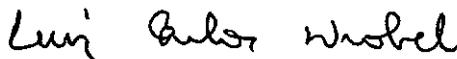


INTRUSÃO SALINA EM AQUÍFEROS COSTEIROS: UMA ANÁLISE  
PELO MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO

JAI ME JOAQUIM DA SILVA PEREIRA CABRAL

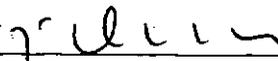
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE  
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JA  
NEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO  
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.) EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:



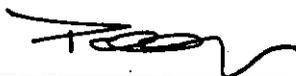
---

PROF. LUIZ CARLOS WROBEL  
(Presidente)



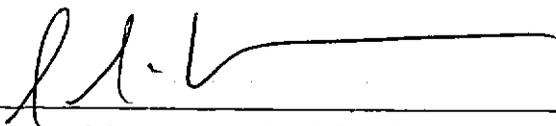
---

PROF. JOSÉ CLÁUDIO DE FARIA TELLES



---

PROF. PAULO CANEDO DE MAGALHÃES



---

PROF. GIULIO MASSARANI

RIO DE JANEIRO, RJ-BRASIL

MARÇO DE 1985

CABRAL, JAIME JOAQUIM DA SILVA PEREIRA

Intrusão Salina em Aquíferos Costeiros: Uma Análise pelo Método de Elementos de Contorno (Rio de Janeiro), 1985.

*xi*, 136 p., 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1985).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1. Água Subterrânea. 2. Intrusão Salina. 3. Elementos de Contorno

I. COPPE/UFRJ

II. Título (série)

A meu pai cujo exemplo  
de dedicação ao trabalho  
sempre norteou os meus  
passos.

## AGRADECIMENTOS

A todos da minha família pelo apoio e colaboração em todas as etapas do desenvolvimento desse trabalho.

Ao Colégio Salesiano de Recife onde iniciei minha vida estudantil em que se transmitia aos alunos um sentido de responsabilidade e de dedicação aos estudos num ambiente de companheirismo e de alegria, e onde alguns anos depois dei os primeiros passos nas lides do magistério.

À Universidade Federal de Pernambuco pela formação recebida e em especial ao professor Abelardo Montenegro pelo incentivo a vida acadêmica.

Ao departamento de Engenharia Mecânica da U.F.Pe e a CAPES que proporcionaram as condições necessárias para esse período de estudo e trabalho.

À Universidade Federal do Rio de Janeiro, aos professores do Programa de Engenharia Civil da COPPE, e em especial ao professor Luiz Carlos Wrobel pela orientação ao longo de todo o trabalho.

A pastoral universitária na pessoa do Pe. Rafael pelo sentido mais elevado das horas de trabalho e pelas normas que nos transmitiu de "fazer extraordinariamente bem as coisas ordinárias".

Aos colegas professores José Almir Cirilo e Pedro Sã pela colaboração prestada.

A Deise pela eficiente ajuda do traçado dos gráficos e diagramas, e pelo apoio e incentivo na elaboração da tese.

Aos colegas da COPPE pelas horas agradáveis de convívio e pelas sugestões e colaboração que sempre foram de grande valia.

Aos funcionários da COPPE: Sônia, Celma, Elizete e Beth pela ajuda útil sempre que era preciso algo da secretaria e a Sueli pelos serviços de datilografia.

RESUMO DA TESE APRESENTADA À COPPE/UFRJ COMO PARTE DOS  
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE  
MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

INTRUSÃO SALINA EM AQUÍFEROS COSTEIROS: UMA ANÁLISE PELO  
MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO

JAI ME JOAQUIM DA SILVA PEREIRA CABRAL  
MARÇO, 1985

Orientador: Luiz Carlos Wrobel

Programa: Engenharia Civil

RESUMO

A necessidade de água em quantidade e qualidade suficiente tem levado a se aumentar consideravelmente os volumes extraídos dos lençóis d'água subterrâneos.

Um dos problemas que aparece ao se realizar a exploração dos aquíferos costeiros é o avanço da interface de separação entre a água doce e salgada, em direção a terra; fenômeno que recebe o nome de intrusão salina e que pode levar poços que anteriormente eram bons, a produzir água salgada.

É feita no presente trabalho uma análise numérica de intrusão salina utilizando o método de elementos de contorno para resolução das equações diferenciais do escoamento d'água no lençol.

São apresentados os resultados de três aplicações: uma delas é a segregação por ação da gravidade num modelo com dois líquidos imiscíveis, outra é a intrusão salina causada pela diminuição da vazão de recarga e uma última é a intrusão em direção a uma captação de água do lençol subterrâneo. Os resultados mostram que o modelo é uma boa aproximação de soluções obtidas de maneira analítica ou experimental.

ABSTRACT OF THESIS PRESENTED TO COPPE/UFRJ AS PARTIAL  
FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF  
MASTER OF SCIENCE (M.Sc.)

SALT WATER INTRUSION IN COASTAL AQUIFERS: AN ANALYSIS  
BY THE BOUNDARY ELEMENT METHOD

JAI ME JOAQUIM DA SILVA PEREIRA CABRAL

MARCH, 1985

Chairman: Luiz Carlos Wrobel

Department: Civil Engineering

ABSTRACT

The need of great quantity of water of good quality has led to a considerable increase in the volume of pumped groundwater.

An important groundwater problem is salt water intrusion that may be defined as the landward movement of seawater interface. Intrusion can result from excessive pumping in coastal aquifers and causes increase in salinity of groundwater at a given location.

The boundary element method is formulated for and applied to problems concerning a moving interface between fresh water and salt water in porous media.

The model is applied to three cases: segregation by gravity action, intrusion by reduction of recharge flow and intrusion into a sink. The results obtained by the model are in good agreement with analytical and experimental solutions.

## SÍMBOLOS UTILIZADOS

- $n$  = porosidade  
 $V$  = volume  
 $V_v$  = volume de vazios  
 $n_e$  = porosidade efetiva  
 $V_{ve}$  = volume de vazios efetivo  
 $Q$  = vazão  
 $K$  = condutividade hidráulica ( coeficiente de permeabilidade)  
 $A$  = área  
 $q$  = vazão específica  
 $J$  = gradiente hidráulico  
 $v$  = velocidade  
 $\phi$  = potencial, no sentido de carga piezométrica  
 $R_e$  = número de Reynolds  
 $\rho$  = massa específica  
 $D$  = diâmetro  
 $\mu$  = viscosidade absoluta ou dinâmica  
 $\nu$  = viscosidade cinemática  
 $k$  = permeabilidade intrínseca (permeabilidade específica)  
 $m$  = fator relativo ao arranjo estrutural das partículas  
 $\theta$  =  $\left\{ \begin{array}{l} \text{fator relativo a forma das partículas} \\ \text{fator de ponderação em diferenças finitas} \end{array} \right.$   
 $P$  = percentagem  
 $d_m$  = média geométrica dos diâmetros  
 $S$  =  $\left\{ \begin{array}{l} \text{coeficiente de armazenamento} \\ \text{relação entre as massas específicas de dois fluídos} \end{array} \right.$   
 $T$  = transmissibilidade

- $l$  = largura de um aquífero  
 $g$  = aceleração da gravidade  
 $\rho_s$  = massa específica da água salgada  
 $\rho_d$  = massa específica da água doce  
 $p$  = pressão  
 $R$  = raio de influência  
 $\Delta(x-\xi)$  = função delta de Dirac  
 $\Omega$  = região  
 $\Gamma$  = contorno da região  $\Omega$   
 $\nabla$  = operador diferencial nabla  
 $K_T, \nu_T$  = condutividade e viscosidade a temperatura  $T$   
 $\Delta\mu$  = variação de massa por unidade de tempo e por unidade de volume  
 $i$  =  $\left\{ \begin{array}{l} \text{declividade da superfície freática} \\ \text{índice} \end{array} \right.$   
 $\lambda$  = posição horizontal de um ponto da superfície material  
 $b$  = espessura de um aquífero  
 $b(x)$  = fonte ou sumidouro na equação de Poisson  
 $h, H$  = alturas da linha piezométrica  
 $\xi$  = ponto fonte  
 $u$  = potencial  
 $u^*$  = solução fundamental  
 $q$  = derivada do potencial na direção normal  
 $q^*$  = derivada da solução fundamental na direção normal  
 $f$  = função de interpolação  
 $\eta$  = coordenadas adimensionais de um elemento  
 $G$  = matriz formada pelos coeficientes do fluxo no M.E.C.  
 $H$  = matriz formada pelos coeficientes do potencial no M.E.C.  
 $A$  = matriz formada pelos coeficientes das incógnitas.

$\alpha$  = relação entre as viscosidades absolutas de dois fluidos

$N$  = direção normal

$\beta$  = ângulo entre a interface e a horizontal

$I_s$  = interface na região de água salgada

$I_d$  = interface na região de água doce

$C_s$  = contorno externo na região de água salgada

$C_d$  = contorno externo na região de água doce.

## Í N D I C E

CAPÍTULO I	- INTRODUÇÃO .....	01
	Importância da água subterrânea .....	01
	Intrusão Salina .....	03
	Revisão Bibliográfica .....	05
	Metodologia Utilizada .....	11
	Descrição do Corpo da Tese .....	14
CAPÍTULO II	- ÁGUA SUBTERRÂNEA: DEFINIÇÕES E EQUAÇÕES ...	16
	Distribuição de Água abaixo da Superfície do Solo .....	19
	Tipos de Lençóis de água .....	20
	Características de um Aquífero .....	25
	Lei de Darcy .....	27
	Equações de um Aquífero .....	35
	Aproximação de Dupuit .....	39
	Aquíferos Costeiros .....	40
	Poços e Trincheiras .....	47
CAPÍTULO III	- MODELAGEM MATEMÁTICA DO PROBLEMA .....	52
	Conceitos básicos .....	52
	Solução Fundamental .....	57
	Método dos Elementos de Contorno .....	58
	Desenvolvimento do MEC para Análise da In- trusão Salina .....	63
	Integração no Tempo .....	71
	Ponta da Interface .....	73
	Renumeração da Discretização .....	74
	Drenos e Trincheiras .....	75

CAPÍTULO IV	- APLICAÇÕES .....	80
	Segregação por ação da gravidade .....	80
	Intrusão por Redução da Vazão de Recarga .	92
	Intrusão em Direção a uma Captação .....	100
CAPÍTULO V	- CONCLUSÕES .....	108
	Recomendações .....	110
	· Pesquisas teóricas adicionais .....	110
	Mapeamento da Posição da Interface ao	
	Longo da costa brasileira .....	111
	Controle de Intrusão .....	112
	Recarga dos Aquíferos .....	114
	Controle de Poluição .....	115
APÊNDICES .....		118
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....		126

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

#### IMPORTÂNCIA DA ÁGUA SUBTERRÂNEA

A necessidade de encontrar água em quantidade suficiente e de boa qualidade, tem sido um problema constante do homem desde os primórdios da humanidade.

A água é o componente básico essencial para a manutenção da vida humana, participando ativamente no desempenho de suas funções orgânicas. Sendo privado de água o organismo humano sucumbe dentro de um curto período de tempo.

As grandes civilizações da história se desenvolveram sempre em locais onde havia água em abundância para suprir as necessidades de todos os habitantes. Muitas obras primitivas de engenharia foram construídas pelos povos antigos para armazenar e transportar a água em suas cidades.

Nos países onde se tem conseguido atender à demanda de água para abastecimento público e para desenvolvimento da agricultura e pecuária, os povos têm progredido, atingindo melhores níveis de higiene e saúde e conseguindo padrões de vida mais elevados.

Na busca de mananciais para abastecimento o homem tem a seu dispor as águas de superfície e as águas subterrâneas. Entre os do primeiro tipo se incluem os lagos naturais, os cursos

d'água, os reservatórios obtidos em talvegues por construções de barragem e outros meios de captação e armazenamento de águas pluviais. Nos do segundo tipo se incluem os lençóis d'água subterrânea, donde a água pode ser obtida através de poços, nascentes, trincheiras e galerias horizontais.

Os reservatórios de água subterrânea constituem a maior fonte disponível de água doce de nosso planeta<sup>(1)</sup>. De acordo com publicação da Johnson Division<sup>(2)</sup>, menos de 3% da água potável disponível em qualquer momento na terra, provém de mananciais de superfície. A outra parte, mais que 97%, estimada em 10 quatrilhões de metros cúbicos se encontra no subsolo.

No entanto convém lembrar que nem toda água disponível no subsolo pode ser aproveitada devido ao elevado custo de exploração de algumas formações aquíferas ou a dificuldades técnicas causadas por baixa permeabilidade do material poroso, elevadas profundidades, etc que tornam inviável o seu aproveitamento.

O uso de água subterrânea já se fazia desde épocas muito antigas, embora sua origem, ocorrência e movimento não fossem claramente entendidos até o fim do século dezessete<sup>(3)</sup>.

Com o decorrer do tempo, a técnica de perfuração de poços foi se desenvolvendo. Na França, de 1833 a 1841, foi construído em Grenelle, perto de Paris, o poço mais profundo da época, que atingia a profundidade de 549 m. E a partir daí continuou se expandindo a exploração de água do subsolo em diversos países.

Wright<sup>(4)</sup> em 1983, comentando as metas da "Década Internacional da Água", afirma que a reserva hídrica subterrânea desempenhará um papel importante na consecução dessas metas.

Entre as vantagens do uso da água subterrânea, podem ser citadas, a sua extensa presença, a proteção natural contra a contaminação por agentes poluidores, disponibilidade de armazenamento e a possibilidade de aumento de recarga.

Como desvantagem se contam o tempo e os recursos financeiros necessários para se pesquisar eficientemente as reservas hídricas subterrâneas de determinada região, a fim de garantir sua utilização racional.

### INTRUSÃO SALINA

Nos aquíferos próximos a costa, situados abaixo do nível do mar, ocorre a formação de uma cunha de água salgada que penetra sob a água doce e avança em direção a terra.

A água doce está em contínuo escoamento para o mar e ocorre a formação de uma região de contato em equilíbrio hidrodinâmico entre a água doce e a água salgada a alguma profundidade abaixo de superfície do solo.

Na realidade esta região de contato é constituída por uma zona de difusão em que o teor de salinidade varia gradativamente do valor mínimo junto a água doce até um valor máximo na faixa da água salgada. No entanto para efeito prático podemos con

siderar a existência de uma interface abrupta de separação entre a água doce e a água salgada, como será visto nos próximos capítulos.

Se a água doce começa a ser retirada do subsolo através de bombeamento, o equilíbrio hidrodinâmico se altera e a massa de água salgada se movimenta avançando para o interior do aquífero, fenômeno que é denominado de intrusão salina.

A água do mar pode também penetrar nos aquíferos através da superfície do solo. Estes casos não serão estudados no presente trabalho, no entanto podemos citar, apenas como exemplo, que podem ter certa importância em determinadas regiões: a infiltração em torno do poço, ondas produzidas pelo efeito das marés, inundação em pântanos, canais ao nível do mar e inundações de água do mar produzidas por furacões em zonas costeiras<sup>(5)</sup>.

O vertiginoso aumento da população, verificado nos últimos anos em áreas costeiras e em ilhas, aliado a um correspondente crescimento nas atividades de lazer, e dos parques industrial e agrícola, vem incrementando a altas taxas o consumo de água subterrânea, elevando assim a probabilidade de se concretizar a ameaça de contaminação das captações por água salgada.

Nos Estados Unidos tem sido encontrados problemas de intrusão salina, praticamente ao longo de toda a costa, ocorrendo basicamente em áreas metropolitanas altamente dependentes do suprimento hídrico subterrâneo. O estado mais atingido é a Flórida devido entre outros fatos a sua grande extensão de costa den

samente povoada pelos que procuram o seu agradável clima. Segue-se a Califórnia na costa do Pacífico, com várias áreas de intrusão; e o Texas e Nova York que também se encontram entre os mais seriamente afetados<sup>(6)</sup>.

No Brasil, o assunto não tem sido ainda muito pesquisado, no entanto alguns estudos vêm sendo realizados por instituições como o IPT, a CPRM e o DAEE. Estes estudos porém tem, na maioria dos casos, ficado restritos somente a identificação da interface, definindo-se sua posição estacionária sem entrar no mérito da questão quanto a exploração do aquífero e o possível avanço da cunha salgada<sup>(7)</sup>.

Não foi encontrado na bibliografia consultada, nenhum caso comprovado de intrusão salina no Brasil, embora existam cidades que devido as suas condições populacionais, geográficas e geológicas possam vir a ser afetadas pelo problema a médio ou a longo prazo, tais como a cidade de Natal no estado do Rio Grande do Norte, a cidade de Olinda em Pernambuco e a cidade de Laguna em Santa Catarina.

#### REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

No estudo do comportamento da cunha de água salina tem sido utilizados modelos físicos, gráficos, analíticos e numéricos para determinar a posição da interface sob condições específicas, bem como prever as consequências sofridas pela interface devido à exploração da água subterrânea.

Entre os modelos físicos é bastante conhecida a célula

de Hele-Shaw, utilizada por Bear e Dagan<sup>(8)</sup> para obtenção de resultados experimentais da posição da interface de acordo com diversas taxas de recarga do aquífero.

Outros autores têm utilizado o método do hodógrafo para determinar modelos de escoamento de água subterrânea; Bear and Dagan<sup>(9)</sup> utilizaram esse método para determinação da posição da interface num escoamento permanente. Jong<sup>(10)</sup> utilizou o mesmo método para o caso de serem usados drenos.

Quando se utiliza métodos analíticos ou numéricos, é comum se adotar a consideração de uma interface de separação entre a água doce e a água salgada, o que simplifica o problema levando a utilização de apenas equações de escoamento. Em caso contrário é preciso utilizar equações de transporte de massa levando em conta a dispersão.

Alguns autores desenvolveram modelos utilizando a aproximação de Ghyben-Herzberg<sup>(11),(12)</sup>, considerando a água salgada estática dando origem aos modelos de interface tipo estático, em contraposição aos modelos de interface, tipo dinâmico para os que não usam esta aproximação.

De acordo com a geometria da interface, o modelo pode ser "tipo cunha" quando a interface apresenta um pé (chamado por "Toe" na literatura em inglês) na interseção com o fundo impermeável do aquífero ou pode ser do "tipo lente" quando a reserva de água doce possui forma de uma lente sobre a água salgada.

Se o modelo mantém a componente vertical, pode ser classificado como "hidrodinâmico". Se por outro lado é utilizada a aproximação de Dupuit, considerando que não há variação na vertical, as equações do modelo ficam reduzidas de uma dimensão e o modelo é chamado de "hidráulico".

Vários modelos têm sido desenvolvidos para análise da interface: Primeiramente Hubbert<sup>(13)</sup> apresentou em 1940 um estudo analítico sobre posição da interface de pouca importância atualmente. Seguiram-se os trabalhos de Glover<sup>(14)</sup>, Rumer e Shian<sup>(17)</sup>, Van der Veer<sup>(18)</sup> e Hantush<sup>(19)</sup> com análises de interface tipo lente, sendo que o último deles analisou o regime não permanente.

Alguns estudos teóricos sobre escoamento de fluidos diferentes em meios porosos, deram sua colaboração para o entendimento da intrusão salina, tais como Keulegan<sup>(20)</sup> em 1954, Gardner et al<sup>(21)</sup> em 1962, Verruijt<sup>(22)</sup> em 1980.

Para os modelos analíticos tipo cunha houve a contribuição de Henry<sup>(15)</sup> em 1964 e mais Bear e Dagan<sup>(8 e 9)</sup>, Collins e Gelhar<sup>(23)</sup>, Mualen e Bear<sup>(24)</sup>, Verou<sup>(25)</sup>, Hashish et al<sup>(26)</sup>, Strack<sup>(27)</sup>, Kishi e Fukuo<sup>(28)</sup>, Kashef<sup>(29 e 30)</sup> e Kashef e Smith<sup>(31)</sup>. Apenas Bear e Dagan<sup>(9)</sup> e Kashef<sup>(29,30 e 31)</sup> analisaram o regime não permanente. A maioria dos autores considerou aquíferos confinados, adotou a simplificação de Dupuit e considerou comportamento estático para a água do mar.

Nos últimos anos devido em parte ao grande impulso dado pelos computadores digitais, foram desenvolvidos métodos numé

ricos que simulam o comportamento da interface e, graças a alta velocidade de resolução dos computadores atuais, os valores procurados são obtidos rapidamente com um nível de precisão muito bom.

O método numérico que de início apresentou maior desenvolvimento foi o método das diferenças finitas, com o qual se obtinha a solução da equação do problema em estudo para uma série de pontos discretizados no espaço e no tempo. As equações que regem o problema são aproximadas por uma expansão local das variáveis geralmente utilizando séries de Taylor truncadas.

Pinder e Cooper<sup>(32)</sup> utilizaram o método de diferenças finitas para a solução do escoamento e o método das características para a equação de transporte em problemas onde eram considerados os fenômenos de dispersão. Intercomp<sup>(33)</sup> em 1976, estudou o problema de intrusão salina adotando um modelo de diferenças finitas aplicado à descarga de efluentes em aquíferos.

Um modelo que considerou uma interface do tipo lente foi estudado por Fetter<sup>(34)</sup> em 1972 e Rofail<sup>(35)</sup> em 1977 utilizando modelos hidráulicos. Quanto ao modelo de interface tipo cunha foi estudado por Shamir e Dagan<sup>(36)</sup> em 1971 que usando um modelo hidráulico calculam a posição da cunha salina para um regime não permanente; por Bonnet and Sauty<sup>(37)</sup> em 1975 que estenderam o trabalho de Shamir e Dagan para duas dimensões; por Mercer et al<sup>(38)</sup> com um importante melhoramento em 1980 que venceu algumas limitações da discretização do tempo permitindo o movimento do pé (toe) e da ponta (tip) da cunha salina; e ainda por Polo e Ramis<sup>(39)</sup> em 1983 que apresentaram um modelo que é conver

gente e incondicionalmente estável.

Outro método de resolução que teve grande desenvolvimento em aplicações de Engenharia nos últimos anos foi o método dos Elementos Finitos.

No método de Elementos Finitos a região em estudo é dividida em pequenos trechos não infinitesimais, e as equações que regem o fenômeno físico são aplicadas a estes pequenos trechos ou elementos, podendo ser utilizada no problema uma formulação variacional ou no caso mais comum expressões de resíduos ponderados.

O método de Elementos Finitos apresenta diversas vantagens em relação ao método de diferenças finitas, entre elas é mais fácil ajustar a discretização a forma geométrica da região em estudo enquanto com diferenças finitas é feita uma aproximação para aplicar os valores do contorno da região em pontos pertencentes a malha; é mais fácil utilizar elementos de dimensões diferentes, colocando-se maior número de elementos onde se quer uma melhor precisão dos resultados e menos elementos (elementos maiores) em outros locais em que não é necessária uma precisão tão boa.

Algumas das desvantagens do método de elementos finitos são o tempo gasto para se entrar com os dados de todos os elementos, o tempo de processamento computacional geralmente elevado e a necessidade de encontrar um tamanho de elemento que satisfaça razoavelmente as equações diferenciais do problema em todos os pontos<sup>(40)</sup>.

As contribuições de modelos numéricos utilizando elementos finitos são várias, entre elas Lee e Cheng<sup>(41)</sup> em 1974, Segol et al<sup>(42)</sup> em 1975 e Desai e Contractor<sup>(43)</sup> em 1977 que consideraram os fenômenos de dispersão. Quanto a modelos de interface tipo lente houve as contribuições de Kono<sup>(44)</sup> em 1974 e Cheng e Hu<sup>(45)</sup> em 1975 e mais recentemente Sã da Costa<sup>(46)</sup> em 1983 que desenvolveu um modelo do tipo interface/hidráulico capaz de simular em duas dimensões o problema da cunha salina e da lente em regime permanente ou transitório.

Ultimamente um outro método numérico de resolução de equações diferenciais tem sido desenvolvido, com algumas vantagens em relação ao método das diferenças finitas e ao método dos elementos finitos. Trata-se do chamado método de elementos de contorno em que a equação diferencial é transformada numa equação integral aplicada ao contorno da região.

No método de elementos de contorno é feita uma discretização apenas ao longo da fronteira da região e com isso se o problema é bidimensional a discretização será feita apenas ao longo de uma linha e se o problema é tridimensional a discretização é feita ao longo de uma superfície reduzindo então uma dimensão em cada tipo de problema.

Em virtude do fato acima citado o método de elementos de contorno apresenta um sistema de equações muito menor e considerável redução no número de dados de entrada<sup>(47)</sup>.

Além disso o método dos elementos de contorno apresen-

ta um nível de precisão dos resultados maior que o de elementos finitos.

Uma outra vantagem que pode ser atribuída ao método dos elementos de contorno é a sua aptidão para problemas com domínio infinito, muito comuns na área de mecânica dos solos e hidráulica.

Uma contribuição desse método para a análise da posição da interface água doce-água salgada foi dada por Liu et al <sup>(48)</sup> em 1981 utilizando funções de interpolação lineares num problema do tipo hidrodinâmico. O problema analisado é transiente, as equações diferenciais são resolvidas por elementos de contorno e a variação da posição ao longo do tempo é aproximada por diferenças finitas.

#### METODOLOGIA UTILIZADA

No presente trabalho é estudado um problema do tipo interface na forma de cunha em regime transiente. O estudo é feito em duas dimensões num plano vertical perpendicular a linha da costa. O aquífero para o qual se aplica o modelo desenvolvido é do tipo confinado.

O objetivo do trabalho é localizar a posição da interface para diversas taxas de recarga e bombeamento ao longo do tempo, com condições determinadas de viscosidade, porosidade, massa específica, permeabilidade.

