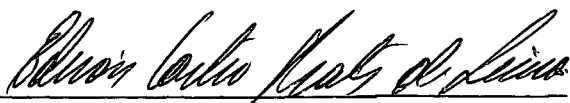


ANÁLISE ESTÁTICA NÃO LINEAR GEOMÉTRICA DE ESTRUTURAS PELO  
MÉTODO DE SUPERPOSIÇÃO MODAL COM BASE LANZOS-RITZ

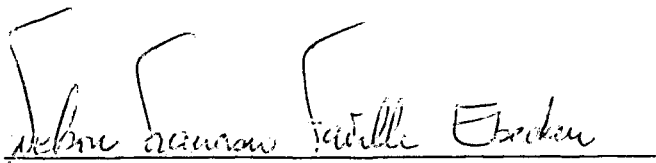
*Sergio Ricardo Pinheiro Medeiros*

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE  
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JA  
NEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO  
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.) EM ENGENHARIA CIVIL.

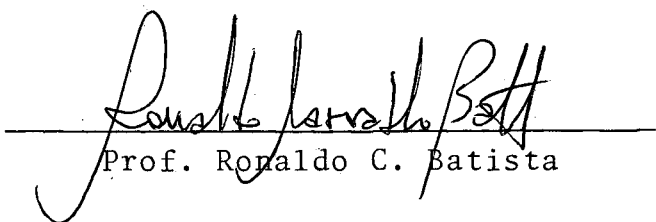
Aprovada por:



Prof. Edison Castro Prates de Lima  
(Presidente)



Prof. Nelson F.F. Ebecken



Prof. Ronaldo C. Batista



Prof. Andres L. Halbritter

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

DEZEMBRO DE 1985

MEDEIROS, SERGIO RICARDO PINHEIRO

Análise Estática Não Linear Geométrica de Estruturas Pelo Método de Superposição Modal com Base Lanczos-Ritz (Rio de Janeiro) 1985.

VIII , 73 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc.), Engenharia Civil, 1985).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1. Análise Estática Não Linear Geométrica de Estruturas.

I. COPPE/UFRJ

II. Título (série).

À minha esposa

Neisse

AGRADECIMENTOS

Ao professor EDISON CASTRO PRATES DE LIMA pela orientação e apoio prestados na execução deste trabalho.

Aos professores e colegas da COPPE.

À EVANISE BARBOSA DA SILVA pela eficiência com que datilografou este trabalho.

À GILBERTO LUZIÊ pela sua presteza na confecção dos desenhos.

RESUMO DA TESE APRESENTADA À COPPE/UFRJ COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRADO EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

ANÁLISE ESTÁTICA NÃO LINEAR GEOMÉTRICA DE ESTRUTURAS PELO MÉTODO DE SUPERPOSIÇÃO MODAL COM BASE LANZOS-RITZ

*Sergio Ricardo Pinheiro Medeiros*

Dezembro de 1985

Orientador: EDISON CASTRO PRATES DE LIMA

Programa: ENGENHARIA CIVIL

O objetivo deste trabalho é apresentar o método de superposição modal como um procedimento para a análise estática não linear geométrica de estruturas esbeltas, assim como, examinar o emprego de uma base de transformação de coordenadas constituída por vetores gerados de uma forma não iterativa a partir de um algoritmo do tipo Lanzos, como alternativa ao uso da base modal.

No método de superposição modal tem sido tradicionalmente utilizado os autovetores como vetores base. Este procedimento tem como principal inconveniente o elevado custo computacional, devido ao caráter iterativo da solução do problema de autovetores. A adoção da base proposta reduz drasticamente este custo sem afetar a precisão dos resultados.

A viabilidade do algoritmo proposto é investigada por meio de alguns exemplos, nos quais é comparado com o método de superposição modal clássico e com os métodos de análise não lineares do tipo Newton-Raphson.

ABSTRACT OF THESIS PRESENTED TO COPPE/UFRJ AS PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OS MASTER OF SCIENCE (M.Sc.)

GEOMETRIC NONLINEAR STATIC ANALYSIS OF STRUCTURES BY  
MODE SUPERPOSITION METHOD WITH LANCZOS-RITZ BASIS

*Sergio Ricardo Pinheiro Medeiros*

December, 1985

Chairman: EDISON CASTRO PRATES DE LIMA  
Department: Civil Engineering

The purpose os this work is to present the method of linear buckling mode superposition as a procedure for geometric nonlinear static analysis of slender structures, and to examine, as an alternative to a modal basis, the use of a coordinates transformation constitutes by vectors produced in a non-iterative way from a Lanczos algorithm.

In the method of buckling mode superposition the eingenectores have been tradionally used as basis vectors. The high computational cost of this procedure, caused by.. the iterative character of the eingenvalue problem, is its main drawback. The proposed method reduces the computer time requirements significantly without affecting the accuracy of the results.

The viability of the proposed algorithm is investigated through some examples. Comparisons with the classical mode superposition method and a full nonlinear analysis are presented and the obtained results discussed.

Í N D I C E

	Página
CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO -----	1
CAPÍTULO II - EQUAÇÕES DO PROBLEMA ESTÁTICO NÃO-LINEAR GEO MÉTRICO - MÉTODO DE SUPERPOSIÇÕES MODAL ----	3
II.1 - Introdução -----	3
II.2 - Formulação das Equações de Equilíbrio para Proble- mas Geometricamente Não-Lineares com Materiais E- lástico-Lineares -----	3
II.3 - Classe de Problemas Moderadamente Não-Lineares ---	8
II.4 - Método de Superposição Modal -----	14
CAPÍTULO III - IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL -----	25
CAPÍTULO IV - GERAÇÃO DE BASES DE TRANSFORMAÇÃO DE COOR- DENADAS -----	26
IV.1 - Introdução -----	26
IV.2 - Método de Iteração por Subespaços -----	26
IV.3 - Base de Lanczos-Ritz -----	28
CAPÍTULO V - ELEMENTOS IMPLEMENTADOS -----	32
V.1 - Introdução -----	32

V.2 - Elementos para Estruturas de Barras -----	32
CAPÍTULO VI - EXEMPLOS -----	39
VI.1 - Introdução -----	39
VI.2 - Viga-Coluna -----	39
VI.3 - Treliça Plana -----	46
VI.4 - Pórtico Plano -----	51
VI.5 - Treliça Espacial -----	56
VI.6 - Pórtico Espacial -----	59
CAPÍTULO VII - CONCLUSÕES -----	69
CAPÍTULO VIII - BIBLIOGRAFIA -----	72



## I. INTRODUÇÃO

A aplicação do método dos elementos finitos com técnicas incrementais-iterativas na análise estática não linear geométrica de estruturas requer um esforço computacional sensivelmente maior do que o necessário para uma análise linear. A necessidade de obtenção de várias soluções durante as diversas etapas de um projeto, desencoraja a utilização mais frequente de análises não lineares, devido aos altos custos envolvidos na solução de problemas práticos.

Em consequência, nos últimos anos, tem-se investigado métodos de solução mais eficientes para determinadas classes de problemas. A constatação que, em muitos casos de interesse prático, soluções não lineares podem ser obtidas a partir de uma solução linear, levou ao desenvolvimento de métodos especialmente adaptados para estas situações, conseguindo-se uma grande eficiência. Um exemplo é a análise de estruturas esbeltas (vigas, pórticos, placas) que podem apresentar um comportamento pré-crítico fracamente não linear. Nestes casos a análise do comportamento pré-crítico pode ser satisfatoriamente realizada através de uma transformação de coordenadas que utilize os modos de flambagem do problema de autovalor correspondente como base.

O método proposto (1), baseado nesta estratégia de solução, apresenta resultados a níveis de deslocamentos e esforços que se aproximam satisfatoriamente da solução obtida por análises não lineares incrementais-iterativas, sem no entanto ocasionar grandes acréscimos no esforço computacional. Um aspecto

importante é a possibilidade de consideração de diversos casos de carregamento, que pode ser feita com eficácia aproveitando-se a matriz de rigidez elástica previamente decomposta. Cabe também mencionar que este método permite verificar, através do fornecimento de determinados índices, se o sistema estrutural analisado enquadra-se dentro da faixa de utilização do mesmo e, conseqüentemente, aquilatar a qualidade dos resultados obtidos.

A formulação geral do problema não linear geométrico e do método de superposição modal são apresentados no Capítulo II e os passos gerais de sua implementação computacional estão no Capítulo III.

No presente trabalho, examina-se a utilização de uma base de transformação de coordenadas constituída de vetores obtidos através de uma análise de Rayleigh-Ritz com os vetores de Ritz gerados a partir de um procedimento não iterativo baseado no algoritmo de Lanczos, como uma alternativa ao emprego tradicional da base de autovetores. Os procedimentos para geração desta base e da base modal são mostrados no Capítulo IV.

Os elementos implementados foram os de treliça (plana e espacial), e o de pórtico (plano e espacial). As matrizes de rigidez desses elementos são mostrados no Capítulo V.

No Capítulo VI são apresentados os exemplos e os resultados comparativos com outros métodos. E finalmente no Capítulo VII as conclusões.

## II. EQUAÇÕES DO PROBLEMA ESTÁTICO NÃO LINEAR GEOMÉTRICO - MÉTODO DA SUPERPOSIÇÃO MODAL

### II.1 - Introdução

Neste Capítulo serão apresentadas as equações de equilíbrio para problemas geometricamente não lineares com materiais elástico-lineares, empregando o princípio da minimização da energia potencial total e o método dos elementos finitos como ferramenta de discretização.

A seguir, essas equações serão particularizadas para os casos com não linearidades geométricas moderadas. Posteriormente, será apresentado o método da superposição modal que desacopla o sistema de equações, através de uma transformação de coordenadas.

Serão abordados ainda alguns tópicos sobre a aplicabilidade do método da superposição modal e a forma de calcular os esforços em cada elemento.

### II.2 - Formulação das Equações de Equilíbrio para Problemas Geometricamente Não-Lineares com Materiais Elástico-Lineares (1)

As equações de equilíbrio serão deduzidas considerando a estrutura sujeita a grandes deslocamentos, pequenas deformações e em regime elástico linear. Usa-se, na dedução, o princípio de minimização da energia potencial total e o método dos elementos finitos como ferramenta de discretização.

Seja  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  o vetor que descreve o estado de deformação e  $\underline{\underline{\sigma}}$  o correspondente vetor energeticamente conjugado que descreve o estado tensional, no sentido em que  $\int_0^{\underline{\underline{\varepsilon}}} \underline{\underline{\sigma}}^t d\underline{\underline{\varepsilon}}$  representa a energia de deformação por unidade de volume indeformado. Do mesmo modo, seja  $\underline{\underline{u}}$  o campo de deslocamento e  $\underline{\underline{F}}$  o correspondente campo de força.

A hipótese da linearidade do material implica que

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{E}} \underline{\underline{\varepsilon}}, \quad (\text{II.1})$$

onde  $\underline{\underline{E}}$  não é uma função de  $\underline{\underline{\varepsilon}}$ . A energia de deformação pode então ser escrita como

$$u = \frac{1}{2} \int_v \underline{\underline{\varepsilon}}^t \underline{\underline{\sigma}} dv = \frac{1}{2} \int_v \underline{\underline{\varepsilon}}^t \underline{\underline{E}} \underline{\underline{\varepsilon}} dv, \quad (\text{II.2})$$

onde  $v$  é o volume do corpo na configuração indeformada.

As forças aplicadas são supostas independentes da deformação, para que se possa considerar a energia potencial dessas forças igual ao simétrico do trabalho das mesmas, ou seja

$$\Omega = -W = - \int_v \underline{\underline{u}}^t \underline{\underline{F}} dv - \int_s \underline{\underline{u}}^t \underline{\underline{F}}_s ds, \quad (\text{II.3})$$

onde  $s$  é a superfície do corpo e  $\underline{\underline{F}}_s$  são as forças de superfície prescritas em  $s$ .

A energia potencial total é

$$\pi = u + \Omega. \quad (\text{II.4})$$

No equilíbrio estático o funcional  $\pi$  é estacionário, isto é, sua primeira variação é igual a zero:

$$\delta\pi = \int_V (\delta\tilde{\varepsilon}^t \tilde{E} \tilde{\varepsilon} - \delta\tilde{u}^t \tilde{F}) dv - \int_S \delta\tilde{u}^t \tilde{F}_S ds = 0. \quad (\text{II.5})$$

Aplicando o método dos elementos finitos, supõe-se que o corpo seja dividido em regiões denominadas elementos finitos. E define-se em cada elemento um determinado número de pontos denominados nós. As variáveis definidas no corpo são então expressas em cada elemento em termos de parâmetros nodais de funções de interpolação. No caso, expressando o campo de deslocamentos  $\tilde{u}$  em termos dos  $n$  deslocamentos nodais  $\tilde{r}$ , tem-se

$$\tilde{u} = \tilde{\Phi} \tilde{r}, \quad (\text{II.6})$$

onde  $\tilde{\Phi}$  são funções de interpolação definidas separadamente sobre cada elemento finito e satisfazendo as condições de compatibilidades cinemáticas entre os elementos adjacentes do domínio (10).

Substituindo (II.6) em (II.3)

$$\Omega = - \tilde{r}^t \left[ \int_V \tilde{\Phi}^t \tilde{F} dv + \int_S \tilde{\Phi}^t \tilde{F}_S ds \right], \quad (\text{II.7})$$

onde

$$\tilde{R} = \int_V \tilde{\phi}^t \tilde{F} dv + \int_S \tilde{\phi}^t \tilde{F}_s ds \quad (\text{II.8})$$

são as chamadas forças nodais cinematicamente equivalentes, na medida em que elas realizam o mesmo trabalho que as forças aplicadas quando se dá um campo de deslocamento expresso por (II.6).

O estabelecimento da expressão da energia de deformação em termos dos deslocamentos nodais requer a introdução das relações deformação-deslocamento. No método dos elementos finitos essas relações podem ser escritas como

$$\tilde{\varepsilon}(\tilde{r}) = \tilde{\varepsilon}_L(\tilde{r}) + \tilde{\varepsilon}_N(\tilde{r}), \quad (\text{II.9})$$

com

$$\tilde{\varepsilon}_L(\tilde{r}) = \tilde{B}^0 \tilde{r}, \quad (\text{II.10})$$

$$\tilde{\varepsilon}_N(\tilde{r}) = \tilde{B}^1(\tilde{r}) \tilde{r}, \quad (\text{II.11})$$

onde  $\tilde{B}^0$  é função somente das funções de forma  $\tilde{\phi}$ , e  $\tilde{B}^1(\tilde{r})$  é função de  $\tilde{\phi}$  e  $\tilde{r}$  (1,10).

Fazendo a variação do vetor deformação tem-se

$$\delta \tilde{\varepsilon} = \left[ \tilde{B}^0 + \tilde{B}^1(\tilde{r}) \right] \delta \tilde{r} + \tilde{B}^1(\delta \tilde{r}) \tilde{r}. \quad (\text{II.12a})$$

E devido a propriedade  $\underline{\underline{B}}^1(\underline{\underline{a}})\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{B}}^1(\underline{\underline{b}})\underline{\underline{a}}$  (1,10)

$$\delta \underline{\underline{\varepsilon}} = \left[ \underline{\underline{B}}^0 + 2\underline{\underline{B}}^1(\underline{\underline{r}}) \right] \delta \underline{\underline{r}}. \quad (\text{II.12b})$$

Introduzindo-se (II.6), (II.8) - (II.12) em (II.5), tem-se para  $\delta \underline{\underline{r}}$  arbitrários, as exatas equações de equilíbrio não-lineares

$$\int_V \left[ \underline{\underline{B}}^0 + 2\underline{\underline{B}}^1(\underline{\underline{r}}) \right]^t \underline{\underline{\sigma}} \, dv = \underline{\underline{R}}. \quad (\text{II.13})$$

Onde, de (II.1)

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} &= \underline{\underline{E}} \underline{\underline{\varepsilon}}_L + \underline{\underline{E}} \underline{\underline{\varepsilon}}_N = \\ &= \underline{\underline{E}} \left[ \underline{\underline{B}}^0 + \underline{\underline{B}}^1(\underline{\underline{r}}) \right] \underline{\underline{r}} \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

é a expressão não-linear exata de  $\underline{\underline{\sigma}}$  em função dos deslocamentos nodais.

