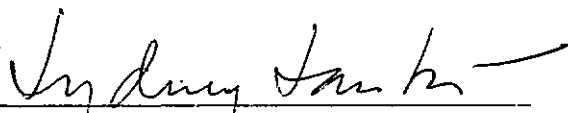


REDISTRIBUIÇÃO DE MOMENTOS FLETORES EM ESTRUTURAS  
AORTICADAS PLANAS DE CONCRETO ARMADO

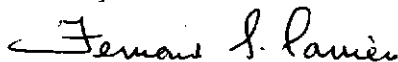
Carlos Welligton de Azevedo Pires Sobrinho

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO  
DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO  
PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM  
CIÊNCIAS (M.Sc.).

Aprovada por:



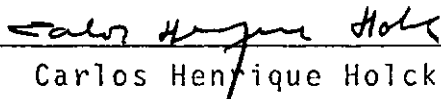
Sydney M.G. dos Santos  
Presidente



Fernando L.L.B. Carneiro



José Cláudio de Faria Telles



Carlos Henrique Holck

RIO DE JANEIRO, RJ, BRASIL

MARÇO DE 1985

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

REDISTRIBUIÇÃO DE MOMENTOS FLETORES EM ESTRUTURAS  
AORTICADAS PLANAS DE CONCRETO ARMADO

Carlos Wellington de A. Pires Sobrinho

Março de 1985

Orientador: Prof. Sydney Martins Gomes dos Santos

Programa: Engenharia Civil

O presente trabalho se constitui num estudo de fatores que influenciam a redistribuição dos esforços em estruturas aortricadas planas de concreto armado.

Neste trabalho foram desenvolvidos dois programas computacionais para análise não-linear física destas estruturas, um baseado no método dos deslocamentos e o outro no método das forças.

Foi feita também uma abordagem evolutiva dos métodos de dimensionamento e de cálculo, desde o elástico linear ao plástico.

Exemplos mostram uma comparação dos resultados experimentais de vigas com os numéricos dos programas desenvolvidos. Também foram realizadas simulações na disposição e quantidade de armadura em um pórtico no sentido de se observar a influência que esta provoca na distribuição de momentos fletores na estrutura.

Abstract of the Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the Degree of Master in Sciences (M.Sc.)

BENDING MOMENTS REDISTRIBUTION IN PLANE FRAME OF  
REINFORCED CONCRETE

Carlos Wellington de A. Pires Sobrinho

Chairman: Prof. Sydney Martins Gomes dos Santos

Department: Civil Engineering

March, 1985

This report deals with the study of the facts that affect the stresses redistribution in plane frame of reinforced concrete.

Two computer programs were developed in order to analyse the physical nonlinearity: one was based on the displacement method and the other on the force method.

An evolutive approach of the methods to design the structure from the linear elastic state till the plastic was done.

Comparison between experimental and numerical results and simulations studying the disposition and quantity of the armadure were done. The influence of this on the bending moments was studied, as well.

PIRES SOBRINHO, CARLOS WELLINGTON DE AZEVEDO

Redistribuição de Momentos Fletores em Estruturas Aporticadas Planas de Concreto Armado (Rio de Janeiro, 1985).

IX, 130 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1985).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

I. Redistribuição de Momentos Fletores em Estruturas Aporticadas de Concreto Armado. I. COPPE/UFRJ II. Título (série).

## AGRADECIMENTOS

Ao Professor Sydney M.G. dos Santos pela orientação desta tese e por seu apoio pessoal nas horas mais difíceis.

Ao Professor Lobo Carneiro por sua confiança e incentivo na primeira fase deste mestrado e pelo que representa para a engenharia mundial.

Aos Professores Carlos Henrique Holck e José Cláudio de Faria Telles por terem aceitado participar da Banca Examinadora.

Aos Brasileiros por terem, de forma indireta contribuído em toda minha formação até hoje, inclusive mantendo as bolsas oferecidas pela CAPES e pelo CNPq.

Aos meus pais e irmãos pela confiança em mim depositada ao longo de minha vida e permanência aqui no Rio.

À Leda Carvalho Coelho, que no apagar das luzes desta tese me reanimou e criou em mim novas esperanças.

Aos meus colegas da sala 116 e 118 que são tantos e tão bons que são todos e tudo.

Aos funcionários da Biblioteca, da limpeza e do NCE pelo convívio harmonioso e cheio de alegria.

Ao corpo discente da COPPE/Civil pelos ensinamentos prestados.

Aos Professores Silvio Romero Frej, Ezio Araújo, Bernardo Horowitz, Geraldo Duarte da Universidade Federal de Pernambuco pelo incentivo para iniciar e concluir esse mestrado.

Aos amigos, José Carlos Cavalcanti, Carlos Carvalheira, Manoel Justino, Raimundo Moreira, Adilson Carvalho, Antonio Freitas, André, Geraldo, Zé Henrique etc., pela simplicidade e o tudo que é uma amizade.

À Cristina Raymundo pela essencial presteza e dedicação na datilografia desta tese.

# ÍNDICE

	<u>Pág.</u>
NOTAÇÕES	
UNIDADES	
CAPÍTULO I . INTRODUÇÃO .....	1
CAPÍTULO II . FUNDAMENTOS GERAIS .....	4
2.1. Abordagem sobre as Análises Elástica e Plástica das Estruturas	
2.2. Análise Plástica .....	5
2.3. Comportamento do Concreto Armado .....	6
CAPÍTULO III. ASPECTOS GERAIS DA REDISTRIBUIÇÃO DE MO- MENTOS NAS ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO ...	12
CAPÍTULO IV . ABORDAGEM DOS MÉTODOS DE CÁLCULO EM ESTRU- TURAS DE CONCRETO ARMADO .....	19
4.1. Métodos de Cálculo baseado no Com- portamento Elástico .....	20
4.2. Método de Cálculo baseado no Compor- tamento Plástico .....	25
4.2.1. Método das Rotações Últimas ....	27
4.2.2. Método das Rotações Impostas ...	30
4.2.3. Método de Cohn .....	32
CAPÍTULO V . MÉTODOS ITERATIVOS DIRETOS (CONSIDERAÇÃO DA NÃO-LINEARIDADE FÍSICA DO C.A.) .....	33
5.1. Algoritmo de Análise pelo Método das Forças .....	34
5.1.1. Conceitos Básicos (Princípio dos Trabalhos Virtuais-PTV)	
5.1.2. Desenvolvimento do Método (Apre- sentação e Equações Básicas)...	36

5.1.3. Domínio de Aplicação do Método ...	40.
5.1.3.1. Sistema Isostático Principal .....	41
5.1.3.2. Determinação dos Es - forças na Estrutura .....	43
5.1.3.3. Determinação dos Mo - mentos Hiperestáticos .....	44
5.1.4. Diagrama de Blocos do Programa $P_1$ /Forças .....	47
5.1.4.1. Subrotinas do Programa $P_1$ /Forças .....	47
5.2. Algoritmo de Análise pelo Método dos Deslocamentos .....	49
5.2.1. Diagrama de Blocos do Programa $P_2$ /Deslocamentos .....	51
5.2.1.1. Subrotinas do Programa $P_2$ /Deslocamentos .....	52
5.3. Consideração Não-Linear Física do C.A. ..	54
5.3.1. Relação Tensão Deformação do Concreto Confinado .....	54
5.3.2. Relação Tensão Deformação dos Aços .....	55
5.3.3. Método de Cálculo .....	55
CAPÍTULO VI . EXEMPLOS E APLICAÇÕES .....	60
Exemplo 1. Viga Continua de Macchi	
Exemplo 2. Vigas Experimentais de Paulo Chaves	
Exemplo 3. Análise do Dimensionamento de uma Viga Esbelta	
Exemplo 4. Pórtico Plano	
CAPÍTULO VII. CONCLUSÕES E SUGESTÕES .....	86

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS ..... 122

APÊNDICE A. MÉTODOS DE CÁLCULO PLÁSTICO

- A.1. Roteiro para Aplicação do Método das Ro  
tações Impostas. Método de Macchi
- A.2. Aplicação do Método de Macchi
- A.3. Roteiro para Aplicação do Método Itera-  
tivo Direto
- A.4. Aplicação do Método Iterativo Direto  
(Exemplificação Acadêmica)



A maior recompensa  
pelo nosso trabalho  
é a consciência do  
dever cumprido

Aos meus familiares  
a Leda  
aos meus companheiros

## NOTAÇÕES

- $A_C$  - Área da seção de concreto
- $A_S$  - Área da armadura de tração (flexão)
- $A'_S$  - Área da armadura de compressão (flexão)
- $b$  - Dimensão da base da seção transversal
- $C_V$  - Curvatura da seção transversal
- $d$  - Altura útil da seção transversal
- $E$  - Módulo de elasticidade
- $f$  - Flecha
- $f_C$  - Resistência à compressão do concreto
- $h$  - Altura da seção transversal
- $I$  - Momento da inércia da seção transversal
- $K$  - Rigidez
- $L$  - Limites no traçado dos diagramas bilinear e trilinear
- $M$  - Momento fletor
- $M_u$  - Momento fletor último
- $N$  - Esforço normal atuante na seção transversal
- $N_C$  - Esforço normal resultante no concreto
- $N_S$  - Esforço normal resultante no aço
- $P$  - Carga concentrada
- $q$  - Carregamento distribuído
- $x$  - Distância da linha neutra ao bordo mais comprido
- $X$  - Momento hiperestático
- $Z$  - Braço da alavanca
- $\epsilon_{C_Z}$  - Deformação longitudinal no concreto
- $\epsilon_C$  - Deformação longitudinal no concreto
- $\epsilon_S$  - Deformação longitudinal nas fibras de aço
- $\phi$  - Curvatura

- $\phi_u$  - Curvatura última
- $\sigma_c$  - Tensão normal no concreto
- $\sigma_s$  - Tensão normal no aço
- $\nu$  - Coeficiente da influência do esforço normal
- $\psi$  - Contribuição plástica da curvatura
- $\Omega$  - Contribuição plástica da rotação
- $\theta$  - Rotação

## UNIDADES

O sistema de unidades nos exemplos é o "Sistema Internacional de Unidades S.I."

A equivalência entre as unidades do sistema metro/quilograma força e as do Sistema S.I. é a seguinte:

$$1 \text{ Kgf} = 9.8 \text{ N} \approx 10 \text{ N}$$

$$1 \text{ Kgf/cm}^2 = 0,098 \text{ N/mm}^2$$

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

O cálculo usual de dimensionamento e de verificação em estruturas de concreto armado apresenta a seguinte incoerência:

"Como se pode dimensionar as seções mais solicitadas de uma estrutura pelo método da ruptura, onde se considera a relação não-linear entre tensões e deformações no concreto, quando os esforços solicitantes são calculados com base na teoria da elasticidade que tem sua aplicação restrita aos materiais homogêneos, isotrópicos e elásticos?"

O efeito não linear do concreto armado provoca uma profunda variação na rigidez e esta por sua vez provoca uma redistribuição dos esforços em toda a estrutura.

Foi a partir destas constatações, observadas inicialmente no artigo "Sugestões para uma norma de cálculo plástico de estruturas hiperestáticas de concreto armado" do Prof. Lobo Carneiro e no trabalho "A questão do EJ no cálculo do concreto armado na fase plástica" do Prof. Sydney Santos que nasceu a idéia desta pesquisa.

Se anteriormente existiam muitas dificuldades para se calcular os esforços considerando o real comportamento das estruturas de concreto armado, hoje com o avanço das técnicas computa -

cionais e a difusão dos computadores já é possível se analisar melhor essas estruturas sem utilizar artifícios, como é o caso do rebaixamento na linha de fechamento de momentos fletores em vigas contínuas, de fracos fundamentos teóricos.

As idéias fundamentais de como se desenvolvem as tensões e os esforços na estrutura estão apresentadas no Capítulo II, bem como as considerações do comportamento do concreto armado.

No Capítulo III procurou-se relacionar os fatores que interferem na redistribuição de momentos fletores em estruturas aportricadas de concreto armado.

No Capítulo IV foi feita uma abordagem dos diferentes métodos de cálculo, desde o elástico linear dos métodos pioneiros do cálculo plástico, mostrando a diferença de concepção entre a análise elástica e plástica em estruturas de concreto armado.

No Capítulo V desenvolveram-se dois métodos iterativos diretos (automatizados) de análise estrutural, ambos considerando o efeito não linear do concreto armado no cálculo das tensões. O primeiro método foi desenvolvido com base no método dos esforços e o segundo no método dos deslocamentos.

As diferenças básicas do método iterativo direto baseado no método dos esforços com os métodos clássicos de cálculo plástico foi descrita também no Capítulo V, e no Apêndice A foi feita uma análise aplicativa entre este método iterativo e o método "das rotações últimas" de Macchi.

O Capítulo VI é constituído da apresentação de 4 tipos de exemplos.

O primeiro diz respeito a aplicação às vigas contínuas, mostrando diferenças entre os dois métodos automatizados e uma

comparação com os resultados obtidos no Apêndice A.

No segundo exemplo estão apresentadas as análises sobre variação de dimensionamento em vigas "engastadas-apoiadas", encontradas na tese experimental de Paulo Chaves Araújo e Silva.

O terceiro exemplo caracteriza-se por apresentar os resultados obtidos no dimensionamento de uma viga "T", engastada e apoiada, pelos métodos clássicos elástico e elastoplástico e pelo método iterativo não linear.

Por fim foi analisada uma série de pórticos planos onde foi observada a variação na disposição da armadura na distribuição dos momentos e na deformabilidade da estrutura.

Finalmente no Capítulo VII estão colocadas algumas conclusões do estudo teórico e dos exemplos apresentados, como também algumas sugestões para o prosseguimento da pesquisa.

## CAPÍTULO II

### FUNDAMENTOS GERAIS

#### 2.1. ABORDAGEM SOBRE AS ANÁLISES ELÁSTICA E PLÁSTICA DAS ESTRUTURAS

As condições fundamentais de equilíbrio e de compatibilidade geométrica a que deve satisfazer uma estrutura, não são suficientes para determinar seu comportamento diante dos esforços solicitantes. Este comportamento só fica determinado quando se conhecem as tendências de desenvolvimento destes esforços e das tensões nos elementos da estrutura.

É a partir da suposição desse estado de tensões, apoiado principalmente na capacidade resistente e na deformabilidade do material, e respeitando as condições de equilíbrio e de compatibilidade, que se baseiam as análises estruturais.

A análise elástica caracteriza-se por assumir uma tendência única de distribuição dos esforços na estrutura. Isto por considerar os parâmetros físicos e geométricos invariantes no decorrer do cálculo; e sob hipóteses simplificadoras, limita a tensão máxima resistente a uma fração da tensão elástica limite do material<sup>6</sup>.

Em contrapartida, a análise plástica procura avaliar o



comportamento real da estrutura, podendo utilizar a totalidade da sua capacidade resistente, quer na consideração não-linear da distribuição das tensões (cálculo no estado limite último), quer na redistribuição dos esforços solicitantes (consideração do efeito de plasticidade no comportamento hiperestático).

Deste modo a distribuição dos esforços solicitantes e resistentes sofre interferência das peculiaridades da estrutura, que tem ainda sua reserva de resistência condicionada à capacidade de deformação das seções plastificadas.

O emprego da teoria plástica no estudo do comportamento das estruturas hiperestáticas apresenta algumas vantagens; dentre elas salientam-se:

- Domínio preciso do comportamento estrutural no momento do colapso.
- Aproveitamento maior da capacidade resistente do material e da estrutura.
- Conhecimento de aspectos estruturais importantes no que diz respeito à redistribuição dos esforços solicitantes e resistentes.

A análise plástica explora ao máximo as possibilidades de resistência da mesma, sem, no entanto, desconhecer suas limitações e as de projeto.

## 2.2. ANÁLISE PLÁSTICA

Analisando-se o comportamento de uma estrutura hiperestática cujo material possua reserva de resistência plástica, pode

se observar que aumentando o carregamento (quase-estaticamente) chega-se a atingir nas seções mais solicitadas ("seções críticas") o limite de resistência elástica, provocando, a partir deste, o início de plastificação destas seções, acompanhada de progressivas modificações na distribuição dos esforços.

Ao nível das "seções críticas", a estrutura responde com uma redistribuição das tensões através de um gradiente que se expande pela vizinhança destas, formando setores plásticos<sup>10</sup>.

Com relação ao aspecto hiperestático da estrutura, a solidariedade entre os elementos contidos em suas ligações contribue para manter o equilíbrio e a compatibilidade geométrica, combatendo o acréscimo dos esforços com a referida redistribuição dos mesmos ao longo de toda estrutura.

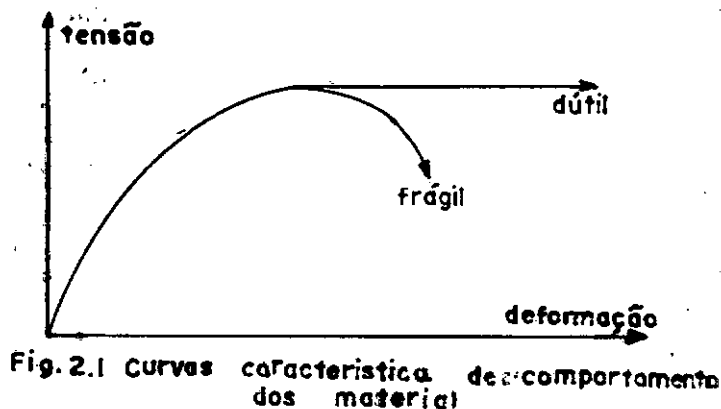
Com a continuação do aumento do carregamento, e dependendo da capacidade de deformação das regiões plásticas formadas, a estrutura poderá dar origem a um mecanismo parcial ou total, quando não mais será capaz de absorver qualquer acréscimo de carga e entrará em ruína.

### 2.3. COMPORTAMENTO DO CONCRETO ARMADO (C.A.)

Os materiais que constituem o C.A. apresentam comportamento diferenciado e podem ser caracterizados como materiais frágeis ou dúteis. (fig. 2.1)

O concreto simples apresenta-se em geral frágil e por ser um material misto pode se adequar a pequenas mudanças de comportamento decorrente da variação da percentagem, distribuição e

qualidade dos elementos constituintes.



Os aços nele utilizados apresentam comportamento dútil com deformabilidade muito superior à do concreto

Entretanto, a sensível adaptação deste aos recursos de confinamento<sup>14</sup> (que aumentam enormemente a capacidade de encurtamento) associada à variação de percentagem e disposição da armadura, conduz a mudanças significativas no comportamento de peças de C.A. Deve ser ressaltado que o nível de tensão na armadura influi grandemente na deformabilidade dessas peças. Também se verifica que, quanto maior a deformabilidade da seção, maior será sua capacidade de rotação, fundamental para o cálculo plástico.

Assim o concreto armado apresenta um comportamento "suigeneres", decorrente da interação das propriedades dos materiais constituintes, propiciando um largo espaço entre a caracterização frágil e dútil.

Para ilustrar essa variação de comportamento, apresentam-se a seguir as conclusões dos testes experimentais em concreto

confinado de BASE and READ<sup>5</sup> e as de CAMILO MICHALKA<sup>5(\*)</sup>. O primeiro analisou a influência do nível de tensão nos aços tracionados; os resultados acham-se nas figuras 2.2a,b,c.

Dos resultados dos testes de CAMILO MICHALKA, pode-se notar que também a região de confinamento influi bastante na capacidade de rotação.

Observa-se então que a dutibilidade é uma característica muito importante no comportamento de peças de C.A., e o dado experimental que melhor pode expressar esse comportamento é a curva momento-curvatura, ou na falta desta, a curva momento-flecha<sup>7</sup>.

Com a percentagem de armadura inferior à limite, obtêm-se grandes deformações sob momento constante (momento  $M_y$  que provoca escoamento na armadura). (Fig. 2.2a)

Seção com armadura limite, em que o confinamento efetivo influi grandemente no comportamento da peça. (Fig. 2.2b)

Seção com armadura superior à limite, não apresenta grandes deformações; caracteriza-se como frágil. Neste caso a armadura de fretagem contribui para aumentar a resistência da seção e a sua dutibilidade. (Fig. 2.2c)

---

(\*) Os resultados experimentais destes testes deram base para concepção de um algoritmo de cálculo iterativo, o qual reproduziu muito bem os acima, originando o "paper". "Influência da Armadura Longitudinal e Transversal no Comportamento das Peças de Concreto Armado"<sup>19</sup>.

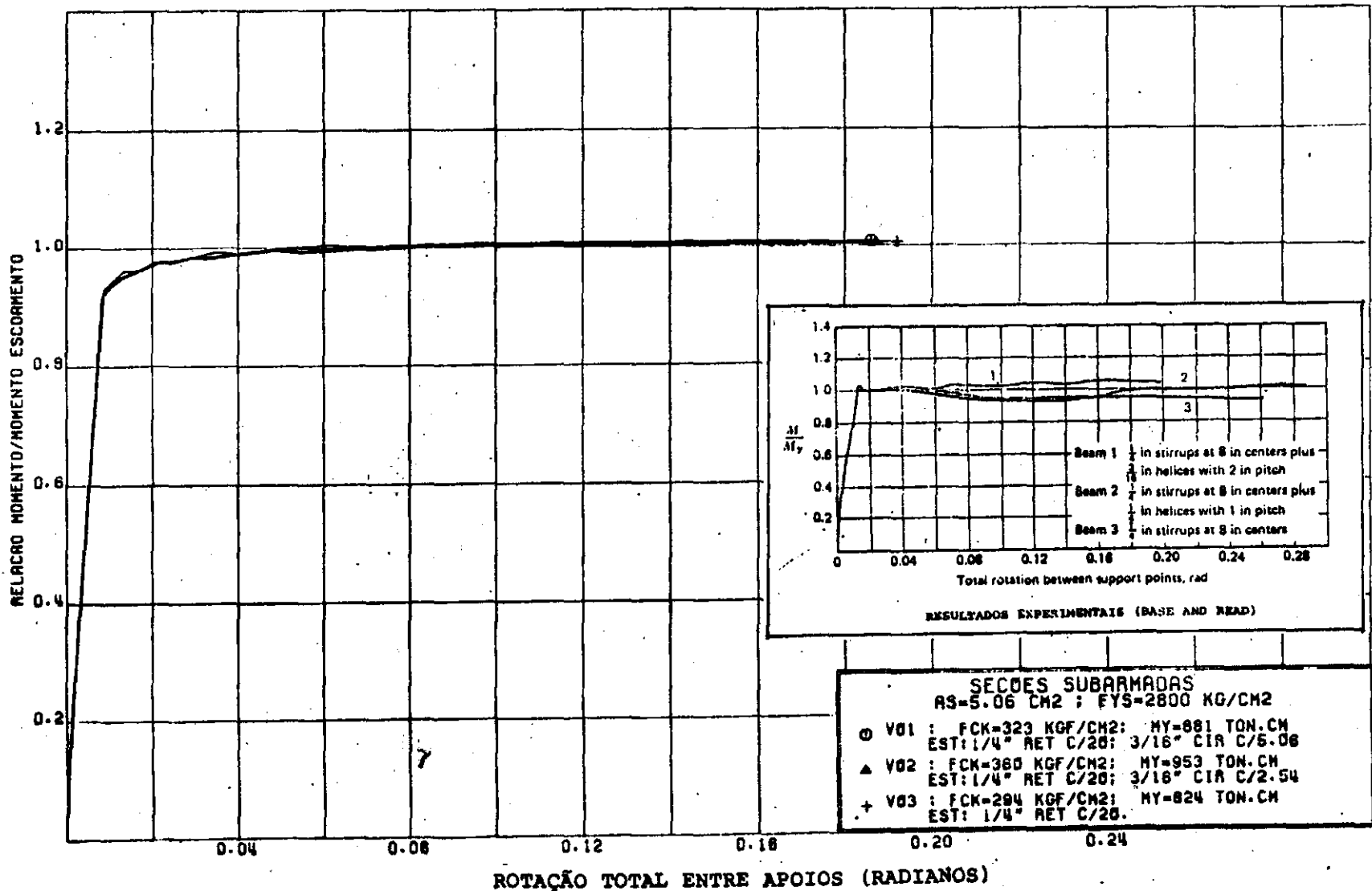


Fig. 2.2a. Diag. [M-φ] Seção Sub-armada

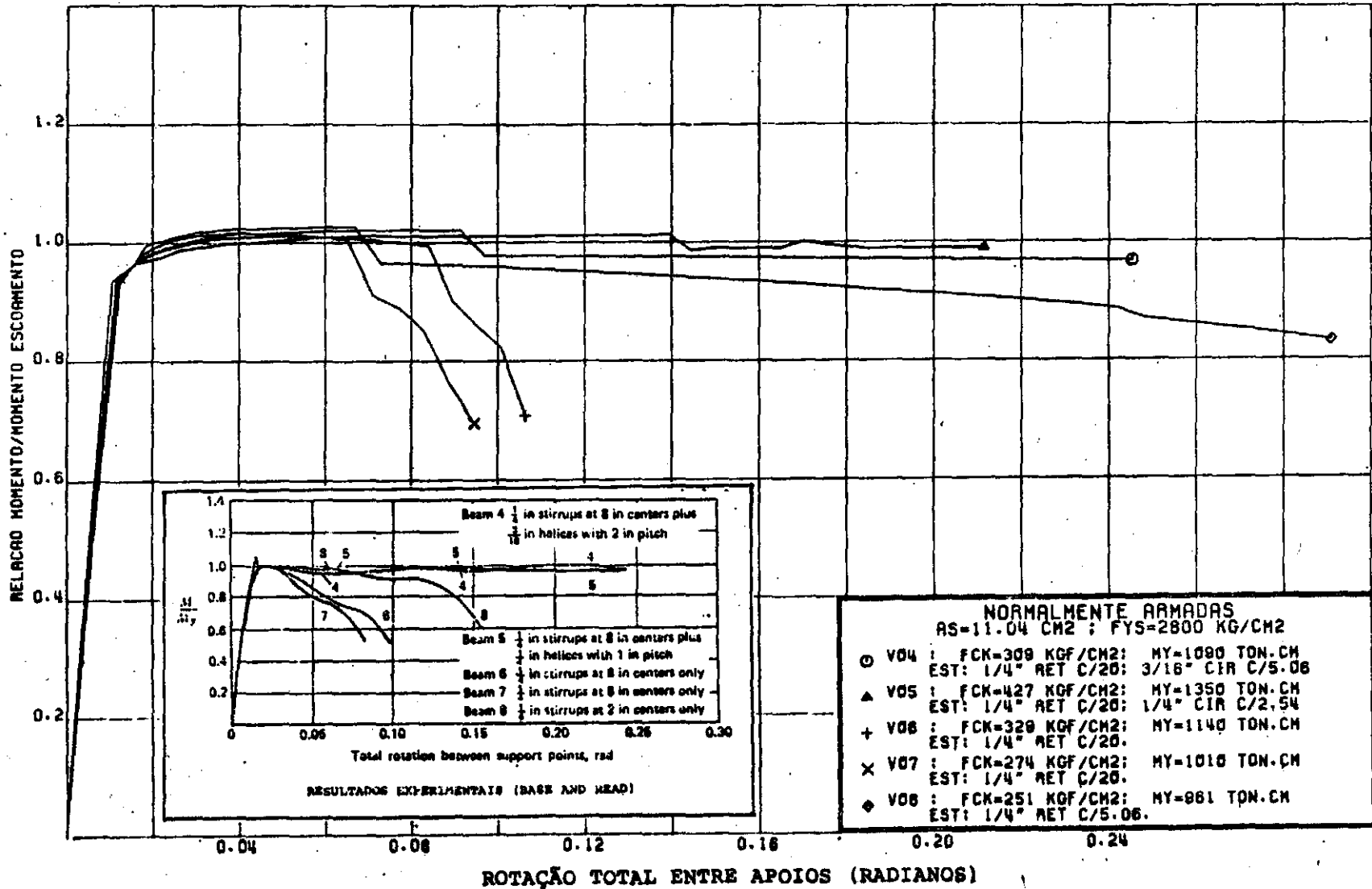


Fig. 2.2b. Diag. [M-φ] Seção Normalmente Armada

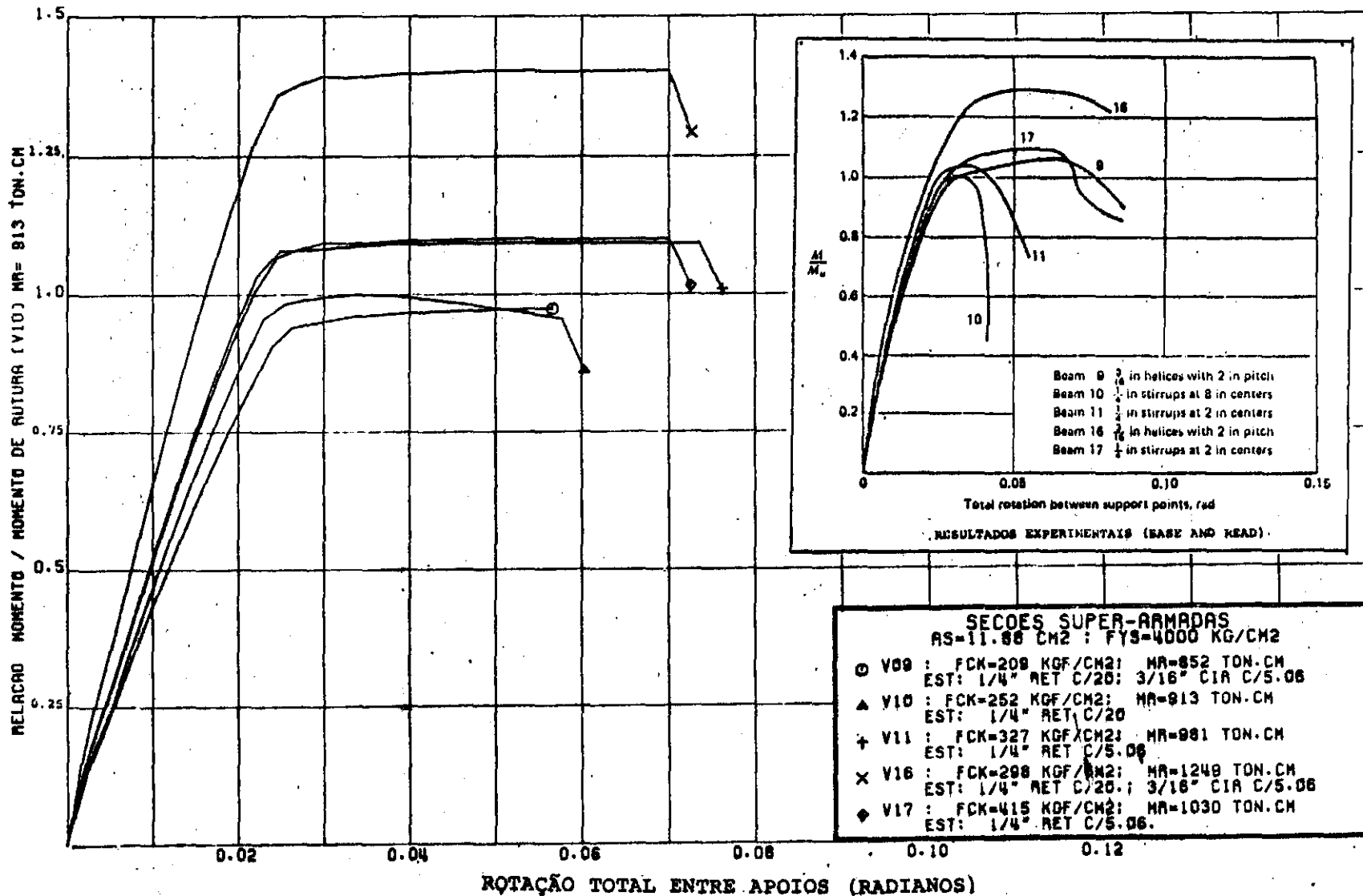


Fig. 2.2c. Diag. [M-φ] Seção Super-Armada

## CAPÍTULO III

### ASPECTOS GERAIS DA REDISTRIBUIÇÃO DE MOMENTOS NAS ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO

Conforme mostramos no capítulo anterior, os aspectos que envolvem a ductibilidade das peças de C.A. podem ser melhor analisados através do diagrama momento-curvatura  $[M-\phi]$  (fig. 3.1).