Foi feita a consideração de uma interface abrupta, ou seja despreza-se os efeitos da dispersão de tal maneira que a zona de transição entre a água doce e a água salgada é relativamente delgada permitindo a aproximação supracitada.

Foi adotada a lei de Darcy. Conforme será visto no capítulo II as condições de escoamento no meio poroso do aquífero confirmam a validade da mesma.

Considerou-se também as duas fases líquidas do problema como sendo homogêneas, isotrópicas e enchendo completamente todos os poros da zona saturada do meio poroso.

O meio poroso foi considerado como indeformável com porosidade constante no tempo, e o escoamento como sendo incompressível.

A equação do aquífero passa a ser então a equação de Poisson, para o caso em que existe bombeamento ou recarga através de poços ou drenos e se reduz à equação de Laplace para o caso dos elementos acima apresentarem vazões nulas.

Essa equação do aquífero é aplicada para um regime permanente na região da água doce e na região da água salgada. Além disso são aplicadas mais duas equações de compatibilização na interface entre as duas regiões, uma para a carga piezométrica e outra para sua derivada em relação à normal à interface.

O problema transiente é resolvido através de uma suces

são de estágios, onde cada estágio é analisado como sendo em regime permanente.

Cada situação estacionária é resolvida através do método de elementos de contorno, enquanto a transição de um estágio para outro é feita por diferenças finitas, pelo método implícito.

É feita uma aproximação do seno do ângulo formado pela interface com a horizontal num certo estágio, pelo valor correspondente no estágio anterior, de modo a eliminar uma não linearidade, como será visto posteriormente no capítulo III.

As condições de contorno especificadas são do tipo de Dirichlet ou condições essenciais (potencial conhecido) em alguns trechos da fronteira e do tipo de Neumann ou naturais (derivada do potencial na direção normal conhecida) para outros trechos. Na interface não são conhecidos nenhum dos dois valores.

Na análise do bombeamento foi considerado o caso de poços e o caso de drenos horizontais. No caso de poços foi feita uma aproximação para uma trincheira perpendicular ao plano da malha, cuja vazão distribuída por unidade de comprimento seja tal que produza uma superfície de depressão análoga à linha de depressão de um poço, conforme será explicado no capítulo II. No caso de drenos foi analisado apenas drenos de pequeno diâmetro e de direção perpendicular ao plano do problema de modo que sua projeção neste plano se reduz a uma fonte ou sumidouro puntiforme.

## DESCRIÇÃO DO CORPO DA TESE

No capítulo II é apresentado um resumo da teoria sobre água subterrânea. Inicia-se pela análise do ciclo hidrológico do qual os lençóis subterrâneos são parcela importante. São estabelecidas também as definições das características, propriedades e parâmetros dos aquíferos. São desenvolvidas também algumas deduções das principais fórmulas de escoamentos em meios porosos e de vazões de poços e de trincheiras.

No capítulo III é apresentada a modelagem matemática do problema. São expostas algumas funções utilizadas, algumas deduções do método de elementos de contorno, as equações matriciais montadas para resolução do problema, o desenvolvimento matemático da integração no tempo pelo método das diferenças finitas e ainda algumas considerações sobre o deslocamento da extremidade superior da interface (ponta).

No capítulo IV é feita uma apresentação dos exemplos estudados, bem como a comparação dos resultados obtidos com os valores fornecidos por alguns autores em exemplos semelhantes.

No capítulo V são estabelecidas as conclusões a que se chegou ao longo do desenvolvimento do trabalho, assim como algumas recomendações para pesquisas adicionais e ainda são relacionadas algumas providências que poderiam ser tomadas a respeito de recargas, controle de poluição em aquíferos e controle da intrusão.

No final se encontram as referências bibliográficas e os apêndices onde são apresentadas relações entre as unidades de medida, definição matemática de superfície material, integração numérica de Gauss, célula de Hele-Shaw e detalhes do programa computacional elaborado para resolução do problema.

## CAPÍTULO II

## ÁGUA SUBTERRÂNEA: DEFINIÇÕES E EQUAÇÕES

Toda água utilizável pelo homem está em contínua mudança de estado físico e de localização. Esta permanente situação de mutação dá origem ao chamado ciclo hidrológico que será aqui descrito suscintamente.

Consideremos de início a água localizada nos oceanos. A superfície dos oceanos, que cobre cerca de três quartos da superfície terrestre, sofre continuamente a ação da irradiação solar, o que provoca a evaporação de considerável quantidade de água.

O vapor resultante é transportado pelo movimento das massas de ar. Em determinadas condições de temperatura e pressão ocorrerá a condensação e as gotículas de água formadas se juntam umas as outras até atingirem determinadas dimensões e ocorrer a precipitação na forma mais comum que é a chuva, ou nas formas de granizo ou neve.

A precipitação que ocorre sobre a terra, é dispersada de várias maneiras; parte da precipitação não chega a atingir o solo, ficando retida pela vegetação, o que é denominado de Intercepção.

Uma parte fica temporariamente retida no solo próximo de onde caiu podendo voltar a atmosfera por evaporação ou trans

piração das plantas. Em muitos casos a evaporação do solo e a transpiração das plantas é estudado em conjunto sob o nome de evapotranspiração.

Uma parte da água escoá sobre a superfície do solo, ou através do solo, procurando naturalmente os canais naturais, que vão se concentrando nos vales principais para finalmente dirigirem-se aos grandes volumes de água constituídos pelos rios, lagos, mares e oceanos, o que é chamado escoamento superficial e escoamento sub-superficial.

Uma parte restante da água, penetra no solo, o que é chamado de infiltração. Grande parte da água que penetra no solo é retida na zona das raízes das plantas, podendo retornar a superfície pelas plantas ou pela capilaridade do solo. Outra parte porém movimenta-se através dos vazios, por percolação até atingir uma zona saturada, formando o lençol subterrâneo.

A água subterrânea poderá aparecer novamente na superfície em locais de nível inferior ao que penetrou, alimentando rios ou mesmo os próprios oceanos.

Todo o processo se repete indefinidamente, tendo como agente básico a energia solar e estima-se que anualmente 400.000 km<sup>3</sup> de água são evaporados e igual quantidade é precipitada, mantendo o equilíbrio do ciclo hidrológico<sup>(2)</sup>.

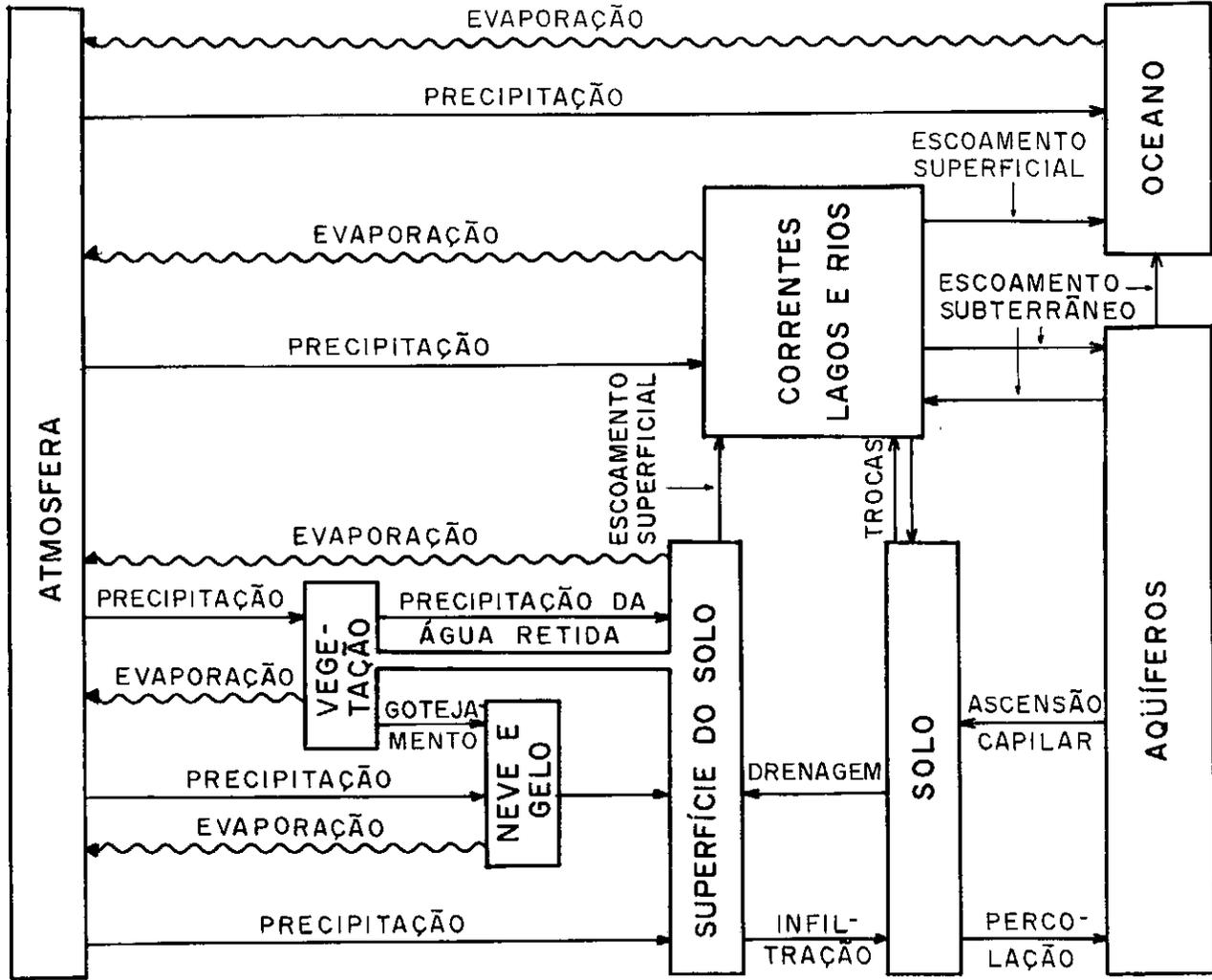


FIG. 11-1 - CICLO HIDROLÓGICO - EAGLESON

## DISTRIBUIÇÃO DE ÁGUA ABAIXO DA SUPERFÍCIE DO SOLO

A água, ao se infiltrar, ocupa parcialmente a região mais externa da crosta terrestre, geralmente porosa, onde os interstícios são em parte ocupados pelo ar, a chamada zona de aeração; ou a água passa a ocupar a região mais inferior, preenchendo todos os vazios e estando submetida a pressão hidrostática, a chamada zona de saturação.

A camada superior (zona de aeração) é dividida em três faixas: a faixa de água do solo, abaixo dela a faixa intermediária e mais abaixo a franja capilar.

A faixa de água do solo, de particular importância para a agricultura, fornece a água necessária para o crescimento da maior parte dos vegetais. A água é mantida nesta faixa pela atração molecular e pela ação da capilaridade.

Na zona intermediária a água também é retida pela ação da atração molecular e da capilaridade, a chamada água pelicular, ou está percolando, a chamada água gravitacional. Nesta região a água não tem nenhuma finalidade, servindo apenas como uma transição entre a franja capilar e a zona da umidade do solo.

A franja de capilaridade é definida pela elevação capilar, que se opõe a força da gravidade. A espessura da faixa capilar é função da textura e granulometria do terreno.

A água da zona de saturação é a propriamente chamada

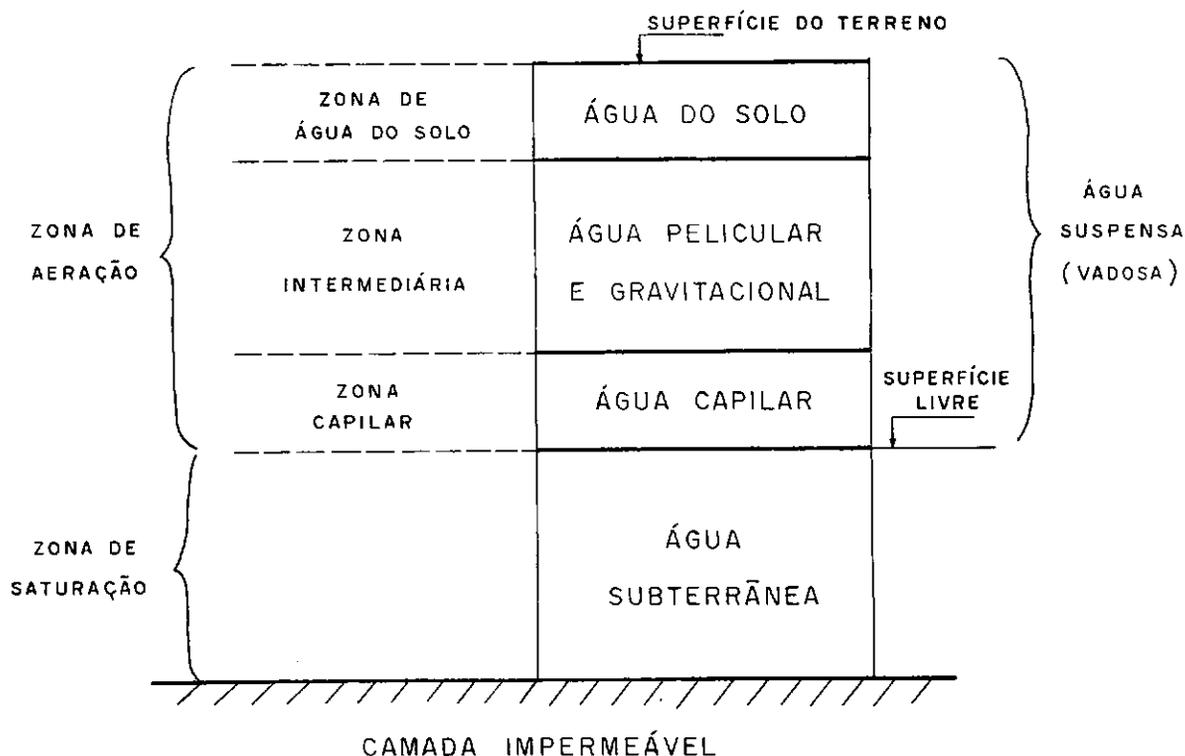


FIG. II-2 - DISTRIBUIÇÃO DAS ÁGUAS ABAIXO DA SUPERFÍCIE DO SOLO

de água subterrânea. Os interstícios da zona de saturação estão repletos de água. A água subterrânea pode ser encontrada em uma região contínua ou em muitas camadas separadas. Sua espessura varia de pouco menos de um metro a dezenas ou centenas de metros. Os fatores que influem na quantidade de água subterrânea são a geologia local, a porosidade e permeabilidade das formações, a recarga ou continuidade da infiltração, o movimento da água dentro da região, entre os locais de recarga e os pontos ou áreas de descarga.

#### TIPOS DE LENÇÓIS D'ÁGUA

Quando a água subterrânea se localiza numa formação geológica, com determinado índice de vazios, que permite um bom armazenamento e possibilita uma extração de razoável quantidade d'

água num tempo relativamente curto, a formação geológica é chamada de Aqüífero.

Quando, ao invés disso, uma formação contém água, mesmo em quantidades apreciáveis, mas é incapaz de transmiti-la de maneira razoável, é chamada de aqüicludo. Para efeitos práticos um aqüicludo é considerado uma formação impermeável e um exemplo disso são as camadas de argila.

Uma formação geológica semi-permeável que tenha possibilidade de transmitir água, mas a taxas muito pequenas em comparação com as do aqüífero, é chamada de aquitardo<sup>(50)</sup>.

Por último, uma formação impermeável que não contenha água nem tenha capacidade de transmiti-la é chamada de um aqüífugo<sup>(50)</sup>.

Quando um aqüífero apresenta uma superfície livre, recebe o nome de aqüífero freático ou aqüífero livre. Sua superfície (Water Table) está submetida a pressão atmosférica como se estivesse em um reservatório ao ar livre.

Quando um poço é perfurado em um lençol freático, o nível estático da água no poço é o mesmo que o da superfície livre do aqüífero.

Em certas circunstâncias, devido ao fato de existir uma camada impermeável dentro da zona de aeração, a infiltração pode ser interrompida fazendo com que a água se acumule acima desta

camada, em cota superior ao nível da superfície freática da região, dando origem a um lençol suspenso (perched water).

A superfície livre do lençol freático não é estática, movendo-se periodicamente para cima e para baixo, de acordo com o volume de recarga recebido por infiltração e com o volume extraído por bombeamento ou escoado para alimentação das nascentes, cursos d'água e outros pontos de descarga da água subterrânea.

Quando um aquífero se encontra limitado acima e abaixo por camadas impermeáveis, diz-se estar confinado e recebe os nomes: aquífero artesiano, aquífero confinado ou água subterrânea confinada.

No interior do aquífero confinado, a água se encontra a uma pressão superior a pressão atmosférica. Ao se perfurar um poço atingindo o aquífero artesiano, a água se eleva pelo poço até determinada altura, de acordo com a pressão a que o ponto do aquífero onde foi feita a perfuração estava submetido.

O nível desta elevação é chamado nível piezométrico e o conjunto de todos os pontos análogos de um aquífero, dá a superfície piezométrica do lençol confinado.

Quando o nível piezométrico de um determinado poço for superior a cota topográfica do local do poço, a água extravasará acima da superfície do solo, resultando daí um poço artesiano jorrante ou surgente (flowing well).

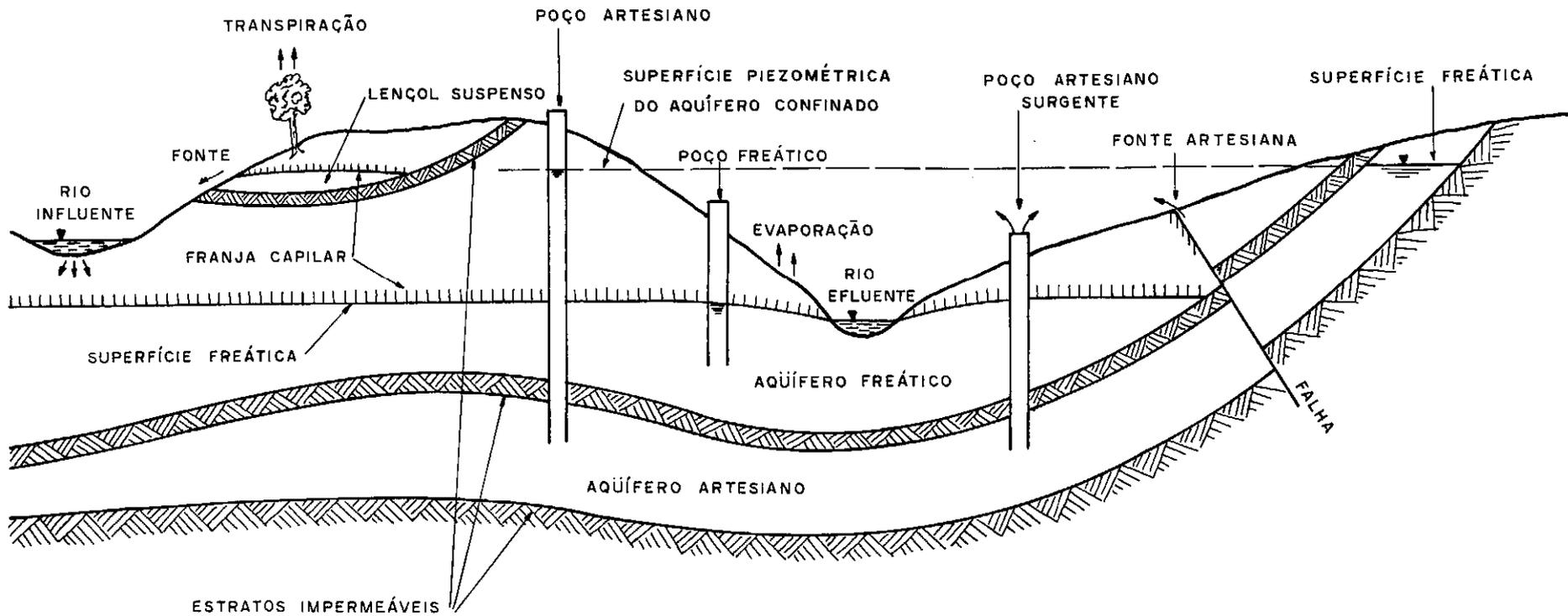


FIG. II-3 - FORMAS DE OCORRÊNCIA DE ÁGUA SUBTERRÂNEA

As características de um aquífero, tais como: extensão, espessura, quantidade e qualidade da água armazenada, é função de fatores geológicos (características litológicas e estruturais), bem como do regime hidrológico da região que influencia o reabastecimento natural das reservas de água subterrânea.

Embora qualquer tipo de rocha, desde que suficientemente porosa e permeável, possa se constituir num aquífero, cerca de 95% da água subterrânea ocorre em rochas do tipo sedimentar, apesar das rochas sedimentares corresponderem a apenas 5% da crosta terrestre<sup>(2)</sup>.

Entre as rochas sedimentares podem ser obtidos bons aquíferos em regiões de arenito, principalmente quando fraturados e apenas parcialmente cimentados e podem ser obtidos excelentes aquíferos com sedimentos inconsolidados incluindo areia, cascalho ou depósitos mistos de areia e cascalho.

Algumas rochas ígneas podem apresentar grande porcentagem de poros ou aberturas de dimensões consideráveis, além de fraturas e fendas e podem dar origem a aquíferos razoáveis.

As rochas metamórficas geralmente não têm propriedades aquíferas, no entanto, podem armazenar e fornecer quantidades apreciáveis de água quando suficientemente fraturadas.

É importante observar que um aquífero possui duas funções simultâneas, de armazenamento e de transmissão. A transmissão de água por um aquífero geralmente é bem lenta, mas pode efe

tuar grandes deslocamentos entre os pontos de reabastecimento e os locais de descarga.

### CARACTERÍSTICAS DE UM AQUIFERO

A quantidade de água acumulada na zona saturada pode ser avaliada tomando como base o volume de vazios dos poros e interstícios da camada geológica onde se encontra o aquífero.

A grandeza que relaciona este volume de vazios com o volume total da camada é chamada de porosidade volumétrica ou simplesmente porosidade.

$$n = \frac{V_v}{V} \quad (II.1)$$

onde  $n$  = porosidade  
 $V_v$  = volume de vazios  
 $V$  = volume total do solo.

No entanto, pode ocorrer muitas vezes em determinado solo a existência de poros sem saída (dead-end pore) ou pontos de estagnação (stagnant pockets)<sup>(51)</sup>, que apesar de serem volumes vazios, não permitem a água fluir livremente. Define-se então a porosidade efetiva como sendo a razão entre o volume de vazios interconectados ou efetivos e o volume total do solo.

$$n_e = \frac{V_{ve}}{V} \quad (II.2)$$

onde  $n_e$  = porosidade efetiva  
 $V_{ve}$  = volume de vazios efetivo

A porosidade  $\bar{n}$  é uma grandeza adimensional e pode muitas vezes ser expressa em porcentagem.

Ao se extrair água de um aquífero, parte do líquido é retido pelas forças moleculares e pela tensão superficial e apenas parte do volume total armazenado é liberada.

A quantidade de água fornecida por unidade de volume do material é chamada de cessaõ específica ou contribuição específica.

A quantidade de água retida por unidade de volume do material é chamada de retenção específica. A porosidade corresponde a soma da cessaõ específica e da retenção específica.

Um bom aquífero deve apresentar elevada porosidade e elevada cessaõ específica. Assim a argila apresenta elevada porosidade (45-55%) mas possui uma reduzida cessaõ específica (3%) e não tem utilização como aquíferos; já uma mistura de areia e pedregulho apresenta porosidade um pouco inferior (20-35%) mas possui elevada cessaõ específica (20%) e forma bons aquíferos<sup>(52)</sup>.

Uma outra característica importante do aquífero é o coeficiente de armazenamento(s) que pode ser definido pelo volume de água fornecido ou admitido por unidade de área do aquífero e por unidade de variação da carga hidrostática.

## LEI DE DARCY

Em 1856, Henry Darcy pesquisava o escoamento de água em um filtro de areia na cidade de Dijon, na França. Darcy concluiu que a vazão do escoamento (volume por unidade de tempo) era

- proporcional a seção transversal ( $A$ ) do filtro.
- proporcional a diferença de níveis piezométricos  $h_1$  e  $h_2$ , respectivamente na entrada e na saída do filtro.
- inversamente proporcional ao comprimento ( $L$ ) entre as extremidades do filtro.

A fórmula de Darcy, pode então ser escrita

$$Q = K A \frac{(h_1 - h_2)}{L} \quad (\text{II.3})$$

onde  $Q$  = vazão (volume por tempo)

$K$  = coeficiente de proporcionalidade, chamado de coeficiente de permeabilidade ou condutividade hidráulica.

Podemos entender a diferença de cargas piezométricas ( $h_1 - h_2$ ) dividida pelo comprimento ( $L$ ), como sendo a taxa de perda de carga por unidade de comprimento, o que recebe o nome de gradiente hidráulico, representado por  $J$  (na realidade a energia mecânica total, inclui a energia cinética (taquicarga), mas para meios porosos a variação da energia cinética é desprezível em relação ao restante).

Podemos também utilizar o conceito de descarga específica, descarga por unidade de área ( $q = Q/A$ ) para escrever a Lei de Darcy de uma outra maneira

$$q = K J \quad (\text{II.4})$$

A descarga específica possui unidades de velocidade, mas difere da velocidade por se referir a uma taxa de escoamento por unidade de área do solo, enquanto na realidade só existe movimento de fluido nos poros e não em toda a área do solo.