A equação (II.13) exprime o equilíbrio entre as tensões internas e as forças aplicadas na configuração deformada do corpo.

Substituindo-se (II.14) em (II.13) obtem-se

$$\left( \int_V \underline{\underline{B}}^{0t} \underline{\underline{E}} \underline{\underline{B}}^0 \, dv \right) \underline{\underline{r}} + \left( \int_V \underline{\underline{B}}^{0t} \underline{\underline{E}} \underline{\underline{B}}^1(\underline{\underline{r}}) \, dv \right) \underline{\underline{r}} + \left( 2 \int_V \underline{\underline{B}}^{1t}(\underline{\underline{r}}) \underline{\underline{E}} (\underline{\underline{B}}^0 + \underline{\underline{B}}^1(\underline{\underline{r}})) \, dv \right) \underline{\underline{r}} = \underline{\underline{R}} \quad (\text{II.15})$$

Usando (II.14), a terceira integral em (II.15) pode ser escrita como

$$2 \int_V \tilde{B}^1{}^t(\tilde{r}) \tilde{\sigma} \, dv = 2 \left[ \int_V \tilde{C}(\tilde{\sigma}) \, dv \right] \tilde{r} \quad (\text{II.16})$$

onde a matriz  $\tilde{C}$  é simétrica e linear em relação ao vetor  $\tilde{\sigma}$  (1,10).

Usando-se a notação

$$\tilde{K}_e = \int_V \tilde{B}^0{}^t \tilde{E} \tilde{B}^0 \, dv = \tilde{K}_e{}^t, \quad (\text{II.17})$$

$$\tilde{K}_g(\tilde{\sigma}) = 2 \int_V \tilde{C}(\tilde{\sigma}) \, dv = \tilde{K}_g{}^t(\tilde{\sigma}), \quad (\text{II.18})$$

$$\tilde{K}_l(\tilde{r}) = \int_V \tilde{B}^0{}^t \tilde{E} \tilde{B}^1(\tilde{r}) \, dv, \quad (\text{II.19})$$

as relações não-lineares força-deslocamento pelo método dos elementos finitos torna-se

$$\left[ \tilde{K}_e + \tilde{K}_g(\tilde{\sigma}) + \tilde{K}_l(\tilde{r}) \right] \tilde{r} = \tilde{K}_s(\tilde{\sigma}, \tilde{r}) \tilde{r} = \tilde{R}, \quad (\text{II.20})$$

onde  $\tilde{K}_s$  é então a matriz secante relacionando as forças aplicadas aos deslocamentos.

### II.3 - Classe de Problemas Moderadamente Não-Lineares

Neste item serão apresentadas as relações força-deslocamento para a classe de problemas moderadamente não-lineares, a partir das quais o método de superposição modal será aplicado.



Seja uma estrutura submetida a um carregamento  $\lambda \tilde{R}$  e  $\lambda \tilde{r}_L$  a solução da equação linear

$$\tilde{K}_e \tilde{r} = \lambda \tilde{R}, \quad (\text{II.21})$$

onde  $\tilde{K}_e$ , denominada de matriz de rigidez elástica, é dada por (II.17) e  $\lambda$  é um parâmetro. Supondo-se que  $\lambda \tilde{r}_L$  não satisfaça (II.20), ou seja, que a verdadeira solução  $\tilde{r}(\lambda)$  do problema estrutural em questão é não-linear em  $\lambda$ , tem-se

$$\tilde{r}(\lambda) = \lambda \tilde{r}_L + \tilde{r}_d(\lambda), \quad (\text{II.22})$$

onde  $\tilde{r}_d(\lambda)$  é uma parcela não-linear em  $\lambda$ .

Admitindo-se que existe uma família de carregamentos  $\lambda \tilde{R}_1$ , próxima de  $\lambda \tilde{R}$  (o sentido de próximo será definido mais precisamente adiante), cuja solução elástica linear  $\lambda \tilde{r}_1$  também satisfaça (II.20) para valores de  $\lambda$  pertencentes a um intervalo finito de interesse, pode-se representar  $\lambda \tilde{R}$  como

$$\lambda \tilde{R} = \lambda (\tilde{R}_1 + \Delta \tilde{R}). \quad (\text{II.23})$$

Os verdadeiros deslocamentos (que satisfazem a (II.20)) para o carregamento (II.23) podem ser escritos como

$$\tilde{r}(\lambda) = \lambda \tilde{r}_1 + \Delta \tilde{r}. \quad (\text{II.24})$$

Neste ponto são examinadas as condições que a família de deslocamentos  $\lambda \tilde{r}_1$  deve satisfazer para que, além de so-

lução linear, também seja solução da equação não-linear (II.20).

A igualdade das soluções das equações (II.20) e (II.21) para um carregamento  $\lambda \underline{r}_1$  significa que os termos não-lineares da equação (II.20), para este caso, são desprezíveis.

Partindo-se de (II.5), verifica-se que esse fato equivale a se poder desprezar as parcelas não-lineares  $\underline{B}^1(\underline{r})\underline{r}$  e  $\underline{B}^1(\underline{r})\delta\underline{r}$  nas expressões de  $\underline{\varepsilon}$  (II.9) e  $\delta\underline{\varepsilon}$  (II.12). Isto ocorre quando for possível assumir que

$$|\underline{B}^0\underline{r}| \gg |\underline{B}^1(\underline{r})\underline{r}|, \quad (\text{II.25})$$

e

$$|\underline{B}^0\delta\underline{r}| \gg |\underline{B}^1(\underline{r})\delta\underline{r}|. \quad (\text{II.26})$$

A notação usada nas desigualdades (II.25) e (II.26) indica que as componentes não nulas da matriz ou vetor do lado direito são desprezíveis com relação as correspondentes componentes da matriz ou vetor do lado esquerdo.

De (II.25) - (II.26) conclui-se que para a família  $\lambda \underline{r}_1$  satisfazer simultaneamente (II.20) e (II.21) os termos  $\lambda \underline{B}_1(\underline{r}_1)\underline{r}_1$  e  $\underline{B}^1(\lambda \underline{r}_1)\delta\underline{r}$  devem ser desprezíveis em relação respectivamente a  $\underline{B}^0\underline{r}_1$  e  $\underline{B}^0\delta\underline{r}$ , ou seja

$$|\underline{B}^0\underline{r}_1| \gg |\lambda \underline{B}^1(\underline{r}_1)\underline{r}_1|, \quad (\text{II.27})$$

$$|\underline{\tilde{B}}^0 \delta \underline{\tilde{r}}| \gg |\underline{\tilde{B}}^1(\lambda \underline{\tilde{r}}_1) \delta \underline{\tilde{r}}|. \quad (\text{II.28})$$

Levando-se em consideração as condições (II.27)-(II.28), a expressão (II.24) e a linearidade da matriz  $\underline{\tilde{B}}^1(\underline{\tilde{r}})$  em relação ao vetor  $\underline{\tilde{r}}$  (1), tem-se as simplificações abaixo.

A variação da deformação (II.12) para  $\underline{\tilde{r}}(\lambda)$  pode ser escrita como:

$$\delta \underline{\tilde{\epsilon}} = \left[ \underline{\tilde{B}}^0 + 2\underline{\tilde{B}}^1(\underline{\tilde{r}}) \right] \delta \underline{\tilde{r}} = \underline{\tilde{B}}^0 \delta \underline{\tilde{r}} + 2\underline{\tilde{B}}^1(\Delta \underline{\tilde{r}}) \delta \underline{\tilde{r}} \quad (\text{II.29})$$

e o vetor tensão como

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{\sigma}} &= \underline{\tilde{E}} \left[ \underline{\tilde{B}}^0 + \underline{\tilde{B}}^1(\underline{\tilde{r}}) \right] \underline{\tilde{r}} = \\ &= \underline{\tilde{E}} \left[ \underline{\tilde{B}}^0 + \underline{\tilde{B}}^1(\lambda \underline{\tilde{r}}_1 + \Delta \underline{\tilde{r}}) \right] (\lambda \underline{\tilde{r}}_1 + \Delta \underline{\tilde{r}}) = \\ &= \underline{\tilde{E}} \left[ \underline{\tilde{B}}^0 \lambda \underline{\tilde{r}}_1 + \underline{\tilde{B}}^0 \Delta \underline{\tilde{r}} + 2\underline{\tilde{B}}^1(\lambda \underline{\tilde{r}}_1) \Delta \underline{\tilde{r}} + \underline{\tilde{B}}^1(\Delta \underline{\tilde{r}}) \Delta \underline{\tilde{r}} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.30})$$

Supondo-se, agora, que o vetor dos deslocamentos adicionais  $\Delta \underline{\tilde{r}}$ , devido a parte  $\lambda \Delta R$  do carregamento, é pequeno comparado com  $\lambda \underline{\tilde{r}}_1$  (por causa da proximidade entre  $\lambda R$  e  $\lambda R_1$ ), pode-se simplificar (II.30), usando (II.28) com  $\delta \underline{\tilde{r}} \approx \Delta \underline{\tilde{r}}$ , e obter-se

$$\underline{\tilde{\sigma}} = \underline{\tilde{E}} \left[ \underline{\tilde{B}}^0(\lambda \underline{\tilde{r}}_1 + \Delta \underline{\tilde{r}}) + \underline{\tilde{B}}^1(\Delta \underline{\tilde{r}}) \Delta \underline{\tilde{r}} \right]. \quad (\text{II.31})$$

Substituindo-se as relações simplificadas (II.29) e (II.31) em (II.5) chega-se a

$$\int_{\underline{v}} \left[ \underline{B}^0 + 2\underline{B}^1(\underline{\Delta r}) \right]^t \underline{E} \left[ \underline{B}^0(\lambda \underline{r}_1 + \underline{\Delta r}) + \underline{B}^1(\underline{\Delta r}) \underline{\Delta r} \right] d\underline{v} = \lambda \underline{R}, \quad (\text{II.32})$$

que expandida e fazendo-se uso de (II.17), (II.18), (II.23), leva a

$$\begin{aligned} & \underline{K}_e \lambda \underline{r}_1 + \underline{K}_e \underline{\Delta r} + \lambda \underline{K}_g(\underline{\sigma}_1) \underline{\Delta r} + \underline{K}_g(\underline{\Delta \sigma}) \underline{\Delta r} + \left( \int_{\underline{v}} \underline{B}^{0t} \underline{E} \underline{B}^1(\underline{\Delta r}) d\underline{v} \right) \underline{\Delta r} = \\ & = \lambda \underline{R}_1 + \lambda \underline{\Delta R} \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

onde  $\underline{\Delta \sigma}$  é dado por (II.14) para  $\underline{\Delta r}$ . Para  $\|\underline{\Delta r}\| \ll \|\lambda \underline{r}_1\|$ , onde  $\|a\|$  denota uma norma do vetor  $a$ , é possível ignorar inicialmente os termos de ordem superior em  $\underline{\Delta r}$ , retendo-se somente a principal não linearidade representada por  $\lambda \underline{K}_g(\underline{\sigma}_1) \underline{\Delta r}$ . Esta parcela pode ser interpretada fisicamente como um acoplamento não-linear entre o estado de tensões linear dominante  $\underline{\sigma}_1$  e a mudança na geometria representada pelos deslocamentos  $\underline{\Delta r}$ .

A expressão resultante

$$\underline{K}_e \lambda \underline{r}_1 + \underline{K}_e \underline{\Delta r} + \lambda \underline{K}_g(\underline{\sigma}_1) \underline{\Delta r} = \lambda \underline{R}_1 + \lambda \underline{\Delta R} \quad (\text{II.34})$$

é a relação força-deslocamento para os problemas moderadamente não lineares. No entanto, observa-se que a parcela  $\lambda \underline{R}_1$  do carregamento e os correspondentes deslocamentos  $\lambda \underline{r}_1$  não são conhecidas. Sendo  $\lambda \underline{R}$  conhecido, o vetor  $\lambda \underline{r}_L$  de (II.22) pode ser determinado resolvendo-se (II.21) e o que realmente se procura é um método para determinação da parcela  $\underline{r}_d$ . De (II.23) tem-se

$$\lambda \tilde{r}_L = \lambda \tilde{r}_1 + \lambda \tilde{r}_2, \quad (\text{II.35})$$

onde

$$\tilde{K}_e \tilde{r}_2 = \Delta \tilde{R}. \quad (\text{II.36})$$

De (II.35), (II.22) e (II.24) chega-se a

$$\Delta \tilde{r} = \lambda \tilde{r}_2 + \tilde{r}_d(\lambda) \quad (\text{II.37})$$

e

$$\Delta \tilde{r} = \lambda \tilde{r}_L - \lambda \tilde{r}_1 + \tilde{r}_d(\lambda). \quad (\text{II.38})$$

Usando-se (II.36) - (II.38) em (II.34) obtem-se  $\tilde{K}_e \lambda \tilde{r}_1 + \tilde{K}_e (\lambda \tilde{r}_2 + \tilde{r}_d) + \lambda \tilde{K}_g(\sigma_1) (\lambda \tilde{r}_L - \lambda \tilde{r}_1 + \tilde{r}_d) = \lambda \tilde{R}_1 + \lambda \Delta \tilde{R}$ , que efetuada as multiplicações, equivale a

$$\begin{aligned} & \tilde{K}_e \lambda \tilde{r}_1 + \tilde{K}_e \lambda \tilde{r}_2 + \tilde{K}_e \tilde{r}_d + \lambda^2 \tilde{K}_g(\sigma_1) \tilde{r}_L - \lambda^2 \tilde{K}_g(\sigma_1) \tilde{r}_1 + \\ & + \lambda \tilde{K}_g(\sigma_1) \tilde{r}_d = \lambda \tilde{R}_1 + \lambda \Delta \tilde{R}. \end{aligned} \quad (\text{II.39})$$

Como  $\tilde{r}_1$  é uma suposta resposta linear então  $-\lambda^2 \tilde{K}_g(\sigma_1) \tilde{r}_1$  pode ser desprezada diante de  $\tilde{K}_e \lambda \tilde{r}_1$ . Lembrando ainda que  $\tilde{K}_e \lambda \tilde{r}_1 = \lambda \tilde{R}_1$  e de (II.36), finalmente, tem-se

$$\tilde{K}_e \tilde{r}_d + \lambda^2 \tilde{K}_g(\sigma_1) \tilde{r}_L + \lambda \tilde{K}_g(\sigma_1) \tilde{r}_d = 0 \quad (\text{II.40})$$

## II.4 - Método de Superposição Modal (1)

O método de superposição modal se caracteriza pela utilização, na determinação de  $\underline{r}_d$ , de uma mudança de coordenadas para a base modal. Esse método e algumas de suas propriedades são mostradas neste item.

Seja  $\underline{X}$  uma base do espaço  $\mathbb{R}^n$ . Desta forma é possível escrever os vetores deslocamentos como uma combinação linear dos vetores componentes da mesma, ou seja

$$\underline{r}_L = \underline{X}\alpha \quad (\text{II.41})$$

$$\underline{r}(\lambda) = \underline{X}\beta(\lambda) \quad (\text{II.42})$$

$$\underline{r}_d(\lambda) = \underline{X}\gamma(\lambda) \quad (\text{II.43})$$

e de (II.22)

$$\beta = \lambda\alpha + \gamma. \quad (\text{II.44})$$

Introduzindo (II.41), (II.43) em (II.40) e pré-multiplicando-se por  $\underline{X}^t$  (que sendo um conjunto completo de vetores, não reduz o número de equações independentes) obtem-se

$$\begin{aligned} (\underline{X}^t \underline{K}_e \underline{X}) \underline{\gamma} + \lambda^2 \left[ \underline{X}^t \underline{K}_g(\underline{\sigma}_1) \underline{X} \right] \underline{\alpha} + \\ + \lambda \left[ \underline{X}^t \underline{K}_g(\underline{\sigma}_1) \underline{X} \right] \underline{\gamma} = \underline{0}. \end{aligned} \quad (\text{II.45})$$

Observa-se que o desacoplamento das equações (II.45) só é possível se a base  $\tilde{X}$  diagonaliza simultaneamente as matrizes  $\tilde{K}_e$  e  $\tilde{K}_g(\sigma_1)$ . Se, além disso, a base  $\tilde{X}$  é ortonormalizada em relação a  $\tilde{K}_e$  tem-se

$$\tilde{X}^t \tilde{K}_e \tilde{X} = \tilde{I} \quad (\text{II.46})$$

e

$$\tilde{X}^t \tilde{K}_g(\sigma_1) \tilde{X} = - \tilde{\Lambda}^{-1}, \quad (\text{II.47})$$

que equivaleria ao problema de flambagem linear

$$\tilde{K}_e \tilde{X} = - \tilde{K}_g(\sigma_1) \tilde{X} \tilde{\Lambda}. \quad (\text{II.48})$$

Nas equações (II.46) - (II.48) a matriz  $\tilde{I}$  é a matriz identidade e  $\tilde{\Lambda}$  é uma matriz diagonal.