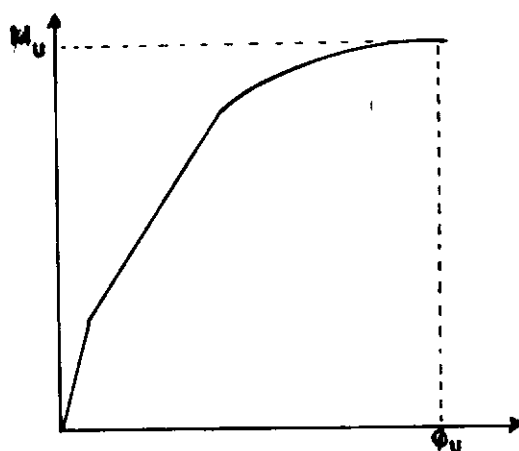


Fig. 3.1 Diagrama momento curvatura

A natureza não-linear da relação  $[M-\phi]$  provoca algum reajustamento nos valores dos momentos na estrutura; ultrapassada a carga de serviço, é possível que eles se diferenciem muito do diagrama obtido na análise elástica.

O grau de redistribuição de momentos numa determinada seção, pode então ser estimado através da área hachureada (R) do diagrama de momento-curvatura reduzido, conforme fig. 3.2.



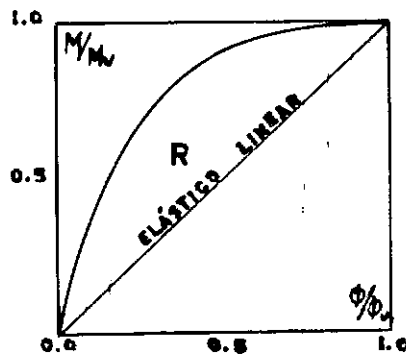
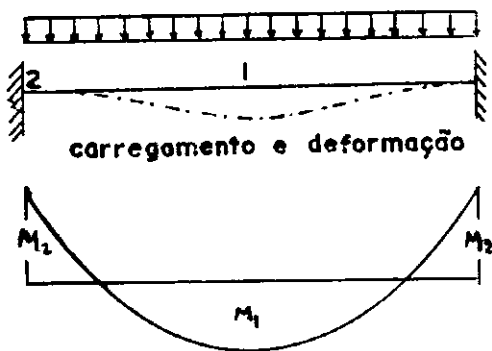


Fig. 3.2 Diag. momento curvatura reduzido

Vários são os fatores que interferem na redistribuição de momentos nas estruturas hiperestáticas. Com elas se ocupou FERRY BORGES et alii<sup>11</sup>, que realizou análises, sobre modelos teóricos, para diferentes diagramas de momento-curvatura reduzido, simplificados em forma bilinear (vide Cap. IV, diagrama [M- $\phi$ ] de BAKER).

Na análise de uma viga bi-engastada (fig. 3.3) o autor citado destaca a influência do critério de dimensionamento (vide exemplo Cap. IV), onde a análise plástica ideal conduz a um acréscimo de 33% na carga última em relação à carga de ruptura elástica ( $q_{ue}$ ).



diag. de momento fletor

Fig 3.3.

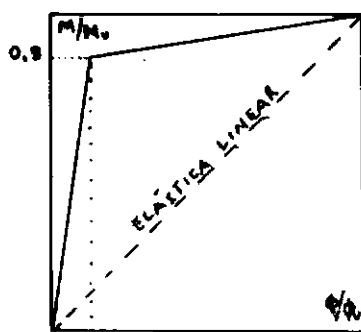
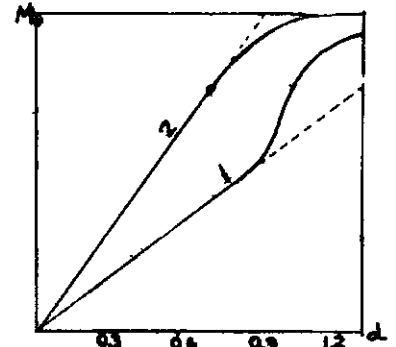


Diagrama M- $\phi$  reduzido



Redistribuição de momentos

Fig 3.4

Para essa análise, o autor admitiu um diagrama [M- $\phi$ ] em

que  $M_1=0,9M_u$  e para  $\phi_1=0,2\phi_u$  (fig. 3.4), obteve assim um acréscimo de 17%, conduzindo portanto a uma redistribuição de 88% em relação à distribuição de momentos perfeitamente plástica.

No quadro 3.1, FERRY BORGES procurou sintetizar a influência dos diferentes efeitos de hiperestaticidade provocada pela disposição do carregamento e pelos diferentes diagramas  $[M-\phi]$  no grau de redistribuição de momentos nas estruturas.

No mesmo trabalho, o autor observa que o tipo de aço causa certa mudança no grau de distribuição, enquanto a percentagem do mesmo exerce influência decisiva na forma do diagrama  $[M-\phi]$ , e conseqüentemente no seu grau de distribuição (fig. 3.5).

A disposição da armadura conduz a uma certa influência na distribuição de fissuras na peça. Essa fissuração, quase impossível de ser evitada<sup>(\*)</sup>, provoca significativa diminuição no valor da rigidez à flexão da peça<sup>1</sup> ocasionando um grande aumento na curvatura nos trechos onde elas se concentram.

Conforme mostra a fig. 3.6, onde há grandes aberturas de fissuras, o comportamento da peça foge ao hipotético comportamento elástico-linear (linha tracejada), definindo a formação das regiões inelásticas, representadas na figura pela área hachurada.

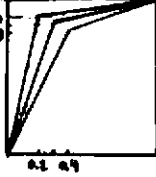
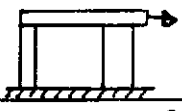
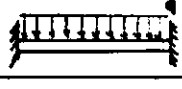
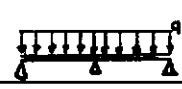
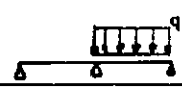
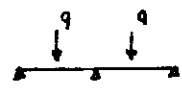

A influência desfavorável dos efeitos do esforço normal, na zona comprimida da peça, embora provoque um certo aumento no valor do momento último, por dificultar a ascensão da linha neu

---

(\*) No artigo "Hiperestática das Rótulas Condicionadas" das 1ª Jornadas Luso-Brasileiras de Eng. Civil, o Prof. Sidney apresenta vários mecanismos que podem minorar os efeitos desfavoráveis da fissuração.

QUADRO 3.1

EFEITO DA HIPERESTATICIDADE NO GRÁU DE REDISTRIBUIÇÃO

 <p>comportamento perfeitamente plástico</p>	$\phi/Q_u = 0,2$	0,30	0,40	
	$M/M_u = 0,9$	0,85	0,90	
<p><math>\alpha = q/q_{ue}</math></p> <p>REPRESENTAÇÃO</p> 	1,33	0,91	0,86	0,83
	1,33	0,88	0,82	0,79
	1,46	0,86	0,78	0,75
<p>ESQUEMATICA</p> 	1,14	0,97	0,96	0,95
	1,12	0,98	0,86	0,84
	1,22	0,98	0,96	0,94

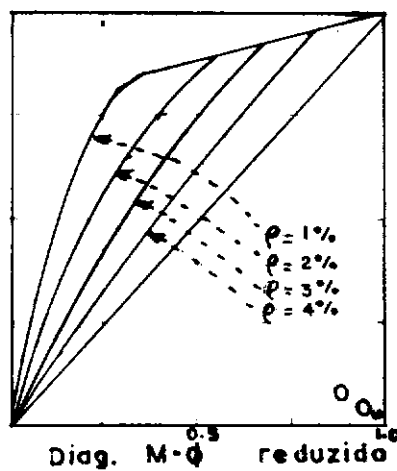
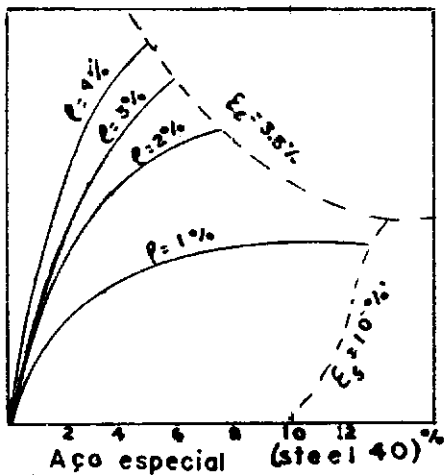
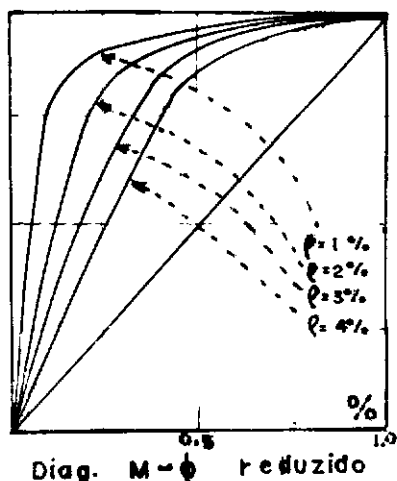
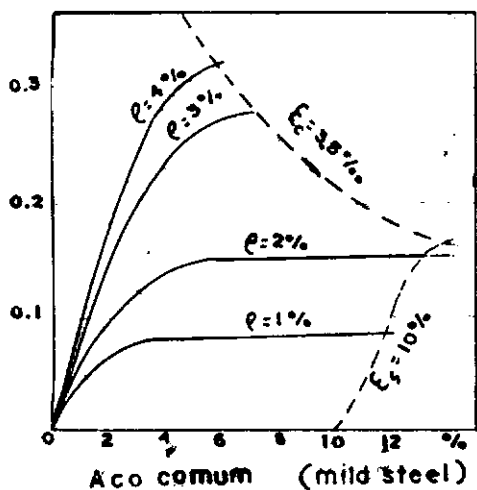
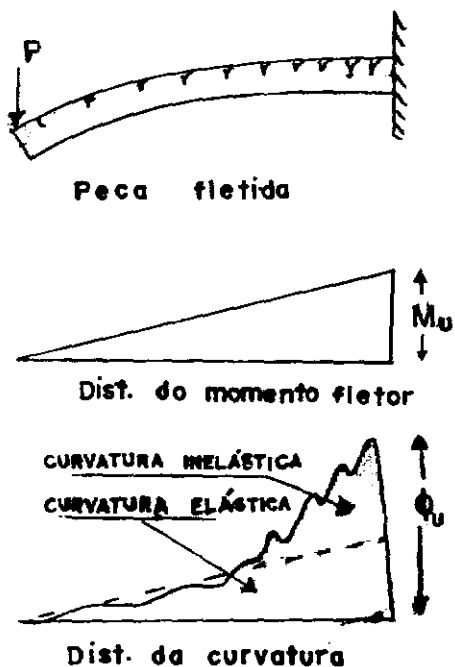


Fig.35 influência do tipo e percentagem ( $\rho$ ) dos aços



Variação da rigidez flexional  
Influência da fissuração  
Fig.3.6

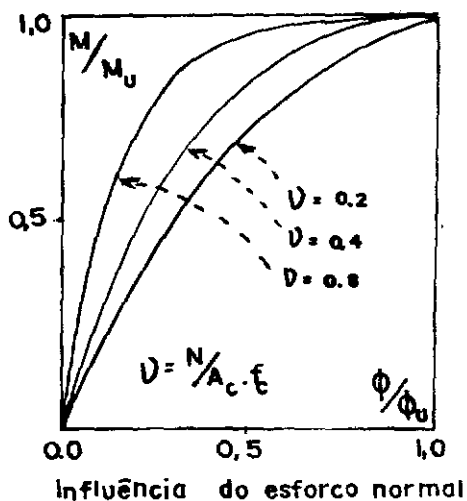


Fig.3.7

tra e por diminuir a capacidade de rotação, não modifica em muito o grau de redistribuição de momentos  $[M-\phi]$  (fig. 3.7).

A pré-compressão pode ser considerada como uma força externa, e sua influência sobre o diagrama  $[M-\phi]$ , dá-se no acréscimo de momento provocado por sua excentricidade.

A variação de seção, pela presença de m̄sulas, é fator em si de alteração na distribuição de momentos; porê̄m nas regiões fora do comportamento elástico, as m̄sulas acentuam esta redistribuição, conduzindo a um descarregamento nas partes de seção menor.

Para finalizar, é importante esclarecer, quando se tratar de p̄rticos, os efeitos provocados pela distribuição de momentos nos n̄s da estrutura.<sup>2,4</sup>

Os casos mais comuns estã̄o apresentados na fig. 3.8.

Os casos  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  sã̄o de características comuns, on̄de os esforços desenvolvidos nã̄o se opõem à formação de fissuras nos engastamentos, coerentes com o desenvolvimento das r̄otulas plásticas tēricas.

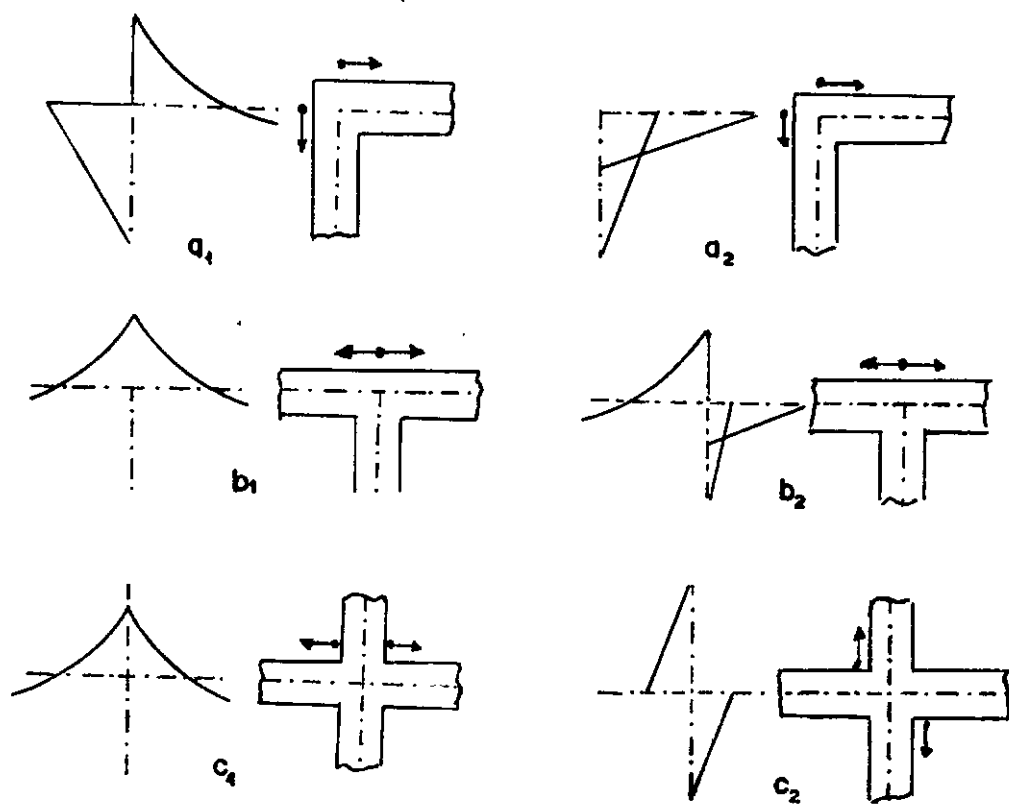
Ao contrário, os casos  $c_1$  e  $c_2$  sã̄o caracterizados pelo fato das fissuras serem impedidas nos engastamentos.

A causa disto, no caso  $c_1$ , deve-se ao esforço normal, aplicado perpendicularmente à barra solicitada, com as fissuras tendendo a se formar no interior do n̄o.

No caso  $c_2$ , a configuração do n̄o e a orientação do momento aplicado nã̄o permite qualquer formação de fissura, fazendo

com que, no n̄o tēorico, o momento fletor varie de forma descontinua, podendo inclusive provocar o aparecimento de fissuras em outros locais, mascarando o comportamento real.

Nestes casos,  $c_1$  e  $c_2$ , deve-se supor que o dom̄nio pl̄astico tēorico se faça acima dos n̄os, fato este considerado no desenvolvimento tēorico de c̄alculo, apresentado no Cap. V.



Configuraç̄o de momento e fissuras nos n̄os de Pórtico  
Fig. 3-8

## CAPÍTULO IV

### ABORDAGEM DOS MÉTODOS DE CÁLCULO EM ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO

Sintetizando os fundamentos da análise plástica, abordados no capítulo anterior (Cap. II), a consideração do comportamento não-elástico do concreto armado, no cálculo de estruturas, compreende dois aspectos essenciais:

- a) A determinação da resistência das seções transversais no estado limite último, i.e., a consideração da redistribuição das tensões na seção.
- b) A determinação dos esforços no sistema hiperestático em regime plástico, i.e., a consideração do efeito de plasticidade no comportamento hiperestático (redistribuição dos esforços) na estrutura.

Os métodos de determinação dos esforços e de dimensionamento na carga última de projeto, evoluíram, no decorrer do tempo, no sentido da admissão das hipóteses da análise plástica aos conceitos básicos da análise linear, inicialmente adotada.

#### 4.1. MÉTODOS DE CÁLCULO BASEADOS NO COMPORTAMENTO ELÁSTICO

O método elástico linear, também conhecido como "método clássico"<sup>16</sup>, basea-se no diagrama de esforços elásticos, i.e. a determinação dos esforços é feita sem considerar a possibilidade de haver variação de rigidez devido ao nível de tensões nas seções; com isso, a distribuição de esforços obtida é unívoca, só dependendo do carregamento aplicado. Por outro lado, o dimensionamento das seções é feito pelo critério da resistência, que considera a distribuição linear de tensões no concreto e no aço, limitadas pelas respectivas tensões admissíveis de cada material, não sendo considerada a contribuição do concreto tracionado. (fig. 4.1)

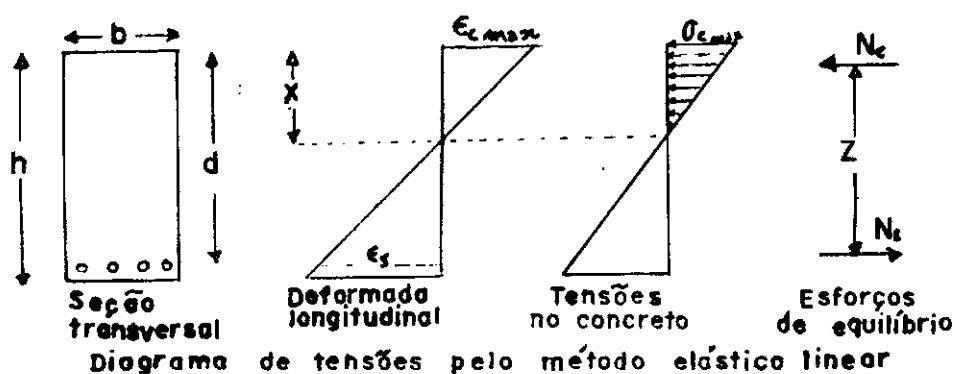


Fig. 4.1

O cálculo da rigidez à flexão é feito baseado na seção completa do concreto sendo desprezado o efeito da fissuração (estádio I).

Por este método, as tensões são tão baixas, no concreto e no aço, que mesmo na carga última de projeto (carga máxima no dimensionamento), não haverá formação de região fora do domínio elástico; com isso não existirá qualquer forma de redis-



tribuição de esforços na estrutura e a fissuração será desprezível.

O Primeiro passo na direção do cálculo plástico foi dado ao incorporar ao método clássico a consideração da não-linearidade do concreto armado no dimensionamento das seções transversais. Constituiu-se assim o método de cálculo no estado limite último, designado em inglês como "ultimate strength design"<sup>7,16</sup>.

Este método considera a distribuição real de tensões de compressão do concreto, limitando o dimensionamento ao esgotamento da camada mais comprimida do concreto na seção, ou indiretamente na deformação excessiva das fibras de aço tracionadas. (fig. 4.2)

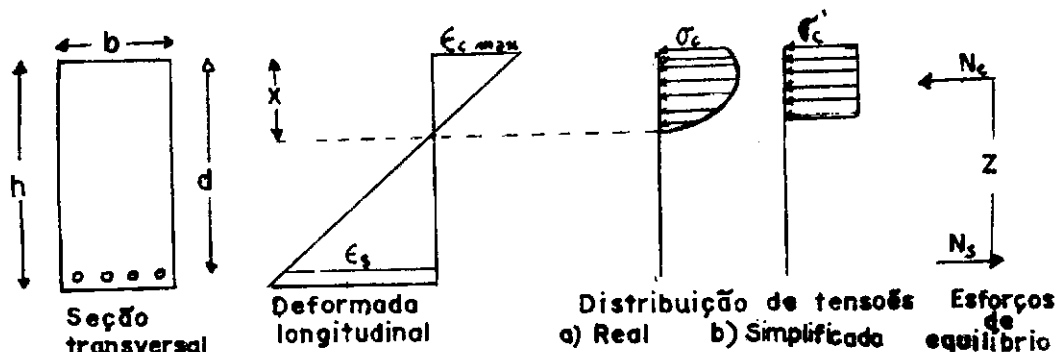


Diagrama das tensões no estado limite último

Fig. 4.2

No cálculo das deflexões adota-se o valor da rigidez média nos trechos onde ocorrem fissuração.

A aplicação deste método garante que apenas uma pequena quantidade de redistribuição de esforços acontece antes de se atingir a carga última de projeto, não diferindo muito do cálculo no regime elástico. Assim esta redistribuição é considerada apenas para atingir a resistência das seções<sup>18</sup>.

A essa altura, o cálculo no regime elástico apresenta sua primeira incoerência, que é de, com os esforços oriundos do cálculo elástico, fazer-se o dimensionamento aproveitando a reserva não-elástica do material. No final, depois de dimensionamento, os esforços que realmente atuam são outros, diferentes dos calculados.

Neste sentido foi dado o segundo passo na admissão das hipóteses da análise plástica, o de considerar o efeito da redistribuição na determinação dos esforços finais na estrutura. Essa nova versão constitui o método de cálculo no regime elasto-plástico<sup>17</sup>, e denominado em inglês de "ultimate load"<sup>7</sup>.

Este método admite um escalonamento na envoltória de momentos elásticos, desde que satisfaça às condições de equilíbrio estático, requerendo das seções mais solicitadas uma certa deformabilidade. Uma característica deste método é de não precisar testar a capacidade de deformação destas seções, estando esta suposta na própria quantidade da decalagem aplicada na distribuição de momentos, obtidos pelo método clássico.

Os códigos normativos e regulamentos de diversos países, preveem diferentes limites para essa decalagem, e quase todos se fixam na questão da distribuição de momentos em vigas contínuas (fig. 4.3).

A Norma NB-1/78 permite, no seu processo simplificado, a simples alteração da envoltória de momentos, determinada segundo o cálculo elástico, reduzindo em 15% os momentos sobre os apoios.

A Norma americana, ACI 318-71, permite que os momentos negativos sejam aumentados ou diminuídos de no máximo  $20(1 - \frac{\rho - \rho'}{\rho_b})\%$ ,

onde  $\rho_b$  percentagem da armadura limite e  $\rho - \rho'$  percentagem da armadura tracionada e comprimida respectivamente. Em geral os valores limites variam entre 10% a 20%.

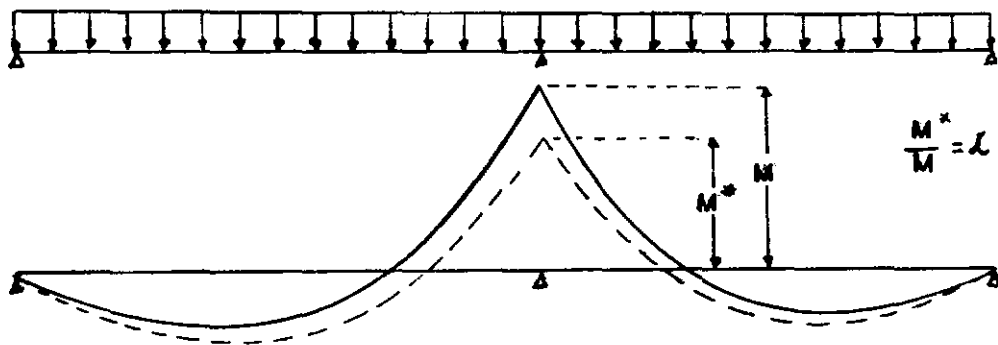
O Código Modelo CEB-FIB/78 apresenta indicativos para a re distribuição de Momentos baseado em estudos sobre as condições de dutibilidade de peças, expressa em termos da classe D. Concreto e da relação entre a altura da linha neutra e altura da seção, e do tipo de análise considerada para a estrutura. Os valores postos neste regulamento indicam que a percentagem máxima para a redução dos momentos nas seções mais solicitadas, não devem ultrapassar 25% do momento obtido pela análise elástica linear.

A Norma Inglesa, BSI-CP110-72, e as recomendações Russas, permitem os limites de 30%, desde que a altura da linha neutra não seja inferior a  $0,3d$ , altura útil da seção.

Este método apresenta algumas incertezas, quer na não fundamentação dos valores limites de decalagem, muito variado de norma para norma e sem conteúdo de cálculo significativo, quer na não necessidade de se garantir que as seções possuam condições de se deformar para assegurar a adaptação da distribuição de momentos finais.

Até aqui os momentos apresentados estão presos ao comportamento elástico da estrutura na carga última de projeto, porém nada podem dizer sobre o comportamento da estrutura na carga próxima a de ruptura (resistência última). Esta diferença de concepção se configura na fronteira entre a análise elástica e a análise das estruturas.

Antes de abordar os métodos de análise plástica, faz-se

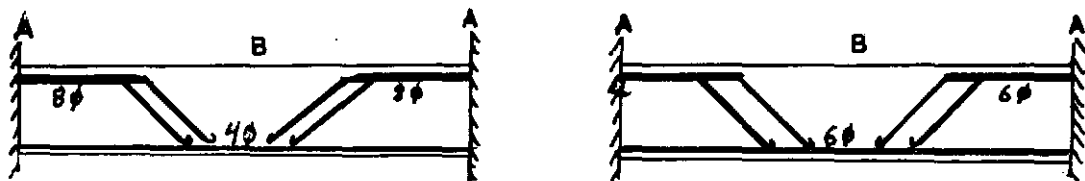


Decalagem na distribuição de momentos fletores elástico

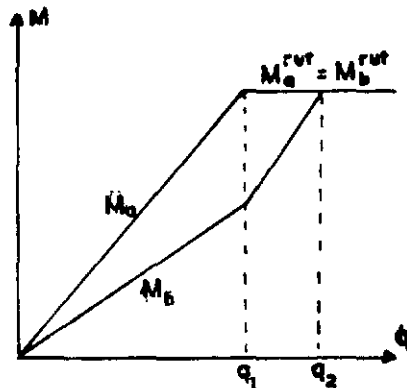
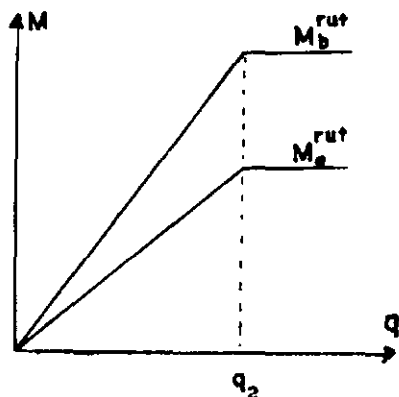
Fig. 4.3



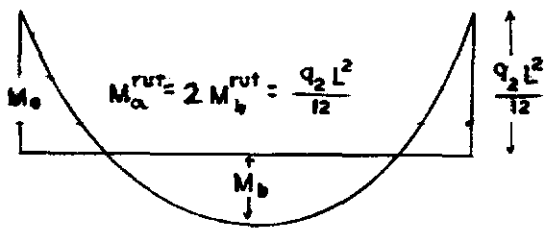
a) Carregamento Aplicado



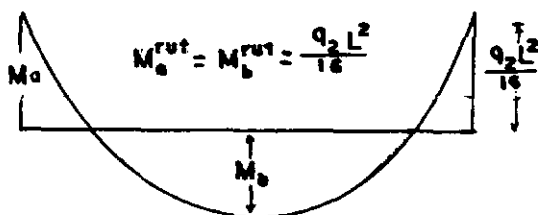
b) Distribuição da armadura na estrutura



c) Diagrama momento-carregamento



Comportamento pástico ideal



Comportamento elasto-pástico

Fig. 4.4

necessária uma exemplificação sobre a importância da escolha do critério de dimensionamento nas seções e o mecanismo de rutura esperado.

Seja uma viga contínua submetida a um carregamento distribuído uniformemente sobre toda extensão da mesma<sup>8</sup>. Se a viga for dimensionada considerando o comportamento perfeitamente plástico para as seções de engaste (fig. 4.4a), verifica-se que os momentos finais são:  $M_a = M_c = 2 \cdot M_b = q_2 \ell^2 / 12$ .

Por outro lado, se a estrutura tiver suas seções dimensionadas segundo um comportamento elasto-plástico, e se por exemplo se definir que o comportamento de rutura se configurará na formação de um mecanismo local, neste tramo, e se existir condições de dutibilidade suficiente nas seções de engaste, a estrutura se comportará como planejado (fig. 4.4b), i.e.,  $M_a = M_b = M_c = q_2 \ell^2 / 16$ .

Observa-se que a linha de fechamento do diagrama de momentos foi modificada para acompanhar o comportamento pré-estabelecido no dimensionamento. Assim pode-se interpretar o diagrama de momentos elásticos como uma solução particular do cálculo plástico<sup>8</sup>, onde não haja dutibilidade nenhuma nas seções.

