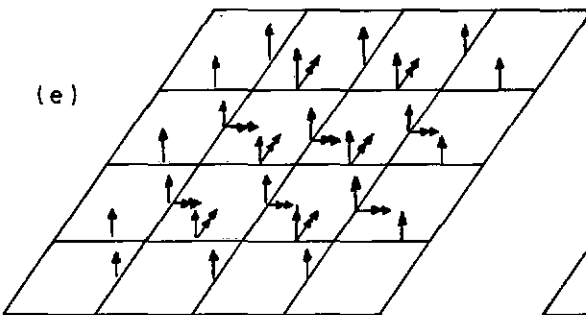
203 Graus de Liberdade
 $W = 0.00493 \text{ m}$



219 Graus de Liberdade
 $W = 0.00498 \text{ m}$



231 Graus de Liberdade
 $W = 0.00499 \text{ m}$



247 Graus de Liberdade
 $W = 0.00499 \text{ m}$

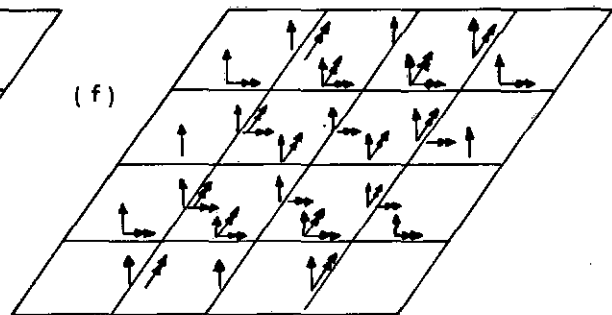


Figura V.10 - Refinamento seletivo

V.3.2 - Placa Espessa

Neste item apresentam-se os resultados da análise de uma placa espessa simplesmente apoiada, submetida a um carregamento uniformemente distribuído (Figura V.11).

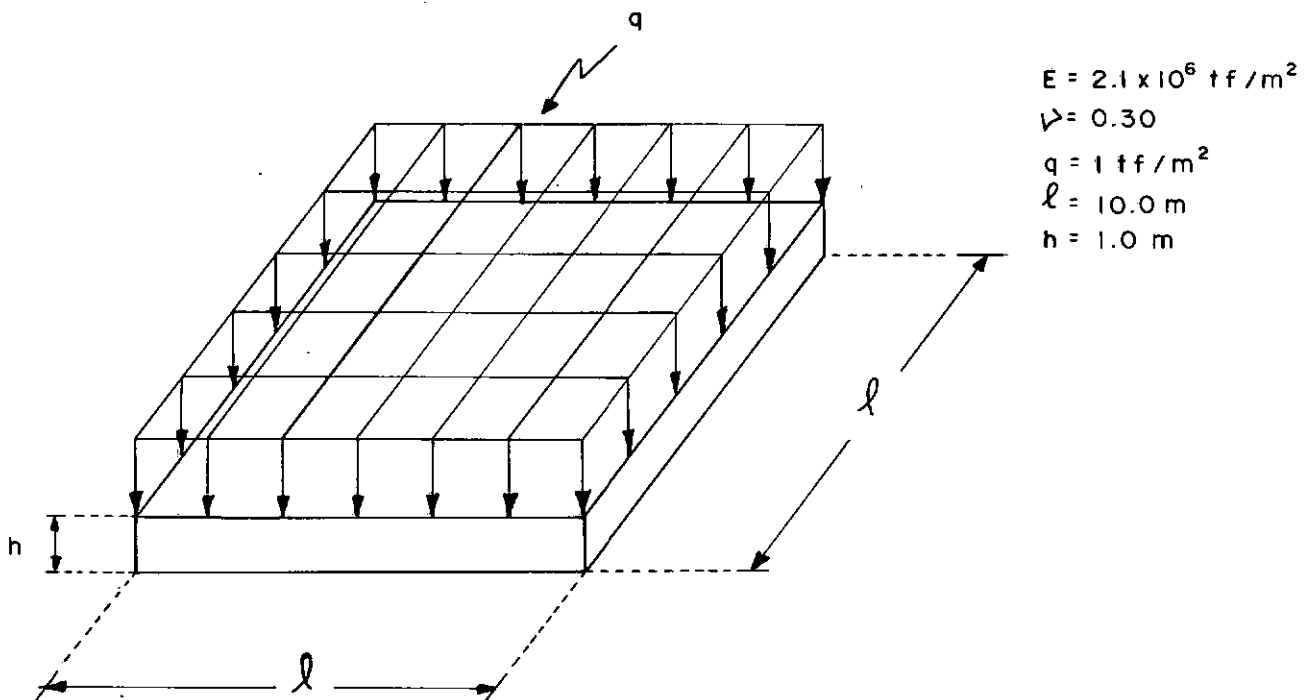


Figura V.11 - Placa espessa simplesmente apoiada

Utilizando a opção 3 de refinamento com $\gamma=0.50$ para uma malha inicial de 4×4 elementos obteve-se o gráfico da Figura V.12, onde são representados os deslocamentos verticais no centro da placa em função do número de graus de liberdade. Obteve-se o valor estacionário $W=0.2215\text{mm}$, correspondendo a uma diferença de 0.5% em relação a solução segundo MIRANDA [28], $W^*=0.2205\text{mm}$. O refinamento seletivo pode ser visto na Figura V.13.

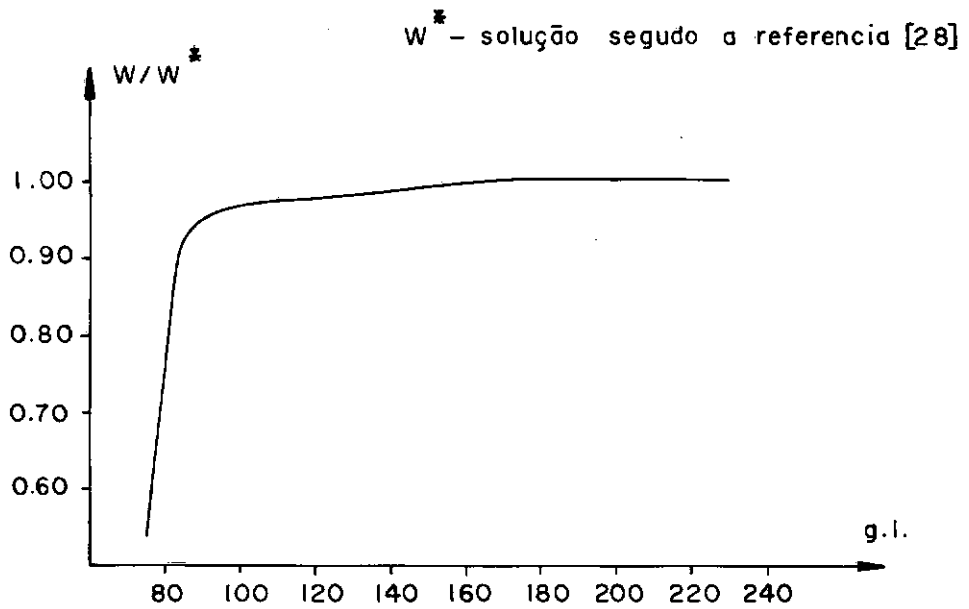
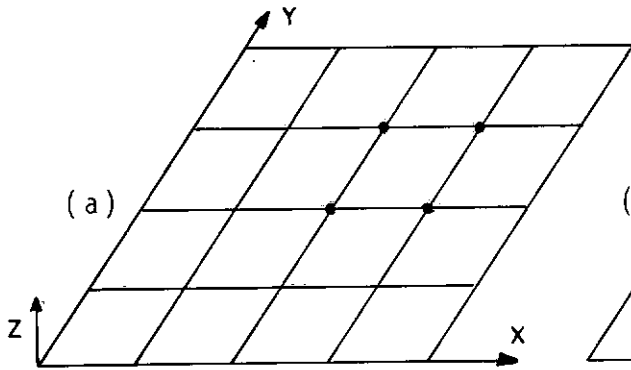