No entanto, verifica-se que não é possível se trabalhar com a expressão (II.45), já que não se conhece a priori o vetor  $\tilde{r}_1$  e em consequência a matriz  $\tilde{K}_g(\sigma_1)$  não pode ser calculada.

Adota-se então como aproximação de  $\tilde{K}_g(\sigma_1)$  a matriz conhecida  $\tilde{K}_g(\sigma_L)$ . E busca-se uma base  $\tilde{X}$  que diagonalize  $\tilde{K}_e$  e  $\tilde{K}_g(\sigma_L)$  e que seja, por conveniência,  $\tilde{K}_e$ -ortonormal. Ou seja,

$$\tilde{X}^t \tilde{K}_e \tilde{X} = \tilde{I}, \quad (\text{II.49})$$

$$\tilde{X}^t \tilde{K}_g(\sigma_L) \tilde{X} = - \tilde{\Lambda}^{-1}, \quad (\text{II.50})$$

que corresponde ao problema de autovalor

$$\underline{\underline{K}}_e \underline{\underline{X}} = - \underline{\underline{K}}_g(\underline{\underline{\sigma}}_L) \underline{\underline{X}} \underline{\underline{\Lambda}}. \quad (\text{II.51})$$

Agora já é possível se especificar mais precisamente a hipótese assumida de proximidade entre  $\lambda_R$  e  $\lambda_{R_1}$ . Essa proximidade existe quando a diferença entre os autovalores e autovetores usando-se  $\underline{\underline{\sigma}}_1 = \underline{\underline{E}} \underline{\underline{B}}^0 \underline{\underline{K}}_e^{-1} \underline{\underline{R}}_1$  ou  $\underline{\underline{\sigma}}_L = \underline{\underline{E}} \underline{\underline{B}}^0 \underline{\underline{K}}_e^{-1} \underline{\underline{R}}$  pode ser desprezada.

Levando em conta essa simplificação em (II.46)

tem-se

$$\underline{\underline{\gamma}} = \lambda^2 \left[ \underline{\underline{\Lambda}} - \lambda \underline{\underline{I}} \right]^{-1} \underline{\underline{\alpha}}. \quad (\text{II.52})$$

E de (II.42), (II.44)

$$\underline{\underline{r}}(\lambda) = \underline{\underline{X}} \underline{\underline{\beta}} = \underline{\underline{X}} \left[ \frac{1}{\lambda} \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{\Lambda}}^{-1} \right]^{-1} \underline{\underline{\alpha}}, \quad (\text{II.53})$$

onde  $\underline{\underline{\Lambda}}$  contém os autovalores (II.51) correspondentes ao estado de tensões conhecido  $\underline{\underline{\sigma}}_L = \underline{\underline{E}} \underline{\underline{B}}^0 \underline{\underline{K}}_e^{-1} \underline{\underline{R}}$  e  $\underline{\underline{X}}$  contém os correspondentes autovetores. Deste modo, para situações satisfazendo as hipóteses acima, a solução não linear  $\underline{\underline{r}}(\lambda)$  é aproximada das informações contidas na solução de  $\underline{\underline{K}}_e \underline{\underline{r}} = \underline{\underline{R}}$  e de seu problema de autovalor associado (II.51). Os valores de  $\underline{\underline{\alpha}}$ , necessários em (II.53), podem ser calculados de

$$\underline{\underline{X}}^t \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{X}}^t \underline{\underline{K}}_e \underline{\underline{r}}_L = \underline{\underline{X}}^t \underline{\underline{K}}_e \underline{\underline{X}} \underline{\underline{\alpha}} = \underline{\underline{\alpha}}. \quad (\text{II.54})$$



Em seguida é apresentado um teste para verificar se a resposta estática linear pode ser a solução exata do problema estrutural em estudo.

Com esse objetivo admite-se, inicialmente, que o termo  $\tilde{B}^1(\tilde{r})\tilde{r}$  seja desprezível em relação a  $\tilde{B}^0\tilde{r}$ .

Levando em conta essa hipótese em (II.5), chega-se a expressão

$$\left( \int_V \left[ \tilde{B}^0 + 2\tilde{B}^1(\tilde{r}) \right] \tilde{E}\tilde{B}^0 dV \right) \tilde{r} = \tilde{R}, \quad (\text{II.55})$$

que também pode ser escrita como

$$\left( \tilde{K}_e + \tilde{K}_g(\tilde{\sigma}_L) \right) \tilde{r} = \tilde{R}, \quad (\text{II.56})$$

onde  $\tilde{\sigma}_L = \tilde{E}\tilde{B}^0\tilde{r}$ .

Comparando-se as equações (II.56) e (II.21), constata-se que

$$|\tilde{K}_g(\tilde{\sigma}_L)\tilde{r}| \ll |\tilde{K}_e\tilde{r}| \quad (\text{II.57})$$

é condição necessária para indicar a verdadeira linearidade da solução  $\tilde{r}$ .

Substituindo a solução estática linear  $\lambda\tilde{r}_L$  em (II.57) e pré-multiplicando-a por  $\tilde{\chi}^t$ , obtem-se (II.57) expresso em termos do método de superposição modal. Qual seja,

$$|\tilde{\lambda} \tilde{\Lambda}^{-1} \tilde{\alpha}| \ll |\tilde{\alpha}|. \quad (\text{II.58})$$

A condição acima é satisfeita se

$$|\lambda/\lambda_i| \ll 1, \quad (\text{II.59})$$

para todos  $\alpha_i \neq 0$ , onde  $\alpha_i$  é a  $i$ -ésima componente do vetor  $\tilde{\alpha}$ , ou se

$$\alpha_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (\text{II.60})$$

sendo  $p+1$  o menor elemento em  $\tilde{\Lambda}$  para o qual (II.59) é verdadeira dentro do domínio de interesse para os valores de  $\lambda$ .

A expressão (II.60) fornece o teste, referido anteriormente, para verificação da validade da solução estática linear.

Uma propriedade importante da parcela não linear  $\tilde{r}_d$  é que, usando-se a base modal, somente os primeiros autovetores contribuem significativamente para a sua representação.

A equação (II.52) expressa em termos de componentes é igual a

$$\gamma_i = \left[ \frac{(\lambda/\lambda_i)}{1 - (\lambda/\lambda_i)} \right] \lambda \alpha_i. \quad (\text{II.61})$$

De (II.61) e da definição de  $p$  (isto é,  $|\lambda/\lambda_i| \ll 1$  para  $i > p$ ) tem-se

$$\gamma_i \ll \lambda \alpha_i, \quad i = p+1, \dots, n \quad (\text{II.62})$$

e de  $\tilde{\beta} = \lambda \alpha + \tilde{\gamma}$  (II.44)

$$\beta_i = \lambda \alpha_i + \gamma_i \approx \lambda \alpha_i, \quad i > p \quad (\text{II.63})$$

Por sua vez de (II.41) - (II.44) e (II.63) conclui-se que

$$\tilde{r}(\lambda) = \lambda \tilde{r}_L + \sum_{i=1}^p \tilde{X}^i \gamma_i \quad \text{e} \quad \tilde{r}_d = \sum_{i=1}^p \tilde{X}^i \gamma_i, \quad (\text{II.64})$$

onde  $\tilde{X}^i$  é o  $i$ -ésimo modo de flambagem. O que implica que somente os  $p$  primeiros modos são significativos para a resposta.

Cabe mencionar que para um grande número de problemas práticos o espectro dos autovalores de (II.51) possui valores suficientemente afastados para que ocorra  $p \ll n$ , quando  $\lambda$  for restringido à condição  $0 \leq |\lambda| < |\lambda_1|$ .

O próximo objetivo deste item é apresentar os critérios de aplicabilidade do método de superposição modal. Para isto, começa-se por representar os vetores  $\lambda \tilde{r}_1$ ,  $\lambda \tilde{r}_2$  e  $\Delta \tilde{r}$  em função de grandezas usadas pelo método. Em seguida define-se a norma no espaço  $\mathbb{R}^n$ . E finalmente, aplicando a restrição para problemas moderadamente não lineares, são obtidos os critérios requeridos.

Para as soluções  $\lambda_{\underline{r}_L}$  de (II.21) que não satisfazem (II.60) é possível calcular os componentes  $\lambda_{\underline{r}_1}$  e  $\lambda_{\underline{r}_2}$ , definidos em (II.35) - (II.36), simplesmente particionando o vetor  $\underline{\alpha}$ , de (II.41), em dois vetores entre os elementos de ordem  $p$  e  $p+1$ . Para este fim serão constituídos os operadores  $\underline{T}_1$  e  $\underline{T}_2$  com a forma:

$$\underline{T}_1 = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{I}_{n-p} \end{bmatrix}, \quad \underline{T}_2 = \begin{bmatrix} \underline{I}_p & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \quad (\text{II.65})$$

que aplicados sucessivamente em  $\underline{\alpha}$  e levando em consideração (II.35), torna possível escrever:

$$\lambda_{\underline{r}_1} = \lambda \underline{X} \underline{T}_1 \underline{\alpha} = \lambda \sum_{p+1}^n \alpha_i X_i^i, \quad (\text{II.66})$$

$$\lambda_{\underline{r}_2} = \lambda \underline{X} \underline{T}_2 \underline{\alpha} = \lambda \sum_1^p \alpha_i X_i^i.$$

E a partir de (II.37), usando (II.43) e (II.66), chega-se a

$$\Delta \underline{r} = \underline{X} \underline{\delta}, \quad (\text{II.67})$$

onde o vetor  $\underline{\delta}$  é dado por

$$\underline{\delta} = \lambda \left[ \underline{T}_2 + \lambda (\underline{\Lambda} - \lambda \underline{I})^{-i} \right] \underline{\alpha}, \quad (\text{II.68})$$

ficando os seus termos expressos por:

$$\delta_i = \left[ \frac{1}{1 - (\lambda/\lambda_i)} \right] \lambda \alpha_i = \beta_i, \quad i \leq p \quad (\text{II.69a})$$

e para  $i > p$  os elementos  $\delta_i$  são nulos em virtude das definições de  $p$  e de  $\tilde{T}_2$ :

$$\delta_i = 0, \quad i > p \quad (\text{II.69b})$$

A condição de ortonormalidade (II.46) indica o tipo de norma a ser usada. Adota-se então,

$$\| \tilde{r} \|_{\varepsilon} = \left( \frac{1}{2} \tilde{r}^t \tilde{K}_e \tilde{r} \right)^{1/2} \quad (\text{II.70})$$

como norma para o espaço  $\mathbb{R}^n$ . Do fato de  $\tilde{K}_e$  ser simétrica e positiva definida, verifica-se que (II.70) atende as condições da definição de norma.

A seguir procura-se estabelecer um teste que permita verificar a hipótese que  $\| \Delta \tilde{r} \| \ll \| \lambda \tilde{r}_1 \|$ , usada para se desprezar os termos de ordem superior em (II.33).

Aplicando (II.70) a  $\lambda \tilde{r}_1$  e observando-se (II.66) resulta:

$$\| \lambda \tilde{r}_1 \|_{\varepsilon}^2 = \frac{1}{2} \lambda^2 \tilde{\alpha}^t \tilde{T}_1 \tilde{\alpha} = \frac{1}{2} \lambda^2 \sum_{p+1}^n \alpha_i^2, \quad (\text{II.71})$$

e de (II.70) e (II.67) - (II.69) pode-se escrever

$$\|\Delta \tilde{\mathbf{r}}\|_{\epsilon}^2 = \frac{1}{2} \lambda^2 \sum_{i=1}^p \left( \frac{1}{1-\lambda/\lambda_i} \right)^2 \alpha_i^2. \quad (\text{II.72})$$

Das expressões (II.71) - (II.72), a condição  $\|\Delta \tilde{\mathbf{r}}\|_{\epsilon} \ll \|\lambda \tilde{\mathbf{r}}_1\|_{\epsilon}$  pode ser escrita da seguinte forma

$$\frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^p \left( \frac{1}{1-\lambda/\lambda_i} \right)^2 \alpha_i^2 \right]^{1/2} \ll \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \right]^{1/2} \quad (\text{II.73})$$

Observa-se que essa condição não pode ser cumprida para valores de  $\lambda \rightarrow 0$  a menos que

$$\frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^p \alpha_i^2 \right]^{1/2} = \|\tilde{\mathbf{r}}_2\|_{\epsilon} \ll \|\tilde{\mathbf{r}}_1\|_{\epsilon} \quad (\text{II.74})$$

Além disso, das definições (II.23), (II.35), pode-se mostrar que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{r}}_L}^t \tilde{\mathbf{r}}_L &= \|\tilde{\mathbf{r}}_L\|_{\epsilon}^2 = \|\tilde{\mathbf{r}}_1\|_{\epsilon}^2 + \|\tilde{\mathbf{r}}_2\|_{\epsilon}^2 = \\ &= \frac{1}{2} \alpha_{\tilde{\mathbf{r}}_L}^t \alpha_{\tilde{\mathbf{r}}_L}. \end{aligned} \quad (\text{II.75})$$

Logo, de (II.75) resulta um teste mais útil para verificação de (II.74)

$$\left[ \frac{1}{2} \sum_1^p \alpha_i^2 \right]^{1/2} = \left[ \frac{1}{2} \sum_1^p (\tilde{R}^t \tilde{X}^i)^2 \right]^{1/2} \ll \left[ \frac{1}{2} \tilde{R}^t \tilde{r}_L \right]^{1/2}, \quad (\text{II.76})$$

envolvendo somente a carga aplicada  $\tilde{R}$ , a correspondente solução linear  $\tilde{r}_L$  e os  $p$  primeiros modos de flambagem  $\tilde{X}^i$ .

Se (II.76) não é satisfeito, então o método de superposição modal não descreve com suficiente precisão o verdadeiro comportamento estrutural.

Cabe ressaltar que os casos que cumprem (II.76) violam a condição mais restritiva (II.73) quando  $\lambda \rightarrow \lambda_1$ , a menos que  $\alpha_1 \equiv 0$ . Já que na prática  $\alpha_1$  identicamente nulo é impossível, devido a problemas numéricos, o método linearizado fica limitado o seu emprego a valores de  $\lambda$  satisfazendo:

$$\lambda_{1-} < \lambda < \lambda_{1+}, \quad (\text{II.77})$$

onde  $\lambda_{1-}$  e  $\lambda_{1+}$  são respectivamente os autovalores negativo e positivo de menor módulo. No caso em que os autovalores são todos positivos ou todos negativos, um dos limites em (II.77) é dado pelo cumprimento da condição (II.25) ou pelo início da não-linearidade do material.

Neste trabalho calcula-se os esforços em cada elemento tomando a expressão (II.20) a nível de elemento e desprezando o seu terceiro termo do lado esquerdo, ou seja

$$(\underline{K}_e^e + \underline{K}_g^e(\underline{\sigma}^e))\underline{r}^e = \underline{R}^e, \quad (\text{II.78})$$

onde  $\underline{K}_e^e$  é a matriz de rigidez elástica do elemento,  $\underline{r}^e$  o vetor com os deslocamentos relativos aos graus de liberdade dos nós pertencentes ao elemento,  $\underline{\sigma}^e$  o estado de tensões no elemento associado ao campo de deslocamentos  $\underline{r}_e$ ,  $\underline{K}_g^e(\underline{\sigma}^e)$  a matriz de rigidez geométrica do elemento correspondente ao estado de tensão  $\underline{\sigma}^e$ , e  $\underline{R}^e$  é o vetor que contém os esforços requeridos no elemento.



