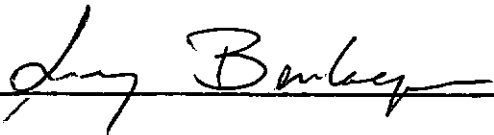


COMPORTAMENTO TERMOELÁSTICO TRANSIENTE EM
MEIOSSECCIONALMENTE HOMOGÊNEOS

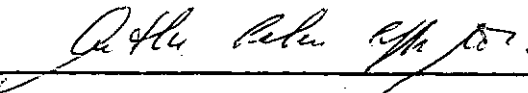
Roberto Aizik Tenenbaum

TÈSE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.)

Aprovada por:









RIO DE JANEIRO
ESTADO DO RIO DE JANEIRO - BRASIL
JULHO DE 1975

RESUMO

Determina-se o transiente de temperatura desenvolvido após o acoplamento de um cilindro circular oco, previamente aquecido, com outro maciço, de material diferente.

Obtém-se em seguida o campo de tensões principais supondo um processo quase estático e um comportamento termoelástico linear dos materiais.

Um caso de pré-aquecimento levando a uma condição inicial de temperatura não uniforme foi comparado com o caso uniforme quanto à possibilidade de ocorrência de plastificação durante o resfriamento e quanto a tensão residual de fretagem.

ABSTRACT

The temperature transiente after the coupling of a pre-heated hollow cylinder with a solid one of different material is determined.

The principal stresses field is then obtained suposing a quasi-static process and a linear thermoelastic behavior of the materials.

One case of pre-heating leading to a non-uniform initial temperature field was compared with the uniform one with respect to shrinkage efficiency and the possibility of yelding of the material during the cooling process.

ÍNDICE

	<u>PAG.</u>
CAP. I - INTRODUÇÃO	1
CAP. II - O PROBLEMA DA CONDUÇÃO TRANSIENTE DE CALOR EM MEIOS SECCIONALMENTE HOMOGENEOS	5
2.1. Sobre o Método	5
2.2. Dois Cilindros Concêntricos sem Geração Interna de Calor, Temperatura Ambiente Constante e Convecção Externa	11
2.3. Dois Cilindros Concêntricos sem Geração Interna de Calor, Temperatura Ambiente Constante e Temperatura Prescrita na Face Externa....	15
CAP. III - DETERMINAÇÃO DO CAMPO TRANSIENTE DE TEMPERATURA NO ACOPLAMENTO DE DOIS CILINDROS CIRCULARES CONCÊNTRICOS DE MATERIAIS DIFERENTES	17
3.1. Campo Inicial de Temperatura Gerado por Aquecimento Interno	19
3.2. Campo Inicial de Temperatura Constante	29
CAP. IV - DETERMINAÇÃO DO ESTADO TRANSIENTE DE TENSÕES NO ACOPLAMENTO DE DOIS CILINDROS CIRCULARES CONCÊNTRICOS DE MATERIAIS DIFERENTES	31
4.1. Relações Básicas da Termoelasticidade	31
4.2. Estabelecimento e solução da Equação dos Deslocamentos	33
4.3. Campo de Tensões no Acoplamento de Dois Cilindros Circulares Concêntricos de Materiais Diferentes	36
CAP. V - ANÁLISE DOS RESULTADOS E CONCLUSÕES	42
CAP. VI - APLICAÇÕES	69
BIBLIOGRAFIA	71

APÊNDICE A - ALGUMAS PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES DE BESSEL	73
APÊNDICE B - PROGRAMAS PARA COMPUTADOR DIGITAL	75

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Seja um sólido contínuo em um estado inteiramente livre de tensões a uma temperatura uniforme que será tomada como temperatura de referência. A esse estado chamar-se-á estado natural do sólido.

Agindo-se externamente sobre o sólido pela aplicação quer de trabalho mecânico, quer de fluxo térmico sobre seu contorno, altera-se sua energia interna, alcançando então o sólido um novo estado termodinâmico.

No novo estado assumido pelo sólido estabelecem-se campos de temperatura e tensões, intimamente relacionados, que dependem das forças externas aplicadas, da energia térmica fornecida e das propriedades termoelásticas intrínsecas do material de que é constituído.

As equações da termoelasticidade que relacionam tensão, deformação, temperatura e deslocamento são, na sua forma mais geral, algo complexas, tornando árdua a solução de problemas de condição de contorno envolvendo essas equações. Assim, na solução de problemas relativamente simples, todas as hipóteses aplicáveis ao problema que concorrerem para uma simplificação da teoria geral devem ser consideradas. Algumas dessas hipóteses e sua aplicação no problema ora em estudo são apresentadas a seguir.

Assim como uma variação da quantidade de calor em um

elemento de volume resulta em um campo de tensões e deformações, um carregamento mecânico aplicado ao elemento produz um campo de temperaturas. Em se tratando de aquecimentos lentos e pequenas velocidades de deformação, o termo de acoplamento mecânico da equação de energia, que expressa a dissipação termoelástica, pode ser desprezado. Chega-se assim à teoria chamada desacoplada que oferece a vantagem de poder-se resolver a equação do calor independentemente do estado de tensões-deformações do sólido, permitindo assim a determinação do campo de temperaturas a priori.

Quando as variações de deslocamento ao longo de todo o sólido são pequenas, pode-se linearizar as relações deformação-deslocamento tornando-se aplicáveis as relações da elasticidade linear. Se não só os deslocamentos mas suas derivadas em relação ao tempo, velocidades e acelerações, forem pequenas podemos desprezar o termo de inércia da equação do movimento recaindo em uma classe particular de problemas chamados quase-estáticos. O problema quase-estático, apesar de transiente, é modelado como uma sucessão de estados estacionários e a equação de movimento transforma-se em uma equação de equilíbrio.

O problema ora em estudo é o do acoplamento termoelástico transiente de dois cilindros circulares concêntricos de comprimento infinito; sendo um maciço e de raio a e outro oco de raios a_0 e b interno e externo respectivamente (FIG. 3.a). As dimensões são referidas ao estado natural das duas peças e a temperatura de referência é a ambiente. Os dois cilindros são constituídos de materiais diferentes, ambos homogêneos e isotrópicos.

Aplicando-se um aquecimento ao cilindro oco, o mesmo

dilata-se até que em um determinado instante o deslocamento do seu raio interno iguala-se à diferença $a-a_0$. Nesse instante efetua-se o acoplamento sem folga do cilindro maciço, ainda em seu estado natural, dentro daquele. A partir do instante do acoplamento surge um transiente de temperatura devido à condução de calor através dos cilindros e da interação do cilindro oco com o meio ambiente, desprezados outros efeitos, e um transiente de tensões resultante do efeito termoelástico e da interação mecânica na interface de contato dos cilindros.

Além das hipóteses simplificadoras de caráter físico já citadas, todas aplicáveis ao problema em questão, algumas outras, de caráter puramente geométrico, podem ser consideradas. Como o comprimento dos cilindros é infinito, não há fluxo térmico e portanto gradiente de temperatura na direção longitudinal. Os deslocamentos nessa direção serão também nulos, reduzindo-se então o problema a um estado plano de deformações. Ainda quanto à geometria, trata-se de um problema axissimétrico e como tal não haverá gradientes de temperatura e deslocamentos na direção tangencial. Teremos então somente duas variáveis independentes a saber: a coordenada radial r e o tempo t .

Para a determinação do transiente de temperaturas será aplicado o método desenvolvido por BULAVIN e KASHCHEEV¹ para a obtenção da solução da equação de condução de calor em meios seccionalmente homogêneos com perfeito contato térmico na interface.

O transiente de tensões será obtido integrando-se a equação dos deslocamentos radiais e aplicando-se as relações ten-

são-deslocamentos da termoelasticidade linear.

Buscando ainda fazer uma estimativa inicial das condições de ocorrência de plastificação do material durante o processo de resfriamento determinou-se o campo de tensões octaédricas ao longo do tempo para uma avaliação, pelo critério de Von Mises, do ponto de plastificação.

CAPÍTULO II

O PROBLEMA DA CONDUÇÃO TRANSIENTE

DE CALOR EM MEIOS SECCIONALMENTE

HOMOGÊNEOS

A solução do problema de condução transiente em placas, cilindros e esferas, seccionalmente homogêneos, com contacto térmico perfeito nas interfaces e geração interna de calor foi obtida por BULAVIN e KASHCHEEV¹ pelo método de separação de variáveis e pela construção de uma expansão de funções ortogonais para cada região homogênea.

2.1. Sobre o Método

O método supracitado, desenvolvido por BULAVIN e KASHCHEEV, se aplica à solução do problema de condução em meios compostos de regiões homogêneas limitadas por interfaces paralelas. É, portanto, aplicável a sólidos compostos de placas planas paralelas, cilindros concêntricos ou ainda esferas concêntricas. Trata-se, em qualquer caso, de um problema unidimensional pois uma única coordenada de distância será suficiente para determinar as propriedades de um ponto de uma região.

Seja então um meio composto de m regiões homogêneas. Em cada região i limitada à esquerda e à direita por interfaces paralelas de coordenadas x_i e x_{i+1} respectivamente (FIG. 2.a).

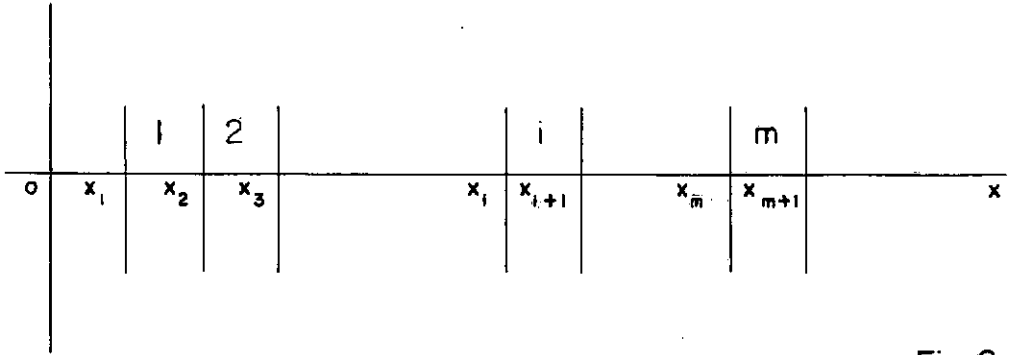


Fig. 2a

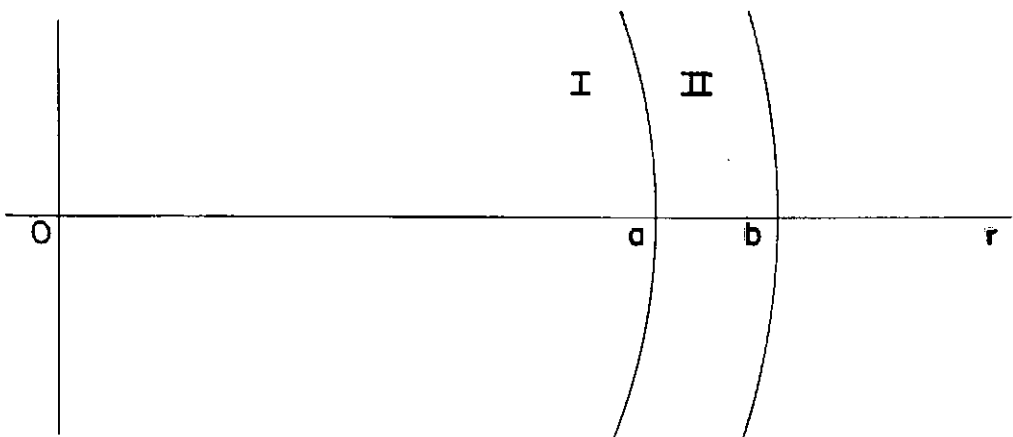
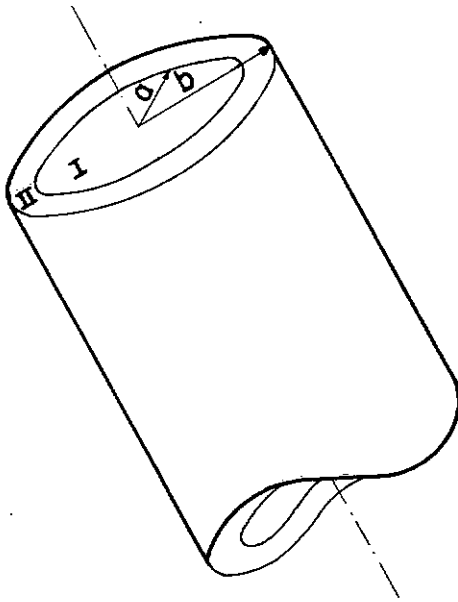


Fig. 2b

Podemos definir:

$T_i(x,t) \equiv$ temperatura na região i , $i=1,2,\dots,m$

$T_0(t) \equiv$ temperatura ambiente

$g_i(x,t) \equiv$ calor gerado na região i ($t>0$), $i=1,2,\dots,m$

No instante inicial existe um campo de temperaturas inteiramente geral, da forma:

$$T_i(x,0) = F_i(x), \quad i=1,2,\dots,m$$

A partir de $t=0$ o contorno em $x=x_1$ é mantido isolado enquanto a superfície em $x=x_{m+1}$ dissipa calor por convecção para o ambiente.

A equação diferencial que rege o problema será²:

$$\alpha_i \nabla^2 T_i(x,t) + \frac{\alpha_i}{k_i} g_i(x,t) = \frac{\partial T_i(x,t)}{\partial t}, \quad x_i < x < x_{i+1}, \quad t > 0 \quad (2.1)$$

Com as condições de contorno:

a) Isolamento em $x=x_1$:

$$\frac{\partial T_1(x_1,t)}{\partial x} = 0$$

b) Perfeito contacto térmico nas interfaces garantindo igualdade de temperatura à direita e à esquerda:

$$T_i(x_{i+1},t) = T_{i+1}(x_{i+1},t), \quad i=1,2,\dots,m-1$$

c) Conservação do fluxo térmico através das interfaces:

$$k_i \frac{\partial T_i(x_{i+1},t)}{\partial x} = k_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}(x_{i+1},t)}{\partial x}, \quad i=1,2,\dots,m-1$$

d) Dissipação por convecção na fronteira $x=x_{m+1}$:

$$-k_m \frac{\partial T_m(x_{m+1}, t)}{\partial x} = h [T_m(x_{m+1}, t) - T_o(t)]$$

E a condição inicial:

$$T_i(x, 0) = F_i(x)$$

Se referirmos todas as temperaturas a partir da temperatura ambiente podemos definir uma nova temperatura relativa:

$$\theta_i(x, t) \equiv T_i(x, t) - T_o(t) \quad (2. 2)$$

Que deverá satisfazer então a equação diferencial:

$$\alpha_i \nabla^2 \theta_i(x, t) + \frac{\alpha_i}{k_i} g_i(x, t) = \frac{\partial \theta_i(x, t)}{\partial t}, \quad x_i < x < x_{i+1}, \quad t > 0 \quad (2. 3)$$

Com as condições de contorno:

$$a) \frac{\partial \theta_i(x_i, t)}{\partial x} = 0$$

$$b) \theta_i(x_{i+1}, t) = \theta_{i+1}(x_{i+1}, t), \quad i=1, 2, \dots, m-1$$

$$c) k_i \frac{\partial \theta_i(x_{i+1}, t)}{\partial x} = k_{i+1} \frac{\partial \theta_{i+1}(x_{i+1}, t)}{\partial x}, \quad i=1, 2, \dots, m-1 \quad (2. 4)$$

$$d) -k_m \frac{\partial \theta_m(x_{m+1}, t)}{\partial x} = h \theta_m(x_{m+1}, t)$$

E a condição inicial:

$$\theta_i(x, 0) = F_i(x) - T_o(0) \equiv f_i(x), \quad i=1, 2, \dots, m \quad (2. 5)$$

A solução do problema, pelo método de separação de variáveis, será da forma^{1, 2}:

$$\theta_i(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{in}(x) \cdot \Gamma_n(t), \quad x_i < x < x_{i+1}, \quad i=1, 2, \dots, m \quad (2. 6)$$

Esta solução envolve portanto uma expansão em uma série de funções ortogonais $\chi_{in}(x)$. Estas autofunções foram determinadas por BULAVIN e KASHCHEEV estabelecendo, a partir da equação diferencial (2.3) e com o auxílio das condições de contorno (2.4), o seguinte problema de autovalores^{1,2}:

$$\alpha_i \nabla^2 \chi_{in}(x) + \beta_n^2 \chi_{in}(x) = 0, \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad i=1,2,\dots,m \quad (2.7)$$

Com as condições de contorno:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{d\chi_{1n}(x_1)}{dx} = 0 \\ \text{b)} \quad & \chi_{in}(x_{i+1}) = \chi_{(i+1)n}(x_{i+1}), \quad i=1,2,\dots,m-1 \\ \text{c)} \quad & k_i \frac{d\chi_{in}(x_{i+1})}{dx} = k_{i+1} \frac{d\chi_{(i+1)n}(x_{i+1})}{dx}, \quad i=1,2,\dots,m-1 \\ \text{d)} \quad & -k_m \frac{d\chi_{mn}(x_{m+1})}{dx} = h\chi_{mn}(x_{m+1}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Onde β_n são os autovalores correspondentes.

A solução de (2.7) pode ser escrita na forma:

$$\chi_{in}(x) = C_{in} \phi_{in}(x) + D_{in} \psi_{in}(x), \quad i=1,2,\dots,m \quad (2.9)$$

Onde $\phi_{in}(x)$ e $\psi_{in}(x)$ são duas soluções linearmente independentes da equação diferencial (2.7).

As $2m$ constantes C_{in} e D_{in} , $i=1,2,\dots,m$ são obtidos a partir das $2m$ equações lineares homogêneas obtidas das condições de contorno (2.8). Os autovalores β_n são determinadas pela equação transcendental que exprime o fato de que para que o sistema (2.8) possua solução não trivial é necessário que o determinante da matriz dos coeficientes se anule.

As funções $\Gamma_n(t)$ foram também determinadas por BULAVIN

e KASHCHEEV expandindo as funções $g_i(x,t)$ e $f_i(x)$ em séries infinitas das autofunções $\chi_{in}(x)$, perfazendo integrações em relação a x sobre todo o domínio de cada região i e substituindo as expressões obtidas nas equações (2.2), (2.6) e (2.7). A solução final² é a seguinte:

$$\Gamma_n(t) = e^{-\beta_n^2 t} \left[f_n^* + \int_0^t \left(g_n^*(t') - I_n^* \frac{dT_o(t')}{dt'} \right) e^{\beta_n^2 t'} dt' \right] \quad (2.10)$$

onde:

$$f_n^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m \frac{k_i}{\alpha_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_i(x') \cdot \chi_{in}(x') \cdot x'^p \cdot dx'$$

$$g_n^*(t') = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m \int_{x_i}^{x_{i+1}} g_i(x', t') \cdot \chi_{in}(x') \cdot x'^p \cdot dx'$$

$$I_n^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m \frac{k_i}{\alpha_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \chi_{in}(x') \cdot x'^p \cdot dx'$$

$$N = \sum_{i=1}^m \frac{k_i}{\alpha_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \chi_{in}^2(x') \cdot x'^p \cdot dx'$$

e p é um parâmetro que depende da geometria do corpo em questão:

$p = 0$ para placas

$p = 1$ para cilindros

$p = 2$ para esferas

2.2. Dois Cilindros Concêntricos sem Geração Interna de Calor, Temperatura Ambiente Constante e Convecção Externa

Sejam dois cilindros concêntricos, infinitos, imersos em um ambiente de temperatura constante, sendo um maciço, de raio a e outro oco, de raios a e b , interno e externo respectivamente (FIG. 2.b). Supõe-se haver perfeito contato térmico na interface $r=a$ e não haver geração interna de calor.

No instante $t=0$ são conhecidos os campos de temperatura absoluta $F_1(r)$ e $F_2(r)$ nas regiões I e II respectivamente.

Em termos da temperatura relativa (2.2) e para $t>0$ a equação diferencial que rege o problema será²:

$$\frac{\alpha_1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta_1(r,t)}{\partial r} \right) = \frac{\partial \theta_1(r,t)}{\partial t}, \quad 0 < r < a \quad (2.11)$$

$$\frac{\alpha_2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta_2(r,t)}{\partial r} \right) = \frac{\partial \theta_2(r,t)}{\partial t}, \quad a < r < b$$

Com as condições de contorno:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{\partial \theta_1(0,t)}{\partial r} = 0 \\ \text{b)} \quad & \theta_1(a,t) = \theta_2(a,t) \\ \text{c)} \quad & k_1 \frac{\partial \theta_1(a,t)}{\partial r} = k_2 \frac{\partial \theta_2(a,t)}{\partial r} \\ \text{d)} \quad & -k_2 \frac{\partial \theta_2(b,t)}{\partial r} = h \theta_2(b,t) \end{aligned} \quad (2.12)$$

E as condições iniciais:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \theta_1(r,0) = f_1(r), \quad 0 < r < a \\ \text{b)} \quad & \theta_2(r,0) = f_2(r), \quad a < r < b \end{aligned} \quad (2.13)$$

A solução geral do problema, obtida substituindo-se (2.10) em (2.6) para o caso de $g_i(t)=0$ e $T_0(t)=cte$, será:

$$\theta_i(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta_n^2 t} \cdot \chi_{in}(r) \cdot \frac{1}{N} \left[\frac{k_1}{\alpha_1} \int_0^a f_1(r') \cdot \chi_{1n}(r') \cdot r \cdot dr + \frac{k_2}{\alpha_2} \int_a^b f_2(r') \cdot \chi_{2n}(r') \cdot r' \cdot dr' \right] \quad (2.14)$$

onde:

$$N = \frac{k_1}{\alpha_1} \int_0^a \chi_{1n}^2(r') \cdot r \cdot dr' + \frac{k_2}{\alpha_2} \int_a^b \chi_{2n}^2(r') \cdot r' \cdot dr' \quad (2.15)$$

O problema de autovalores que define as autofunções χ_{1n} e χ_{2n} será então:

$$\frac{\alpha_1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\chi_{1n}(r)}{dr} \right) + \beta_n^2 \chi_{1n}(r) = 0 \quad , \quad 0 \leq r \leq a \quad (2.16)$$

$$\frac{\alpha_2}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\chi_{2n}(r)}{dr} \right) + \beta_n^2 \chi_{2n}(r) = 0 \quad , \quad a \leq r \leq b$$

Com as condições de contorno:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{d\chi_{1n}(0)}{dr} = 0 \\ \text{b)} \quad & \chi_{1n}(a) = \chi_{2n}(a) \\ \text{c)} \quad & k_1 \frac{d\chi_{1n}(a)}{dr} = k_2 \frac{d\chi_{2n}(a)}{dr} \\ \text{d)} \quad & -k_2 \frac{d\chi_{2n}(b)}{dr} = h \chi_{2n}(b) \end{aligned} \quad (2.17)$$

As funções $\phi_i(r) = J_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_i}} r\right)$ e $\psi_i(r) = Y_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_i}} r\right)$; $i=1,2$ são linearmente independentes e satisfazem, como pode ser verificado por substituição, a equação (2.16).

A solução geral de (2.16) será escrita então na forma:

$$X_{1n} = C_{1n} J_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_1}} r\right) + D_{1n} Y_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_1}} r\right)$$

$$X_{2n} = C_{2n} J_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} r\right) + D_{2n} Y_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} r\right)$$

Como a região I inclui a origem, D_{1n} deve ser nulo pois a função $Y_0(z)$ não é definida em $z=0$.

A condição de contorno (2.17a) é automaticamente satisfeita para qualquer valor de C_{1n} pois $\frac{dJ_0(0)}{dr} = 0$.

O sistema (2.17) reduz-se assim a três equações lineares homogêneas.