## 4.2. MÉTODOS DE CÁLCULO BASEADO NO COMPORTAMENTO PLÁSTICO

O cálculo no regime plástico, também denominado de "Limit Design", permite aproximar qualquer distribuição de momentos fletores, na carga última de projeto, satisfazendo às seguintes condições:

a) A distribuição de momentos é estaticamente admissível, isto

é, não viola as leis do equilíbrio estático na estrutura em qualquer dos seus elementos. Deste modo a distribuição de momentos pode ser obtida, por exemplo, traçando uma linha de fechamento sobre o diagrama de momentos livres, i.e., distribuição isostática de momentos fixados nos apoios; compondo um diagrama estaticamente admissível.

- b) A capacidade de rotação plástica é suficientemente capaz de aceitar a distribuição de momentos desenvolvida na carga última.
- c) A fissuração e a deflexão no carregamento em serviço não devem porém ser excessivas.

Satisfazendo estas exigências, podem-se traçar infinitas linhas de fechamento para o diagrama de momentos livres. (fig. 4.5).

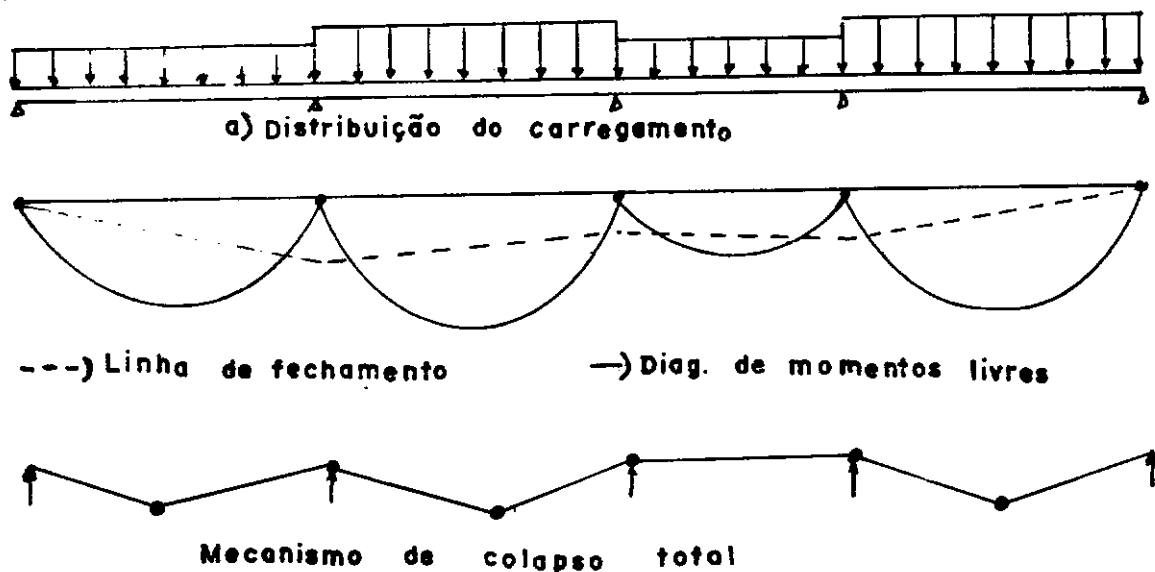


Fig. 4.5

Conforme mostrado no exemplo anterior, as estruturas de concreto armado, são sensíveis a adaptações no diagrama de distribuição de momentos e devem ser dimensionadas de modo a permitir a resistência e dutibilidade necessárias.

Aborda-se em seguida o resumo de alguns métodos de cálculo plástico, que traduzem diferentes enfoques importantes, para nos capítulos subsequentes apresentar exemplos de aplicação de alguns desses métodos e também o desenvolvimento, a formulação e aplicação de um método automatizado de cálculo plástico, aqui proposto, em estruturas aperticadas planas, que constitui o objeto deste trabalho.

#### 4.2.1. MÉTODO DAS ROTAÇÕES ÚLTIMAS (MÉTODO DE BAKER)<sup>2</sup>

Este método se orienta no ajustamento dos valores dos momentos fletores, atribuídos às seções consideradas críticas (rótulas fictícias), os quais são limitados pela capacidade de rotação destas seções e que por sua vez, condicionadas a satisfazer à serviciabilidade.

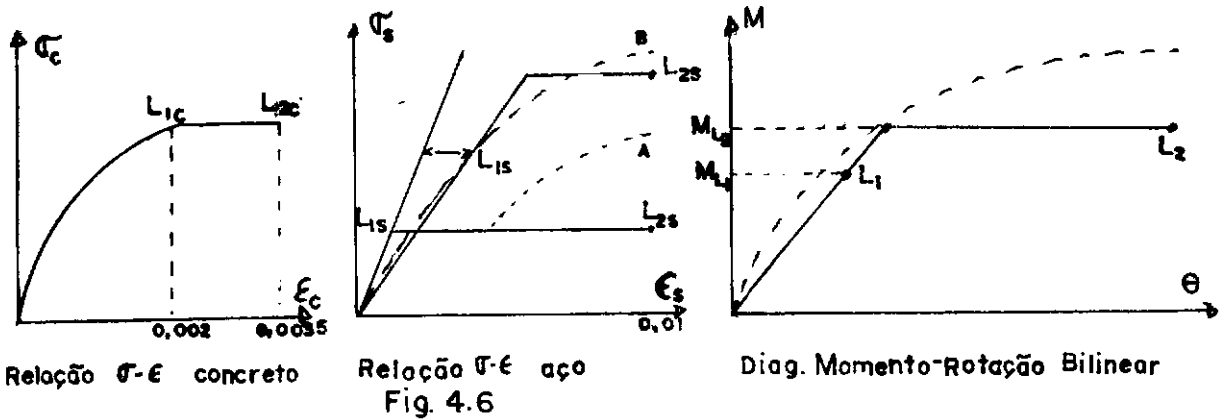
O método começa por tornar uma estrutura "n" vezes hiperestática, em isostática, mediante inserção de "n" rótulas fictícias nos pontos de máxima solicitação, conhecidos através de um cálculo prévio, ou pelo conhecimento antecipado do comportamento de estrutura sob a carga última.

Baseado no princípio dos trabalhos virtuais, constrói-se um sistema de "n" equações, pela compatibilidade de rotação em cada rótula, supondo:

- a) Que o diagrama de momento-rotação é elasto-plástico bilinear; sua construção é feita em função dos esforços atuantes e das características físicas do material da seção. Os limites " $L_1$  e  $L_2$ " são deduzidos do diagrama tensão-deformação dos

materiais, sendo seus valores determinados em correspondência com o diagrama  $[M-\phi]$  da seção.

b) Todas as barras são dimensionadas de modo a não permitir que em qualquer seção, fora das regiões plásticas adotadas, desenvolvam-se zonas inelásticas.



Daí resulta a equação de compatibilidade geométrica para cada rótula, deduzida da equação de Muller-Breslaw:

$$\int \frac{M_i M_0}{E I I'} ds + X_i \int \frac{M_i M_i}{E I I'} ds + \sum_{j=1, j \neq i}^n X_j \int \frac{M_i M_j}{E I I'} ds + M_i \theta_i = 0 \quad (1)$$

onde  $M_i$  é o momento aplicado à rótula  $i$  em estudo; muitas vezes tomado unitário no sentido de facilitar a compreensão dos cálculos.

A Equação (1) poderá ser ainda representada por

$$S_{i0} + X_i S_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^n X_j S_{ij} = -1 \cdot \theta_i \quad ; \text{ para } M_i=1 \quad (2)$$

Com base nas hipóteses simplificadoras (a e b), os coeficientes clapeironianos  $S_{i0}$ ,  $S_{ii}$  e  $S_{ik}$ , são facilmente obtidos e nas "n" equações, os valores dos hiperestáticos  $X_j$  são substituídos por seus valores arbitrados  $M_{uj}$ , resolvendo o sistema de



equações, chega-se a um conjunto de valores  $\theta_i$ , que são comparados com os limites, determinados através de algumas fórmulas que envolvem as características físicas dos materiais e suas disposições na peça. Destas relações, a mais bem elaborada é a de BAKER-AMARAKONE<sup>4</sup> que estabeleceram:

$$\theta_{ui} = 0,8 C_s C_c |\epsilon_{cu}^* - \epsilon_{c,le}| \frac{a}{d} \quad (3)$$

onde:

a - distância da seção ao ponto de momento nulo

d - altura efetiva de seção

$C_s$  e  $C_c$  - coeficientes tabulados referentes ao aço e ao concreto

$\epsilon_{cu}$  - significa a deformação última na borda mais solicitada do concreto e seu valor máximo depende da percentagem da armadura de confinamento  $\rho_w$  e da altura da linha neutra  $H_u$

$$\theta_{ui} = \epsilon_{cu}^* = -0.0015(1+1,5\rho_w+(0,7-0,1\rho_w) \frac{d}{H_u}) \quad (4)$$

Caso algum dos valores dos  $\theta_i$  encontrados difiram muito das rotações admissíveis  $\theta_{ui}$ , procede-se a um novo reajustamento nos momentos  $X_i$ . Se não houver convergência, em uma certa quantidade de vezes, poderá ser necessário alterar a posição de alguma rótula fictícia, ou fornecer melhores condições às seções mais solicitadas para que estas possam permitir a convergência do processo.

#### 4.2.2. MÉTODO DAS ROTAÇÕES IMPOSTAS (MÉTODO DE MACCHI)<sup>1 3</sup>

Baseia-se no conhecimento da capacidade de rotação das seções críticas, determinadas por um programa de ensaios coordenados pelo CEB em função de elementos paramétricos, e que leva em consideração principalmente a percentagem de armadura na seção.

Por este método chega-se a valores dos momentos que conduzem a um equilíbrio estático da estrutura. Ao contrário do anterior, este admite a contribuição de regiões inelásticas formadas entre as seções tornadas plásticas.

Apoiado no princípio da superposição, estabelecem-se as equações de compatibilidade geométrica para cada uma dessas rótulas e determinam-se separadamente:

- a) Os valores dos momentos oriundos do carregamento externo (carregamento último).

$$p / \theta_j = 0 \rightarrow \delta_{i0} + \delta_{ii} X_i + \sum_{k \neq i}^n \delta_{ik} X_k = 0 \quad (n\text{-equação}) \quad (5)$$

- b) Os valores dos momentos devidos à imposição de rotação inelástica, tornada unitária ( $\psi_j = 1$ )<sup>(1)</sup>, as seções entre as rótulas.

$$p / \psi_j = 1 \rightarrow \delta_{ij} + \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^n \delta_{ik} + 1 = 0 \quad (m\text{-equação}) \quad (6)$$

Arbitrando os valores para as rotações plásticas  $\theta_j$  e as contribuições inelásticas  $\psi_j$ , refletida em termos de coeficientes de majoração, determinam-se os momentos correspondentes e faz-se a superposição de todas as distribuições; assim se obtêm

(1)  $\psi$  é, segundo Macchi, a rotação plástica que ocorre fora das rótulas plásticas arbitradas.

a distribuição final:

$$M = M_0 + \sum_{i=1}^m \psi_i M_{\psi_i} + \sum_{i=1}^n \theta_i M_{\theta_i} \quad (7)$$

onde:

$$M_{\psi_i} = X_i \quad p/ \psi_i = 1 \quad e \quad p/ \theta_i = p/ \psi_{k \neq i} = 0$$

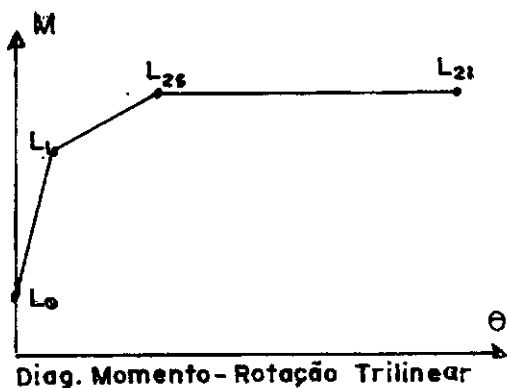
$$M_{\theta_i} = X_i \quad p/ \theta_i = 1 \quad e \quad p/ \theta_{k \neq i} = p/ \psi_i = 0$$

$$M_0 = X_i \quad \forall \theta_i = 0 \quad e \quad p/ \psi_i = 0$$

O emprego prático deste método coincide assim com o uso direto das equações gerais de compatibilidade, por isso designa-se do "MÉTODO EXATO".

O cálculo dos coeficientes  $\delta_{ij}$ ,  $\delta_{ik}$ ,  $\delta_{i0}$  é feito usando um diagrama momento-rotação  $[M-\theta]$  elastoplástico trilinear, conforme fig. 4.7. No traçado deste diagrama, limites  $L_1$  e  $L_2$  são os do bilinear, incluindo-se neste o  $L_0$  da fissuração na seção.

Quanto aos limites das rotações  $\theta_{\min}$  e  $\theta_{\max}$  recorre-se ao abaco que traduz os resultados finais das pesquisas coordenadas pelo CEB (vide apêndice A).



No apêndice A estão apresentados roteiros práticos para aplicação dos dois métodos acima descritos, bem como exemplos de sua utilização.

#### 4.2.3. MÉTODO DE COHN<sup>9</sup>

COHN, desenvolveu um método visando atender, inicialmente, às condições de equilíbrio e serviçabilidade. A capacidade de rotação é testada posteriormente.

A solução, obtida por decalagem na linha de fechamento da distribuição de momento elástico, resulta de combinações do carregamento último, porém multiplicados por parâmetros apropriados, ligados às seções.

Os valores destes parâmetros devem satisfazer às seguintes hipóteses:

- a) No carregamento de serviço as seções críticas devem permanecer no domínio elástico.
- b) No carregamento último, os esforços devem satisfazer ao equilíbrio estático.
- c) Os valores desses parâmetros devem ser mínimos.

As seções críticas são posicionadas com base no diagrama de momentos fletores elástico e as regiões plásticas formadas, devem garantir que a capacidade de rotação seja a necessária.

## CAPÍTULO V

### MÉTODOS ITERATIVOS DIRETOS

#### (CONSIDERAÇÃO DA NÃO-LINEARIDADE FÍSICA DO C.A.)

No capítulo anterior foram apresentados dois métodos que consideram os efeitos da plasticidade na redistribuição dos esforços nas estruturas.

Todavia esses métodos, "das rotações últimas" (método de BAKER) e "das rotações impostas" (método de MACCHI), consideram que a contribuição plástica se dá de forma discreta e que a rigidez dos elementos permanecem invariantes no decorrer do processo de convergência dos esforços na estrutura.

Neste capítulo serão apresentados dois algoritmos automatizados para resolução de estruturas aperticadas planas de concreto armado. O primeiro desenvolvido com base no "método dos esforços" e o segundo no "método dos deslocamentos".

A consideração da não-linearidade física do C.A. em ambos, conduz a uma atualização dos valores da rigidez flexional e normal dos elementos a cada etapa do processo iterativo e com isso os efeitos da plasticidade se dão de forma contínua no mesmo.

## 5.1. ALGORITMO DE ANÁLISE PELO MÉTODO DAS FORÇAS

O desenvolvimento deste método será feito sob a mesma ótica dos métodos acima citados, destacando-se as semelhanças e as diferenças desse com os demais.

### 5.1.1. CONCEITOS BÁSICOS (PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS-PTV)

Seja um elemento qualquer da estrutura sob ação de um sistema de forças em equilíbrio<sup>3</sup>, fig. 5.1.1.

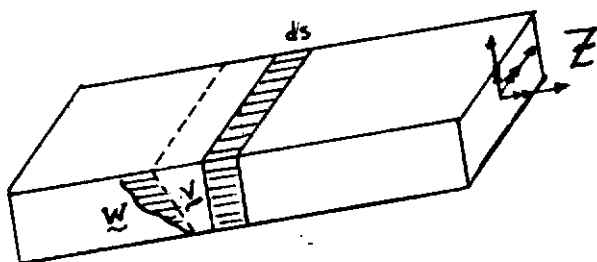


Fig. 5.1.1 Elemento genérico

Submetendo-o a uma pequena deformação virtual compatível com suas vinculações e que não altere a situação de equilíbrio. O Princípio dos Trabalhos Virtuais assegura que: "O Trabalho Virtual realizado pelas forças externas é equivalente à soma dos Trabalhos Virtuais efetuada pelos esforços internos".

$$\underline{Z} \underline{V} = \int \underline{W} \underline{\phi} \underline{ds} \quad (5.1.1)$$

onde:

$\underline{Z}$  - força externa generalizada

$\underline{V}$  - deslocamento virtual generalizado

$\underline{W}$  - esforço interno generalizado

$\underline{\phi}$  - deformação virtual generalizada

$\underline{ds}$  - unidade de comprimento do elemento generalizado

No sentido de facilitar a apresentação e o desenvolvimento deste princípio às estruturas aperticadas planas (objetivo deste trabalho), convém estudar isoladamente a ação dos esforços de flexão, preponderantes para este tipo estrutural desprezando, em primeira aproximação, a influência dos demais, normal e cisalhante. Desde que essas simplificações não alterem o estado de equilíbrio entre forças e suas reações, o PTV poderá ser aplicado.

Seja então um elemento de pórtico plano submetido a um conjunto de forças em equilíbrio (fig. 5.1.2a). Pelo PTV, em se aplicando entre duas seções infinitamente próximas um deslocamento virtual  $V$  (fig. 5.1.2b), o trabalho realizado pelo momento  $Z_i$ , das forças externas, é equivalente ao somatório dos trabalhos dos esforços internos  $W_i$  ocasionados pelas deformações sofridas por toda a estrutura, em decorrência do deslocamento virtual  $V$ .

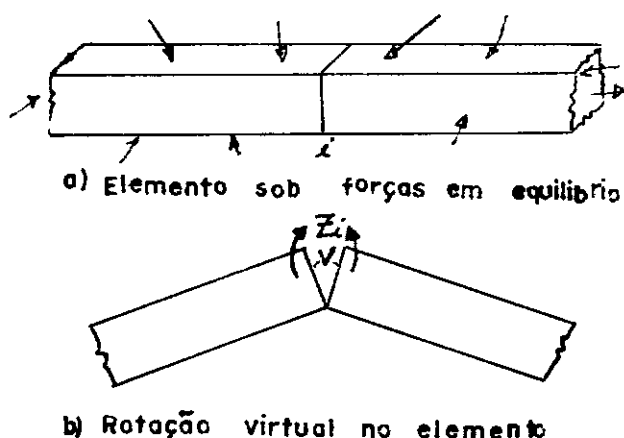


Fig. 5.1.2

Assim a equação (5.1.1), para as seções adjacentes a seção  $i$  escreve-se:

$$Z_i V = \int W_i \phi ds \quad (5.1.2)$$

Porém, desde que para satisfazer a compatibilidade geométrica entre os elementos, a rotação mútua entre seções contíguas deve ser nula, a equação (5.1.2) tem sempre seu primeiro termo igual a zero:

$$\int W_i \phi ds = 0 \quad (5.1.3)$$

Esta equação constitui a base para o método de análise plástica em questão.

### 5.1.2. DESENVOLVIMENTO DO MÉTODO (APRESENTAÇÃO E EQUAÇÕES BÁSICAS)

Seja uma estrutura, a porticada plana, "n" vezes hiperestática, submetida a um carregamento qualquer, conforme fig. 5.1.3a.

Tornando-a isostática, por injeção de "n" rótulas "fictícias", conforme fig. 5.1.3b, os esforços a essas rótulas incorporados, a fim de reproduzir o equilíbrio, devem satisfazer a equação (5.1.3).

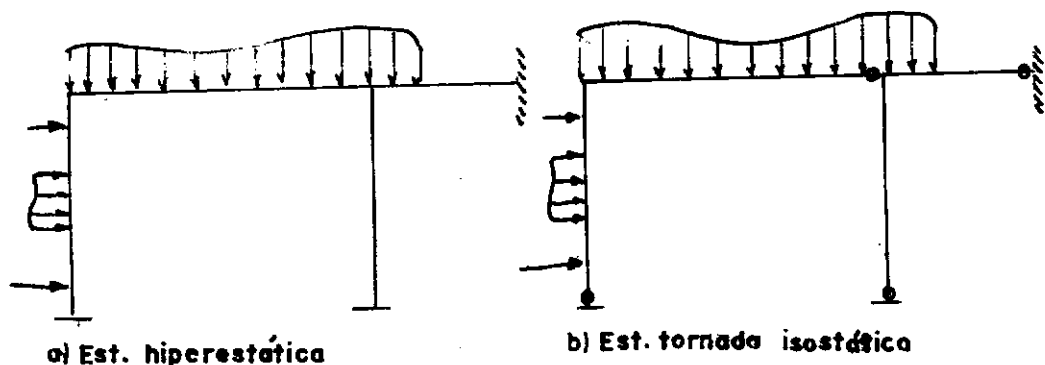


Fig. 5.1.3 Determinação do sistema principal



Portanto, para se determinar os momentos atuantes em cada rótula, no sistema tornado isostático (sistema principal), considera-se a influência de um momento fletor incógnito  $\bar{M}_i$ , função do Hiperestático  $X_i$ , através da equação (5.1.4)

$$\int \bar{M}_i \phi ds = 0 \quad (5.1.4)$$

$$\text{onde } \bar{M}_i = X_i \cdot M_i$$

onde:

$\phi$  é a curvatura das seções ao longo dos elementos devida ao carregamento externo e aos momentos incógnitos  $\bar{M}_i$  atuantes em cada rótula do sistema.

Não havendo variação na rigidez dos elementos<sup>(+)</sup>, para uma mesma etapa de carregamento. A curvatura  $\phi$  poderá ser computada como a soma da curvatura produzida pelo carregamento externo  $\phi_0$  e a devida aos momentos incógnitos  $M_j$ , ditos momentos hiperestáticos, nas rótulas<sup>(\*)</sup>  $\phi_j$ ;  $j=1, n$ .

$$\int M_i \phi_0 ds + \sum_{j=1}^n \bar{M}_i \phi_j ds = 0 \quad (5.1.5)$$

A curvatura pode ser determinada pela equação geral  $\phi = \frac{M}{K}$ <sup>(\*\*)</sup> segundo isso  $\phi_0 = \frac{M_0}{K}$  e  $\phi_j = \frac{M_j}{K}$

$$\int \frac{M_i M_0}{K} ds + \sum_{j=1}^n \int \frac{\bar{M}_i M_j}{K} ds = 0 \quad (5.1.6)$$

(+) Ou em partes do elemento considerado.

(\*) O que não deve ser confundido com o princípio da superposição, válido apenas para o regime elástico. O que está se processando é a soma da influência dos esforços internos (solitantes e resistentes) em presença de uma mesma rigidez, conhecida  $K$ .

(\*\*) São está sendo considerada a influência dos esforços de flexão com detrimento das contribuições dos esforços normais e cisalhantes.

Neste ponto reside uma sensível diferença entre os métodos de análise plástica anteriormente citados, o de Baker e o de Macchi, e este em desenvolvimento.

Apoiado na distribuição de curvatura ao longo dos elementos, fig. 5.1.4, Macchi simplifica os cálculos considerando a contribuição da curvatura não-elástica através de duas formas distintas.

A primeira se refere às zonas inelásticas, isto é, zonas entre rótulas, para o domínio elástico, como:

$$\int_K M_i \phi_p ds = M_i^\Omega \psi_k \quad \text{onde: } \psi_k = \int_{\ell_{pk}} \phi_p ds \quad (5.1.7')$$

A segunda se refere às zonas plásticas, isto é, na região adjacente às rótulas consideradas.

$$\int_i M_i \phi_p ds = M_i^\Omega \theta_i \quad \text{onde: } \theta_i = \int_{\ell_{pi}} \phi_p ds \quad (5.1.7'')$$

( $M_i^\Omega$  significa o valor do momento médio no comprimento  $\ell_p$  considerado).

A equação geral, segundo essas simplificações torna-se então:

$$\int \frac{M_i M_o}{E I} ds + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int \frac{M_i M_j}{E I} ds + \sum_{k=1, m} \psi_k M_i^\Omega + M_i^\Omega \theta_i = 0 \quad (5.1.7)$$

Baker utiliza a mesma maneira de simplificação, porém não considera as contribuições das regiões inelásticas, ficando a equação (5.7) na forma:

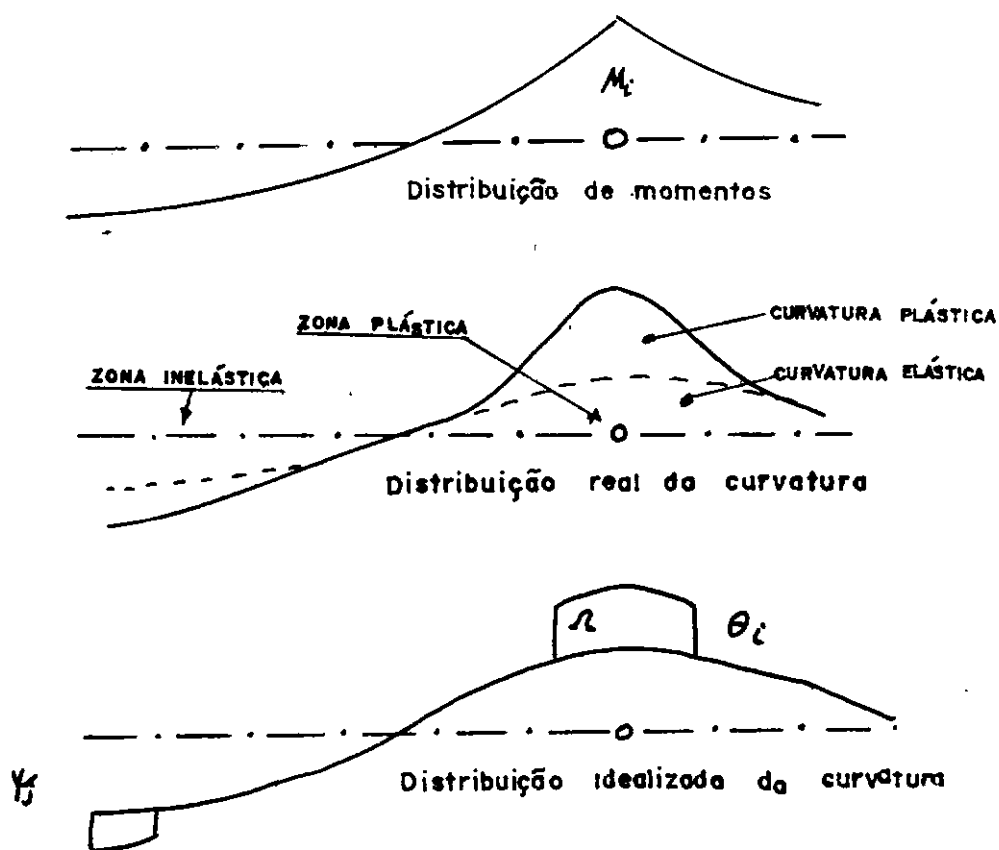


Fig. 5.14 Contribuição plástica da curvatura pelo método de MACCHI

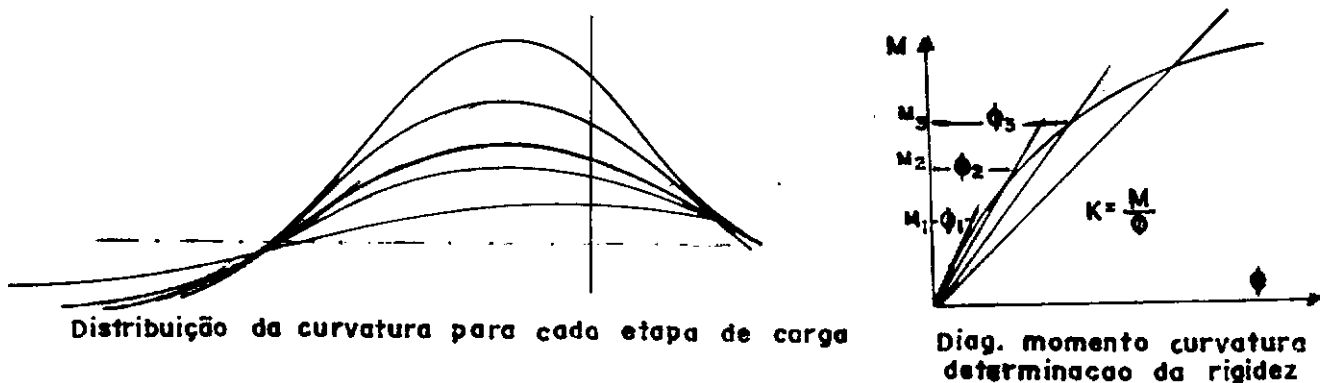


Fig. 5.1.5

$$\int \frac{M_i M_0}{E I} ds + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int \frac{M_i M_j}{E I} ds + M_i^\Omega \theta_i = 0 \quad (5.1.8)$$

sendo  $E I$  o produto do Módulo de Elasticidade médio de concreto pela inércia relativa de seção levada constante ao longo de todo o processo.

Por outro lado, no método aqui em desenvolvimento, não se faz distinção entre regiões elásticas e não-elásticas, retirando-se o valor da rigidez do próprio diagrama momento-curvatura  $[M-\phi]$ , a cada mudança na distribuição de momentos e ao longo de todo o elemento. (fig. 5.1.5)

O controle das deformações na estrutura é feito ao final de cada etapa de carregamento, definindo-se com isso, o critério da análise em estudo.

No caso da análise ser de projeto de uma estrutura, as deformações deverão ficar limitadas aos valores máximos permitidos.

No caso da análise ser de verificação encontra-se a carga de rutura da estrutura, ou a capacidade máxima resistente da mesma. O controle será feito buscando-se a menor carga que promove a formação de um mecanismo em parte ou na estrutura como um todo.

### 5.1.3. DOMÍNIO DE APLICAÇÃO DO MÉTODO

No item anterior foi desenvolvida a formulação geral do método para descrever as equações de equilíbrio do sistema es-

trutural.

Estas equações, por sua vez, estão vinculadas à definição do sistema isostático principal para a estrutura, conforme a inserção de rótulas "fictícias" de igual número ao grau de hipers\_taticidade da mesma.