### III. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Os passos para implementação computacional do método da superposição modal são os seguintes (1):

- 1) Solução do problema elástico estático linear (II.21) para o carregamento aplicado  $\underline{R}$ .
- 2) Solução do problema de flambagem linear (II.51) resultante do passo 1 para os primeiros  $\ell$  autovalores e autovetores, onde geralmente na prática  $\ell \ll p \ll n$ .
- 3) Cálculo do vetor  $\underline{\alpha}$  (II.54).
- 4) Teste para verificar se a solução elástica linear é a verdadeira solução do problema (II.60).
- 5) Se o teste do passo 4 não for positivo, teste-se a aplicabilidade do método da superposição modal via (II.78).
- 6) Se o teste do passo 5 for positivo calcula-se os deslocamentos não lineares aproximados  $\underline{r}(\lambda)$  para o domínio de validade de  $\lambda$  usando (II.53).
- 7) Cálculo, se requerido, dos esforços nos elementos usando (II.78).

## IV. GERAÇÃO DE BASES DE TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

### IV.1 - Introdução

Como exposto no passo 2 do Capítulo III, tradicionalmente a base de transformação de coordenadas usada para desacoplar (II.40) é constituída pelos  $\ell$  primeiros autovetores,  $\ell \leq p \ll n$ .

No entanto, o cálculo do problema de autovalor (II.51) para estruturas de uso corrente exige, quase sempre, um grande esforço computacional. Para contornar esse problema examina-se, no presente trabalho, a utilização de uma base de transformação obtido através de uma análise de Rayleigh-Ritz com base de Ritz gerada pelo procedimento proposto por Lanczos em substituição a base modal.

Os procedimentos utilizados na obtenção das duas bases distintas são apresentadas neste capítulo.

### IV.2 - Método de Iteração por Subespaços (8)

O método de iteração por subespaços é utilizado na geração da base modal. Esse método consiste, basicamente, na associação da técnica de iteração inversa simultânea com o método de Rayleigh-Ritz. O ciclo iterativo inicia-se a partir de um conjunto conveniente de  $q$  vetores de partida.

O processo de iteração simultânea com  $q$  vetores linearmente independentes pode ser visto como uma iteração com o subespaço gerado por esses vetores, denominado de  $E_k$ , que converge para o subespaço gerado pelos  $q$  primeiros autovetores, denominado de  $E_\infty$ , quando  $k \rightarrow \infty$ .

No início do ciclo iterativo os vetores expandem o subespaço  $E_1$ . A iteração deverá continuar até  $E_k$  convergir para  $E_\infty$ . Portanto, o método procura obter a convergência do subespaço como um todo e não a convergência individual de cada vetor de iteração para seu correspondente autovetor.

O método inclui, conseqüentemente, as seguintes etapas.

Inicialmente define-se a matriz  $Y_1$ , onde suas colunas são constituídas pelos vetores de partida. A seguir, a cada ciclo iterativo passa-se do subespaço  $E_k$  para o subespaço  $E_{k+1}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , efetuando-se uma iteração inversa simultânea

$$\tilde{K}_e \bar{Y}_{k+1} = -\tilde{K}_g(\sigma_L) Y_k \quad (\text{IV.1})$$

Usando o método de Rayleigh-Ritz, pesquisa-se no subespaço  $E_{k+1}$  as melhores aproximações para os  $q$  primeiros autovetores e testa-se a convergência dos mesmos. Para isto, projeta-se inicialmente os operadores  $\tilde{K}_e$  e  $\tilde{K}_g(\sigma_L)$  no subespaço  $E_{k+1}$

$$\tilde{K}_{e_{k+1}} = \bar{Y}_{k+1}^t \tilde{K}_{k+1} \bar{Y}_{k+1} \quad (\text{IV.2})$$

$$\tilde{K}_{g(\sigma_L)_{k+1}} = \bar{Y}_{k+1}^t \tilde{K}_{g(\sigma_L)_{k+1}} \bar{Y}_{k+1}.$$

Posteriormente, resolve-se o problema de autovalor associado aos operados projetados:

$$\tilde{K}_{e_{k+1}} \tilde{Q}_{k+1} = -\tilde{K}_{g_{k+1}}(\sigma_L) \tilde{Q}_{k+1} \tilde{\Lambda}_{k+1}. \quad (\text{IV.3})$$

Finalmente, determina-se a melhor base no subespaço  $E_{k+1}$  (a base mais próxima possível da base dos autovetores):

$$\tilde{Y}_{k+1} = \bar{Y}_{k+1} \tilde{Q}_{k+1} \quad (\text{IV.4})$$

O ciclo iterativo é repetido até obter-se a convergência

$$\tilde{\Lambda}_{k+1} \rightarrow \tilde{\Lambda}, \quad \tilde{Y}_{k+1} \rightarrow \tilde{X}, \quad K = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{IV.5})$$

A convergência será alcançada quando  $k \rightarrow \infty$ , a menos que os vetores  $\tilde{Y}_1$  sejam ortogonais aos autovetores requeridos em  $\tilde{X}$ .

#### IV.3 - Base de Lanczos-Ritz (2,3,4)

A base proposta é constituída de aproximações de Rayleigh-Ritz calculadas a partir de vetores de Ritz gerados pelo algoritmo de Lanczos com um vetor de partida adequado.

O procedimento de Lanczos consiste em construir, sucessivamente a partir de um vetor de partida  $\underline{Y}$ , um conjunto de vetores ortogonais obtidos diretamente da seqüência de Krilov

$$\left[ \underline{Y}, \underline{K}_e^{-1} \underline{K}_g \underline{Y}, (\underline{K}_e^{-1} \underline{K}_g)^2 \underline{Y}, \dots, (\underline{K}_e^{-1} \underline{K}_g)^i \underline{Y} \right], \quad (\text{IV.6})$$

ortogonalizando cada um deles em relação ao precedente através da técnica de Gram-Schmidt.

Um aspecto interessante é que os auto-espacos ortogonais a  $\underline{Y}$  são também ortogonais aos vetores gerados pelo algoritmo de Lanczos. Como consequência, observa-se que teoricamente não é possível detectar modos ortogonais a  $\underline{Y}$  no subespaço dos vetores obtidos pelo algoritmo proposto.

Isso significa que se o vetor  $\underline{r}_d$  fosse conhecido e tomado como vetor de partida, se obteria através deste procedimento um conjunto de vetores contido no subespaço gerado pelos autovetores não ortogonais a  $\underline{r}_d$ .

Como o vetor  $\underline{r}_d$  não é conhecido, adota-se para vetor de partida uma aproximação de  $\underline{r}_d$ , tal como

$$\underline{Y} = \underline{K}_e^{-1} \underline{f}, \quad (\text{IV.7})$$

onde  $\underline{f}$  é um vetor próximo de  $\Delta \underline{R}$ , ou igual ao próprio vetor de carga  $\underline{R}$ .

Deste modo, o algoritmo usado para gerar a sequência de vetores de Lanczos é a seguinte.

O primeiro vetor é obtido normalizando em relação a  $\tilde{K}_e$  a solução de

$$\tilde{K}_e \bar{Y}_1 = \tilde{f}. \quad (\text{IV.8})$$

Logo

$$\tilde{Y}_1 = \frac{1}{\beta_1} \bar{Y}_1, \quad \beta_1 = (\bar{Y}_1^t \tilde{K}_e \bar{Y}_1)^{1/2} \quad (\text{IV.9})$$

Os demais vetores são calculados por

$$\tilde{K}_e \bar{Y}_i = -\tilde{K}_g (\sigma_L) \tilde{Y}_{i-1}, \quad i = 2, \dots, p \quad (\text{IV.10})$$

ortogonalizados a cada ciclo usando os seguintes procedimentos

$$\hat{Y}_i = \bar{Y}_i - \sum_{j=1}^{i-1} C_j \tilde{Y}_j, \quad (\text{IV.11})$$

onde

$$C_j = \tilde{Y}_j^t \tilde{K}_e \bar{Y}_i \quad (\text{IV.12})$$

e normalizados em relação a  $\tilde{K}_e$  ou seja

$$\tilde{Y}_i = \frac{1}{\beta_i} \hat{Y}_i, \quad \beta_i = (\hat{Y}_i^t \tilde{K}_e \hat{Y}_i)^{1/2}$$

Este algoritmo é numericamente muito eficiente no presente caso, visto que a matriz  $\tilde{K}_e$  já foi previamente decomposta.

O passo subsequente é a aplicação da análise de Rayleigh-Ritz e o procedimento é o já comentado na seção anterior e expresso por (IV.2) - (IV.4).

Os vetores obtidos pelo método de Lanczos-Ritz, serão denominadas neste trabalho de vetores Lanczos-Ritz. A eficiência destes vetores como base de transformação no método de superposição é verificada nas aplicações apresentadas no Capítulo VI.

## V. ELEMENTOS IMPLEMENTADOS

### V.1 - Introdução

Neste capítulo apresentam-se as matrizes  $\tilde{K}_e$ , denominada de matriz de rigidez elástica, e  $\tilde{K}_g(\underline{\sigma})$ , denominada de matriz de rigidez geométrica, dos elementos utilizados nas aplicações deste trabalho.

### V.2 - Elementos Para Estruturas de Barra (11)

Os elementos implementados foram o de treliça (plano e espacial) e pórtico (plano e espacial). Todos são do tipo barra, Figura V.1, com eixo reto de comprimento  $L$  e seção transversal constante de área  $A$ .

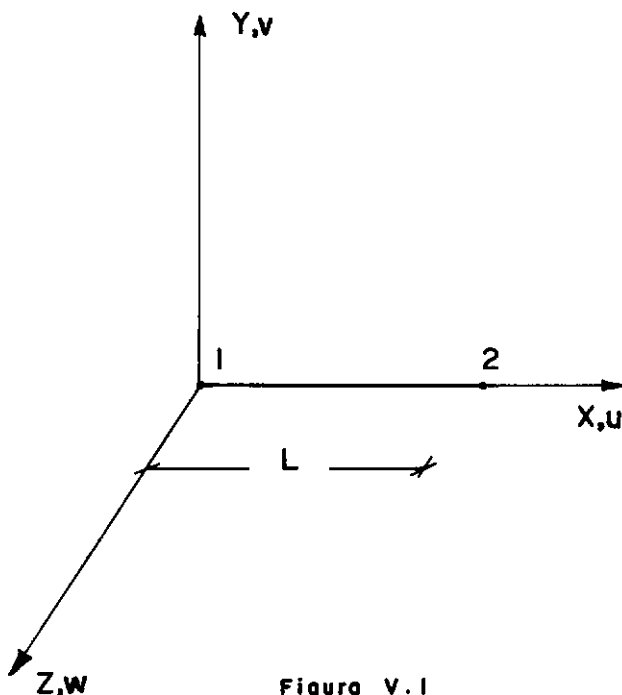


Figura V.1



E no que se segue o campo de deslocamento  $\underline{u}$  é representado por suas componentes nos eixos cartesianos, ou seja,  $\underline{u} = (u, v, w)$ .

### V.2.1 - Treliça Plana

Neste elemento considera-se somente a deformação axial  $\epsilon_x$ , sendo a mesma determinada por

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2, \quad (\text{V.1})$$

onde, conforme V.1,  $u$  e  $v$  são respectivamente as componentes dos deslocamentos nas direções  $x$  e  $y$ .

A matriz  $\underline{E}$  reduz-se ao módulo de elasticidade longitudinal  $E$ . E a relação campo de deslocamento - deslocamento nodais,  $\underline{u} = \underline{\Phi} \underline{r}$ , é dada por

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 1-\xi & 0 & \xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}, \text{ onde } \xi = \frac{x}{L} \quad (\text{V.2})$$

Levando em conta essas definições e de (II.17)-(II.18), obtém-se

$$\underline{K}_e = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{K}_g(\sigma) = \frac{\sigma_0 A}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (V.3)$$

sendo  $\sigma_0$  a tensão axial.

### V.2.2 - Pórtico Plano

Na formulação aqui empregada despreza-se a deformação de cisalhamento, sendo considerado apenas as deformações axiais e de flexão, ficando  $\underline{\varepsilon}$ , neste caso, reduzido a:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}_x = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} y + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2, \quad (V.4)$$

sendo  $u$  e  $v$  deslocamentos axiais. Neste caso, como no caso anterior,  $E$  reduz-se ao módulo de elasticidade longitudinal e a relação  $\underline{u} = \underline{\Phi} \underline{r}$  toma a seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\xi & 6(\xi-\xi^2)\eta & (-1+4\xi-3\xi^2)L\eta & \xi & 6(-\xi+\xi^2)\eta & (2\xi-3\xi^2)L\eta \\ 0 & 1-3\xi^2+2\xi^3 & (\xi-2\xi^2+\xi^3)L & 0 & 3\xi^2-2\xi^3 & (-\xi^2+\xi^3)L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ R_{w1} \\ u_2 \\ v_2 \\ R_{w2} \end{Bmatrix} \quad (V.5)$$

onde  $\xi = \frac{x}{L}$ ,  $\eta = \frac{y}{L}$ , e  $R_w$  representa a rotação da seção transversal em torno do eixo  $z$ .

Resultando de (II.17)-(II.18)

$$\tilde{K}_e = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} \frac{AL^2}{I} \\ I \\ 0 & 12 & & \text{simétrica} \\ 0 & 6L & 4L^2 \\ -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & 0 \\ I \\ 0 & 12 & -6L & 0 & 12 \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}, \quad (V.6a)$$

sendo I o momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo z, e

$$\tilde{K}_g(\sigma) = \frac{\sigma_0 A}{L} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & & \text{simétrica} \\ 0 & \frac{L}{10} & \frac{2L^2}{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{L}{10} & 0 & \frac{6}{5} \\ 0 & \frac{L}{10} & \frac{L^2}{30} & 0 & -\frac{L}{10} & \frac{2L^2}{15} \end{bmatrix} \quad (V.6b)$$

sendo  $\sigma_0$  a tensão axial da barra.

### V.2.3 - Treliça Espacial

Supondo-se o elemento de treliça espacial com as mesmas características do elemento de treliça plana, e fazendo uma extensão do caso plano para o tridimensional, chega-se as matri-

zes a seguir:

$$\tilde{K}_e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & 0 & & \text{simétrica} & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ -1 & 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (V.7a)$$

$$\tilde{K}_g(\sigma) = \frac{\sigma_0 A}{L} \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ 0 & 1 & & \text{simétrica} & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (V.7b)$$

#### V.2.4 - Pórtico Espacial

Considerando-se a torção e tomando o caso tridimensional como uma extensão do caso plano, resulta para matriz de rigidez elástica:

$$\tilde{K}_e = \begin{bmatrix} a & & & & & & & & & & & \\ 0 & b & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & c & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & d & & & \text{simétrica} & & & & & \\ 0 & 0 & -h & 0 & e & & & & & & & \\ 0 & g & 0 & 0 & 0 & f & & & & & & \\ -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & & & & & \\ 0 & -b & 0 & 0 & 0 & -g & 0 & b & & & & \\ 0 & 0 & -c & 0 & h & 0 & 0 & 0 & c & & & \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h & 0 & i & 0 & 0 & 0 & h & 0 & e & 0 \\ 0 & g & 0 & 0 & 0 & j & 0 & -g & 0 & 0 & 0 & f \end{bmatrix} \quad (V.8a)$$



onde

$$a = \frac{6A\sigma_0}{5L}, \quad b = \frac{\sigma_0 I_x}{L}, \quad c = \frac{2LA\sigma_0}{15}, \quad d = \frac{A\sigma_0}{10} \quad e$$

$$e = -\frac{LA\sigma_0}{30}.$$

## VI. EXEMPLOS

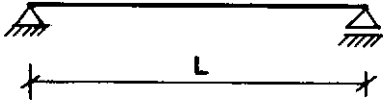
### VI.1 - Introdução

O presente capítulo tem por objetivo a apresentação de exemplos de aplicação que permitem efetuar uma avaliação do emprego do método de superposição modal no cálculo da resposta não linear geométrica.