Para que haja uma solução não trivial para as constantes C_{1n} , C_{2n} e D_{2n} é necessário que o determinante da matriz dos coeficientes seja nulo. O sistema admitirá neste caso uma infinidade de soluções e podemos determinar duas constantes em função da terceira. Arbitrando, por simplicidade, $C_{1n}=1$ a solução se reduz a:

$$X_{1n}(r) = J_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_1}} r\right) \tag{2.18}$$

$$X_{2n}(r) = C_{2n} J_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} r\right) + D_{2n} Y_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} r\right)$$

Substituindo (2.18) nas condições de contorno (2.17b)

e (2.17c) obtem-se:

$$J_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_1}} a\right) = C_{2n} J_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} a\right) + D_{2n} Y_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} a\right) \quad (2.19)$$

$$\frac{k_1}{\sqrt{\alpha_1}} J_1\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_1}} a\right) = \frac{k_2}{\sqrt{\alpha_2}} \left[C_{2n} J_1\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} a\right) + D_{2n} Y_1\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} a\right) \right]$$

Resolvendo o sistema (2.19) obtem-se:

$$C_{2n} = \frac{J_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_1}} a\right) \cdot Y_1\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} a\right) - \frac{k_1 \sqrt{\alpha_2}}{k_2 \sqrt{\alpha_1}} J_1\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_1}} a\right) \cdot Y_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} a\right)}{J_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} a\right) \cdot Y_1\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} a\right) - J_1\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} a\right) \cdot Y_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} a\right)} \quad (2.20)$$

$$D_{2n} = \frac{\frac{k_1 \sqrt{\alpha_2}}{k_2 \sqrt{\alpha_1}} J_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} a\right) \cdot J_1\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_1}} a\right) - J_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_1}} a\right) \cdot J_1\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} a\right)}{J_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} a\right) \cdot Y_1\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} a\right) - J_1\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} a\right) \cdot Y_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} a\right)}$$

A condição de contorno (2.17d) fornece a seguinte equação transcendental para a determinação dos autovalores β_n :

$$\frac{k_2 \beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} \left[C_{2n} J_1\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} b\right) + D_{2n} Y_1\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} b\right) \right] = h \left[C_{2n} J_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} b\right) + D_{2n} Y_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} b\right) \right] \quad (2.21)$$

Substituindo-se as expressões de C_{2n} e D_{2n} (2.20) na equação (2.21) e simplificando-se, chega-se à seguinte equação:

$$\begin{aligned}
& J_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_1}} a\right) \left\{ \frac{k_2}{\sqrt{\alpha_2}} \beta_n \left[Y_1\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} a\right) \cdot J_1\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} b\right) - J_1\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} a\right) \cdot Y_1\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} b\right) \right] - h \left[Y_1\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} a\right) \cdot J_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} b\right) - J_1\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} a\right) \cdot Y_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} b\right) \right] \right\} + \frac{k_1 \sqrt{\alpha_2}}{k_2 \sqrt{\alpha_1}} \cdot J_1\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_1}} a\right) \cdot \\
& \left\{ \frac{k_2}{\sqrt{\alpha_2}} \beta_n \left[J_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} a\right) \cdot Y_1\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} b\right) - Y_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} a\right) \cdot J_1\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} b\right) \right] - h \left[J_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} a\right) \cdot Y_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} b\right) - Y_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} a\right) \cdot J_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} b\right) \right] \right\} = 0 \quad (2.22)
\end{aligned}$$

A solução de (2.22) pode ser obtida com o auxílio de um computador digital. As raízes β_n podem então ser substituídas nas expressões (2.20) e (2.18) fornecendo assim as funções χ_{in} , $i=1,2$. A integração de (2.15) e (2.16), conhecidas as condições iniciais (2.13), completa a solução do problema.

2.3. Dois Cilindros Concêntricos sem Geração Interna de Calor, Temperatura Ambiente Constante e Temperatura Prescrita na Face Externa

O problema em questão consiste em uma variante do problema estudado na seção anterior na qual se supõe, ao invés de dis-

sipação por convecção na superfície externa da região II (FIG.2.b), a manutenção, de alguma forma, da temperatura constante e igual à ambiente nessa superfície.

A única diferença na formulação do problema será a condição de contorno (2.12d) que será expressa agora da seguinte forma:

$$\theta_2(b, t) = 0 \quad (2.23)$$

Ou, no problema de autovalores:

$$\chi_{2n}(b, t) = 0 \quad (2.24)$$

Tem-se então uma nova equação para os autovalores β_n substituindo (2.20) e (2.18) em (2.24):

$$\begin{aligned} J_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} b\right) \left[J_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_1}} a\right) \cdot Y_1\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} a\right) - \frac{k_1 \sqrt{\alpha_2}}{k_2 \sqrt{\alpha_1}} \cdot J_1\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_1}} a\right) \cdot \right. \\ \left. \cdot Y_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} a\right) \right] + Y_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} b\right) \left[\frac{k_1 \sqrt{\alpha_2}}{k_2 \sqrt{\alpha_1}} \cdot J_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} a\right) \cdot \right. \\ \left. \cdot J_1\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_1}} a\right) - J_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_1}} a\right) \cdot J_1\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} a\right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

Uma vez obtidos os novos β_n a partir da equação (2.25) o cálculo de $\theta_i(r, t)$, $i=1,2$ é efetuado de forma idêntica à anterior.

CAPÍTULO III

DETERMINAÇÃO DO CAMPO TRANSIENTE DE TEMPERATURA NO
ACOPLAMENTO DE DOIS CILINDROS CIRCULARES
CONCÊNTRICOS DE MATERIAIS DIFERENTES

Sejam dois cilindros concêntricos de comprimento in finito sendo um maciço, de raio a e outro oco de raios a_0 e b interno e externo respectivamente (FIG. 3.a) em seus estados naturais à temperatura ambiente $T_0(t)$.

Aquecendo-se de alguma forma o cilindro oco de modo a permitir o acoplamento sem folga do cilindro maciço no interior daquele teremos, no instante do acoplamento ($t = 0$), a seguinte situação: Um cilindro maciço de raio aproximadamente igual a b composto de duas regiões homogêneas I e II (FIG. 3.b) de materiais diferentes sujeitas ao seguinte campo de temperatura absoluta:

$$T_1(r,0) \equiv F_1(r) = T_0(0) \quad , \quad 0 \leq r \leq a$$

$$T_2(r,0) \equiv F_2(r) \quad , \quad a \leq r \leq b$$

onde $F_2(r)$ é o campo de temperatura presente no cilindro oco no instante do acoplamento e que é função do processo de aquecimento aplicado ao cilindro. Dois casos serão estudados:

- 1) Aplica-se uma temperatura constante F_0 na face interna do cilindro, mantendo-se a externa à temperatura ambiente durante um intervalo de tempo t_0 .
- 2) Imerge-se todo o cilindro em um ambiente a ~~uma~~ temperatura

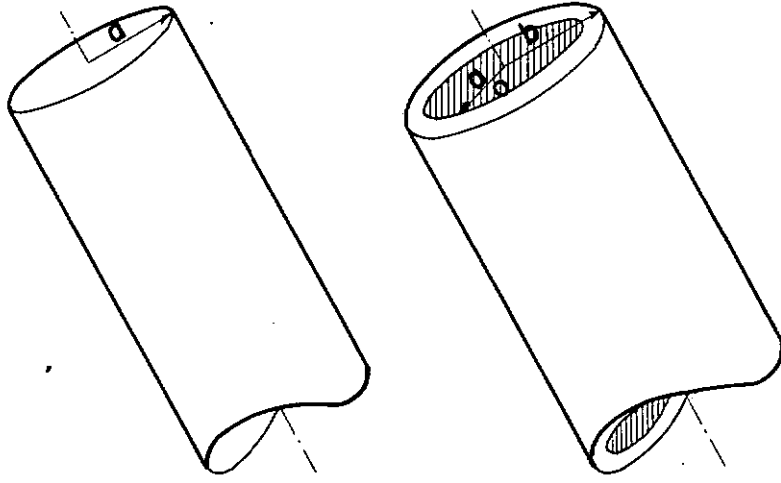


Fig. 3a

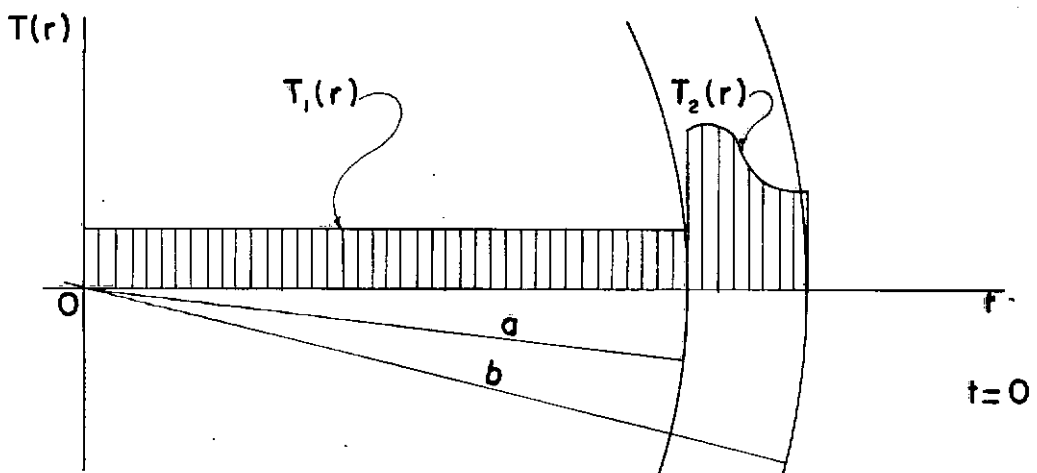
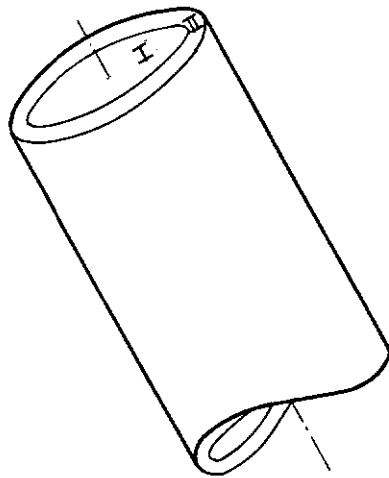


Fig. 3b

constante F_0 durante um espaço de tempo suficiente para que se obtenha perfeito equilíbrio térmico.

Em ambos os casos F_0 deve ser tal que se tenha, ao fim do processo, $a_0 = a$ para permitir o acoplamento.

Para permitir a aplicação do método de BULAVIN e KASHCHEEV na solução do transiente térmico gerado após o acoplamento será assumida a hipótese de haver perfeito contato térmico na interface dos cilindros.

3.1. Campo Inicial de Temperatura Gerado por Aquecimento Interno

Seja um cilindro circular oco de comprimento infinito e raios a_0 e b interno e externo respectivamente em seu estado natural à temperatura ambiente. Se, a partir do instante $\bar{t} = 0$, se aplica uma temperatura constante F_0 na face interna, mantida a face externa à temperatura ambiente T_0 , desenvolve-se no cilindro um transiente de temperatura o qual foi determinado por A.G.PORTO³ e que tem a forma:

$$\bar{F}_2(r, \bar{t}) = T_0 + (F_0 - T_0) \frac{\ln \frac{b}{r}}{\ln \zeta} - \pi (F_0 - T_0) \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\alpha_2 \left(\frac{\lambda_m}{a_0}\right)^2 \bar{t}} \cdot \frac{J_0(\lambda_m) \cdot J_0(\zeta \lambda_m)}{J_0^2(\zeta \lambda_m) - J_0^2(\lambda_m)} \cdot \left[Y_0(\zeta \lambda_m) \cdot J_0\left(\frac{\lambda_m}{a_0} r\right) - J_0(\zeta \lambda_m) \cdot Y_0\left(\frac{\lambda_m}{a_0} r\right) \right] \quad (3.1)$$

onde: $\zeta \equiv b/a_0$,

λ_m são as raízes da equação transcendental:

$$J_0(\lambda) \cdot Y_0(\zeta \lambda) - J_0(\zeta \lambda) \cdot Y_0(\lambda) = 0 \quad (3.2)$$

e $\bar{F}_2(r, \bar{t})$ é o campo de temperatura no cilindro, que é função

do raio r ($a_0 \leq r \leq b$) e do tempo \bar{t} contado a partir do instante em que se inicia o processo ($0 \leq \bar{t} \leq t_0$).

Admitindo-se pequenas deformações durante o processo de dilatação podemos fazer a seguinte aproximação:

$$\frac{a}{a_0} \approx 1 \quad (3.3)$$

Utilizando-se o conceito de temperatura relativa (2.5), ou seja, definindo:

$$\bar{f}_2(r, t) \equiv \bar{F}_2(r, \bar{t}) - T_0 \quad ; \quad f_0 \equiv F_0 - T_0$$

Teremos, no instante $\bar{t} = t_0$:

$$\bar{F}_2(r, t_0) = f_0 \frac{\ln \frac{b}{r}}{\ln \zeta} - \pi f_0 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\alpha_2 \left(\frac{\lambda_m}{a}\right)^2 t_0} \cdot \frac{J_0(\lambda_m) \cdot J_0(\zeta \lambda_m)}{J_0^2(\zeta \lambda_m) - J_0^2(\lambda_m)} \cdot \left[Y_0(\zeta \lambda_m) \cdot J_0\left(\frac{\lambda_m}{a} r\right) - J_0(\zeta \lambda_m) \cdot Y_0\left(\frac{\lambda_m}{a} r\right) \right] \quad (3.4)$$

Se nesse instante efetua-se o acoplamento do cilindro maciço de raio a , ainda à temperatura ambiente, no interior do cilindro oco, desenvolver-se-á um transiente de temperatura como o descrito na seção 2.2. Neste caso as condições iniciais (2.13) serão:

$$\begin{aligned} (a) \quad \theta_1(r, 0) &= f_1(r) = 0 & 0 \leq r \leq a \\ (b) \quad \theta_2(r, 0) &= f_2(r) = \bar{F}_2(r, t_0) \quad , \quad a \leq r \leq b \end{aligned} \quad (3.5)$$

A solução do transiente térmico será obtida então, substituindo-se (3.4), (3.5) e (2.18) em (2.14) e (2.15):

$$\begin{aligned} \theta_i(r,t) = & \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta_n^2 t} \cdot \chi_{in}(r) \cdot \frac{1}{N} \frac{k_2}{\alpha_2} \int_a^b \left[f_0 \frac{\ln \frac{b}{r}}{\ln \zeta} - \right. \\ & - \pi f_0 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\alpha_2 \left(\frac{\lambda_m}{a}\right)^2 t_0} \cdot \frac{J_0(\lambda_m) \cdot J_0(\zeta \lambda_m)}{J_0^2(\zeta \lambda_m) - J_0^2(\lambda_m)} \cdot \left(Y_0(\zeta \lambda_m) \cdot J_0\left(\frac{\lambda_m}{a} r\right) - \right. \\ & \left. \left. - J_0(\zeta \lambda_m) \cdot Y_0\left(\frac{\lambda_m}{a} r\right) \right) \right] \cdot \left[C_{2n} J_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} r\right) + D_{2n} Y_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} r\right) \right] r dr \quad (3.6) \end{aligned}$$

onde

$$N = \frac{k_1}{\alpha_1} \int_0^a J_0^2\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_1}} r\right) r dr + \frac{k_2}{\alpha_2} \int_a^b \left[C_{2n} J_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} r\right) + D_{2n} Y_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} r\right) \right]^2 r dr \quad (3.7)$$

O somatório em m da expressão (3.6) é uma série de funções da forma:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[a_m f_m(r) + b_m g_m(r) \right], \quad \text{onde:}$$

$f_m(r) = J_0\left(\frac{\lambda_m}{a} r\right)$ e $g_m(r) = Y_0\left(\frac{\lambda_m}{a} r\right)$ são sequências de funções de uma variável e:

$$a_m = e^{-\alpha_2 \left(\frac{\lambda_m}{a}\right)^2 t_0} \cdot \frac{J_0(\lambda_m) \cdot J_0(\zeta \lambda_m) \cdot Y_0(\zeta \lambda_m)}{J_0^2(\zeta \lambda_m) - J_0^2(\lambda_m)} \quad e$$

$$b_m = - e^{-\alpha_2 \left(\frac{\lambda_m}{a}\right)^2 t_0} \cdot \frac{J_0(\lambda_m) \cdot J_0^2(\zeta \lambda_m)}{J_0^2(\zeta \lambda_m) - J_0^2(\lambda_m)}$$

são coeficientes constantes para cada m

As séries de funções de Bessel do tipo $\sum_{m=1}^{\infty} J_0(m r)$ e $\sum_{m=1}^{\infty} Y_0(m r)$ são uniformemente convergentes^{6,10}.

Se ζ é finito, as raízes λ_m da equação (3.2) são, co

mo mostra Porto³, monotonamente crescentes aumentando mais rapidamente do que m , ou seja, ter-se-á sempre $\frac{\partial \lambda_m}{\partial m} > 1$.

Então, para m suficientemente grande, é sempre possível garantir que

$$\left| J_0\left(\frac{\lambda_m}{a}r\right) \right| < \left| J_0(m r) \right| \quad e$$

$$\left| Y_0\left(\frac{\lambda_m}{a}r\right) \right| < \left| Y_0(m r) \right| \quad ,$$

de onde conclui-se que as séries das funções $f_m(r)$ e $g_m(r)$ convergem uniformemente^{4,5}.

A combinação linear $a_m f_m(r) + b_m g_m(r)$ convergirá uniformemente portanto se os coeficientes a_m e b_m forem limitados^{4,5}.

Como λ_m é monotonamente crescente, ter-se-á:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} e^{-\alpha_2 \left(\frac{\lambda_m}{a}\right)^2 t_0} = \lim_{m \rightarrow \infty} J_0(\lambda_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} J_0(\zeta \lambda_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} Y_0(\zeta \lambda_m) = 0$$

Como nas expressões de a_m e b_m os numeradores são de maior grau do que os denominadores, ambos tendendo para zero, podemos concluir que:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = \lim_{m \rightarrow \infty} b_m = 0$$

A série em m converge uniformemente, portanto, o que permite a integração termo a termo^{4,5}.

A solução do campo de temperatura será então:

$$\begin{aligned}
\theta_i(r, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta_n^2 t} \cdot \chi_{in}(r) \frac{1}{N} \frac{k_2}{\alpha_2} f_0 \left\{ \frac{1}{\ln \zeta} \left[C_{2n} \int_a^b \ln\left(\frac{b}{r}\right) J_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} r\right) r \, dr + \right. \right. \\
& + D_{2n} \int_a^b \ln\left(\frac{b}{r}\right) \cdot Y_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} r\right) r \, dr \left. \right] - \pi \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\alpha_2 \left(\frac{\lambda_m}{a}\right)^2 t} \cdot \frac{J_0(\lambda_m) \cdot J_0(\zeta \lambda_m)}{J_0^2(\zeta \lambda_m) - J_0^2(\lambda_m)} \cdot \\
& \cdot \left[C_{2n} Y_0(\zeta \lambda_m) \int_a^b J_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} r\right) \cdot J_0\left(\frac{\lambda_m}{a} r\right) r \, dr - C_{2n} J_0(\zeta \lambda_m) \int_a^b J_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} r\right) \cdot \right. \\
& \cdot Y_0\left(\frac{\lambda_m}{a} r\right) r \, dr + D_{2n} Y_0(\zeta \lambda_m) \int_a^b Y_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} r\right) \cdot J_0\left(\frac{\lambda_m}{a} r\right) r \, dr - \\
& \left. \left. - D_{2n} J_0(\zeta \lambda_m) \int_a^b Y_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} r\right) \cdot Y_0\left(\frac{\lambda_m}{a} r\right) r \, dr \right] \right\} \quad (3.8)
\end{aligned}$$

Se definirmos:

$$I_1 = \int_a^b \ln\left(\frac{b}{r}\right) \cdot J_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} r\right) r \, dr$$

$$I_2 = \int_a^b \ln\left(\frac{b}{r}\right) \cdot Y_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} r\right) r \, dr$$

$$I_3 = \int_a^b J_0\left(\frac{\lambda_m}{a} r\right) \cdot J_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} r\right) r \, dr$$

$$I_4 = \int_a^b Y_0\left(\frac{\lambda_m}{a} r\right) \cdot J_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} r\right) r \, dr \quad (3.9)$$

$$I_5 = \int_a^b J_0\left(\frac{\lambda_m}{a} r\right) \cdot Y_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} r\right) r \, dr$$

$$I_6 = \int_a^b Y_0\left(\frac{\lambda_m}{a} r\right) \cdot Y_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} r\right) r \, dr$$

$$I_7 = \int_0^a J_0^2\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_1}} r\right) r \, dr$$

$$\begin{aligned}
 I_8 &= \int_a^b J_0^2\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}}r\right) r \, dr \\
 I_9 &= \int_a^b Y_0^2\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}}r\right) r \, dr \\
 I_{10} &= \int_a^b J_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}}r\right) \cdot Y_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}}r\right) r \, dr
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Podemos reescrever a solução de uma forma mais compacta:

$$\begin{aligned}
 \theta_i(r,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta_n^2 t} \cdot \chi_{in}(r) \frac{1}{N} \frac{k_2}{\alpha_2} f_0 \left\{ \frac{1}{\ln \zeta} \left[C_{2n} I_1 + D_{2n} I_2 \right] - \right. \\
 &- \pi \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\alpha_2 \left(\frac{\lambda_m}{a}\right)^2 t} \cdot \frac{J_0(\lambda_m) \cdot J_0(\zeta \lambda_m)}{J_0^2(\zeta \lambda_m) - J_0^2(\lambda_m)} \cdot \left[C_{2n} Y_0(\zeta \lambda_m) I_3 - \right. \\
 &\left. \left. - C_{2n} J_0(\zeta \lambda_m) I_4 + D_{2n} Y_0(\zeta \lambda_m) I_5 - D_{2n} J_0(\zeta \lambda_m) I_6 \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

onde:

$$N = \frac{k_1}{\alpha_1} I_7 + \frac{k_2}{\alpha_2} \left[C_{2n} I_8 + D_{2n} I_9 + C_{2n} D_{2n} I_{10} \right] \tag{3.11}$$

Resta somente portanto a determinação das integrais (3.9). Para o cálculo dessas integrais serão utilizadas as fórmulas compactas sintetizadas no Apêndice A.