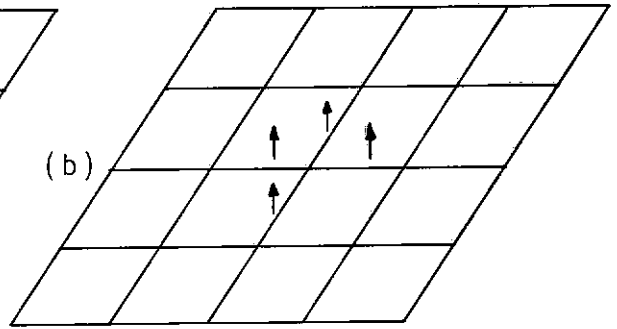
Figura V.12 - Deslocamento vertical no centro da placa

Malha Inicial:

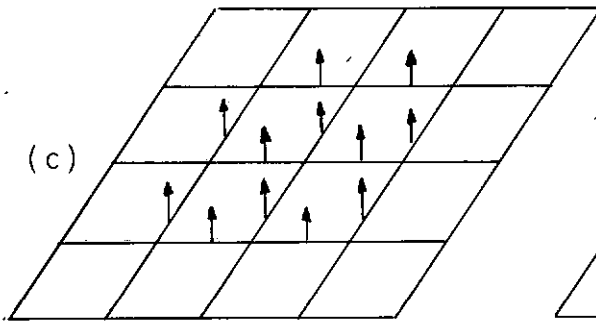
75 Graus de Liberdade
 $W = 0.1187$ mm



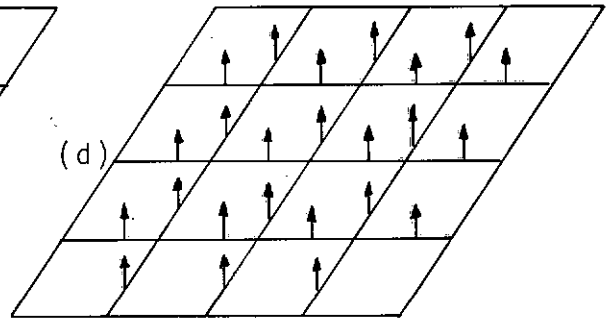
79 Graus de Liberdade
 $W = 0.1526$ mm



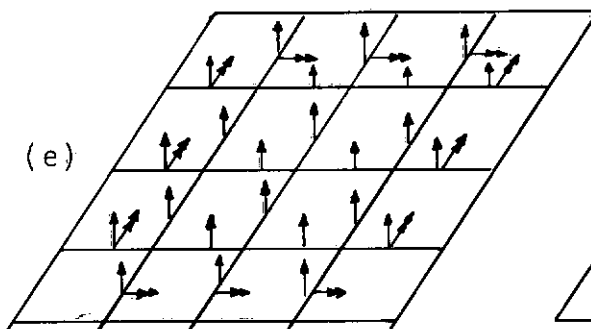
87 Graus de Liberdade
 $W = 0.2063$ mm



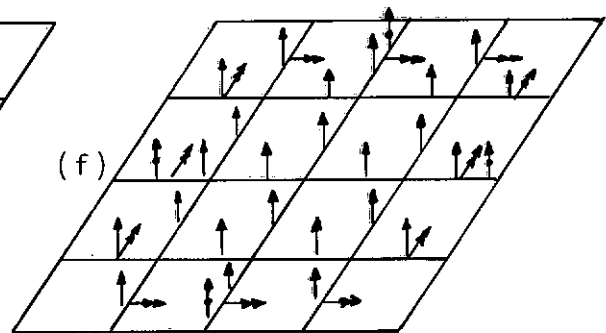
99 Graus de Liberdade
 $W = 0.2135$ mm



111 Graus de Liberdade
 $W = 0.2154$ mm



115 Graus de Liberdade
 $W = 0.2157$ mm





 Graus de Liberdade Quadráticos
 Graus de Liberdade Cúbicos

Figura V.13 - Refinamento seletivo

V.4 - ANÁLISE DE CASCAS

Problema clássico de estruturas espaciais, um cilindro carregado transversalmente pode ser visto na Figura V.14, onde são representadas as características físicas e geométricas do problema.

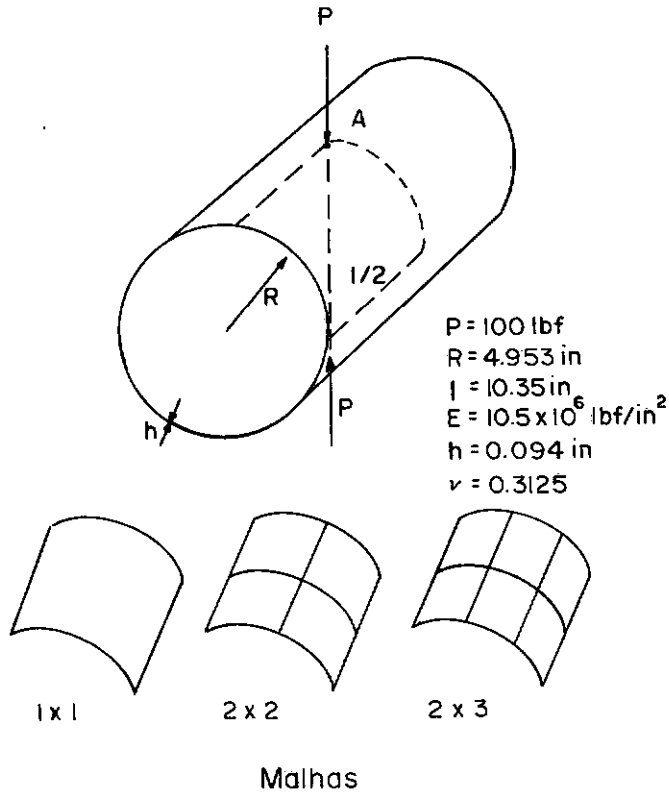


Figura V.14 - Cilindro carregado transversalmente

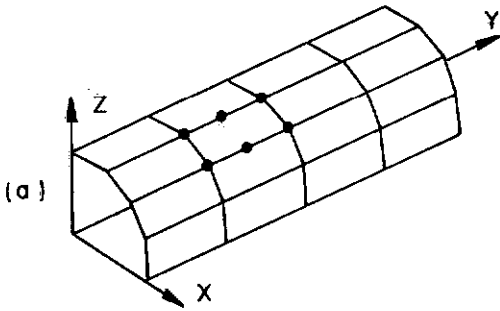
Na Tabela V.1 tem-se os resultados da análise hierárquica e aqueles obtidos utilizando-se outros elementos do tipo **standard**, encontrados nos trabalhos de BOGNER [29], CANTIN [30,31] e ASHWELL [32]. Pode-se observar nesta tabela que a solução hierárquica pa