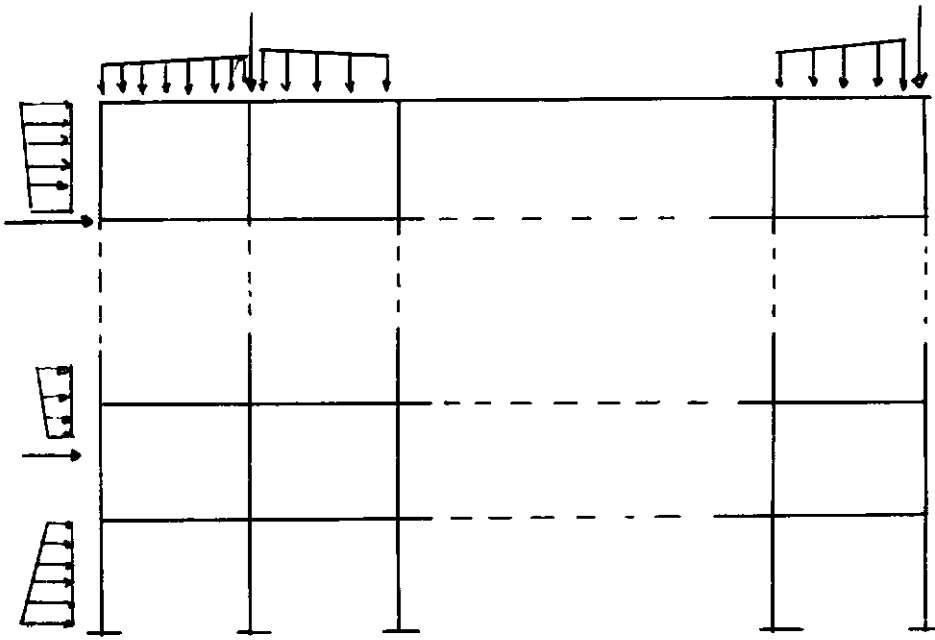
O posicionamento dessas rótulas conduz à definição primária do mecanismo de rutura global que a estrutura possa vir a assumir. Por isso o sistema isostático principal escolhido deve ser coerente com o comportamento da mesma, face à distribuição do carregamento que lhe é aplicado.

Em geral a localização dessas rótulas se faz nas regiões de maior concentração de esforços. Para um determinado esqueleto estrutural e uma não muito variada forma de distribuição de carregamento, estas regiões não variam muito. Podem ser determinadas à priori através de uma análise elástica pouco rigorosa, ou no conhecimento do comportamento de uma estrutura semelhante.

O domínio de aplicação do método fica assim restrito à validade do sistema isostático principal adotado para o conjunto, estrutura e carregamento atuante.

### 5.1.3.1. SISTEMA ISOSTÁTICO PRINCIPAL

Os elementos de cálculo que serão desenvolvidos no decorrer desse trabalho, baseiam-se no esquema estrutural apresentado na fig. 5.1.6 (uma estrutura aporticada plana, de múltiplos andares, sob carregamento vertical qualquer e uma distribuição de cargas horizontais qualquer, em um dos lados externos), o que



ESTRUTURA ORIGINAL E CARREGAMENTO ESTERNO  
Fig.5.1.6

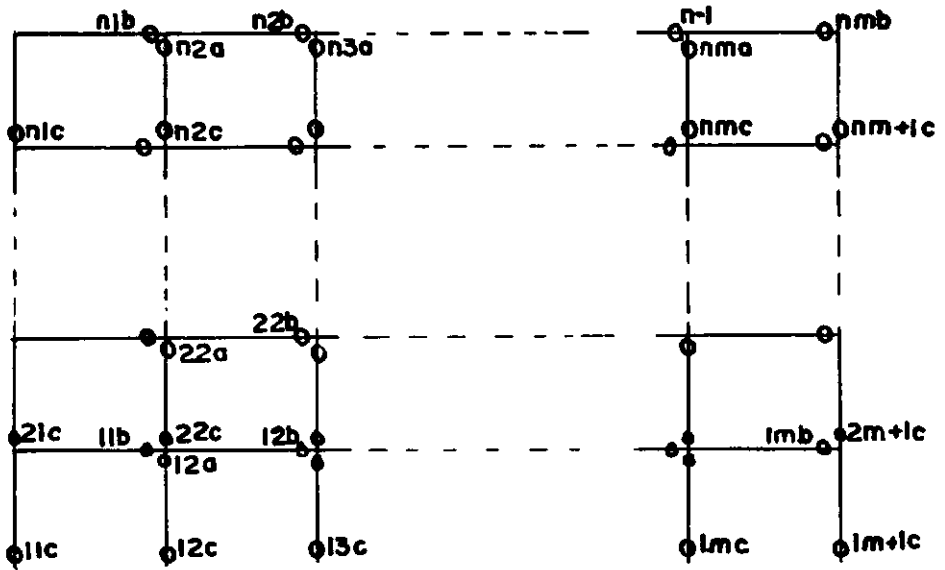


Fig. 5.1.7 SISTEMA PRINCIPAL ISOSTÁTICO

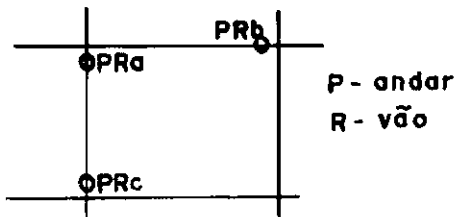


Fig.5.1.8 UNIDADE TIPO DO PÓRTICO

abrange o conjunto estrutura e carregamento comumente encontrados na prática.

O sistema isostático principal para este esquema estrutural, está apresentado na fig. 5.1.7. De acordo com a argumentação anterior admite-se que as rótulas estejam posicionadas nas principais regiões de concentração de esforços (momentos).

A designação das rótulas seguiu a orientação apresentada na fig. 5.1.8. Definindo-se três tipos de rótulas a, b e c, em uma unidade tipo pórtico simples. Esta apresentação será útil na definição e na preparação dos elementos do algoritmo de cálculo da estrutura (programa computacional).

Vê-se que apenas nas faces laterais, a rótula tipo a não aparece.

### 5.1.3.2. DETERMINAÇÃO DOS ESFORÇOS NA ESTRUTURA

Na fig. 5.1.9 estão esquematizados genericamente os diagramas de influência dos momentos devidos às cargas externas, verticais ( $M_{V_0}$ ) e HORIZONTAIS ( $M_{H_0}$ ), e aos momentos hiperestáticos ( $X_j$ ) atuantes em um determinado andar P.

A aplicação do método inicia-se por descrever, para cada rótula, a expressão geral (5.1.6), constituindo-se então um sistema de "n" equações, como se apresenta em (5.1.9).

$$\left[ \int \frac{M_i (M_{V_0} + M_{H_0})}{K} ds + \sum_{j=1}^n X_j \int \frac{M_i M_j}{K} ds \right]_{i=1,n} = 0 \quad (5.1.9)$$

onde:

"n" e o número de momentos hiperestáticos no sistema, igual ao número de rótulas "fictícias".

### 5.1.3.3. DETERMINAÇÃO DOS MOMENTOS HIPERESTÁTICOS

Determinar os momentos hiperestáticos que satisfaçam às condições de equilíbrio do sistema (5.1.9), é na verdade encontrar os valores dos esforços de flexão que atuam nas posições onde estão localizados "ficticamente" as rótulas no sistema isostático principal.

A resolução desse sistema é feita através de um procedimento iterativo em que, partindo-se de um conjunto de valores iniciais, determinados utilizando-se a rigidez elástica, fazem-se ajustamentos nos valores da rigidez dos elementos, em cada etapa de cálculo, e encontra-se novo conjunto de valores para os momentos hiperestáticos.

Este processo prossegue até haver convergência final, isto é, até que dois conjuntos de valores consecutivos não apresentem diferenças significativas entre si. Caso não haja convergência a um número determinado de iterações, promove-se uma verificação de formação de mecanismo parcial ou global.

A carga de ruptura considerada será a menor carga que não promova mais o processo de convergência.

No caso de verificação da estrutura, promove-se uma análise para o carregamento de projeto previsto multiplicado por coeficientes de majoração.



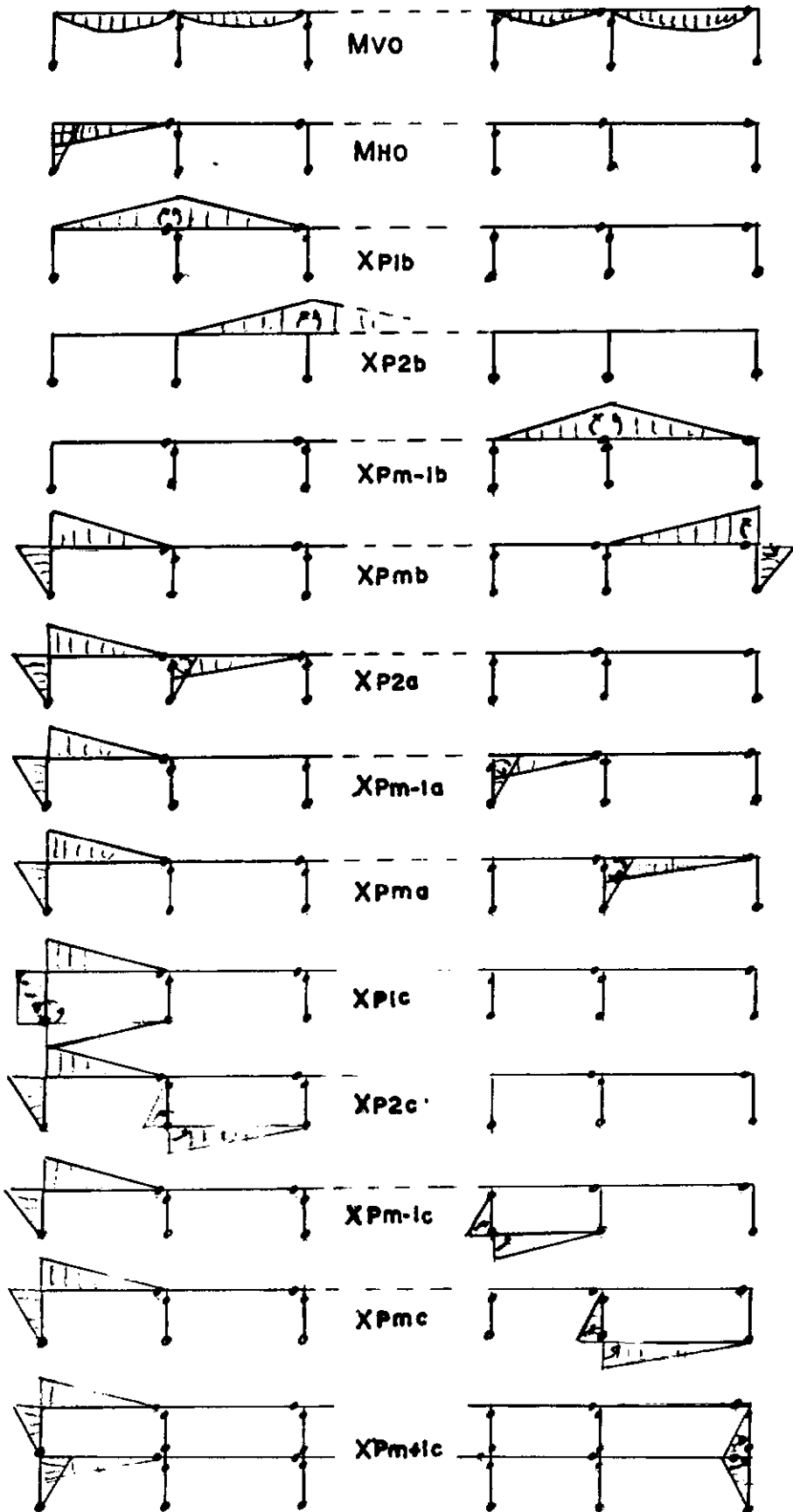
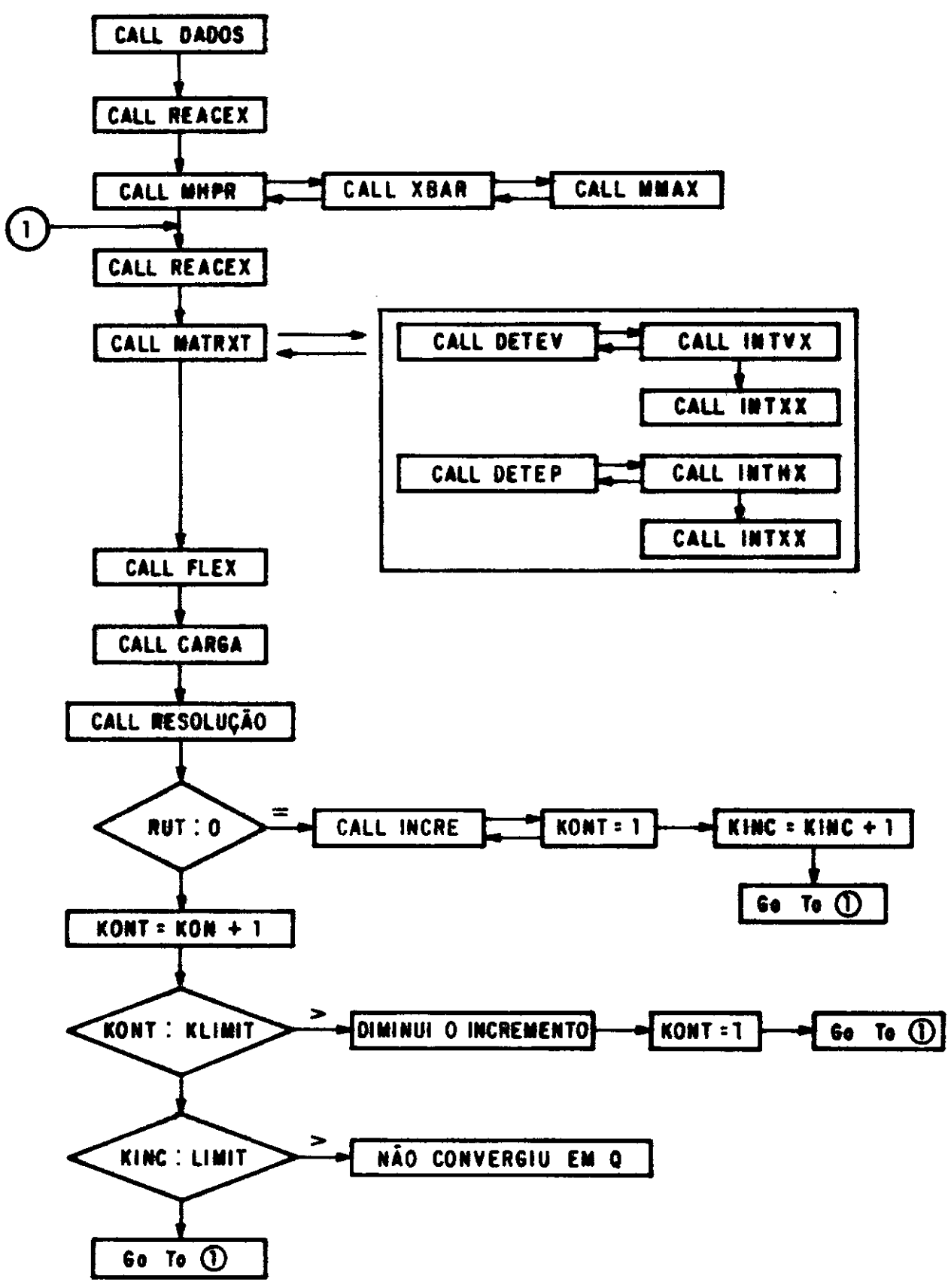


FIG. 5.19 DISTRIBUIÇÃO ESQUEMATICA DOS DIAGRAMAS DE INFLUENCIA

# DIAGRAMA DE BLOCOS DO PROGRAMA P1/FORÇAS



#### 5.1.4.1. SUBROTINAS DO PROGRAMA P1/FORÇAS

Subrotina **DADOS** - Lê e imprime as características físicas, geométricas e topológicas da estrutura e das seções tipo, calcula os parâmetros característicos dos trechos da estrutura.

Subrotina **REACEX** - Lê e imprime os dados gerais sobre os carregamentos nos elementos e calcula os esforços no sistema principal devido a carregamento externo.

Subrotina **MHPR** - Determina através das subrotinas auxiliares **XBAR** e **MMAX** as posições e os valores dos momentos máximos no sistema principal isostático.

Subrotina **REACX** - Calcula as reações na estrutura a partir dos hiperestáticos determinados.

Subrotina **MATRX** - Calcula os parâmetros gerais para a montagem da matrix de flexibilidade do sistema principal.

Subrotinas **DETEV** e **DETEP** - Calculam a rigidez dos trechos de viga e pilar respectivamente, através do equilíbrio dos esforços obtidos na subrotina **GAUSS**.

Subrotina **GAUSS** - Calcula a deformada que equilibra os esforços solicitantes aos resistentes pelo processo descrito em 5.3 auxiliados pela subrotina **SIACO** e function **FUNC**.

Subrotina **SIGMA** - Calcula os esforços na seção para uma determinada deformada.

Subrotina **SIACO** - Calcula os esforços nas fibras de aço de uma determinada seção.

Function **FUNC** - Calcula os esforços no concreto.

Subrotina INTVX e INTHX - Calcula os diagramas de influência relativo aos esforços nos vãos e nos pilares respectivamente.

Subrotina INTXX - Calcula os diagramas de influência relativo aos hiperestáticos calculados na etapa anterior.

Subrotina FLEX - Monta a matriz de flexibilidade relativa ao sistema principal adotado para a estrutura.

Subrotina CARGA - Monta o vetor de carga do sistema.

Subrotina RESOLUÇÃO - Resolve o sistema de equações e imprime os resultados.

Subrotina AJUSTE - Compara os valores dos hiperestáticos calculados em duas iterações consecutivas e ajusta a uma distribuição admissível.

Subrotina CURVA - Determina os valores máximos para os momentos nas seções críticas.

## 5.2. ALGORITMO DE ANÁLISE PELO MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS

Não cabe aqui descrever o desenvolvimento do método dos deslocamentos nem mesmo a técnica dos elementos finitos a este associado, mesmo porque, além de ser bastante conhecidos, a sua dedução sob a consideração não-linear é muito complexa.

Partiremos então da equação de equilíbrio (5.2.1) cuja expressão é válida para qualquer que seja a relação tensão-deformação<sup>25</sup>

$$\int_V \underline{B}^T \underline{\sigma} \, dv + \underline{f} = 0 \quad (5.2.1)$$

onde  $\underline{B}$  é a matriz que relaciona as deformações  $\underline{\epsilon}$  em qualquer ponto do corpo com os deslocamentos nodais  $\underline{a}$ , neste corpo discretizado, segundo a expressão (5.2.2)

$$\underline{\epsilon} = \underline{B} \underline{a} \quad (5.2.2)$$

onde o campo de deslocamento generalizado  $\underline{U}$  se associa ao campo de deslocamentos nodais  $\underline{a}$  através do funcional de forma  $\underline{N}$

$$\underline{U} = \underline{N} \underline{a} \quad (5.2.3)$$

A equação (5.2.1) baseada no princípio dos trabalhos virtuais, ou da minimização de energia, é válida para qualquer tipo de material. Logo poderá ser aplicada a um material elástico não-linear, como é o caso do concreto armado, em que a relação tensão-deformação é da forma (5.2.4)

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}(\underline{\epsilon}) \quad (5.2.4)$$

As relações (5.2.4) e (5.2.1) são suficientes para caracterizar um problema não-linear, cuja solução poderá ser encontrada atra-

vês da resolução de um sistema de equações do tipo

$$\underline{\psi}(\underline{a}) = \underline{P}(\underline{a}) + \underline{f} \equiv \underline{K}(\underline{a}) \cdot \underline{a} + \underline{f} = 0 \quad (5.2.5)$$

A equação explicitada mais adequada depende do tipo do problema e do método de discretização (Resíduos Ponderados, Rayleigh-Ritz, Princípios Variacionais, etc.), já que a relação (5.2.4) é única, i.e., a um estado de deformação corresponde sempre um único estado de tensões e  $\underline{P}(\underline{a})$  também é definido unicamente.

A solução do sistema (5.2.5) poderá ser obtida por várias técnicas (iterativa direta, Newton-Rapson, incremental, etc.), a adotada neste trabalho consistiu na iterativa direta.

Por esta técnica, parte-se de uma solução inicial  $\underline{a}$  (por exemplo, a obtida por uma matriz de rigidez arbitrada  $\underline{K}$ ) e desta forma obtem-se uma nova matriz  $\underline{K}^0 = \underline{K}(\underline{a}^0)$  que possibilita a determinação de uma solução mais aproximada, segundo (5.2.6)

$$\underline{a}^{-1} = -(\underline{K}^0)^{-1} \cdot \underline{f} \quad (5.2.6)$$

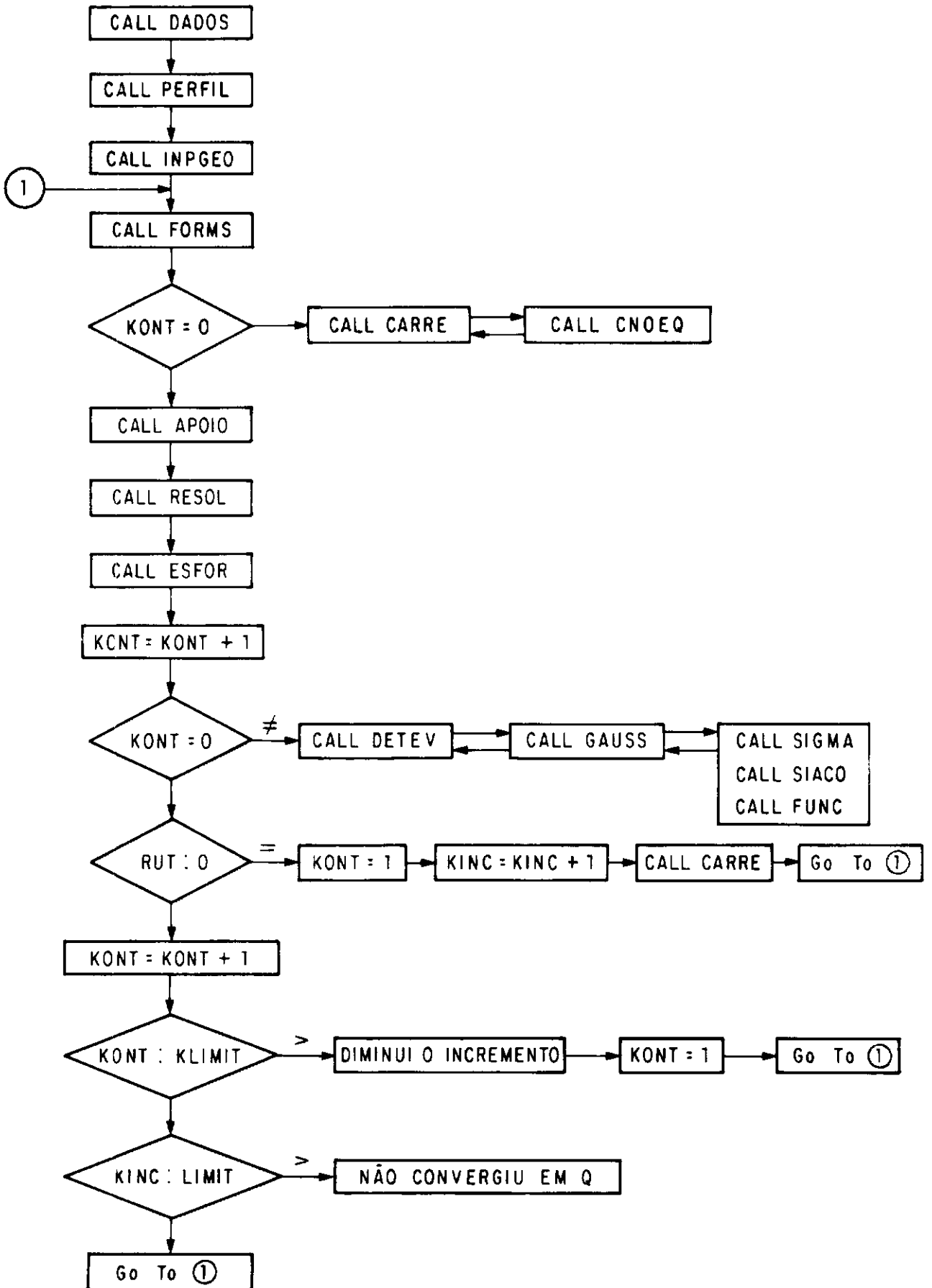
Desta forma a matriz  $\underline{K}$  é sempre atualizada a partir da solução anterior, de acordo com o procedimento a ser exposto no item 5.3.

Repete-se este processo, segundo (5.2.7)

$$\underline{a}^n = -(\underline{K}^{n-1})^{-1} \cdot \underline{f}$$

até que a diferença entre duas soluções consecutivas não diferirem de uma norma estabelecida.

# DIAGRAMA DE BLOCOS DO PROGRAMA P2/DESLOCAMENTO



### 5.2.1.1. SUBROTINAS DO PROGRAMA P2/DESLOCAMENTOS

Subrotina **DADOS** - Lê e imprime as características físicas, geométricas e topológicas da estrutura; número de carregamentos; número de apoios elásticos e número de nós restringidos.

Subrotina **PERFIL** - Monta vetor indicativo dos elementos da diagonal principal da matriz de rigidez da estrutura no arranjo unidimensional.

Subrotina **FORMS** - Calcula os elementos da matriz de rigidez a partir das rigidezes obtidas no equilíbrio dos esforços.

Subrotina **CARRE** - Lê e imprime os dados sobre os carregamentos aplicados à estrutura e monta os vetores de carga.

Subrotina **CNOEQ** - Calcula o carregamento nodal equivalente para as cargas aplicadas nos elementos.

Subrotina **APOIO** - Introduce as condições de contorno para os apoios elásticos, apoios com deslocamentos prescritos e indeslocáveis.

Subrotina **RESOL** - Resolve o sistema de equações obtendo os deslocamentos nodais.

Subrotina **ESFOR** - Imprime os deslocamentos nodais, calcula e imprime os esforços nas extremidades dos elementos e as reações de apoio.

Subrotina **INCRE** - Lê e imprime os parâmetros para o incremento do carregamento e aplica este incremento aos esforços de engastamento perfeito dos elementos selecionados.

Subrotina **INGEO** - Lê e imprime as características físicas e geométricas dos materiais das seções tipo e calcula os parâ-



metros característicos das seções.

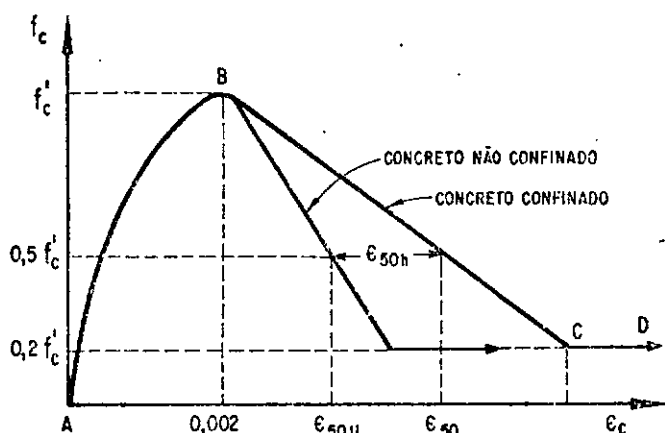
As subrotinas GAUSS, SIGMA, SIACO, DETEV e a function FUNC são as mesmas já definidas no fluxograma de "P1".

### 5.3. CONSIDERAÇÃO NÃO-LINEAR FÍSICA DO C.A.

A determinação da deformada de equilíbrio e consequentemente os esforços resistentes em uma determinada seção da estrutura é feita considerando o efeito não linear do concreto armado.

#### 5.3.1. RELAÇÃO TENSÃO-DEFORMAÇÃO DO CONCRETO CONFINADO

Baseado em evidências experimentais, KENT AND PARK<sup>12</sup> propuseram a relação tensão-deformação para o concreto, sujeito as condições de confinamento por estribos retangulares\* como mostra a figura 5.3.1.



REGIAO A-B  $\epsilon_c < 0.002$

$$f'_c = f'_c \left[ \frac{2\epsilon_c}{0.002} - \left( \frac{\epsilon_c}{0.002} \right)^2 \right]$$

REGIAO B-C  $0.002 < \epsilon_c < \epsilon_{20c}$

$$f_c = f'_c \left[ 1 - Z(\epsilon_c - 0.002) \right]$$

REGIAO C-D  $\epsilon_c > \epsilon_{20c}$

$$f_c = 0.2f'_c$$

Fig 5.31 - RELAÇÃO TENSÃO-DEFORMAÇÃO DO CONCRETO CONFINADO

$$Z = \frac{0.5}{\frac{\epsilon_{50u}}{50u} + \frac{\epsilon_{50h}}{50h} - 0.002}$$

$$\epsilon_{50u} = \frac{3 + 0.0284 \times f'_c}{14.22 \times f'_c - 1000}$$

$$\epsilon_{50h} = \frac{3}{4} \rho_w \sqrt{\frac{b_w}{S_w}}$$

$$\epsilon_{20c} = \frac{0.8}{Z} + 0.002$$

- $\rho_w = \frac{\text{Volume da Armadura Transversal}}{\text{Volume do Concreto Confinado}}$
- $b_w = \text{Largura do Estribo Retangular}$
- $S_w = \text{Espaçamento entre Estribos}$
- $f'_c = \text{Em Kg f/ cm}^2$

\* Admitiu-se que de forma identica se comporta o confinamento do concreto com estribos helicoidais.