Cálculo de I_1 :

Da fórmula (A-5) para $k = \frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}}$; $Z_0 \equiv J_0$:

$$I_1 = \frac{\alpha_2}{\beta_n^2} \left[J_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}}a\right) - J_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}}b\right) \right] - \frac{a\sqrt{\alpha_2}}{\beta_n} J_1\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}}a\right) \ln \zeta \tag{3.12a}$$

Cálculo de I_2 :

Da fórmula (A-5) para $k = \frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}}$; $Z_0 \equiv Y_0$:

$$I_2 = \frac{\alpha_2}{\beta_n^2} \left[Y_0 \left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} a \right) - Y_0 \left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} b \right) \right] - a \frac{\sqrt{\alpha_2}}{\beta_n} Y_1 \left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} a \right) \ln \zeta \quad (3.12b)$$

Cálculo de I_3 :

Da fórmula (A-6) para $\nu=0$, $k = \frac{\lambda_m}{a}$, $\ell = \frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}}$; $Z_0^{(1)} = Z_0^{(2)} \equiv J_0$:

$$I_3 = \frac{r}{\left(\frac{\lambda_m}{a} \right)^2 - \frac{\beta_n^2}{\alpha_2}} \left[\frac{\lambda_m}{a} J_1 \left(\frac{\lambda_m}{a} r \right) \cdot J_0 \left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} r \right) - \frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} J_0 \left(\frac{\lambda_m}{a} r \right) \cdot J_1 \left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} r \right) \right] \Bigg|_a^b$$

Entre os limites de integração ter-se-á:

$$I_3 = \frac{1}{\left(\frac{\lambda_m}{a} \right)^2 - \frac{\beta_n^2}{\alpha_2}} \left\{ b \left[\frac{\lambda_m}{a} J_1 (\zeta \lambda_m) \cdot J_0 \left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} b \right) - \frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} J_0 (\zeta \lambda_m) \cdot J_1 \left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} b \right) \right] - a \left[\frac{\lambda_m}{a} J_1 (\lambda_m) \cdot J_0 \left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} a \right) - \frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} J_0 (\lambda_m) \cdot J_1 \left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} a \right) \right] \right\} \quad (3.12c)$$

Cálculo de I_4 :

Da fórmula (A-6) para $\nu=0$, $k = \frac{\lambda_m}{a}$, $\ell = \frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}}$; $Z_0^{(1)} \equiv Y_0$, $Z_0^{(2)} \equiv J_0$:

$$I_4 = \frac{r}{\left(\frac{\lambda_m}{a} \right)^2 - \frac{\beta_n^2}{\alpha_2}} \left[\frac{\lambda_m}{a} Y_1 \left(\frac{\lambda_m}{a} r \right) \cdot J_0 \left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} r \right) - \frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} Y_0 \left(\frac{\lambda_m}{a} r \right) \cdot J_1 \left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} r \right) \right] \Bigg|_a^b$$

Entre os limites de integração:

$$I_4 = \frac{1}{\left(\frac{\lambda_m}{a}\right)^2 - \frac{\beta_n^2}{\alpha_2}} \left\{ b \left[\frac{\lambda_m}{a} Y_1(\zeta \lambda_m) \cdot J_0\left(\frac{\beta_n b}{\sqrt{\alpha_2}}\right) - \frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} Y_0(\zeta \lambda_m) \cdot J_1\left(\frac{\beta_n b}{\sqrt{\alpha_2}}\right) \right] - \right. \\ \left. - a \left[\frac{\lambda_m}{a} Y_1(\lambda_m) \cdot J_0\left(\frac{\beta_n a}{\sqrt{\alpha_2}}\right) - \frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} Y_0(\lambda_m) \cdot J_1\left(\frac{\beta_n a}{\sqrt{\alpha_2}}\right) \right] \right\} \quad (3.12d)$$

Cálculo de I_5 :

Da fórmula (A-6) para $v=0$, $k=\frac{\lambda_m}{a}$, $\ell=\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}}$; $Z_0^{(1)} \equiv J_0$, $Z_0^{(2)} \equiv Y_0$:

$$I_5 = \frac{r}{\left(\frac{\lambda_m}{a}\right)^2 - \frac{\beta_n^2}{\alpha_2}} \left[\frac{\lambda_m}{a} J_1\left(\frac{\lambda_m r}{a}\right) \cdot Y_0\left(\frac{\beta_n r}{\sqrt{\alpha_2}}\right) - \frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} J_0\left(\frac{\lambda_m r}{a}\right) \cdot Y_1\left(\frac{\beta_n r}{\sqrt{\alpha_2}}\right) \right] \Big|_a^b$$

Entre os limites de integração:

$$I_5 = \frac{1}{\left(\frac{\lambda_m}{a}\right)^2 - \frac{\beta_n^2}{\alpha_2}} \left\{ b \left[\frac{\lambda_m}{a} J_1(\zeta \lambda_m) \cdot Y_0\left(\frac{\beta_n b}{\sqrt{\alpha_2}}\right) - \frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} J_0(\zeta \lambda_m) \cdot Y_1\left(\frac{\beta_n b}{\sqrt{\alpha_2}}\right) \right] - \right. \\ \left. - a \left[\frac{\lambda_m}{a} J_1(\lambda_m) \cdot Y_0\left(\frac{\beta_n a}{\sqrt{\alpha_2}}\right) - \frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} J_0(\lambda_m) \cdot Y_1\left(\frac{\beta_n a}{\sqrt{\alpha_2}}\right) \right] \right\} \quad (3.12e)$$

Cálculo de I_6 :

Da fórmula (A-6) para $v=0$, $k=\frac{\lambda_m}{a}$, $\ell=\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}}$; $Z_0^{(1)} = Z_0^{(2)} \equiv Y_0$:

$$I_6 = \frac{r}{\left(\frac{\lambda_m}{a}\right)^2 - \frac{\beta_n^2}{\alpha_2}} \left[\frac{\lambda_m}{a} Y_1\left(\frac{\lambda_m}{a}r\right) \cdot Y_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}}r\right) - \frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} Y_0\left(\frac{\lambda_m}{a}r\right) \cdot Y_1\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}}r\right) \right] \Big|_a^b$$

Entre os limites de integração:

$$I_6 = \frac{1}{\left(\frac{\lambda_m}{a}\right)^2 - \frac{\beta_n^2}{\alpha_2}} \left\{ b \left[\frac{\lambda_m}{a} Y_1\left(\zeta\lambda_m\right) \cdot Y_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}}b\right) - \frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} Y_0\left(\zeta\lambda_m\right) \cdot Y_1\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}}b\right) \right] - a \left[\frac{\lambda_m}{a} Y_1\left(\lambda_m\right) \cdot Y_0\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}}a\right) - \frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} Y_0\left(\lambda_m\right) \cdot Y_1\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}}a\right) \right] \right\} \quad (3.12f)$$

Cálculo de I_7 :

Da fórmula (A-7) para $v=0$, $k = \frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_1}}$; $Z_0^{(1)} = Z_0^{(2)} \equiv J_0$:

$$I_7 = \frac{r^2}{4} \left[2J_0^2\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_1}}r\right) - 2J_{-1}\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_1}}r\right) \cdot J_1\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_1}}r\right) \right] \Big|_0^a$$

Aplicando (A-3):

$$I_7 = \frac{r^2}{2} \left[J_0^2\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_1}}r\right) + J_1^2\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_1}}r\right) \right] \Big|_0^r$$

Entre os limites de integração:

$$I_7 = \frac{a^2}{2} \left[J_0^2\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_1}}a\right) + J_1^2\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_1}}a\right) \right] \quad (3.12g)$$

Cálculo de I_8 :

Da fórmula (A-7) para $v=0$, $k = \frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}}$; $Z_0^{(1)} = Z_0^{(2)} \equiv J_0$:

$$I_8 = \frac{r^2}{4} \left[2J_0^2 \left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} r \right) - 2J_{-1} \left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} r \right) \cdot J_1 \left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} r \right) \right] \Big|_a^b$$

Aplicando (A-3):

$$I_8 = \frac{r^2}{2} \left[J_0^2 \left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} r \right) + J_1^2 \left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} r \right) \right] \Big|_a^b$$

Entre os limites da integração:

$$I_8 = \frac{1}{2} \left\{ b^2 \left[J_0^2 \left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} b \right) + J_1^2 \left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} b \right) \right] - a^2 \left[J_0^2 \left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} a \right) + J_1^2 \left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} a \right) \right] \right\} \quad (3.12h)$$

Cálculo de I_9 :

De forma análoga ao cálculo de I_8 , no caso de $Z_0^{(1)} = Z_0^{(2)} \equiv Y_0$:

$$I_9 = \frac{1}{2} \left\{ b^2 \left[Y_0^2 \left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} b \right) + Y_1^2 \left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} b \right) \right] - a^2 \left[Y_0^2 \left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} a \right) + Y_1^2 \left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} a \right) \right] \right\} \quad (3.12i)$$

Cálculo de I_{10} :

Da fórmula (A-7) para $v=0$, $k = \frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}}$; $Z_0^{(1)} = J_0$, $Z_0^{(2)} = Y_0$:

$$I_{10} = \frac{r^2}{4} \left[2J_0 \left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} r \right) \cdot Y_0 \left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} r \right) - J_{-1} \left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} r \right) \cdot Y_1 \left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} r \right) - J_1 \left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} r \right) \cdot \right.$$

$$\cdot Y_{-1} \left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} r \right) \Bigg|_a^b$$

Aplicando (A-3) e entre os limites de integração:

$$I_w = \frac{1}{2} \left\{ b^2 \left[J_0 \left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} b \right) \cdot Y_0 \left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} b \right) + J_1 \left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} b \right) \cdot Y_1 \left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} b \right) \right] - \right. \\ \left. - a^2 \left[J_0 \left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} a \right) \cdot Y_0 \left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} a \right) + J_1 \left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} a \right) \cdot Y_1 \left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} a \right) \right] \right\} \quad (3.12j)$$

3.2. Campo Inicial de Temperatura Constante

Se, ao invés do processo de aquecimento referido na seção 3.1, o cilindro oco for aquecido uniformemente até que, no instante do acoplamento, seu campo de temperatura seja constante teremos, mantidos todos os outros parâmetros, as seguintes condições iniciais:

$$(a) f_1(r) = 0 \\ (b) f_2(r) = F_0 - T_0 = f_0 \quad (3.13)$$

Substituindo (3.13) e (2.18) em (2.14) obtêm-se a nova expressão para o transiente de temperatura após o acoplamento:

$$\theta_i(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta_n^2 t} \cdot \chi_{in}(r) \frac{1}{N} \frac{k_2}{\alpha_2} f_0 \int_a^b \left[C_{2n} J_0 \left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} r \right) + \right. \\ \left. + D_{2n} Y_0 \left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} r \right) \right] r dr$$

Perfazendo a integração com o auxílio da fórmula (A-8) obtêm-se:

$$\theta_i(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta_n^2 t} \cdot \chi_{in}(r) \frac{1}{N} \frac{k_2}{\sqrt{\alpha_2} \beta_n} f_0 \left\{ C_{2n} \left[b J_1 \left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} b \right) - a J_1 \left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} a \right) \right] + D_{2n} \left[b Y_1 \left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} b \right) - a Y_1 \left(\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_2}} a \right) \right] \right\} \quad (3.14)$$

Está então completa a solução do transiente de temperatura no acoplamento de dois cilindros circulares concêntricos de comprimento infinito e materiais diferentes quando há perfeito contato térmico na interface do acoplamento. A solução será dada pelas expressões (2.20), (2.18), (3.12), (3.11) e (3.10) para o caso do cilindro oco ser pré-aquecido internamente ou pelas expressões (2.20), (2.18), (3.12), (3.11) e (3.14) para o caso de ser pré-aquecido uniformemente. Em ambos os casos os autovalores β_n serão obtidos da equação (2.21) ou da equação (2.24) conforme o caso.

O cálculo dos campos de temperatura $\theta_1(r,t)$ e $\theta_2(r,t)$ nos cilindros será realizado através de um programa para computador digital para cada caso (APÊNDICE B).

CAPÍTULO IV

DETERMINAÇÃO DO ESTADO TRANSIENTE DE TENSÕES NO ACOPLAMENTO DE DOIS CILINDROS CIRCULARES CONCÊNTRICOS DE MATERIAIS DIFERENTES

O acoplamento termoelástico de dois cilindros circulares concêntricos de materiais diferentes, ambos isotrópicos e homogêneos, é um problema axissimétrico, ou seja, os campos transientes de temperatura e tensões são independentes das coordenadas tangencial e longitudinal.

Se forem admitidos pequenos deslocamentos, velocidades e acelerações poder-se-á supor um processo quase-estático e um comportamento linear do material.

A determinação do transiente de tensões desenvolvido após o acoplamento pode ser feita a partir da solução da equação dos deslocamentos radiais para as condições de contorno do acoplamento e das relações tensões-deslocamentos aplicáveis ao problema.

4.1. Relações Básicas da Termoelasticidade

Dentro da teoria da elasticidade linear, os componentes do tensor deformação em um sólido isotrópico e homogêneo sujeito a um campo de temperatura T são funções lineares dos componentes do tensor tensão e dos componentes do tensor deformação devido

ao campo de temperatura.

Essas funções são dadas pelas relações de DUHAMEL-NEUMANN⁷

$$\varepsilon_{ij} = a_t T \delta_{ij} + \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) \quad , \quad i, j, k=1, 2, 3 \quad (4. 1)$$

Os componentes do tensor tensão podem ser então obtidos das equações (4.1):

$$\sigma_{ij} = 2\mu \left[\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(e - \frac{1+\nu}{\nu} a_t T \right) \delta_{ij} \right] \quad , \quad i, j=1, 2, 3 \quad (4. 2)$$

Ou, em termos das constantes de Lamé:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + (\lambda e - \gamma T) \delta_{ij} \quad , \quad i, j=1, 2, 3 \quad (4. 3)$$

onde:

$$\gamma = (3\lambda + 2\mu) a_t \quad (4. 4)$$

Havendo simetria axial torna-se conveniente o uso de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) . Se os campos de temperatura e tensões são axissimétricos as relações (4.3) reduzem-se a:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 2\mu \varepsilon_r + \lambda e - \gamma T \\ \sigma_\theta &= 2\mu \varepsilon_\theta + \lambda e - \gamma T \\ \sigma_z &= \lambda e - \gamma T \end{aligned} \quad (4. 5)$$

Ainda para o caso de simetria axial, as relações de -
formações-deslocamentos⁸ da elasticidade linear:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad , \quad i, j=1, 2, 3 \quad (4. 6)$$

reduzem-se a:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} \quad (4.7)$$

$$\varepsilon_z = 0$$

Substituindo (4.7) em (4.5) obtém-se as relações tensão-deformação:

$$\sigma_r = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \frac{u_r}{r} - \gamma T$$

$$\sigma_\theta = \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} + (\lambda + 2\mu) \frac{u_r}{r} - \gamma T \quad (4.8)$$

$$\sigma_z = \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) - \gamma T$$

Convém notar que trata-se de um estado plano de deformações em que:

$$u_z = u_\theta = 0 \quad (4.9)$$

4.2. Estabelecimento e Solução da Equação dos Deslocamentos

A equação do movimento de um volume elementar em termos dos componentes do tensor tensão é da forma⁸:

$$\sigma_{ij,j} + X_i = \rho \ddot{u}_i \quad , \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (4.10)$$

Supondo lentas variações de temperaturas e deformações podemos desprezar o termo de inércia da equação (4.10), recai

do na classe de problemas quase-estáticos, reduzindo-se então a equação (4.10) à condição de equilíbrio:

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0 \quad , \quad i,j=1,2,3 \quad (4.11)$$

A equação de equilíbrio pode ser escrita em termos de deslocamentos substituindo-se as relações tensões-deformações em (4.11):

$$\mu u_{i,kk} + (\lambda + \mu) u_{k,ki} + X_i - \gamma T_{,i} = 0 \quad , \quad i,k=1,2,3 \quad (4.12)$$

Desprezando-se a influência das forças de volume em comparação com as tensões devidas ao campo de temperatura e forças de contato a equação (4.12) reduz-se a:

$$\mu u_{i,kk} + (\lambda + \mu) u_{k,ki} - \gamma T_{,i} = 0 \quad , \quad i,k=1,2,3 \quad (4.13)$$

No caso de simetria axial e não havendo deslocamento na direção longitudinal z , a equação (4.13) reduz-se a:

$$\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial r} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha_t \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad (4.14)$$

No problema de um cilindro circular infinito sujeito a um campo axissimétrico de temperatura os únicos deslocamentos a considerar serão os na direção radial.

A determinação deste campo de deslocamentos será feita através da integração da equação (4.14).

A equação (4.14) pode ser escrita de outra forma:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} - mT \right] = 0 \quad (4.15)$$

onde:

$$m = \frac{1+\nu}{1-\nu} a_t \quad (4.16)$$

O campo de deslocamentos radiais é função de r e t .

Integrando (4.15) em relação a r ter-se-á:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} - mT = C(t) \quad (4.17)$$

Onde $C(t)$ é uma função a determinar.

Reescrevendo (4.17):

$$\frac{\partial}{\partial r} (r u_r) = C(t) r + m T r \quad (4.18)$$

Integrando (4.18) em relação a r :

$$r u_r = C(t) \frac{r^2}{2} + m \int T r dr + B(t) \quad (4.19)$$

Onde $B(t)$ será outra função a determinar.

Dividindo por r ambos os membros de (4.19) e definindo $A(t) = \frac{1}{2} C(t)$:

$$u_r(r,t) = A(t) r + B(t) r^{-1} + m r^{-1} \int T(r,t) r dr \quad (4.20)$$

Tem-se então a solução dos deslocamentos radiais em função do campo de temperaturas $T(r,t)$.

As funções $A(t)$ e $B(t)$ serão obtidas a partir das condições de contorno impostas ao problema.

4.3. Campo de Tensões no Acoplamento de dois Cilindros Circulares Concêntricos de Materiais Diferentes

Sejam dois cilindros circulares de comprimento infinito, um maciço de raio a e outro oco de raios a_0 e b interno e externo respectivamente em seus estados naturais à temperatura ambiente. A partir de um determinado instante e durante um intervalo de tempo t_0 é aplicado sobre o cilindro oco um transiente de temperatura, o qual gera um transiente de deslocamentos radiais. Findo este intervalo de tempo o campo de deslocamentos é tal que o deslocamento do raio interno do cilindro oco é igual à diferença $a - a_0$. Neste instante efetua-se o acoplamento mecânico entre os cilindros. Este acoplamento realiza-se portanto sem esforço e sem folga.

A partir do instante do acoplamento, que será tomado como origem dos tempos, desenvolver-se-á um transiente de tensões e deslocamentos consequentes do transiente de temperatura existente e da interação mecânica entre as duas regiões do novo cilindro composto.

Trata-se evidentemente de um problema axissimétrico com estado plano de deformações. A expressão (4.20) fornece a solução do campo de deslocamentos radiais para cada uma das regiões:

$$u_{r_1}(r,t) = A_1(t)r + B_1(t)r^{-1} + m r^{-1} \int_0^r x T_1(x,t) dx, \quad 0 \leq r \leq a \quad (4.21)$$

$$u_{r_2}(r,t) = A_2(t)r + B_2(t)r^{-1} + m r^{-1} \int_{a_0}^r x T_2(x,t) dx, \quad a \leq r \leq b$$

Onde $T_1(x,t)$ e $T_2(x,t)$ são os campos de temperatura, referida à ambiente, nas regiões I e II interna e externa res -

pectivamente (FIG.3.b).

Como a região I contém a origem deve-se ter, necessariamente:

$$B_1(t) = 0$$

E as expressões (4.21) reduzem-se então a:

$$u_{r_1}(r,t) = A_1(t)r + m_1 r^{-1} \int_0^r x T_1(x,t) dx \quad , \quad a \leq r \leq a \quad (4.22)$$

$$u_{r_2}(r,t) = A_2(t)r + B_2(t)r^{-1} + m_2 r^{-1} \int_{a_0}^r x T_2(x,t) dx \quad , \quad a \leq r \leq b$$

Substituindo (4.22) em (4.8) obtêm-se as expressões dos componentes do tensor tensão nas duas regiões:

Tensões radiais:

$$\sigma_{r_1}(r,t) = 2 \left[(\lambda_1 + \mu_1) A_1(t) - \mu_1 m_1 r^{-2} \int_0^r x T_1(x,t) dx \right] \quad ; \quad 0 \leq r \leq a \quad (4.23)$$

$$\sigma_{r_2}^r(r,t) = 2 \left[(\lambda_2 + \mu_2) A_2(t) - \mu_2 B_2(t) r^{-2} - \mu_2 m_2 r^{-2} \int_{a_0}^r x T_2(x,t) dx \right] \quad , \quad a \leq r \leq b$$

Tensões tangenciais:

$$\sigma_{\theta_1}(r,t) = 2 \left[(\lambda_1 + \mu_1) A_1(t) + \mu_1 m_1 r^{-2} \int_0^r x T_1(x,t) dx - \mu_1 m_1 T_1(r,t) \right] \quad , \quad , \quad 0 \leq r \leq a \quad (4.24)$$

$$\sigma_{\theta_2}(r,t) = 2 \left[(\lambda_2 + \mu_2) A_2(t) + \mu_2 B_2(t) r^{-2} + \mu_2 m_2 r^{-2} \int_{a_0}^r x \cdot T_2(x,t) dx - \mu_2 m_2 T_2(r,t) \right] \quad , \quad a \leq r \leq b$$

Tensões longitudinais:

$$\begin{aligned}\sigma_{z_1}(r,t) &= 2\lambda_1 A_1(t) - \mu_1 m_1 T_1(r,t) \quad , \quad 0 \leq r \leq a \\ \sigma_{z_2}(r,t) &= 2\lambda_2 A_2(t) - \mu_2 m_2 T_2(r,t) \quad , \quad a \leq r \leq b\end{aligned}\tag{4.25}$$

Restam, a determinar, as funções $A_1(t)$, $A_2(t)$ e $B_2(t)$.

As condições de contorno que regem o problema fornecem as equações necessárias ao cálculo dessas funções.

Primeira condição de contorno: A superfície externa do cilindro oco permanece livre de tensões normais:

$$\sigma_{r_2}(b,t) = 0\tag{4.26}$$

Segunda condição de contorno: Os deslocamentos na interface devem ser iguais:

$$a + u_{r_1}(a,t) = a_0 + u_{r_2}(a_0,t)\tag{4.27}$$

Terceira condição de contorno: As tensões normais na interface devem ser iguais:

$$\sigma_{r_1}(a,t) = \sigma_{r_2}(a_0,t)\tag{4.28}$$

Substituindo (4.23) em (4.26) obtêm-se:

$$(\lambda_2 + \mu_2)A_2(t) - \frac{\mu_2}{b^2} B_2(t) = \frac{\mu_2}{b^2} m_2 \int_{a_0}^b x T_2(x,t) dx\tag{4.29}$$

Substituindo (4.22) em (4.27) obtêm-se:

$$a A_1(t) - a_0 A_2(t) - \frac{1}{a_0} B_2(t) = - \frac{m_1}{a} \int_0^a x T_1(x,t) dx - (a - a_0)\tag{4.30}$$

Substituindo (4.23) em (4.28) obtêm-se:

$$(\lambda_1 + \mu_1)A_1(t) - (\lambda_2 + \mu_2)A_2(t) + \frac{\mu_2}{a_0^2} B_2(t) = \frac{\mu_1}{a^2} m_1 \int_0^a x T_1(x, t) dx \quad (4.31)$$

Supondo pequenos deslocamentos a diferença $\delta = (a - a_0)$ será suficientemente pequena para que possamos fazer a aproximação:

$$\frac{a}{a_0} \cong 1$$

O termo $(a - a_0)$ da equação (4.30) não será desprezado por ser da mesma ordem de grandeza dos demais.