Logo a razão entre a descarga específica e a velocidade será igual a razão entre a área dos poros e a área total em determinada seção, o que corresponde a porosidade

$$v = \frac{q}{n} \quad (\text{II.5})$$

No caso da existência de poros sem saída se utilizará a porosidade efetiva

$$v = \frac{q}{n_e} \quad (\text{II.6})$$

Verifica-se que o fluxo no meio poroso ocorre no sentido dos potenciais decrescentes, ou seja, no sentido contrário ao gradiente de  $\phi$ , onde  $\phi$  é a carga piezométrica  $\phi = z + \frac{p}{\gamma}$ . Então para escoamento homogêneos, incompressíveis, unidimensionais, temos:

$$q = - K \text{ grad } \phi \quad (\text{II.7})$$

Se o meio é homogêneo isotrópico,  $K$  é um escalar e os vetores  $q$  e  $\text{grad } \phi$  são colineares, podendo-se generalizar a lei de Darcy para um escoamento tridimensional.

$$q_x = -K \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$q_y = -K \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (\text{II.8})$$

$$q_z = -K \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Para um meio anisotrópico  $K$  passaria a ser um tensor de nove componentes para um escoamento tridimensional e de quatro componentes para um escoamento bidimensional<sup>(53),(54),(55)</sup>.

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} \quad (\text{II.9})$$

Para escoamentos compressíveis, Hubbert<sup>(56)</sup>, estendeu o conceito de carga piezométrica para casos onde  $\rho = \rho(p)$ , introduzindo um potencial definido por

$$g \phi^* = g \int_{z_0}^z dz + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho(p)} \quad (\text{II.10})$$

onde

$$q = - K \text{ grad } \phi^* \quad (\text{II.11})$$

A Lei de Darcy é válida para escoamentos laminares; quando se tem grandes descargas específicas o escoamento passa a ser turbulento e a Lei de Darcy não pode mais ser utilizada.

Vários pesquisadores, Faucher, Lewis e Barnes em 1933 e Muskat em 1937 e outros tentaram encontrar uma relação entre a turbulência no meio poroso e o número de Reynolds.

O número adimensional apresentado por Reynolds em 1883 se aplica a tubos circulares e é definido por

$$R_e = \frac{\rho v D}{\mu} \quad (\text{II.12})$$

onde  $R_e$  = número de Reynolds

$\rho$  = massa específica

$v$  = velocidade do líquido no tubo

$D$  = diâmetro do tubo

$\mu$  = viscosidade absoluta ou dinâmica

Na experiência de Reynolds o escoamento é turbulento para valores maiores que 2000 e laminar para valores inferiores.

Ao se aplicar o número de Reynolds para meios porosos geralmente se usa em lugar do diâmetro do tubo o valor de  $d_{50}$ , ou seja, diâmetro das partículas que na curva granulométrica excede o tamanho de 50% do material granuloso em peso (poderíamos cha-

mar de mediana dos diâmetros).

O limite do número de Reynolds abaixo do qual é válida a lei de Darcy para um meio poroso, não é bem definido, no entanto pode ser considerado que para  $R_e \leq 1$  ela pode ser aplicada de acordo com a maioria dos autores.

Geralmente não existe limite inferior do número de Reynolds para validade da lei de Darcy, no entanto Engelhardt e Tunn em 1955, e posteriormente, Kutilek<sup>(57)</sup> e Bolt e Groenvelt<sup>(58)</sup> relataram casos de escoamentos a gradientes hidráulicos muito pequenos em que não foi seguida a lei de Darcy por não se poder mais considerar o fluido como contínuo dotado de viscosidade e ser necessário levar em conta a estrutura molecular da matéria.

O coeficiente de proporcionalidade (K) que aparece na lei de Darcy, pode ser chamado de condutividade hidráulica ou coeficiente de permeabilidade.

Em um meio isotrópico a condutividade hidráulica pode ser definida como a descarga específica por gradiente hidráulico unitário. Refere-se a facilidade da formação aquífera de exercer a função de um condutor hidráulico.

A condutividade hidráulica depende das características do meio poroso e das propriedades do fluido. Nutting<sup>(59)</sup> exprimiu a condutividade hidráulica em função dos parâmetros do meio e do fluido:

$$K = \frac{k \rho g}{\mu} = \frac{k g}{\nu} \quad (\text{II.13})$$

onde  $K$  = condutividade hidráulica  
 $k$  =  $\bar{k}$  é a permeabilidade intrínseca do meio poroso  
 $\rho$  e  $\mu$  = representam as características do fluido, respectivamente massa específica e viscosidade absoluta, ou então pode então ser utilizada a viscosidade cinemática  $\nu = \mu/\rho$ .

Muitos livros expressam a condutividade hidráulica em Meinzer, ou seja, velocidade de descarga em galões por dia, através de uma área de 1 pé quadrado sob um gradiente hidráulico unitário (1 pé/pé) (1 galão = 3,785 litros, 1 pé = 30,5 cm).

O valor padrão para  $K$  é definido para uma temperatura de 60°F (15,6°C) para ensaios em laboratórios, o que representa bem a temperatura das águas subterrâneas. A condutividade hidráulica sob temperaturas diferentes varia inversamente com a viscosidade cinemática. Portanto:

$$K = K_{60} \frac{\nu_{60}}{\nu_T} \quad (\text{II.14})$$

onde  $K_{60}$  = condutividade a 60°F  
 $\nu_{60}$  = viscosidade cinemática a 60°F  
 $\nu_T$  = viscosidade cinemática na temperatura desejada

A permeabilidade intrínseca ( $k$ ), chamada por alguns de permeabilidade específica é função do tipo do material poroso, sua

granulometria e sua disposição estrutural.

Normalmente se expressa  $k$  em  $\text{cm}^2$  ou em darcys. A equivalência é  $1 \text{ darcy} = 0,987 \times 10^{-8} \text{ cm}^2$ . Uma tabela relacionando diversas outras unidades encontra-se no apêndice 1 ao final deste trabalho.

Várias fórmulas foram propostas por diferentes autores para relacionar  $k$  com as diversas propriedades do meio poroso. Algumas das fórmulas são empíricas como por exemplo

$$k = c d^2 \quad (\text{II.15})$$

onde  $c$  é um valor adimensional para o qual Krumbein e Monk em 1943 encontraram o valor  $0,617 \times 10^{-3}$  e  $d$  é o diâmetro médio das partículas.

Um outro exemplo é a fórmula de Fair e Hatch<sup>(60)</sup>, desenvolvida a partir da análise dimensional e depois comprovada experimentalmente.

$$k = \frac{1}{m \left[ \frac{(1-n)^2}{n^3} \left( \frac{\theta}{100} \sum \frac{P}{dm} \right)^2 \right]} \quad (\text{II.16})$$

onde  $n$  é a porosidade

$m$  é um fator relativo ao arranjo estrutural das partículas, geralmente próximo a 5

$\theta$  é um fator relativo a forma das partículas, variando entre 6,0 para partículas esféricas e 7,7 para grãos com angulosidades

P é a percentagem de partículas em peso, retida entre cada par de peneiras adjacentes

$d_m$  é a média geométrica entre as aberturas do par de peneiras utilizado.

Voltando agora um pouco a Lei de Darcy, podemos reescrevê-la com algumas pequenas modificações.

$$Q = K A J \text{ onde } J \text{ é o gradiente hidráulico.}$$

Substituindo A por  $e \cdot l$  onde "e" é a espessura do aquífero, e "l" é a largura.

$$Q = K e \cdot l \cdot J$$

O produto  $K \cdot e$  foi definido por Theis em 1935 como coeficiente de transmissibilidade.

$$Q = T \cdot l \cdot J \tag{II.17}$$

O coeficiente de transmissibilidade pode ser entendido como a vazão através de uma seção vertical do aquífero de largura unitária, submetida a um gradiente hidráulico também unitário.

## EQUAÇÕES DE UM AQÜÍFERO

Um das equações que devem ser obedecidas em um aqüífero é a da continuidade ou conservação da massa.

Consideremos um volume de controle de um meio poroso, saturado de um fluido homogêneo, em forma de paralelepípedo de lados  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  e analisemos a massa de fluido que atravessa o paralelepípedo na direção do eixo  $y$ . Consideremos a massa específica e a vazão específica na origem respectivamente  $\rho$  e  $q$ .

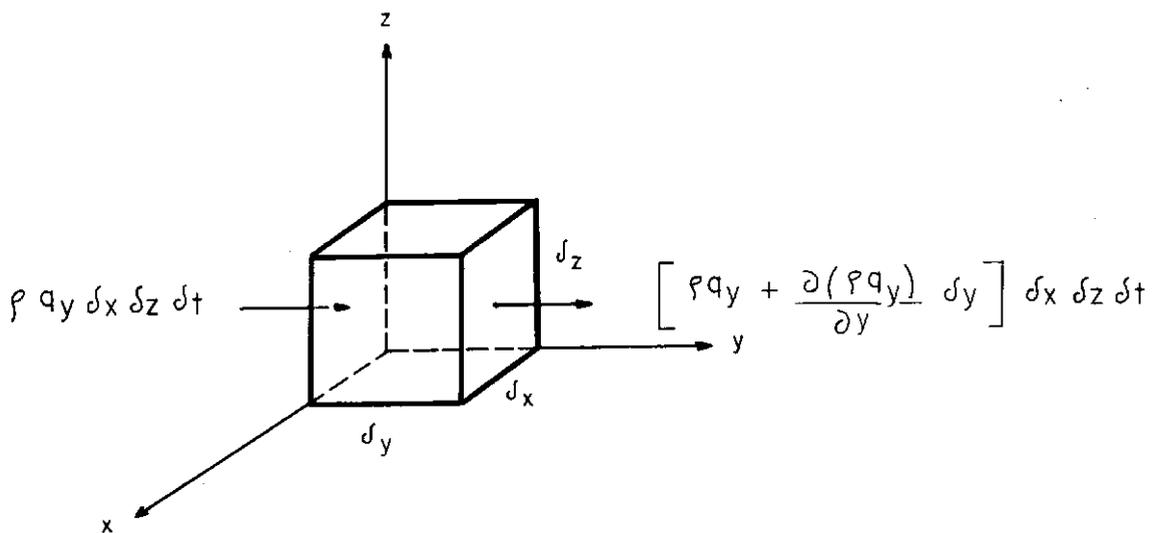


FIG. II-4 - PARALELEPÍPEDO RETANGULAR INFINITESIMAL PARA ANÁLISE DE VAZÕES.

Subtraindo os valores encontrados para as faces opostas do paralelepípedo, obteremos a troca de massas ocorrida no eixo y no volume de controle

$$\frac{\partial(\rho q_y)}{\partial y} \delta x \delta y \delta z \delta t$$

Para os três eixos, a troca de massa, será

$$\left[ \frac{\partial(\rho q_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho q_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho q_z)}{\partial z} \right] \delta x \delta y \delta z \delta t$$

O volume do paralelepípedo é  $\delta x \delta y \delta z$  e o volume ocupado pelo fluido será obtido multiplicando-se o volume total pela porosidade  $n$ .  $\delta x \delta y \delta z$ , e a massa do fluido será obtida multiplicando-se este valor pela massa específica  $\rho n \delta x \delta y \delta z$  e a troca de massa pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\frac{\partial(\rho n)}{\partial t} \delta x \delta y \delta z \delta t$$

Pela continuidade, a soma das trocas de massa deve ser nula.

$$\frac{\partial(\rho q_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho q_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho q_z)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho n)}{\partial t} = 0$$

$$\text{div}(\rho \vec{q}) + \frac{\partial(\rho n)}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.18})$$

Se o meio poroso  $\bar{e}$  indeformável,  $n$   $\bar{e}$  constante e pode sair do parênteses.

$$\operatorname{div} (\rho \vec{q}) + n \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.19})$$

Se o escoamento  $\bar{e}$  permanente a equação será

$$\operatorname{div} (\rho \vec{q}) = 0 \quad (\text{II.20})$$

Se o escoamento for incompressível, teremos

$$\operatorname{div} (\vec{q}) = 0 \quad (\text{II.21})$$

Substituindo  $\vec{q}$  pela lei de Darcy, eq. II.7

$$\operatorname{div} (K \vec{\operatorname{grad}} \phi) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (K_x \frac{\partial \phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (K_y \frac{\partial \phi}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (K_z \frac{\partial \phi}{\partial z}) = 0 \quad (\text{II.22})$$

Considerando que o meio  $\bar{e}$  isotrópico, será obtido

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (\text{II.23})$$

Consideremos agora que existe uma fonte ou sumidouro no volume de controle que se encontra sob observação; a equação II.18 não será mais igualada a zero, e sim a um termo que traduza a entrada ou saída de massa por unidade de tempo, respectiva-

mente, pela fonte ou sumidouro<sup>(61)</sup>.

Chamando a variação de massa produzida pela fonte por unidade de tempo e por unidade de volume de  $\Delta\mu$ , teremos

$$\operatorname{div} (\rho \vec{q}) + \frac{\partial(\rho m)}{\partial t} = \Delta\mu \quad (\text{II.24})$$

Para um escoamento permanente, a equação se reduzirá a

$$\operatorname{div} (\rho \vec{q}) = \Delta\mu \quad (\text{II.25})$$

Se para o elemento  $\delta x \delta y \delta z$  considerado se gera, um volume de fluido  $F$  por unidade de tempo e por unidade de volume, ficaremos com

$$\operatorname{div} (\rho \vec{q}) = F\rho \quad (\text{II.26})$$

Para um escoamento incompressível

$$\operatorname{div} (\vec{q}) = F \quad (\text{II.27})$$

Substituindo  $q$  pela lei de Darcy e fazendo as mesmas considerações de homogeneidade e isotropia da equação II.23, iremos obter

$$\nabla^2 \phi + \frac{F}{K} = 0 \quad (\text{II.28})$$

onde  $\phi$  é o potencial no sentido de carga piezométrica e  $K$  é a condutividade hidráulica do meio

### APROXIMAÇÃO DE DUPUIT

Uma simplificação que tem sido bastante utilizada quando se trabalha com água subterrânea é a aproximação de Dupuit, chamada por alguns de Dupuit-Forchheimer.

Dupuit em 1863 verificou que nos escoamentos de águas subterrâneas a declividade da superfície freática é geralmente muito pequena.

Para um fluido não confinado Dupuit sugere que o gradiente hidráulico pode ser substituído pela declividade da superfície freática.

Para declividades muito pequenas da superfície freática pode se considerar as superfícies equipotenciais como verticais e o escoamento como praticamente horizontal, de modo que com isto se reduz uma dimensão do problema, já que o potencial passará a ser função apenas de  $x$ ,  $\phi = \phi(x)$ .

Para fluidos não confinados em meios porosos isotrópicos, se verifica que o erro relativo cometido no cálculo da descarga específica, utilizando-se a aproximação de Dupuit é dado por<sup>(50)</sup>:

$$\text{erro} < \frac{i^2}{1 + i^2} \quad (\text{II.29})$$

onde  $i$  é a declividade da superfície freática.

Em resumo podemos dizer que na simplificação de Dupuit despreza-se a curvatura dos filetes das linhas de corrente e considera-se que todas as partículas apresentam movimento apenas na direção horizontal.

### AQÜÍFEROS COSTEIROS

Em lençóis d'água próximos a costa, a parte superior da formação aquífera possui água doce e a parte inferior está saturada de água salgada que se estende em forma de cunha até determinada distância do litoral.

Na realidade a água doce e a água salgada não são imiscíveis; devido a dispersão é criada uma zona de espessura variável onde ocorre uma transição gradual da água com concentração salina praticamente nula, até a água de elevada concentração salina.

A espessura da zona de transição em determinado local depende do coeficiente de dispersão, da recarga e descarga natural da água doce, dos locais de bombeamento e da quantidade de água extraída, e do efeito das marés.

No entanto, em muitos casos, a espessura da zona de transição é pequena em comparação com as dimensões do aquífero, o que permite a consideração da existência de uma "interface abrupta" de separação entre as duas fases.

Um outro fator que concorre para que seja válida a con

sideração da interface abrupta é que existe um gradiente hidráulico na água doce que produz um contínuo escoamento de parte da água doce para o mar e as partículas salinas que através da dispersão hidrodinâmica haviam penetrado na região de água doce, são transportadas de volta ao mar pelo escoamento acima citado fazendo com que seja mantida a interface considerada.

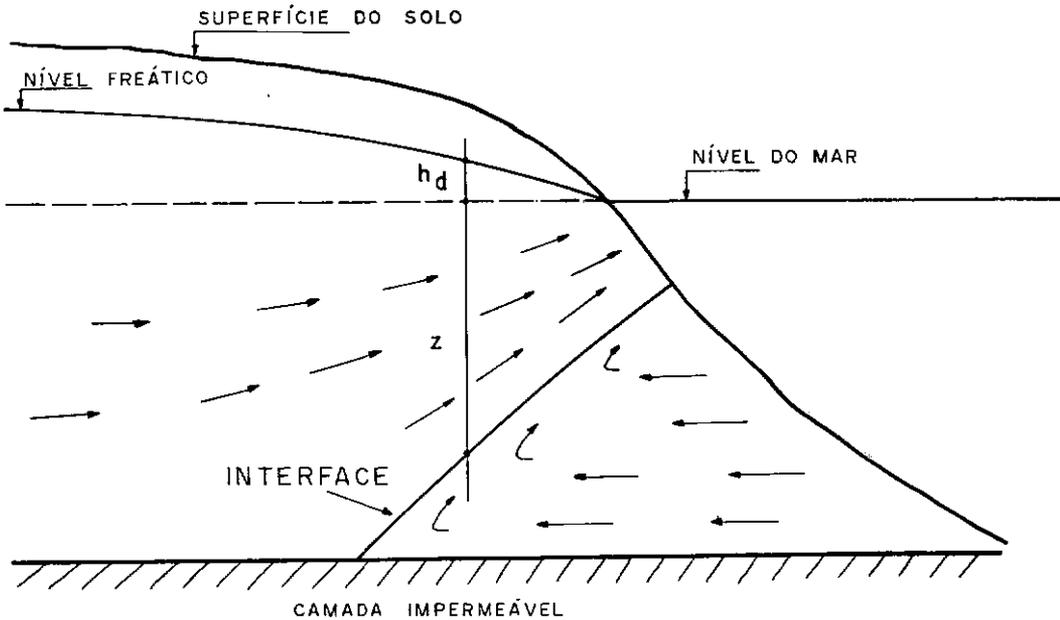


FIG. II-5 - DIAGRAMA ESQUEMÁTICO DE UM AQUÍFERO COSTEIRO

Ghyben<sup>(12)</sup> e Herzberg<sup>(11)</sup> estabeleceram um critério aproximado para determinação da posição da linha de interface entre a água doce e a água salgada, através de considerações do equilíbrio hidrostático dos fluidos.

De acordo com a figura II.5, chamando de  $z$  a ordenada de um ponto da interface, considerando que o nível  $z=0$  corresponde ao nível do mar e chamando de  $h_d$  a altura de água doce acima do nível do mar, teremos pela igualdade de pressões dos dois lados da interface.

$$\rho_s g z = \rho_d g h_d + \rho_d g z \quad (\text{II.30})$$

onde  $\rho_s$  e  $\rho_d$  são a massa específica da água salgada e da água doce

Daí tiramos que:

$$z = \frac{\rho_d}{\rho_s - \rho_d} h_d \quad (\text{II.31})$$

que é chamada relação de Ghyben-Herzberg. A massa específica da água doce é  $1000 \text{ Kg/m}^3$  e a da água salgada é geralmente  $1025 \text{ Kg/m}^3$ , de modo que substituindo, teremos

$$z = 40 h_d \quad (\text{II.32})$$

Ou seja, a água doce alcança uma profundidade correspondente a aproximadamente 40 vezes a altura da superfície livre do lençol em relação ao nível do mar.

Na realidade, para pontos próximos ao mar, a consideração do equilíbrio hidrostático deixa muito a desejar, por causa das componentes do escoamento que não podem ser desprezadas.

Bear e Dagan<sup>(8)</sup> pesquisaram a validade da relação de Ghyben-Herzberg. Eles encontraram que num aquífero confinado, a aproximação era boa, com um erro de 5% no cálculo da profundidade do p̄ da interface, para vazões de recarga do aquífero não muito grandes.

Uma outra expressão levando em conta o escoamento de cada fluido pode ser deduzida através de considerações do equilíbrio hidrodinâmico, utilizando a carga piezométrica.

Chamando de  $\phi_d$  e  $\phi_s$  o potencial ou carga piezométrica na água doce e na água salgada, teremos

$$\phi_d = z + \frac{p}{\rho_d g} \quad (II.33)$$

$$\phi_s = z + \frac{p}{\rho_s g}$$

onde  $z$  é a elevação e  $p$  é a pressão.

Para um ponto da interface  $z$  e  $p$  são iguais para as duas regiões e tiramos o valor de  $z$ .

$$z = \frac{\rho_s}{\rho_s - \rho_d} \phi_s - \frac{\rho_d}{\rho_s - \rho_d} \phi_d \quad (II.34)$$

Então a profundidade da interface pode ser obtida pelas massas específicas e pelas cargas piezométricas ao longo do aquífero.

A equação II.34 apresenta resultados bem mais precisos que a de Ghyben-Herzberg e será utilizada mais adiante no desenvolvimento do modelo matemático para cálculo da posição, forma e movimento da interface.

Além da condição de igualdade das pressões citada anteriormente, os pontos da interface devem obedecer a outra condição em relação a derivada da carga piezométrica na direção transversal a interface, o que está associado a vazão, através da Lei de Darcy.

Assume-se que a interface é uma superfície material, ou seja, composta sempre das mesmas partículas fluidas (no apêndice 2, se encontra uma explicação mais detalhada de uma superfície material).

Para um problema bidimensional, a superfície da interface pode ser representada por uma equação cuja forma geral é

$$F = F(x, z, t) = 0$$

No desenvolvimento do problema não se fará uso da aproximação de Dupuit, para evitar os problemas relatados mais adiante nesse mesmo capítulo.

Consideremos agora que a posição  $x$  da interface pode ser escrita como função do tempo e da ordenada

$$x = \lambda(z, t)$$

E então uma função  $F$  anteriormente citada que relação  $x$ ,  $z$  e  $t$  pode ser escrita

$$F(x, z, t) = x - \lambda(z, t) = 0 \quad (\text{II.35})$$

A interface sendo uma superfície material pode se mover e teremos a derivada material

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla} F) = \frac{\partial F}{\partial t} + (\vec{q} \cdot \vec{\nabla} F)/n = 0 \quad (\text{II.36})$$

Aplicando a cada um dos líquidos teremos:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{(\vec{q}_d \cdot \vec{\nabla} F)}{n} = 0 \quad (\text{II.37})$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{(\vec{q}_s \cdot \vec{\nabla} F)}{n} = 0$$

Sabemos que  $\vec{q} = -K \vec{\nabla} \phi$ ; logo

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{K_d}{n} \vec{\nabla} \phi_1 \cdot \vec{\nabla} F$$

$$\vec{\nabla} \phi_1 = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \phi_d}{\partial x} \quad \frac{\partial \phi_d}{\partial z} \end{array} \right\}$$

$$\vec{\nabla} F = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial F}{\partial x} \quad \frac{\partial F}{\partial z} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \quad -\frac{\partial \lambda}{\partial z} \end{array} \right\}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{\partial \lambda}{\partial t}$$

Substituindo, chegaremos a

$$-\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{K_d}{n} \left[ \frac{\partial \phi_d}{\partial x} - \frac{\partial \phi_d}{\partial z} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right] \quad (\text{II.38})$$

Aplicando também para a região de água salgada, teremos:

$$-\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{K_d}{n} \left[ \frac{\partial \phi_d}{\partial x} - \frac{\partial \phi_d}{\partial z} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right] = \frac{K_s}{n} \left[ \frac{\partial \phi_s}{\partial x} - \frac{\partial \phi_s}{\partial z} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right]$$

Substituindo K por  $\frac{k\gamma}{\mu}$  iremos obter:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{k \gamma_d}{n \mu_d} \left[ \frac{\partial \phi_d}{\partial z} \frac{\partial \lambda}{\partial z} - \frac{\partial \phi_d}{\partial x} \right] = \frac{k \gamma_s}{n \mu_s} \left[ \frac{\partial \phi_s}{\partial z} \frac{\partial \lambda}{\partial z} - \frac{\partial \phi_s}{\partial x} \right] \quad (\text{II.39})$$

Esta equação também será utilizada mais adiante no desenvolvimento da solução para a localização da interface, evitando-se assim o risco alertado por Bear e Dagan<sup>(8)</sup> de que a aproximação de Dupuit em certas situações pode levar a erros significativos, como é o caso de problemas transientes em que ocorre uma brusca mudança de taxa de escoamento.

### POÇOS E TRINCHEIRAS

Algumas vezes a água subterrânea pode ser facilmente captado em afloramento do lençol na superfície do solo, especialmente em uma encosta ou depressão do terreno<sup>(62)</sup>.

No entanto, na maioria dos casos, é necessário construir alguma obra de captação das quais veremos dois tipos: as trincheiras e os poços.

As trincheiras são usadas quando se necessita de uma grande vazão e quando o lençol freático está a uma pequena profundidade e, de preferência, quando corre numa determinada direção.

A escavação das trincheiras, é perpendicular a direção do escoamento do lençol, podendo atingir até a profundidade onde se encontra a rocha impermeável abaixo do aquífero.

Imaginemos um caso teórico em que tenhamos uma trincheira em um aquífero confinado. Consideremos o meio poroso indeformável, homogêneo e isotrópico e o escoamento incompressível

e permanente<sup>(63)</sup>.