- $\epsilon_{50u}$  - Exprime o efeito da resistência do concreto no ramo descendente do concreto não confinado
- $\epsilon_{50h}$  - Exprime a influência do confinamento na dutibilidade do concreto
- $\epsilon_{20c}$  - Exprime a capacidade última de deformação do concreto

### 5.3.2. RELAÇÃO TENSÃO-DEFORMAÇÃO DOS AÇOS

Apresentam-se a seguir as curvas simplificadas que representam o comportamento dos aços utilizados no concreto armado. (fig. 5.3.2)

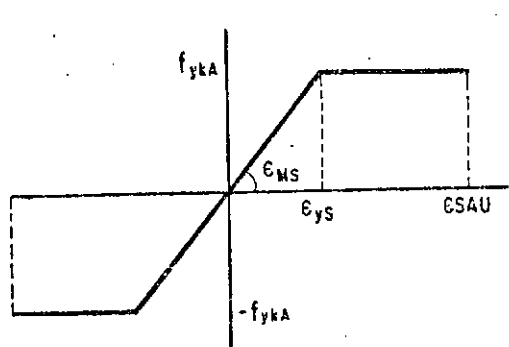


FIG. 2a

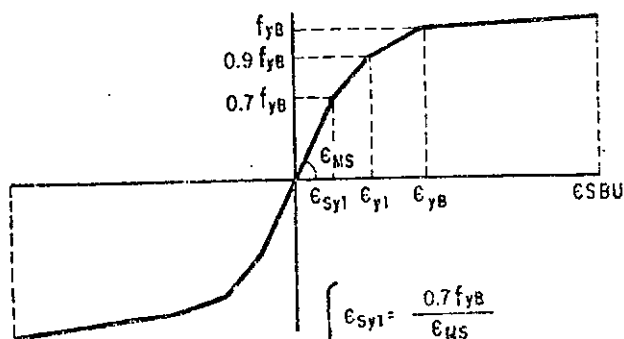


FIG. 2b

$$\left\{ \begin{aligned} \epsilon_{Sy1} &= \frac{0.7 f_{yB}}{\epsilon_{MS}} \\ \epsilon_{Sy2} &= \frac{0.9 f_{yB}}{\epsilon_{MS}} + 0.263\% \\ \epsilon_{Sy3} &= \frac{f_{yB}}{\epsilon_{MS}} + 2\% \end{aligned} \right.$$

Fig. 5.3.2. Relação tensão-deformação dos aços

### 5.3.3. MÉTODO DE CÁLCULO

Seja uma seção de C.A. submetida a esforços solicitantes de flexão ( $M_s$ ) e normais ( $N_s$ ), que apresente simetria geométrica com relação ao plano dos esforços. (fig. 5.3.3a)

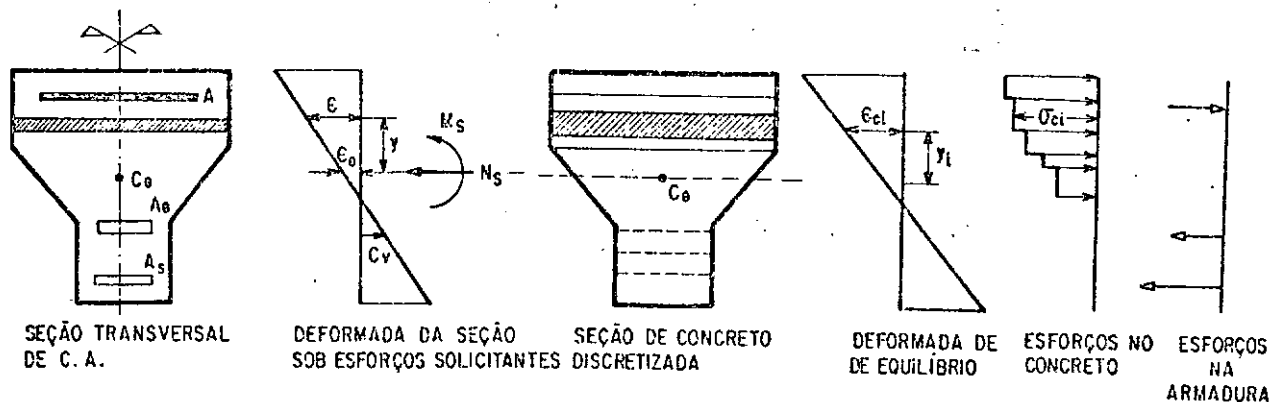


Fig. 5.3.3a

Fig. 5.3.3b

Fig. 5.3.3. Distribuição dos esforços e deformações numa seção genérica

Admitimos a hipótese das seções planas, a deformada de um ponto qualquer da seção poderá ser determinada em função da deformação longitudinal do centro de gravidade da seção  $\epsilon_{cg}$  e da curvatura da mesma  $C_v$ .

$$\epsilon = \epsilon_{cg} + C_v Y \tag{5.3.1}$$

Numa situação de equilíbrio, os esforços resistentes,  $N_R(\epsilon_{cg}, C_v)$  e  $M_R(\epsilon_{cg}, C_v)$ . São iguais aos solicitantes

$$N_R(\epsilon_{cg}, C_v) = \int_{A_c} \sigma_c(\epsilon) dA_c + \sum_{i=1}^{NFS} \sigma_s(\epsilon) A_{si} = N_s \tag{5.3.2}$$

$$M_R(\epsilon_{cg}, C_v) = \int_{A_c} \sigma_c(\epsilon) Y dA_c + \sum_{i=1}^{NFS} \sigma_s(\epsilon) Y A_{si} = M_s$$

onde:  $A_s$  representa a área de aço e  $Y$  representa a ordenada relativa ao CG.

Para o cálculo das integrais sobre a área de concreto, discretiza-se esta em fatias horizontais conforme figura 5.3.3b. E admitindo a tensão constante e igual à tensão média em cada

fatia, obtem-se:

$$\int_{A_c} \sigma_c (\epsilon) dA = \sum_{i=1}^{NFC} \sigma_i (\epsilon_i) A_i \tag{5.3.3}$$

$$\int_{A_c} \sigma_c (\epsilon) Y dA = \sum_{i=1}^{NFC} \sigma_i (\epsilon_i) Y_i A_i$$

onde:  $A_i$  representa a área da fatia de concreto e  $Y_i$  a ordenada correspondente ao seu baricentro.

No sentido de descrever o comportamento de uma seção submetida a acréscimo dos esforços solicitantes, deve-se encontrar em cada etapa, a deformada de equilíbrio e a partir desta os esforços resistentes. Para isso utiliza-se o método iterativo de Newton-Rapson nas equações de equilíbrio (5.3.2).

Desenvolvendo em série de Taylor os esforços resistentes em torno de uma deformada conhecida  $(\bar{\epsilon}_{cg}, \bar{C}_v)$ , chega-se a:

$$\begin{aligned} N_R(\epsilon_{cg}, C_v) &= N_R(\bar{\epsilon}_{cg}, \bar{C}_v) + \frac{\partial N_R(\epsilon_{cg}, C_v)}{\partial \epsilon_{cg}} \bigg|_{\bar{\epsilon}_{cg}} \delta \epsilon_{cg} + \frac{\partial N_R(\epsilon_{cg}, C_v)}{\partial C_v} \bigg|_{\bar{C}_v} \delta C_v + \dots \\ M_R(\epsilon_{cg}, C_v) &= M_R(\bar{\epsilon}_{cg}, \bar{C}_v) + \frac{\partial M_R(\epsilon_{cg}, C_v)}{\partial \epsilon_{cg}} \bigg|_{\bar{\epsilon}_{cg}} \delta \epsilon_{cg} + \frac{\partial M_R(\epsilon_{cg}, C_v)}{\partial C_v} \bigg|_{\bar{C}_v} \delta C_v + \dots \end{aligned} \tag{5.3.4}$$

Aplicando as equações de equilíbrio (5.3.2). Desprezando os termos de ordem superior, constitui-se um sistema linear em função de  $\epsilon_{cg}$  e  $C_v$ , representa a seguir:

$$\begin{Bmatrix} N_s \\ M_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_R \\ M_R \end{Bmatrix}_{\epsilon_{cg}, C_v} = \begin{Bmatrix} N_R \\ M_R \end{Bmatrix}_{\bar{\epsilon}_{cg}, \bar{C}_v} + \begin{bmatrix} \frac{\partial N_R}{\partial \epsilon_{cg}} \Big|_{\bar{\epsilon}_{cg}} & \frac{\partial N_R}{\partial C_v} \Big|_{\bar{C}_v} \\ \frac{\partial M_R}{\partial \epsilon_{cg}} \Big|_{\bar{\epsilon}_{cg}} & \frac{\partial M_R}{\partial C_v} \Big|_{\bar{C}_v} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \delta \epsilon_{cg} \\ \delta C_v \end{Bmatrix} \quad (5.3.5)$$

Substituindo os elementos diferenciais do sistema (5.3.5) por diferenças finitas:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_R(\epsilon_{cg}, C_v)}{\partial \epsilon_{cg}} \Big|_{\bar{\epsilon}_{cg}} &= \frac{N_R(\bar{\epsilon}_{cg} + \Delta \epsilon_{cg}, \bar{C}_v) - N_R(\bar{\epsilon}_{cg}, \bar{C}_v)}{\Delta \epsilon_{cg}} \\
 \frac{\partial N_R(\epsilon_{cg}, C_v)}{\partial C_v} \Big|_{\bar{C}_v} &= \frac{N_R(\bar{\epsilon}_{cg}, \bar{C}_v + \Delta C_v) - N_R(\bar{\epsilon}_{cg}, \bar{C}_v)}{\Delta C_v} \\
 \frac{\partial M_R(\epsilon_{cg}, C_v)}{\partial \epsilon_{cg}} \Big|_{\bar{\epsilon}_{cg}} &= \frac{M_R(\bar{\epsilon}_{cg} + \Delta \epsilon_{cg}, \bar{C}_v) - M_R(\bar{\epsilon}_{cg}, \bar{C}_v)}{\Delta \epsilon_{cg}} \\
 \frac{\partial M_R(\epsilon_{cg}, C_v)}{\partial C_v} \Big|_{\bar{C}_v} &= \frac{M_R(\bar{\epsilon}_{cg}, \bar{C}_v + \Delta C_v) - M_R(\bar{\epsilon}_{cg}, \bar{C}_v)}{\Delta C_v}
 \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

A convergência deste processo é assegurada desde que se tomem valores de  $\epsilon_{cg}$  e  $C_v$  próximos aos  $\bar{\epsilon}_{cg}$  e  $\bar{C}_v$  que promovam o equilíbrio.

Nesse sentido calculam-se os esforços que provocam a fissuração da peça. Em flexão simples:

$$M_o = f_{ct} \cdot I_z / Y_{cg} \quad \text{onde} \quad f_{ct} = 7 + 6 \cdot f_{ck} / 100 \quad (5.3.7)$$

[ $f_{ck}$  em  $K_g/cm^2$ ]

E com esforço normal solicitante  $N_s$ , determina-se através do sistema inverso ao (5.3.5) a deformada inicial para o processo:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \epsilon_{cg} \\ \Delta C_v \end{Bmatrix} = \frac{1}{DET} \begin{bmatrix} \frac{\partial M_R}{\partial C_v} & \frac{-\partial N_R}{\partial C_v} \\ \frac{-\partial M_R}{\partial \epsilon_{cg}} & \frac{\partial N_R}{\partial \epsilon_{cg}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_R - N_s \\ M_R - M_0 \end{Bmatrix} \quad (5.3.8)$$

A partir da deformada de equilíbrio  $(\epsilon_{cg}, C_v)$ , determinam-se as rigidezes normal e flexional para a região considerada, como segue

$$K_{(normal)} = \frac{\epsilon_{cg}}{N_s} \quad e \quad K_{(flexional)} = \frac{C_v}{M_s} \quad (5.3.9)$$

E destas constroem-se os elementos para a matriz de flexibilidade (para o programa baseado no método das forças) ou os elementos para a matriz de rigidez (para o programa baseado no método dos deslocamentos).

## CAPÍTULO VI

### EXEMPLO 1

#### 6.1. VIGA CONTÍNUA

Neste exemplo analisou-se uma viga contínua, defendida no Apêndice A, onde além do carregamento permanente de 250 N/m acrescentou-se uma sobrecarga no vão central crescente até a ruptura, conforme esquematizado na Figura 6.1.1.

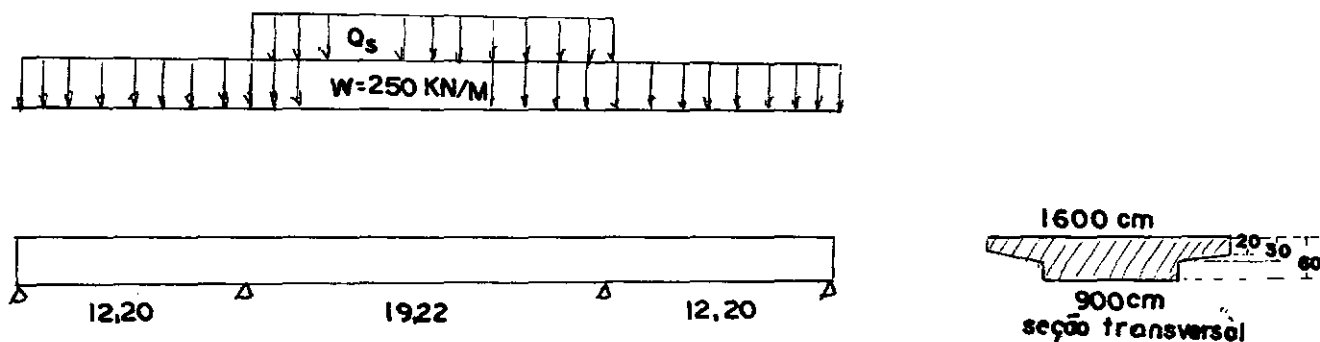


Fig. 6.1.1. Definição da geometria e do carregamento

Este exemplo tem por objetivo apresentar os resultados obtidos pelos dois programas desenvolvidos, P1/forças e P2/deslocamentos, comparando-os entre si e com o obtido pelo cálculo elás-



tico linear.

A discretização da estrutura, coerente com a apresentada no Apêndice A está apresentada na Fig. 6.1.2. onde a distinção dos trechos para o programa  $P_1$ , baseado no método dos esforços, corresponde aos elementos do programa  $P_2$ , baseado no método dos deslocamentos.

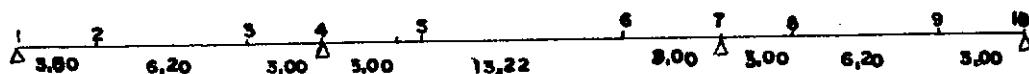


Fig. 6.1.2. Discretização da Viga

Observe que esta estrutura apresenta simetria e poderia ser estudada como uma viga engastada-biapoiada, porém como o sistema principal desenvolvido no programa foi analisada integralmente.

Observa-se também, que o carregamento máximo obtido no Apêndice A foi sensivelmente maior, já que as curvas tomadas como base levaram em consideração a totalidade da rotação plástica.

No Quadro 6.1.1. estão mostrados os resultados obtidos pelos dois programas desenvolvidos e os obtidos a partir do comportamento "elástico", isto é, sem considerar a variação de rigidez ao longo da estrutura.

No Quadro 6.1.2. está mostrada uma comparação da eficiência dos dois programas.

Quadro 6.1.1

q <sub>s</sub> Sobre carga	1	2	1-2		3	4		5		4-5	
	M <sub>apoio</sub> Elástico	M <sub>apoio</sub> Não-linear P1	2	M <sub>apoio</sub> Não-linear P2	2-3	Rigidez no Vão lateral	Rigidez no Apoio	5	Rigidez no Vão central	5-6	5
	KN/m	KN/m	%	KN/m	%	kN/mm <sup>2</sup> × 10 <sup>3</sup>	kN/mm <sup>2</sup> × 10 <sup>3</sup>	%	kN/mm <sup>2</sup> × 10 <sup>3</sup>	%	
0	-6797	- 7150	4,9	- 7157	0,1	545,5	2892,8	81,0	3255,2	12,5	
50	-7872	- 7803	0,9	- 7815	0,1	1002,8	2893,5	65,3	3231,0	11,7	
100	-8954	- 8623	3,8	- 8643	2,3	1001,7	2891,9	65,3	3206,4	10,9	
150	-10035	- 9445	6,2	- 9550	1,1	1000,4	2889,0	65,3	3075,9	6,5	

Quadro 6.1.2 Eficiência das Características dos Programas

Programa	Matriz de Constituição	Tempo p/ Matriz	iteração Resolução	Tempo Total	Memória USC
P1/Forças	flexibilidade	0,017min	0,1667min	4,50min	23086
P2/Deslocamento	rigidez	0,500min	0,1667min	3,29min	4861

Deste exemplo pode-se concluir:

1. A diferença entre o cálculo elástico linear e o cálculo não-linear é mais significativa quando se aproxima da ruptura.
2. Os dois programas apresentaram resultados bastante próximos (quase-coincidentes). Porém o programa P1, desenvolvido pelo método das forças apresenta apenas os resultados dos momentos (esforços) sem contudo oferecer informações sobre os deslocamentos e rotações da estrutura.
3. Analisando a eficiência dos dois programas pode-se observar que o tempo por P1 para montar a matriz de flexibilidade é muito menor que o gasto por P2 para montar a correspondente matriz de rigidez. Isto se deve ao fato de ser a matriz de flexibilidade previamente definida para a classe do problema, sem no entanto ser genérica, como é o caso da montagem da matriz de rigidez em P2 que é geral para todas as estruturas aperticadas planas.
4. Quanto à utilização da memória dos dois programas em P1, primeiro a ser desenvolvido, não se teve essa preocupação. O que não aconteceu com P2, desenvolvido com a preocupação de economizar memória e ser rápido.
5. O programa P2/deslocamento mostrou-se mais eficiente, mais Informativo e mais geral que P1/forças.
6. Os métodos automatizados tomam como base a rigidez média de cada trecho (elemento) enquanto que no método de MACCHI leva em consideração a contribuição plástica total; disto se conclui que o método automatizado é conservador neste aspecto.

## EXEMPLO 2

## 6.2. VIGAS EXPERIMENTAIS DE PAULO CHAVES

Para ser estudada a adaptação plástica de estruturas hiperestáticas a diagramas de momentos fletores divergindo do diagrama de momentos dado pelo cálculo elástico clássico, foram selecionadas 3 vigas da tese experimental de Paulo Chaves Araujo e Silva<sup>1</sup>.

O esquema de ensaios dessas vigas está apresentado na Fig. 6.2.1.

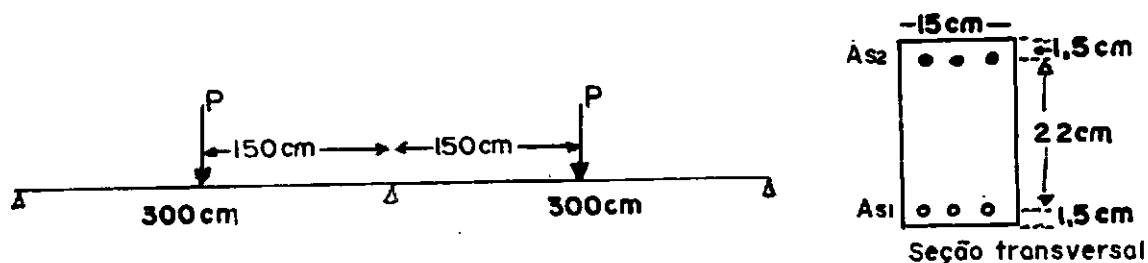


Fig. 6.2.1. Esquema de ensaio das vigas contínuas

V-1 foi dimensionada para o diagrama de momentos fletores dado pelo cálculo elástico. Utilizou-se armadura limite na Seção C (Fig. 6.2.2).

V-2 o momento em C foi reduzido em 25% em relação a V-1, sendo baixada a linha de fechamento, respeitando-se o equilíbrio elástico (Fig. 6.2.2).

V-5 o momento em B foi reduzido de 25% em relação a V-1, sendo respeitado o equilíbrio elástico (Fig. 6.2.2).

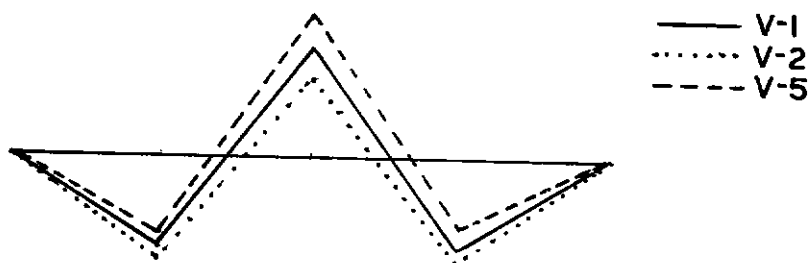


Fig. 6.2.2. Hipótese de cálculo das vigas hiperestáticas

No Quadro 6.2.1 estão resumidas as distribuições da armadura e as características dos materiais nas seções das vigas, podendo ser melhor avaliadas na própria tese citada<sup>1</sup>.

Quadro 6.2.1

Viga	$f_{ccd}$ (N/m <sup>2</sup> )	$f_{yd}$ (N/m <sup>2</sup> )	Seção B		Seção C	
			AS1	AS2	AS1	AS2
			(cm <sup>2</sup> )	(cm <sup>2</sup> )	(cm <sup>2</sup> )	(cm <sup>2</sup> )
V-1	3020	56260	4,76	0,68	0,68	6,10
V-2	3020	56260	5,92	0,68	0,68	4,02
V-3	3020	50570	3,70	0,68	0,68	8,04

Nos Quadros 6.2.2, 6.2.3 e 6.2.4 estão organizados os resultados obtidos na simulação das vigas pelo programa P2/deslocamentos (por este fornecer maiores informações que o P1) para as vigas V-1, V-2 e V-5 respectivamente.

Nas Figuras 6.2.3, 6.2.4 e 6.2.5 estão plotadas as curvas comparativas obtidas nos ensaios experimentais e as simuladas. Além da comparação com o comportamento "elástico" das mesmas.

Quadro 6.2.2. Resultados da simulação de carregamento na viga V-1

P (KN)	M <sub>B</sub> (KN.m)	M <sub>B</sub> <sup>*</sup> (KN.m)	%	M <sub>C</sub> (KN.m)	M <sub>C</sub> <sup>*</sup> (KN.m)	%	-M <sub>C</sub> /M <sub>B</sub>	K <sub>1</sub> (kN/m·m <sup>2</sup> )	K <sub>2</sub> (kN/m·m <sup>2</sup> )	K <sub>3</sub> (kN/mm <sup>2</sup> )
10	4,55	4,55	0	- 5,90	- 5,90	0	1,297	4653	5001	5533
20	9,10	9,10	0	-11,79	-11,80	0,01	1,296	4644	4986	5518
30	13,66	13,65	-0,05	-17,69	-17,70	0,05	1,295	4636	4972	5504
40	18,21	18,20	-0,05	-23,58	-23,60	0,08	1,295	4627	4957	5488
50	22,76	22,75	-0,05	-29,48	-29,50	0,07	1,295	4619	4941	5473
60	27,31	27,30	0,05	-35,37	-35,40	0,08	1,295	4601	4925	5457
70	31,87	31,88	0,06	-41,26	-41,30	0,09	1,295	4601	4908	5440
80	36,42	36,40	0,06	-47,16	-47,20	0,08	1,295	4592	4891	5423
90	40,98	40,95	0,06	-53,05	-53,10	0,09	1,294	4582	4873	5406
100	45,53	45,50	0,07	-58,94	-59,0	0,10	1,294	4573	4854	5388
110	50,09	50,05	0,07	-64,83	-64,90	0,11	1,294	4563	4835	5369
113,3	51,58	51,55	0,06	-66,79	-66,85	0,09	1,295	4560	4828	5363
Diferença em tre a rigidez ã 10 e 113 KNewtons								2,0%	3,5%	3,1%

\*Valores proporcionais aos calculados em 10KNewtons

Quadro 6.2.3. Resultados da simulação de carregamento na viga V-2

P (KN)	M <sub>B</sub> (KN.m)	M <sub>B</sub> <sup>*</sup> (KN.m)	%	M <sub>C</sub> (KN.m)	M <sub>C</sub> <sup>*</sup> (KN.m)	%	-M <sub>C</sub> /M <sub>B</sub>	K <sub>1</sub> (kN/mm <sup>2</sup> )	K <sub>2</sub> (kN/mm <sup>2</sup> )	K <sub>3</sub> (kN/mm <sup>2</sup> )
10	5,00	5,00	0	- 4,99	- 4,99	0	0,998	5423	5849	4115
20	10,01	10,01	0	- 9,98	- 9,98	0	0,998	5412	5830	4107
30	15,01	15,01	0	-14,98	-14,97	0	0,998	5401	5810	4100
40	20,01	20,02	0	-19,98	-19,96	0	0,998	5390	5790	4092
50	25,00	25,02	0	-24,99	-24,95	0,2	0,998	5378	5769	4084
60	30,00	30,03	0,1	-30,00	-29,94	0,2	0,998	5366	5747	4078
70	34,99	35,03	0,1	-35,02	-34,93	0,3	1,001	5355	5724	4068
80	39,98	40,04	0,1	-40,04	-39,92	0,3	1,002	5342	5700	4060
90	44,97	45,04	0,2	-45,07	-44,91	0,4	1,002	5330	5676	4051
100	49,84	50,05	0,4	-50,37	-49,90	0,9	1,010	5317	5540	4042
110	54,65	55,05	0,7	-55,70	-54,89	1,5	1,019	5305	5387	4031
120	59,24	60,06	1,4	-61,52	-59,88	2,7	1,038	5292	5092	4018
123,3	60,65	61,71	1,7	-63,69	-61,53	3,5	1,050	5288	4871	4978
126,7	62,08	63,41	2,1	-65,83	-63,22	4,1	1,060	5284	4684	3943
129,6	63,36	64,86	2,3	-67,72	-64,67	4,7	1,071	5281	4541	3914

Diferença em  
tre a rigidez  
a 10l e 130KN

2,6%

22,4%

4,9%

\*Valores proporcionais aos calculados em 10 KNewtons

Quadro 6.2.4. Resultados da simulação do carregamento na viga V-5

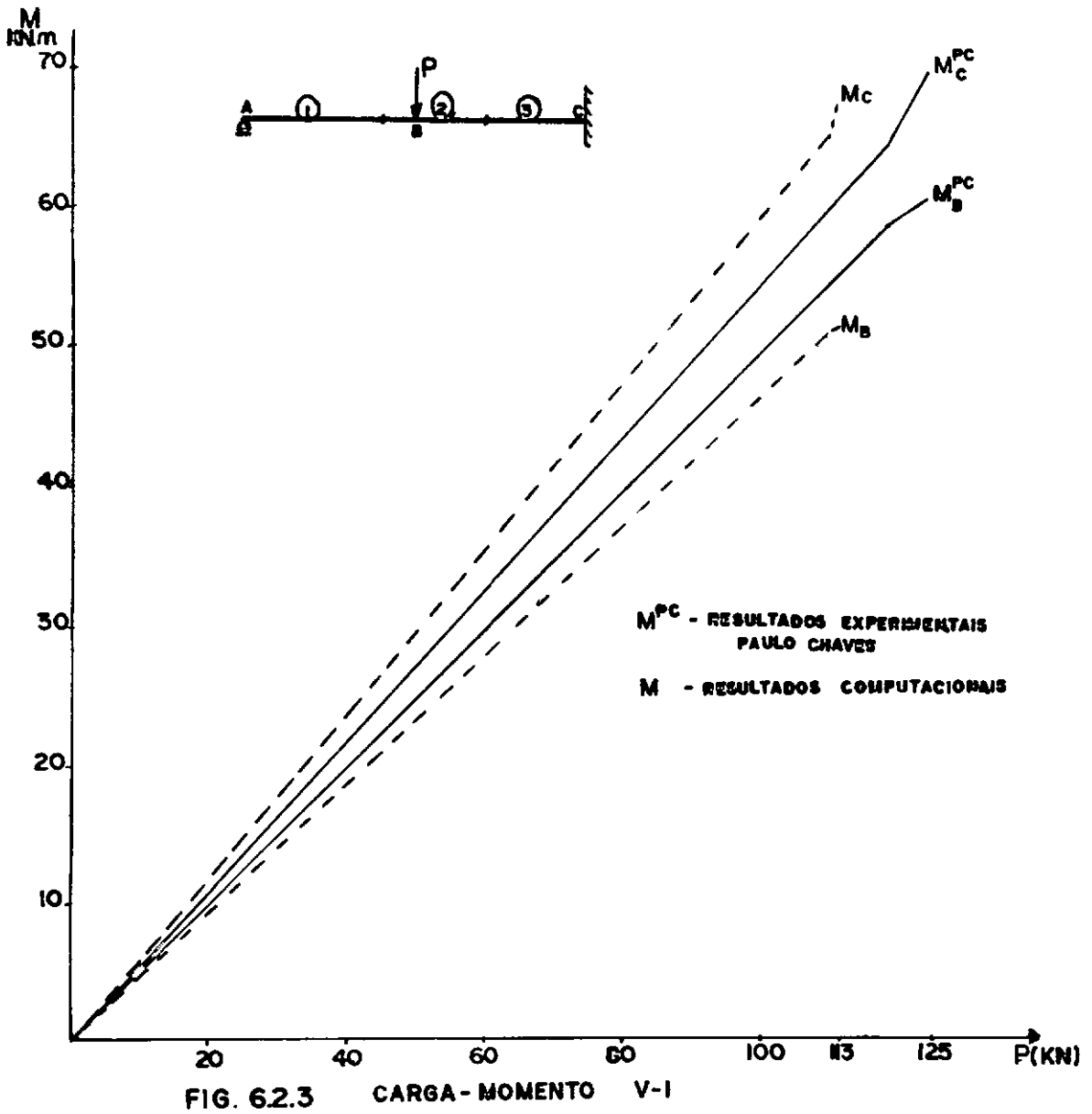
P (KN)	M <sub>B</sub> (KN.m)	M <sub>B</sub> <sup>*</sup> (KN.m)	%	M <sub>C</sub> (KN.m)	M <sub>C</sub> <sup>*</sup> (KN.m)	%	-M <sub>C</sub> /M <sub>B</sub>	K <sub>1</sub> (kN/mm <sup>2</sup> )	K <sub>2</sub> (kN/mm <sup>2</sup> )	K <sub>3</sub> (kN/mm <sup>2</sup> )
10	4,14	4,14	0	- 6,72	- 6,72	0	1,623	3871	4144	6636
20	8,28	8,28	0	-13,44	-13,44	0	1,623	3865	4134	6613
30	12,43	12,42	0	-20,15	-20,16	0	1,621	3858	4124	6589
40	16,58	16,56	0,1	-26,85	-26,88	0,1	1,621	3852	4113	6564
50	20,54	20,70	0,8	-33,91	-33,60	0,9	1,651	3544	3642	6086
60	24,66	24,84	0,7	-40,68	-40,32	0,9	1,650	3628	3628	6061
70	28,68	28,98	1,0	-47,65	-47,04	1,3	1,661	3531	3536	6033
80	32,57	33,12	1,7	-54,87	-53,76	2,1	1,685	3525	3382	6004
90	35,73	37,26	4,1	-63,55	-60,48	5,0	1,779	3520	2903	5962
91,1	36,06	37,72	4,4	-64,54	-61,22	5,4	1,789	3520	2855	5957
92,2	36,39	38,17	4,7	-65,52	-61,96	5,7	1,800	3519	2810	5952
93,3	36,73	38,63	4,9	-66,49	-62,69	6,0	1,810	3518	2768	5947
94,4	37,07	39,08	5,1	-67,46	-63,43	6,3	1,820	3518	2729	5942
95,5	37,41	39,54	5,4	-68,43	-64,18	6,6	1,830	3517	2692	5937