As equações (4.29), (4.30) e (4.31) podem então ser simplificadas fornecendo um sistema de três equações lineares em $A_1(t)$, $A_2(t)$ e $B_2(t)$:

$$\begin{aligned} (\lambda_2 + \mu_2)A_2(t) - \frac{\mu_2}{b^2} B_2(t) &= \frac{\mu_2}{b^2} m_2 \int_{a_0}^b x T_2(x, t) dx \\ A_1(t) - A_2(t) - \frac{1}{a^2} B_2(t) &= - \frac{m_1}{a^2} \int_0^a x T_1(x, t) dx - \frac{a - a_0}{a} \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$(\lambda_1 + \mu_1)A_1(t) - (\lambda_2 + \mu_2)A_2(t) + \frac{\mu_2}{a^2} B_2(t) = \frac{\mu_1}{a^2} m_1 \int_0^a x T_1(x, t) dx$$

A solução do sistema (4.32) fornece então as expressões de $A_1(t)$, $A_2(t)$ e $B_2(t)$:

$$\begin{aligned} A_1(t) = \frac{1}{\text{DEN}} & \left[\frac{1}{a} \mu_2 (\lambda_2 + \mu_2) (b^2 - a^2) (a_0 - a) + \frac{1}{a^2} \left[\mu_1 (a^2 \mu_2 + b^2 (\lambda_2 + \mu_2)) - \mu_2 (\lambda_2 + \mu_2) (b^2 - a^2) \right] m_1 \int_0^a x T_1^r(x, t) dx + \mu_2 (\lambda_2 + 2\mu_2) \cdot \right. \\ & \left. m_2 \int_{a_0}^b x T_2(x, t) dx \right] \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$A_2(t) = \frac{1}{\text{DEN}} \left[a\mu_2(\lambda_1 + \mu_1)(a - a_0) + \mu_2(\lambda_1 + 2\mu_1)m_1 \int_0^a x T_1(x, t) dx + \right. \\ \left. + \mu_2(\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2)m_2 \int_{a_0}^b x T_2(x, t) dx \right] \quad (4.34)$$

$$B_2(t) = \frac{1}{\text{DEN}} \left[ab^2(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)(a - a_0) + b^2(\lambda_2 + \mu_2)(\lambda_2 + 2\mu_1) \cdot \right. \\ \left. \cdot m_1 \int_0^a x T_1(x, t) dx + a^2\mu_2(\lambda_2 + \mu_2 - \lambda_1 - \mu_1)m_2 \int_{a_0}^b x T_2(x, t) dx \right] \quad (4.35)$$

onde:

$$\text{DEN} = (\lambda_1 + \mu_1) \left[a^2\mu_2 + b^2(\lambda_2 + \mu_2) \right] + \mu_2(\lambda_2 + \mu_2)(b^2 - a^2) \quad (4.36)$$

Hã que se considerar ainda as condições iniciais do problema:

Primeira condição inicial: O acoplamento ẽ realizado sem esforço:

$$\sigma_{r_1}(a, 0) = \sigma_{r_2}(a_0, 0) = 0 \quad (4.37)$$

Segunda condição inicial: O acoplamento ẽ realizado sem folga:

$$a = a_0 + u_{r_2}(a_0, 0) \quad (4.38)$$

Substituindo-se (4.23) e (4.33) em (4.37), lembrando-se que, no instante do acoplamento, o cilindro maciço estã a temperatura ambiente, ou seja:

$$T_1(r, 0) = 0$$

obtêm-se:

$$a - a_0 = \frac{a(\lambda_2 + 2\mu_2)}{(b^2 - a^2)(\lambda_2 + \mu_2)} m_2 \int_{a_0}^b x T_2(x, 0) dx \quad (4.39)$$

A expressão (4.39) fornece um dado de construção, ou seja, a diferença inicial entre os raios dos dois cilindros necessária para compensar exatamente a dilatação do cilindro oco antes do acoplamento.

Substituindo (4.22), (4.34), (4.35) e (4.39) na equação de condição inicial (4.38) esta fica identicamente satisfeita.

Fazendo-se $\lambda_1 = \lambda_2$, $\mu_1 = \mu_2$ e $m_1 = m_2$ nas expressões de $A_1(t)$, $A_2(t)$ e $B_2(t)$ obtêm-se o valor dessas funções para o caso particular de mesmo material e o resultado confere com o obtido por A. PORTO³.

As expressões (4.39), (4.33), (4.34), (4.35), (4.36), (4.23), (4.24) e (4.25) fornecem a solução completa do problema. As integrais serão realizadas numericamente e as tensões calculadas com o auxílio de um programa para computador digital (APÊNDICE B).

CAPÍTULO V

ANÁLISE DOS RESULTADOS E CONCLUSÕES

Para o cálculo da evolução ao longo do tempo dos campos de temperatura e tensões em dois cilindros circulares concêntricos acoplados termicamente segundo as expressões estabelecidas nos Capítulos III e IV, foi desenvolvido um programa para computador digital (APÊNDICE B) que fornece esses transientes em função do material de que é constituído cada cilindro, das dimensões dos mesmos e das condições iniciais de aquecimento do cilindro oco.

A aplicação do programa no cálculo dos transientes para diferentes materiais e geometrias permitiu uma avaliação da precisão do método, particularmente no que se refere à convergência da solução do campo de temperatura, assim como suas limitações.

No caso em que o cilindro oco é pré-aquecido internamente (condição inicial 3.5) a solução do campo de temperatura envolve duas expansões em série, uma em m e outra em n , ambas contendo produtos de funções exponenciais e funções de Bessel (3.10). Os parâmetros λ_m , raízes da equação (3.2), crescem monotonamente com m e assumem valores maiores quanto menor for o valor de ζ . ABRAMOWITZ⁹ e PORTO³ apresentam tabelas de raízes da equação (3.2) para vários valores de ζ que evidenciam este comportamento. A série em m da expressão (3.10) demonstrou então convergir mais rapidamente para ζ pequeno. Em qualquer caso no entanto, devido à função exponencial envolvida, a convergência foi muito boa. Para ζ

variando de 1.2 a 3.5 não foram necessários mais do que 2 a 5 termos da série para se obter boa precisão. A expansão em n , que contém a anterior, apresentou um comportamento um pouco mais melindroso. A exponencial presente é função dos autovalores β_n , monotonicamente crescentes, e do tempo t . Para grandes valores de t , a exponencial decresce rapidamente e, em nenhum caso, são necessários mais do que 12 termos da série. Para t pequeno porém, o número de termos necessários cresce acentuadamente. Para $t = 1$ segundo somente a partir de $m = 20$ os termos da sucessão puderam ser desprezados. Torna-se patente portanto a dificuldade de se determinar com precisão o estado termoelástico imediatamente após o acoplamento devido ao incremento no tempo de máquina.

Uma vez obtidos os campos de temperatura a cada instante, os campos de tensões são determinados a partir da integração numérica daqueles segundo as expressões estabelecidas no Capítulo IV. Nenhuma dificuldade computacional relevante, em termos de precisão, apresentou-se neste cálculo.

A evolução dos campos de temperatura e tensões será evidentemente função dos materiais dos dois cilindros e suas dimensões. O comportamento geral do processo pode, no entanto, ser analisado a partir de um exemplo típico.

As figuras que se seguem referem-se ao acoplamento de uma luva (cilindro oco) de bronze a um eixo de aço (cilindro maciço) para $\zeta = 1.2$. As Figuras de (5.a) a (5.h) representam os transientes de temperatura (5.a), tensão radial (5.b), tensão tangencial (5.c e 5.d), tensão longitudinal (5.e e 5.f) e tensão octaédrica (5.g e 5.h) para o caso da condição inicial de aquecimento in

terno no cilindro oco (CASO 1). As Figuras de (5.i) a (5.p) representam os transientes correspondentes para o caso da condição inicial de aquecimento uniforme no cilindro oco (CASO 2). Em ambos os casos a temperatura de aquecimento f_0 é a mesma. Todas as Figuras representam o transiente a partir de $t = 5$ segundos após o acoplamento, onde já se verifica boa convergência ao longo de todo o cilindro, até $t = 1800$ segundos (1/2 hora), instante a partir do qual as funções já praticamente se estabilizaram.

A Figura (5.a) representa o transiente de temperatura em ambos os cilindros para o CASO 1. No início da interação o cilindro interno ($0 \leq r \leq a$) está uniformemente frio com exceção da zona próxima à interface ($r = a$) onde ocorre um alto gradiente de temperatura devido à interação com o cilindro externo (oco).

No instante do acoplamento ($t = 0$), o cilindro externo possui um campo não uniforme de temperatura cujo máximo está na face interna ($r = a$), onde se fez o aquecimento. Após iniciada a interação o máximo desloca-se para a direita, como pode se constatar observando a curva de temperatura para $t = 5$ segundos, pois surgem gradientes de temperatura nas duas direções uma vez que o cilindro externo cede calor para o interno e para o ambiente. Pode-se observar ainda, nesta mesma curva, que o máximo já é bem inferior ao inicial (cerca de 30%), devido à rapidez de propagação do fluxo térmico. Em qualquer instante o campo de temperaturas é contínuo na interface, o que é garantido pela condição de contorno (2.12b), mas a inclinação da curva à direita e à esquerda da interface é diferente porque, em se tratando de materiais diferentes, a condição de contorno (2.12c) exige que as derivadas parciais da fun

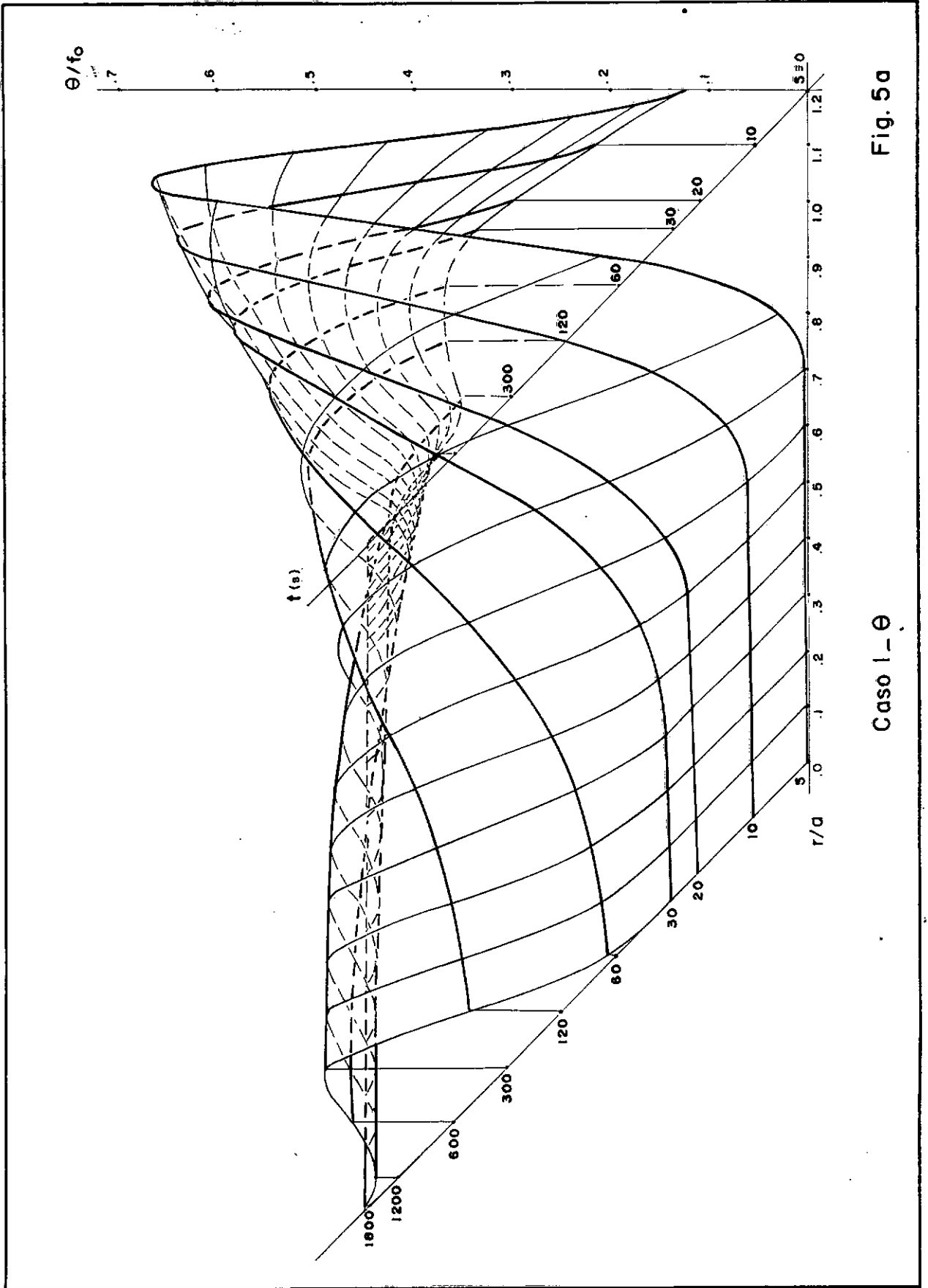


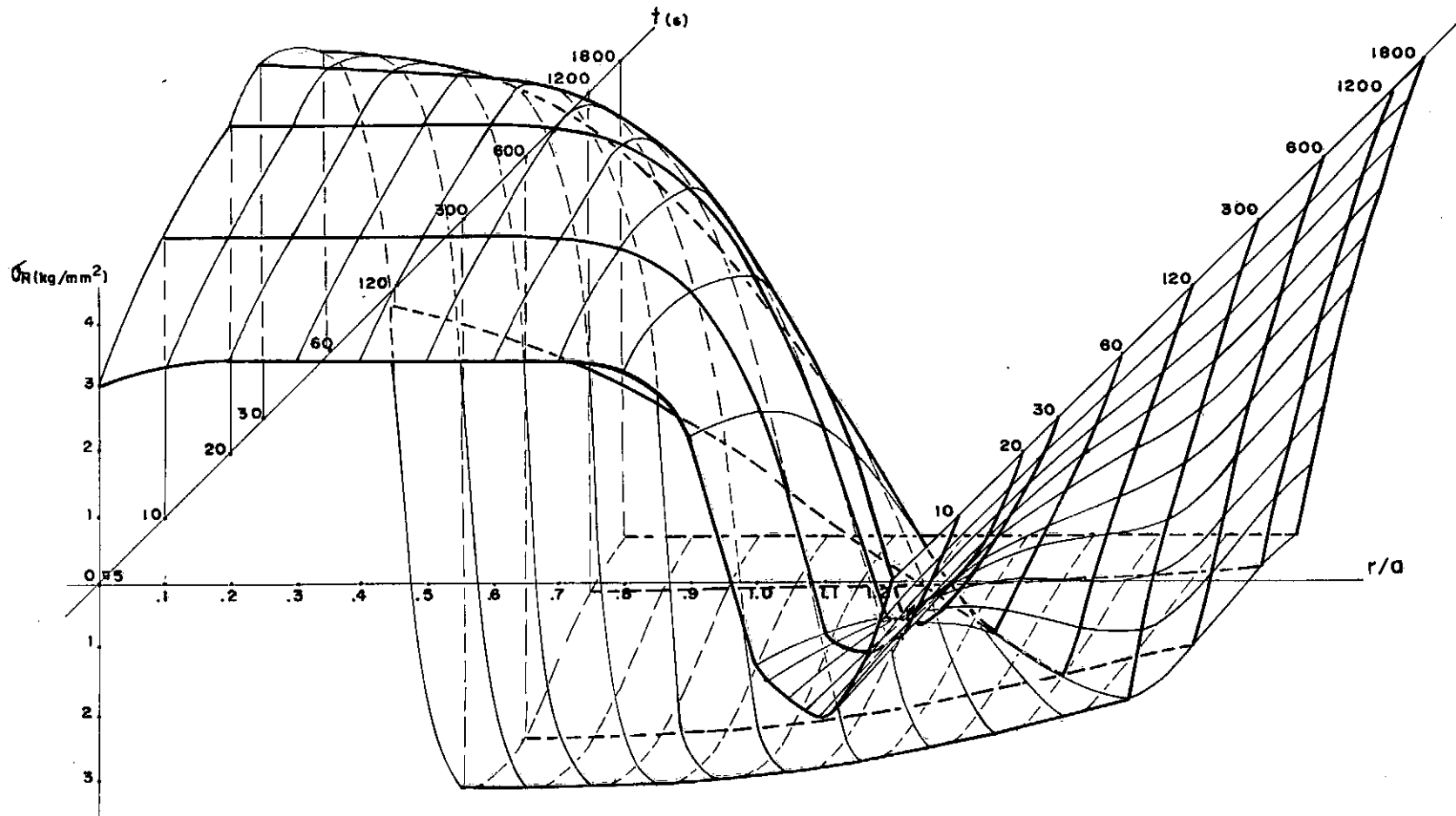
Fig. 5a

Caso I- θ

ção à direita e à esquerda também o sejam.

No início da interação, todo o potencial térmico está concentrado no cilindro externo, próximo à interface. Ao longo do tempo, este potencial é distribuído para o interior do cilindro e para a superfície externa, na qual parte é perdido por convecção. Devido à simetria, não há fluxo térmico em $r = 0$ e tudo acontece como se houvesse um isolamento nesta abcissa. Em consequência, ter-se-á nesse ponto um armazenamento de energia térmica. Era de se esperar portanto a inversão, em algum instante, do fluxo térmico através da interface para que possa escoar, pela face externa do cilindro ($r = b$), esta energia. Pode-se verificar na Figura a ocorrência desta inversão entre 2 e 5 minutos de interação. A observação cuidadosa das linhas de r constante indica a evolução da temperatura com o tempo, em cada ponto dos cilindros. Pode-se notar que após meia hora de interação a temperatura é praticamente nula em toda a extensão dos dois cilindros tendo sido alcançada então a estabilização do processo.

A Figura (5.b) representa o transiente de tensões radiais nos dois cilindros para a mesma condição inicial. No começo da interação o cilindro interno está tracionado de maneira aproximadamente uniforme em suas fibras internas enquanto suas fibras externas estão comprimidas. Existe uma linha neutra próxima à interface. Ao longo do tempo este comportamento se acentua até aproximadamente um minuto de interação. A partir daí a tensão decresce alcançando o cilindro interno um estado quase uniforme de compressão, na qual se estabiliza. O campo de temperatura correspondente fornece a explicação do fenômeno. No começo da interação tem-se um alto



Caso I - σ_R

Fig. 5b

gradiente de temperatura nas fibras externas do cilindro interno enquanto as fibras internas estão uniformemente frias. A tendência das fibras externas será portanto dilatar-se mais do que as internas, tracionando radialmente as mesmas. O acoplamento com o cilindro oco impede no entanto o deslocamento livre das fibras externas do cilindro maciço, gerando assim o estado de compressão destas fibras. A medida que os gradientes de temperatura se reduzem, as tensões se uniformizam como pode ser claramente observado comparando-se as curvas de temperatura e tensão radial para $t = 5$ segundos e $t = 2$ minutos.

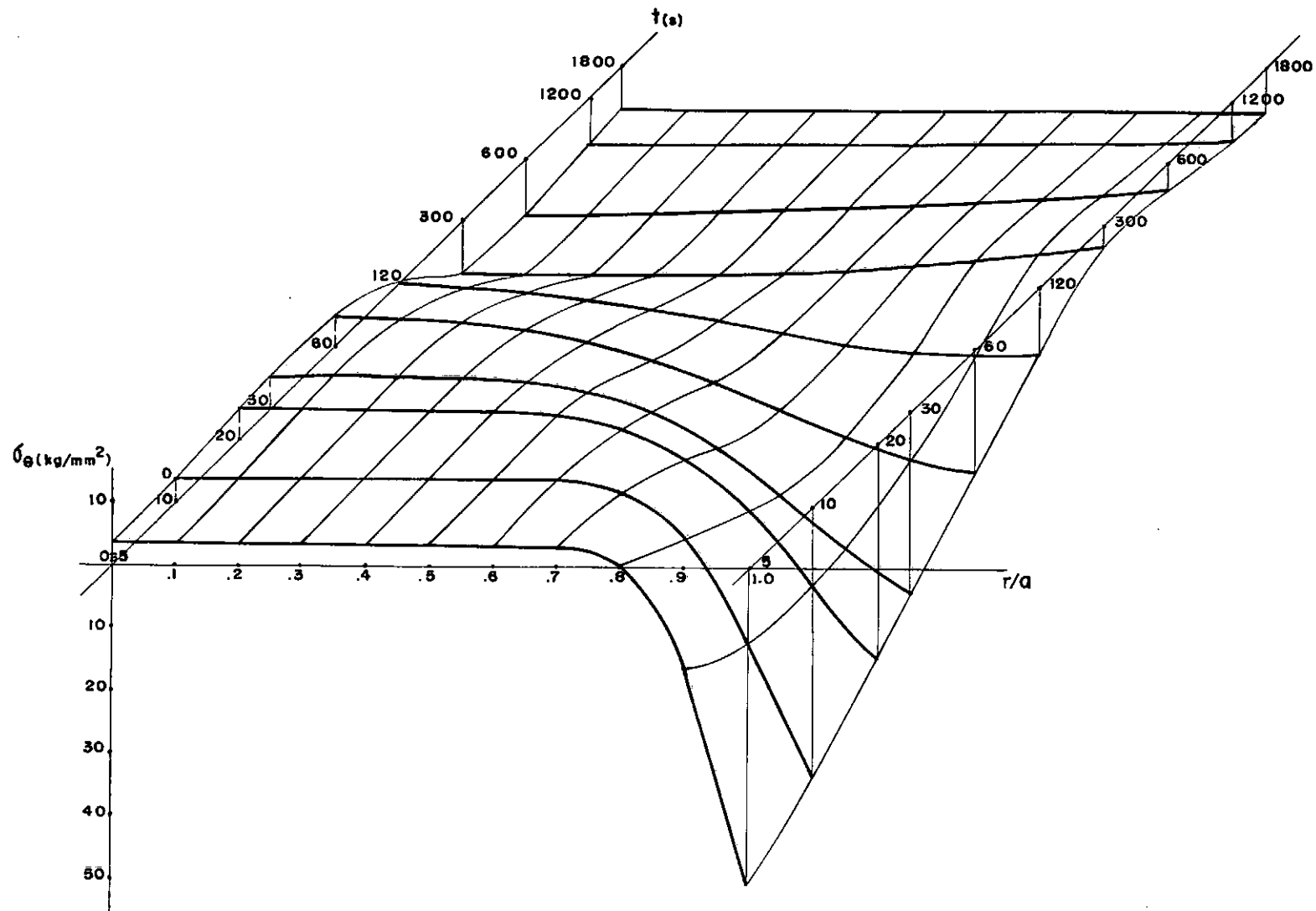
Para melhor compreensão da comportamento do cilindro externo pode-se identificar e separar dois efeitos simultâneos. O campo de tensões, dentro da teoria da elasticidade linear, é obtido pela superposição do campo de tensões devido à dilatação térmica não uniforme e o campo de tensões gerado pela interação mecânica na interface dos cilindros. No início da interação o cilindro externo está sujeito a um alto gradiente de temperatura o qual gera um campo de deslocamentos fortemente não-uniforme, o qual, por sua vez, cria um campo de tensões radiais. A esta altura, este é o efeito dominante uma vez que, como os cilindros são acoplados sem esforço, no começo do transiente o esforço mecânico na interface é pequeno. Ao longo do tempo entretanto, esta tendência se modifica. A temperatura vai se uniformizando e os cilindros vão se resfriando até a estabilização, reduzindo assim gradualmente os efeitos termoelásticos ao passo que o cilindro oco tende a retornar às suas dimensões originais, aumentando substancialmente a pressão mecânica na interface. Após a estabilização da temperatura, o campo de

tensões radiais ao longo dos cilindros é o mesmo campo de tensões compressivas gerado por um acoplamento forçado e a frio entre os cilindros. Observa-se ainda na Figura a plena satisfação das condições de contorno (4.26) e (4.28).

As Figuras (5.c) e (5.d) representam o transiente de tensões tangenciais ao longo dos cilindros interno e externo respectivamente para o CASO 1. Pode-se observar logo a princípio a descontinuidade da superfície na interface, o que de fato acontece pois as tensões tangenciais são diferentes à esquerda e à direita. O comportamento das tensões tangenciais no cilindro interno assemelha-se ao das tensões radiais. O campo de tensões tangenciais é no entanto mais sensível aos gradientes de temperatura como se pode observar comparando os valores das tensões radiais (5.b), e tangenciais (5.c) na zona de altos gradientes de temperatura (5.a). Ao fim da interação térmica o cilindro interno fica sujeito a um campo de tensões tangenciais compressivas como era de se esperar.

O transiente de tensões tangenciais no cilindro externo (5.d) também evolui em consequência de dois efeitos simultâneos de maneira análoga às tensões radiais. Neste caso entretanto a influência da interação mecânica na interface se faz sentir de maneira diversa. O cilindro externo é todo ele tracionado tangencialmente pelo interno que impede o retorno daquele à sua dimensão original.