A vazão afluente à trincheira por unidade de comprimento, será

$$q = v A$$

pela lei de Darcy

$$q = - K \frac{\partial h}{\partial x} 2b$$

$$q = K \frac{dh}{dx} 2b$$

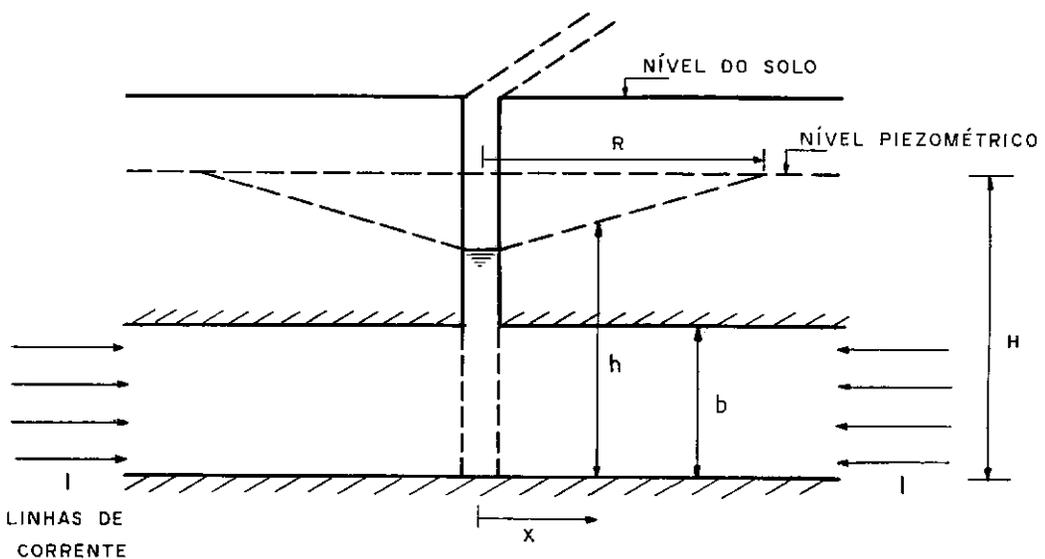


FIG. II-6 - CORTE ESQUEMÁTICO DE UMA TRINCHEIRA

Separando as variáveis e integrando de  $h$  até  $H$  e de  $x$  a  $R$

$$\int_h^H dh = \frac{q}{2Kb} \int_x^R dx$$

onde teremos

$$H-h = \frac{q}{2Kb} (R-x) \quad (\text{II.40})$$

que pode ser utilizada para cálculo do rebaixamento na trincheira, onde  $R$  é a distância de ação da trincheira e as demais grandezas estão indicadas na figura.

Os poços podem ser do tipo rasos ou profundos. Os poços rasos são utilizados na captação do lençol freático, são construídos através de escavação, cravação ou perfuração e geralmente fornecem uma vazão pequena, apenas suficiente para o uso doméstico.

Os poços profundos passam pelo lençol freático, quando existe, e são perfurados até atingir um ou vários lençóis artesianos. Podem fornecer grandes vazões suficientes para o abastecimento público a residências ou para fins industriais.

Vejamos uma aplicação de poço em um aquífero confinado. Consideremos que o poço penetra completamente no aquífero, que o meio poroso é indeformável, homogêneo e isotrópico e que o escoamento é incompressível e permanente.

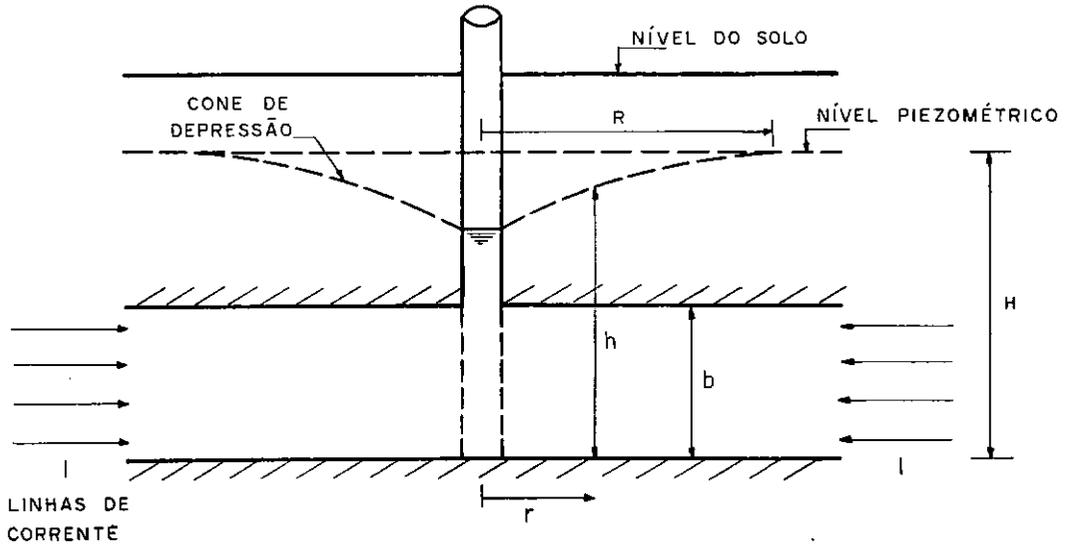


FIG. II-7 - CORTE ESQUEMÁTICO DE UM POÇO

A vazão afluyente ao poço será dada por:

$$Q = v.A$$

Aplicando a lei de Darcy

$$Q = -K \frac{\partial h}{\partial \ell} 2\pi r b$$

Fazendo a separação de variáveis e integrando de  $h$  até  $H$  e de  $r$  até  $R$  teremos:

$$\int_h^H dh = \frac{Q}{2\pi Kb} \int_r^R \frac{dr}{r}$$

$$H-h = \frac{Q}{2\pi Kb} \ln \frac{R}{r} \quad (\text{II.41})$$

que dá o rebaixamento do poço, sendo R o raio de influência do poço.

O raio de influência não é de fácil determinação. Podemos fazer uma estimativa com base na expressão empírica

$$R \cong 3000 \Delta H \sqrt{K} \quad (\text{II.42})$$

com R em metros,  $\Delta H = H - h_{\text{poço}}$  em metros e K dado em metros por segundo.

No capítulo III será feita novamente referência a estas fórmulas quando estiver sendo apresentado o desenvolvimento do modelo matemático.

Ven Te Chow sugere no Handbook of Hydrology um valor para o raio de influência de poços na faixa de 500 a 1000 pés.

## CAPÍTULO III

## MODELAGEM MATEMÁTICA DO PROBLEMA

Conforme foi visto anteriormente o escoamento da água num aquífero é regido pela equação de Laplace e, se houver fontes ou sumidouros, pela equação de Poisson.

Foi adotado o método de elementos de contorno para resolução das equações acima citadas e, a seguir, é apresentado um resumo do desenvolvimento matemático do problema por esse método.

No final do capítulo ainda se faz referência a integração no tempo por diferenças finitas, e se tecem algumas considerações sobre o movimento da ponta da interface e sobre a utilização de fontes ou sumidouros.

## CONCEITOS BÁSICOS

Inicialmente, apresenta-se a função delta de Dirac. É uma função generalizada que pode ser considerada como o limite de uma função comum. É definida como sendo nula em todos os pontos do domínio exceto num único ponto em que seu valor tende para infinito.

$$\begin{cases} \Delta(x-\xi) = 0 & \text{para } x \neq \xi \\ \Delta(x-\xi) = \infty & \text{para } x = \xi \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

A função delta de Dirac tem algumas propriedades muito úteis em aplicações matemáticas:

Ao ser integrada ao longo do domínio, é obtido o valor unitário se o domínio contém o ponto  $\xi$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(x-\xi) dx = \int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} \Delta(x-\xi) dx = 1 \quad (\text{III.2})$$

Ao ser integrado o seu produto por uma função contínua em  $\xi$  será obtido o próprio valor da função no ponto  $\xi$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \Delta(x-\xi) dx = \int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} f(x) \Delta(x-\xi) dx = f(\xi) \quad (\text{III.3})$$

Estas propriedades são importantes para o chamado mêto do da colocação.

Vejamos agora o teorema da divergência, que será também aplicado a seguir. Consideremos uma região  $\Omega$  limitada por um contorno  $\Gamma$  e tomemos o vetor normal a superfície num ponto qualquer da mesma.

$$\vec{N} = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma \quad (\text{III.4})$$

Se  $f = f(x,y,z)$  com derivada parcial de primeira ordem contínua, teremos:

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} d\Omega = \iint_{\Gamma} f \cos \alpha d\Gamma$$

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial y} d\Omega = \iint_{\Gamma} f \cos \beta d\Gamma \quad (\text{III.5})$$

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial z} d\Omega = \iint_{\Gamma} f \cos \gamma d\Gamma$$

Analogamente, se tivermos uma função vetorial poderemos encontrar uma relação do mesmo tipo. Tomemos um vetor

$\vec{U} = i x + j y + k z$  onde  $x, y, z$  são funções contínuas de  $x, y$  e  $z$  com primeira derivada parcial contínua em  $\Omega$ . De maneira semelhante as equações III.5 formamos três equações vetoriais que reunidas dão

$$\iiint_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{U} d\Omega = \iint_{\Gamma} \vec{N} \cdot \vec{U} d\Gamma \quad (\text{III.6})$$

que também é chamado de Teorema de Gauss (64).

Para finalizar este item, vejamos os teoremas de Green. Chamemos  $f$  e  $g$  duas funções contínuas e diferenciáveis até a se-

gunda ordem na região  $\Omega$ .

George Green em 1828 apresentou duas identidades, bastante utilizadas atualmente

$$\iint_{\Gamma} f \frac{\partial g}{\partial n} d\Gamma = \iiint_{\Omega} (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) d\Omega \quad (\text{III.7})$$

que é chamada primeira identidade de Green (65).

Podemos reescrever a fórmula trocando  $f$  por  $g$  e em seguida subtrair a equação obtida da equação III.7, donde se chegará a

$$\iint_{\Gamma} \left( f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) d\Gamma = \iiint_{\Omega} (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) d\Omega \quad (\text{III.8})$$

que é chamada de segunda identidade de Green.

Consideremos agora uma função potencial. A função potencial está associada a um campo que fisicamente pode ser de diversos tipos. Tomemos uma partícula de intensidade unitária que se move num campo vetorial  $\vec{F}$ , e cuja posição  $x$  num dado instante seja obtida pela distância  $\vec{r}$  de um ponto fixo  $\xi$ . A função potencial  $u$  é um escalar dado por

$$u(x) = \int_{\xi}^x \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (\text{III.9})$$

Se  $F$  é o campo gravitacional, o potencial será dito Newtoniano. Este potencial é uma função contínua de  $x$ , diferenciável em todas as ordens e em todos os pontos exceto no ponto fonte  $\xi$ (66).

O conceito físico desse potencial é o de energia por massa de fluido. Além desse, podem ser utilizadas outras funções que também têm as mesmas propriedades de um potencial.

Para pontos próximos a superfície terrestre o campo gravitacional é constante e a própria carga piezométrica pode ser considerada como um potencial, chamado por Llamas e Custódio (61) de potencial de forças, que será utilizado no presente trabalho.

$$\phi = \frac{u}{g} \quad (\text{III.10})$$

Se o campo vetorial de velocidade é irrotacional (para o escoamento de águas subterrâneas o fluxo não é irrotacional dentro de cada poro, mas macroscopicamente pode ser considerado assim, hipótese em que é válida a lei de Darcy) pode ser definido um potencial de velocidades também chamado de potencial de descarga específica (50).

$$\phi^* = \frac{K}{g} u \quad (\text{III.11})$$

onde  $K$  é a condutividade hidráulica.

Hubbert (13) demonstrou que o potencial de velocidades s $\bar{o}$  deve ser utilizado para a  $\bar{a}$ gua subterr $\bar{a}$ nea se o meio for hom $\bar{o}$ g $\bar{e}$ neo e isotr $\bar{o}$ pico porque, caso contr $\bar{a}$ rio, a lei de Darcy defini $\bar{d}$ a como  $q = -\text{grad}(\phi^*)$  perderia a validade.

### SOLUÇÃO FUNDAMENTAL

Tomemos a Equação de Poisson e consideremos que uma fon $\bar{t}$ e concentrada est $\bar{a}$  agindo num ponto  $\xi$

$$\nabla^2 u^*(\xi, x) + \Delta(\xi, x) = 0 \quad (\text{III.12})$$

onde o dom $\bar{i}$ nio  $\bar{e}$   $\Omega^* = \infty$ .

$\Delta(\xi, x)$   $\bar{e}$  a funç $\bar{a}$ o delta de Dirac, representando uma fonte de in $\bar{t}$ ensidade unit $\bar{a}$ ria.

$u^*(\xi, x)$   $\bar{e}$  a soluç $\bar{a}$ o fundamental, representando o potencial em  $x$  para uma fonte unit $\bar{a}$ ria em  $\xi$ .

Para um meio isotr $\bar{o}$ pico tridimensional a soluç $\bar{a}$ o funda $\bar{m}$ ental  $\bar{e}$

$$u^* = \frac{1}{4\pi r} \quad (\text{III.13})$$

onde  $r$   $\bar{e}$  a dist $\bar{a}$ ncia do ponto fonte ( $\xi$ ) ao ponto campo ( $x$ ).

Se o meio isotr $\bar{o}$ pico for bidimensional a soluç $\bar{a}$ o funda $\bar{m}$ ental  $\bar{e}$

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{1}{r} \right) \quad (\text{III.14})$$

### MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Tomemos a equação de Laplace  $\nabla^2 u = 0$  e a equação III.12 do item anterior. Chamemos as derivadas de  $u$  e  $u^*$  na direção normal ao contorno, respectivamente, de  $q$  e  $q^*$ .

Aplicando a segunda identidade de Green, temos

$$\int_{\Omega} \left[ (\nabla^2 u) u^* - u (\nabla^2 u^*) \right] d\Omega = \int_{\Gamma} (u^* q - q^* u) d\Gamma \quad (\text{III.15})$$

que pode ser simplificada utilizando-se as duas expressões abaixo

$$\nabla^2 u = 0 \rightarrow \int_{\Omega} (\nabla^2 u) u^* d\Omega = 0 \quad (\text{III.16})$$

$$\nabla^2 u^* + \Delta(\xi, x) = 0 \rightarrow \int_{\Omega} u (\nabla^2 u^*) d\Omega = - \int_{\Omega} u(x) \Delta(\xi, x) d\Omega = -u(\xi) \quad (\text{III.17})$$

onde  $\xi$  é um ponto interno da região e  $x$  é um ponto do contorno de modo que se obtêm

$$u(\xi) = \int_{\Gamma} u^*(\xi, x) q(x) d\Gamma - \int_{\Gamma} q^*(\xi, x) u(x) d\Gamma \quad (\text{III.18})$$

que corresponde a equação de Laplace escrita em forma integral, e que é chamada de 3ª identidade de Green.

De maneira análoga para a equação de Poisson se obtém

$$u(\xi) = \int_{\Gamma} u^*(\xi, x) q(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} q^*(\xi, x) u(x) d\Gamma(x) + \int_{\Omega} u^*(\xi, x) b(x) d\Omega \quad (\text{III.19})$$

onde  $b(x)$  refere-se a uma fonte ou sumidouro.

Para um ponto  $\xi$  pertencente ao contorno a equação III.18 sofre uma modificação devido a descontinuidade que a integral em  $q^*$  apresenta quando  $\xi$  tende para  $\Gamma$  (66). Assim a eq. III.18 pode ser escrita na forma

$$\frac{1}{2} u(\xi) = \int_{\Gamma} u^*(\xi, x) q(x) d\Gamma - \int_{\Gamma} q^*(\xi, x) u(x) d\Gamma$$

onde  $\xi$  faz parte de um contorno suave, e a integral em  $q^*$  é calculada no sentido do valor principal de Cauchy.

Generalizando, de acordo com a posição do ponto fonte o coeficiente do primeiro membro pode assumir diferentes valores, então a equação III.18 pode ser reescrita.

$$c(\xi) u(\xi) = \int_{\Gamma} u^* q d\Gamma - \int_{\Gamma} q^* u d\Gamma \quad (\text{III.20})$$

onde o valor de  $c(\xi)$  será dado por:

$c(\xi) = 0$  se  $\xi$  é um ponto externo a região em estudo

$c(\xi) = 1$  se  $\xi$  é um ponto interno

$c(\xi) = 1/2$  se  $\xi$  pertence a um contorno suave

$c(\xi) = \frac{\alpha}{2\pi}$  se  $\xi$  pertence a um contorno não suave, onde  $\alpha$  é o ângulo formado pelo contorno em  $\xi$ .

Para efetuar a integração indicada na equação III.20, realiza-se uma discretização do contorno num determinado número de elementos, onde a integral ao longo do contorno corresponde ao somatório das integrais ao longo de cada elemento.

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} u q^* d\Gamma = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} u^* q d\Gamma \quad (\text{III.21})$$

Considerando interpolação linear para  $u$  e  $q$  em cada elemento, e chamando de  $\eta$  uma coordenada adimensional com origem no centro do elemento, as funções de interpolação serão

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{2} (1-\eta) \\ f_2 &= \frac{1}{2} (1+\eta) \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

As funções  $u$  e  $q$  em cada ponto do elemento serão

$$u(n) = f_1 u_1 + f_2 u_2$$

(III.23)

$$q(n) = f_1 q_1 + f_2 q_2$$

As integrais ao longo do elemento podem ser escritas como

$$\int_{\Gamma_j} u q^* d\Gamma = \int_{\Gamma_j} \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix} q^* d\Gamma \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{ij}^1 & h_{ij}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

(III.24)

$$\int_{\Gamma_j} q u^* d\Gamma = \int_{\Gamma_j} \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix} u^* d\Gamma \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{ij}^1 & g_{ij}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}$$

Aplicando em III.21, obteremos a equação para um ponto  $i$

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^N \hat{H}_{ij} u_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j \quad (III.25)$$

onde  $\hat{H}_{ij}$  corresponde a soma das duas parcelas  $h$  referentes a cada  $n\tilde{o}$ , devido aos elementos adjacentes ao mesmo. Idem para a parcela  $G_{ij}$ .

O primeiro membro da equação III.25 pode ser escrito como

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j \quad (III.26)$$

onde  $H_{ij} = \hat{H}_{ij}$  para  $i \neq j$  e  $H_{ij} = \hat{H}_{ij} + c_i$  para  $i = j$

Existindo  $N$  nós, teremos então  $N$  incógnitas, e será preciso estabelecer um sistema de equações que pode ser obtido fazendo-se a colocação da eq. III.26 de modo que o ponto  $i$  ocupe sucessivamente a posição de todos os nós, gerando  $N$  equações.

Apresentando em forma matricial, teremos:

$$\underline{\underline{HU}} = \underline{\underline{GQ}} \quad (\text{III.27})$$

Uma maneira que pode ser utilizada para cálculo do valor de  $H_{ii}$  é aproveitando-se do fato que a soma de todos os elementos de  $H$  para uma linha  $i$  é igual a zero (66).

$$H_{ii} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N H_{ij}$$

Os termos  $G_{ii}$  podem ser calculados analiticamente pela fórmula

$$G_{ii} = \frac{\ell_{i-1}}{4\pi} \left[ \frac{3}{2} - \ln(\ell_{i-1}) \right] + \frac{\ell_i}{4\pi} \left[ \frac{3}{2} - \ln(\ell_i) \right] \quad (\text{III.28})$$

onde  $\ell_{i-1}$  e  $\ell_i$  são os comprimentos dos elementos adjacentes ao nó  $i$  (66).

Ao longo do contorno, em certos trechos é conhecido o valor do potencial (condição de Dirichlet) e em outros trechos é

conhecido o valor da derivada do potencial na direção normal ao contorno (condição de Neumann), de modo que o sistema de equações indicado por III.27 deve ser reagrupado para deixar no primeiro membro os termos de H e G que estão sendo multiplicados pelas incógnitas de u e q; e os termos restantes passar para o segundo membro, o que pode ser escrito

$$\underline{A} \underline{y} = \underline{F} \quad (\text{III.29})$$

onde  $\underline{y}$  é o vetor das incógnitas,  $\underline{A}$  é a matriz formada por elementos de G e H, e  $\underline{F}$  o vetor de termos independentes formado pela soma dos produtos dos elementos de G e H por seus respectivos valores previamente especificados.

#### DESENVOLVIMENTO DO MEC PARA ANÁLISE DA INTRUSÃO SALINA

Nesse trabalho analisa-se a intrusão salina utilizando-se um plano vertical perpendicular a linha da costa litorânea, temos, então, duas regiões planas, uma de água doce e uma de água salgada, onde o contorno externo permanece fixo e a interface de separação entre as duas regiões muda ao longo do tempo. São válidas as seguintes relações:

- equação de Poisson, já apresentada como Eq. II.28

$$\nabla^2 \phi + b(x) = 0$$

que será aplicada a cada uma das regiões.

- equação II.34, aplicada a interface entre a água doce e a água salgada, que pode ser escrita

$$\phi_s = \frac{\phi_d}{S} + \frac{(S-1)}{S} \cdot z \quad (\text{III.30})$$

$$\text{onde } S = \frac{\rho_s}{\rho_d}$$

- equação II.39 também aplicada a interface

$$\frac{n \mu_d}{k \gamma_d} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial t} = \left[ \frac{\partial \phi_d}{\partial z} \frac{\partial \lambda}{\partial z} - \frac{\partial \phi_d}{\partial x} \right] = \frac{S}{\alpha} \left[ \frac{\partial \phi_s}{\partial z} \frac{\partial \lambda}{\partial z} - \frac{\partial \phi_s}{\partial x} \right] \quad (\text{III.31})$$

$$\text{onde } \alpha = \frac{\mu_s}{\mu_d}$$

Chamando de  $\beta$  o ângulo entre a interface e a horizontal tal que  $\text{tg } \beta = \partial z / \partial \lambda$ , conforme a figura, e fazendo a abcissa  $x$  igual a uma função  $\lambda$  da ordenada e do tempo, teremos o vetor normal

$$N_1 = \frac{\vec{\nabla}(x-\lambda)}{|\vec{\nabla}(x-\lambda)|} = -N_2$$

a derivada do potencial na direção normal será

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1}{\partial N_1} &= \vec{N}_1 \cdot \vec{\nabla} \phi_1 = (|\vec{\nabla}(x-\lambda)|)^{-1} \vec{\nabla}(x-\lambda) \cdot \vec{\nabla} \phi_1 = \\ &= \left(1 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)^2\right)^{-1/2} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} - \frac{\partial \lambda}{\partial z} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial z}\right) \end{aligned}$$

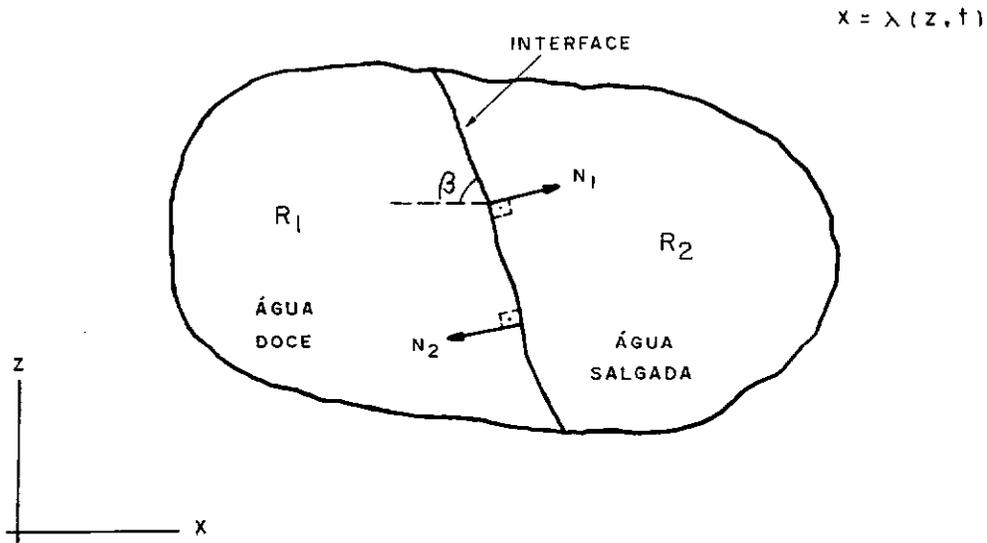


FIG. III-1 - DIAGRAMA REPRESENTATIVO DO PROBLEMA DE ELEMENTOS DE CONTORNO

aplicando em III.31, obteremos

$$\frac{n}{k} \frac{\mu_d}{\gamma_d} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial t} = - \left[ 1 + \left( \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2} \frac{\partial \phi_d}{\partial N_d} = \left[ 1 + \left( \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2} \left( \frac{S}{\alpha} \right) \frac{\partial \phi_s}{\partial N_s} \quad (III.32)$$

Sabendo que  $\text{tg } \beta = \frac{\partial z}{\partial \lambda}$  teremos que  $\text{sen } \beta = \left( 1 + \left( \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right)^2 \right)^{1/2}$

substituindo na anterior

$$\frac{n}{k} \frac{\mu_d}{\gamma_d} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial t} = - \frac{1}{\text{sen } \beta} \frac{\partial \phi_d}{\partial N_d} = \frac{S}{\alpha} \frac{1}{\text{sen } \beta} \cdot \frac{\partial \phi_s}{\partial N_s} \quad (III.33)$$

Como a água doce e a água salgada apresentam propriedades diferentes, temos que separá-las em duas regiões. Será feita, então, uma discretização para o contorno da água doce e outra discretização para o contorno da água salgada.

Os nós e elementos da interface pertencem as duas regiões recebendo, portanto, dois números na ordenação da discretização.

Adotou-se o sentido anti-horário para numeração dos nós e elementos das regiões. Ocorre, então, que na interface os nós apresentam em uma região numeração crescente num certo sentido e na outra região numeração crescente em sentido contrário.