Através dos exemplos procura-se analisar a precisão dos resultados do método em função da relação  $\| \tilde{r}_2 \| : \| \tilde{r}_L \|$  e a sensibilidade da resposta com relação ao número de modos utilizados. Faz-se uma comparação dos resultados e do esforço computacional entre o método de superposição com base modal e base Lanczos-Ritz, e também com outros métodos clássicos da análise não linear, principalmente com o método Newton-Raphson.

### VI.2 - Exemplo 1

O primeiro exemplo é uma viga simplesmente apoiada discretizada com 4 elementos de pórtico plano e representada na Figura (VI.2.1.). Apesar de sua simplicidade o exemplo é útil para se fazer uma primeira comparação entre os resultados do método de superposição modal e os obtidos com o método Newton-Raphson, como também confrontá-los com a solução da viga coluna.



$$E = 2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$$

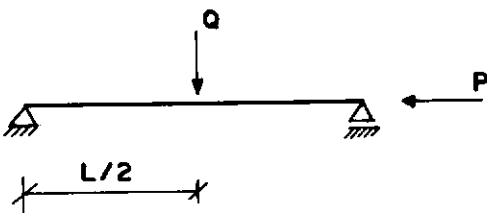
$$I_z = 1958 \text{ cm}^4$$

$$A = 47.3 \text{ cm}^2$$

$$L = 400 \text{ cm}$$

Figura vi.2.1 Viga-coluna

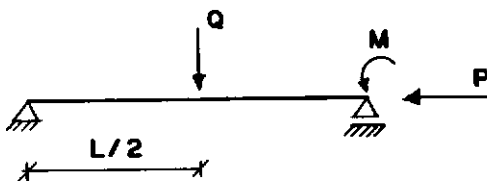
Examinou-se a resposta não-linear desta viga submetida a 5 casos de carregamento. Os 3 primeiros casos, mostrados na Figura (VI.2.2) e Tabela (VI.2.1), se diferenciam apenas pela relação Q:P. O quarto caso encontra-se na Figura (VI.2.3). E o quinto caso é igual ao segundo exceto que a carga P é de tração.



CASO	Q : P
1	1:100
2	10:100
3	100:100

Figura vi.2.2: Casos 1-3

Tabela vi.2.1 Casos 1-3



$$Q:M:P = 10:15:100 \text{ (EM MÓDULO)}$$

Figura vi.2.3 Caso 4



Em todos os casos a análise pelo método de superposição modal foi realizada utilizando-se 4 modos de flambagem como matriz de transformação de coordenadas.

Nas Tabelas (VI.2.2)-(VI.2.6) encontram-se o deslocamento e o momento fletor no meio da viga para cada um dos casos, obtidos pelo método de superposição modal (M.S.M.), pelo método Newton-Raphson (M.N.R.) e pela solução da equação da viga-coluna (vg-col) (9). Também nestas tabelas apresentam-se os respectivos valores de  $\| \tilde{r}_L \|$  e  $\| \tilde{r}_2 \|$  para cada caso.

$\lambda/\lambda_1$	DESLOCAMENTO TRANSVERSAL (cm)			MOMENTO FLETOR (kgf.m)		
	M.S.M.	VG-COL	M.N.R.	M.S.M.	VG-COL	M.N.R.
0,1	0,091	0,091	0,091	277	277	277
0,2	0,205	0,205	0,205	612	612	611
0,3	0,351	0,351	0,351	1.029	1.029	1.028
0,4	0,546	0,546	0,544	1.569	1.569	1.566
0,5	0,817	0,818	0,814	2.305	2.306	2.300
0,6	1,224	1,225	1,218	3.386	3.388	3.375
0,7	1,902	1,904	1,887	5.154	5.158	5.126
0,8	3,256	3,261	3,215	8.638	8.651	8.553
0,9	7,314	7,345	7,105	18.987	19.060	18.505

$\lambda_1 = 2537,66 : \| \tilde{r}_L \| = 0,142 ; \| \tilde{r}_2 \| = 0,013$

TABELA VI.2.2 - Caso 1: Relação Q:P = 1:100

$\lambda/\lambda_1$	DESLOCAMENTO TRANSVERSAL (cm)			MOMENTO FLETOR (kgf.m)		
	M.S.M.	VG-COL	M.N.R.	M.S.M.	VG-COL	M.N.R.
0,1	0,91	0,91	0,91	2.769	2.769	2.769
0,2	2,05	2,05	2,05	6.116	6.117	6.113
0,3	3,51	3,51	3,51	10.285	10.288	10.274
0,4	5,46	5,46	5,44	15.687	15.691	15.655
0,5	8,17	8,18	8,13	23.055	23.063	22.969
0,6	12,24	12,25	12,11	33.861	33.878	33.612
0,7	19,02	19,04	18,59	51.538	51.578	50.661
0,8	32,56	32,61	30,50	86.380	80.506	81.871
0,9	73,14	73,45	54,64	189.865	190.601	146.580

$\lambda_1 = 2537,66;$        $\|\tilde{\mathbf{r}}_L\| = 0,191;$        $\|\tilde{\mathbf{r}}_2\| = 0,127$

TABELA VI.2.3 - Caso 2: Relação Q:P = 10:100

$\lambda/\lambda_1$	DESLOCAMENTO TRANSVERSAL (cm)			MOMENTO FLETOR (kgf.m)		
	M.S.M.	VG-COL	M.N.R.	M.S.M.	VG-COL	M.N.R.
0,1	9,1	9,1	9,1	27.692	27.694	27.650
0,2	20,5	20,5	20,3	61.159	61.168	60.697
0,3	35,1	35,1	33,9	102.854	102.876	100.542
0,4	54,6	54,6	50,2	156.865	156.910	148.383
0,5	81,7	81,8	68,4	230.548	230.633	204.348
0,6	122,4	122,5	87,9	338.613	338.784	266.526
0,7	190,2	190,4	105,9	515.379	515.780	331.213
0,8	325,6	326,1	121,3	863.804	865.053	394.687
0,9	731,4	734,5	133,9	1898.658	1906.009	456.325
$\lambda_1 = 2537,66;$	$\ \underline{r}_L\  = 1,281$		$\ \underline{r}_2\  = 1,273$			

TABELA VI.2.4 - Caso 3: Relação Q:P = 100:100

$\lambda/\lambda_1$	DESLOCAMENTO TRANSVERSAL (cm)			MOMENTO FLETOR (kgf.m)		
	M.S.M.	VG-COL	M.N.R.	M.S.M.	VG-COL	M.N.R.
0,1	0,923	0,923	0,923	2.791	2.791	2.790
0,2	2,075	2,075	2,073	6.166	6.167	6.162
0,3	3,553	3,553	3,545	10.373	10.375	10.362
0,4	5,520	5,520	5,500	15.826	15.830	15.794
0,5	8,268	8,271	8,219	23.269	23.278	23.182
0,6	12,386	12,392	12,252	34.190	34.208	33.937
0,7	19,240	19,257	18,801	52.062	52.104	51.166
0,8	32,936	32,990	30,822	87.302	87.430	82.680
0,9	73,997	74,315	55,078	191.993	192.739	147.744

$\lambda_1 = 2537,66;$        $\|\underline{r}_L\| = 0,192;$        $\|\underline{r}_2\| = 0,129$

TABELA VI.2.5 - Caso 4: Momento na Extremidade

$\lambda/\lambda_1$	DESLOCAMENTO TRANSVERSAL (cm)			MOMENTO FLETOR (kgf.m)		
	M.S.M.	VG-COL	M.N.R.	M.S.M.	VG-COL	M.N.R.
0,1	0,749	0,749	0,749	2.348	2.348	2.348
0,2	1,375	1,375	1,376	4.378	4.378	4.379
0,3	1,906	1,906	1,908	6.164	6.162	6.166
0,4	2,362	2,363	2,366	7.756	7.752	7.758
0,5	2,759	2,760	2,765	9.192	9.187	9.195
0,6	3,109	3,108	3,115	10.502	10.494	10.504
0,7	3,416	3,417	3,425	11.706	11.694	11.708
0,8	3,691	3,692	3,702	12.821	12.806	12.823
0,9	3,938	3,939	3,951	13.862	13.843	13.862

$\lambda_1 = -2537,66;$        $\|r_{\sim L}\| = 0,191;$        $\|r_{\sim 2}\| = 0,127$

TABELA VI.2.6 - Caso 5: Força P de Tração

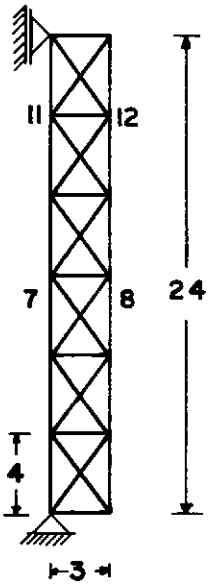
Nos casos analisados, observa-se que os resultados do método de superposição modal concordam de forma acentuada com os da solução da viga-coluna, independentemente do nível de carga atuante  $\lambda$ .

Nos três primeiros casos, comparando-se os deslocamentos e momentos fletores calculados pelo método de superposição modal aos calculados pelo método Newton-Raphson, nota-se que a discrepância entre os mesmos ocorre para níveis de carga progressivamente mais baixos a medida que a relação Q:P aumenta. Nestes casos o aumento da relação Q:P implica no aumento da relação  $\|\underline{r}_2\| : \|\underline{r}_L\|$ , Tabelas (VI.2.2)- (VI.2.4), o que significa que a medida que Q:P cresce os termos desprezados em (II.33) passam a ser relevantes.

Cabe ressaltar a sensibilidade do método de superposição modal ao efeito de enrijecimento da viga no Caso 5, Tabela (VI.2.6), obtendo resultados totalmente compatíveis com os da teoria da viga-coluna e os do método Newton-Raphson.

### VI.3 - Exemplo 2

Como segundo exemplo tem-se a treliça plana analisada por D.A. NAGY (1) e representada na Figura (VI.3.1). Neste trabalho a treliça é submetida a 7 diferentes casos de carregamento e sua resposta calculada através do método de superposição modal usando os modos de flambagem como base. Os resultados obtidos são comparados com os do método Newton-Raphson.



$$E = 10000000$$

$$A = 1 \quad (\text{Vertical})$$

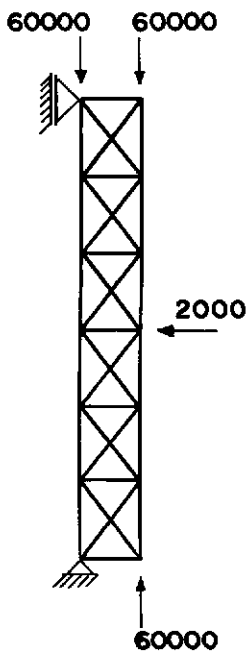
$$A = 1/4 \quad (\text{Diagonal})$$

$$A = 1/3 \quad (\text{Horizontal int.})$$

$$A = 1/6 \quad (\text{Horizontal ext.})$$

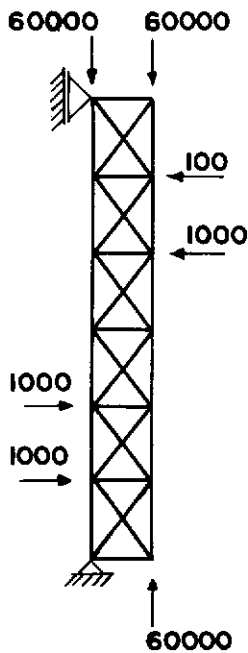
Figura vi.3.1: Trelica plana

$$\lambda_1 = 4,33$$



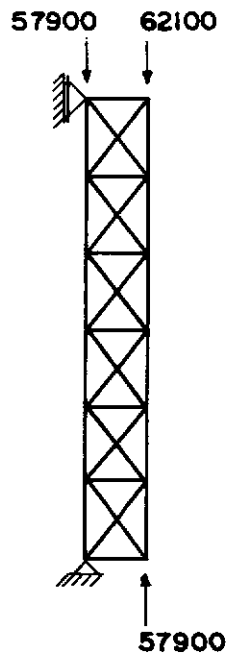
Caso b

$$\lambda_1 = 4,33$$



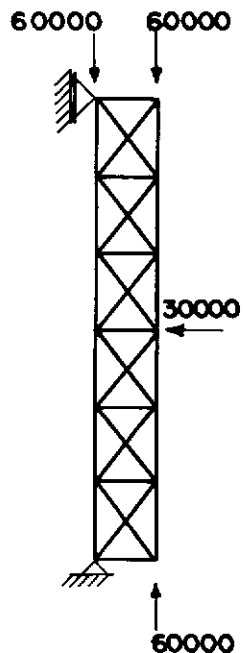
Caso c

$$\lambda_1 = 4,34$$



Caso d

$$\lambda_1 = 4,26$$



Caso g

Figura vi.3.2: Casos de carregamento

Foram analisados os casos b, c, d e g proposto em (1), representados na Figura (VI.3.2), usando-se 2 bases diferentes. A primeira base é constituído pelos 5 primeiros modos de flambagem (MD5) e a segunda pelos 5 primeiros vetores de Lanczos-Ritz (LR5) gerados a partir da solução estática linear.

Apresenta-se nas Tabelas (VI.3.1) e (VI.3.2) o deslocamento horizontal do nó 7 respectivamente para os casos b e g, calculados através das duas versões do método de superposição citadas anteriormente. Da mesma forma, na Tabela (VI.3.3), mostra-se para o caso c o deslocamento horizontal do nó 11. Enquanto que na Tabela (VI.3.4) tem-se o deslocamento do nó 12 para o caso d.

Observa-se, nestes casos, que as duas versões apresentam praticamente o mesmo resultado. Contudo, o custo computacional das análises com a base Lanczos-Ritz representaram em média apenas 25% do custo das análises com a base modal.



## CASO b

## DESLOCAMENTO HORIZONTAL N° 7

$\lambda/\lambda_1$	MD5	LR5
0,1	0,0099	0,0099
0,2	0,0221	0,0222
0,3	0,0376	0,0377
0,4	0,0580	0,0581
0,5	0,0862	0,0863
0,6	0,1279	0,1281
0,7	0,1966	0,1970
0,8	0,3329	0,3333
0,9	0,7387	0,7392

TABELA VI.3.1 - Deslocamentos

## CASO g

## DESLOCAMENTO HORIZONTAL N° 7

$\lambda/\lambda_1$	MD5	LR5
0,1	0,146	0,146
0,2	0,327	0,327
0,3	0,555	0,555
0,4	0,855	0,855
0,5	1,270	1,270
0,6	1,884	1,885
0,7	2,897	2,898
0,8	4,903	4,904
0,9	10,881	10,882

TABELA VI.3.2 - Deslocamentos

CASO c		
DESLOCAMENTO HORIZONTAL Nº 11		
$\lambda/\lambda_1$	MD5	LR5
0,1	0,0018	0,0018
0,2	0,0037	0,0037
0,3	0,0059	0,0059
0,4	0,0083	0,0083
0,5	0,0111	0,0111
0,6	0,0141	0,0142
0,7	0,0177	0,0177
0,8	0,0218	0,0218
0,9	0,0266	0,0266

TABELA VI.3.3 - Deslocamentos

CASO d		
DESLOCAMENTO HORIZONTAL Nº 12		
$\lambda/\lambda_1$	MD5	LR5
0,1	0,0026	0,0026
0,2	0,0051	0,0051
0,3	0,0076	0,0076
0,4	0,0099	0,0100
0,5	0,0122	0,0122
0,6	0,0143	0,0146
0,7	0,0163	0,0166
0,8	0,0181	0,0181
0,9	0,0197	0,0202

TABELA VI.3.4 - Deslocamentos

## VI.4 - Exemplo 3

O terceiro exemplo é o pórtico plano (5) representado na Figura (VI.4.1) e submetido aos dois carregamentos indicados.