Da suposição de um estado plano de deformações resulta o surgimento de um campo de tensões longitudinais impedindo os deslocamentos ao longo do eixo dos cilindros. Um elemento de uma



Caso I - σ_e

Fig. 5c

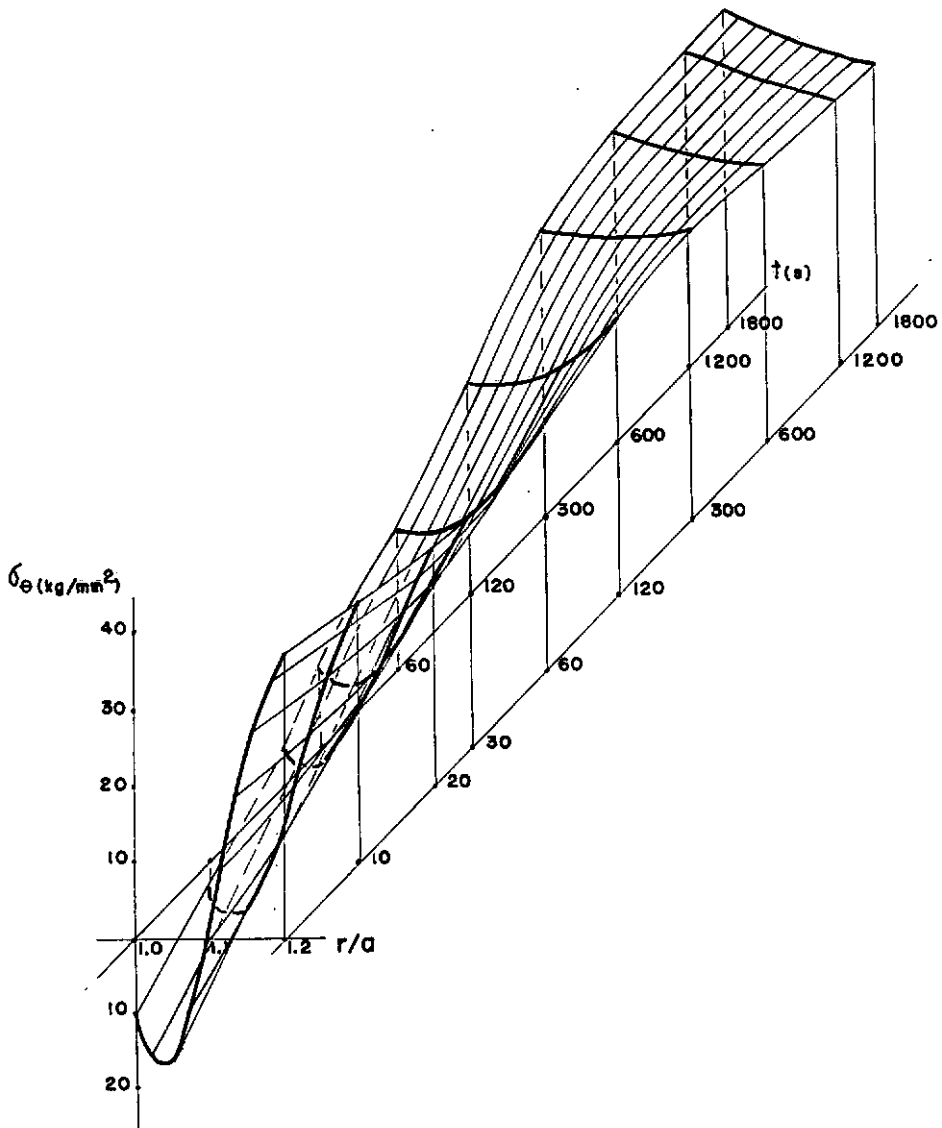
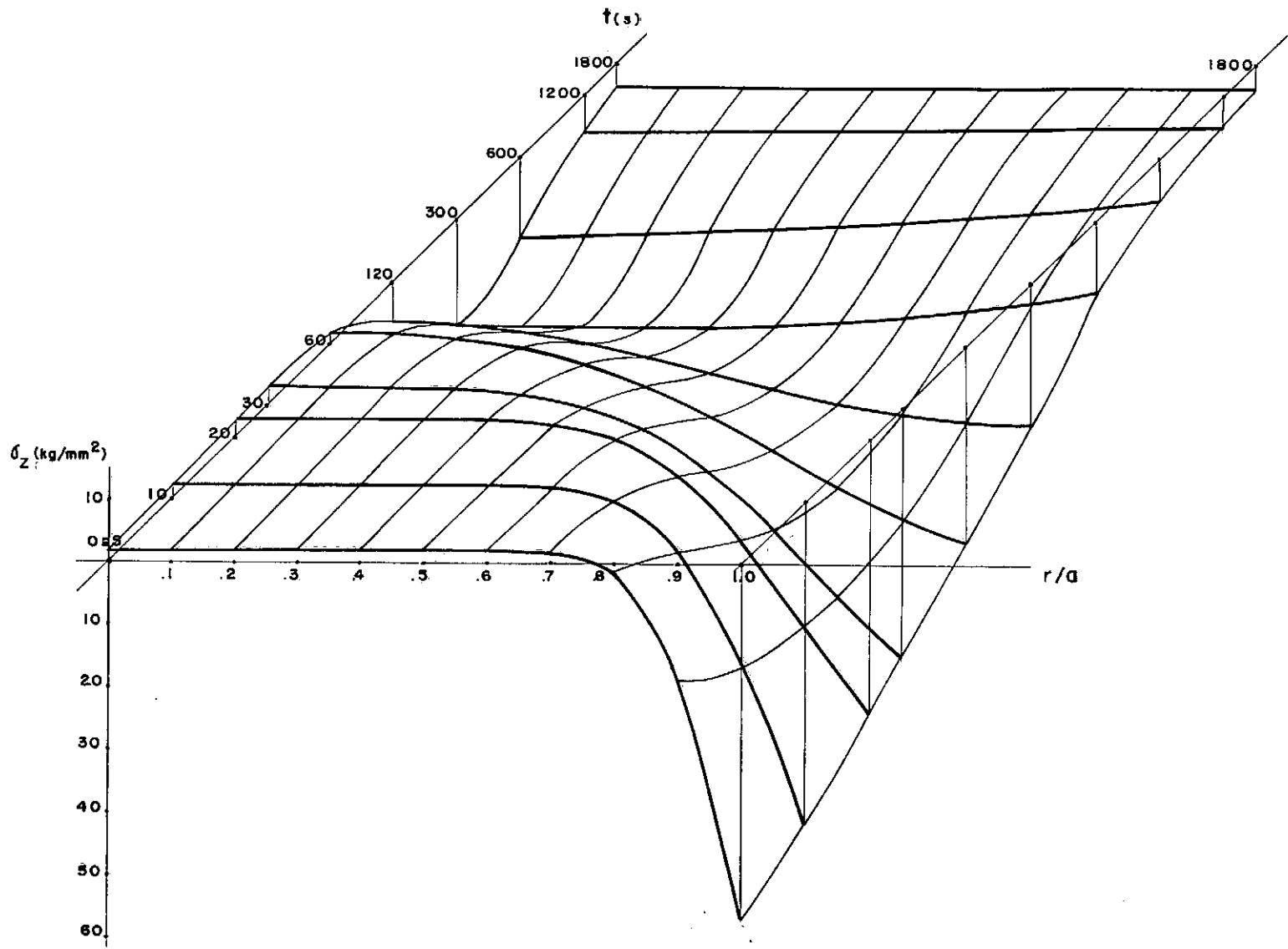
Caso I - σ_e

Fig. 5d

seção que esteja comprimido nesta seção tenderá a se deformar fora dela: É necessário então uma tensão compressiva ortogonal à seção para manter o elemento no seu plano original. Analogamente, um elemento sujeito a trações radiais e tangenciais estará também submetido a trações longitudinais. O comportamento das tensões longitudinais é pois consequente direto dos comportamentos das tensões radiais e tangenciais. As Figuras (5.e) e (5.f), que representam o transiente de tensões longitudinais nos cilindros interno e externo respectivamente, demonstram claramente este fato. Inicialmente desenvolvem-se tensões compressivas altas nos pontos onde ocorrem grandes gradientes de temperatura. No fim do processo, quando só resta a influência da interação mecânica na interface, o cilindro interno permanece uniformemente comprimido e o cilindro externo uniformemente tracionado. Esta uniformidade da tensão longitudinal no cilindro externo é aproximada e decorre do fato dos gradientes de tensão radial e tangencial neste cilindro serem de sinais contrários.

A suposição de um estado plano de deformações é talvez o maior desvio da solução obtida em relação a um fenômeno real. No acoplamento termoelástico de dois cilindros de comprimento finito, se não houverem restrições à dilatação axial, a hipótese de estado plano de deformações não é aplicável e o transiente de tensões longitudinais não corresponderá ao apresentado nas Figuras (5.e) e (5.f).

Observando atentamente as Figuras (5.a), (5.b), (5.c) e (5.e) pode-se constatar que no instante em que ocorre a inversão do gradiente de temperatura, aproximadamente em $t = 5$ minutos, também ocorre a inversão simultânea dos gradientes de tensão radial,



Caso 1. - σ_z

Fig. 5e

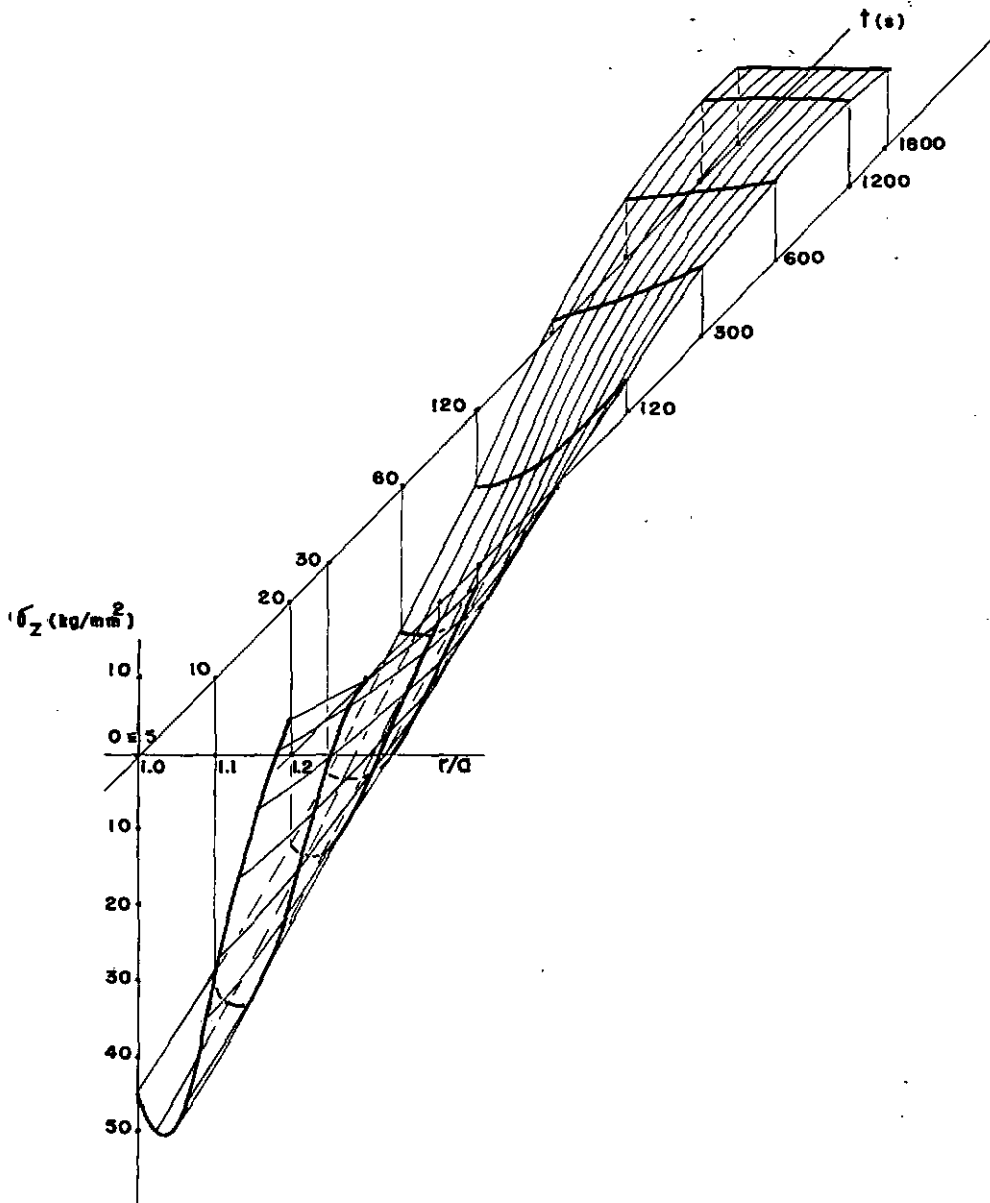
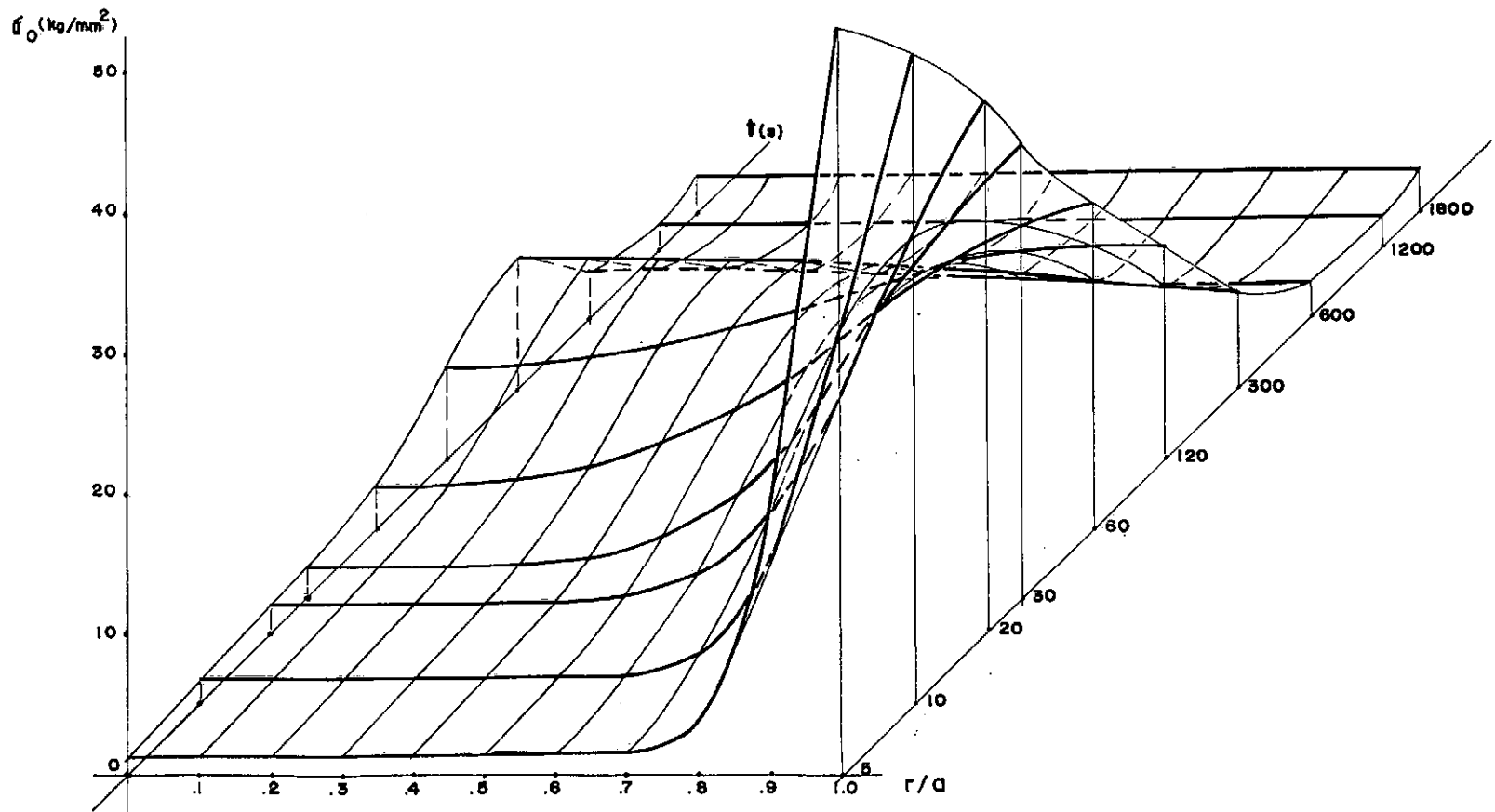
Casol - σ_z

Fig. 5 f

tangencial e longitudinal.

As Figuras (5.g) e (5.h) representam a evolução do campo de tensões octaédricas nos cilindros interno e externo respectivamente para o CASO 1. A observação deste campo de tensões permite uma avaliação inicial, pelo critério de Von-Mises, da ocorrência de plastificação do material durante o processo. No cilindro interno a tensão octaédrica é máxima no início da interação, na interface do acoplamento. Ao longo do transiente esta tensão se reduz até alcançar um valor quase uniforme ao longo do cilindro após a estabilização do processo. No cilindro externo porém o campo de tensões octaédricas assume um comportamento bastante complexo, apresentando máximos relativos em diferentes posições ao longo do transiente (FIG. 5.h). O máximo absoluto de tensão octaédrica no cilindro externo ocorre no começo da interação e próximo ao ponto de temperatura máxima. Posteriormente as tensões decrescem voltando a aumentar, de maneira diversa, no fim da interação. O máximo desloca-se neste período para a interface, onde permanece definitivamente.

Comparando as Figuras (5.g) e (5.h) verifica-se que a máxima tensão no cilindro interno ultrapassa a tensão máxima no cilindro externo. Se entretanto a tensão limite de escoamento do material deste for sensivelmente inferior à do material daquele poderá ocorrer plastificação no cilindro externo. Se a tensão de escoamento (σ_e) for realmente alcançada a distribuição de tensões tornar-se-á ainda mais complexa. O material se plastificará no começo da interação na zona de alta temperatura. Haverá portanto uma porção de material plastificado na qual a tensão será constante e igual à tensão limite de escoamento do material. Este fenômeno provocará



Caso I - σ_0

Fig. 5g

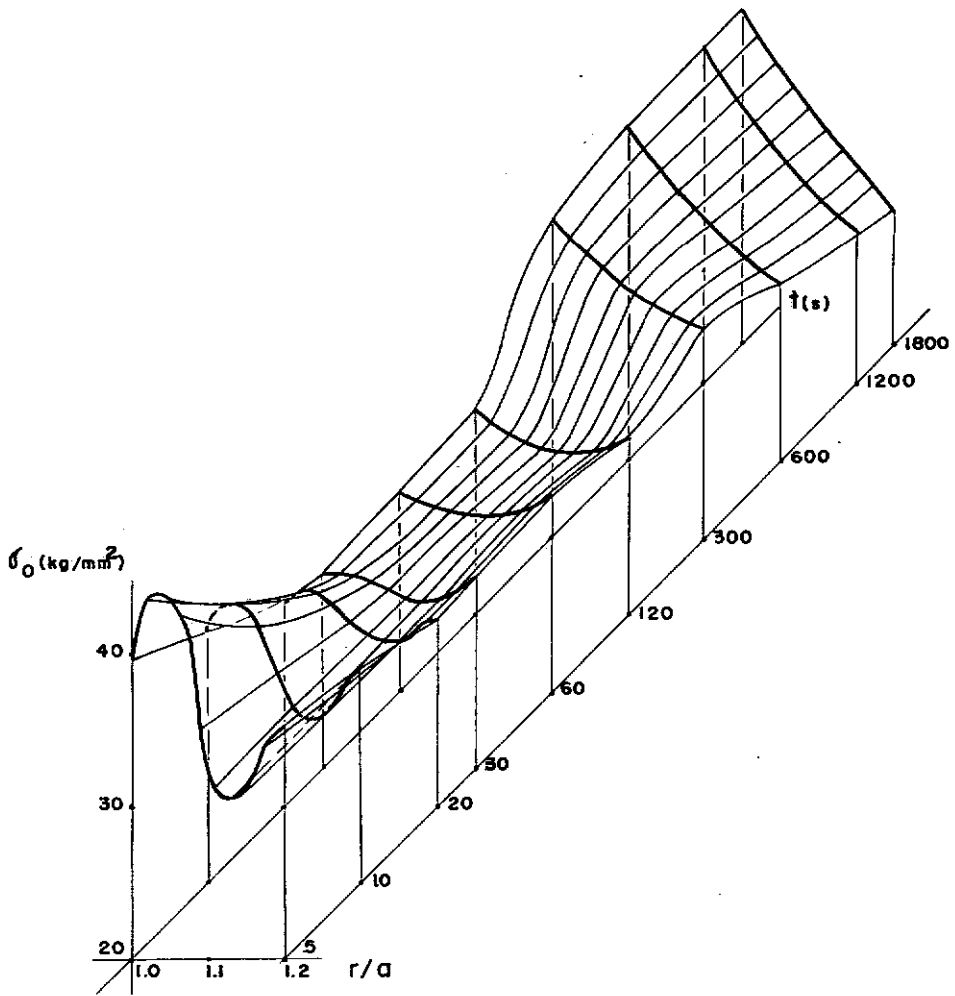
Casol- σ_0

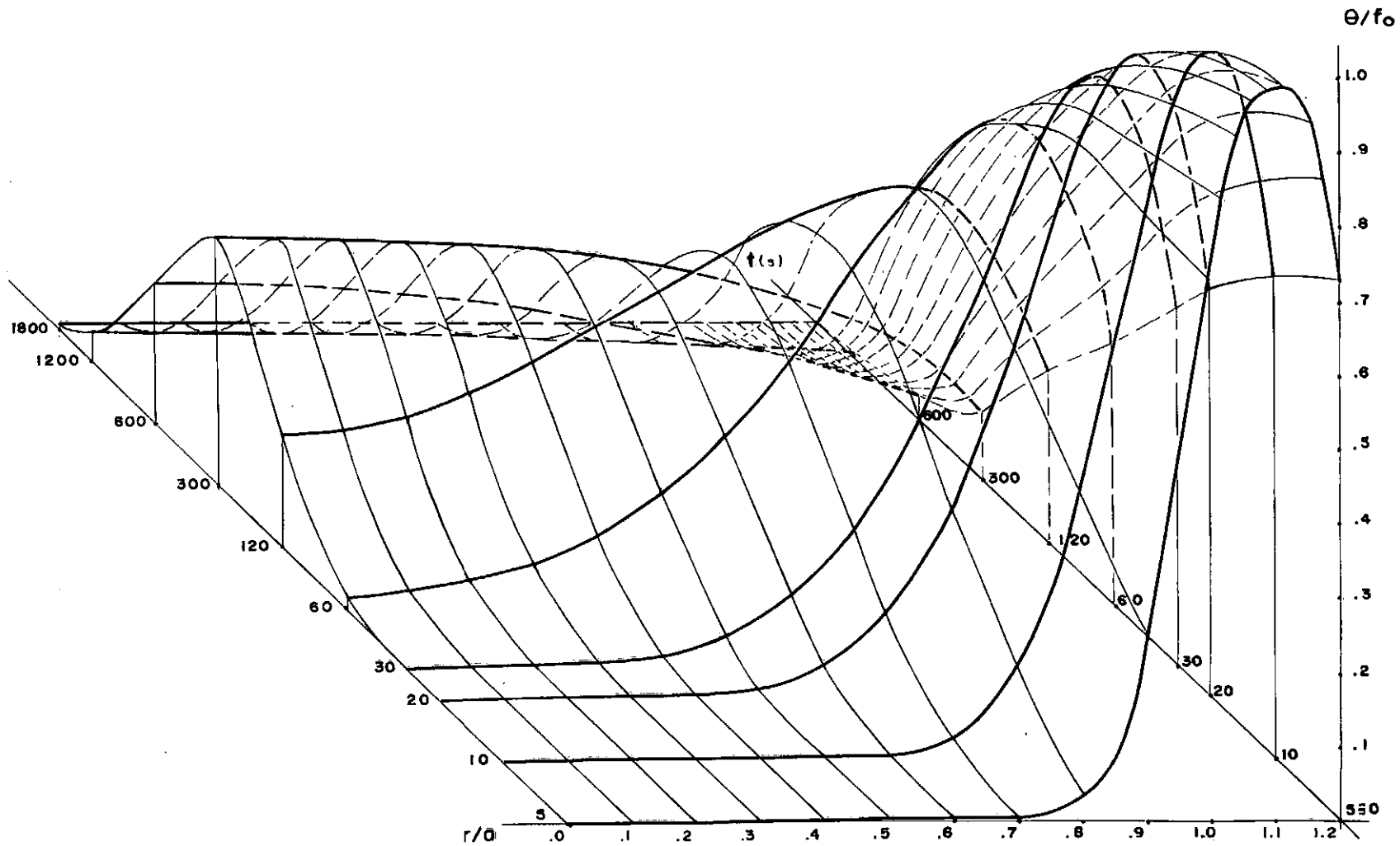
Fig. 5 h

uma redistribuição das tensões em todo o cilindro, alterando o perfil da Figura. Por outro lado, com a redução da temperatura ao longo do tempo, o material poderá retornar ao comportamento elástica se a redução das tensões octaédricas durante o transiente for suficiente em relação a σ_e . Mesmo neste caso porém o cilindro chegará à situação de equilíbrio mais relaxado devido ao escoamento que terá sofrido.