Ao longo do contorno, em alguns nós se conhece o valor do potencial e em outros o valor de sua derivada na direção normal, no entanto na interface os dois valores são desconhecidos.

Na interface são aplicadas as equações III.30 e III.33, de maneira a compatibilizar os valores das incógnitas da interface na região 2 com os valores da outra região, utilizando a expressão correspondente onde aparece os valores dos nós equivalentes da interface na região 1.

Utilizou-se funções de interpolação lineares e adotou-se nós duplos em todos os pontos em que ocorre mudança das condições de contorno.

O nó duplo é um artifício utilizado quando a derivada ou a normal é descontínua, em que na mesma posição geométrica são

são considerados dois nós, ambos com o mesmo valor do potencial, mas com valores diferentes da derivada.

A integração dos termos H e G ao longo de cada elemento foi feita numericamente pelo método de Gauss, com dois, quatro ou seis pontos de acordo com a distância do elemento ao ponto fonte, utilizando-se mais pontos de integração para os elementos mais próximos.

Para os elementos adjacentes ao nó foi realizada integração analítica, devido a singularidade das integrais.

Foi feita, posteriormente, uma solução do problema calculando-se as integrais ao longo de todos os elementos de forma analítica, para se comparar com os resultados da integração numérica.

A resolução do sistema de equações lineares obtido foi efetuada utilizando-se uma subrotina que aplica o método de eliminação de Gauss, executando uma troca de linhas quando encontra um coeficiente zero na diagonal.

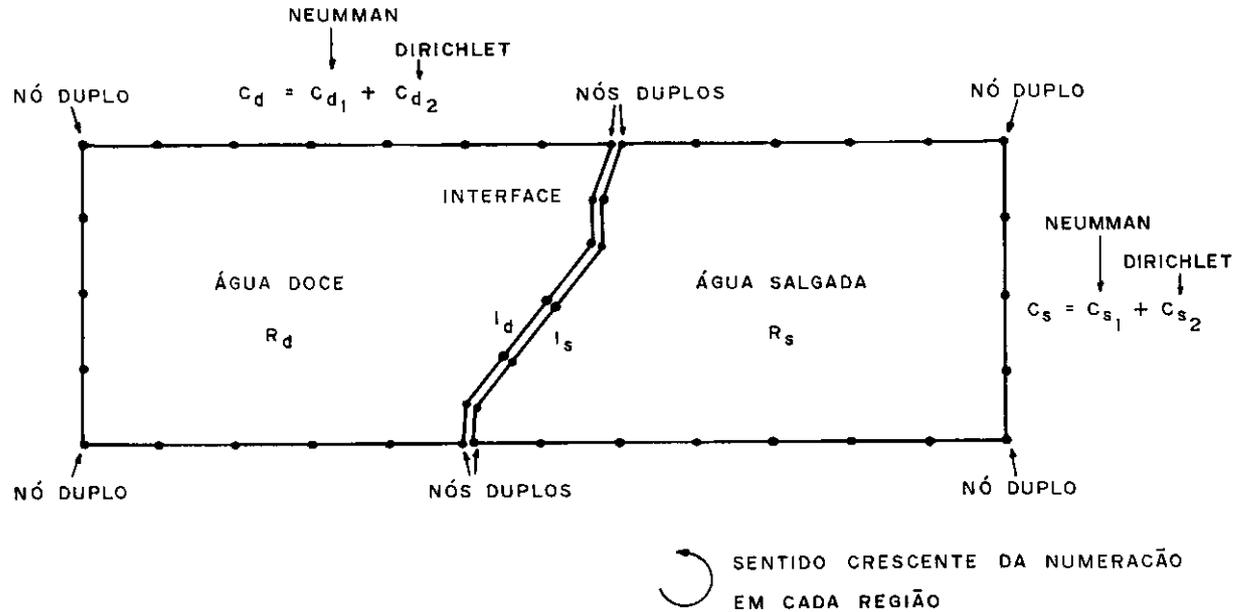


FIG. III-2 - DISCRETIZAÇÃO DO CONTORNO DAS REGIÕES

O sistema de equações será formada da seguinte maneira

$$\begin{bmatrix} H_{c_{d1}} & H_{c_{d2}} & H_{I_d} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{c_{s1}} & H_{c_{s2}} & H_{I_s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{c_{d1}} \\ \phi_{c_{d2}} \\ \phi_{I_d} \\ \phi_{c_{s1}} \\ \phi_{c_{s2}} \\ \phi_{I_s} \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} G_{c_{d1}} & G_{c_{d2}} & G_{I_d} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{c_{s1}} & G_{c_{s2}} & G_{I_s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{c_{d1}} \\ q_{c_{d2}} \\ q_{I_d} \\ q_{c_{s1}} \\ q_{c_{s2}} \\ q_{I_s} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} b_{c_{d1}} \\ b_{c_{d2}} \\ b_{I_d} \\ b_{c_{s1}} \\ b_{c_{s2}} \\ b_{I_s} \end{Bmatrix}$$

(III.34)

onde os vetores  $\phi$  representam o potencial no sentido da carga piezométrica em cada nó, os vetores  $q$  representam a derivada do potencial na direção normal ao contorno em cada nó, os termos  $G$  e  $H$  são submatrizes correspondentes às integrais já citadas no item anterior e os vetores  $b$  referem-se a integral das fontes ou sumidouros em cada uma das regiões.

Os índices  $d$  referem-se a água doce e  $s$  a água salgada, os índices  $c$  referem-se ao contorno externo e  $I$  a interface e, por último, os índices  $1$  correspondem a trechos onde é conhecido o valor do potencial (condição de Dirichlet) e  $2$  correspondem a trechos onde é conhecida a derivada do potencial (condição de Neuman).

Aplicando as equações III.30 e III.31 para eliminar as incógnitas da interface da segunda região, levando todos os termos desconhecidos para o primeiro membro e considerando que não existem fontes nem sumidouros na segunda região, teremos

$$\begin{bmatrix} -G_{cd1} & H_{cd2} & H_{Id} & 0 & 0 & G_{Id} \\ 0 & 0 & \frac{H_{Is}}{S} & -G_{cs1} & H_{cs2} & \frac{\alpha}{S} & G_{Is} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{cd1} \\ \phi_{cd2} \\ \phi_{Id} \\ q_{cs1} \\ \phi_{cs2} \\ q_{Id} \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -H_{cd1} & G_{cd2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -H_{cs1} & G_{cs2} & H_{Is} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{cd1} \\ q_{cd2} \\ \phi_{cs1} \\ q_{cs2} \\ (\frac{1}{S} - 1)Z_{Is} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} b_{cd1} \\ b_{cd2} \\ b_{Id} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(III.35)

Os termos do vetor  $b$  são obtidos pela integração da última parcela da equação III.19.

Após ser resolvido o sistema de equações lineares fica faltando apenas calcular os valores das incógnitas da interface da região 2, o que será feito com o auxílio das equações III.30 e III.33, substituindo-se os valores já encontrados para as incógnitas da interface da primeira região.

### INTEGRAÇÃO NO TEMPO

A resolução do problema transiente é feita através de uma sucessão de passos interligando estágios estacionários. Cada estágio estacionário é calculado pelo M.E.C. conforme explicado no item anterior. A equação de transição de um estágio a outro, ao longo do tempo, é feita por diferenças finitas, pelo método implícito.

Da equação III.33, temos

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = - \frac{1}{\text{sen} \beta} \cdot \frac{k \gamma_d}{n \mu_d} \cdot \frac{\partial \phi_d}{\partial N}$$

Aproximando  $\partial \lambda$  por  $\Delta \lambda$  entre os estágios K e K+1, nos instantes t e t+1, e utilizando um fator de ponderação  $\theta$  entre os valores de  $\frac{\partial \phi}{\partial N}$  para os instantes consecutivos, teremos a expressão para o cálculo dos deslocamentos dos nós da interface.

$$\lambda^{K+1} = \lambda^K - \frac{1}{\text{sen} \beta^K} \left[ \theta \left( \frac{\partial \phi_d}{\partial N} \right)^K + (1-\theta) \left( \frac{\partial \phi_d}{\partial N} \right)^{K+1} \right] \frac{k \gamma_d}{n \mu_d} \cdot \Delta t$$

(III.36)

A rigor, a expressão anterior deveria utilizar o valor do seno nos estágios K e K+1, o que produziria uma não linearidade. Esse problema poderia ser evitado por um método iterativo, mas Liggett(40) verificou que para pequenos intervalos de tempo  $\Delta t$  a equação III.36 já oferece um suficiente nível de precisão.

A equação III.36 é aplicada a cada um dos nós da interface, enquanto o contorno externo não sofre variação de posição ao longo do tempo, podendo apenas ocorrer que algum trecho que no estágio K pertencia a determinada região, passe a pertencer a outra região no estágio K+1.

Em cada nó da interface existe a concorrência de dois segmentos adjacentes e, no cálculo do seno do ângulo  $\beta$  num determinado instante, utilizou-se a média aritmética dos senos dos ân

gulos formados por cada segmento e a horizontal; no entanto, nos nós extremos da interface, foi utilizado apenas o seno do ângulo formado pelo segmento extremo.

O fator de ponderação  $\theta$  foi adotado inicialmente 0.5 e para o intervalo de tempo  $\Delta t$  foram escolhidos valores pequenos para os primeiros passos, aumentando-se progressivamente esse valor nos passos seguintes.

#### PONTA DA INTERFACE

O cálculo do movimento da extremidade superior da interface, aqui chamada de ponta (tip), apresenta algumas particularidades de acordo com o tipo das condições de contorno do problema que está sendo analisado.

Tanto na ponta como no pé da interface, a discretização apresenta quatro nós coincidentes, sendo dois de cada região. Os dois de cada região referem-se, respectivamente, ao elemento extremo da interface e ao elemento do contorno externo adjacente a interface.

Alguns dos problemas analisados possuem fluxo conhecido no contorno superior próximo a ponta, e as incógnitas são os potenciais. Nesse caso, a nova posição da ponta após um intervalo de tempo  $\Delta t$  será obtida aplicando-se simplesmente a equação III.36.

Quando o contorno junto a ponta da interface apresen-

ta potencial especificado nas duas regiões, tendo as derivadas na direção normal como incógnitas, o sistema de equações apresenta uma singularidade devido ao fato das equações correspondentes aos quatro nós da ponta serem linearmente dependentes.

Foi elaborada, então, uma subrotina para modificar o sistema de equações, impondo que  $\frac{\partial \phi}{\partial n}$  e  $\phi$  na ponta da interface sejam, respectivamente, iguais aos valores já conhecidos para ambos.

Em seguida, para se calcular a nova posição da ponta após o intervalo de tempo  $\Delta t$ , foram adotadas duas considerações alternativas. Uma das alternativas calcula a posição da ponta de maneira que o último segmento da interface permaneça perpendicular ao contorno. A outra alternativa utiliza o penúltimo e o antepenúltimo nós da interface, formando com o auxílio da reta do contorno uma parábola que passa por esses dois nós e seja perpendicular ao contorno no ponto de interseção.

Outro caso de singularidade também existe quando ao longo de todo o contorno externo são especificados valores da derivada do potencial na direção normal. O problema fica então indeterminado e a solução adotada foi utilizar a subrotina anteriormente citada e impor um potencial especificado em algum dos nós da interface.

#### RENUMERAÇÃO DA DISCRETIZAÇÃO

Após uma transição no tempo e tendo sido obtida a nova

posição da interface, é preciso verificar se houve um deslocamento considerável ou se a interface manteve-se praticamente estacionária.

Foi adotado como parâmetro de comparação do deslocamento da interface a norma quadrática obtida pela raiz quadrada da soma dos quadrados das diferenças entre a nova e a antiga posição.

Se a norma for inferior a um certo valor limite pré-fixado, considera-se que a interface atingiu uma situação estacionária e encerra-se o estudo. Se for superior, a discretização é reformada e a análise do problema continua.

Na reformulação da malha procurou-se evitar formação de elementos muito pequenos em relação aos elementos adjacentes, de modo a evitar instabilidade da solução numérica. Para isso, a posição inicial dos nós do contorno externo foi arquivada em memória, e após cada passo a malha era refeita utilizando-se esses nós básicos, suprimindo-se apenas os que ficassem muito próximos da ponta ou do pé da interface para os segmentos não ficarem muito pequenos.

O número total de elementos e de nós permaneceu o mesmo ao longo de todos os "steps" tendo, no entanto, variado o número de nós e elementos de cada região.

#### DRENOS E TRINCHEIRAS

Foram levados em consideração dois tipos de fontes e sumidouros: o primeiro um dreno horizontal de direção paralela a

costa que na seção plana em estudo aparece como uma fonte puntiforme; o segundo, uma trincheira também paralela a costa que no plano analisado toma a forma de uma fonte retilínea uniformemente distribuída.

Tomemos o caso do dreno e analisemos o último termo da equação III.19 para uma fonte concentrada no domínio (67).

$$B(\xi) = \int_{\Omega} b(x) \phi^*(\xi, x) d\Omega \quad (\text{III.37})$$

Chamando de  $P$  a intensidade da fonte concentrada e  $\Delta(\bar{x}, x)$  a função delta de Dirac, onde  $\bar{x}$  é o ponto onde a fonte está aplicada, teremos:

$$b(x) = P \cdot \Delta(\bar{x}, x) \quad (\text{III.38})$$

$$B(\xi) = P \int_{\Omega} \Delta(\bar{x}, x) \phi^*(\xi, x) d\Omega = P \cdot \phi^*(\xi, \bar{x}) \quad (\text{III.39})$$

onde  $\phi^*(\xi, x)$  é a solução fundamental para o caso bidimensional, já citada anteriormente.

Para o caso da trincheira temos no corte analisado uma linha de fontes uniformemente distribuídas. Chamando de  $l$  o comprimento e de  $p$  o valor da intensidade por unidade de comprimento teremos (67).

$$P = p ds \quad (\text{III.41})$$

De maneira análoga a equação III.38

$$db(x) = p \Delta(\bar{x}, x) ds \quad (\text{III.42})$$

de onde se obtém

$$dB(\xi) = p \phi^* (\xi, \bar{x}) ds \quad (\text{III.43})$$

integrando

$$B(\xi) = p \int_{-\ell/2}^{-\ell/2} \phi^* (\xi, x) ds \quad (\text{III.44})$$

que para o caso bidimensional pode ser efetuada analiticamente, chegando-se ao resultado

$$B(\xi) = \frac{-p}{4\pi} \left\{ \frac{d+\ell}{2} \ln \left[ \frac{\ell^2}{4} + \frac{d\ell}{2} + r_0^2 \right] - \left( \frac{d-\ell}{2} \right) \ln \left[ \frac{\ell^2}{4} - \frac{d\ell}{2} + r_0^2 \right] - 2\ell + v \left[ \arctag \left( \frac{d+\ell}{v} \right) - \arctag \left( \frac{d-\ell}{v} \right) \right] \right\} \quad (\text{III.45})$$

sendo

$$v = \sqrt{4 r_0^2 - d^2}$$

$$r_0 = \sqrt{\bar{a}^2 + \bar{b}^2} \quad d = 2 (\bar{a} \cos \alpha + \bar{b} \sin \alpha) \quad (\text{III.46})$$

onde  $\bar{a}$  e  $\bar{b}$  são, respectivamente, as distâncias horizontal e vertical entre o nó  $\xi$  e o ponto médio da fonte.

$$\bar{a} = x(\text{ponto médio da fonte}) - x(\xi)$$

$$\bar{b} = y(\text{ponto médio da fonte}) - y(\xi)$$

e  $\alpha$  é o ângulo entre a direção da fonte e o eixo horizontal  $x$ .

Geralmente, a captação mais utilizada é em forma de poço. Procurou-se, então, simular um poço através de uma trincheira que produzisse uma linha de depressão aproximadamente semelhante a do poço.

Na realidade, a depressão produzida por um poço é uma superfície cônica com geratriz curva e a da trincheira é uma superfície prismática com faces planas.

No corte vertical em estudo a linha de depressão do poço é formada por uma curva logarítmica (Equação II.41) enquanto a da trincheira é formada por linhas retas (Equação II.40).

Para achar a vazão distribuída por unidade de comprimento ( $q$ ) da trincheira que seja equivalente a vazão ( $Q$ ) de um poço, tomou-se dez pontos da curva do poço e pelo método dos mínimos quadrados se aproximou uma reta. Foi obtida então a seguinte relação

$$q = \frac{0,732 Q}{R} \quad (\text{III.47})$$

onde  $R$  é o raio de influência do poço (equação II.42).

A trincheira aparece no problema como uma linha reta, logo a vazão por unidade de comprimento dessa linha será:

$$q' = \frac{0,732 Q}{R \cdot \ell} \quad (\text{III.48})$$

em que  $\ell$  é o comprimento da linha de fontes uniformemente distribuídas.

## CAPÍTULO IV

## APLICAÇÕES

## SEGREGAÇÃO POR AÇÃO DA GRAVIDADE

Uma das aplicações do modelo desenvolvido foi ao problema de segregação por ação da gravidade, já estudado por diversos autores, entre eles Shamir e Dagan(36) e Sã da Costa(46) que adotaram a simplificação de Dupuit, sendo que os primeiros resolveram o problema por diferenças finitas e o último por elementos finitos, e ainda por Liu e Ligget(48) que utilizaram elementos de contorno.

Nesse problema é analisado um aquífero horizontal, confinado, de espessura constante. No instante inicial existe uma comporta vertical que separa a água doce da água salgada. A comporta é retirada e então a água salgada, por sua densidade maior, inicia um deslocamento em forma de cunha, penetrando pelo aquífero e forçando a água doce para cima.

As camadas que confinam o aquífero são impermeáveis e, considerando-se que não existe recarga lateral, tem-se que todas as condições de contorno são do tipo de Neuman, com  $\partial\phi/\partial n = \text{zero}$ .

A diferença de viscosidade entre os dois fluidos foi considerada desprezível, de modo que se usou o mesmo valor da viscosidade para ambos. Os valores dos outros parâmetros utilizados são apresentados na tabela IV.1.

TABELA IV.1 - Segregação por Ação da Gravidade. Dados de Entrada

Fator de ponderação( $\theta$ ) = 0,5

Número máximo de steps = 63

- Intervalos de tempo variados

Até step 5 intervalo = 0.1 dia

Até step 10 intervalo = 0.2 dia

Até step 15 intervalo = 0.5 dia

Até step 63 intervalo = 2.0 dia

- Parâmetros

	Região Doce	Região Salgada	
Porosidade	0,3	0,3	
Massa específica	1,0	1,025	(g/cm <sup>3</sup> )
Viscosidade Absoluta	$1,2 \times 10^{-3}$	$1,2 \times 10^{-3}$	(g/cms)
Condutividade Hidráulica	39,024	40,0	(m/dia)

Espessura do aquífero = 10 m

- Dados para discretização

Número de nós da região 1 = 25

Número de nós da região 2 = 25

Número de nós da interface = 9

Primeiro nó da interface na região 1 = 8

Primeiro nó da interface na região 2 = 42

Número de elementos da região 1 = 21

Número de elementos da região 2 = 21

- Condição inicial da derivada do potencial na interface

$$\partial\phi/\partial n = 0$$

- Subrotina valesp

Nó de aplicação = 5º nó da interface

Potencial especificado = zero

Derivada especificada = zero

Para os intervalos de tempo entre posições sucessivas foram adotados valores constantes até um certo step, no qual o valor do intervalo era aumentado e em seguida permanecendo constante por mais alguns passos e assim sucessivamente.

Foi efetuada uma discretização do contorno com um total de 50 nós e 42 elementos, que é apresentada na figura IV.1. Foi feita também uma discretização utilizando 34 nós e 26 elementos e uma outra com 86 nós e 78 elementos, para comparação do nível de precisão dos resultados.

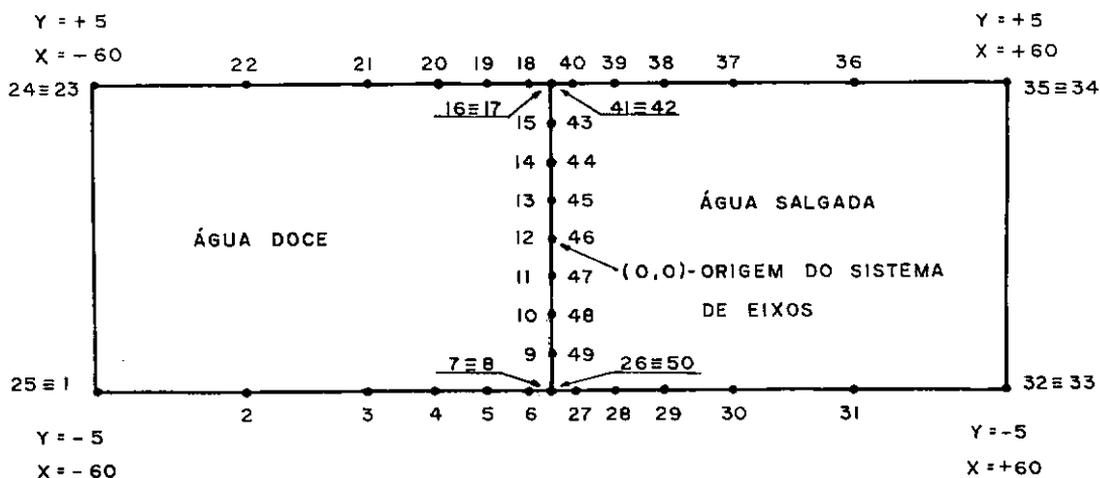


FIG. IV - 1 - DISCRETIZAÇÃO DO PROBLEMA DE SEGREGAÇÃO POR AÇÃO DA GRAVIDADE (50 NÓS)

TABELA IV.2 - Segregação por Ação da Gravidade - Resultados

PASSO Nº		0	1	5	11	18	23	33	43	50									
TEMPO (DIA)		0	0.1	0.5	2.0	10.0	20.0	40.0	60.0	74.0									
NºS	ORDENADAS	A B S C I S S A S																	
1	- 5.0										0.	-0.2457	-2.1315	-5.8813	-17.5354	-25.8565	-36.6161	-44.7199	-49.7035
2	- 3.75										0.	-0.0515	-0.5584	-3.4411	-12.9134	-18.8771	-27.0097	-33.1575	-36.7123
3	- 2.5										0.	-0.0451	-0.3983	-1.9042	- 8.4955	-12.6578	-17.9558	-21.8885	-24.4252
4	- 1.25										0.	-0.0193	-0.1757	-0.8467	- 4.2502	- 6.2337	- 9.0032	-11.0741	-12.2721
5	0										0.	0	0	0	0	0	0	0	0
6	+ 1.25										0.	+0.0193	+0.1757	+0.8467	+ 4.2502	+ 6.2337	+ 9.0032	+11.0741	+12.2721
7	+ 2.5										0.	+0.0451	+0.3983	+1.9042	+ 8.4955	+12.6578	+17.9558	+21.8885	+24.4252
8	+ 3.75										0.	+0.0515	+0.5584	+3.4411	+12.9134	+18.8771	+27.0097	+33.1575	+36.7123
9	+ 5.0	0.	+0.2457	+2.1315	+5.8813	+17.5354	+25.8565	+36.6161	+44.7199	+49.7035									

Como foi falado anteriormente, nesse problema as condições especificadas ao longo de todo o contorno são do tipo de Neumann, ou seja, não foi especificado o valor do potencial para nenhum dos pontos. O problema fica, então, indeterminado já que não existe nenhum potencial de referência.

Utilizou-se então a subrotina VALESP para especificar o valor do potencial igual a zero para o ponto médio da interface, e também derivada igual a zero para o mesmo ponto, embora essa segunda condição não fosse necessária.

A subrotina VALESP é chamada após ter sido armado o sistema de equações e atua nas linhas e colunas referentes ao nó indicado, impondo as condições especificadas.

A vantagem de utilizar o ponto médio da interface como origem dos eixos cartesianos e especificar potencial nulo nesse ponto é obter uma simetria nos resultados numéricos do potencial e dos deslocamentos dos pontos da interface.

Alguns dos resultados obtidos são apresentados na tabela IV.2 e na figura IV.2. São mostrados apenas determinados valores, ao longo do tempo, de deslocamento da interface para dar uma idéia geral da solução do problema.