Tabela V.1 - Deslocamento vertical do ponto A

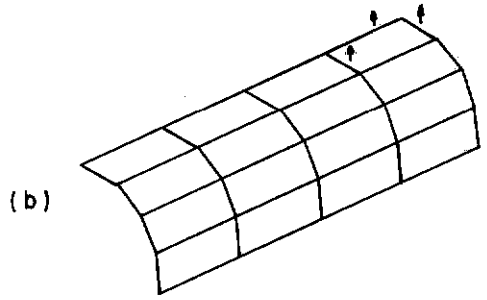
Bogner, For e Schmidt			Cantim e Clough			Cantim			Ashwell e Sabir			Hierárquico		
Malha	Número de equações	Desloc. (in)	Malha	Número de equações	Desloc. (in)	Malha	Número de equações	Desloc. (in)	Malha	Número de equações	Desloc. (in)	Malha	Número de equações	Desloc. (in)
1x1	48	0.0025	1x3	48	0.0297	1x1			1x1	20	0.104	4x4	390	0.1001
1x2	72	0.0802	1x5	72	0.0769	1x4	60	0.1099	1x4	50	0.1106		411	0.1062
1x3	96	0.1026	1x7	96	0.0987	2x2	54	0.0931	2x2	45	0.1103		435	0.1082
1x4	120	0.1087	1x9	120	0.1057	2x4	90	0.1113	2x4	75	0.1117		449	0.1084
2x3	144	0.1036	2x7	144	0.1002	4x4	150	0.1126	4x4	125	0.1129		465	0.1085
2x4	180	0.1098	2x9	180	0.1073	6x6	294	0.1137	6x6	245	0.1135		503	0.1086
			3x49	1200	0.1128	8x8	486	0.1139	8x8	405	0.1137		529	0.1086
						10x10	726	0.1139	10x10	605	0.1137	594	0.1086	

Malha Inicial:

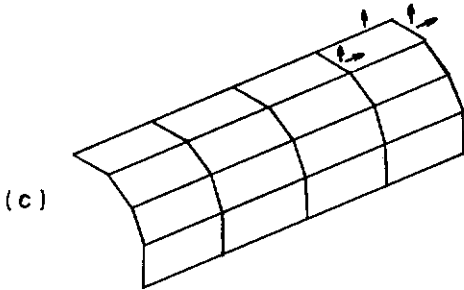
390 Graus de Liberdade
 $W = 0.1001$ in



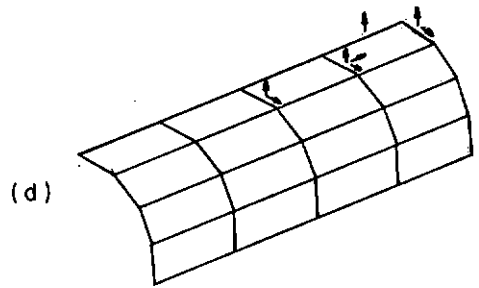
393 Graus de Liberdade
 $W = 0.1011$ in



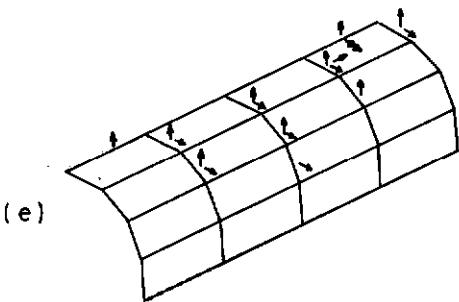
395 Graus de Liberdade
 $W = 0.1024$



398 Graus de Liberdade
 $W = 0.1034$ in



408 Graus de Liberdade
 $W = 0.1055$ in



417 Graus de Liberdade
 $W = 0.1074$

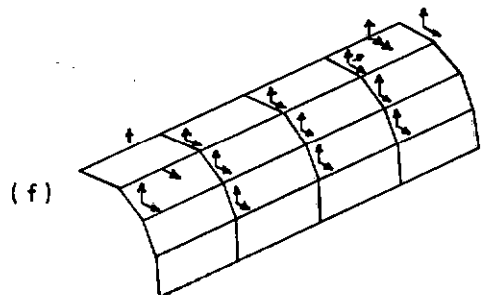


Figura V.15 - Refinamento seletivo

ra o deslocamento vertical do ponto A, com uma malha inicial de 4x4 elementos quadráticos, converge para 0.1086 in, correspondendo a um número de graus de liberdade igual a 503. A solução analítica (TIMOSHENKO [27]) fornece o valor 0.1084 in.

A Figura V.15 mostra a evolução do refinamento seletivo, tendo-se adotado $\gamma=0.25$.

V.5 - ANÁLISE DE UMA JUNTA TÍPICA DE ESTRUTURA OFFSHORE

Uma das aplicações do MEF no campo da engenharia **off-shore** é o cálculo de Fatores de Concentração de Tensões (FCT) em juntas tubulares. Na Figura V.16 pode ser vista uma malha de elementos finitos para uma junta típica de plataforma de perfuração auto-elevatória. Como se observa nesta figura, este tipo de análise requer malhas muito refinadas.

Em juntas tubulares convencionais, o cálculo dos FCT's pode ser feito através de fórmulas empíricas e paramétricas (GIBSTEIN [33], KUANG [34], WORDSWORTH [35], TORRES [36] e MENICONI [37]). Entretanto, em juntas como a da Figura V.16, com características geométricas que impossibilitam o emprego destas fórmulas, torna-se necessária a utilização de métodos numéricos.