A Figura (5.i) representa o transiente de temperatura ao longo dos dois cilindros para o caso da condição inicial de temperatura uniforme no cilindro oco (CASO 2). Comparando-se as Figuras (5.a) e (5.i) pode-se observar que, no começo da interação, os gradientes de temperatura no segundo caso são menores no cilindro externo e maiores no interno, relativamente no caso anterior. Isto é consequência direta das diferentes condições iniciais. Enquanto no primeiro caso já existe, a priori, um alto gradiente de temperatura no cilindro oco no instante do acoplamento, no segundo caso este gradiente é nulo, estando o cilindro oco uniformemente aquecido. Por outro lado a quantidade de energia térmica armazenado no cilindro oco é maior no segundo caso, o que justifica o maior gradiente de temperatura no cilindro interno.

O comportamento geral dos dois transientes é bastante semelhante. Observa-se contudo que, no segundo caso, as temperaturas envolvidas ao longo de todo o processo são bem maiores apesar da temperatura de aquecimento inicial f_0 ser a mesma para ambas.

Existem duas diferenças básicas no comportamento termoelástico dos cilindros nos dois casos estudados. Em primeiro lu-

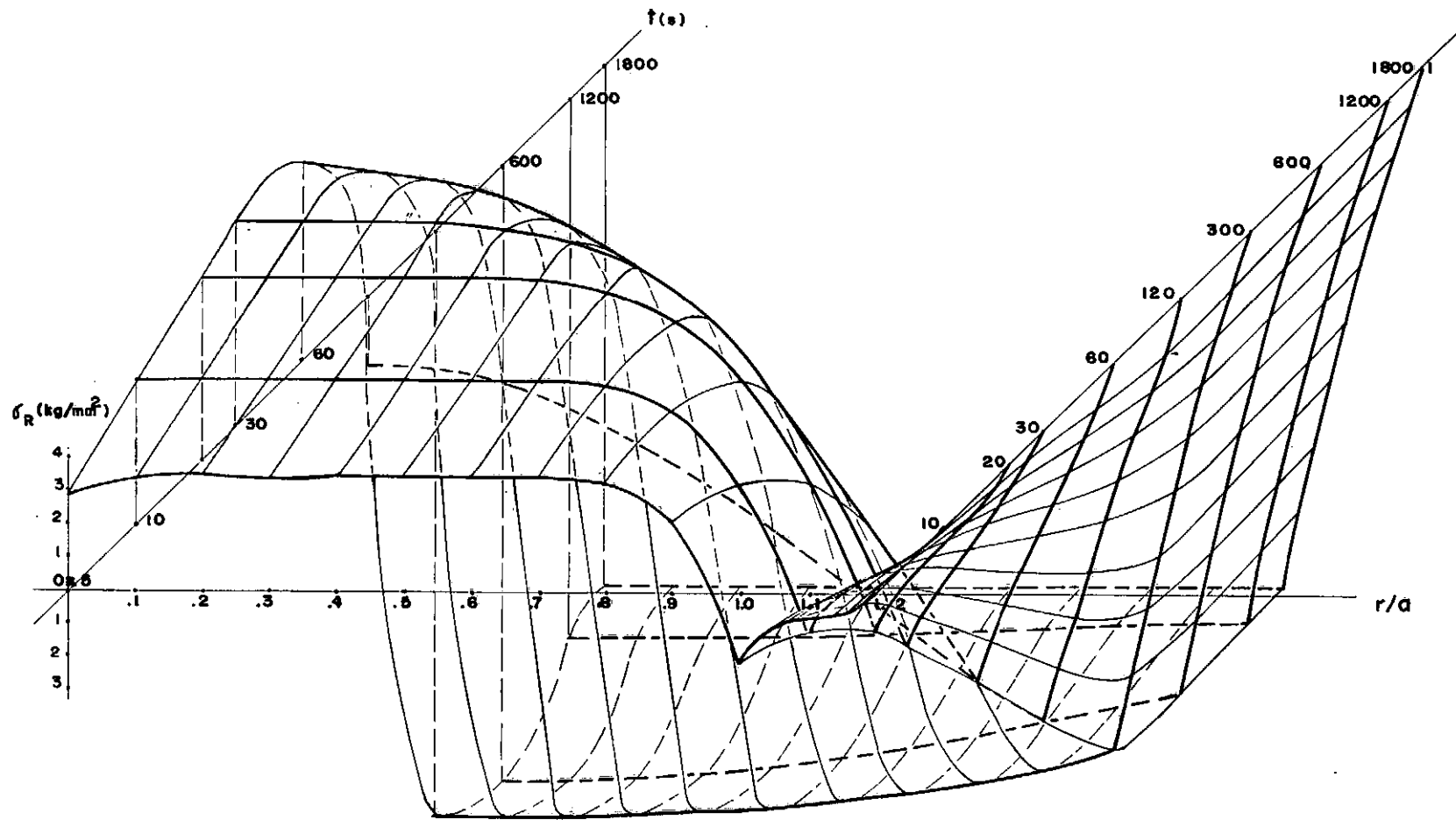


Caso 2 - θ

Fig. 5i

gar o campo de temperatura no cilindro externo, no começo da interação, é mais suave no CASO 2. Como consequência o campo de tensões gerado pelos gradientes de temperatura é menor. Por outro lado, como no instante do acoplamento o cilindro oco está inteira e uniformemente aquecido, o seu campo de deslocamentos é mais acentuado, ou seja, ele está mais dilatado em relação ao seu estado natural. Como o acoplamento é efetuado sem folga, o raio interno inicial do cilindro oco no CASO 2 deve ser menor. Isto por sua vez significa dizer que, durante o transiente e mesmo após a estabilização, o acoplamento mecânico será mais violento e as tensões serão maiores. Conclui-se portanto que a influência do efeito mecânico de contato na interface dos cilindros é maior do que no caso anterior. Isto pode ser observado comparando-se as Figuras (5.j) a (5.n), que representam os transientes de tensões radiais, tangenciais e longitudinais em ambos os cilindros no CASO 2, com as Figuras correspondentes para o CASO 1, (5.b) a (5.h). Pode-se notar ainda, comparando as Figuras (5.l) e (5.h) com as Figuras (5.d) e (5.f) uma diferença quanto à simetria nas curvas de tensão tangencial e longitudinal no começo da interação. Esta diferença de perfil é um reflexo direto da diferença de simetria nos campos de temperatura do cilindro externo nos dois casos no início da interação, quando o efeito termoelástico é o fator dominante.

As Figuras (5.o) e (5.p) representam o transiente de tensões octaédricas nos cilindros interno e externo respectivamente para o CASO 2. Observa-se primeiramente que, relativamente ao CASO 1 as tensões, não só os transientes como as residuais, são maiores. Particularmente no cilindro externo a diferença é bem acentuada.



Caso 2 - σ_R

Fig. 5j

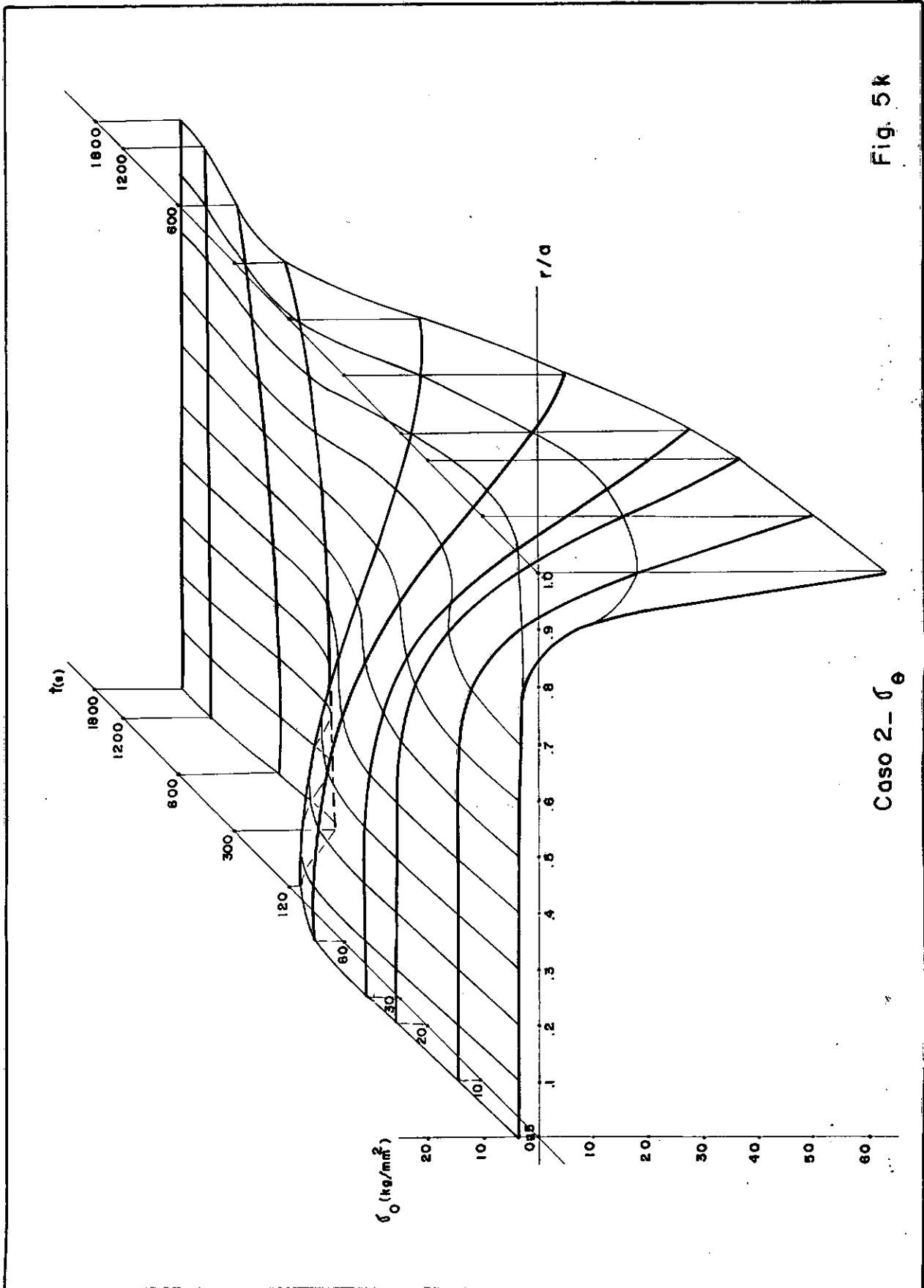


Fig. 5k

Caso 2- σ_e

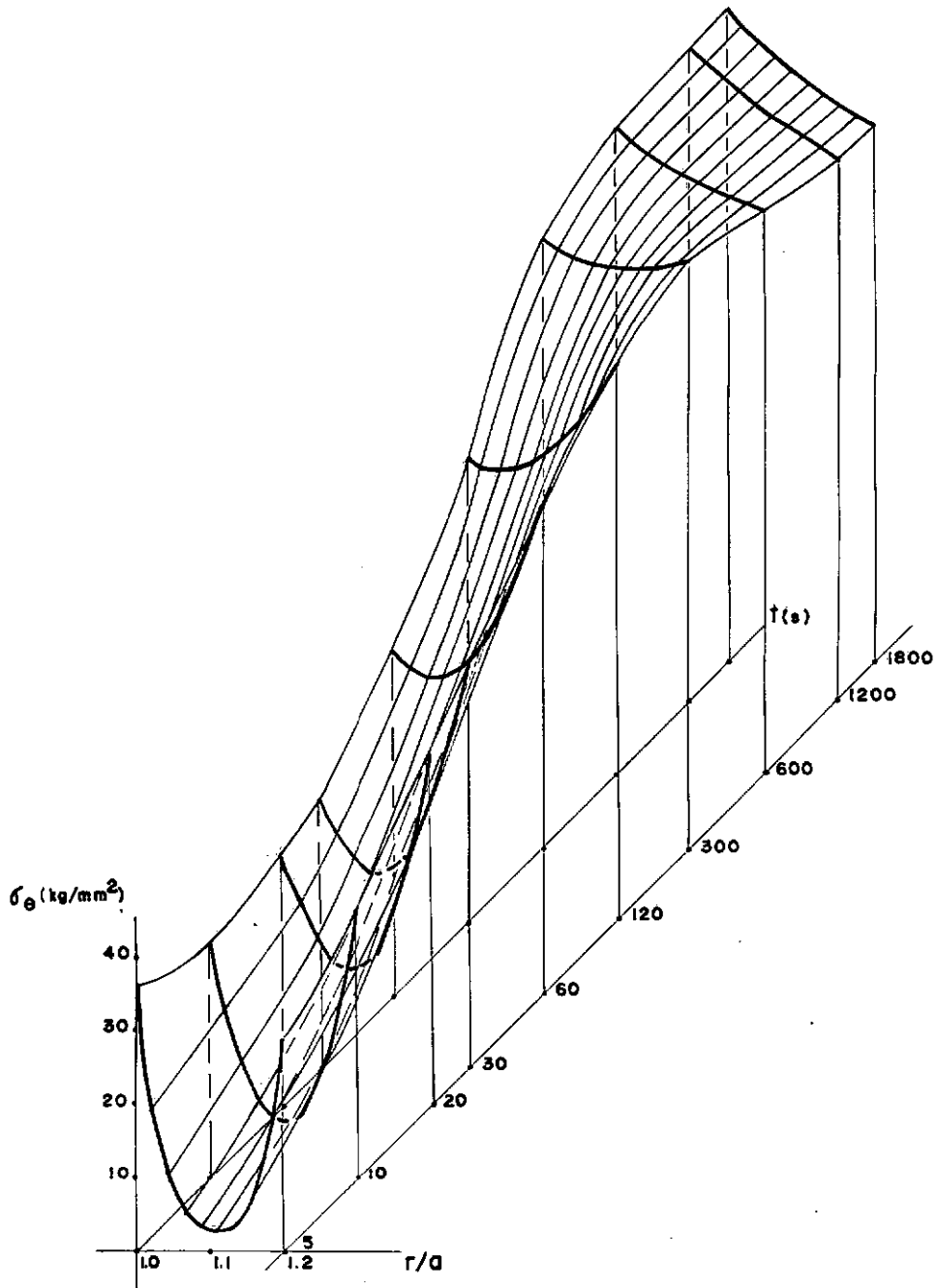
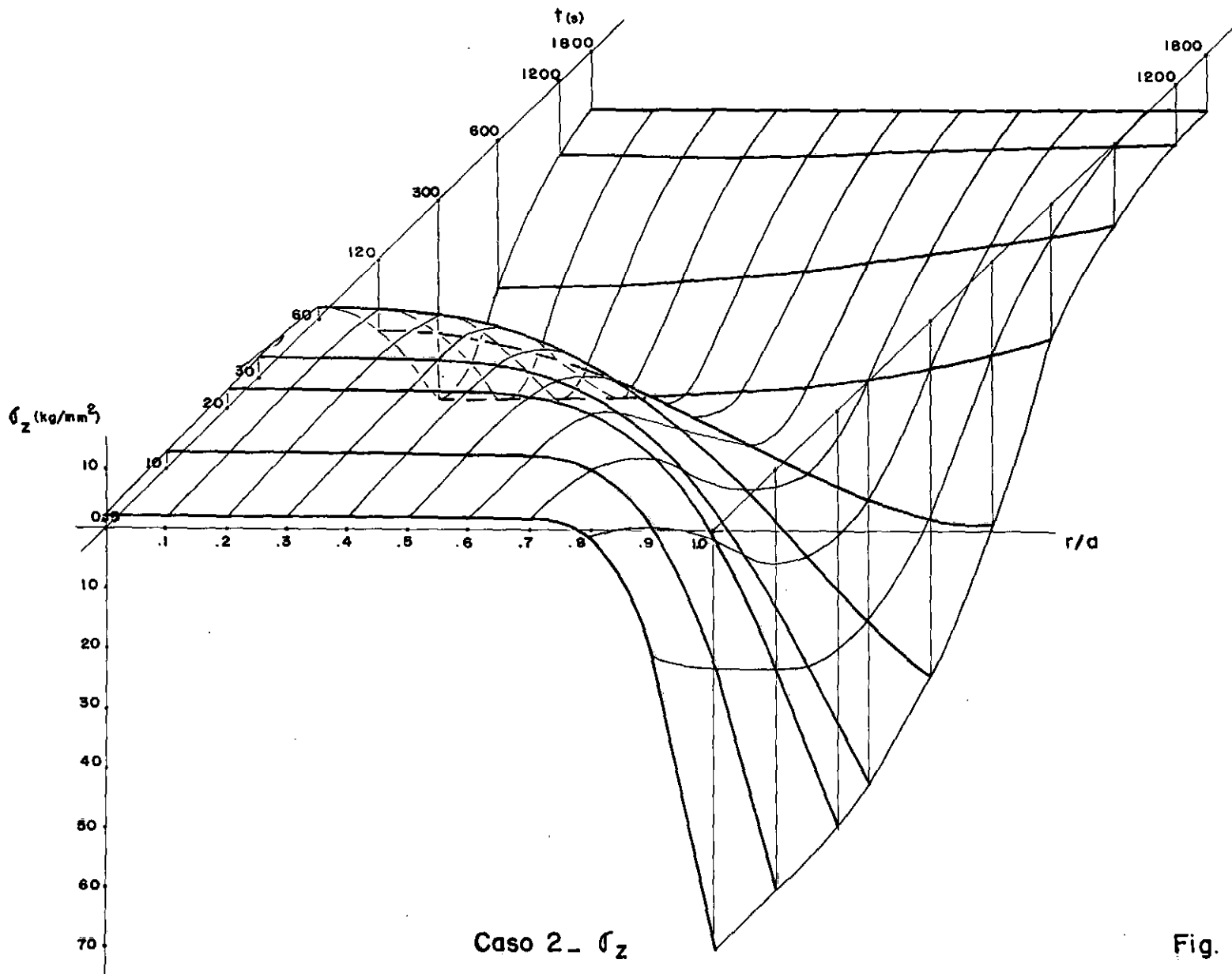
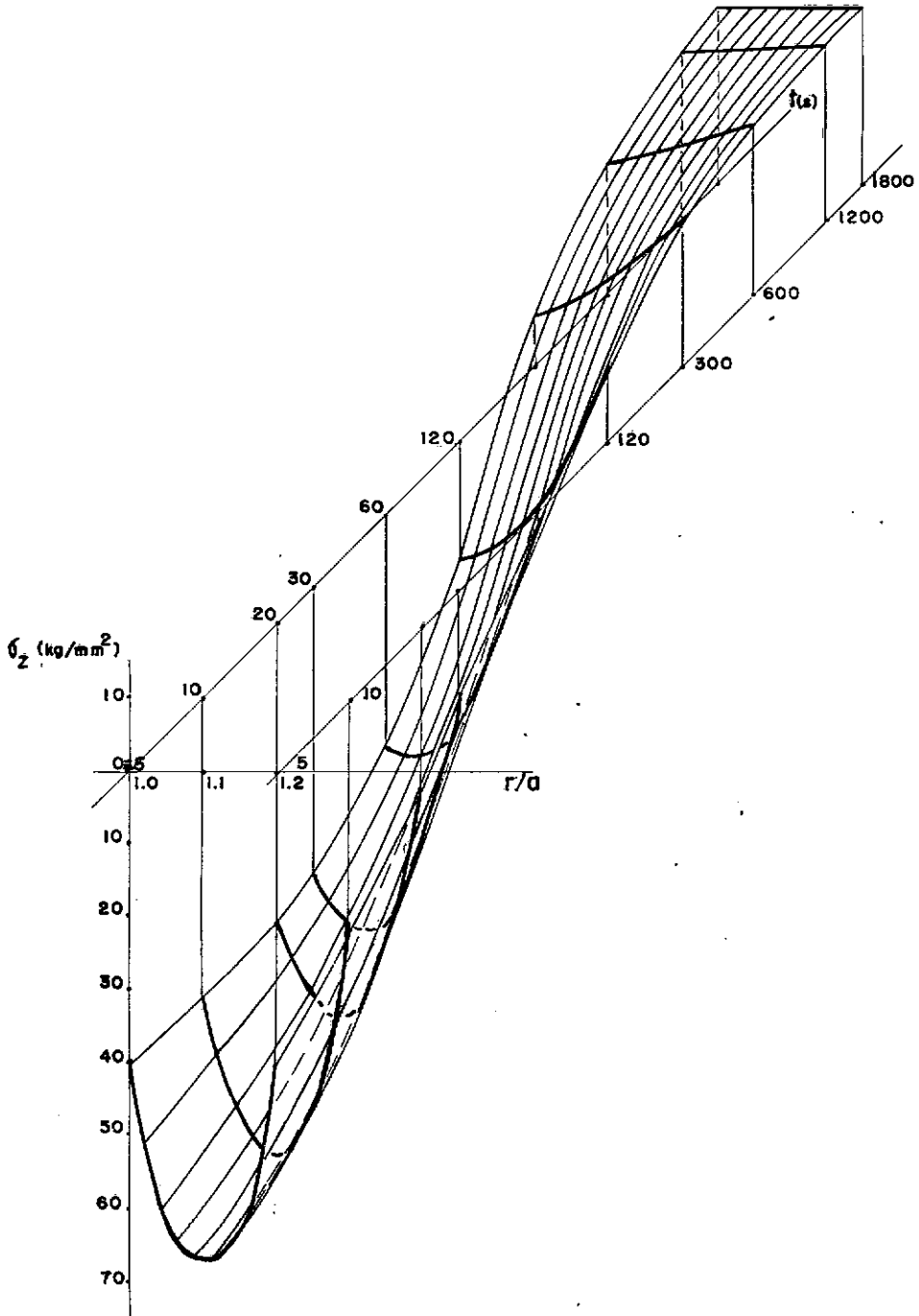
Caso 2- σ_θ

Fig. 51



Caso 2 - σ_z

Fig. 5m



Caso 2- σ_z

Fig. 5n

da. Neste caso o máximo da tensão no início da interação se verifica no cilindro externo, no ponto correspondente à máxima temperatura e ao longo do tempo, desloca-se para a esquerda até atingir a interface. A diferença fundamental entretanto é que o máximo absoluto se verifica no transiente, após aproximadamente 10 minutos de interação. A plastificação do material, se houver, ocorrerá então neste instante, redistribuindo as tensões e relaxando o material a partir daí.

De uma maneira geral, o acoplamento realizado com o cilindro oco uniformemente aquecido apresenta tensões residuais mais acentuadas ao longo de todo o sistema. Particularmente, a pressão normal resultante na interface é cerca de 120% maior, como pode ser observado comparando-se as tensões radiais em $r = a$, ao fim do transiente, nas Figuras (5.b) e (5.j). Por outro lado, comparando-se os máximos de tensão octaédrica constata-se que o máximo de tensão alcançada no CASO 2, durante o transiente, no cilindro externo, é cerca de 100% maior do que o alcançado no CASO 1, no começo do processo.