O ponto médio da interface não sofre deslocamento e na tabela IV.2 a abscissa do nó número 5 permanece sempre nula; os outros nós da interface sofrem deslocamentos simétricos em relação ao ponto médio da interface (no caso sendo a origem do siste

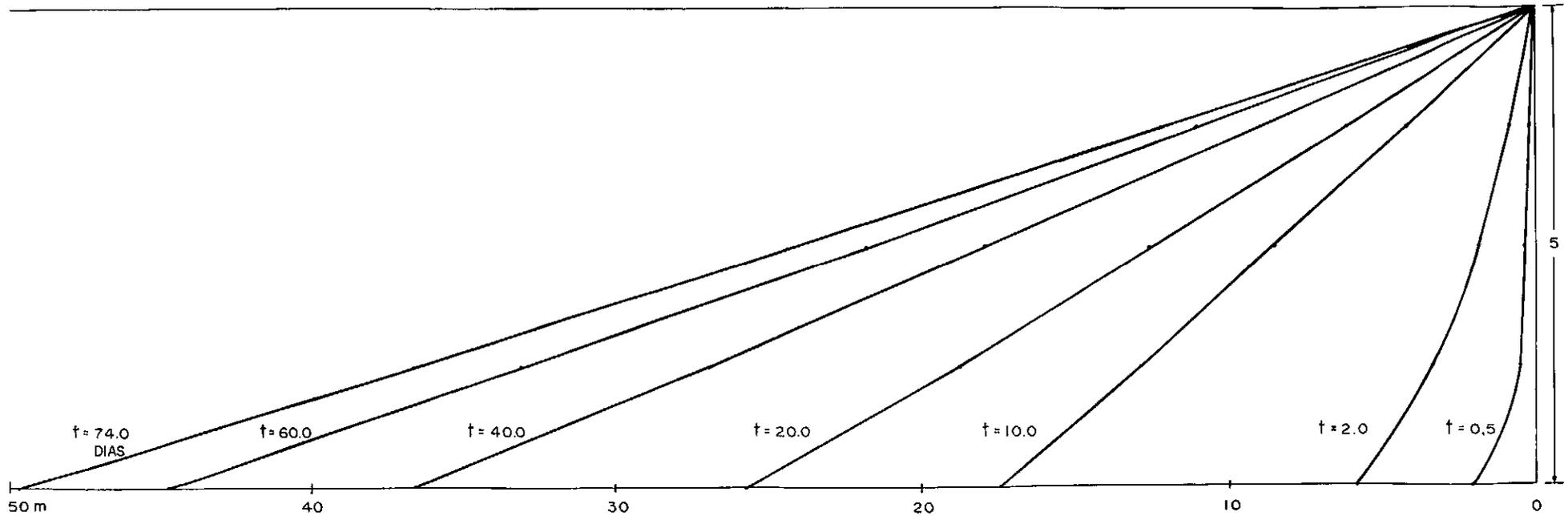


FIG. IV-2 - SEGREGAÇÃO POR AÇÃO DA GRAVIDADE. MOVIMENTO DA METADE INFERIOR DA INTERFACE.  
DISCRETIZAÇÃO COM 50 NÓS.

ma de eixos).

Verifica-se também que nos primeiros passos os nós próximos as extremidades da interface movem-se bem mais que os restantes de modo a formar uma curva nas extremidades, embora nos outros passos o deslocamento dos nós seja proporcional a distância que os separa do ponto médio de maneira que a interface fica praticamente uma linha reta.

O fato acima foi verificado por Liu e Liggett e acredita-se ser mais correto do que a conclusão de Sã da Costa e Shamir e Dagan, os quais afirmaram que a interface era sempre uma linha reta, mas esses autores levaram em consideração a aproximação de Dupuit que em determinados casos pode conduzir a erros.

A figura IV.3 mostra a comparação com os resultados do modelo proposto por Sã da Costa para problema semelhante.

Na figura IV.4 é feita uma comparação entre os resultados obtidos e soluções analíticas. Uma das soluções analíticas é a de Keulegan(20) baseada na aproximação de Dupuit e que é válida para tempos grandes.

$$L(t) = \left( \frac{\Delta\gamma \cdot k_d \cdot H}{n \cdot \gamma_d} \right)^{1/2} t^{1/2} \quad (\text{IV.1})$$

onde os termos dentro do parênteses são constantes e no nosso caso dão

$$L(t) = 5.7 t^{1/2} \quad (\text{IV.2})$$

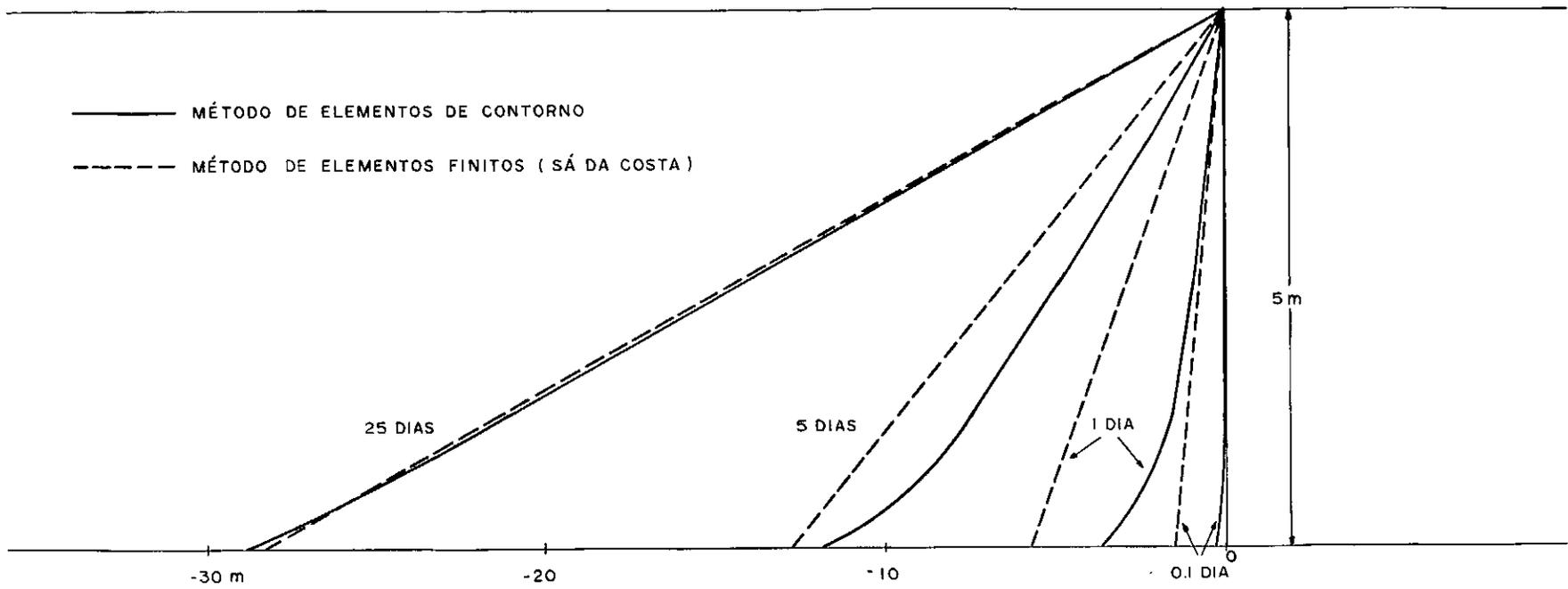


FIG. IV-3 - COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS DO MODELO UTILIZADO COM OS RESULTADOS DE SÁ DA COSTA.

Gardner et al(21) em 1962 apresentaram uma outra solução assintota para pequenos tempos.

$$\frac{L(t)}{H} = \frac{\sqrt{3}}{2} t^* \quad (IV.3)$$

onde o tempo está adimensionalizado pela seguinte expressão:

$$t^* = \frac{\Delta\rho \cdot g \cdot k_d}{\mu \cdot n \cdot H} \cdot t \quad (IV.4)$$

Gardner et al elaboraram ainda uma fórmula de interpolação englobando as equações IV.2 e IV.3, chegando a expressão

$$\frac{L(t)}{H} = \left( \frac{3t^{*2}}{4+3t^*} \right)^{1/2} \quad (IV.5)$$

cujos resultados são apresentados também na figura IV.4.

Verifica-se pela figura que, realmente, para tempos grandes a solução do modelo é praticamente a mesma da solução analítica e para tempos pequenos o resultado do modelo se apresenta entre as duas soluções analíticas, com um bom nível de aproximação.

Conforme havia sido dito anteriormente, foi feita uma discretização com 50 nós, outra com 86 nós e outra com 34 nós. Para tempos pequenos a posição do pē da interface na discretização de 34 nós chegou a apresentar discrepâncias em torno de 20% da posição obtida na discretização com 86 nós. No entanto, para tempos maiores, os resultados tornam-se praticamente idênticos com

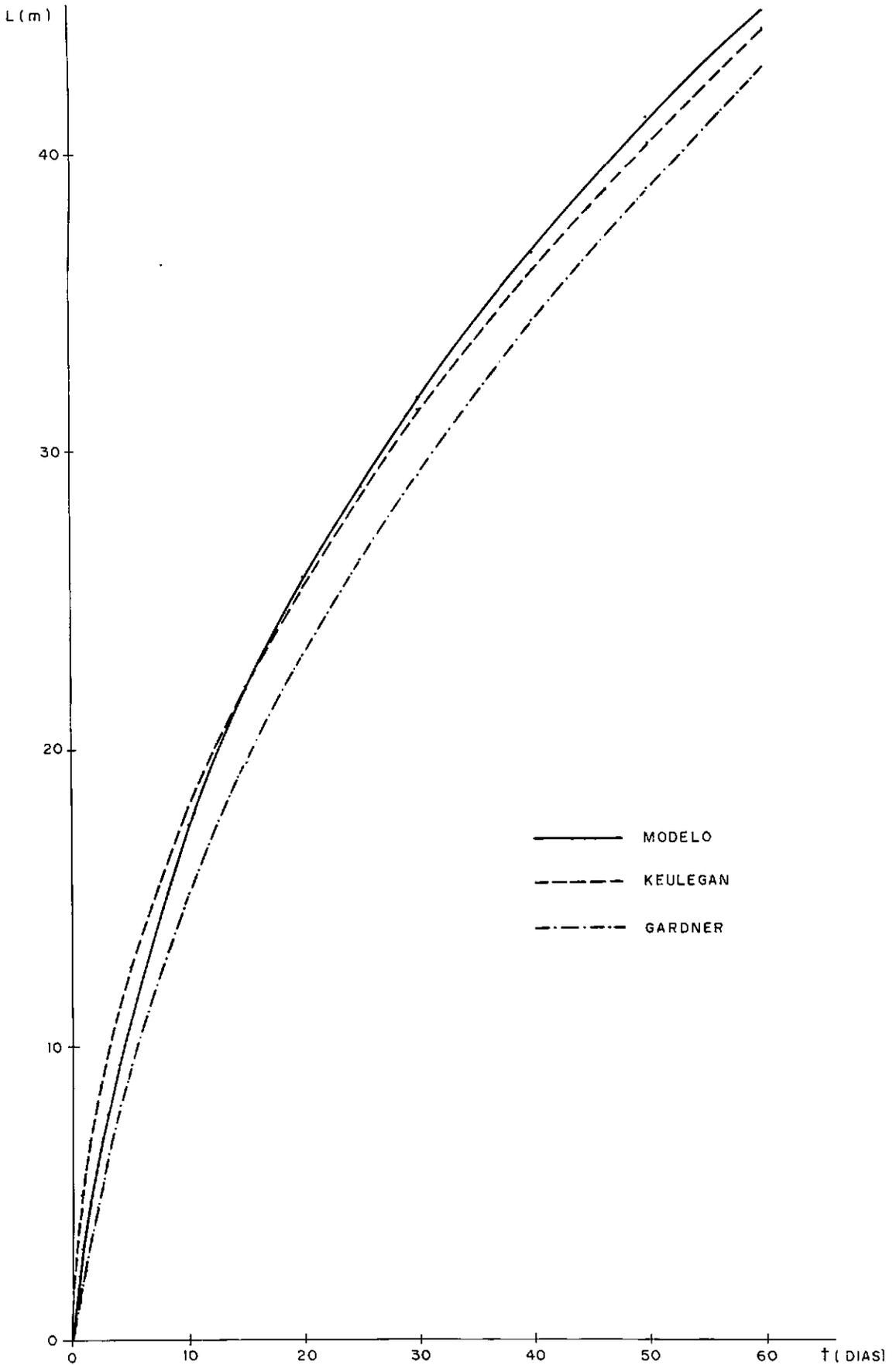


FIG. IV-4 - POSIÇÃO DO PÉ DA INTERFACE. COMPARAÇÃO ENTRE RESULTADOS DO MODELO E DE EXPRESSÕES ANALÍTICAS.

TABELA IV.3 - Posição do Pé da Interface para Diferentes Discretizações

TEMPO (DIA)	POSIÇÃO DE PÉ DA INTERFACE		
	DISCRETIZAÇÃO COM 34 NÓS	DISCRETIZAÇÃO COM 50 NÓS	DISCRETIZAÇÃO COM 86 NÓS
0.1	0.2028	0.2457	0.2510
0.2	0.6083	0.7383	0.7554
0.5	1.7888	2.1315	2.1118
2.0	5.9110	5.8813	5.8841
10.0	17.7308	17.5354	17.5925
20.0	25.9219	25.8565	25.8160
30.0	31.8091	31.7807	31.7146
40.0	36.6762	36.6161	36.4311
50.0	41.0685	41.2280	40.9550
60.0	45.1430	44.7199	44.5858

pequenas variações em torno de 1% ou 2%.

A tabela IV.3 mostra alguns resultados da posição do p̄ da interface, em função do tempo, para diferentes discretizações.

De acordo com a literatura sobre o assunto, o tempo de processamento computacional varia com o quadrado do número de nós para a montagem das matrizes e com o cubo do número de nós para a resolução do sistema. Verificou-se que o programa elaborado para resolver o problema consumia um tempo de processamento que dependia do número de nós elevado a um expoente entre 2 e 3.

Discretização	Tempo Médio por Step
86 nós	37 segundos
50 nós	9 segundos
34 nós	4 segundos

Na integração ao longo dos elementos do contorno foi utilizado o esquema de integração numérica de Gauss, conforme já visto no capítulo anterior. Além disso, foi feita para efeito de comprovação dos resultados a programação da integração analítica e verificou-se que os valores obtidos eram completamente semelhantes no nível de precisão com que se trabalhou.

Um dos problemas com que se deparou na aplicação do modelo foi a questão da instabilidade dos resultados. Em certos passos da solução do problema se chegava algumas vezes a distorções inadmissíveis, com oscilação dos valores nos steps consecutivos.

tivos. Verificou-se, através de tentativas, que o problema se devia a variação do valor do intervalo de tempo ( $\Delta t$ ) de um estágio a outro. Quando isso ocorreu, foi feita uma redução do valor de  $\Delta t$ , e o problema deixou de existir.

Devido a exigüidade do tempo que se dispunha para realizar esse trabalho, não foi possível encontrar uma expressão que permitisse obter quais os valores de  $\Delta t$  nos diversos steps que assegurariam condições de estabilidade.

#### INTRUSÃO POR REDUÇÃO DA VAZÃO DE RECARGA

Uma outra aplicação foi a simulação do experimento realizado por Bear e Dagan (8) numa célula de Hele-Shaw, em que a interface de um aquífero ocupava no instante inicial uma posição estacionária para uma determinada vazão de recarga e que, depois desse instante, a vazão de recarga era bruscamente diminuída. Com isso, havia o movimento da interface em direção a terra.

Bear e Dagan relatam cinco casos diferentes para distintas vazões de recarga antes do tempo inicial ( $t=0$ ) e depois do tempo inicial ( $t=0_+$ ). Aqui apresentamos o estudo comparativo apenas para um dos casos, o de número 1.

O experimento representa um aquífero horizontal confinado, recebendo uma vazão de recarga numa das extremidades escoando em direção ao mar onde se encontra uma interface de separação. O trecho superior da região 1, adjacente a ponta da interface, bem como a fronteira superior da região 2, são permeáveis.

Na fronteira superior da região 1 foi utilizado um nó duplo no ponto de separação entre o contorno permeável e o impermeável, e também nós duplos em todos os pontos em que há descontinuidade do fluxo através do contorno.

No trecho permeável da fronteira superior da região 1 é especificado um potencial constante e na fronteira superior da região 2 é especificado um outro potencial também constante relacionado com o primeiro através da equação de compatibilização II.34.

Foram efetuadas as mesmas considerações da aplicação anterior em relação a viscosidade (a mesma para as duas regiões) e aos intervalos de tempo (certo número de passos com intervalos de tempo constante e em seguida intervalos maiores). O fator de ponderação foi utilizado também igual a 0.5.

Foi efetuada uma discretização com 45 nós, outra com 65 nós e uma outra com 87 nós. Procurou-se trabalhar mais com a discretização de 65 nós, porque oferecia um bom detalhamento do movimento da interface e o tempo de processamento computacional não era tão longo.

O experimento de Bear e Dagan é composto por duas etapas. Na primeira, com a vazão de recarga inicial, o programa é rodado para uma série de passos até chegar a uma configuração estacionária para a interface. Na segunda etapa parte-se da configuração encontrada no item anterior, altera-se a vazão para o novo valor desejado e o programa é rodado por mais uma série de passos em que se obtém a nova posição da interface para cada tempo.

A tabela IV.4 mostra os dados de entrada para a discretização com 65 nós enquanto a tabela IV.5 e a figura IV.5 apresentam a posição estacionária obtida no final da primeira etapa, indicada por  $t=0$  e as posições sucessivas da interface ao longo do tempo.

Conforme foi explicado no capítulo anterior, no caso de ser especificado o potencial junto a ponta da interface ocorreria uma singularidade. Essa singularidade no sistema de equações é eliminada com o uso da subrotina VALESP aplicada ao nó da ponta da interface, impondo o valor do potencial especificado para o nó duplo adjacente e o valor da derivada igual a zero.

Para o cálculo da posição da ponta da interface utilizou-se algumas vezes o último elemento perpendicular ao contorno e em outras vezes a ponta em forma de parábola do segundo grau. Verificou-se que os dois casos diferiam entre si apenas na posição da ponta e dos nós adjacentes, e no restante do problema os resultados eram iguais com os dois métodos.

Foi detectado o mesmo problema de instabilidade da aplicação anterior para valores muito grandes do intervalo de tempo, mas também não foi possível estabelecer uma fórmula para garantir a estabilidade.

A figura IV.5 mostra a comparação entre os resultados experimentais obtidos por Bear e Dagan e os resultados encontrados com o modelo para diferentes tempos.

TABELA IV.4 - Dados de Entrada para o Experimento de Bear e Dagan  
 Experimento nº 1 - Discretização com 65 Nós

Fator de Ponderação ( $\theta$ ) = 0.5

Número Máximo de Steps = 95

- Intervalo de tempos variados

Até step 3 intervalo = 0.145 segundos  
 Até step 5 intervalo = 0.29 segundos  
 Até step 16 intervalo = 0.36 segundos  
 Até step 31 intervalo = 1.0 segundos  
 Até step 95 intervalo = 2.5 segundos

- Parâmetros

	Região Doce	Região Salgada	
Porosidade	0.3	0.3	
Massa específica	1.0	1.029	(g/cm <sup>3</sup> )
Viscosidade absoluta	0.12 E-03	0.12 E-03	(g/cms)
Condutividade hidráulica	69.0	69.0	(cm/s)
Espessura do aquífero = 27 cm			

- Dados para discretização

Número de nós da região 1 = 36  
 Número de nós da região 2 = 31  
 Número de nós da interface = 12  
 Primeiro nó da interface na região 1 = 9  
 Primeiro nó da interface na região 2 = 54  
 Número de elementos da região 1 = 29  
 Número de elementos da região 2 = 25

- Condição inicial da derivada do potencial na interface

$$\partial\phi/\partial n = 0$$

- Condições de contorno

Vazão de recarga na 1ª fase ( $t = 0^-$ ) = 19,1 cm<sup>2</sup>/s. (por unidade de comprimento da costa)

Vazão de recarga na 2ª fase ( $t = 0^+$ ) = 0

Potencial na fronteira superior da região 1 = 500.0 cm

Potencial na fronteira superior da região 2 = 485.9 cm

- Subrotina valesp

Nó da aplicação = 12º nó da interface

Potencial especificado = 500.0

Derivada especificada = zero

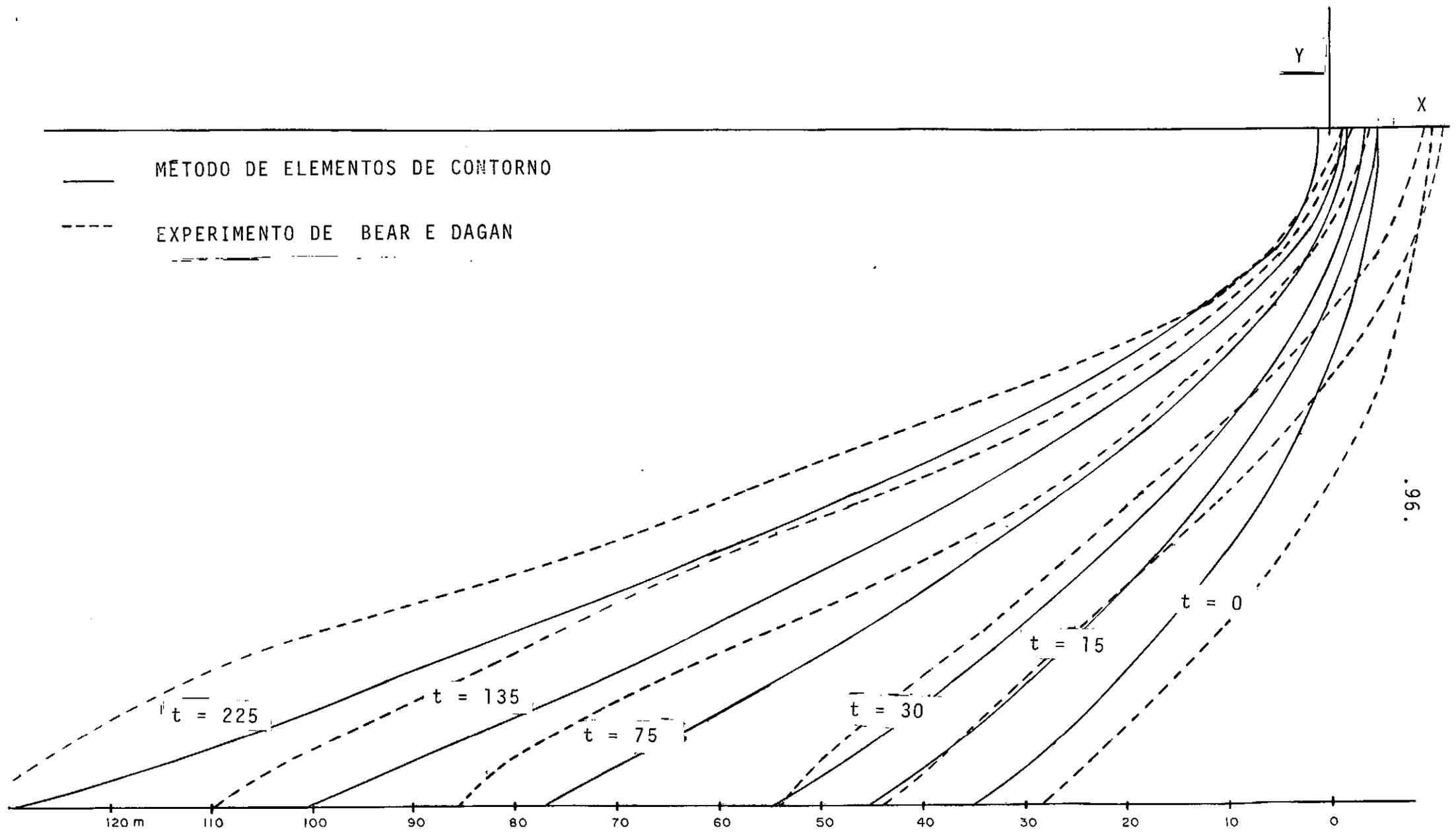


FIG. IV-5 - SIMULAÇÃO DO EXPERIMENTO DE BEAR E DAGAN. DISCRETIZAÇÃO COM 65 NÓS.  
 PONTA EM FORMA DE PARÁBOLA.

TABELA IV.5 - Simulação do Experimento de Bear e Dagan

Discretização com 65 N<sup>os</sup>. Ponta em Forma de Parábola

PASSO N <sup>o</sup>		0	1	16	26	35	53	77	95								
TEMPO (s)		0	0,145	5	15	30	75	135	225								
N <sup>OS</sup>	ORDENADAS	A B S C I S S A S															
1	-27.0									-35.0700	-35.2601	-38.8019	-45.5379	-54.7947	-77.3678	-100.8131	-129.7264
2	-24.5									-27.3760	-27.4198	-30.6936	-36.9298	-45.2290	-65.3621	-86.2754	-109.7724
3	-22.0									-21.0520	-21.1027	-24.1411	-29.7585	-37.1790	-54.4956	-71.5534	-93.1578
4	-19.5									-15.5270	-15.5669	-18.2848	-23.2772	-29.6758	-44.5120	-59.1230	-76.7181
5	-17.0									-10.6950	-10.7279	-13.0704	-17.3575	-22.7694	-35.0519	-47.1229	-60.9549
6	-14.5									- 6.5300	- 6.5560	- 8.4939	-12.0324	-16.4487	-26.2274	-35.7150	-46.4421
7	-12.0									- 3.0170	- 3.0373	- 4.5782	- 7.3749	-10.8143	-18.2175	-25.2283	-33.1908
8	- 9.5									- 0.1920	- 0.2056	- 1.3428	- 3.4585	- 6.0054	-11.2228	-16.0156	-21.0442
9	- 7.0									2.1090	2.0972	1.2092	- 0.3290	- 2.1344	- 5.5184	- 8.3963	-12.0646
10	- 4.0									3.6590	3.6591	3.3386	2.3283	1.0371	- 0.7442	- 1.9798	- 2.1400
11	- 1.5									4.8790	4.8826	4.9840	4.3555	3.0907	1.2847	0.8281	- 1.3401
12	0	4.8790	5.0828	5.2532	4.6872	3.4267	1.6167	1.2876	- 1.2092								

Foi feita também a resolução do problema com as integrações ao longo do contorno de forma analítica e os resultados obtidos foram praticamente idênticos, variando apenas no sexto ou sétimo algarismo significativo.

Os resultados obtidos para discretizações diferentes foram muito parecidos e são apresentados na tabela IV.6 para alguns dos tempos analisados.

TABELA IV.6 - Simulação do Experimento de Bear e Dagan  
Posição do Pê da Interface para Diferentes  
Discretizações.