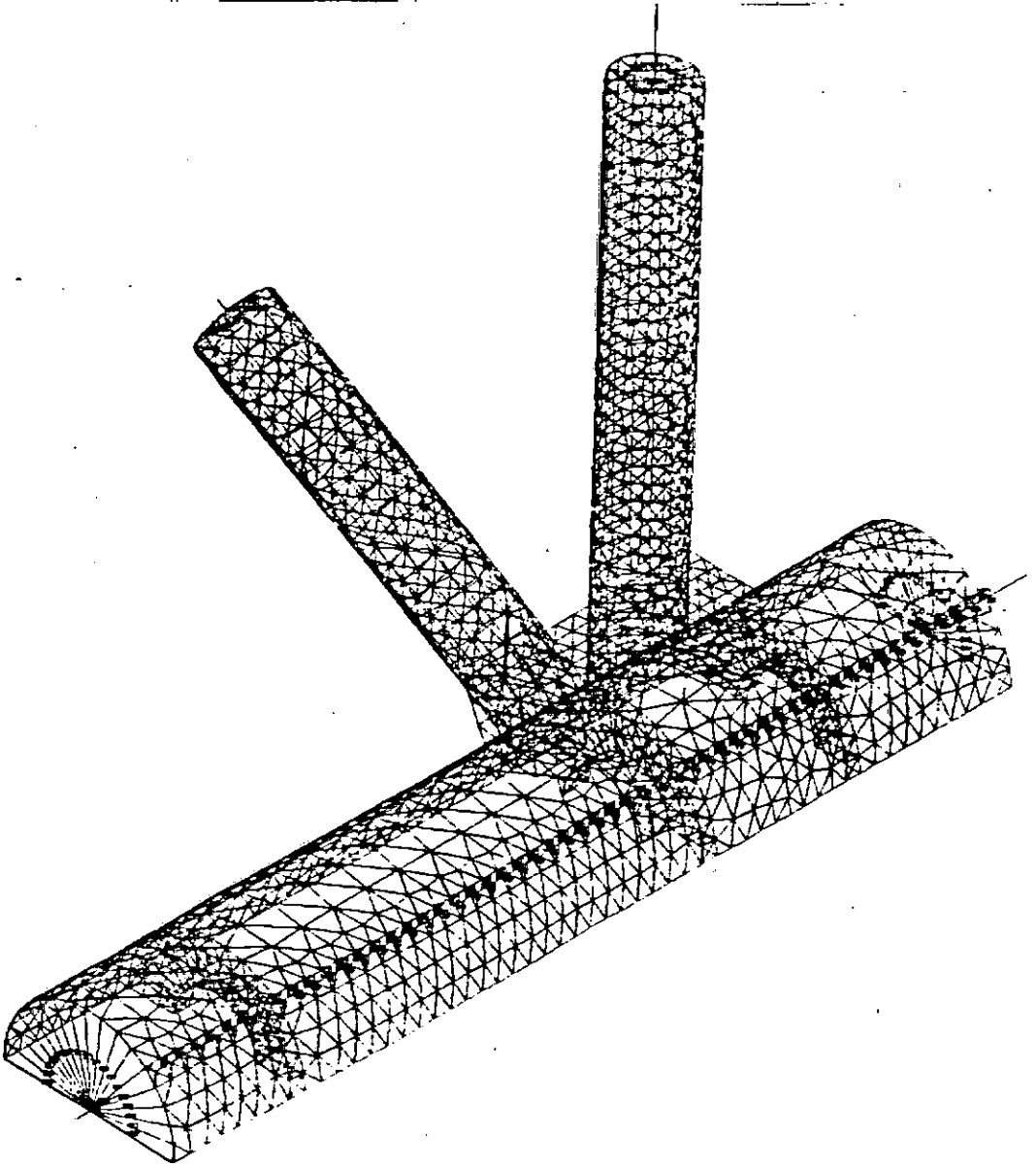


Figura V.16 - Malha de elementos finitos para uma junta tubular típica de plataforma de perfuração auto-elevatória

Apresenta-se a seguir a análise de uma junta tubular tipo X. A junta, submetida a uma compressão P no tubo secundário, é ilustrada na Figura V.17.

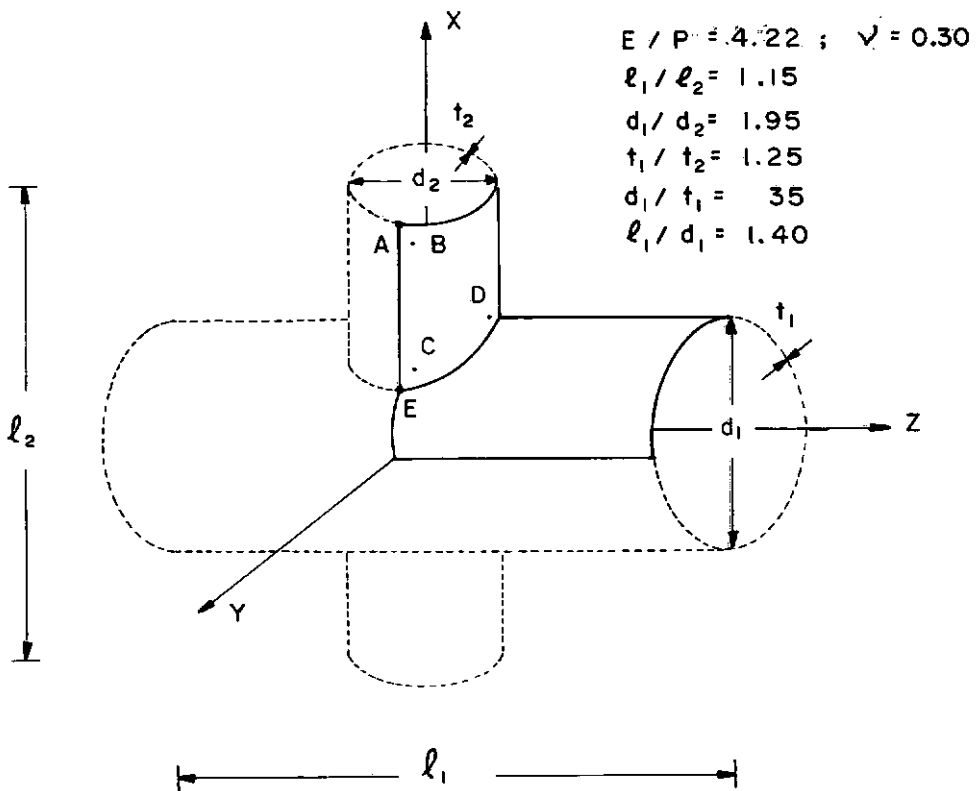
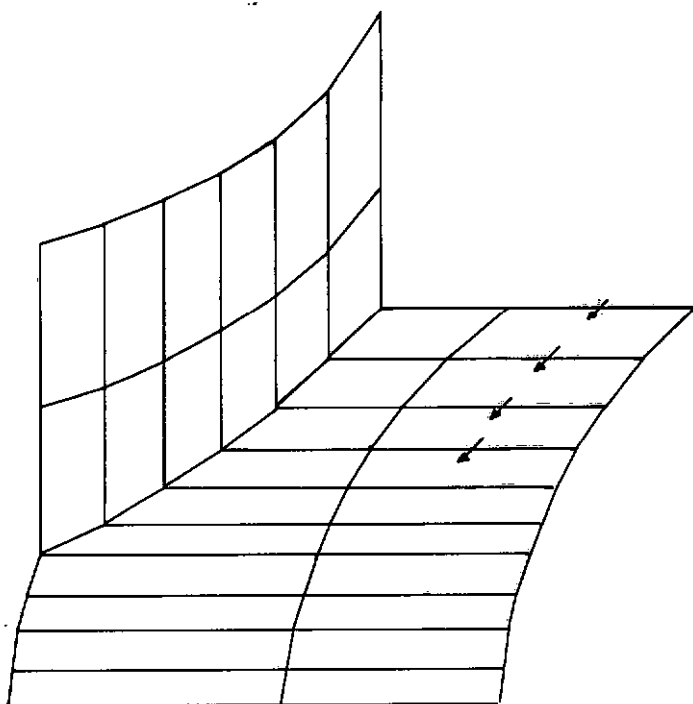


Figura V.17 - Junta tubular tipo X

A malha inicial, com 32 elementos hierárquicos, totaliza 750 graus de liberdade. Nas figuras V.18 e V.19 mostra-se a evolução do refinamento seletivo (opção 2), com $\gamma = 0.50$.