Diferença em  
tre a rigidez  
ã 10 e 95,5KN

9,1%      35,0%      10,5%

\*Valores proporcionais aos calculados em 10KNewtons





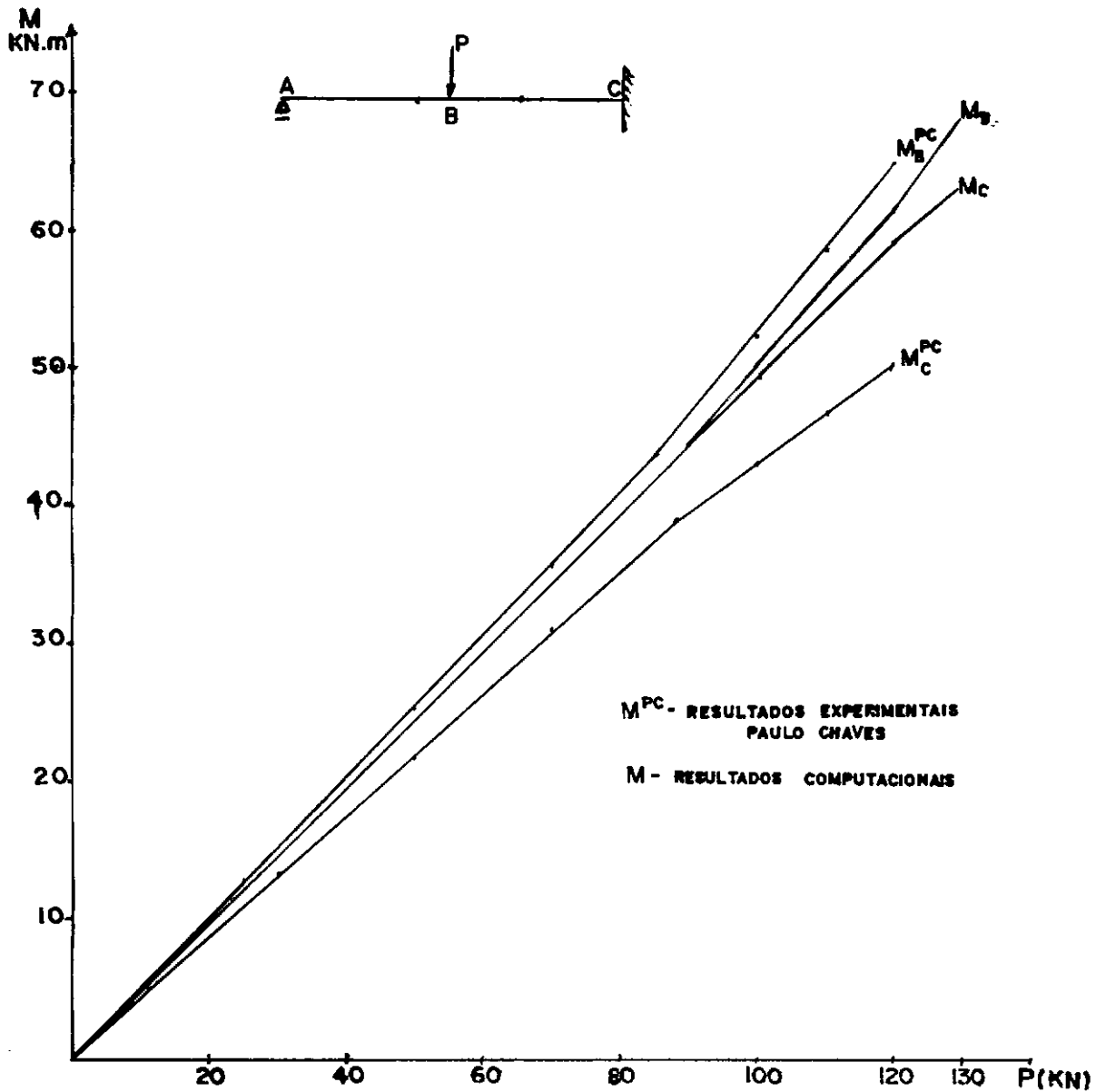


FIG 6.2.4 CARGA MOMENTO V-2 (-25%  $M_C$ )

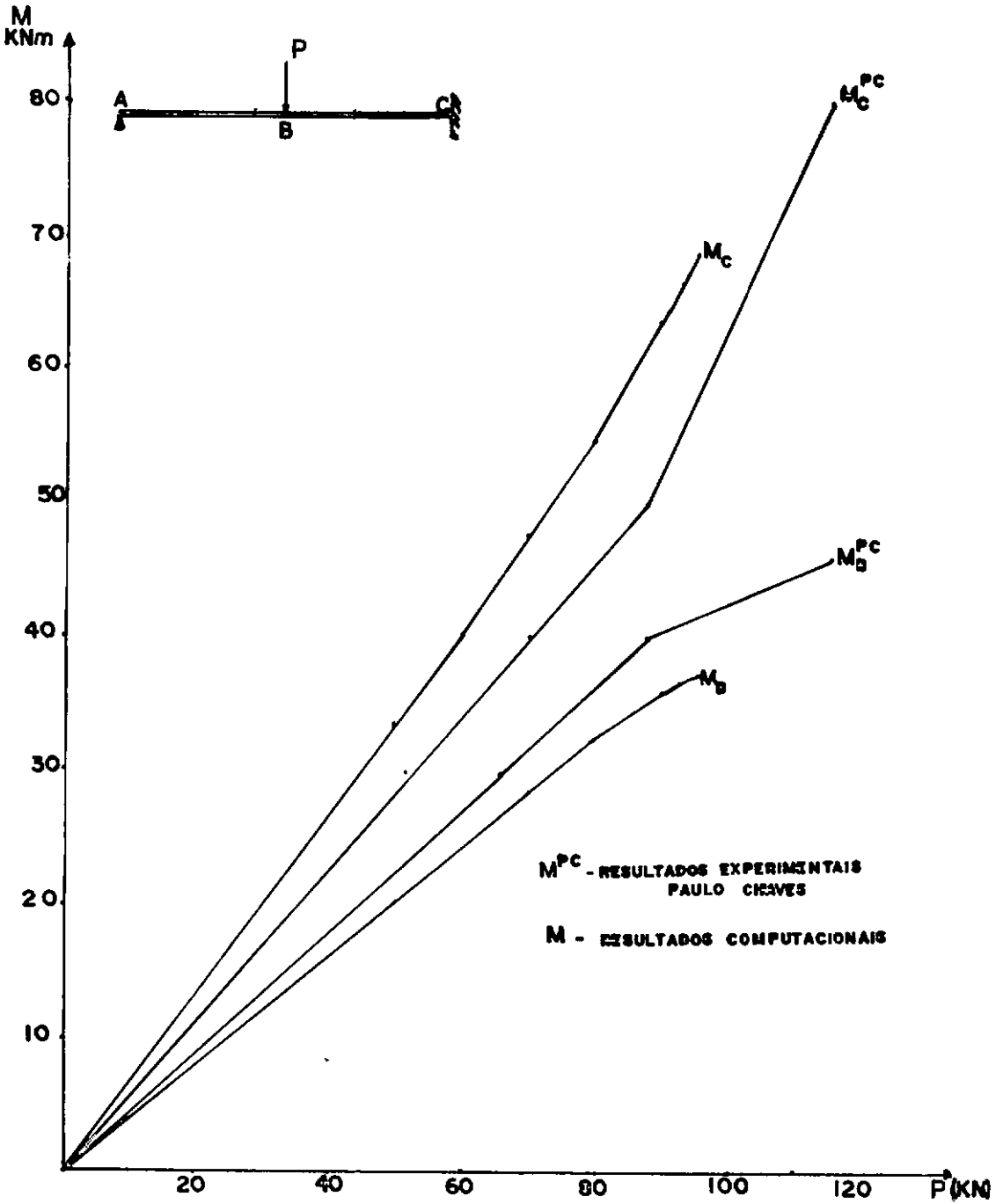


FIG 6.25 CARGA-MOMENTO V-5 (-25%  $M_B$ )

Deste exemplo pode ser concluído:

1. Mesmo com alteração no diagrama do momento fletores de dimensionamento, não foi observada mudança substancial, ou proporcional, na carga de ruptura (próxima a 110 KN).
2. O fato das vigas terem sido dimensionadas para diagramas de momentos diferentes do dado pelo cálculo elástico, tendo consequentemente uma distribuição de armadura diferente da que seria dada pelo cálculo elástico, conduz a uma alteração de rigidez ao longo da estrutura, acarretando uma distribuição de momentos diferentes da dada pelo cálculo elástico.
3. Observando o Quadro 6.2.3 e a Fig. 6.2.4 nas quais o momento em C foi reduzido de 25%, ficando esta seção menos rija, nota-se que  $|M_C|$  foi sempre menor que  $|M_B|$ . Já no Quadro 6.2.4 e na Fig. 6.2.5, em que o momento em B foi reduzido e o momento em C aumentado, nota-se que o momento em C cresceu mais rapidamente que o momento em C da viga V-1.

Este comportamento do concreto armado contraria as hipóteses do cálculo elástico para um material elasto-plástico ideal, segundo as quais  $|M_C|$  seria sempre maior que  $|M_B|$ .

EXEMPLO 3

6.3. ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DE UMA VIGA ESBELTA

Este exemplo consiste na análise do comportamento de uma viga esbelta "L", Fig. 6.3.1, inicialmente apresentada pelo Prof. Adolfo Polilo na Revista Estrutura nº 29 e analisada pelo Prof. Lobo Carneiro na mesma revista nº 38.

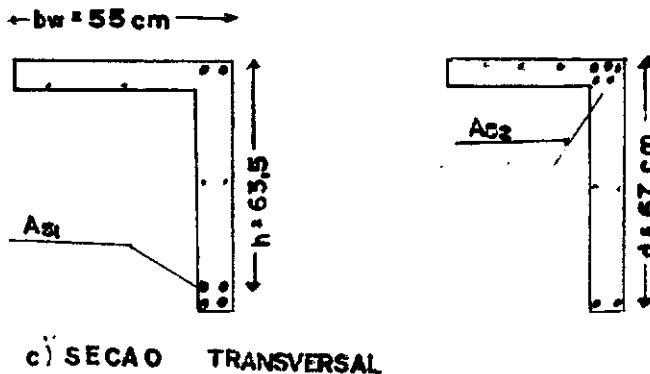
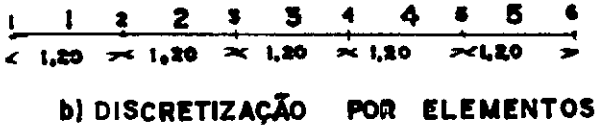
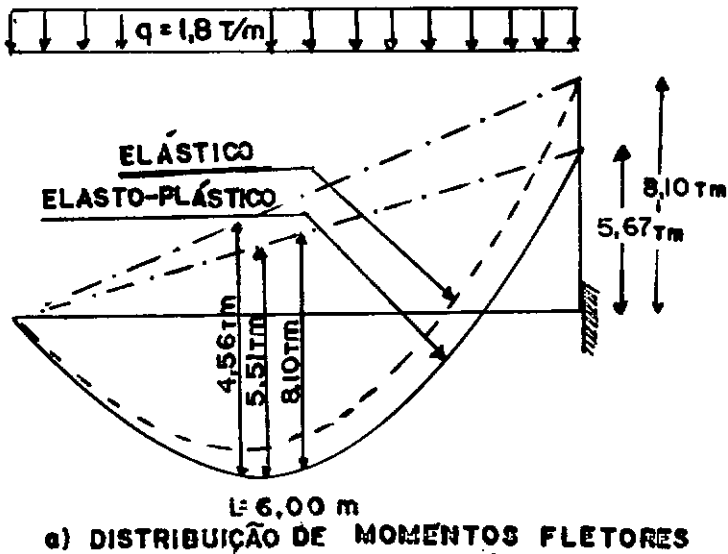


FIG 6.3.1

O Prof. Lobo Carneiro analisou esta estrutura dimensionada segundo o cálculo elástico (no estado limite último) para uma carga uniformemente distribuída  $q$ , a qual admitiu um coeficiente de segurança de 1,65 para o dimensionamento, segundo a NBI em 1961.

Este também analisou, a mesma estrutura pelo cálculo elasto-plástico ("Ultimate Load"), rebaixando a linha de fechamento de 30%. Na Fig. 6.3.1 está representada pela linha cheia que se obtem aplicando a redução do diagrama elástico tracejada para a carga de serviço.

Portanto, se no cálculo elástico utilizou o momento de 1,65.81,0 KN.m para o dimensionamento no Estadio III, pelo cálculo elasto-plástico o Prof. utilizou 1,65.56,7 KN.m no apoio (engaste).

Os resultados de dimensionamento foram:

### 1. hipótese elástica

<u>Momentos</u>		<u>Armação</u>
<u>Engaste</u>	$\bar{M}=81,0 \text{ KN.M}$	4,9 cm <sup>2</sup>
	$M_R=13,4 \text{ KN.M}$	(4 $\phi$ 1/2)
<u>Vão</u>	$\bar{M}=45,6 \text{ KN.m}$	2,4 cm <sup>2</sup>
	$M_R=75,0 \text{ KN.m}$	(4 $\phi$ 3/8)

### 2. hipótese elasto-plástica

<u>Momentos</u>		<u>Armação</u>
<u>Engaste</u>	$\bar{M}=56,7 \text{ KN.m}$	3,2 cm <sup>2</sup>
	$M_R=93,5 \text{ KN.m}$	(4 $\phi$ 3/8+2 $\phi$ 3/16)
<u>Vão</u>	$\bar{M}=55,1 \text{ KN.m}$	2,9 cm <sup>2</sup>
	$M_R=91,0 \text{ KN.M}$	(4 $\phi$ 3/8)

Antes de prosseguir, observemos que a soma de momento no apoio e o momento máximo no vão é ligeiramente menor no cálculo elasto-plástico. Apesar de ter sido mantida a "parábola isostática". Em consequência disso, a soma das armaduras negativa e positiva, nas seções mais solicitadas é 16% menor no caso do cálculo pelo programa elasto-plástico, verificando-se uma economia nas armaduras, além de maior facilidade na sua distribuição.

Com esses dados foi analisada esta estrutura pelo algoritmo não-linear desenvolvido e os resultados para as duas hipóteses de dimensionamento estão apresentadas nos Quadros 6.3.1 e 6.3.2.

Nas Fig. 6.3.2 e 6.3.3 estão mostradas as curvas momento-carregamento e a variação da rigidez nos elementos para as hipóteses de dimensionamento elástica e elasto-plástica respectivamente.

Comparando os resultados obtidos no cálculo não-linear do programa desenvolvido com os lineares, dimensionados a partir da linha de fechamento elástica e elasto-plástica, apresentados nos Quadros 6.3.1 e 6.3.2, pode-se observar que:

A diferença entre a análise não-linear e a análise linear é maior no caso do dimensionamento a partir da L.F. elasto-plástica. Isto mostra que: o acompanhamento esperado de redução de 30% de momento no engaste ( $M_c$ ) não foi igualmente aceito pela estrutura. Esta diminuição foi em torno de 16%. (Esta constatação poderá também se observada no exemplo anterior, exemplo 2)

Por outro lado, o maior enrijecimento no vão, provocado pelo aumento da armadura na mesma e a consequente diminuição na

armação do engaste no dimensionamento elasto-plástico, fez com que a flecha no vão fosse menor que no caso do dimensionamento elástico.

Também a carga da ruptura foi maior no caso elasto-plástico, com sua rigidez variando menos no vão e mais no engaste que o elástico, conforme já era esperado.

A distribuição de momentos no caso do dimensionamento elasto-plástico ficou mais uniforme ( $M_C/M_B$ ), que o caso elástico, além da distribuição da armadura ser mais econômica e a deformabilidade da peça ser menor como já dito.



Quadro 6.3.2

Viga LBI dimensionada pelo cálculo elástico linear clássico-carregamento distribuído

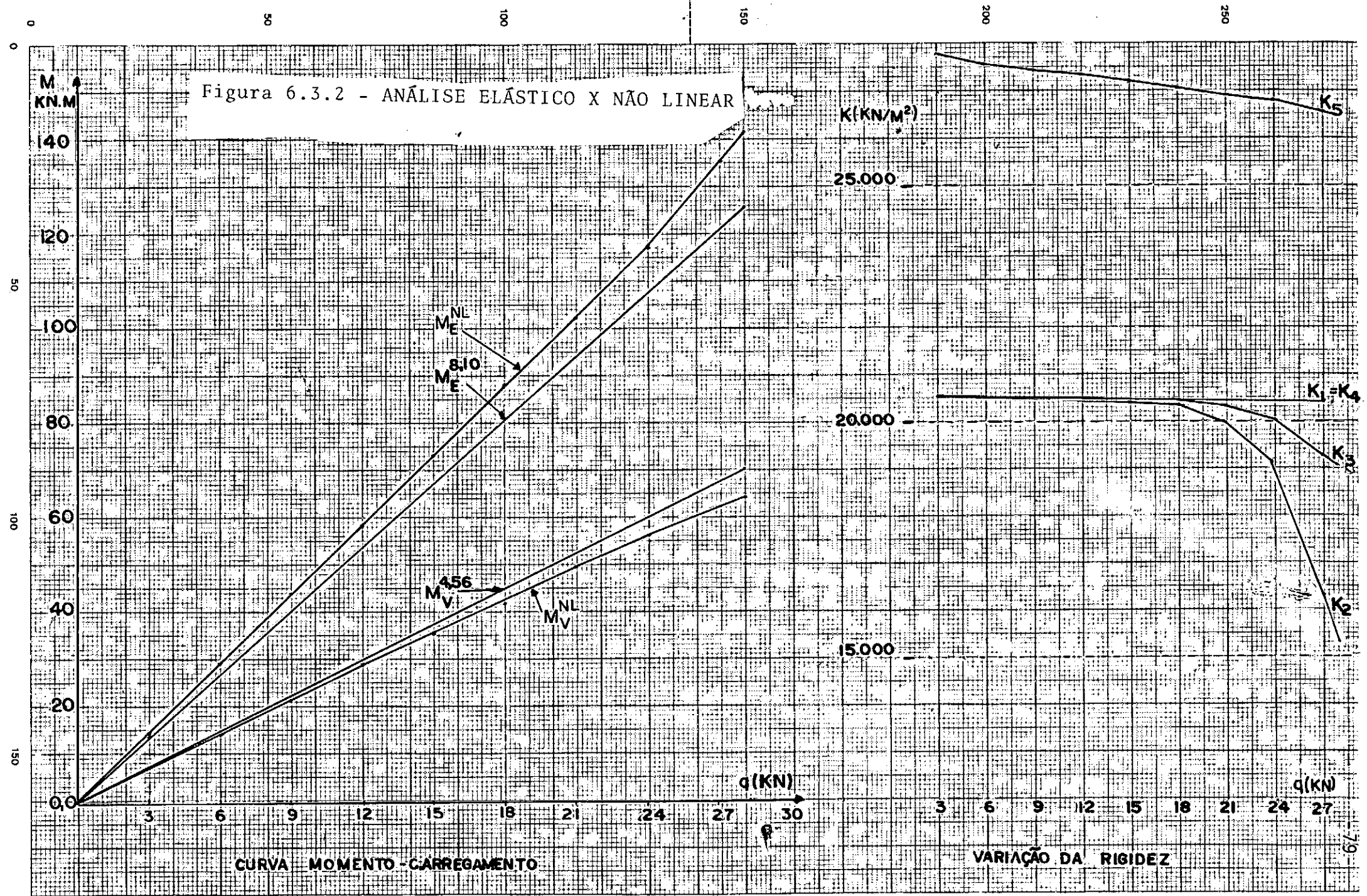
q	M <sub>vão</sub> não-linear	flecha vão	$\frac{M_{engaste}}{M_{vão}}$	M <sub>engaste</sub> não-linear	M <sub>engaste</sub> linear	%	K <sub>1</sub>	K <sub>2</sub>	K <sub>3</sub>	K <sub>4</sub>	K <sub>5</sub>
KN/m	KN.m	mm		KN.m	KN.m		kN/mm <sup>2</sup>	kN/mm <sup>2</sup>	kN/mm <sup>2</sup>	kN/mm <sup>2</sup>	kN/mm <sup>2</sup>
3,0	7,01	0,94	2,12	- 14,89	- 13,50	10,0	20546	20539	20541	20548	27709
6,0	14,15	1,86	2,08	- 29,43	- 27,00	9,0	20539	20525	20528	20547	27594
9,0	21,24	2,79	2,08	- 44,09	- 40,50	8,9	20531	20510	20515	20544	27474
12,0	28,35	3,72	2,07	- 58,73	- 54,00	8,8	20523	20495	20502	20541	27350
15,0	35,47	4,66	2,07	- 73,33	- 67,50	8,6	20516	20480	20488	20538	27221
18,0	42,60	5,61	2,06	- 87,89	- 81,00	8,5	20508	20467	20475	20534	27087
21,0	49,68	6,60	2,07	-102,59	- 94,50	8,6	20500	20079	20460	20531	26945
24,0	56,56	7,70	2,08	-117,80	-108,00	9,1	20492	19168	20205	20529	26789
27,0	62,42	9,28	2,17	-135,37	-121,50	11,4	20484	16301	19270	20530	26580
28,0	64,36	9,87	2,20	-141,50	-126,00	12,3	20482	15322	19013	20530	26501
							3,1%	25,4%	7,4%	0	4,4%

Quadro 6.3.3

Viga LB2 dimensionada pelo cálculo elasto-plástico clássico-carregamento distribuído

q KN/m	M <sub>vão</sub> não-linear KN.m	flecha vão mm	$\left  \frac{M_{\text{engaste}}}{M_{\text{vão}}} \right $	M <sub>engaste</sub> não-linear KN.m	M <sub>engaste</sub> linear KN.m	%	K <sub>1</sub> kN/mm <sup>2</sup>	K <sub>2</sub> kN/mm <sup>2</sup>	K <sub>3</sub> kN/mm <sup>2</sup>	K <sub>4</sub> kN/mm <sup>2</sup>	K <sub>5</sub> kN/mm <sup>2</sup>
3,0	7,84	0,91	1,63	- 12,79	- 9,45	35,3	24295	24286	24287	24298	20468
6,0	15,70	1,83	1,62	- 25,56	-18,90	35,2	24285	24266	24268	24291	20406
9,0	23,56	2,74	1,63	- 38,31	-28,35	35,1	24275	24246	24250	24284	20341
12,0	31,42	3,67	1,62	- 51,04	-37,80	35,0	24265	24226	24230	24277	20276
15,0	39,30	4,59	1,62	- 63,74	-47,25	34,8	24255	24206	24211	24270	20208
18,0	47,19	5,52	1,62	- 76,42	-56,70	34,8	24245	24184	24191	24262	20138
21,0	55,09	6,45	1,62	- 89,08	-66,15	34,7	24234	24163	24170	24255	20065
24,0	62,90	7,44	1,62	-101,94	-75,60	34,8	24224	23555	24149	24248	19987
27,0	70,54	8,65	1,63	-115,25	-85,05	35,5	24213	22573	23062	24241	19615
30,0	77,04	10,37	1,69	-129,90	-94,50	37,5	24203	19148	22050	24237	19044
							3,8%	21,2%	9,2%	2,5%	7,0%

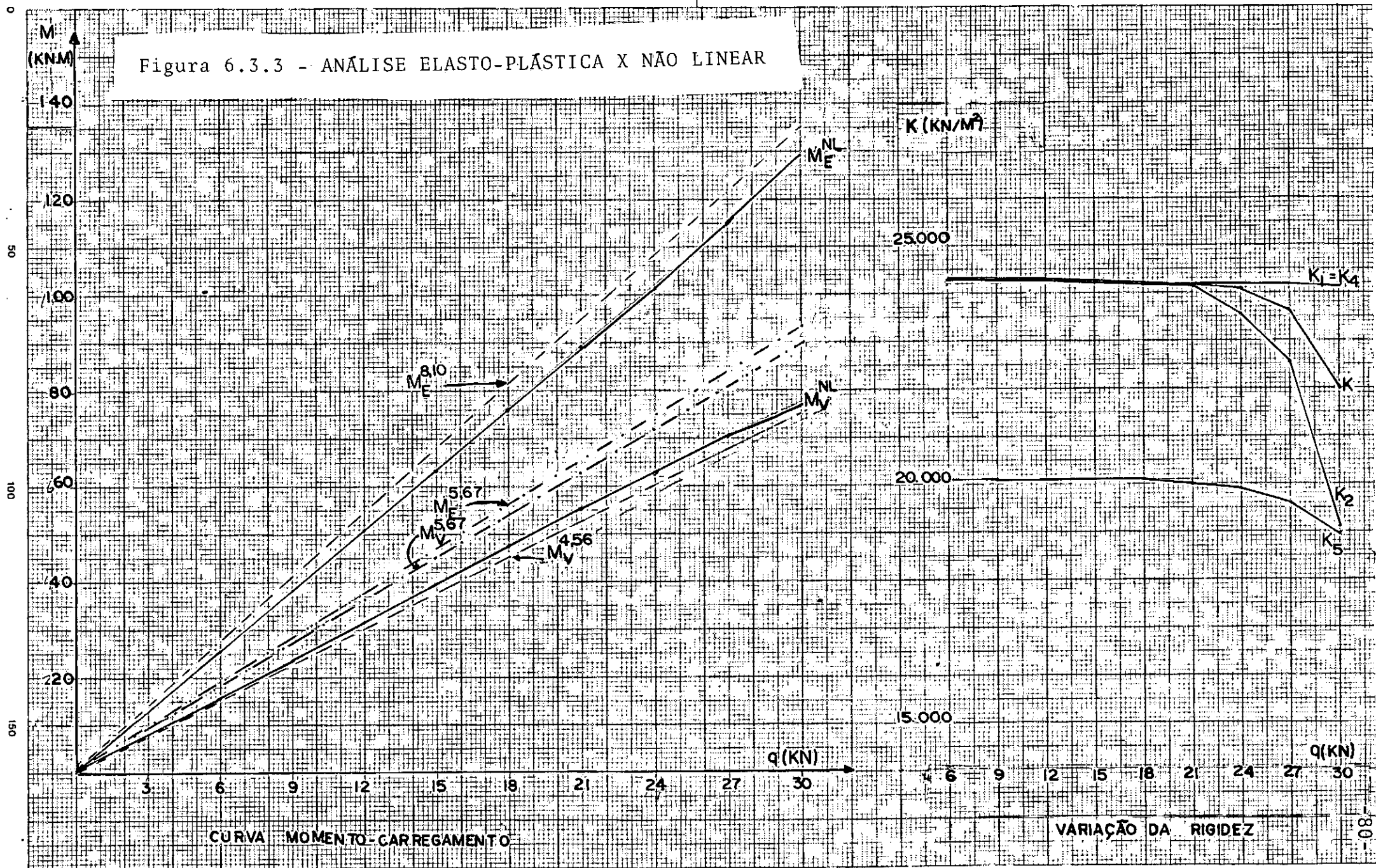
Figura 6.3.2 - ANÁLISE ELÁSTICO X NÃO LINEAR



CURVA MOMENTO-CARREGAMENTO

VARIACAO DA RIGIDEZ

Figura 6.3.3 - ANÁLISE ELASTO-PLÁSTICA X NÃO LINEAR



CURVA MOMENTO-CARREGAMENTO

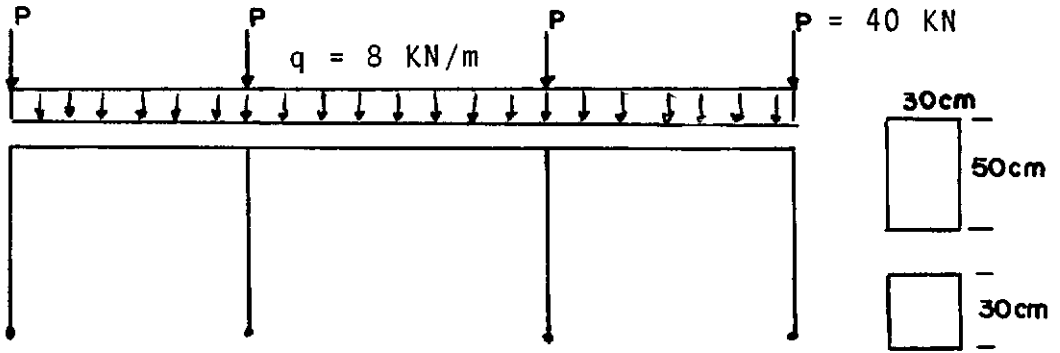
VARIAÇÃO DA RIGIDEZ

80

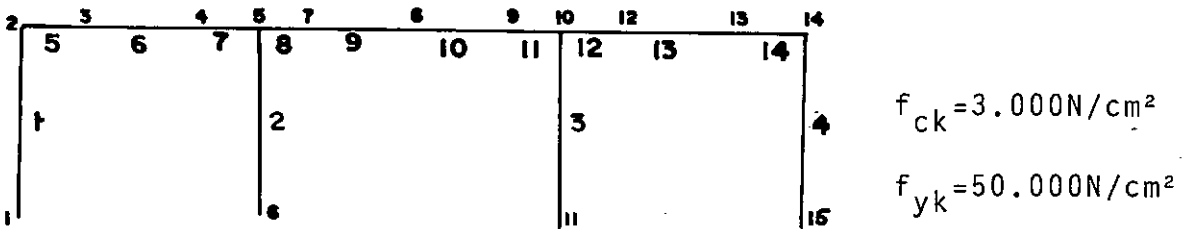
EXEMPLO 4

**6.4. ANÁLISE DA DISTRIBUIÇÃO DA ARMADURA EM UM PÓRTICO PLANO DE CONCRETO ARMADO**

Partindo-se de um pórtico de referência "P0", dimensionado segundo a NBI/78 para os esforços obtidos na análise elástica, Fig. 6.4.1 foram realizadas simulações na distribuição da armadura no sentido de observar o desenvolvimento dos esforços e das deformações no mesmo.