TEMPO (S)	POSIÇÃO DO PÊ DA INTERFACE		
	DISCRETIZAÇÃO C/ 45 NÓS	DISCRETIZAÇÃO C/ 65 NÓS	DISCRETIZAÇÃO C/ 87 NÓS
0	- 35.0700	- 35.0700	- 35.0700
0.145	- 35.3183	- 35.2601	- 35.2509
5	- 38.9199	- 38.8019	- 38.6805
15	- 45.5071	- 45.5379	- 45.3492
30	- 54.5353	- 54.7947	- 54.5439
75	- 76.8270	- 77.3678	- 77.1753
135	- 100.2049	- 100.8131	- 100.7220
225	- 127.8588	- 129.7264	- 128.9847

Os tempos médios de processamento por step, são indicados a seguir

TABELA IV.7 - Simulação do Experimento de Bear e Dagan - Posições do p̄ da ponta para Diferentes Opções do Deslocamento da Ponta da Interface (discretização de 87 n̄s)

TEMPO (s)	ÚLTIMO ELEMENTO PERPENDICULAR AO CONTORNO		PONTA EM FORMA DE PARÁBOLA	
	PE	PONTA	PE	PONTA
0	-35.0700	4.8790	-35.0700	4.8790
0.145	-35.2509	4.8839	-35.2509	5.0844
5	-38.6812	5.0267	-38.6805	5.30675
15	-45.3507	4.4072	-45.3492	4.7896
30	-54.5444	3.0816	-54.5439	3.3386
75	-77.1784	1.6761	-77.1754	1.9224
135	-100.7291	1.0467	-100.7220	1.3118
225	-128.7763	0.7306	-128.9847	-0.4973

DISCRETIZAÇÃO	TEMPO MÉDIO DE CPU POR STEP
45 nōs	7.9 segundos
65 nōs	17,7 segundos
87 nōs	35,4 segundos

A opção de considerar a ponta em forma de parábola ou com o último elemento perpendicular ao contorno produz uma pequena modificação na posição da ponta, mas tem efeito desprezível no resto do contorno. A tabela IV.7 apresenta os valores do  $p\bar{e}$  e da ponta para as duas opções em alguns dos tempos analisados.

#### INTRUSÃO EM DIREÇÃO A UMA CAPTAÇÃO

Uma terceira aplicação realizada foi o estudo da intrusão em direção a uma captação. Partiu-se de uma posição estacionária da interface com determinada vazão de recarga do aquífero e iniciou-se um bombeamento numa trincheira para se analisar o movimento da interface em direção ao local de bombeamento.

Essa trincheira penetra completamente no aquífero, é escavada na vertical e ao longo de uma linha paralela a costa. A trincheira pode ser considerada como a simulação de um poço conforme foi explicado no capítulo anterior, fazendo-se uso da aproximação indicada pela equação III.48.

Os dados de entrada do problema são apresentados na tabela IV.8. Foram feitas as mesmas considerações anteriores sobre viscosidade, intervalos de tempo, fator de ponderação e nōs

duplos.

Strack(27) em 1976 desenvolveu um método analítico para cálculo da posição do p̄ da interface numa situação estacionária, para determinada vazão de recarga e determinada vazão de bombeamento.

De acordo com Strack a posição do p̄ pode ser obtida pela fórmula

$$\frac{1}{2} K H^2 \frac{\rho_s - \rho_d}{\rho_d} = Q_{x_0} \cdot x + \frac{Q}{2H} \ln \left[ \frac{(x+x_w)^2 + y^2}{(x+x_w)^2 + y^2} \right]^{1/2} \quad (IV.6)$$

onde a origem do sistema de eixos cartesianos é tomada na camada inferior do aquífero, na vertical que passa pela ponta da interface, Q é a vazão de bombeamento do poço,  $Q_{x_0}$  é a vazão de recarga do aquífero por unidade de comprimento da costa,  $x_w$  é a abscissa da posição do poço, x, y são as coordenadas dos pontos da interface.

Para uma vazão de recarga do aquífero de 19,1 cm<sup>2</sup>/s e uma vazão de bombeamento de 8751,9 cm<sup>3</sup>/s encontra-se que a posição do p̄ no sistema de eixos de STRACK é de 100.0 cm. Como no nosso problema adotamos a origem do sistema na ponta da interface e orientamos o eixo x para o outro lado temos que a posição do p̄ no novo sistema seria -95.1214 cm, para a situação estacionária.

A figura IV.6 e a tabela IV.9 apresentam as diversas

TABELA IV.8 - Intrusão em Direção a uma Captação. Dados de Entrada

Fator de Ponderação ( $\theta$ ) = 0.5

Número máximo de steps = 200

- Intervalo de tempos variados

Até step 3 intervalo = 0.145 segundos

Até step 5 intervalo = 0.29 segundos

Até step 16 intervalo = 0.36 segundos

Até step 31 intervalo = 1.0 segundos

Até step 200 intervalo = 2.5 segundos

- Parâmetros

	Região Doce	Região Salgada	
Porosidade	0.3	0.3	
Massa específica	1.0	1.029	(g/cm <sup>3</sup> )
Viscosidade Absoluta	0.12 E-03	0.12 E-03	(g/cms)
Condutividade hidráulica	69.0	69.0	(cm/s)
Espessura do aquífero = 27 cm			

- Dados do Poço

Coordenadas do ponto médio X = -245.1214 cm

Y = -13.5000 cm

Vazão = -8751,9 cm<sup>3</sup>/s

Raio de influência aproximado = 35000,0 cm

Comprimento do poço = 27.0 cm

- Dados para discretização

Número de nós da região 1 = 36

Número de nós da região 2 = 31

Número de nós da interface = 12

Primeiro nó da interface na região 1 = 9

Primeiro nó da interface na região 2 = 54

Número de elementos da região 1 = 29

Número de elementos da região 2 = 25

- Condição inicial da derivada do potencial na interface

$$\partial\phi/\partial n = 0$$

- Condições de contorno

Vazão de recarga = 19,1 cm<sup>2</sup>/s (por unidade de comprimento da costa)

Potencial na fronteira superior da região 1 = 500,0 cm

Potencial na fronteira superior da região 2 = 485,9 cm

- Subrotina valesp

Nó de aplicação = 129 nó da interface

Potencial especificado = 500,0

Derivada especificada = zero

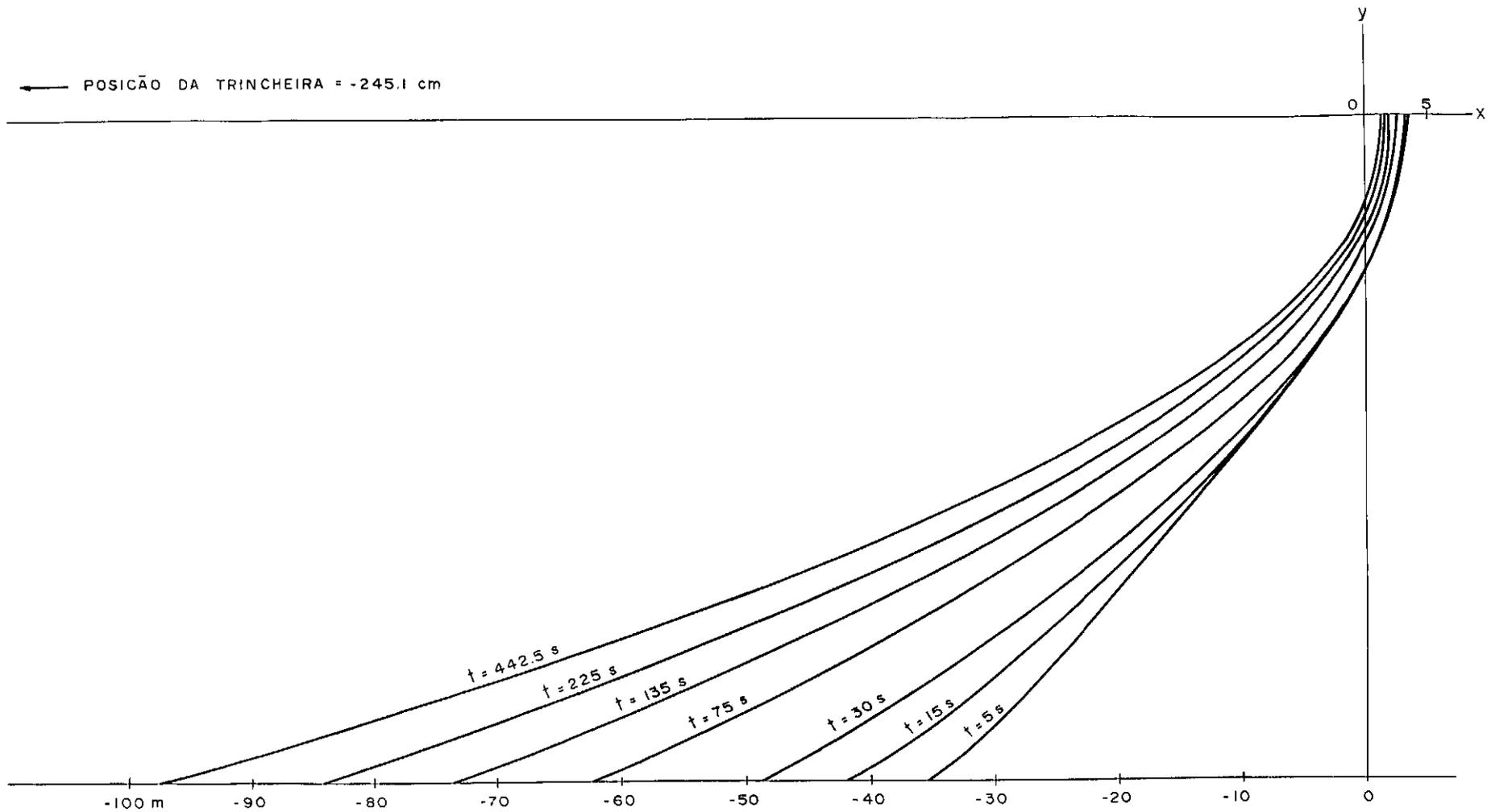


FIG. IV-6 - INTRUSÃO EM DIREÇÃO A UMA CAPTAÇÃO. DISCRETIZAÇÃO COM 65 NÓS. CAPTAÇÃO EM FORMA DE TRINCHEIRA (OU POÇO COM RAIO DE INFLUÊNCIA = 350.0 m).

TABELA IV.9 - Intrusão em Direção a uma Captação

Discretização com 65 Nôs. Captação em Forma de Trincheira, Podendo Também Simular um Poço com Raio de Influência Médio de 350.0 m.

STEP Nº		0	1	16	26	35	53	77	113	200
TEMPO (s)		0	0.145	5	15	30	75	135	225	442.5
NÔS	ORDENADAS									
1	- 27.0	-30.0000	-30.3706	-35.3814	-41.7444	-48.6594	-62.3304	-73.5959	-84.4071	-97.4829
2	- 24.5	-26.5000	-26.5820	-29.4263	-34.3889	-39.9952	-51.1707	-60.7144	-69.6545	-80.4082
3	- 22.0	-23.0000	-23.0962	-24.8851	-28.3573	-32.6559	-41.8456	-49.5798	-56.7753	-65.2840
4	- 19.5	-19.5000	-19.5693	-20.6189	-22.7795	-25.9058	-33.1708	-39.3501	-45.0069	-51.5572
5	- 17.0	-16.0000	-16.0526	-16.4621	-17.5602	-19.6674	-25.2195	-30.0038	-34.3202	-39.2461
6	- 14.5	-12.5000	-12.5369	-12.4009	-12.6812	-13.9792	-18.0820	-21.6541	-24.8182	-28.3656
7	- 12.0	- 9.0000	- 9.0229	- 8.4654	- 8.2158	- 8.9410	-11.8519	-14.4028	-16.6313	-19.0721
8	- 9.5	- 5.5000	- 5.5110	- 4.7554	- 4.3043	- 4.6726	- 6.6429	- 8.3584	- 9.8452	-11.4016
9	- 7.0	- 2.0000	- 2.0044	- 1.4746	- 1.1034	- 1.2742	- 2.5460	- 3.6223	- 4.5605	- 5.4652
10	- 4.5	1.5000	1.4823	0.9896	1.1917	1.1181	0.3311	- 0.2910	- 0.8253	- 1.2028
11	- 2.0	5.0000	4.9702	3.0314	2.8055	2.7953	2.1786	1.7388	1.2893	0.8881
12	0	5.0000	5.8288	3.5340	3.2028	3.2081	2.6334	2.2385	1.8099	1.4027

A B S C I S S A S

posições ocupadas pela interface ao longo do tempo para as condições de vazão especificadas no parágrafo anterior.

Foi adotado um raio de influência médio de 350.0 m (um pouco acima da faixa indicada por Ven Te Chow (5) que é de 500 a 1000 pés) e para essa consideração a simulação do poço utilizando a trincheira foi uma razoável aproximação, visto que encontrou-se um valor bastante próximo para a posição estacionária do pé.

Como já falamos anteriormente, o modelo utilizado é adequado para simular trincheiras e drenos. Ao se tentar fazer a simulação de um poço é preciso usar a fórmula aproximada de equivalência indicada pela equação III.48. Essa fórmula depende do raio de influência que é de difícil determinação e, além do mais, varia de acordo com o rebaixamento.

Foram feitas três tentativas com diferentes valores de raio para verificar a sensibilidade da simulação do poço à variação do raio de influência. A tabela IV.10 apresenta os resultados obtidos em alguns dos tempos utilizados com diferentes valores do raio.

TABELA IV.10 - Importância do Raio de Influência na  
Simulação de um Poço. Discretização com  
65 nós

RAIOS DE INFLUÊNCIA	POSIÇÕES DO PÉ DA INTERFACE		
	300,0 m	350,0 m	400,0 m
TEMPO(s) 0	- 30.0000	- 30.0000	- 30.0000
0.145	- 30.3772	- 30.3706	- 30.3657
5	- 35.7623	- 35.3814	- 35.0871
15	- 42.9025	- 41.7444	- 40.8744
30	- 50.8894	- 48.6594	- 46.9898
75	- 67.6849	- 62.3304	- 58.3728
135	- 82.3371	- 73.5959	- 67.4812
225	- 97.82535	- 84.4071	- 75.1930

Pelos valores mostrados na tabela IV.10 conclui-se que a simulação do poço é muito sensível ao valor adotado para o raio de influência médio. Uma sugestão para um próximo estudo é considerar o raio de influência variável de um step para outro, sendo calculado pela variação da linha piezométrica no local do poço.

Foi feita também uma comparação entre a captação numa trincheira e a captação num dreno horizontal localizado no ponto médio da trincheira e com vazão semelhante por unidade de comprimento. Os resultados são apresentados na tabela IV.11.

TABELA IV.11 - Intrusão em Direção a uma Captação. Comparação entre Trincheira e Dreno Horizontal

	POSIÇÕES DO PÉ DA INTERFACE	
	TRINCHEIRA	D R E N O
TEMPO(s) 0	- 30.00000	- 30.00000
0.145	- 30.77716	- 30.37716
5	- 35.76235	- 35.76193
15	- 42.90253	- 42.90134
30	- 50.88941	- 50.88688
75	- 67.68487	- 67.67381
135	- 82.33714	- 82.31349
180	- 91.01611	- 90.97540

Os resultados da trincheira e do dreno são muito próximos. Uma das causas da semelhança dos resultados é que o aquífero é muito delgado e a captação (trincheira ou dreno) está bem distante da interface, de modo que não faz muita diferença se a captação é puntiforme ou distribuída ao longo de um pequeno elemento.

## CAPÍTULO V

## CONCLUSÕES

Analisando os resultados encontrados e comparando com diversos outros obtidos de forma analítica, experimental ou por outros métodos numéricos, pode-se concluir que o modelo utilizado representa bem o problema da intrusão salina nos casos da interface em forma de cunha.

O nível de precisão dos resultados é muito bom e o tempo gasto no processamento computacional não é muito elevado, visto que se resolve um sistema de equações com menos incógnitas ao se discretizar apenas o contorno.

A hipótese de Dupuit-Forchheimer apresenta bons resultados no estudo da intrusão salina, para tempos grandes, no entanto não é muito boa para tempos pequenos, enquanto o método de elementos de contorno oferece uma boa aproximação ao longo de todo o tempo.

A rigor, o estudo do movimento da interface quando existe bombeamento através de um poço só consegue ser simulado com uma análise tridimensional, de modo que os resultados obtidos na simulação de drenos e trincheiras foram muito bons, e no entanto, na simulação de poços, não se chegou a um resultado muito satisfatório já que um dos parâmetros que deve ser arbitrado para o poço pode conduzir a grandes variações. Possivelmente uma outra relação entre poço e trincheira levando em conta o rebaixamento

ou o tempo deve conduzir a melhores resultados.

A integração numérica e a integração analítica ao longo de cada elemento no cálculo da matriz do sistema de equações apresentam resultados semelhantes, sem diferenças significativas entre um e outro.

Na integração numérica não houve problema com elementos até três ou quatro vezes maiores que o elemento adjacente, contudo para elementos cerca de dez vezes maiores que o adjacente encontrou-se resultados bem diferentes do que era de se esperar.

Se determinada discretização já oferece um resultado bom uma discretização mais refinada oferecerá uma precisão um pouco melhor, o que mostra a convergência do método, mas para efeitos práticos os valores obtidos na discretização com menor número de nós são perfeitamente válidos.

Verificou-se que para intervalos de tempo grandes ocorria uma instabilidade dos resultados, que desaparecia ao se reduzir os valores dos intervalos.

Devido ao pouco tempo que se dispunha não foi possível estudar uma relação entre os intervalos de tempo e algumas grandezas do problema, de maneira a garantir condições de estabilidade.

Nas aplicações 2 e 3 do capítulo anterior, a ponta da

interface apresentou instabilidade na posição em algumas etapas ao longo do tempo.

Observou-se que era possível reduzir a oscilação dos resultados adotando-se algumas das três medidas abaixo ou mais de uma delas simultaneamente.

- colocar o penúltimo nó da interface o mais próximo possível da ponta
- utilizar a aproximação de uma parábola para o trecho final da interface, passando pelos três últimos nós e sendo perpendicular ao contorno
- reduzir os intervalos de tempo.

A técnica utilizada nesse trabalho pode ser aplicada a um grande número de problemas em que haja subdivisão em regiões e onde possa ser adotada a consideração de uma interface abrupta.

Entre outros, podem ser citados o encontro entre as águas de um rio e as marés na zona da foz, as frentes frias das massas gasosas da atmosfera, correntes marítimas frias em contato com águas mais quentes, sistemas em que haja mudança de estado físico com ocorrência simultânea de mais de uma fase.

#### RECOMENDAÇÕES

##### PESQUISAS TEÓRICAS ADICIONAIS

É necessário analisar a amplitude de intervalos de tempo para os quais não ocorre instabilidade, conforme já falado em

item anterior, de sorte que se estabeleça um critério de estabilidade para escolha desses intervalos.

Nesse trabalho foram estudados apenas aquíferos do tipo confinado, com consideração de interface abrupta do tipo cunha. Alguns trabalhos podem ser feitos analisando aquíferos livres com as mesmas considerações efetuadas aqui.

Podem ser estudados ainda aquíferos em que a interface se apresenta em forma de lentes, casos que na prática ocorrem em ilhas, cabos ou em restingas.

Existem ainda casos mais complexos que precisam ser analisados onde é necessário levar em consideração os efeitos da dispersão das partículas salinas na região de água doce.

#### MAPEAMENTO DA POSIÇÃO DA INTERFACE AO LONGO DA COSTA BRASILEIRA

No Brasil, é comum a prática de órgãos governamentais, empresas privadas e pessoas físicas agirem isoladamente na exploração das reservas hídricas subterrâneas. Isso geralmente acarreta desperdício de tempo e dinheiro, que poderia ser evitado se houvesse maior troca de informações entre os diversos setores interessados a respeito de onde, quando e em que quantidade podem ser utilizados os depósitos de água do subsolo.

As entidades oficiais podem encarregar-se da supervisão da exploração e uso da água subterrânea disponível, promover pesquisas mais acuradas sobre os depósitos hídricos subterrâneos,

desenvolvendo melhores métodos de exploração e publicando os resultados dos estudos para esclarecimento do público.

Ao longo da costa brasileira pode ser feito um mapeamento da posição da interface, principalmente em localidades mais críticas pela sua dependência da água do sub-solo, tais como Laguna, Olinda, Natal, Fortaleza, etc.

Todos os dados e informações sobre as ocorrências de salinidade e, em geral, sobre as operações de perfuração de poços, devem ser catalogados, publicados e mantidos em local de fácil acesso onde possam ser manipulados por qualquer interessado.

#### CONTROLE DE INTRUSÃO

Em locais onde existe perigo de ocorrer intrusão salina devido ao bombeamento, podem ser tomadas medidas que reduzam a intrusão ao mínimo possível.

Uma das medidas que pode ser tomada é a diminuição do bombeamento. É a medida mais simples a ser tomada mas em alguns casos pode trazer inconvenientes: perde-se parte da água doce para manter a posição da interface, o recuo da cunha salina é muito lento, a redução do bombeamento supõe que se possa encontrar novos abastecimentos a um preço acessível.

Outra medida a ser tomada é a relocação dos pontos de captação. Isso pode ser feito no caso da exploração média não ser excessiva, embora a de certo poço ou de um grupo de poços o

seja. Apresenta a desvantagem do custo excessivo de parar alguns poços e construir outros.

Uma terceira atitude é providenciar uma recarga artificial injetando água em poços ou em regiões de infiltração. Para isso é preciso ter água barata para recarga e, além disso, a própria recarga é cara. Pode ser utilizada quando a água necessita de tratamento e a própria infiltração serve como tal ou quando o armazenamento superficial sairia caro ou haveria muitas perdas por evaporação. Esse método é usado em Los Angeles e em Long Island (New York).

Um outro método é o estabelecimento de barreiras físicas que formem uma camada impermeável entre o aquífero e o mar. Apresenta como inconveniente os custos de construção muito elevados e a dificuldade de que sejam totalmente efetivas. Podem ser feitas com estacas-prancha ou por injeção de argila, cimento ou material asfáltico. Roberts(68) em 1967 comprovou por ensaios de laboratório que essa barreira pode ser feita também com ar injetado sob pressão.

Uma outra maneira que pode ser utilizada é a formação de uma barreira hidráulica criada por recarga, de tal maneira que em cada ponto se tenha uma elevação piezométrica superior ao potencial de água doce necessário para evitar o fluxo de água salgada até o interior. Os principais inconvenientes são o custo da construção e manutenção dos poços, o custo da água necessária para recarga e a dificuldade de estabelecer a zona de recarga se a região é povoada. O método tem como vantagem não ter limitações

de bombeamento e do fluxo de água doce até o mar ser praticamente nulo. A realização tecnicamente mais desenvolvida desse projeto é o chamado West Coast Basin Barrier Project em Los Angeles (69), (70), (71), (72); a barreira consiste em 94 poços de injeção ao longo de 15 Km da costa, separados entre si cerca de 150m e tem funcionado satisfatoriamente.

Um último método que pode ser utilizado é o da depressão de bombeamento de cunha salina. Todo o fluxo de água salgada que se movimenta em direção a terra é bombeada e jogada de volta ao mar. Os inconvenientes são o alto custo de construção e de manutenção, a perda de água doce através dos poços de bombeamento e o volume útil do aquífero que fica perdido, invadido pela água salgada atrás da barreira de poços.

## RECARGA DOS AQUÍFEROS

Geralmente as reservas hídricas subterrâneas de uma região demoram muito tempo (dezenas ou centenas de anos) para atingir um certo volume de armazenamento. Se a exploração dessa água é feita de maneira muito intensa, em pouco tempo as reservas estarão exauridas e todo o investimento feito no sistema de captação estará perdido.

Se é de interesse explorar o poço ou sistema de poços durante um longo tempo, torna-se necessário que o volume extraído anualmente seja inferior ao volume infiltrado naturalmente ou, então, que se promova uma recarga artificial do aquífero para prolongar a vida útil do sistema de captação.

A recarga artificial, além de permitir que sejam extraídas maiores quantidades d'água do lençol subterrâneo, possui também outras finalidades tais como utilização do aquífero como rede de distribuição, utilização do aquífero como filtro e elemento de tratamento de água, defesa do aquífero contra intrusão salina conforme explicado no item anterior e drenagem de zonas urbanas e obras civis.

Os sistemas de recarga artificial podem ser de superfície ou de profundidade. Entre os primeiros se encontram as bacias de recarga como a de Peoria em Illinois que utiliza a água contaminada de um rio como fonte de recarga e as de Long Island (New York) em operação desde 1936 e destinadas a coletar a água oriunda de chuvas e permitir a sua infiltração no solo e ainda os campos de dispersão muito utilizados na Califórnia para espargir as águas de um curso d'água sobre áreas superficiais bem maiores que as dos leitos naturais.

Os sistemas de recarga em profundidade são mais dispendiosos e se utilizam em regiões muito povoadas ou de terrenos muito caros. Um dos mais importantes sistemas em profundidade é o construído em Israel, capaz de produzir uma recarga de cerca de 100 Hm<sup>3</sup>/ano através de poços (73).

## CONTROLE DE POLUIÇÃO

Geralmente a água subterrânea é de boa qualidade no seu estado natural, apresenta condições sanitárias satisfatórias e, portanto, é adequada para o consumo humano.

No entanto, a própria penetração de um poço em um aquífero a explorar, pode facilitar a contaminação da água subterrânea por águas sujas ou outros líquidos contaminantes.

Os principais meios de possível contaminação do poço são sua parte superior e o espaço anelar entre o tubo do poço e o furo da perfuração. Deve-se então procurar empregar técnicas que evitem a contaminação através dessas duas vias.

Um dos primeiros passos para evitar a contaminação de um poço é construí-lo distante das possíveis fontes de contaminação e, se possível, também num terreno mais elevado.