a) 754 Graus de Liberdade



b) 791 Graus de Liberdade

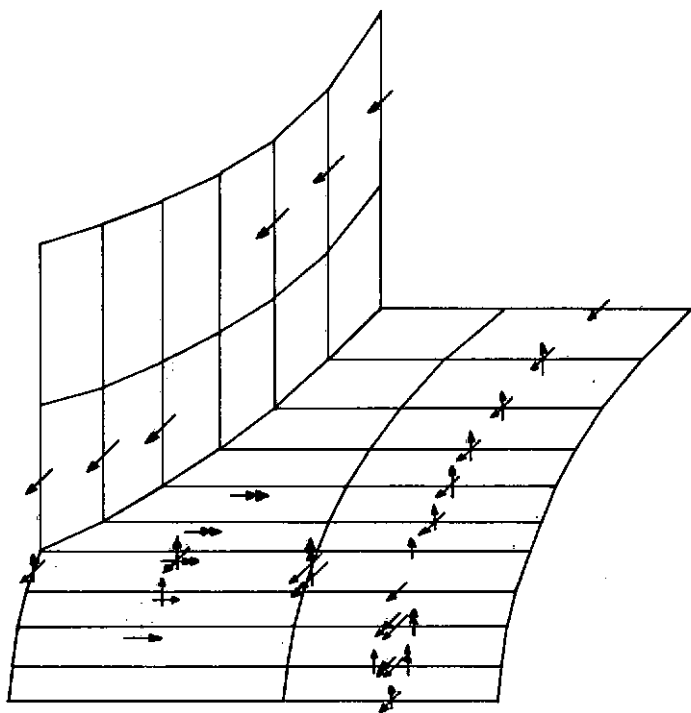
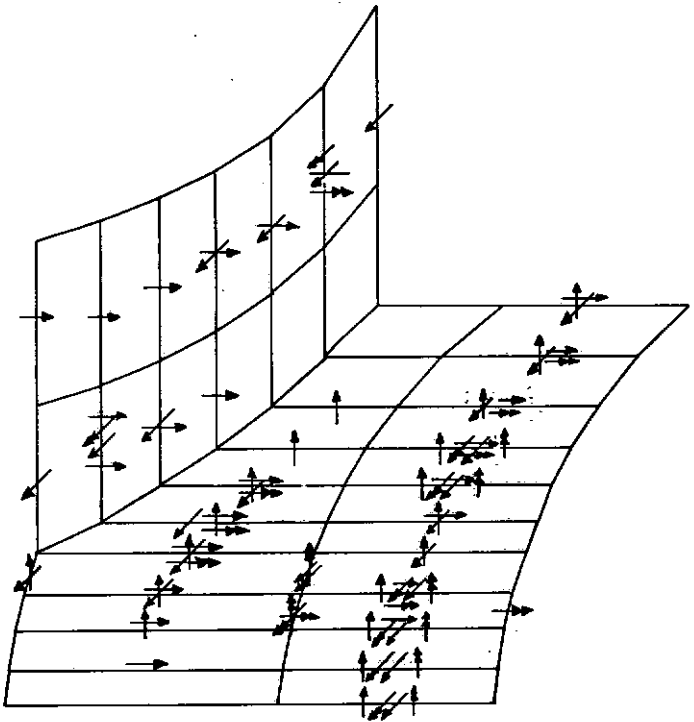


Figura V.18 - Refinamento seletivo

a) 845 Graus de Liberdade



de Liberdade

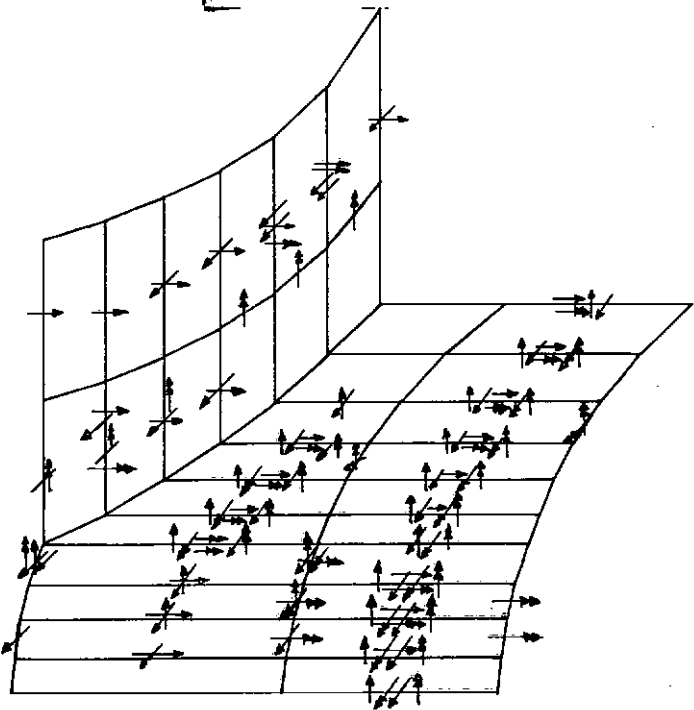


Figura V.19 - Refinamento seletivo

Na Figura V.20 tem-se o gráfico do deslocamento vertical do ponto A da junta. Este converge rapidamente para um valor estacionário, correspondente a um número de graus de liberdade em torno de 900. Da mesma forma, analisou-se a tensão principal máxima de compressão no ponto C próximo à interseção dos tubos, e os resultados obtidos podem ser vistos na Figura V.21. O valor estacionário para as tensões ocorreu em torno de 1000 graus de liberdade.

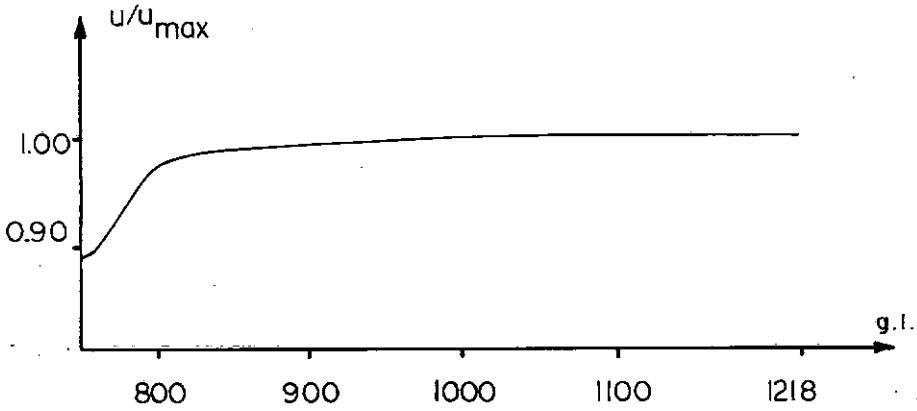


Figura V.20 - Deslocamento vertical do ponto A

Na Figura V.22 representa-se a variação das tensões principais máximas ao longo da linha C-D do tubo secundário, paralela à interseção dos tubos. Foram obtidas curvas em cinco etapas do refinamento, respectivamente com 750 (malha inicial), 791, 896, 1028 e 1218 (malha totalmente refinada) graus de liberdade, tomando-se as tensões nos pontos de integração mais próximos da interseção. As curvas correspondentes a 1028 e 1218 graus de liberdade são praticamente coincidentes.