σ_0 (kg/mm²)

60

50

40

30

20

10

0

t (s)

1800

1200

600

300

120

60

30

20

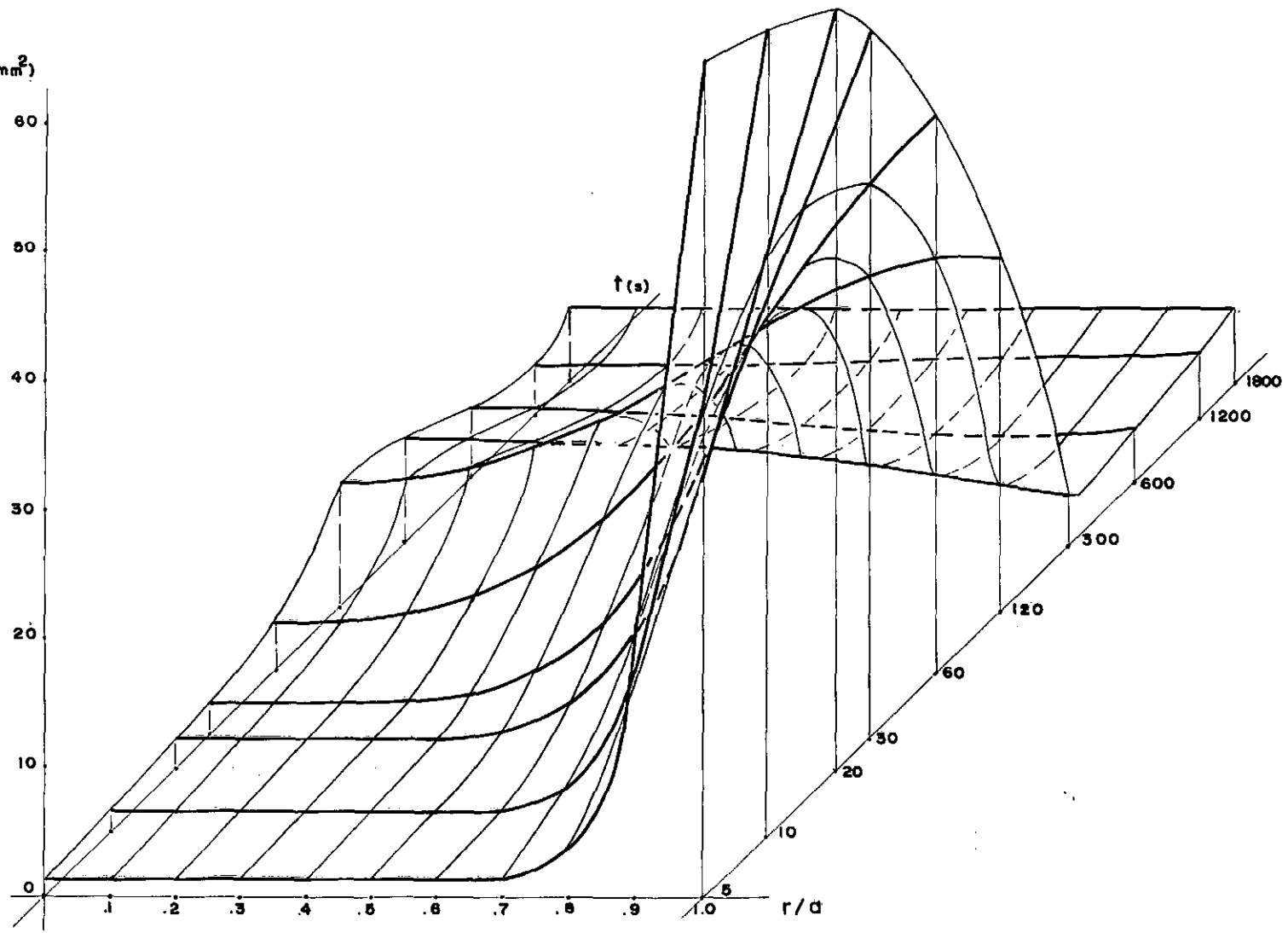
10

5

r/d

Caso 2 - σ_0

Fig. 50



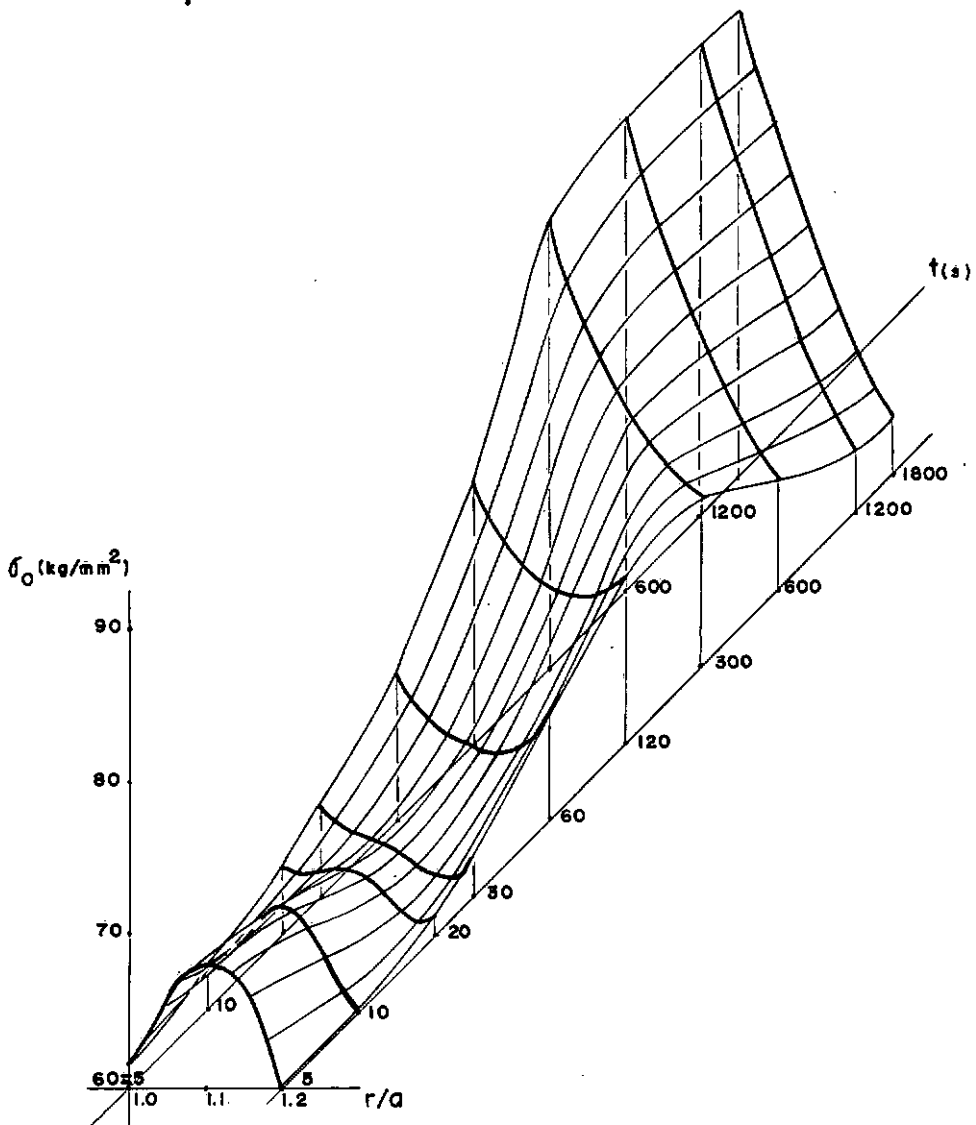
Caso 2 - σ_0

Fig. 5p

CAPÍTULO VI

APLICAÇÕES

O método aqui desenvolvido pode ser aplicado diretamente para o estudo de problemas de fretagem. No processo de fretagem efetua-se o acoplamento a quente de uma luva em um eixo. Após o resfriamento estabelece-se uma pressão de contato que oferece um momento resistente, devido ao atrito seco, que impede movimentos relativos. Ao se fazer um projeto de acoplamento por fretagem busca-se obter o máximo de pressão normal na interface sem que, no transiente, ocorra plastificação do material, fenômeno que, em última análise, é prejudicial ao acoplamento pois, como há relaxamento do material, a pressão de fretagem reduzir-se-á. Quanto a esse aspecto a comparação dos dois casos estudados é bastante útil. Para obter-se a mesma pressão de fretagem a temperatura de aquecimento necessária é menor no caso do aquecimento ser uniforme. Além disso, ainda para a mesma pressão normal na interface, é de se esperar, pelos resultados obtidos, que o máximo de tensão octaédrica seja menor quando o cilindro oco é uniformemente aquecido.

Ainda quanto ao projeto de fretagem um dado de construção deve ser determinado. Trata-se da diferença inicial δ entre os raios dos cilindros que permite, após o pré-aquecimento, o acoplamento sem folga. Este deslocamento é calculado como resultado parcial no programa principal (APÊNDICE B) bastando introduzir um comando de saída para obtê-lo.

Vários aperfeiçoamentos podem ser introduzidos no método desenvolvido para torná-lo ainda mais confiável. Em primeiro lugar a aproximação mais exata, quanto à condução de calor é supor o cilindro interno infinito e o externo finito. Desta maneira ter-se-á que resolver um problema de condução tri-dimensional pois deverá ser levado em conta o fluxo térmico através das bases do cilindro oco; principalmente se seus raios forem da mesma ordem de grandeza de seu comprimento. A inclusão, no modelo termoelástico do campo de deslocamentos longitudinais também aperfeiçoaria o método, equivalendo a admitir a dilatação do cilindro ao longo de seu eixo.

A aplicação das hipóteses da teoria da plasticidade com o auxílio de um método computacional iterativo para determinar a frente de plastificação em cada instante, redistribuindo as tensões em função da zona de plastificação, também constitui uma aproximação maior do problema real.

Por se tratar de um campo de tensões desenvolvido em alta temperatura a material deve apresentar um comportamento viscoelástico. A aplicação da teoria da viscoelasticidade linear ao problema pode ser o próximo passo para o aperfeiçoamento do método.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. BULAVIN, P.E. e KASHCHEEV, V.M. - Solution of Nonhomogeneous Heat Conduction Equation for Multilayered Bodies, International Chemical Engineering, Vol. 5, nº 1, 1965.
2. ÖZISIK, M.N. - Boundary Value Problems of Heat Conduction, International Textbook, Pennsylvania, 1968.
3. PORTO, A.A.G. - Comportamento Termoelástico Transiente no Acoplamento de Cilindros Circulares Concêntricos, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, 1973.
4. KREIDER, D.L. - An Introduction to Linear Analysis, Addison - Wesley, Ontário, 1966.
5. LANG, S. - Analysis I, Addison-Wesley, Japan, 1969.
6. WATSON, G.N. - A Treatise on the Theory of Bessel Functions , Cambridge University Press, London, 1966.
7. NOWACKI, W. - Thermoelasticity, Addison-Wesley, Massachusetts, 1962.
8. FUNG, Y.C. - Foundations of Solid Mechanics, Prentice-Hall of India, New Delhi, 1968.
9. ABRAMOWITZ, M. e STEGUN, I. - Handbook of Mathematical Functions, New York, 1965.
10. PETIAU, G. - La Theorie des Fonctions de Bessel, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1965.

11. WHEELON, A.D. - Tables of Summable Séries and Integrals In -
volving Bessel Functions, Holden-Day, Califõrnia,1968.

APENDICE AALGUMAS PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES DE BESSEL

Notação:

$J_\nu(z)$ - Função de Bessel de primeira espécie de ordem ν

$Y_\nu(z)$ - Função de Bessel de segunda espécie de ordem ν

$Z_\nu^{(i)}(z) = \alpha J_\nu(z) + \beta Y_\nu(z)$ - Qualquer combinação linear de J_ν e Y_ν

Algumas propriedades gerais^{6,9} :

$$\frac{d}{dz} \left[z^\nu Z_\nu(kz) \right] = k z^\nu Z_{\nu-1}(kz) \quad (\text{A. 1})$$

$$\frac{d}{dz} \left[Z_0(kz) \right] = -k Z_1(kz) \quad (\text{A. 2})$$

$$Z_{-1}(kz) = -Z_1(kz) \quad (\text{A. 3})$$

$$J_0(0) = 1 \quad ; \quad J_1(0) = 0 \quad (\text{A. 4})$$

Algumas Integrais^{10,11} :

$$\int_a^b \ln\left(\frac{b}{z}\right) Z_\nu(kz) z dz = \frac{1}{k^2} \left[Z_0(ka) - Z_0(kb) - \frac{a}{k} Z_1(ka) \ln(b/a) \right] \quad (\text{A. 5})$$

$$\int Z_\nu^{(1)}(kz) Z_\nu^{(2)}(\ell z) z dz = \frac{z}{k^2 - \ell^2} \left[k Z_{\nu+1}^{(1)}(kz) Z_\nu^{(2)}(\ell z) - \ell Z_\nu^{(1)}(kz) Z_{\nu+1}^{(2)}(\ell z) \right] \quad (\text{A. 6})$$

$$\int Z_\nu^{(1)}(kz) Z_\nu^{(2)}(kz) z dz = \frac{z^2}{4} \left[2 Z_\nu^{(1)}(kz) Z_\nu^{(2)}(kz) - Z_{\nu-1}^{(1)}(kz) Z_{\nu+1}^{(2)}(kz) - Z_{\nu+1}^{(1)}(kz) Z_{\nu-1}^{(2)}(kz) \right] \quad (\text{A. 7})$$

$$\int_a^b z_0(kz) z dz = \frac{1}{k} \left[b z_1(kb) - a z_1(ka) \right] \quad (\text{A. 8})$$

APÊNDICE BPROGRAMAS PARA COMPUTADOR DIGITAL

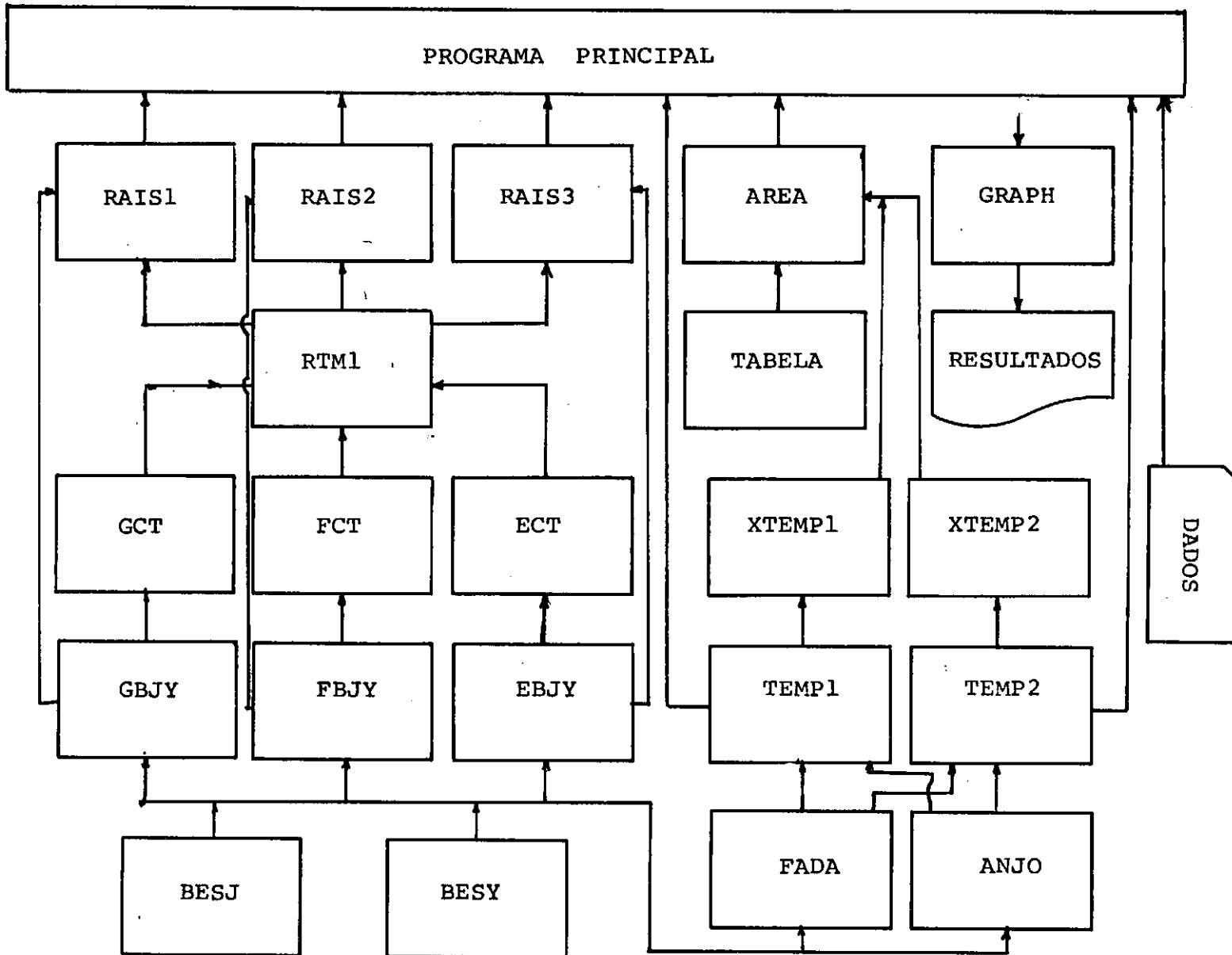
O programa que se segue calcula os transientes de temperatura, tensão radial, tensão tangencial, tensão longitudinal e tensão octaédrica ao longo do raio em dois cilindros circulares concêntricos mecânica e termicamente acoplados. É constituído de um programa principal, 14 subrotinas subprogramas e 7 funções subprogramas auxiliares. A estrutura geral de funcionamento do programa é apresentada na página seguinte.

As subrotinas BESJ e BESY calculam o valor das funções de Bessel de primeira e segunda espécie respectivamente dados a ordem e o argumento. São subrotinas desenvolvidas pela I.B.M. e constam do Scientific Subroutine Package do Computador/360. A subrotina RTMI determina a raiz de uma função dado um intervalo que contém esta raiz. É também uma subrotina desenvolvida pela I.B.M.

As subrotinas RAIS1, RAIS2 e RAIS3 calculam as raízes das equações (3.2), (2.22) e (2.25) respectivamente.

As subrotinas GBJY, FBJY e EBJY são subprogramas auxiliares que calculam, para cada ponto, o valor das funções referentes às equações acima.

As funções subprogramas GCT, FCT e ECT fornecem os valores das funções obtidos nas subrotinas GBJY, FBJY e EBJY na forma como são usadas dentro da subrotina RTMI.



FLUXOGRAMA GERAL DO PROGRAMA

A subrotina FADA calcula a temperatura para um dado instante de tempo em dois pontos pedidos, um em cada cilindro, para o caso da condição inicial de aquecimento interno no cilindro oco. A subrotina ANJO calcula a temperatura de forma análoga à anterior para o caso da condição inicial de temperatura uniforme no cilindro oco.

As funções subprograma TEMP1 e TEMP2 fornecem, para o programa principal, os valores das temperaturas calculadas pelas subrotinas FADA ou ANJO, conforme o caso, nos cilindros interno e externo respectivamente.

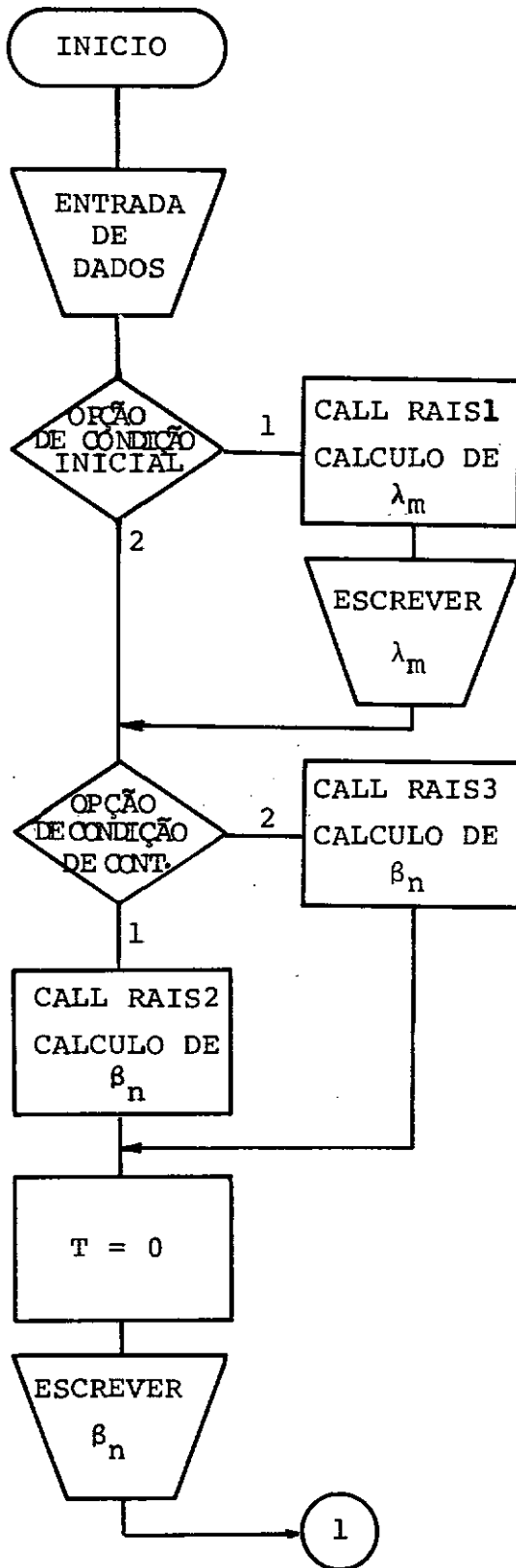
As funções subprograma XTEMP1 e XTEMP2 fornecem as funções a serem integradas pela subrotina AREA como consta da listagem do programa principal.

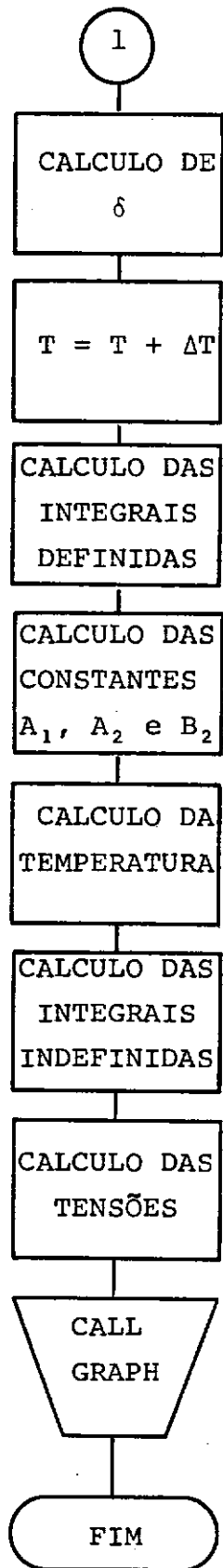
A subrotina AREA integra numericamente uma função qualquer por interpolação polinomial. Os coeficientes do polinômio são fornecidos pela subrotina TABELA. Esta subrotina fornece os coeficientes para a interpolação até 48 pontos.

O programa principal, de posse das raízes β_n e λ_m e da integral do campo de temperatura calcula, para um dado t o campo das tensões principais e tensões octaédricas para vários valores de r . A saída dos resultados é feita através da subrotina GRAPH, desenvolvida por Djalma Teixeira, que dispõe os resultados em forma plotada, facilitando a interpolação. Os dados que devem ser fornecidos ao programa principal são: os coeficientes de condutividade, difusividade e dilatação térmica e as constantes de Lamé dos dois materiais envolvidos, o raio inicial do cilindro maciço, a relação en

tre os raios do cilindro oco, a temperatura de aquecimento inicial e, no caso de aquecimento interno, o tempo deste aquecimento.

Seguem-se o fluxograma e a listagem do programa principal e as listagens das subrotinas mais importantes.