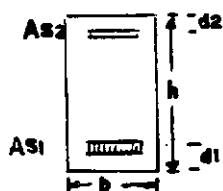


a) Definição geométrica e do carregamento



b) Discretização da estrutura

Fig. 6.4.1. Definição do pórtico de referência "P0"



Seções tipo	Dimensões (cm)	$d_1$ (cm)	AS1 (cm <sup>2</sup> )	h (cm)	AS2 (cm <sup>2</sup> )
1 e 4	30x30	3,0	24,10	28,0	24,10
2 e 3	30x30	3,0	13,80	28,0	13,80
5 e 14	30x50	3,0	17,00	47,0	30,00
6 e 13	30x50	3,0	23,00	47,0	13,00
7 e 8	30x50	3,0	16,50	47,0	20,00
11 e 12	30x50	3,0	16,50	47,0	20,00
9 e 10	20x50	3,0	26,0	47,0	13,00

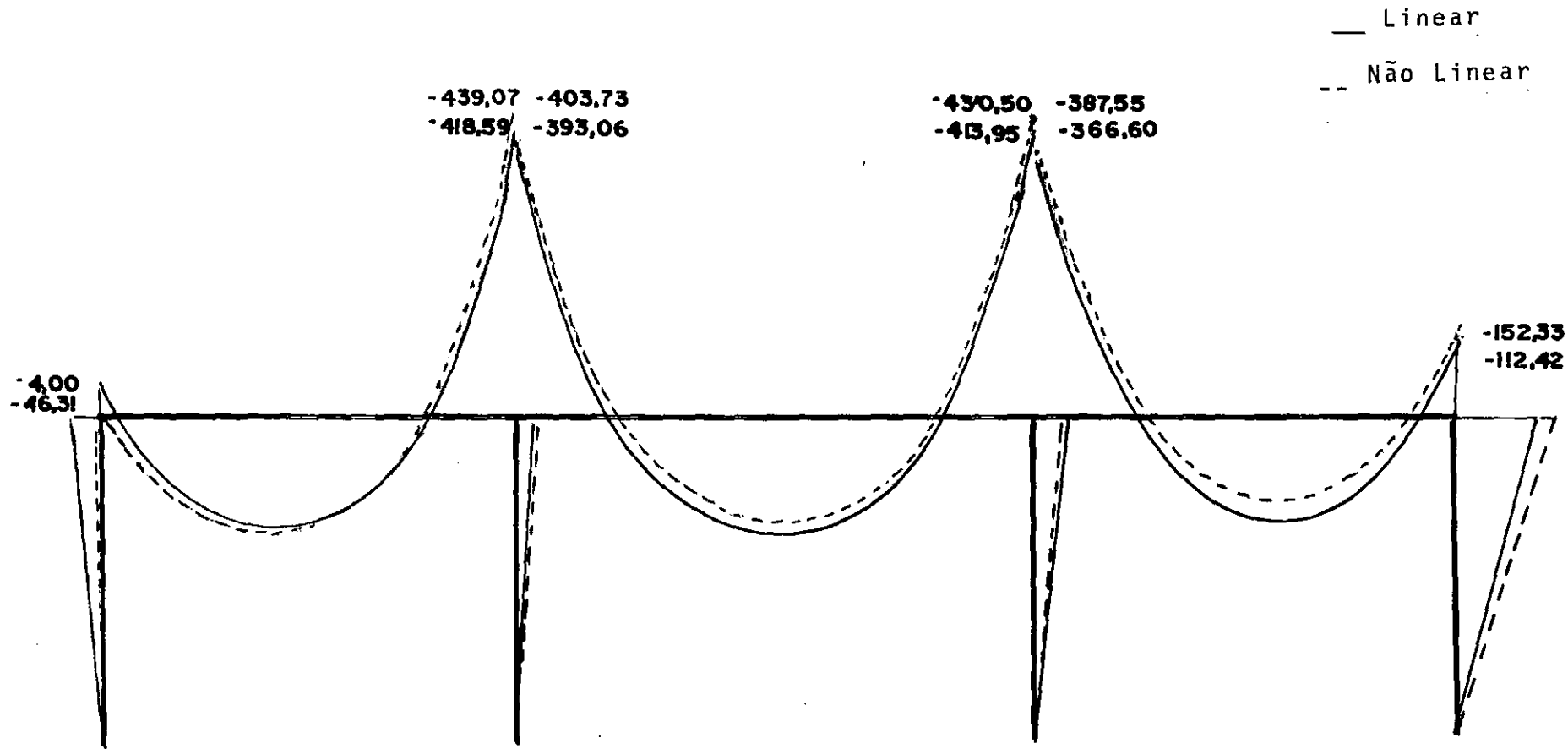
### c) Distribuição de armadura no pórtico "P0"

Na Fig. 6.4.2 e no Quadro 6.4.1 estão mostradas as diferenças entre a análise elástica clássica, que considera a rigidez invariante " $E_c \cdot I$ " e a análise não linear.

As diferenças mais significantes estão localizadas nos pilares que apresentam variações entre 10% a 24% e no vão lateral, onde através da análise não linear os esforços aumentaram de 14% sobre os mesmos obtidos da análise linear isto se deve a maior sensibilidade da análise não linear para a não simetria do carregamento na estrutura.

No Quadro 6.4.2 podem ser observadas as diferenças entre os esforços e deformações do pórtico de referência "P0" e os demais indicados, todos analisados pela análise não linear. Já que a análise linear não comporta esta simulação.

Na verdade esta é a grande importância da análise não linear, pois a disposição e quantidade de armação provoca uma redistribuição nos esforços da mesma.



Quadro 6.4.1

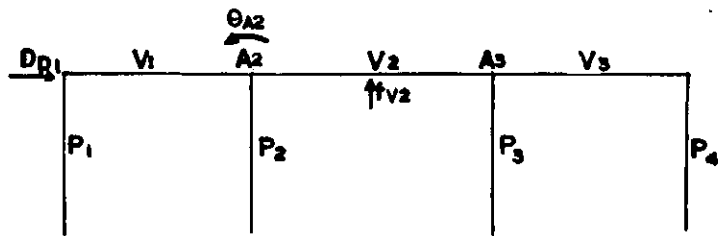
VALORES DOS MOMENTOS FLETORES EM (N.m)								
P1 <sub>max</sub>	V1 <sub>max</sub>	P2 <sub>max</sub>	A2 <sub>max</sub>	V2 <sub>max</sub>	P3 <sub>max</sub>	A3 <sub>max</sub>	V3 <sub>max</sub>	P4 <sub>max</sub>
4,00	200,34	35,33	439,07	222,90	42,25	430,50	155,06	152,33
46,31	192,55	26,53	418,59	240,00	47,35	413,95	180,49	122,42
↑91,4%	↓4,0%	↓33,2%	↓5,0%	↑7,1%	↑10,8%	↓4,0%	↑14,1%	↓24,43%

DESLOCAMENTOS		
DPI x10 <sup>-3</sup> m	θA2 x10 <sup>-4</sup> rad	fV2 x10 <sup>-3</sup> m
27,3	- 7,46	-15,6
14,4	- 9,73	-14,6
↑89,6%	↑23,4%	↓6,9%

Fig. 6.4.2. Análise comparativa entre os esforços obtidos na análise elástica linear e a análise não linear

Quadro 6.4.2

	MOMENTOS FLETORES NOS ELEMENTOS EM (KN.m)									DESLOCAMENTOS E ROTAÇÕES		
	P1 <sub>max</sub>	V1 <sub>max</sub>	P2 <sub>max</sub>	A2 <sub>max</sub>	V2 <sub>max</sub>	P3 <sub>max</sub>	A3 <sub>max</sub>	V3 <sub>max</sub>	P4 <sub>max</sub>	DP1 (mm)	θA2 (x10 <sup>-4</sup> rad)	fV2 (mm)
1. P0	-46,31	192,55	26,53	-418,59	240,00	47,35	-413,95	180,49	122,42	14,40	- 9,73	-14,60
2. P5AC	-42,02	177,15	31,37	-453,69	207,22	43,39	-443,23	166,45	117,27	14,06	- 6,12	7,65
2-1 /1	↑9,3%	↑8,0%	↑18,2	↑8,4%	↑13,7%	↑8,4%	↑7,1%	↓7,8%	↓4,2%	↓2,4%	↓37,1%	↓47,6%
3. P5VC	-49,19	197,37	31,33	-406,07	254,61	42,50	-396,04	185,55	125,40	14,30	- 6,25	-12,20
3-1 /1	↑6,2%	↑2,5%	↑18,1%	↑3,0%	↑6,1%	↑10,2%	↓4,3%	↑2,8%	↑2,4%	↓0,7%	↓35,7%	↑16,4%
4. P5VL	-34,57	202,01	20,46	-406,41	243,31	52,65	-407,43	189,38	111,46	14,12	-13,50	- 9,80
4-1 /1	↑25,3%	↑4,9%	↑22,9%	↓2,9%	↑1,4%	↑11,2%	↓1,6%	↑4,9%	↓9,0%	↓1,9%	↑38,7%	↓32,9%
5. P2PC	-50,30	190,71	28,72	-418,28	235,61	53,89	-419,23	183,49	117,69	12,60	- 9,77	-14,20
5-1 /1	↑8,6%	↑1,0%	↑8,3%	0	↓1,8%	↑13,8%	↑1,3%	↑1,7%	↓3,9%	↓12,5%	↑0,4%	↓ 2,7%



- P0 - Esquema de referência (dimensionado pelos esforços elásticos)
- P5AC - Aumentado em 50% a armadura nos apoios centrais
- P5VC - Aumentado em 50% a armadura no vão central
- P5VL - Aumentado em 50% a armadura nos vãos laterais
- P2PC - Igualada a armadura aos pilares laterais (aumentada em 75% a armadura)



Analisando o Quadro 6.4.2 pode ser destacado:

1. Quando se aumenta a armação nos apoios centrais (P5AC), a rigidez nestas regiões aumenta e em consequência há uma maior concentração de esforços diminuindo-os nos vãos adjacentes e enrijecendo mais a estrutura (diminui as deformações).
2. Quando se aumenta a armadura nos vãos (P5VL e P5VL) aumentam os esforços nos mesmos, porém suas deformações (flechas) diminuem, isto é, tornam-se mais rijas.
3. Quando esse aumento na armadura nos vãos é feito não simetri-camente, provoca uma maior rotação nos apoios adjacentes (P2VL).
4. Quando se enrijecem ospilares os esforços nestes aumentam e a estrutura fica mais rija a forças horizontais.

## CAPÍTULO VII

### CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Foram abordadas no final de cada exemplo apresentado considerações conclusivas; reunindo o que essas considerações contêm, podemos consignar como conclusões finais os seguintes itens:

1. É factível praticamente por meios computacionais, não excessivamente elaborados; calcular os esforços numa estrutura de concreto armado, com a consideração da variação de rigidez em trechos discretos.

2. Para o carregamento de serviço os exemplos abordados mostraram que as discrepâncias obtidas não são significativas para fins práticos, no entanto a abordagem não-linear pode permitir distribuição da armadura em termos mais econômicos, o que tem importante significado orçamentário, além de permitir conhecimento mais exato de comportamento estrutural.

3. Como consequência do item anterior, verificou-se a possibilidade de reduções de flechas nas posições em que essas se façam necessárias.

4. Verificou-se também que a análise não-linear põe em evidência a influência no diagrama final das eventuais alterações que se façam na estrutura, devidos à modificações da armadura dife

rentemente da obtida pelo cálculo elástico usual.

5. Nos exemplos em que o cálculo atingiu a situação de ruína, a metodologia aqui apresentada permitiria uma variação bastante plausível de uma redução a ser feita no diagrama elástico, ao passo que as reduções que os diferentes regulamentos prescrevem, sem maiores indicações de sua procedência, ficam carentes de fundamentações. Nessas condições a análise não-linear teria essa significação importante, de sugerir coeficientes de redução aplicáveis a um diagrama elástico em classes de estruturas muito semelhantes.

## APÊNDICE A

### APLICAÇÃO ELUCIDATIVA DOS MÉTODOS DE CÁLCULO PLÁSTICO

No Capítulo IV foram apresentados sinteticamente os fundamentos dos métodos de análise estrutural, segundo a evolução de uma abordagem elástica linear para a análise plástica. Dos métodos de análise plástica apresentados, citou-se o "Das Rotações Impostas" (MACCHI) e o "Das Rotações Últimas" (BAKER).

No sentido de procurar não desviar a atenção das diferenças entre as duas concepções, elástica e plástica, preferiu-se não desenvolver naquele capítulo, os métodos citados.

No Capítulo V foram apresentados dois métodos de análise plástica iterativos diretos, um baseado no método dos esforços e um outro baseado no método dos deslocamentos.

Este apêndice se circunscreve em descrever os roteiros de aplicação do método de Macchi, por ser o mais exato dos métodos clássicos acima, e do método iterativo direto baseado no método dos esforços, este sob uma ótica intuitiva e de aplicação acadêmica, acompanhados de exemplos simples de forma a deixar bem claro as facilidades e as limitações de cada um.

Claro está que os métodos iterativos diretos foram desenvolvidos para aplicação computacional, conforme descrito no Capí

tulo V.

## A.1. ROTEIRO PARA APLICAÇÃO DO MÉTODOS DAS ROTACÕES IMPOSTAS. MÉTODO DE MACCHI

### A.1.I. PREPARAÇÃO DOS ELEMENTOS DE CÁLCULO

#### A.1.I.1. DETERMINAÇÃO DAS SEÇÕES CRÍTICAS

As seções críticas são consideradas as mais solicitadas em cada região de momentos de mesmo sinal. A posição de cada uma dessas regiões varia com as condições de contorno de cada elemento e do carregamento aplicado.

Estas seções são determinadas aplicando-se as equações de equilíbrio ao elemento, sob as condições de contorno existentes, encontrando-se assim um ponto ou região de momento máximo.

EXEMPLO: Seja um elemento viga, engastado-apoiado, de comprimento " $\ell$ " sob um carregamento uniformemente distribuído " $q$ ", de seção constante, como apresentado na fig. A1.1.

A seção crítica para a região positiva localizar-se-á em  $x_c$ , calculado a seguir:

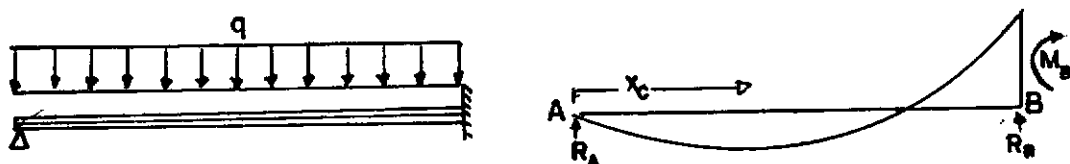


Fig. A.1.1 Determinação da posição da seção crítica

Aplicando a regra dos três momentos, para uma viga contínua, simétrica de dois vãos  $\ell$ , tem-se:  $2M_b \cdot \ell = -6 \frac{q\ell^2}{24} \therefore M_b = -\frac{q\ell^2}{8}$

equilibrando:  $\Sigma M_a = 0 \rightarrow R_b \cdot \ell - \frac{q\ell^2}{2} + \frac{q\ell^2}{8} = 0 \therefore R_b = \frac{3q\ell}{8}$

A expressão geral do cortante:  $Q(x) = -\frac{3q}{8} + q \cdot x = 0$

o ponto de m̃nimo ser̃a:  $x_c = \frac{3}{8} \ell$  ou  $x_c = 0,371\ell$

### A.1.1.2. DETERMINAÇÃO DO MOMENTO DE RUTURA NAS SEÇÕES CRÍTICAS

A determinação do momento de rutura ( $M_u$ ), faz-se segundo a teoria do estado limite ũltimo.

EXEMPLO: Para uma seção como apresentada abaixo, tem-se a formulação:

- se  $c \leq h_F$ :

$$M_u = A_s \cdot F_{yd} (d - 0,5a)$$

- se  $c > h_F$ :

$$M_u = 0,85 F_{cd} a \cdot b_w \left(d - \frac{a}{2}\right) + 0,85 F_{cd} (b - b_w) h_F \left(d - \frac{h_F}{2}\right)$$

$$a = \frac{A_s \cdot F_{yd}}{0,85 b \cdot F_{cd}} \quad c = \frac{a}{0,85}$$

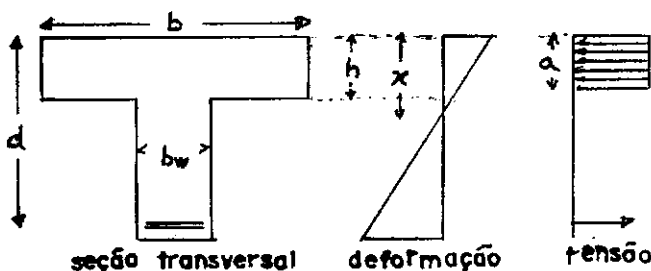


Fig. A 1.2 Determinação do momento de rutura

### A.1.1.3. DETERMINAÇÃO DO EFEITO ELÁSTICO DAS CARGAS EXTERNAS

Para cada configuração da carga externa, aplicam-se as equações de compatibilidade nas rótulas plásticas consideradas, tomando-se sua rotação nula e considerando a rigidez elástica. Encontram-se assim os valores dos momentos de compatibilidade em cada rótula.

EXEMPLO: Considere a estrutura mostrada na fig. A.1.3.

$$\left(\frac{l_1}{3EI_1} + \frac{l_2}{3EI_2}\right)X_1 + \frac{l_2}{6EI} X_2 = -\frac{l_1}{3EI_1} \frac{q \cdot l_1^2}{8} - \frac{l_2}{3EI_2} \frac{q \cdot l_2^2}{8}$$

$$\frac{l_2}{6EI_2} X_1 + \left(\frac{l_2}{3EI_2} + \frac{l_3}{3EI_3}\right)X_2 = -\frac{l_2}{3EI_2} \frac{q \cdot l_2}{8}$$

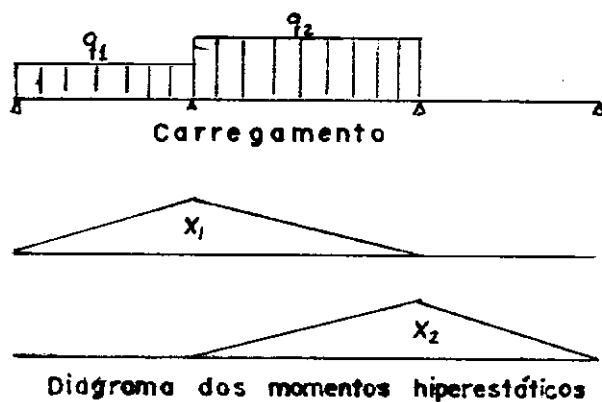


Fig.A.1.3 Det. do efeito elástico

Determinados os momentos hiperestáticos  $X$ , constroi-se a distribuição dos momentos finais.

### A.1.1.4. DETERMINAÇÃO DO EFEITO DAS ROTAÇÕES IMPOSTAS

Aplicando-se isoladamente em cada seção inelástica, i.e., nas seções críticas não consideradas como rótulas plásticas, um

momento que origine uma rotação unitária nesta seção, determinam-se os efeitos que esta produz nas outras seções, resolvendo-se o sistema:

$$X_i \delta_{ii} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \delta_{ik} X_k + \psi_i = 0$$

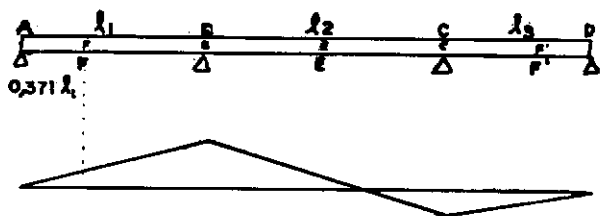
onde  $\psi_i$  é o efeito da rotação unitária na seção crítica sobre o sistema aplicado à  $i$ -ésima equação

EXEMPLO: Para o vão lateral de uma viga contínua, mostrada na fig. A.1.4, tem-se:

Pela equação dos três momentos

$$\left( \frac{l_1}{3EI_1} + \frac{l_2}{3EI_2} \right) X_1 + \frac{l_2}{6EI_2} X_2 + 0,371 = 0$$

$$\frac{l_2}{6EI_2} X_1 + \left( \frac{l_2}{3EI_2} + \frac{l_3}{3EI_3} \right) X_2 = 0$$



distribuição dos momentos fletores  
para rotação unitária em B

FIG. A.1.4

### A.1.1.5. CÁLCULO DA "RIGIDEZ ELÁSTICA"

A rigidez elástica pode ser determinada sem muito rigor, tomando por exemplo o módulo de elasticidade do concreto como:

$E_c = 21000 \sqrt{f_{ck}}$ . E o momento de inércia da seção de concreto, sem precisar se preocupar com a armação.



## A.1.II. CONSTRUÇÃO DO DIAGRAMA MOMENTO ROTAÇÃO INELÁSTICA $[M-\theta_p]$

### A.1.II.1. PRIMEIRO TRAMO (DETERMINAÇÃO DO PONTO $L_0$ )

Determinando a resistência a tração por:  $F_{cf} = 7 + \frac{6 F_{ck}}{100}$

O momento de fissuração é conhecido por:  $M_0 = F_{cf} I_c / Y_{cg}$

A essa altura, ainda não se detecta qualquer deformação de origem plástica; por isso, descontada a parcela de deformação elástica a abscissa deste ponto é zero.  $L_0 = (0, M_0)$

### A.1.II.2. SEGUNDO TRAMO (DETERMINAÇÃO DO PONTO $L_1$ )

Determinação da altura da linha neutra "x"

$$x = \frac{m \cdot A_s}{b} \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{2bh}{m \cdot A_s}} \right) + \frac{N}{h} \frac{\psi_s}{E_s A_s}$$

onde:  $m = \frac{E_s}{E_c}$  ;  $Z = h - \frac{x}{3}$  ;  $\psi_s = 1,3 - \lambda \frac{M_0}{M}$  ;

$$\lambda = \begin{cases} 1,1 & \text{- carga de curta duração} \\ 0,8 & \text{- carga em longa duração} \end{cases}$$

$$\therefore M_1 = 0,95 F_y A_s Z$$

$$\Delta M = M_1 - M_0 \quad I_{II} = A_s Z (h-x)$$

curvatura  $\phi = \frac{\Delta M}{E_c I_c} - \frac{\Delta M}{E_c I_{II}}$  onde  $\alpha_1 = \frac{2}{3} \ell_p \phi$   $L_1 \equiv (\alpha_1, M_1)$

$\ell_p$  - comprimento da zona de momento do mesmo sinal

### A.1.II.3. TERCEIRO TRAMO (DETERMINAÇÃO DO PONTO $L_2$ )

Determinado o valor do momento de rutura, no item I.2, de termina-se em seguida a percentagem de armadura limite  $W = \frac{A_s F_y}{b h F_{ck}}$ .

Através do par " $M_u, W$ " entra-se no abaco da fig. A.1.5 (abaco do CEB) e encontram-se assim os valores para  $\theta_{min}$  e  $\theta_{max}$ .

Marcando se assim dos pontos no gráfico  $[M-\theta_p]$

$$L_{2s} \equiv (\alpha_1 + \theta_{min}, M_u) \quad \text{e} \quad L_{2I} \equiv (\alpha_1 + \theta_{max}, M_u)$$

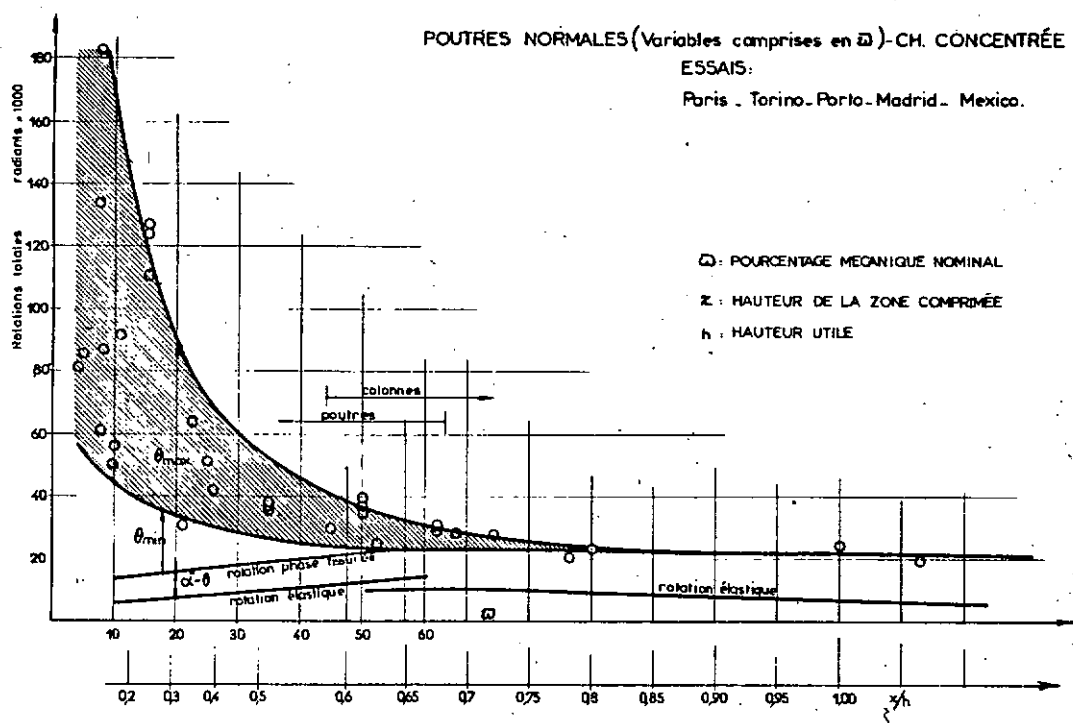


FIG A.1.5

### A.1.III. VERIFICAÇÃO DO ESTADO LIMITE DE RUTURA

Por meio dos diagramas de influência, determinados nos itens A.I.3 e A.I.4, traça-se a distribuição para carga permanen

majorados por um coeficiente  $\gamma$ .

Verifica-se então, pela condição mais desfavorável de sobrecarga, qual o coeficiente de majoração  $\eta$  que conduz ao estado limite de distribuição elástica de momentos totais, i.e., distribuição elástica para carga permanente e sobrecarga, majorados por  $\gamma$  e  $\eta$  respectivamente. Procurando-se encontrar  $\eta$  mais próximo de  $\gamma$  que satisfaça o limite.

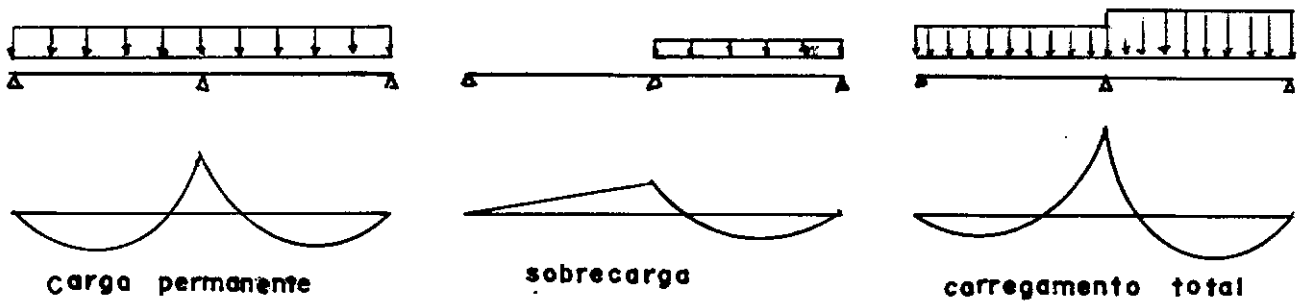


Fig. A.1.6 Composição da distribuição de momentos

Neste ponto duas coisas podem acontecer:

### A.1.III.1. CASO EM QUE O DIAGRAMA ELÁSTICO TOTAL OBTIDO NÃO É ESTATICAMENTE ADMISSÍVEL

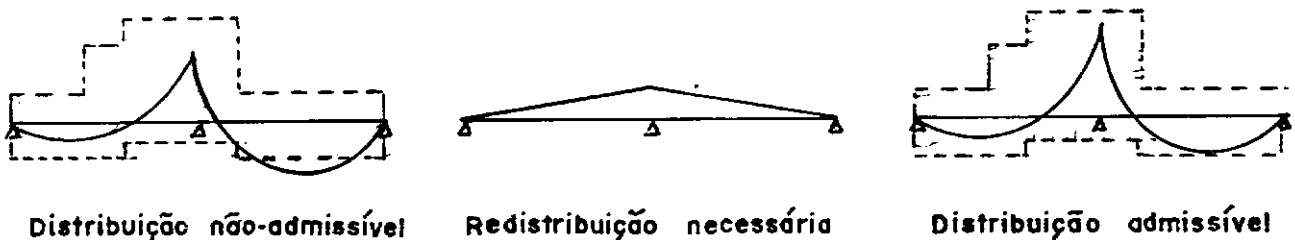


Fig. A.1.7 Ajustamento na distribuição de momentos

a) Opera-se uma redistribuição de momentos  $\Delta M_i$  em adição à distribuição de momento elástico total, sobre cada rótula  $i$ , de forma a tornar a distribuição resultante estaticamente admissível. (fig. A.1.7)

- b) Esta distribuição obtida s̄o ser̄a possível se houver compatibilidade de deformações nas seções críticas, devendo-se para isso, testar a distribuição obtida entre os valores limites admissíveis.

A ordenada  $\Delta M_i$  sobre cada rótula plástica considerada, pode ser encontrada através da fórmula:

$$\Delta M_i = E_c I (K_{i-1} \alpha_{i-1} + K_i \alpha_i + K_{i+1} \alpha_{i+1})$$

onde:  $K_i$  são os coeficientes de influência das seções.

Os  $\alpha_i$  são obtidos no diagrama  $M-\theta_p$  traçado anteriormente; como nesse diagrama se dispõe dos valores  $\alpha_{ij}$   $\alpha_{is}$ , determinam-se, na combinação mais desfavorável, os valores de  $\Delta M_{\min}$  e  $\Delta M_{\max}$  :

- c) Se os valores de  $\Delta M_{\max}$  e  $\Delta M_{\min}$  apresentarem o mesmo sinal e o valor de  $\Delta M$  calculado estiver entre estes limites, isso significa que a configuração é compatível e admissível.
- d) Caso  $\Delta M_{\min}$  e  $\Delta M_{\max}$  sejam menores que  $\Delta M$ , ou mesmo de sinais contrários, a compatibilidade de deformação não pode ser atendida e deve ser feita alteração no valor de  $\eta$ .

### A.1.III.2. CASO EM QUE O DIAGRAMA ELÁSTICO TOTAL É ESTATICAMENTE ADMISSÍVEL

O momento limite não é ultrapassado em nenhuma seção, todavia a configuração elástica total pode não ser compatível, devendo para isso, serem averiguados os valores de  $\Delta M_{\min}$  e  $\Delta M_{\max}$ , procedendo-se à análise conforme os itens c e d anteriores.

## A.1.IV. PESQUISA NO ESTADO LIMITE DE RUTURA

Até aqui, o controle da inequação  $\eta \geq \gamma$  significa a condição suficiente para que não haja rutura prematura, i.e., o coeficiente de segurança sobre as sobrecargas são superiores aos das cargas permanentes. Porém o cálculo de um  $\eta_{\min}$  pode ser útil para se conhecer a verdadeira margem de segurança e reduzir eventualmente as seções (críticas) superdimensionadas.

Neste caso, a fim de se proceder à verificação do estado de rutura, supõe-se  $\eta = \gamma$  e por um processo de tentativa, faz-se  $\gamma$  crescer até se obter a compatibilidade de deformações.

O menor valor  $\eta$  é obtido quando  $\Delta M_{\min} = \Delta M_0$ .

## A.2. APLICAÇÃO DO MÉTODO DE MACCHI

### A.2.I.1. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Seja uma viga contínua simplesmente apoiada de três vãos de 12.20m, 19.22m e 12.20m, de seção transversal constante, fig. A.2.1.

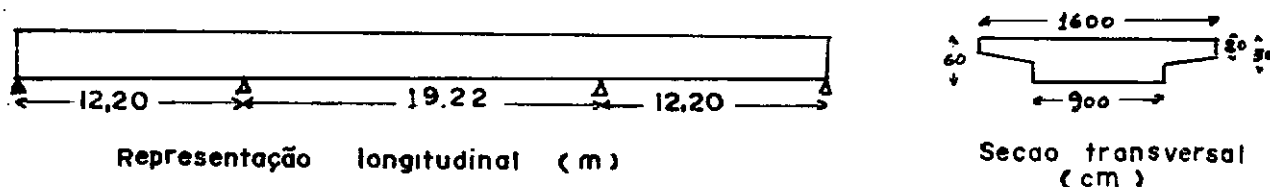


Fig.A.2.1 Definição geométrica do problema

### A.2.I.2. CARREGAMENTO

a) Carga permanente:

$$W = (0,6.9 + 2.3,5(0,2 + 0,3)/2)2,5 = 17,9 \text{ t/m}$$

b) Sobrecarga

Admite-se atuando uma sobrecarga de 22 t/m distribuída na forma mais desfavorável.