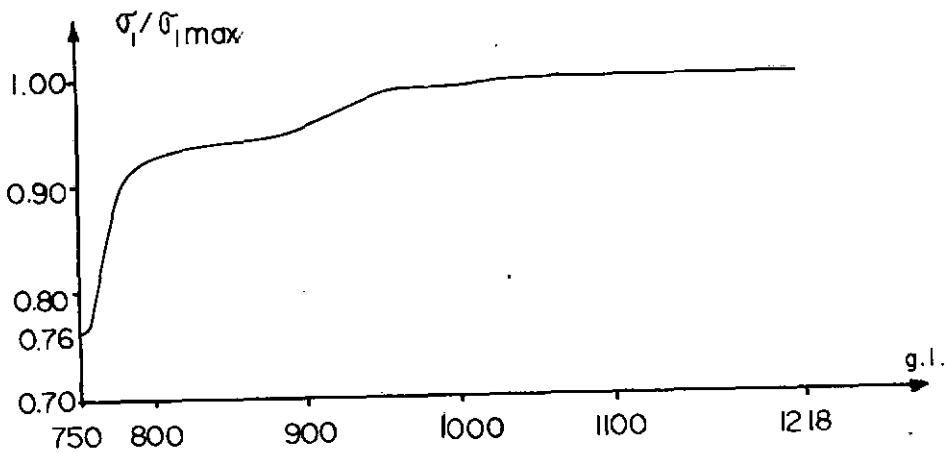


Figura V.21 - Tensão principal máxima de compressão no ponto C

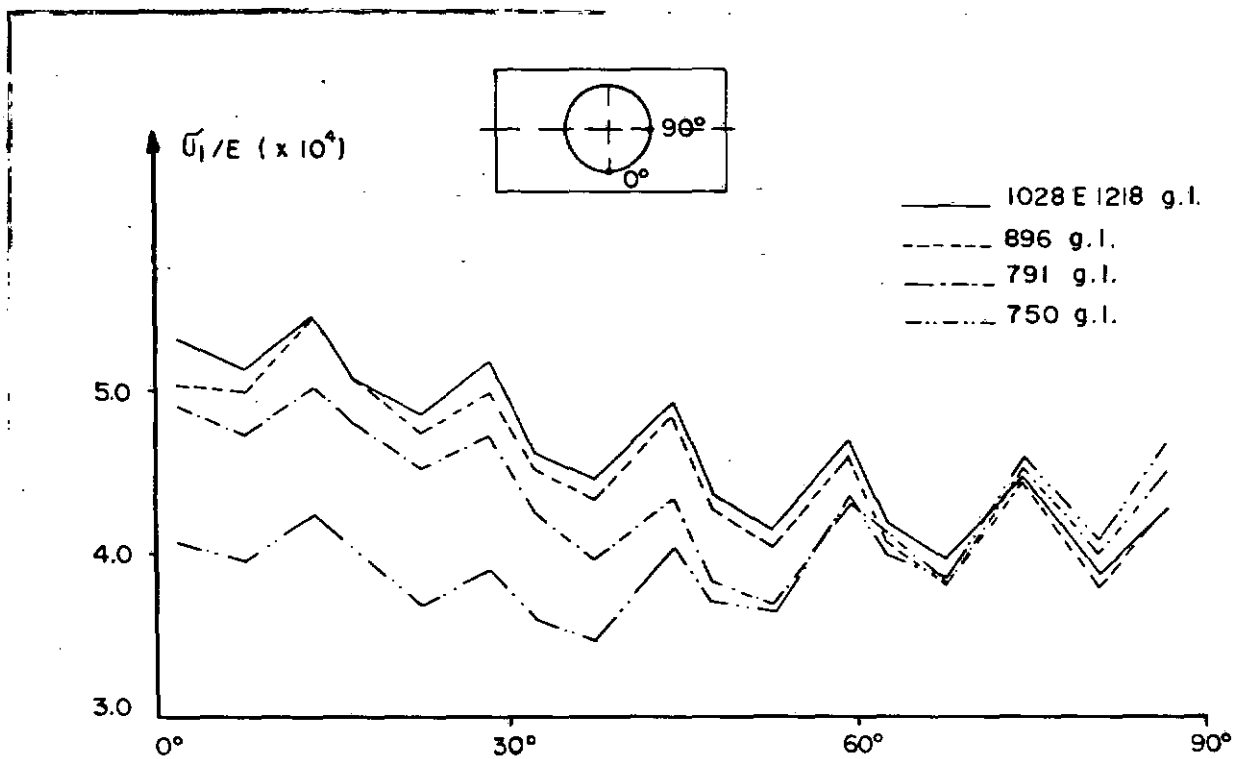


Figura V.22 - Variação das tensões principais máximas ao longo da linha C-D do tubo secundário.

Na Figura V.23 pode-se ver a variação das tensões ao longo da linha vertical B-C do tubo secundário, para um número de graus de liberdade ≥ 1000 . Utilizando-se esta variação de tensões e as envoltórias da variação limite ao longo de C-D obtém-se por extrapolação os valores para a tensão principal no ponto E, correspondentes respectivamente às envoltórias inferior e superior da curva limite em C-D. Tomando-se a média destes dois valores chegou-se ao valor 12.47 para o FCT da junta, enquanto que através da fórmula de Smedley (TORRES [36]) para juntas tipo X obteve-se 12.78. Como na análise numérica não se havia representado o cordão de solda, a região de interseção dos tubos apresenta um entalhe mais crítico, com uma transição menos suave do que aquela realmente verificada na prática. Assim, seria de se esperar um valor mais elevado para o FCT obtido através da análise numérica do que o calculado através da fórmula de Smedley. O fato de se ter obtido através da análise numérica um FCT ligeiramente inferior ao empírico pode ser creditado a imprecisões na extrapolação das tensões e/ou também ao fato de que o parâmetro l_1/d_1 da junta se encontra fora do domínio de utilização da fórmula de Smedley.

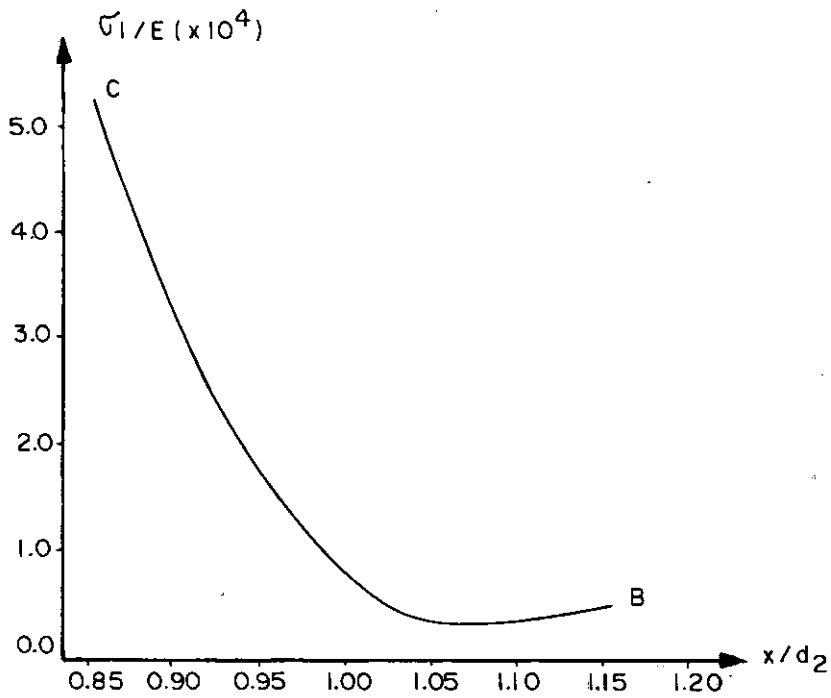


Figura V.23 - Variação das tensões principais máximas ao longo da linha B-C do tubo secundário

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES

Apresentou-se neste trabalho um procedimento de análise, inicialmente aplicado a problemas de elasticidade estática linear. A finalidade deste procedimento é prover ao analista economia e confiabilidade nos resultados. Com esta filosofia, desenvolveu-se uma família de elementos finitos hierárquicos de 4-12 nós associados a um esquema de refinamento auto-adaptativo versão p. O principal objetivo desta estratégia é garantir bons resultados através do controle da convergência da solução.