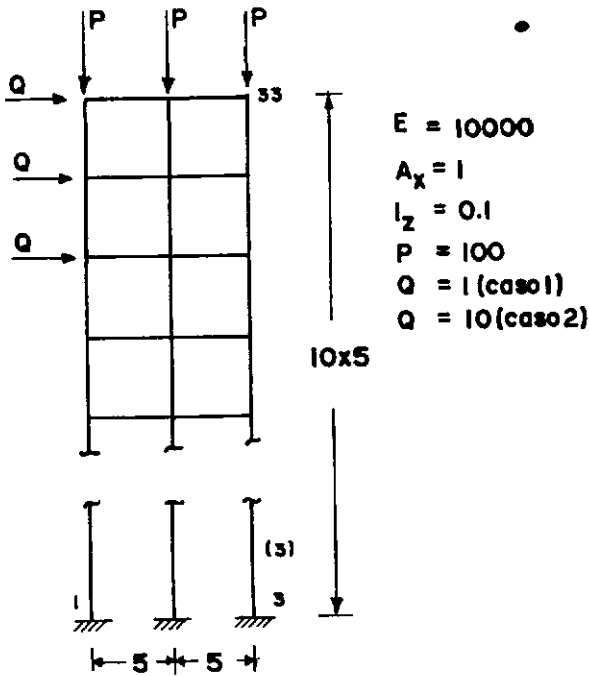


Figura VI.4.1 Pórtico plano

Para o primeiro caso de carregamento ( $Q:P = 1:100$ ) são apresentados na Tabela (VI.4.1) o deslocamento horizontal no topo do pórtico (nó 33) e o momento de engaste no apoio (nó 1), calculados através do método de superposição e do método Newton-Raphson. No método de superposição empregou-se como base 4 vetores de Lanczos-Ritz gerados a partir da resposta estática linear. Verifica-se, baseado nesta tabela, a boa aproximação dos resultados encontrados pelos dois métodos.

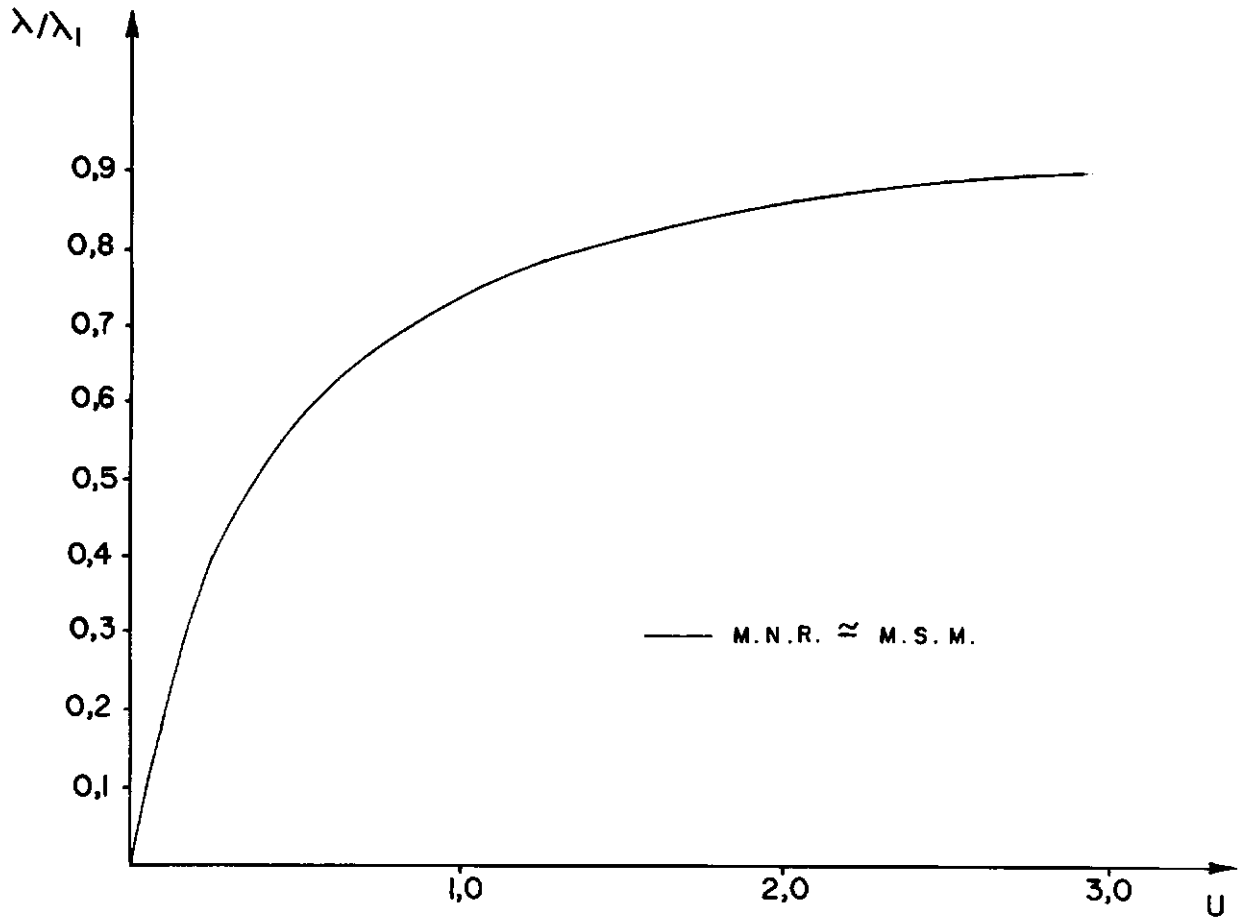


Figura vi.4.2 - Deslocamento nó 33

Analisou-se o segundo caso ( $Q:P = 10:100$ ) através do método de superposição com bases de 2, 4 e 6 vetores de Lanczos-Ritz, todos gerados a partir da solução linear. O deslocamento horizontal no topo (nó 33), calculado através do método de superposição com as 3 diferentes bases, é confrontado com o obtido pelo método Newton-Raphson na Tabela (VI.4.2). Constata-se a boa concordância entre os resultados do método de superposição com 4 e 6 vetores-base e do método Newton-Raphson.

$\lambda/\lambda_1$	DESLOCAMENTOS NO TOPO		MOMENTO NO APOIO	
	LR4	M.N.R.	LR4	M.N.R.
0,1	0,043	0,042	0,292	0,292
0,2	0,096	0,096	0,611	0,610
0,3	0,164	0,163	0,965	0,962
0,4	0,253	0,250	1,365	1,359
0,5	0,375	0,370	1,831	1,819
0,6	0,557	0,547	2,400	2,378
0,7	0,855	0,833	3,157	3,115
0,8	1,445	1,385	4,361	4,264
0,9	3,194	2,921	7,412	6,996
$\lambda_1 = 8,84;$ $\ \tilde{r}_L\  = 0,869;$ $\ \tilde{r}_2\  = 0,077$				

TABELA VI.4.1 - Caso 1

Na Figura (VI.4.2) é apresentado, para visualização do comportamento da estrutura e comparação com a análise linear, o gráfico carga-deslocamento horizontal no topo (nó 33) para o primeiro carregamento.

CASO 2				
DESLOCAMENTO HORIZONTAL NO TOPO				
$\lambda/\lambda_1$	LR2	LR4	LR6	M.N.R.
0,1	0,438	0,428	0,428	0,427
0,2	0,983	0,957	0,957	0,953
0,3	1,678	1,629	1,629	1,613
0,4	2,600	2,512	2,512	2,482
0,5	3,886	3,732	3,732	3,665
0,6	5,806	5,536	5,536	5,383
0,7	8,995	8,503	8,503	8,102
0,8	15,360	14,361	14,361	12,296
0,9	34,423	31,742	31,741	23,329
$\lambda_1 = 8,79;$ $\ \tilde{r}_L\  = 1,161;$ $\ \tilde{r}_2\  = 0,773$				

TABELA VI.4.2 - Deslocamentos

Nas Tabelas (VI.4.3) e (VI.4.4) encontram-se os esforços atuantes no elemento 3, indicado na Figura (VI.4.1), obtidos respectivamente pelo método de superposição e pelo método Newton-Raphson. Escolheu-se especialmente este elemento porque o mesmo, além de ser um dos mais solicitados na estrutura, apresenta uma mudança no sentido dos esforços com o incremento do carregamento. Observa-se que o método proposto descreve com grande precisão a variação dos esforços, captando as mudanças nos sentidos do cortante, processada entre os níveis  $\lambda/\lambda_1 = 0,5$  e  $\lambda/\lambda_1 = 0,6$ , e do momento fletor do nó 3, processada entre os níveis  $\lambda/\lambda_1 = 0,8$  e  $\lambda/\lambda_1 = 0,9$ .

$\lambda/\lambda_1$	MÉTODO DE SUPERPOSIÇÃO - 4 VETORES LANCZOS-RITZ			
	AXIAL	CORTANTE	MOMENTO N.º 3	MOMENTO N.º 6
0,1	20,9	0,73	2,87	1,19
0,2	44,5	1,31	5,90	2,48
0,3	71,9	1,65	9,11	3,87
0,4	105,0	1,59	12,50	5,46
0,5	147,1	0,83	16,02	7,29
0,6	204,6	- 1,33	19,52	9,58
0,7	292,9	- 6,72	22,44	12,98
0,8	457,1	- 22,23	21,92	20,19
0,9	923,7	- 98,15	- 8,45	54,44

TABELA VI.4.3 - Esforços Elemento 3

$\lambda/\lambda_1$	NEWTON-RAPHSON			
	AXIAL	CORTANTE	MOMENTO N.º 3	MOMENTO N.º 6
0,1	20,9	0,73	2,87	1,19
0,2	44,4	1,31	5,90	2,47
0,3	71,7	1,66	9,10	3,88
0,4	104,6	1,63	12,48	5,44
0,5	146,0	0,91	15,97	7,22
0,6	201,8	- 1,13	19,42	9,39
0,7	284,7	- 6,12	22,17	12,36
0,8	425,8	- 19,16	21,42	17,44
0,9	717,3	- 58,63	- 1,53	27,93

TABELA VI.4.4 - Esforços Elemento 3

Na Tabela (VI.4.5) são comparados, para o Caso 2, os custos computacionais, em termos de CPU (Central Process Unit), do método de superposição com base modal, do método de superposição com base de Lanczos-Ritz e de método Newton-Raphson. Esses custos referem-se a determinação dos deslocamentos nodais nos 9 incrementos de carga utilizados para gerar os dados da Tabela (VI.4.2). Nota-se a grande eficiência do método de superposição com base de Lanczos-Ritz em relação as duas análises anteriores.

M É T O D O	CUSTO (%)
Lanczos-Ritz (4 vetores)	100
Sspace (4 autovetores)	670
Newton-Raphson	1.180

TABELA VI.4.5 - Custos

#### VI.5 - Exemplo 4

Como quarto exemplo efetuou-se a análise do arco circular representado na Figura (VI.5.1), submetido a dois casos de carregamento. A estrutura foi discretizada com o emprego de 40 elementos do tipo pórtico plano.



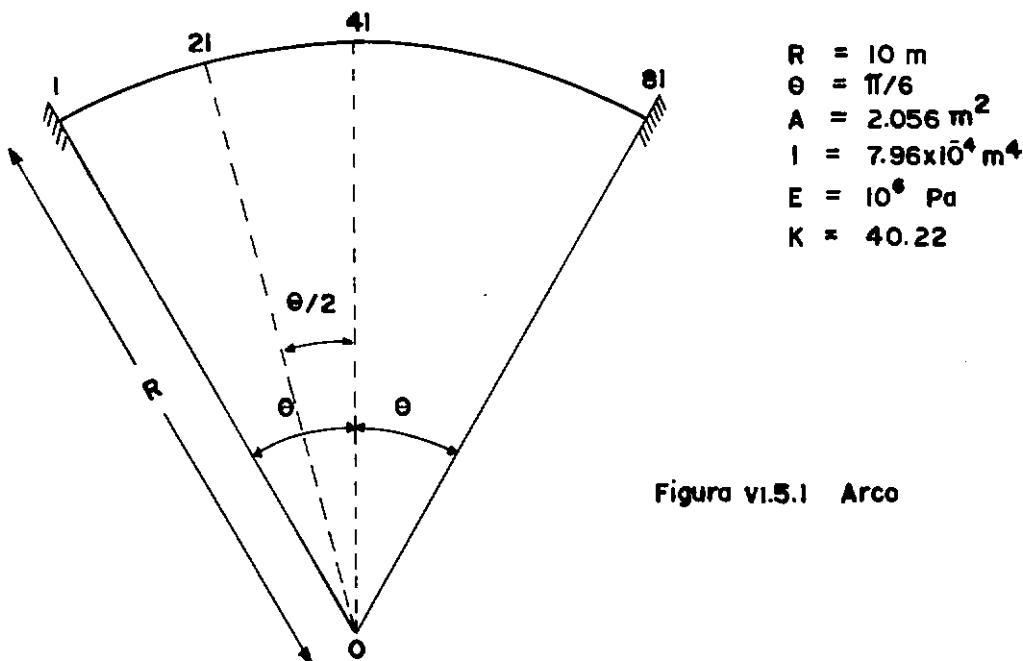


Figura vi.5.1 Arco

No primeiro caso de carregamento aplicou-se no meio do vão uma força  $P$  concentrada, vertical e de sentido de cima para baixo. O segundo caso constitui-se de cargas idênticas ao do caso anterior aplicadas em todos os nós não restringidos do arco, todas com o mesmo módulo  $P$  exceto as atuantes nos nós 19, 20, 21 que são respectivamente iguais a  $1.5 P$ ,  $2.0 P$  e  $1.5 P$ . Esse segundo caso procura representar um carregamento simétrico com uma imperfeição visando ativar o primeiro modo de flambagem.

As análises pelo método de superposição foram realizadas utilizando como base de transformação 5 vetores de Lanczos-Ritz gerados a partir da solução linear.

Realizada a análise do primeiro caso de carregamento, verificou-se a discordância entre os resultados obtidos pelo método de superposição e os obtidos pelo método de Newton-Raphson. Ressalte-se que os valores encontrados para  $\|\underline{r}_L\|$  e  $\|\underline{r}_2\|$  foram iguais neste caso, denunciando a não aplicabilidade do método.

Já para o segundo caso as normas  $\|\underline{r}_2\|$  e  $\|\underline{r}_L\|$  são respectivamente 0,133 e 0,046, e o método proposto apresenta resultados de deslocamento compatíveis com os da análise não linear completa, Tabelas (VI.5.1) e (VI.5.2).

$\lambda/\lambda_1$	DESLOCAMENTO HORIZONTAL (cm)		DESLOCAMENTO VERTICAL (cm)		ROTAÇÃO ( $10^{-2}$ rad)	
	LR5	M.N.R.	LR5	M.N.R.	LR5	M.N.R.
0,1	0,039	0,039	-0,087	-0,087	0,081	0,081
0,2	0,087	0,087	-0,179	-0,181	0,184	0,184
0,3	0,149	0,149	-0,278	-0,283	0,320	0,320
0,4	0,230	0,231	-0,385	-0,396	0,504	0,504
0,5	0,344	0,346	-0,502	-0,528	0,767	0,770
0,6	0,513	0,518	-0,632	-0,691	1,168	1,177
0,7	0,793	0,808	-0,779	-0,925	1,846	1,876
0,8	1,351	1,409	-0,949	-1,402	3,220	3,349
0,9	3,019	3,918	-1,150	-4,867	7,385	9,635
$\lambda_1 = 7,707; \quad \ \underline{r}_L\  = 0,133; \quad \ \underline{r}_2\  = 0,046$						

TABELA VI.5.1 - Deslocamentos Nó 41 - Caso 2

$\lambda/\lambda_1$	DESLOCAMENTO HORIZONTAL (cm)		DESLOCAMENTO VERTICAL (cm)		ROTAÇÃO ( $10^{-2}$ rad)	
	LR5	M.N.R.	LR5	M.N.R.	LR5	M.N.R.
0,1	0,046	0,046	-0,145	-0,145	0,057	0,057
0,2	0,102	0,102	-0,317	-0,318	0,125	0,125
0,3	0,173	0,173	-0,526	-0,529	0,206	0,208
0,4	0,266	0,267	-0,793	-0,800	0,309	0,312
0,5	0,395	0,397	-1,115	-1,168	0,443	0,452
0,6	0,587	0,594	-1,672	-1,711	0,632	0,654
0,7	0,907	0,926	-2,518	-2,621	0,928	0,984
0,8	1,549	1,625	-4,189	-4,539	1,484	1,670
0,9	3,494	4,614	-9,168	-13,360	3,061	5,030
$\lambda_1 = 7,707$ ; $\ \underline{r}_L\  = 0,133$ ; $\ \underline{r}_2\  = 0,046$						

TABELA VI.5.2 - Deslocamentos N<sup>o</sup> 21 - Caso 2

Nas Figuras (VI.5.2) e (VI.5.3) são traçados gráficos de deslocamentos em função da carga aplicada para uma melhor visualização da resposta estrutural.