A fim de evitar a entrada de águas exteriores, o tubo de revestimento do poço deve sobressair no mínimo 0,5 m acima do nível do solo e a superfície do solo adjacente ao poço deve receber algum revestimento.

Pode também ser feito a chamada cimentação do poço, que é o preenchimento do espaço entre o tubo e a perfuração com uma pasta de cimento para prevenir a infiltração de águas superficiais contaminadas e impedir a comunicação de aquíferos bons com outros de qualidade química indesejável.

Os poços abandonados necessitam ser eficientemente vedados, restaurando-se tanto quanto possível as condições geológicas que existiam inicialmente antes do poço.

De acordo com Harvey O. Banks, diretor da Water Resour

ces of California, a poluição da água pode se dar pelos efluentes do esgoto municipal, pelos resíduos das instalações industriais e pelos fluxos de retorno da irrigação que contem quantidades apreciáveis de pesticidas e produtos químicos agrícolas.

Se considerarmos poluição no sentido mais amplo da deterioração da qualidade da água sob qualquer causa, não poderemos evitá-la devido ao quadro atual das atividades humanas, no entanto todo esforço deve ser empreendido no sentido de minimizar as causas que possam levar a degradação da substância mais valiosa da face da Terra, e espera-se que o presente trabalho re presente uma pequena contribuição nesse sentido.

## APÊNDICE 1

## RELAÇÕES ENTRE UNIDADES

## ● Permeabilidade intrínseca

$$1 \text{ darcy} = 9,87 \times 10^{-9} \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ darcy} = 1,062 \times 10^{-11} \text{ pē}^2$$

## ● Condutividade hidráulica (permeabilidade)

$$1 \text{ meinzer} = 1 \frac{\text{galão}}{\text{dia-pē}^2}$$

$$1 \text{ meinzer} = 0,134 \text{ pēs/dia}$$

$$1 \text{ meinzer} = 4,72 \times 10^{-5} \text{ cm/s}$$

## ● Outras unidades

$$1 \text{ polegada} = 2,54 \text{ cm}$$

$$1 \text{ pē} = 30,5 \text{ cm}$$

$$1 \text{ milha} = 5280 \text{ pēs}$$

$$1 \text{ galão} = 0,1337 \text{ pē}^3$$

$$1 \text{ lbf} = 16 \text{ onças}$$

$$1 \text{ slug} = 32,2 \text{ lbf}$$

$$1 \text{ lb} = 445 \text{ g}$$

## ● Viscosidade absoluta

$$1 \text{ poise} = 1 \text{ g/cm.s}$$

$$1 \text{ lb.s/pē}^2 = 479 \text{ poises}$$

- Viscosidade cinemática

$$1 \text{ stoke} = 1 \text{ cm}^2/\text{s}$$

$$1 \text{ pē}^2/\text{s} = 929.03 \text{ stokes}$$

## APÊNDICE 2

## SUPERFÍCIE MATERIAL

No estudo de um fluido chamamos de superfície material a uma superfície que é sempre formada pelas mesmas partículas fluídas.

A componente da velocidade da superfície na direção normal a mesma  $V_N$  é igual a própria velocidade da superfície.

Uma superfície material pode ser representada por uma equação cuja forma geral é

$$F(x,y,z,t) = 0$$

Em muitos problemas se precisa da derivada material, também chamada de derivada hidrodinâmica ou derivada total, que pode ser obtida por

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla} F)$$

e em função da vazão específica e da porosidade

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + (q \cdot \vec{\nabla} F) / n$$

Para uma superfície material, a derivada material é igual a zero.

## APÊNDICE 3

## INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Um dos métodos utilizados para efetuar a integração de uma função numericamente é a chamada quadratura de Newton-Cotes, em que a função é calculada em alguns pontos igualmente espaçados no intervalo e a integral é dada por

$$I = \int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = \sum_1^n H_i f(\xi_i)$$

Utilizando "n" valores da função, é definido um polinômio de grau n-1, e os erros serão da ordem de  $\Delta^n$  onde  $\Delta$  é o espaçamento entre os pontos.

Um outro método é a chamada quadratura de Gauss, em que a posição dos pontos de integração não é especificada a priori e sim determinada de modo a proporcionar uma melhor precisão.

Considerando a mesma expressão anterior, para n pontos de integração teremos 2 n incógnitas ( $f_i$  e  $\xi_i$ ), pode ser construído então um polinômio de grau 2 n-1 e os erros serão da ordem de  $\Delta^{2n}$ .

Na resolução do sistema formado pelas equações do parágrafo anterior se utilizam os polinômios de Legendre, e algumas vezes o processo é chamado de quadratura de Gauss-Legendre.

#### APÊNDICE 4

##### CÉLULA DE HELE-SHAW

A célula de Hele-Shaw também chamada de modelo analógico de escoamento viscoso ou modelo analógico de placas paralelas é um aparelho de laboratório para estudo bidimensional de água subterrânea.

O funcionamento se baseia na semelhança entre as equações diferenciais que regem o escoamento num meio poroso saturado e as equações do escoamento de um líquido viscoso num espaço estreito entre duas placas paralelas.

O modelo pode ser vertical ou horizontal. Falaremos aqui apenas do primeiro por ser o mais conhecido e principalmente por ser adequado a análise da intrusão marinha.

O instrumento é formado por duas placas verticais transparentes colocadas a uma distância fixa uma da outra (geralmente 0.8 a 3.5 mm), separadas por espaçadores e presas por parafusos.

O tamanho das placas depende das dimensões do protótipo e da escala do modelo. Um líquido viscoso ou vários líquidos imiscíveis ou praticamente imiscíveis é colocado no espaço entre as placas para ser analisado seu movimento.

São utilizados ainda espaçadores impermeáveis para delimitar a região do escoamento e são feitos orifícios em locais onde se deseja simular o efeito de drenagem.

## APENDICE 5

## PROGRAMA COMPUTACIONAL

Foi elaborado um programa computacional em FORTRÁN para resolução do problema de elementos de contorno. Para isso, utilizou-se o computador Burroughs-6700, do Núcleo de Computação da Universidade Federal do Rio de Janeiro. A seguir é apresentada uma explicação resumida do programa.

O programa principal chama as diversas subrotinas numa determinada ordem e prepara o step seguinte no caso de se desejar rodar mais de um step.

A subrotina INPUT é responsável pela entrada de dados. Foi utilizado um algoritmo que permite entrar apenas com os pontos extremos de um trecho, no caso desse trecho apresentar nós igualmente espaçados ou condições de contorno iguais ao longo do trecho.

A subrotina GENER gera a conectividade dos elementos e calcula seu comprimento. A subrotina GAUSS entra com os valores das abscissas dos pontos de integração e do fator de ponderação para integração numérica. A subrotina INTE efetua o cálculo da integração numérica.

A subrotina FMAT arma a matriz "A" proveniente da fusão das matrizes "G" e "H". A subrotina VALESP, já explicada no capítulo III, pode ser chamada algumas vezes, se for necessário para introduzir no sistema de equações alguns valores conhe-

cidos do potencial e do fluxo.

A subrotina SLNPD resolve o sistema de equações lineares, pelo método de eliminação de Gauss, executando uma troca de linhas quando encontra um coeficiente zero na diagonal. A subrotina REORD organiza os resultados, separando os vetores de potencial e do fluxo. A subrotina INTER calcula os potenciais e derivadas para pontos internos, se for necessário.

A subrotina DESLOC calcula a nova posição dos pontos da interface após uma variação no tempo e a subrotina COMPANALISA, de acordo com o cálculo de uma norma vetorial, se a interface ficou estacionária, ocasião em que o programa é interrompido, ou se houve movimento considerável da interface, o que leva a ser rodado novo step.

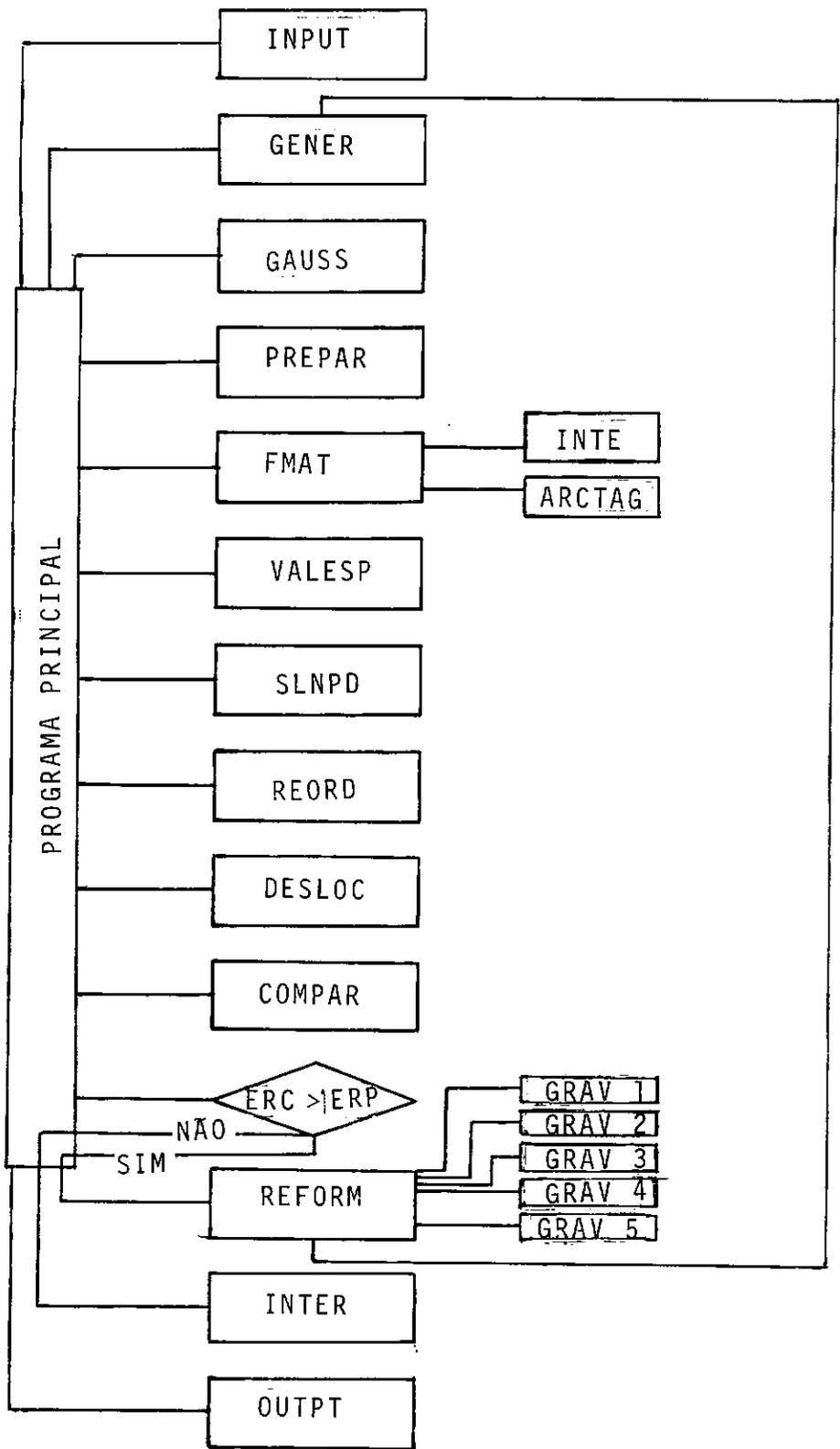
A subrotina PREPAR prepara os parâmetros e vetores para a subrotina REFORM que reorganiza a numeração dos nós da discretização após cada deslocamento da interface. As subrotinas GRAV1 a GRAV5 são auxiliares da subrotina REFORM.

A subrotina OUTPT realiza a saída dos resultados em duas versões, uma delas mais completa apresentando a discretização em cada step, os potenciais e derivadas de todos os nós, e o deslocamento dos nós da interface; e a outra maneira mais simplificada, mostra apenas o deslocamento dos nós da interface em cada step.

No decorrer do programa é utilizada a função arco tan-

gente algumas vezes e havia problemas com essa função no sistema utilizado pelo núcleo de computação. Foi elaborada então uma "function" denominada de ARCTAG para cálculo da função arco-tangente a partir do desenvolvimento dessa função em séries de potência.

FLUXOGRAMA SIMPLIFICADO



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. TODD, D.K.: "Ground Water Hydrology"  
John Wiley & Sons, Inc.  
New York, 1959
2. "Ground Water and Wells"  
Johnson Division, Universal Oil Products Co.  
Saint-Paul, Minnesota  
Tradução do CETESB - São Paulo, 1978
3. MEINZER, O.E.: "The history development of ground-water hydrology" - Journal of Washington Acad. Sci. - Vol. 24, pag. 6-24, 1934.
4. WRIGHT, E.P. - Simposio água Mundial-83, transcrito na publicação. Desarrollo Nacional-America Latina - Abril-84 - Intercontinental Publications, Inc. - Singapore.
5. CHOW, Ven Te: Handbook of Applied Hydrology  
McGraw-Hill Book Company  
U.S.A. - 1964
6. TODD, D.K.: Salt Water Intrusion of Coastal Aquifers in the United States.  
Assemblée Générale Helsinki  
Assoc.Intern. Hydrol.Sci. Publ.52 pág.452-461, 1960.

7. SANTOS, J.P. dos: Problemática de Aquíferos Costeiros  
49 Congresso Brasileiro de Águas Subterrâneas  
Associação Brasileira de Águas Subterrâneas-  
Fortaleza-1984.
8. BEAR, JACOB and DAGAN, Gedeon: Moving Interface in Coastal  
Aquifers. Journal of Hydraulic Division of A.S.C.E.  
90(HY4), 193-216, 1964a.
9. BEAR, J. and DAGAN, G.: "Some Exact Solutions of Interface  
Problems by means of the hodograph Method", Journal of  
Geophysical Research, 6(8) 1563-1572, 1964b.
10. JONG, G. de JOSSELIN de: "A Many-Valued Hodograph in an  
Interface Problem", Water Resources Research Vol. 1-n94  
pag. 543-555 - 1965.
11. HERZBERG, A., "Die Wasserversorgung Einiger Nordsee Boder"  
(The Water Supply on Parts of the North Sea Coast), J.  
Gasbebenchtung und Wasserversorgung, Vol. 44, 815-819,  
824-844, Munich 1901.
12. GHYBEN, W. BADEN and DRABE, J.: "Nota in Verband de  
Voorgenomen Putboring Naby Amsterdam", (Nota in the  
Probable Results of Proposed Well Duilling Near  
Amsterdam), Tijdschrfit van het Koninklÿk Institut Van  
Ingenieurs, 8-22, The Hagne, 1889.

13. HUBBERT, M.K., "The Theory of Ground Water Motion",  
Journal of Geology 48(8), 785-944, 1940.
14. GLOVER, R.E., "The Pattern of Freshwater Flow in a Coastal  
Aquifer", Journal of Geophysical Research, 64(4),  
457-459, 1959.
15. HENRY, H.R., "Interfaces Between Salt Water and Fresh  
Water in Coastal Aquifers", in Sea Water in Coastal  
Aquifers, ed. by H.H. Cooper et al, Geological Survey  
Water-Supply Paper 1613-C, Washington, D.C., 35-69,  
1964a.
16. HENRY, H.R., "Effects of Dispersion on Salt Encroachment in  
Coastal Aquifers", in Sea Water in Coastal Aquifers,  
ed. by Henry et al, Geological Survey Water-Supply  
Paper 1613-C, Washington, D.C., 70-83, 1964b.
17. RUMER, R.R. e SHIAN, J.C., "Saltwater Interface in a  
Layered Coastal Aquifer", Water Resources Research,  
4(6), 1235-1247, 1968.
18. VAN der VEER, P., "Analytical Solution for Steady Interface  
Flow in a Coastal Aquifer Involving a Phreatic Surface  
With Precipitacion", Journal of Hydrology, 34(1/2),  
1-11, 1977.

19. HANTUSH, M.S., "Unsteady Movement of Fresh Water in Thick Unconfined Saline Aquifers", Bulletin of International Association of Scientific Hydrology, XII(2) 40-60, 1968.
20. KEULEGAN, G.H., Ninth Progress Report on Model Laws for Density Currents: An Example of Density Current Flow in Permeable Media. U.S. National Bureau Stand. Rep. 3411, 1954.
21. GARDNER, G.H.F., J. DOWNIE, and H.A. KENDALL, Gravity Segregation of Miscible Fluids in Linear Model, Soc. Pet. Eng. J., 225,95-104, 1962.
22. VERRUIJT, A., The Rotation of Vertical Interface in a Porous Medium. Water Resources Research, 16(1), 239-240, 1980.
23. COLLINS, M.A. e GELHAR, L.W., "Seawater Intrusion in Layered Aquifers", Water Resources Research, 7(4), 971-979, 1971.
24. MUALEM, Y. e BEAR, J., "The Shape of the Interface in Steady Flow in a Stratified Aquifer", Water Resources Research, 10(6), 1207-1215, 1974.
25. VEROU, M., "Sea Water Intrusion in a Leaky Coastal Aquifer". M.Sc. Thesis, MIT, January, 1978.

26. HASHISH, M.A. RASMY, M.E., e ASMER, A.M. "One dimensional steady State Sea Water Intrusion in Leaky Aquifers", presented in the Conference on Water Resources Planning in Egypt, Cairo, June, 1979.
27. STRACK, O.D.L. "Single Potential Solution for Regional Interface Problems in Coastal Aquifers", Water Resources Research, 12(6), 1165-1174, 1976.
28. KISHI, Y. e FUKNO, Y., "Studies on Salinization of Groundwater, I. - Theoretical Considerations on the Three-Dimensional Movement of Salt Water Interface Caused by Pumpage of a Confined Groundwater in Fanshaped Alluvium", Journal of Hydrology, 35(1/2), 1-29, 1977..
29. KASHEF, A.I., "Management of Retardation of Salt Water Intrusion in Coastal Aquifers", Office of Water Research and Technology, Washington, D.C., 1975.
30. KASHEF, A.I., "Control of Salt-Water Intrusion by Recharge Wells", J. of the Irrigation and Drainage Division of A.S.C.E., 102(IR4), 445-457, 1976.
31. KASHEF, A.I. e SMITH, J.C., "Expansion of Salt-Water Zone Due to Well Discharge", Water Resources Bulletin, J. of AWRA, 11(6), 1107-1120, 1975.

32. PINDER, G.F., e COOPER, H.H., "A Numerical Technique for Calculating the Transient Position of the Saltwater Front", Water Resources Research, 6(3), 875-882, 1970.
33. Intercomp, Resource Development and Engineering, Inc., "A Model for Calculating Effects of Liquid Waste Disposal in Deep Saline Aquifers", prepared for U.S.G.S., NTIS PB256-203, June, 1976.
34. FETTER, C.W., "Position of the Saline Water Interface Beneath Oceanic Islands", Water Resources Research, 8(5), 1307-1315, 1972.
35. ROFAIL, N., "A Mathematical Model of Stratified Groundwater Flow", Hydrological Sciences-Bulletin, XII(4), 503-512, 1977.
36. SHAMIR, U., e DAGAN, G., "Motion of the Seawater Interface in Coastal Aquifers: A Numerical Solution", Water Resources Research, 7(3), 644-657, 1971.
37. BONNET, M., e J.P. SAUTY, Um Modèle Simplifié pour la simulation des nappes avec Intrusion Saline, IAHS-AISH Publ. 115, 1975.
38. MERCER, J.W., S.P. LEARSON e C.R. FAUST, Simulation of Salt Water Interface Motion, Ground Water, 18, 374-385, 1980.

39. POLO, J.F. e RAMIS, F.J.R., "Simulation of Salt Water-Fresh Water Interface Motion", *Water Resources Research*, 19(1), 61-68, 1983.
40. LIGGET, J.A. e LIU, P. L-F, *The Boundary Integral Equation Method for Porous Media Flow*. George Allen & Unwin, London, 1983.
41. LEE, C. e CHENG, R.T., "On Seawater Encroachment in Coastal Aquifers". *Water Resources Research*, 10(3), 1039-1043, 1974.
42. SEGAL, G. PINDER, G.F. e GRAY, W.G., "A Galerkin-Finite Element Technique for Calculating the Transient Position on the Saltwater Front", *Water Resources Research*, 11(2), 343-347, 1975.
43. DESAI, C.S., e CONTRACTOR, D.N., "Finite Element Analysis of Flow, Diffusion and Salt Water Intrusion in Porous Media", in *Formulation and Computational Algorithms in Finite Element Analysis*, ed. by K.J. Bathe et al., MIT Press, 958-983, 1977.
44. KONO, I., "Analysis of Interface Problems in Groundwater Flow by Finite Element Method", in *Finite Elements in Fluids*, Vol. 1, ed by R.H. Gallagher et al., John Wiley and Sons, U.K., 1974.

45. CHENG, R.T. e HU, M.H., "Study of Fluid Movements Through Causeway. . Journal of Hydraulics Division of A.S.C.E. 101(HY1), 155-165, 1975.
46. SÁ DA COSTA, A., "Modelação Numérica da Intrusão Salina em Aquíferos Costeiros", Simpósio Luso-Brasileiro sobre Simulação e Modelação em Hidráulica e Recursos Hídricos, Associação Brasileira de Recursos Hídricos, Anais 2, 251-283, Blumenau, 1983.
47. BREBBIA, C.A., The Boundary Element Method for Engineers. Pentech Press, London: Phymouth, 1978.
48. LIU, P.L.F.; CHENG, H.D.; LIGGETT, J.A. e LEE, J.H.; "Boundary Integral Solutions to Moving Interface Between Two Fluids in Porous Media", Water Resources Research, 17(5), 1445-1452, 1981.
49. EAGLESON, P.S. - Dynamic Hydrology  
New York, McGraw-Hill Book, 1970.
50. BEAR, Jacob-Dynamics of Fluids in Porous Media  
American Elsevier Publishing Company, Inc., New York, 1972.
51. COATS, K., and B.D. SMITH, Dead-end pore volume and dispersion in porous media, J.Soc. Petrol. Eng. 73-84 (March-1964).

52. PINTO, N.L.S.; HOLTZ, A.C.T.; MARTINS, J.A.; GOMIDE, F.L.  
S. - Hidrologia Básica. Editora Edgard Blücher Ltda.  
São Paulo - 1976.
53. MORSE, P.M., and H. FESHBACH, Methods of Theoretical  
Physics, McGraw-Hill, New-York, 1953.
54. SPAIN, B., Tensor Calculus, Oliver & Boyd, London, 1960.
55. SPIEGEL, M.R., Theory and Problems of Vector Analysis,  
Schaum, New York, 1959.
56. HUBBERT, M.K., The Theory of Ground Water Motion  
Journal of Geology 48, 785-944, 1940.
57. KUTILEK, M., Non-Darcian flow of Water in Soils (Laminar  
Region), 1st IAHR Symp. Fundamentals of Transport  
Phenomena in Porous Media, Haifa, Israel, 1969.
58. BOLT, G.H., and P.H. Groenevelt, Coupling Phenomena as a  
possible cause for non-Darcian behavior of water in  
soil, Bull. I.A.S.H. No.2, 14, 17-26, 1969.
59. NUTTING, P.G., Physical Analysis of Oil Sands, Bull. Amer.  
Ass. Petr. Geol. 14, 1337-1349, 1930.
60. FAIR, G.M. and L.P. HATCH, Fundamental Factors Governing  
the Streamline Flow of Water Through sand, Journal  
of American Water Works Ass. 25, 1551-1565, 1933.

61. CUSTODIO, E. e Llamas, M.R. - Hidrologia Subterrânea  
Ediciones Omega, S.A. - Barcelona, 1976.
62. DAKER, Alberto - A Água na Agricultura - volume 2  
Livraria Freitas Bastos S.A. - Rio de Janeiro / São Paulo.
63. HERAS, Rafael - Hidrologia y Recursos Hidraulicos  
Servicio de Publicaciones. Secretaria General Tecnica.  
Ministerio de Obras Publicas, Madrid, 1976.
64. GASKELL, Robert E. - Engineering Mathematics  
Holt, Rinchart and Winston, Inc. - New York, 1958.
65. KREYSZIG, Erwin. - Advanced Engineering Mathematics  
John Wiley and Sons, Inc. - New York, 1964.
66. BREBBIA, C.A.; TELLES, J.C.F.; WROBEL, L.C. - Boundary  
Element Techniques Springer, Berlin, 1984.
67. TELLES, J.C.F.; MANSUR, W.J.; WROBEL, L.C.  
Manual de Teoria do Programa PROCAT, Relatório COPPETEC  
ET-15206 (1984).
68. ROBERTS, G.D.; Use of Air to Influence Ground-Water  
Movement. Artificial Recharge and Management of Aquifers.  
IAASH, Symposium Haifa, 1967, Pub. 72, pág. 390-398.

69. TODD, D.K.: Ground Water Hydrology. Ed. John Wiley & Sons  
5ª Edición, 1966, Cap. 12. Sea Water Intrusion in  
Coastal Aquifers, 1959, pág. 277-296.
70. SOLANI, SEARES e EVANS: West Coast Basin Barrier Project -  
1963-1967. Los Angeles County Flood Control District.  
Los Angeles, 1968.
71. BRUINGTON, A.E. e SEARES, F.D.: Operating a Sea Water  
Barrier Project. Proc. ASCE, Journal of the Irrigation  
and Drainage Division. Vol. 91, IR1, 1965.
72. BRUINGTON, A.E.: Salt Water Intrusion into Aquifers.  
Water Resources Bulletin, Vol. 8, nº 1, 1972 pág.  
150-160.
73. HARPAZ, Y.: Artificial Ground Water Recharge by Means of  
Wells in Israel. ASCE. Journal Hydraulic Division HY12  
Dezembro 1971 pág. 1947-1963. Washington.