Usualmente, as malhas de elementos finitos são definidas com base em experiências prévias de análises semelhantes, o que pode muitas vezes conduzir a aproximações que não representam satisfatoriamente o problema analisado. Face a estas dúvidas, o que se faz normalmente é medir as descontinuidades das tensões entre elementos. Chegando-se a conclusão de que a solução precisa ser melhorada, um enorme esforço humano e computacional tem que ser dispendido. Outras malhas mais refinadas devem ser geradas, sendo que a estas correspondem análises completamente distintas e independentes.

No estágio atual de desenvolvimento em que se encontra o Método dos Elementos Finitos, tanto no que diz respeito aos algoritmos como às aplicações, torna-se necessário aumentar a confiança dos usuários reduzindo ao mínimo possível a interferência que este possa vir a ter no processo de análise.

Os resultados aqui obtidos motivam a continuidade de pesquisas neste sentido. O refinamento p-hierárquico mostrou-se extremamente eficiente na solução de problemas de elasticidade estática linear: estado plano, flexão de placas e cascas, tendo-se no entanto encontrado algumas dificuldades na adaptação do elemento de Mindlin a este procedimento. Este elemento, em virtude de sua própria formulação, fornece melhores resultados quando se utiliza integração reduzida, principalmente em soluções lineares de problemas de pequena espessura onde o efeito de **locking** da matriz de rigidez é evidente. Como compatibilizar então a integração da matriz de rigidez contendo diferentes graus de aproximação? Tentou-se utilizar integrações diferentes em uma mesma matriz, mas o procedimento iterativo não convergiu. Implementou-se então a opção 2 de refinamento, uma vez que em soluções quadráticas o **locking** é menos acentuado do que no caso linear, e na possibilidade de ocorrerem tais efeitos, estes seriam rapidamente corrigidos pelo refinamento. Aplicou-se a opção 3 de refinamento à placa fina do item V.3.1, obtendo-se como seria de se esperar, uma solução inicial bem menor do que a analítica. No entanto, o **locking** foi corrigido pelo refinamento chegando-se a solução analítica com menos graus de liberdade do que na opção 2, porém com maior tempo de processamento, uma vez que foram necessárias muitas iterações para vencer a diferença entre a primeira e a segunda solução. Para se avaliar com precisão os efeitos de **locking** do elemento de Mindlin hierárquico, uma análise espectral da matriz de rigidez teria que ser feita, verificando-se o número de autovetores (modos de deformação) correspondentes a movimentos de corpo rígido....

Cabe aqui ressaltar a importância da formulação hierárquica, que por si só justificaria sua utilização. Como foi dito no Capítulo II, é uma formulação que resulta em um melhor condicionamento da matriz de rigidez, o que favorece a utilização de microcomputadores ou equipamentos de menor precisão do que os grandes computadores, na resolução de problemas com elevado número de incógnitas.

Quanto as medidas de erro, estas foram aqui obtidas em termos de coeficientes da matriz de rigidez. Uma outra alternativa seria calculá-las utilizando-se os resíduos diretamente em termos das descontinuidades de tensões entre elementos, evitando desta maneira o cálculo antecipado da matriz de rigidez de elemento.

Sugere-se para pesquisas futuras a combinação dos refinamentos h e p , bem como a adaptação a esta metodologia de algoritmos iterativos de resolução de sistemas de equações tais como o Método dos Gradientes Conjugados (CRISFIELD [23]), SAMUELSSON [38]). Seria também de grande valia a implementação de um elemento hierárquico tridimensional para análises de cascas que pudesse aproximar melhor geometrias curvas. Dentro do esquema aqui proposto, o elemento **degenerado** de cascas (ZIENKIEWICZ [18]) parece ser adequado para este fim.

Finalmente, a formulação hierárquica do MEF associada a processos auto-adaptativos para a solução de problemas não-lineares e transientes vem sendo atualmente objeto de pesquisas (COFFIGNAL [39]).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BECKER, E.B., CAREY, G.F. and ODEN, J.T.- Finite Elements: An Introduction - Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey (1981).
- [2] ZIENKIEWICZ, O.C., IRONS, B.M., SCOTT, F.E. and CAMPBELL, J.S. - "Three Dimensional Stress Analysis" - Proceedings of the International Union of Theoretical and Applied Mechanics Symposium on High Speed Computing of Elastic Structures, Univ. of Liège Press, pp.413-433 (1971).
- [3] ZIENKIEWICZ, O.C., MORGAN, K. - Finite Elements and Approximation - Wiley-Interscience, New York (1983).
- [4] GAGO, J.P. de S.R. - A-posteriori Error Analysis and Adaptivity for the Finite Element Method - Ph.D. Thesis, Univ. of Wales, Swansea (1982).
- [5] WANG, D.W., KATZ, I.N., SZABO, B.A. - "Implementation of a C^1 Triangular Element Based on the P-Version of the Finite Element Method" - Computers & Structures, Vol. 19, No.3, pp.381-392 (1984).
- [6] ZIENKIEWICZ, O.C. - "Iterative Methods and Hierarchical Approaches: a Prospect for the Future of the Finite Element Method" - Proceedings of the 2nd Finnish Mechanics Days, Tampere University of Technology, Dept. of Mechanical Engineering, Report 29 (1985).

- [7] CAREY, G.F. and ODEN, J.T. - Finite Elements: Computational Aspects - Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey (1984).
- [8] ODEN, J.T. and CAREY, G.F. - Finite Elements: Mathematical Aspects - Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey (1983).
- [9] BABUSKA, I. and RHEINBOLDT, W.C. - "A-posteriori Error Estimates for the Finite Element Method" - International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.12, pp. 1597-1615 (1978).
- [10] KELLY, D.W., GAGO, J.P. de S.R., ZIENKIEWICZ, O.C. and BABUSKA, I. - "A-posteriori Error Analysis and Adaptive Processes in the Finite Element Method: Part I - Error Analysis" - International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.19, pp. 1593-1619 (1983).
- [11] REKTORYS, K. - Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering - D. Reidel Publishing Company, 2nd Edition (1980).
- [12] ZIENKIEWICZ, O.C., GAGO, J.P. de S.R. and KELLY, D.W. - "The Hierarchical Concept in Finite Element Analysis" - Computers & Structures, Vol.16, No.144, pp. 53-65 (1983).

- [13] GAGO, J.P. de S.R., KELLY, D.W., ZIENKIEWICZ, O.C. and BABUSKA, I. - "A-Posteriori Error Analysis and Adaptive Processes in the Finite Element Method: Part II - Adaptive Mesh Refinement" - International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.19, pp. 1593-1619 (1983).
- [14] GAGO, J.P. de S.R. - "Importance of Self-Adaptive Finite Elements and A-Posteriori Error Analysis" - Proceedings of the International Conference Finite Elements in Computational Mechanics, Indian Institute of Technology, Vol.1, pp. 15-21 (1985).
- [15] BABUSKA, I. and SZABO, B.A. - "On the Rates of Convergence of the Finite Element Method" - International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 18, pp. 323-341 (1982).
- [16] BABUSKA, I., SZABO, B.A. and KATZ, I.N. - "The P-Version of the Finite Element Method" - SIAM J. Numer. Anal., Vol. 18, No.3, pp. 515-545 (1981).
- [17] BABUSKA, I. and DORR, M.R. - "Error Estimates for the Combined h and p Versions of the Finite Element Method" - Technical Note BN-95, Inst. for Physical Science and Technology, Maryland University (1980).
- [18] ZIENKIEWICZ, O.C. - The Finite Element Method - Third Edition, McGraw-Hill (1977).