### VI.6 - Exemplo 5

A torre treliçada da Figura (VI.6.1) foi analisada por Rodrigo (6,7) através de diversos métodos de análise não linear geométrica.

O carregamento, a que a estrutura está submetida, foi dividido em 20 incrementos. Na Tabela (VI.6.1), são apresentados os deslocamentos  $u$  (direção  $x$ ) do nó 18 para cada acréscimo

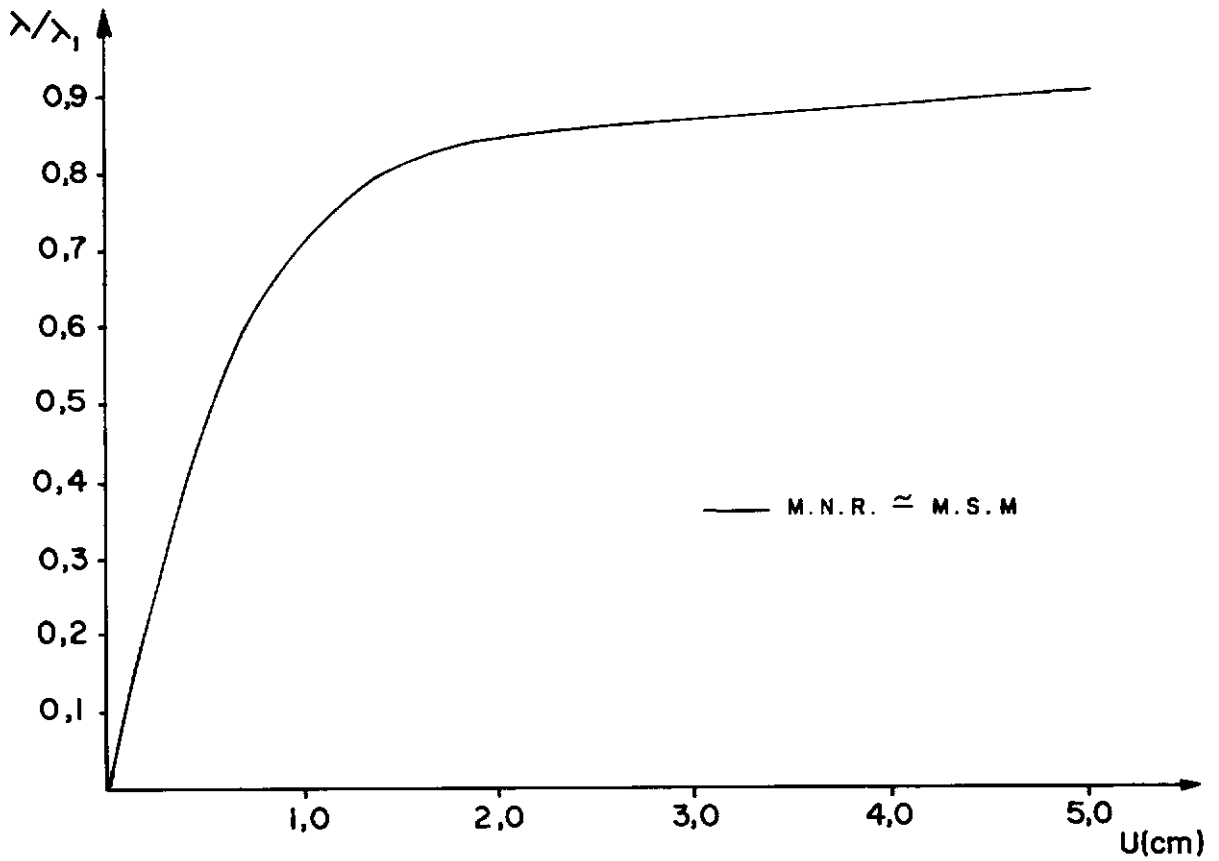


Figura vi.5.2 Deslocamento vertical nó 41-caso 2

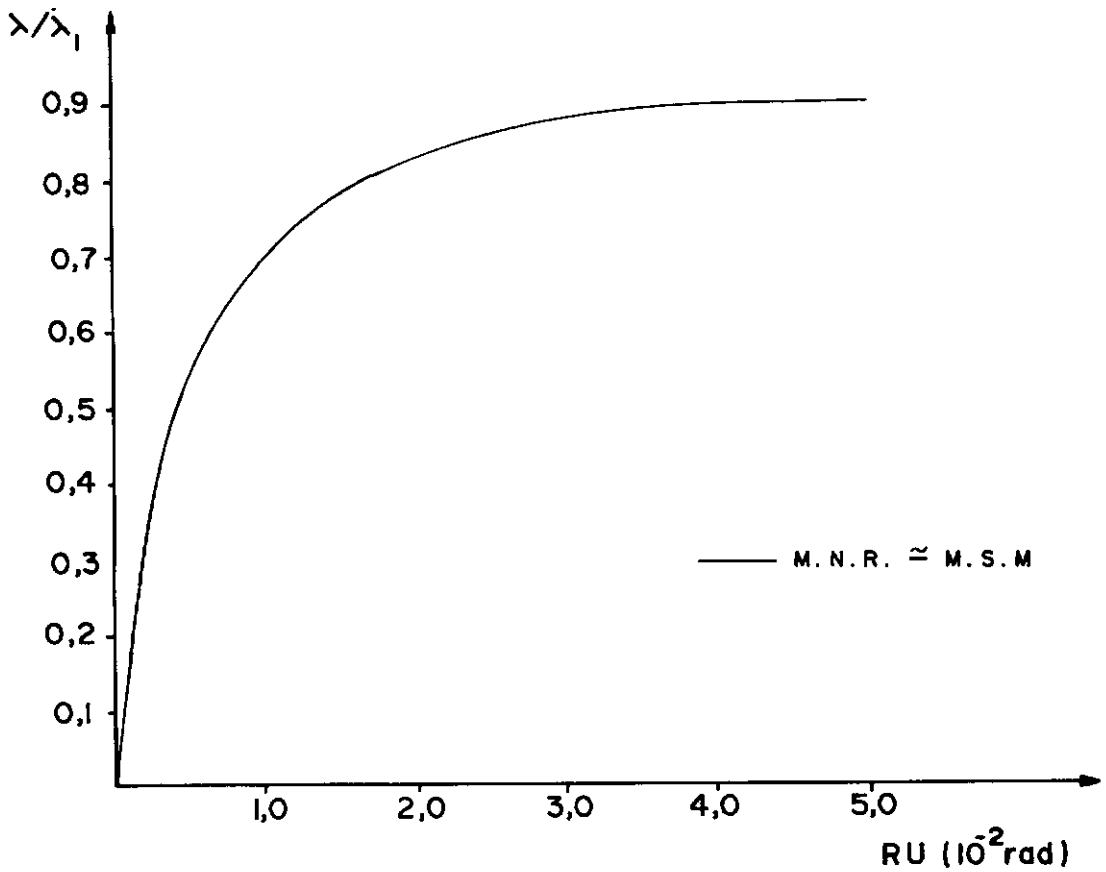


Figura vi.5.3 - Rotação nó 21-caso 2

de carga obtidos por Rodrigo em seu trabalho juntamente com os do método de superposição.

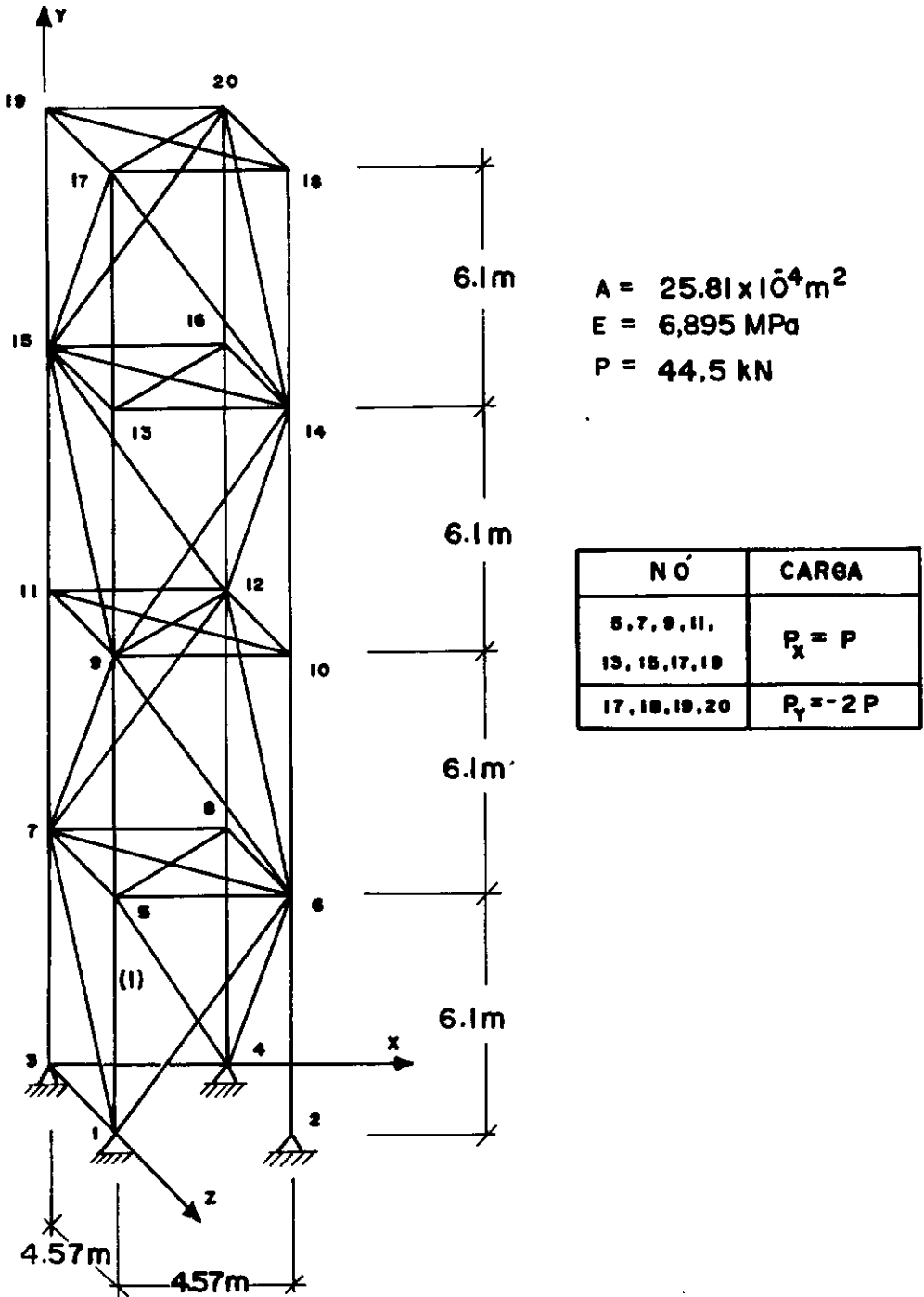


Figura vi. 6.1 Trelica espacial

A curva carga-deslocamento é representada na Figura (VI.6.2). Observa-se que a estrutura apresenta um comportamento moderadamente não linear no intervalo de carga em questão.

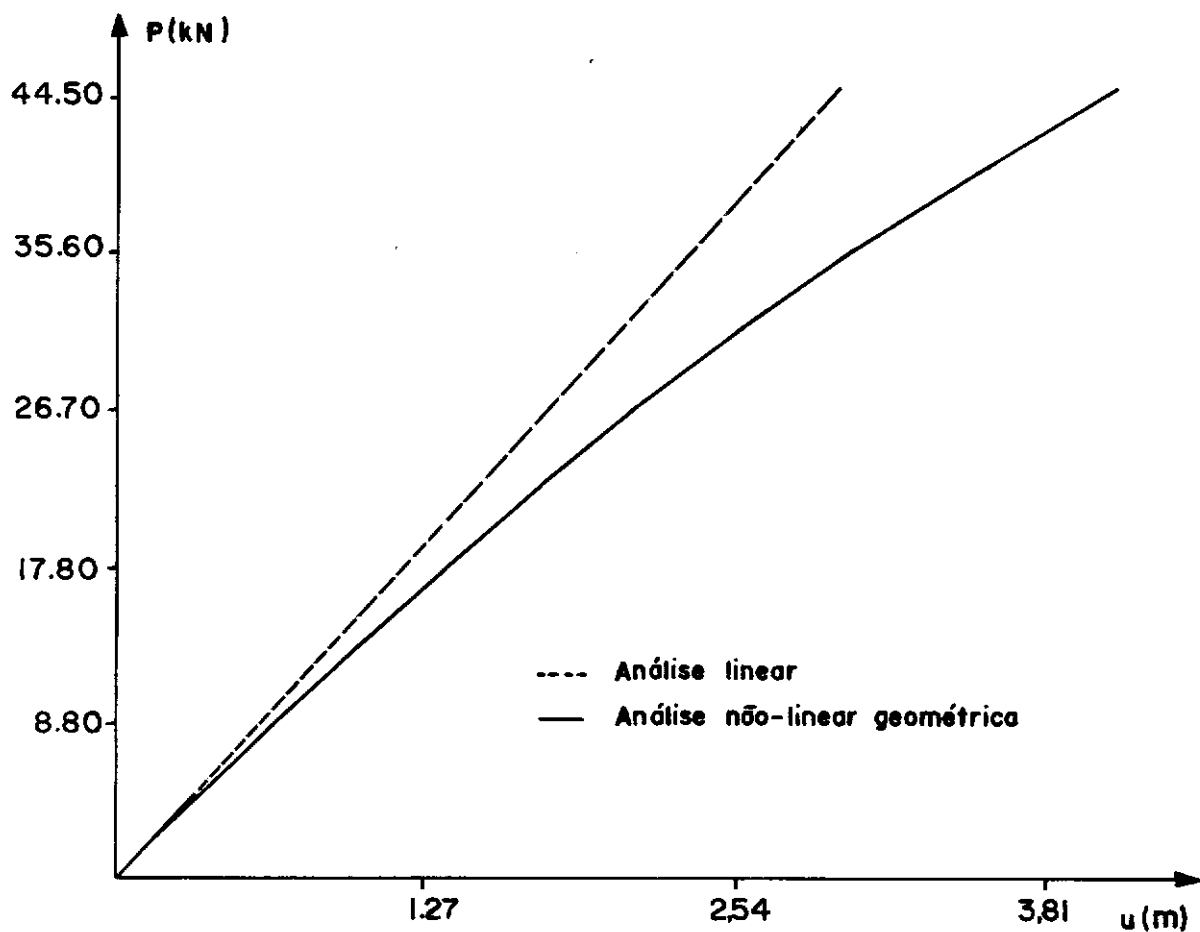


Figura VI.6.2 Deslocamento no 18

Na Tabela (VI.6.2) encontram-se os esforços axiais na barra 1, indicada na Figura VI.6.1, em 10 diferentes incrementos de carga.