FLUXOGRAMA DO PROGRAMA PRINCIPAL



```

C      PROGRAMA PRINCIPAL
C
C      DETERMINACAO DAS TENSOES PRINCIPAIS
REAL LAMBDA,K1,K2,LAM1,LAM2
EXTERNAL XTEMP1,XTEMP2
DIMENSION LAMBDA(13),BETA(13)
DIMENSION XMAT(20,6)
COMMON K1,K2,ALFA1,ALFA2,A,TAU,TO,F0,EMAX,D,EPS,IEND,B,CTE
COMMON T,LAMBDA,BETA,IOPCI,HPEL
READ(8,5)K1,K2,ALFA1,ALFA2,LAM1,LAM2,G1,G2,AT1,AT2,A,TAU,TO,F0,
1EMAX,D,EPS,IEND,PENHA,HPEL,IOPCC,IOPCI
5  FORMAT(4F10.4/4F10.2,2F10.6/2F10.4/2F10.4/3F10.4,I4/F7.1/F14.7/I2
1/I2)
      B=A*TAU
      CTE=K1*SQRT(ALFA2)/K2/SQRT(ALFA1)
      V1=LAM1/(2.*(LAM1+G1))
      V2=LAM2/(2.*(LAM2+G2))
      XM1=(1.+V1)/(1.-V1)*AT1
      XM2=(1.+V2)/(1.-V2)*AT2
      DEN=(LAM1+G1)*(A**2*G2+B**2*(LAM2+G2))+G2*(LAM2+G2)*(B**2-A**2)
      IF(IOPCI-1)100,10,20
10  CALL RAIS1(LAMBDA)
      WRITE(5,15)(LAMBDA(I),I=1,13)
15  FORMAT(E14.7)
20  IF(IOPCC-1)100,30,40
30  CALL RAIS2(BETA)
      GO TO 45
40  CALL RAIS3(BETA)
45  T=0.
      WRITE(5,15)(BETA(I),I=1,13)
C      CALCULO DE DELTA=A-A0
CALL AREA(A,B,10,XTEMP2,XINTO)
DELTA=-A*(LAM2+2.*G2)/(B**2-A**2)/(LAM2+G2)*XM2*XINTO
SEC=1./3600.
T=T+PENHA*SEC
C      CALCULO DAS INTEGRAIS DEFINIDAS
CALL AREA(0.,A,10,XTEMP1,AREXT1)
CALL AREA(A,B,10,XTEMP2,AREXT2)
C      CALCULO DAS CONSTANTES A1,A2 E B2

```

```

A1=(G2*(LAM2+G2)*(B**2-A**2)*DELTA/A+(G1*(A**2*G2+B**2*(LAM2+G2))
1-G2*(LAM2+G2)*(B**2-A**2))*XM1*AREXT1/A**2+G2*(LAM2+2.*G2)*XM2*
2AREXT2)/DEN
A2=(G2*(LAM1+2.*G1)*XM1*AREXT1-A*G2*(LAM1+G1)*DELTA+G2*(LAM1+G1+
1G2)*XM2*AREXT2)/DEN
B2=(B**2*(LAM2+G2)*(LAM1+2.*G1)*XM1*AREXT1-A*B**2*(LAM1+G1)*(LAM2+
1G2)*DELTA+A**2*G2*(LAM2+G2-LAM1-G1)*XM2*AREXT2)/DEN
R1=0.

```

```
XINCR=(B-A)/9.
```

```
R2=A-XINCR
```

```
DO 50 J=1,10
```

```
K=J+10
```

```
R1=R1+A/10.
```

```
R2=R2+XINCR
```

```
C   CALCULO DA TEMPERATURA
```

```
T1=TEMP1(R1)
```

```
T2=TEMP2(R2)
```

```
C   CALCULO DAS INTEGRAIS INDEFINIDAS
```

```
CALL AREA(O.,R1,10,XTEMP1,XINT1)
```

```
CALL AREA(A,R2,10,XTEMP2,XINT2)
```

```
C   CALCULO DAS TENSOES RADIAIS
```

```
SIGR1=2.*((LAM1+G1)*A1-G1*XM1/R1**2*XINT1)
```

```
SIGR2=2.*((LAM2+G2)*A2-G2*B2/R2**2-G2*XM2/R2**2*XINT2)
```

```
C   CALCULO DAS TENSOES TANGENCIAIS
```

```
SIGT1=2.*((LAM1+G1)*A1+G1*XM1/R1**2*XINT1-G1*XM1*T1)
```

```
SIGT2=2.*((LAM2+G2)*A2+G2*B2/R2**2+G2*XM2/R2**2*XINT2-G2*XM2*T2)
```

```
C   CALCULO DAS TENSOES LONGITUDINAIS
```

```
SIGZ1=2.*(LAM1*A1-G1*XM1*T1)
```

```
SIGZ2=2.*(LAM2*A2-G2*XM2*T2)
```

```
C   CALCULO DAS TENSOES OCTAEDRICAS
```

```
SIGO1=SQRT(((SIGR1-SIGT1)**2+(SIGT1-SIGZ1)**2+(SIGZ1-SIGR1)**2)/2.
```

```
1)
```

```
SIGO2=SQRT(((SIGR2-SIGT2)**2+(SIGT2-SIGZ2)**2+(SIGZ2-SIGR2)**2)/2.
```

```
1)
```

```
C   DEFINICAO DA MATRIZ PARA A SUBROTINA GRAPH
```

```
XMAT(J,1)=R1
```

```
XMAT(J,2)=T1
```

```
XMAT(J,3)=SIGR1
```

```
XMAT(J,4)=SIGT1
```

```

XMAT(J,5)=SIGZ1
XMAT(J,6)=SIGO1
XMAT(K,1)=R2
XMAT(K,2)=T2
XMAT(K,3)=SIGR2
XMAT(K,4)=SIGT2
XMAT(K,5)=SIGZ2
XMAT(K,6)=SIGO2
50 CONTINUE
C   SAIDA DOS RESULTADOS
   TSEC=T*3600.
   WRITE(5,75)TSEC
   WRITE(5,85)IOPCC,IOPCI
75  FORMAT(5X,'T=',F7.1,'SEGUNDOS')
85  FORMAT(5X,'IOPCC=',I2,20X,'IOPCI=',I2)
   CALL GRAPH(XMAT,20,6)
100 CONTINUE
   CALL EXIT
   END
```



```

C      SUBROTINA RAISI
SUBROUTINE RAISI(LAMBDA)
REAL LAMBDA
EXTERNAL GCT
DIMENSION X(200),GX(200),LAMBDA(13)
DIMENSION V(13),W(13)
COMMON K1,K2,ALFA1,ALFA2,A,TAU,TO,FO,EMAX,D,EPS,IEND,B,CTE
COMMON U,V,W,IOPCI,HPEL
IN=0
X(1)=0.
GX(1)=-.1
C      CALCULO DAS RAIZES DA FUNCAO G(LAMBDA)
DO 20 I=2,200
X(I)=X(I-1)+1.
CALL GBJY(X(I),GX(I))
IF(GX(I)*GX(I-1))10,10,20
10 IN=IN+1
XLG=X(I-1)
XRG=X(I)
CALL RTMI(RAIZ,G,GGT,XLG,XRG,EPS,IEND,JER1) - ...
LAMBDA(IN)=RAIZ
IF(IN-13)20,21,21
20 CONTINUE
21 CONTINUE
RETURN
END

```

```

C      SUBROTINA RAIS2
SUBROUTINE RAIS2(BETA)
EXTERNAL FCT
DIMENSION X(500),FX(500),BETA(13)
DIMENSION V(13),W(13)
COMMON K1,K2,ALFA1,ALFA2,A,TAU,TO,FO,EMAX,D,EPS,IEND,B,CTE
COMMON U,V,W,IOPCI,HPEL
JN=0
X(1)=0.
FX(1)=.1
C      CALCULO DAS RAIZES DA FUNCAD F(BETA)
DO 40 I=2,500
X(I)=X(I-1)+.1
CALL FBJY(X(I),FX(I))
IF(FX(I)*FX(I-1))30,30,40
30 JN=JN+1
XLF=X(I-1)
XRF=X(I)
CALL RTMI(RAIZ,F,FCT,XLF,XRF,EPS,IEND,JER2)
BETA(JN)=RAIZ
IF(JN-13)40,41,41
40 CONTINUE
41 CONTINUE
RETURN
END

```

```

C      SUBROTINA RAIS3
SUBROUTINE RAIS3(BETA)
EXTERNAL ECT
DIMENSION X(500),EX(500),BETA(13)
DIMENSION V(13),W(13)
COMMON K1,K2,ALFA1,ALFA2,A,TAU,TO,FO,EMAX,D,EPS,IEND,B,CTE
COMMON U,V,W,IDPCI,HPEL
KN=0.
X(1)=0.
EX(1)=.1
C      CALCULO DAS RAIZES DA FUNCAO E(BETA)
DO 60 I=2,500
X(I)=X(I-1)+.1
CALL EBJY(X(I),EX(I))
IF(EX(I)*EX(I-1))50,50,60
50 KN=KN+1
XLE=X(I-1)
XRE=X(I)
CALL RTMI(RAIZ,E,ECT,XLE,XRE,EPS,IEND,JER3)
BETA(KN)=RAIZ
IF(KN-13)60,61,61
60 CONTINUE
61 CONTINUE
RETURN
END

```

```

C      SUBROTINA FADA
      SUBROUTINE FADA(R,T,LAMBDA,BETA,TETA)
      REAL K1,K2,I1,I2,I3,I4,I5,I6,I7,I8,I9,I10,NORMA,KSI,LAMBDA
      DIMENSION LAMBDA(13),BETA(13),R(2),Z(5),XJ(2,5),Y(2,5),C2(12),D2(1
12),KSI(2,12),EXPRE(12),SOM(12),TERMO(12,12),SUN(12,12),TETA(2)
      DIMENSION V(13),W(13)
      COMMON K1,K2,ALFA1,ALFA2,A,TAU,TO,FO,EMAX,D,EPS,IEND,B,CTE
      COMMON U,V,W,IOPCI,HPEL
      PI=3.14159265359
C      DETERMINACAO DA ABCISSA DE CONVERGENCIA DA SERIE EM M
      DO 42 L=1,12
      AREXM=ALFA2/A**2*LAMBDA(L)**2*TO
      IF(AREXM-EMAX)42,43,43
42 CONTINUE
43 MM=L-1
C      DETERMINACAO DA ABCISSA DE CONVERGENCIA DA SERIE EM N
      DO 45 L=1,12
      AREXN=BETA(L)**2*T
      IF(AREXN-EMAX)45,46,46
45 CONTINUE
46 NN=L-1
C      SOMATORIOS
      DO 130 I=1,2
      DO 120 N=1,NN
C      CALCULO DAS FUNCOES DE BESSEL ENVOLVENDO BETA(N)
      C=BETA(N)/SQRT(ALFA1)
      H=BETA(N)/SQRT(ALFA2)
      Z(1)=C*A
      Z(2)=H*A
      Z(3)=H*B
      DO 50 J=1,2
      DO 50 K=1,3
      CALL BESJ(Z(K),J-1,DJ,D,IER7)
      CALL BESY(Z(K),J-1,DY,IER8)
      XJ(J,K)=DJ
50 Y(J,K)=DY
C      CALCULO DOS COEFICIENTES C2(N) E D2(N)
      QUO=XJ(1,2)*Y(2,2)-XJ(2,2)*Y(1,2)

```

```

C2(N)=(XJ(1,1)*Y(2,2)-CTE*XJ(2,1)*Y(1,2))/QUO
D2(N)=(CTE*XJ(1,2)*XJ(2,1)-XJ(1,1)*XJ(2,2))/QUO
C   CALCULO DAS AUTOFUNCOES KSI(I,N)
ARG1=BETA(N)*R(1)/SQRT(ALFA1)
ARG2=BETA(N)*R(2)/SQRT(ALFA2)
CALL BESJ(ARG1,0,EJ,D,IER9)
CALL BESJ(ARG2,0,FJ,D,IER10)
CALL BESY(ARG2,0,EY,IER11)
KSI(1,N)=EJ
KSI(2,N)=C2(N)*FJ+D2(N)*EY
C   CALCULO DAS INTEGRAIS ENVOLVENDO BETA(N) E DA NORMA
I1=ALFA2/BETA(N)**2*(XJ(1,2)-XJ(1,3))-A/H*XJ(2,2)*ALOG(TAU)
I2=((Y(1,2)-Y(1,3))/H-Y(2,2)*ALOG(TAU)*A)/H
I7=A**2/2.*(XJ(1,1)**2+XJ(2,1)**2)
I8=(B**2*(XJ(1,3)**2+XJ(2,3)**2)-A**2*(XJ(1,2)**2+XJ(2,2)**2))/2.
I9=(B**2*(Y(1,3)**2+Y(2,3)**2)-A**2*(Y(1,2)**2+Y(2,2)**2))/2.
I10=(B**2*(XJ(1,3)*Y(1,3)+XJ(2,3)*Y(2,3))-A**2*(XJ(1,2)*Y(1,2)+XJ(
12,2)*Y(2,2)))/2.
NORMA=K1/ALFA1*I7+K2/ALFA2*(C2(N)**2*I8+D2(N)**2*I9+2.*C2(N)*D2(N)
1*I10)
C   DO 120 M=1,MM
CALCULO DAS FUNCOES DE BESSEL ENVOLVENDO LAMBDA(M)
Q=LAMBDA(M)/A
CTG=H**2-Q**2
Z(4)=LAMBDA(M)
Z(5)=Z(4)*TAU
DO 60 JJ=1,2
DO 60 KK=4,5
CALL BESJ(Z(KK),JJ-1,GJ,D,IER12)
CALL BESY(Z(KK),JJ-1,GY,IER13)
XJ(JJ,KK)=GJ
60 Y(JJ,KK)=GY
C   CALCULO DAS INTEGRAIS ENVOLVENDO BETA(N) E LAMBDA(M)
I3=(B*(H*XJ(2,3)*XJ(1,5)-Q*XJ(2,5)*XJ(1,3))-A*(H*XJ(2,2)*XJ(1,4)-Q
1*XJ(2,4)*XJ(1,2)))/CTG
I4=(B*(H*XJ(2,3)*Y(1,5)-Q*XJ(1,3)*Y(2,5))-A*(H*XJ(2,2)*Y(1,4)-Q*XJ
1(1,2)*Y(2,4)))/CTG
I5=(A*(Q*XJ(2,4)*Y(1,2)-H*XJ(1,4)*Y(2,2))-B*(Q*XJ(2,5)*Y(1,3)-H*XJ
1(1,5)*Y(2,3)))/CTG

```

```

      I6=(B*(H*Y(2,3)*Y(1,5)-Q*Y(1,3)*Y(2,5))-A*(H*Y(2,2)*Y(1,4)-Q*Y(1,2
C      1)*Y(2,4)))/CTG
      CALCULO DA EXPRESSAO SOMADA EM M
      COLCH=C2(N)*Y(1,5)*I3-C2(N)*XJ(1,5)*I4+D2(N)*Y(1,5)*I5-D2(N)*XJ(1,
      15)*I6
      FRAC=XJ(1,4)*XJ(1,5)/(XJ(1,5)**2-XJ(1,4)**2)
      EXPRE(M)=1./EXP(ALFA2/A**2*LAMBDA(M)**2*TO)*FRAC*COLCH
C      CALCULO DA SOMA EM M
      IF(M-1)70,70,80
70      SOM(M)=EXPRE(M)
      GO TO 90
80      SOM(M)=SOM(M-1)+EXPRE(M)
C      CALCULO DO TERMO SOMADO EM N
90      CHAVE=FO/ALOG(TAU)*(C2(N)*I1+D2(N)*I2)-PI*FO*SOM(M)
      TERMO(N,M)=1./EXP(BETA(N)**2*T)*KSI(I,N)*K2/ALFA2*CHAVE/NORMA
C      CALCULO DA SOMA EM N
      IF(N-1)100,100,110
100     SUN(N,M)=TERMO(N,M)
      GO TO 120
110     SUN(N,M)=SUN(N-1,M)+TERMO(N,M)
120     CONTINUE
      TETA(I)=SUN(NN,MM)
130     CONTINUE
      RETURN
      END

```

```

C      SUBROTINA ANJO
      SUBROUTINE ANJO(R,T,BETA,TETA)
      REAL K1,K2,I7,I8,I9,I10,I11,I12,NORMA,KSI
      DIMENSION BETA(13),R(2),Z(3),XJ(2,3),Y(2,3),C2(12),D2(12),
1KSI(2,12),TERMO(12),SUN(12),TETA(2)
      DIMENSION V(13),W(13)
      COMMON K1,K2,ALFA1,ALFA2,A,TAU,TO,FO,EMAX,D,EPS,IEND,B,CTE
      COMMON U,V,W,IOPCI,HPEL
      PI=3.14159265359
C      DETERMINACAO DA ABCISSA DE CONVERGENCIA DA SERIE EM N
      DO 45 L=1,12
      AREXN=BETA(L)**2*T
      IF(AREXN-EMAX)45,46,46
45  CONTINUE
46  NN=L-1
C      SOMATORIOS
      DO 130 I=1,2
      DO 120 N=1,NN
C      CALCULO DAS FUNCOES DE BESSEL ENVOLVENDO BETA(N)
      C=BETA(N)/SQRT(ALFA1)
      H=BETA(N)/SQRT(ALFA2)
      Z(1)=C*A
      Z(2)=H*A
      Z(3)=H*B
      DO 50 J=1,2
      DO 50 K=1,3
      CALL BESJ(Z(K),J-1,DJ,D,IER7)
      CALL BESY(Z(K),J-1,DY,IER8)
      XJ(J,K)=DJ
50  Y(J,K)=DY
C      CALCULO DOS COEFICIENTES C2(N) E D2(N)
      QUO=XJ(1,2)*Y(2,2)-XJ(2,2)*Y(1,2)
      C2(N)=(XJ(1,1)*Y(2,2)-CTE*XJ(2,1)*Y(1,2))/QUO
      D2(N)=(CTE*XJ(1,2)*XJ(2,1)-XJ(1,1)*XJ(2,2))/QUO
C      CALCULO DAS AUTOFUNCOES KSI(I,N)
      ARG1=BETA(N)*R(1)/SQRT(ALFA1)
      ARG2=BETA(N)*R(2)/SQRT(ALFA2)
      CALL BESJ(ARG1,0,EJ,D,IER9)
      CALL BESJ(ARG2,0,FJ,D,IER10)

```

```

CALL BESY(ARG2,0,EY,IER11)
KSI(1,N)=EJ
KSI(2,N)=C2(N)*FJ+D2(N)*EY
C   CALCULO DAS INTEGRAIS ENVOLVENDO BETA(N) E DA NORMA
I7=A**2/2.*(XJ(1,1)**2+XJ(2,1)**2)
I8=(B**2*(XJ(1,3)**2+XJ(2,3)**2)-A**2*(XJ(1,2)**2+XJ(2,2)**2))/2.
I9=(B**2*(Y(1,3)**2+Y(2,3)**2)-A**2*(Y(1,2)**2+Y(2,2)**2))/2.
I10=(B**2*(XJ(1,3)*Y(1,3)+XJ(2,3)*Y(2,3))-A**2*(XJ(1,2)*Y(1,2)+XJ(
12,2)*Y(2,2)))/2.
I11=SQRT(ALFA2)/BETA(N)*(B*XJ(2,3)-A*XJ(2,2))
I12=SQRT(ALFA2)/BETA(N)*(B*Y(2,3)-A*Y(2,2))
NORMA=K1/ALFA1*I7+K2/ALFA2*(C2(N)**2*I8+D2(N)**2*I9+2.*C2(N)*D2(N)
1*I10)
C   CALCULO DO TERMO SOMADO EM N
TERMO(N)=1./EXP(BETA(N)**2*T)*KSI(I,N)*K2/ALFA2*FO*(C2(N)*I11+
1D2(N)*I12)/NORMA
C   CALCULO DA SOMA EM N
IF(N-1)100,100,110
100 SUN(N)=TERMO(N)
GO TO 120
110 SUN(N)=SUN(N-1)+TERMO(N)
120 CONTINUE
TETA(I)=SUN(NN)
130 CONTINUE
RETURN
END

```


C

```

SUBROUTINE SUBPROGRAMA EBJY
SUBROUTINE EBJY(X,EX)
DIMENSION ARG(3),XJJ(2,3),YY(2,3)
DIMENSION V(13),W(13)
COMMON K1,K2,ALFA1,ALFA2,A,TAU,TO,FO,EMAX,D,EPS,IEND,B,CTE
COMMON U,V,W,IOPCI,HPEL
ARG(1)=X*A/SQRT(ALFA1)
ARG(2)=X*A/SQRT(ALFA2)
ARG(3)=X*B/SQRT(ALFA2)
DO 1 N=1,2
DO 1 M=1,3
P=ARG(M)
CALL BESJ(P,N-1,CJ,D,IER5)
CALL BESY(P,N-1,CY,IER6)
XJJ(N,M)=CJ
1 YY(N,M)=CY
Q=K2/SQRT(ALFA2)*X
EX=XJJ(1,1)*(Q*(YY(2,2)*XJJ(2,3)-XJJ(2,2)*YY(2,3))-HPEL*(YY(2,2)*
1XJJ(1,3)-XJJ(2,2)*YY(1,3)))+CTE*XJJ(2,1)*(Q*(XJJ(1,2)*YY(2,3)-
2YY(1,2)*XJJ(2,3))-HPEL*(XJJ(1,2)*YY(1,3)-YY(1,2)*XJJ(1,3)))
RETURN
END

```

C

```
      SUBROTINA SUBPROGRAMA  FBJY
SUBROUTINE FBJY(X,FX)
DIMENSION ARG(3),XJJ(2,3),YY(2,3)
DIMENSION V(13),W(13)
COMMON K1,K2,ALFA1,ALFA2,A,TAU,TO,FO,EMAX,D,EPS,IEND,B,CTE
COMMON U,V,W,IDPCI,HPEL
ARG(1)=X*A/SQRT(ALFA1)
ARG(2)=X*A/SQRT(ALFA2)
ARG(3)=X*B/SQRT(ALFA2)
DO 1 N=1,2
DO 1 M=1,3
P=ARG(M)
CALL BESJ(P,N-1,CJ,D,IER5)
CALL BESY(P,N-1,CY,IER6)
XJJ(N,M)=CJ
1 YY(N,M)=CY
FX=CTE*XJJ(2,1)*(YY(1,2)*XJJ(1,3)-XJJ(1,2)*YY(1,3))+XJJ(1,1)*(XJJ(
12,2)*YY(1,3)-YY(2,2)*XJJ(1,3))
RETURN
END
```

C

```
      SUBROTINA SUBPROGRAMA  GBJY
SUBROUTINE GBJY(X,GX)
DIMENSION V(13),W(13)
COMMON K1,K2,ALFA1,ALFA2,A,TAU,TO,FO,EMAX,D,EPS,IEND,B,CTE
COMMON U,V,W
CALL BESJ(X,0,AJ,D,IER1)
CALL BESJ(TAU*X,0,BJ,D,IER2)
CALL BESY(TAU*X,0,AY,IER3)
CALL BESY(X,0,BY,IER4)
GX=AJ*AY-BJ*BY
RETURN
END
```

C

SUBROTINA AREA

SUBROUTINE AREA(XLEFT,XRIGHT,NTER,FUNCT,XINTGR)

DIMENSION CHI(48),PESO(48)

DIMENSION LAMBDA(13),BETA(13)

COMMON K1,K2,ALFA1,ALFA2,A,TAU,TO,FO,EMAX,D,EPS,IEND,B,CTE

COMMON T,LAMBDA,BETA

CALL TABELA(NTER,CHI,PESO)

XINTGR=0.

DO 10 I=1,NTER

X=(CHI(I)*(XRIGHT-XLEFT)+XRIGHT+XLEFT)/2.

Y=FUNCT(X)

XINTGR=XINTGR+PESO(I)*Y

10 CONTINUE

XINTGR=XINTGR*(XRIGHT-XLEFT)/2.

RETURN

END