- [19] HINTON, E. and OWEN, D.R.J. - Finite Element Programming - Academic Press, London (1978).
- [20] BATHE, K. - Finite Element Procedures in Engineering Analysis - Prentice-Hall, Inc. (1982).
- [21] HUGHES, T.J.R., TAYLOR, R.L. and KANOKNUKULACHAI, W. - "A Simple and Efficient Finite Element for Plate Bending" - International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.11, pp. 1529-1543 (1977).
- [22] PUGH, E.D., HINTON, E. and ZIENKIEWICZ, O.C. - "A Study of Quadrilateral Plate Bending Elements with Reduced Integration" - International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.12, pp. 1059-1079 (1978).
- [23] CRISFIELD, M.A. - Finite Elements and Solution Procedures for Structural Analysis - Pineridge Press, Swansea (1986).
- [24] RIBEIRO, F.L.B e LANDAU, L.- "Processos Auto-Adaptativos em Elementos Finitos: Aplicação a Problemas de Elasticidade Estática Linear" - Anais do VII Congresso Latino-Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia, EESC-USP, São Carlos (1986).
- [25] LANDAU, L. e RIBEIRO, F.L.B. - "Aplicação de Processos Auto-Adaptativos para Avaliação de Fatores de Concentração de Tensões em Juntas Tubulares pelo Método dos Elemen

tos Finitos" - Anais do 4º Simpósio Brasileiro sobre Tubulações e Vasos de Pressão, Salvador (1986).

- [26] LANDAU, L. e RIBEIRO, F.L.B. - "An Application of Hierarchical and Self-Adaptive Finite Elements Techniques for the Stress Concentration Factors Evaluation in Offshore Tubular Joints" - II Symposium sobre Aplicaciones del Método de los Elementos Finitos en Ingeniería, Vol.1, pp. 367-380, UPC, Barcelona (1986).
- [27] TIMOSHENKO, S. & WOINOWSKY-KRIEGER, S. - Theory of Plates and Shells - McGraw-Hill, New York (1959).
- [28] MIRANDA, C.A. de JESUS - Um Sistema Computacional para Análise de Estruturas de Centrais Nucleares Formadas por Painéis, Utilizando-se Superelementos - Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro (1981).
- [29] BOGNER, F., FOR, R. & SCHMIDT, L. - "A Cylindrical Shell Discrete Element" - AIAA J., Vol.5, No.4 (1967).
- [30] CANTIN, G. & CLOUGH, R. - "A Curved Cylindrical Shell Discret Element" - AIAA J., Vol.6, No. 5 (1968).
- [31] CANTIN, G. - "Rigid Body Motions in Curved Finite Elements" - AIAA J., Vol.8, No.7 (1970).
- [32] ASHWELL, D.G. & SABIR, A.B. - "A New Cylindrical Shell Finite Element Based on Simple Independent Strain Functions"

Department of Civil Engineering - Report, Univ. of Wales at Cardiff (1971).

- [33] GIBSTEIN, M.B. - "Parametrical Stress Analysis of T-Joints" - European Offshore Steels Research Seminar (1978).
- [34] KUANG, R.D. - "Stress Concentration in Tubular Joints" - OTC 2205 (1975).
- [35] WORDSWORTH, A.C. & SMEDLEY, G.P. - "Stress Concentration at Unstiffened Tubular Joints" - European Offshore Steels Research Seminar (1978).
- [36] TORRES, A.F.L. - Determinação da Fadiga em Estruturas Metálicas Soldadas Submetidas a Solicitações Dinâmicas - Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro (1984).
- [37] MENICONI, L.C.M. e ALENCAR, M.F. - "Determinação de Fatores de Concentração de Tensões em Juntas Tubulares de Estruturas Offshore" - Boletim Téc. PETROBRÁS, 28(2): 113-120, Rio de Janeiro (1985).
- [38] SAMUELSSON, A., WILBERG, N.E. - "A Study of the Efficiency of Iterative Methods for Linear Problems in Structural Mechanics" - International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.22, pp.209-218 (1986).

- [39] COFFIGNAL, G., LADEVEZE, P., ROUGEOT, P. - "Error Control and Self Adaptive Meshes in Elastoplasticity" - Innovative Numerical Methods in Engineering, Editado por R.P. Shaw, J. Periaux, A. Chandonet, J. Wu, C. Marino e C.A. Brebbia, Springer-Verlag, pp. 447-452 (1986).
- [40] NAVIER, H.M.C. - Resume des Lecons ... de la Resistance des Corps Solides - Paris (1826).
- [41] MAXWELL, J.C. - "On the Calculation of the Equilibrium and Stiffness of Frames" - Phil. Mag., Vol.27, pp.294-299 (1864).
- [42] CASTIGLIANO, A. - "Nuova Teoria Infomo All'equilibro dei Sistemi Elastici" - Trans. Acad. Sc., Turin, Vol. 10, pp. 380 (1879).
- [43] STRUTT, J.W. (Lord Rayleigh) - "On the Theory of Resonance" Trans. R. Soc., A161, pp. 77-118 (1870).
- [44] RITZ, W. - "Uber Eine Neue zur Losung Gewissen Variations - Probleme der Mathematischen Physik" - J. Reine Angew Math., Vol. 135, pp. 1-61 (1909).
- [45] LIVESLEY, R.K. - "Analisis of Rigid Frames by an Electronic Computer" - Engineering, Vol. 176, pp. 230-233 (1953).

- [46] ARGYRIS, J.H. and KELSEY, S. - "Energy Theorems and Structural Analysis" - Aircraft Eng., Oct. 1954 - May 1955, reprinted by Butterworths, London (1960).
- [47] TURNER, M.J., CLOUGH, R.W., MARTIN, H.C. and TOPP, L.J. - "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures" - J. Aeronaut. Sci., Vol. 23, pp. 805 - 823 (1956).
- [48] CLOUGH, R.W. - "The Finite Element in Plane Stress Analysis" - Proc. 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation, Pittsburg (1960).
- [49] SPOONER, J.B. - "A History of the Finite Element Method" - World Congress on Finite Element Methods in Structural Mechanics (Ed. J. Robinson), Robinson & Assoc., Verwood, Vol. 1, A1-A22 (1975).
- [50] ARFEC (1984) - Proceedings of the International Conference on Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations, Lisbon. Edited by the Technical University of Lisbon (1984).
- [51] BABUSKA, I. and RHEINBOLDT, W.C. - "Error Estimates for Adaptive Finite Element Computations" - SIAM J. Numer. Anal., vol. 15, pp.736-754 (1978).
- [52] BABUSKA, I. and RHEINBOLDT, W.C. - "Adaptive Approaches and Reliability Estimations in Finite Element Analysis" - Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 18, pp. 519-540 (1979).