INCR.	P (kN)	M É T O D O				
		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
2	4,45	0,305	0,305	0,300	0,303	0,305
4	8,90	0,628	0,628	0,616	0,625	0,628
6	13,35	0,970	0,970	0,948	0,966	0,970
8	17,80	1,332	1,332	1,297	1,328	1,334
10	22,25	1,718	1,718	1,664	1,713	1,710
12	26,70	2,129	2,129	2,050	2,124	2,136
14	31,15	2,583	2,569	2,456	2,563	2,577
16	35,60	3,040	3,040	2,883	3,034	3,053
17	37,83	3,290	3,290	3,104	3,282	3,305
18	40,05	3,548	3,541	3,331	3,540	3,567
19	42,28	3,817	3,817	3,564	3,808	3,839
20	44,50	4,097	4,097	3,803	4,087	4,126
ERRO (%)		0,00	0,00	- 7,18	0,25	0,69
CUSTO (%)		1400	1300	500	600	100

- (1) Iterativo de Newton-Raphson;  
(2) Iterativo de Newton-Raphson Modificado;  
(3) Incremental Convencional;  
(4) Incremental Modificado;  
(5) Superposição Modal (Lanczos-Ritz).

TABELA VI.6.1 - Deslocamentos  $u(m)$ , Erros e Custos dos Métodos

Na Tabela (VI.6.1) também se encontram os custos computacionais e o erro para a carga total em cada procedimento utilizado. Na análise pelo método de superposição empregou-se 3 vetores de Lanczos-Ritz gerados a partir da solução linear.

INCR.	P (kN)	FORÇA AXIAL ELEMENTO 1	
		LR3	NEWTON-RAPHSON
2	4,45	30,39	30,39
4	8,90	63,15	63,10
6	13,35	98,48	98,39
8	17,80	136,70	136,44
10	22,25	178,09	177,60
12	26,70	223,12	222,19
14	31,15	272,12	270,65
16	35,60	325,70	323,52
18	40,05	384,44	381,37
20	44,50	449,05	445,04

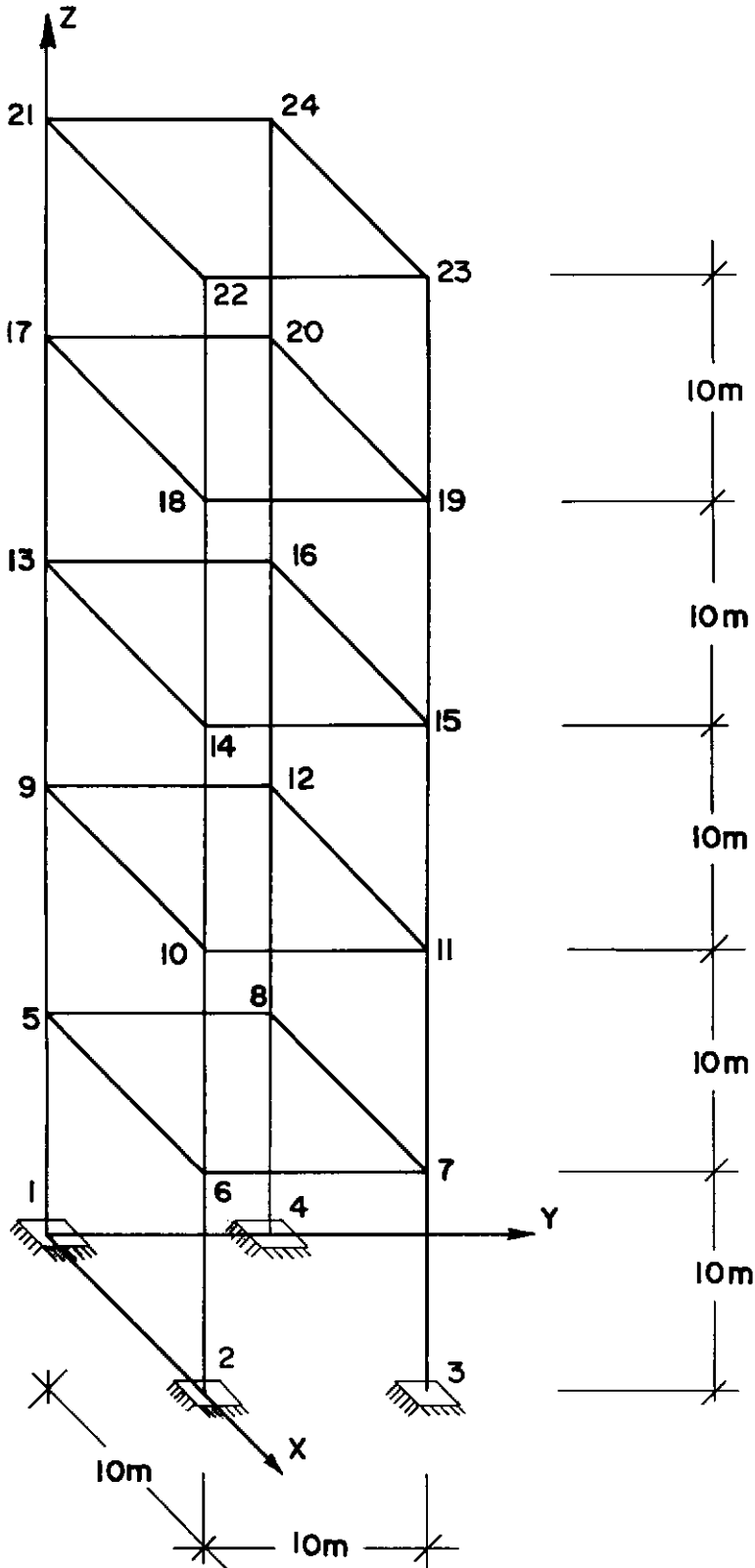
TABELA VI.6.2 - Esforço Axial (kN)

Verifica-se, portanto, que o método de superposição com 3 vetores Lanczos-Ritz apresenta, neste exemplo, um erro desprezível e uma grande eficiência computacional.

### VI.7 - Exemplo 6

Neste exemplo se analisou o pórtico espacial, representado na Figura (VI.7.1), submetido ao carregamento indicado.





$$A = 5,88 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

$$I_y = I_z = 39,91 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I_x = 79,82 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$E = 210,88 \text{ MPa}$$

$$G = 80,85 \text{ MPa}$$

$$P = 100 \text{ kN}$$

NÓ	CARGA
5, 8, 9, 12 13, 16, 17, 20	$P_x = P$
21, 22, 23, 24	$P_x = P; P_z = -100P$

Figura vi.7.1 Pórtico espacial

A base de transformação foi composta por 5 vetores de Lanczos-Ritz gerados a partir da solução linear como vetor de partida.

Na Figura (VI.7.2) e Tabela (VI.7.1) são comparados os deslocamentos horizontais do topo do pórtico (nó 24) obtidos através do método de superposição e do método Newton-Raphson.

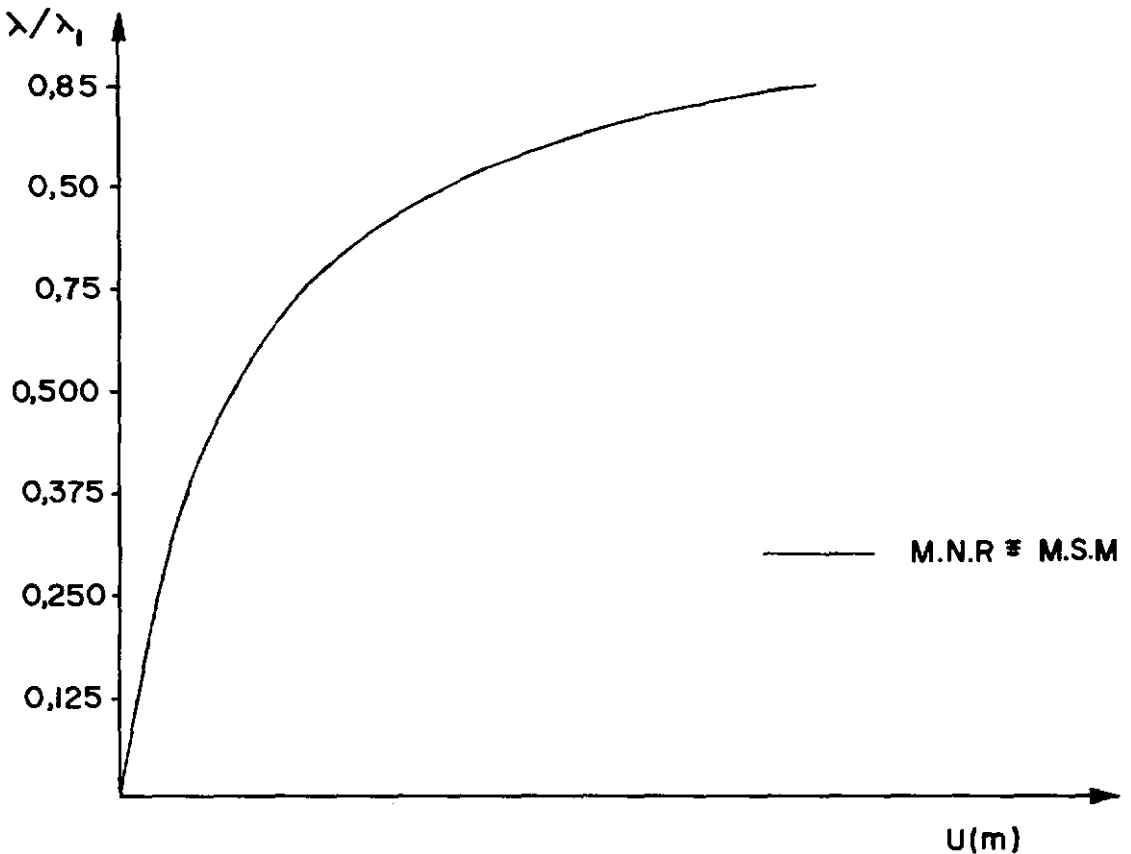


Figura vi.7.2 - Deslocamento nó 24

$\lambda/\lambda_1$	DESLOCAMENTO HORIZONTAL	
	LR5	M.N.R.
0,125	0,111	0,111
0,250	0,258	0,257
0,375	0,461	0,456
0,500	0,761	0,751
0,675	1,256	1,222
0,750	2,235	2,101
0,875	5,146	4,437
$\lambda_1 = 0,435$ ; $\ \tilde{r}_L\  = 12,22$ ; $\ \tilde{r}_2\  = 8,28$		

TABELA VI.7.1 - Deslocamento N<sup>o</sup> 24 (m)

A seguir, na Tabela (VI.7.2), são mostrados os valores das reações vertical e momento-x no apoio (n<sup>o</sup> 2).

$\lambda/\lambda_1$	REAÇÕES DE APOIO N <sup>o</sup> 2			
	FORÇA Z (kN)		MOMENTO-y (kN·m)	
	LR5	M.N.R.	LR5	M.N.R.
0,125	615,5	615,8	242,9	242,9
0,250	1254,6	1254,5	527,4	526,6
0,375	1931,0	1929,0	874,7	870,7
0,500	2672,9	2667,0	1325,4	1315,5
0,675	3545,3	3523,5	1972,5	1919,8
0,750	4743,8	4655,3	3088,0	2961,1
0,875	7245,7	6774,0	5981,4	5339,9

TABELA VI.7.2 - Reações N<sup>o</sup> 2

As normas  $\|\tilde{r}_2\|$  e  $\|\tilde{r}_L\|$  foram iguais respectivamente a 12,22 e 8,28. O tempo de processamento requerido pela análise não linear pelo método de superposição representou cerca de 270% do tempo de processamento dispendido na solução linear. Já a análise pelo método Newton-Raphson representou o equivalente a 6.800% do mesmo esforço.

## VII. CONCLUSÕES

Na prática, a análise estática não linear geométrica de estrutura com utilização de técnicas incrementais iterativas é bastante onerosa e muitas vezes inviável. O método de superposição modal surgiu como uma opção computacional mais eficiente na análise de estruturas esbeltas com comportamento fracamente não linear.

Como foi mostrado nos Capítulos II e III, o método pode ser implementado sem maiores dificuldades em um programa ou sistema de elementos finitos de análise estática linear já existente.

A análise não linear geométrica pelo método de superposição passa a ser uma extensão natural da análise estática linear, possibilitando ao analista uma visão mais ampla do comportamento estrutural e permitindo obter soluções confiáveis e eficientes com pequeno esforço computacional adicional, evitando o processamento de uma análise não linear independente.

Porém o método de superposição modal tradicionalmente emprega como matriz de transformação uma base de autovetores. Este procedimento requer a solução de um problema de autovalor que é responsável por uma grande parte do esforço da análise.

Desta forma, é proposto um método que possibilite a determinação de uma base, alternativa à base modal, com o

objetivo de obter uma maior eficiência computacional. De fato, conforme pode ser concluído a partir dos resultados das aplicações apresentadas, o algoritmo proposto é extremamente eficiente na geração desta base, proporcionando uma grande redução no esforço computacional, mantendo o mesmo nível de precisão dos resultados.

Ainda nos exemplos apresentados, observa-se que poucos vetores-base foram necessários para solução pelo método, e que o critério da relação entre as normas de  $\|\underline{r}_2\|$  e  $\|\underline{r}_L\|$  mostrou-se confiável e bastante conservativo, já que mesmo em casos com a relação  $\|\underline{r}_2\| : \|\underline{r}_L\|$  em torno de 0.6 foram obtidos bons resultados.

Deve-se ressaltar que o procedimento adotado apresenta, também, para o cálculo dos esforços resultados compatíveis com o método de Newton-Raphson.

O método proposto possui, desta forma, um critério confiável que permite avaliar a qualidade dos resultados obtidos indicando a necessidade ou não da realização de uma análise não linear mais refinada.

Outro aspecto é que o método oferece uma estimativa da carga de flambagem da estrutura, sem se fazer necessário efetuar uma outra análise à parte. Foi observado que nas estruturas tipo torre mesmo quando o critério de aplicabilidade não foi atendido, ainda assim, foi possível obter resultados razoáveis quando restringiu-se o parâmetro  $\lambda$  a pequenos valores em relação a carga de flambagem.

Finalmente, cabe salientar, que todas essas informações são obtidas com um pequeno custo marginal. Deste modo, acredita-se que o método se constitui numa ferramenta atrativa, podendo substituir com vantagens as análises estruturais utilizadas rotineiramente em diversos casos de interesse prático tais como, edifícios altos sujeitos a cargas de vento, estruturas offshore submetidas a cargas de ondas e torres em geral.

VIII. BIBLIOGRAFIA

1. NAGY, D.A., KONIG, M. - Geometrically Nonlinear Finite Element Behaviour Using Bucking Mode Superposition, Int. J. of Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 19, pp. 447-484, 1979.
2. WILSON, E.L., YUAN, M., DICKENS, J.M. - Dynamic Analysis by Direct Superposition of Ritz Vectors, Earthquake Engr. and Struct. Dynamics, Vol. 10, pp. 813-821, 1982.
3. NOUR-OMID, B., CLOUGH, R.W. - Dynamic Analysis of Structures Using Lanzos Coordinates, Earthquake Engr. and Struct. Dynamics, Vol. 12 pp. 565-577, 1984.
4. PARLETT, B.N. - The Symmetric Eigenvalue Problem, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1980.
5. LIMA, E.C.P. - Análise Estática de Estruturas com Não-Linearidade Geométrica pelo Método de Superposição Modal, I Congresso Latino-Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia, Trabalho 10, pp. 167-179, 1979.
6. CODES, R.A. - Formulações e Métodos de Solução na Análise Não-Linear de Treliças Espaciais, Tese de Mestrado, pp. 97-101, COPPE, 1978.



7. REILLY, R.J., SUTTON, E.L. - An Iterative Solution for Geometrically Nonlinear Trusses, Computer and Structures, Vol. 3, pp. 1053-1061, Pergamon Press, 1973.
8. BATHE, K.J. - Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J., 1976.
9. TIMOSHENKO, S.P. - Resistência dos Materiais, Livros Técnicos e Científicos Editora, Vol. 2, 1966.
10. ZIENKIEWICZ, O.C. - The Finite Element Method, McGraw-Hill, 1980.
11. PRZEMIENIECKI, J.S. - Theory of Matrix Structural Analysis - McGraw-Hill, 1975.