### A.2.I.3. MATERIAIS

a) Concreto:  $F_{ck} = 270 \text{ kg/cm}^2$

b) Aço:  $F_{yk} = 4000 \text{ kg/cm}^2$

Armadura: Seção transversal no vão central  $A_s = 883 \text{ cm}^2$

Seção transversal sobre os apoios  $A_s = 834 \text{ cm}^2$

Seção transversal no vão lateral  $A_s = 343 \text{ cm}^2$

## A.2.II. PREPARAÇÃO DOS ELEMENTOS DE CÁLCULO

### A.2.II.1. LOCALIZAÇÃO DOS SETORES INELÁSTICOS

Procedendo de acordo com o item A.1.I.1, as seções estarão localizadas conforme mostra a fig. A.2.2.

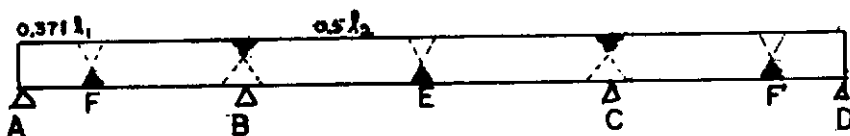


Fig. A.2.2 Localização das seções críticas

### A.2.II.2. CÁLCULO DOS MOMENTOS DE RUTURA DAS SEÇÕES CRÍTICAS

Procedendo conforme o item A.1.I.2, encontraremos:

Resistência de cálculo  $F_{yd}=4000/1,15 \text{ kg/cm}^2$

$F_{cd}=270/1,4 \text{ kg/cm}^2$

a) Seção E

$b=1600 \text{ cm}$  ;  $h=54 \text{ cm}$  ;  $A_s=883 \text{ cm}^2 \rightarrow M_u=1480 \text{ tm}$

b) Seções B e C

$b=900 \text{ cm}$  ;  $h=54 \text{ cm}$  ;  $A_s=834 \text{ cm}^2 \rightarrow M_u=1282 \text{ tm}$

c) Seções F e F'

$b=1600 \text{ cm}$  ;  $h=56 \text{ cm}$  ;  $A_s=343 \text{ cm}^2 \rightarrow M_u=641 \text{ tm}$

### A.2.III. DETERMINAÇÃO DO EFEITO ELÁSTICO DAS CARGAS

Posicionando um carregamento distribuído unitário nas situações mais desfavoráveis e procedendo de acordo com o item A.1.I.3:

a) No vão central: fig. A.2.3a

encontramos:  $X_b=X_c=-21,23 \text{ tm}$

onde deduzimos:

$M_f=M_{f'}=0,371(-21,23)=-7,87 \text{ tm}$

$M_e=1,0(19,22)^2/8 - 21,23=24,55 \text{ tm}$

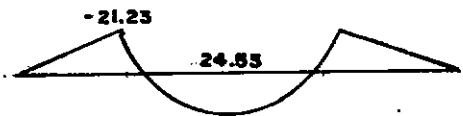


Fig.A.2.3a Diag. de momento sobrecarga vão central

b) No vão lateral: fig. A.2.3.b

encontramos:  $X_b=-7,97 \text{ tm}$

$X_c=2,44 \text{ tm}$

onde deduzimos:

$M_f=1(0,371.12,2)^2/2+0,371(-7,97)=7,28 \text{ tm}$

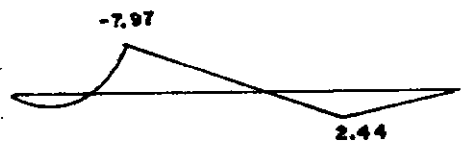


Fig.A.2.3b Diag. de momento sobrecarga vão lateral

$$M_e = (-7,97 + 2,44) / 2 = -2,76 \text{ tm}$$

$$M_{f'} = 0,37 \cdot 2,44 = 0,90 \text{ tm}$$

#### A.2.IV. DETERMINAÇÃO DO EFEITO DAS ROTAÇÕES IMPOSTAS

Para cada seção crítica inelástica, procede-se de acordo com o item A.1.I.4.

a) Rotação unitária imposta a F ou F'. fig. A.2.4a

encontra-se:  $X_b = -0,0390 \text{ EI}$

$$X_c = 0,0119 \text{ EI}$$

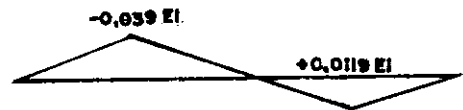


Fig.A.2.4a Diag. de momento rotação unitária em F

a partir destes:

Imposta a F  $M_f = -0,0145 \text{ EI}$

$$M_e = -0,0135 \text{ EI}$$

$$M_{f'} = 0,0044 \text{ EI}$$

Imposta a F'  $M_f = 0,0044 \text{ EI}$

$$M_e = -0,0135 \text{ EI}$$

$$M_{f'} = -0,0145 \text{ EI}$$

b) Rotação unitária imposta a E. fig. A.2.4b

encontra-se pelo sistema:

$$X_b = -0,0366 \text{ EI} = X_c$$

a partir destes:

$$M_f = M_{f'} = -0,135 \text{ EI}$$

$$M_e = -0,0366 \text{ EI}$$

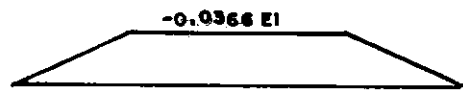


Fig.A.2.4b Diag. de momento rotação unitária em E

c) Rotação unitária imposta a B ou C.

encontra-se pelo sistema (em b):  $X_b = 0,105 \text{ EI}$

$$X_c = -0,032 \text{ EI}$$

a partir destes:  $M_f = 0,039 \text{ EI}$  ;  $M_e = 0,0366 \text{ EI}$  ;  $M_{f'} = -0,0119 \text{ EI}$   
imposta a (c) seria simétrico os resultados.



## A.2.V. CÁLCULO DOS COEFICIENTES DE RIGIDEZ "EI" (SEGUNDO A.1.5)

$$E'_c = 21000 \sqrt{F_{ck}} = 21000 \sqrt{270} = 345000 \text{ kgf/cm}^2$$

$$Y_{cg} = \frac{(900.60.30 + 700.20.50 + 700.10/2.36)}{(900.60 + 700.20 + 700.10/2)} = 33$$

$$I' = (900.60^3/12 + 900.60.3^2 + 700.20^3/12 + 700.20.17^2 + 700.10^3/12)$$

$$I' = 21,1 \cdot 10^6 \text{ cm}^4$$

$$EI = E'_c \cdot I' = 34500 \cdot 21,1 \cdot 10^6 = 7,31 \cdot 10^{12} \text{ kgf.cm}^2$$

## A.2.VI. CONSTRUÇÃO DOS DIAGRAMAS MOMENTO-ROTAÇÃO INELÁSTICA

### A.2.VI.1. PRIMEIRO TRAMO (DETERMINAÇÃO DE $L_0$ )

segundo A.1.II.1:  $F_{ct} = 7 + 6.270/100 = 23 \text{ kg/cm}^2$

a) Seções "E", "F" e "F'":  $M_0 = 23.21,1.10^6/33 = 14,7 \cdot 10^6 \text{ kg.cm}$

$$M_0 = 147 \text{ t.m}$$

b) Seções "B" e "C":  $M_0 = 23.21,1 \cdot 10^6/27 = 18,0 \cdot 10^6 \text{ kg.cm}$

$$M_0 = 180 \text{ t.m}$$

### A.2.VI.2. SEGUNDO TRAMO (DETERMINAÇÃO DE $L_1$ )

segundo A.1.II.2:

a) Seção "E":  $X = 22,8 \text{ cm}$  ;  $Z = 46,4 \text{ cm}$ ;

$$M_1 = 0,95.3480.883.0,464 = 1356 \cdot 10^3 \text{ kg.cm} = 1356 \text{ t.m}$$

$$\Delta M = 1356 - 147 = 1209 \text{ t.m}; I_{II} = 883.46,4(54 - 22,8) = 1278 \cdot 10^3 \text{ cm}^4$$

$$1/r = (1209)/(21,7 \cdot 10^6 \cdot 0,01278) - (1209)/(7,31 \cdot 10^5) = 3,88 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}$$

recorrendo-se ao diagrama de distribuição da envoltória limite, fig. A.2.5, tem-se o comprimento de atuação da região inelástica " $\ell_p$ "

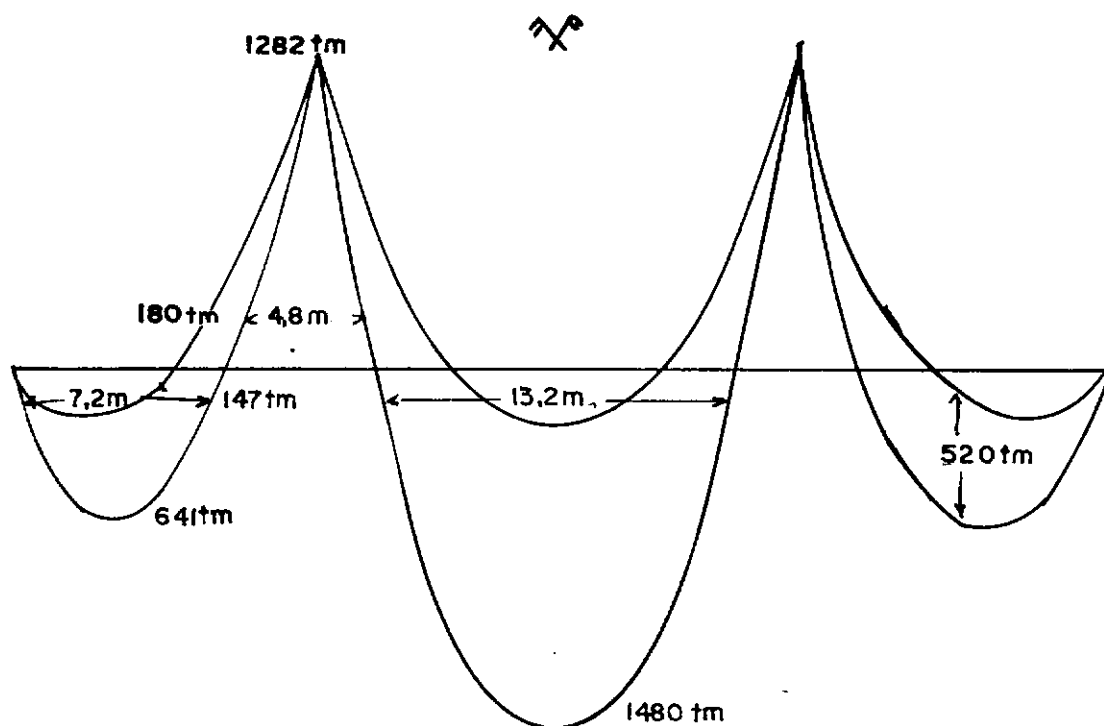


Fig.A.2.5 Envoltória dos momentos fletores limite

- para o meio do vão:  $\ell_p = 13,2m \rightarrow \alpha_1 = 2/3 \cdot 13,2 \cdot 2,88 \cdot 10^{-3} = 25,3 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$

b) Seções "B" e "C":  $X=27,2 \text{ cm}$  ;  $Z=46,4 \text{ cm}$

$$M_1 = 0,95 \cdot 3480 \cdot 834 \cdot 0,449 = 1239 \cdot 10^3 \text{ kg.m} = 1239 \text{ t.m}$$

$$\Delta M = 1239 - 180 = 1059 \text{ t.m}; I_{II} = 834 \cdot 44,9(54 - 27,2) = 1003 \cdot 10^3 \text{ cm}^4$$

$$1/r = 1059 / (21,1 \cdot 10^6 \cdot 0,01003) - 1059 / (7,31 \cdot 10^5) = 3,58 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}$$

identicamente ao anterior, para a região sobre os apoios  $\ell_p = 4,8m$

$$\alpha_1 = 2/3 \cdot 4,8 \cdot 3,58 \cdot 10^{-3} = 11,5 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

c) Seções "E" e "F'":  $X=16,0$  cm ;  $Z=50,7$  cm

$$M_1 = 0,95 \cdot 3480 \cdot 0,507 = 576000 \text{ kg.m} = 576 \text{ t.m}$$

$$\Delta M = 576 - 147 = 429 \text{ t.m} ; I_{II} = 343 \cdot 50,7(56-16) = 696000 \text{ cm}^4 = 0,00696 \text{ m}^4$$

$$1/r = 429 / (21,1 \cdot 10^6 \cdot 0,00696) = 429 / (7,31 \cdot 10^5) = 2,35 \text{ m}^{-1}$$

identicamente aos anteriores, para os vãos laterais " $\ell_p$ " = 7,2 m

$$\alpha_1 = 2/3 \cdot 7,2 \cdot 2,35 \cdot 10^{-3} = 11,26 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

### A.2.VI.3. TERCEIRO TRAMO (DETERMINAÇÃO DOS $L_{2I}$ E $L_{2S}$ )

segundo A.1.II.3:

a) Seção "E":  $M_u = 1480$  tm;  $W = (883 \cdot 4000) / (1600 \cdot 54 \cdot 270) = 15,1\%$

indo-se ao abaco do CEB:  $\theta_i = 24 \cdot 10^{-3}$  ;  $\theta_s = 105 \cdot 10^{-3}$  rad

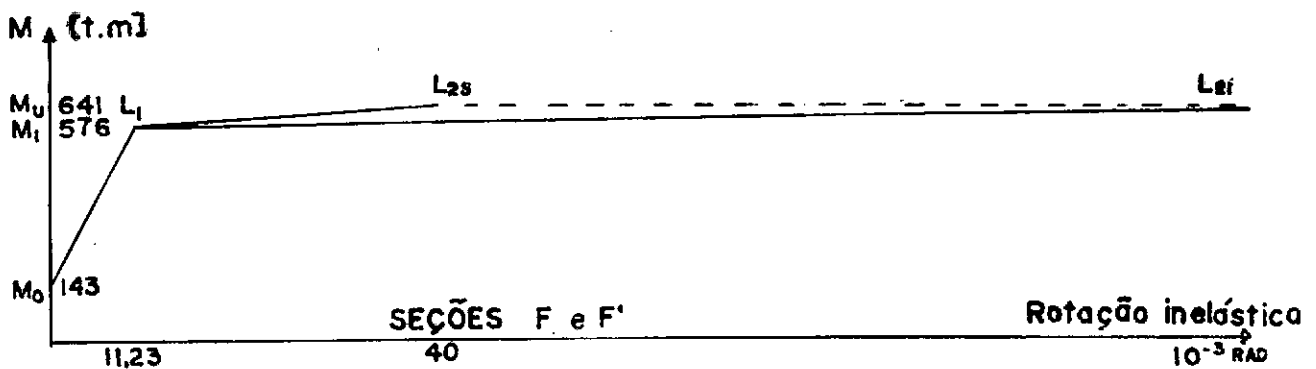
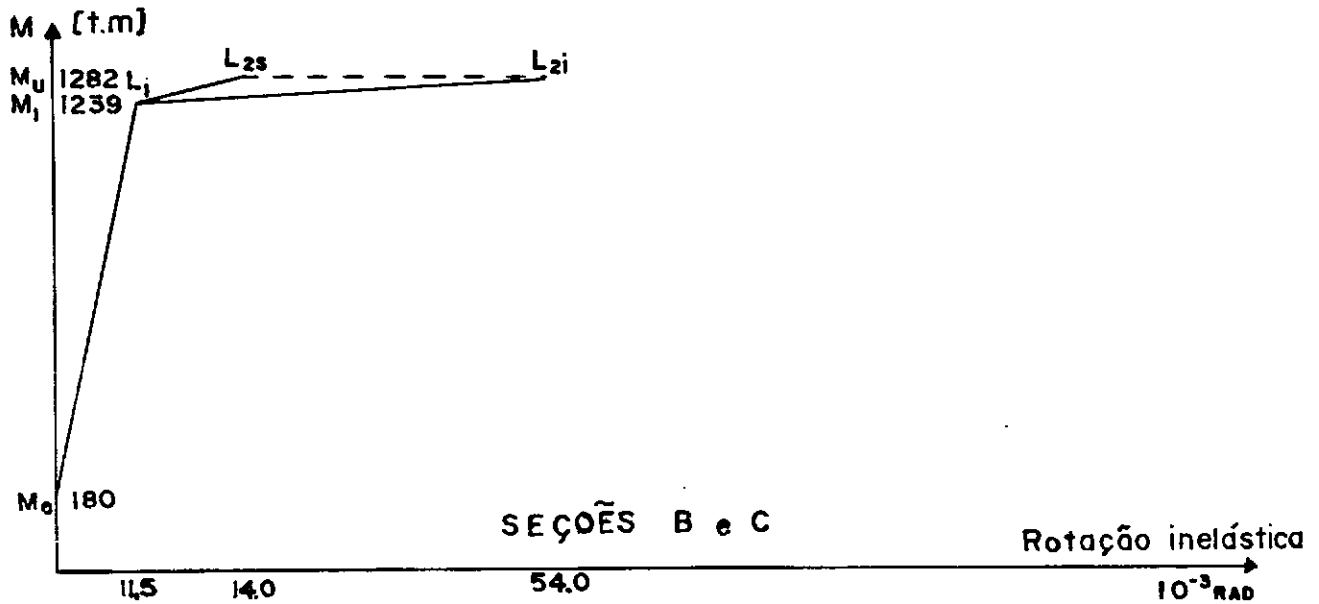
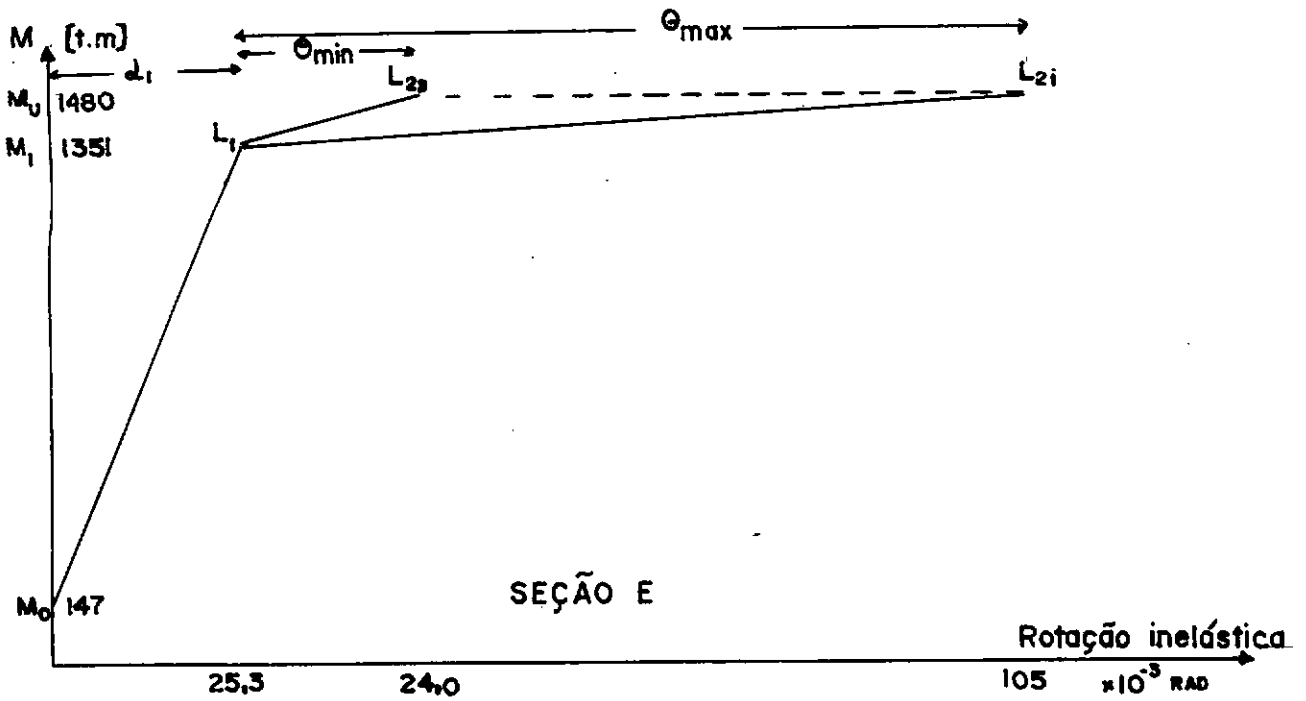
b) Seções "B" e "C":  $M_u = 1282$  tm ;  $W = (834 \cdot 4000) / (900 \cdot 54 \cdot 270) = 25,5\%$

indo-se ao abaco do CEB:  $\theta_i = 14 \cdot 10^{-3}$  rad;  $\theta_s = 54 \cdot 10^{-3}$  rad

c) Seções "F" e "F'":  $M_u = 647$  tm ;  $W = 343 \cdot 4000 / (1600 \cdot 56 \cdot 270) = 5,7\%$

indo-se ao abaco do CEB:  $\theta_i = 40 \cdot 10^{-3}$  rad;  $\theta_s = 170 \cdot 10^{-3}$  rad

### A.2.VI.4 DIAGRAMAS MOMENTO-ROTAÇÃO PARA AS SEÇÕES



## A.2.VII. VERIFICAÇÃO DO LIMITE DE RUTURA

### A.2.VII.1. DIAGRAMA ELÁSTICO DAS CARGAS PERMANENTES AMPLIADAS

$$G = \gamma \cdot W_g = 1,4 \cdot 17,9 = 25,06 \text{ ton} \quad \text{admitindo } \gamma = 1,4$$

momentos fletores nas seções críticas:

$$M_E = 25,06(24,55 - 2 \cdot 2,76) = 475,00 \text{ tm}$$

$$M_B = M_C = 25,06(-21,23 - 9,97 \cdot 2,44) = -670,67 \text{ tm}$$

$$M_F = M_{F'} = 25,06(7,28 - 0,90 - 7,87) = -22,55 \text{ tm}$$

### A.2.VII.2. SOBRECARGA NO TRAMO CENTRAL fig. A.2.6

admitindo  $\eta = 1,4$

O diagrama elástico para as cargas permanentes e sobrecarga será de:

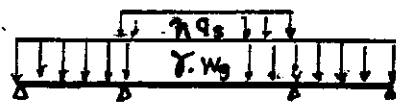


Fig. A.2.6 Carregamento

$$M_E = 475 + 1,4 \cdot 22 \cdot 24,55 = 1231 \text{ tm}$$

$$M_B = M_C = -670 + 1,4 \cdot 22(-21,23) = -1324 \text{ tm}$$

$$M_F = M_{F'} = -22,55 + 1,4 \cdot 22(-7,87) = -265 \text{ tm}$$

Como o momento de rutura sobre os apoios é  $M_U = -1282 \text{ tm}$ .

Será necessário uma superposição de uma distribuição trapezoidal de  $\Delta M = -(-1324 + 1282) = 42 \text{ tm}$

REDISTRIBUIÇÃO DE MOMENTOS  
(cálculo das rotações)

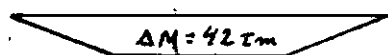


Fig. A.2.7 Redistribuição

$$M_E = 1231 + 42 = 1273 \text{ tm}$$

$$\alpha_{Emim} = \alpha_{Emax} = 23,5 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$M_B = M_C = -1324 + 42 = -1282 \text{ tm}$$

$$\alpha_{Bmim} = 25,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

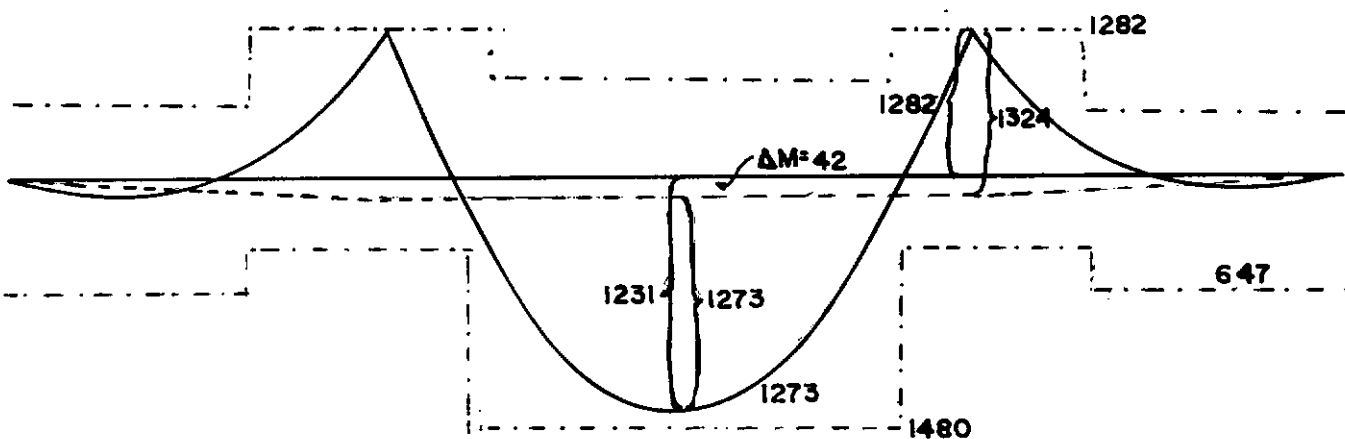
$$\alpha_{Bmax} = 65,5 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$M_F = M_{F'} = -265 + 42 = -232 \text{ tm} \quad \alpha_{F_{\min}} = \alpha_{F'_{\max}} = 0,0135 \text{ rad}$$

Na combinação mais desfavorável tem-se:

$$\Delta M_{\min} = EI(-0,0366.23,5 + 2.0,0366.25,5 - 2.0,0135.2)10^{-3} = 706 \text{ tm}$$

$$\Delta M_{\max} = EI(-0,0366.23,5 + 2.0,0366.65,5 - 2.0,0135.2)10^{-3} = 1776 \text{ tm}$$



**Redistribuição esquemática de momentos fletores para  $\Delta M = 42$  t.m**

**FIG. A.2.8**

ANÁLISE: A configuração suposta não apresenta compatibilidade, pois o  $\Delta M$  arbitrado está fora dos limites  $\Delta M_{\min}$  e  $\Delta M_{\max}$ . Todavia, como os  $\Delta M$  limites são positivos e maiores que o  $\Delta M$  arbitrado, também positivo, indicam que a seção E, do vão central, poderá aceitar uma maior redistribuição.

Admitindo-se  $\eta = 1,505$  tem-se:

O diagrama elástico para as cargas permanentes e sobrecargas será:

$$M_E = 475 + 1,505 \cdot 22 \cdot 24,55 = 1288 \text{ tm}$$

$$M_B = M_C = -670 + 1,505 \cdot 22(-21,23) = -1373 \text{ tm}$$

$$M_F = M_{F'} = -22,5 + 1,505 \cdot 22(7,87) = -283 \text{ tm}$$

$$\text{Ajuste } \Delta M = -(-1373 - 1282) = 91 \text{ tm}$$

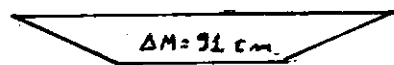


Fig. A.2.9 Redistribuição.

Determinação das rotações inelásticas:

$$M_E = 1288 + 91 = 1379 \text{ tm} \quad \alpha_{Emin} = 26 \cdot 10^{-3} \text{ rad}; \quad \alpha_{Emax} = 48 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$M_B = M_C = -1373 + 91 = -1282 \text{ tm} \quad \alpha_{min} = 25,5 \cdot 10^{-3} \text{ rad}; \quad \alpha_{max} = 65,5 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$M_F = M_{F'} = -283 + 91 = 192 \text{ tm} \quad \alpha_{min} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ rad}; \quad \alpha_{max} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

Cálculo dos valores limites:

$$\Delta M_{min} = 7,31(-0,0366 \cdot 48 + 2 \cdot 0,0366 \cdot 25,5 - 2 \cdot 0,0135)10^2 = 60,52 \text{ tm}$$

$$\Delta M_{max} = 7,31(-0,0366 \cdot 26 + 2 \cdot 0,0366 \cdot 65,5 - 2 \cdot 0,0135)10^2 = 2789 \text{ tm}$$

ANÁLISE: Neste caso a configuração é compatível e estaticamente admissível, pois  $\Delta M$  calculado está entre os valores limites e ambos têm o mesmo sinal, além do que este valor é muito próximo do  $\Delta M_{min}$ , com o que traduz uma boa redistribuição (distribuição econômica).

Para esta configuração houve uma redistribuição de:

$$(1,505 - 1,4) / 1,4 = 7,5\%$$

Na hipótese de rutura simultânea teríamos:

$$q_u \ell^2 / 8 = 1282 + 1480 \quad q_u = 2762,8 / (19,22)^2 = 59,81 \text{ t}$$

$$q_{su} = q_u - W_g = 59,81 - 25,06 = 34,75$$

Como a sobrecarga atingida foi de  $1,505 \cdot 20 = 30,10$  chegou-se a  $30,10 / 34,75 = 86,6\%$  da carga limite.

### A.3. ROTEIRO PARA APLICAÇÃO DO MÉTODO ITERATIVO DIRETO

#### A.3.1. DETERMINAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DOS MOMENTOS FLETORES ELÁSTICOS

Admitindo-se a rigidez dos elementos calculada em função de parâmetros conhecidos, módulo de elasticidade do concreto e momento de inércia das seções, calculam-se os esforços que atuam na estrutura através da resolução de um sistema de equações, que represente a compatibilidade dos esforços ou dos deslocamentos na mesma.

#### A.3.2. DEFINIÇÃO DOS TRECHOS NOS ELEMENTOS (VÃOS)

Os trechos são definidos de forma a deixar bem caracterizados a diferenciação na disposição dos materiais ou da própria geometria da seção. Devendo-se também ter a preocupação de salientar as regiões de momentos de mesmo sinal.

EXEMPLO: Na definição dos trechos de uma viga contínua, deve-se localizar os trechos de forma a caracterizar a disposição da distribuição da armadura e as regiões de momento positivo e negativo. (fig. A.3.1)

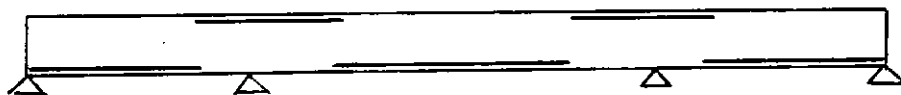


FIG. A.3.1 Distribuição de armadura



### A.3.3. CONSTRUÇÃO DOS DIAGRAMAS MOMENTO-CURVATURA DAS SEÇÕES

Curvas Trilineares de construção semelhantes às curvas Momento-Rotação de Macchi (A.1.II)

Primeiro Tramo (determinação de  $L_0$ )

$M_0$  - momento de fissuração (A.1.II.1)

$E_c I$  - rigidez elástica (A.1.I.5)

$$\frac{l}{r_0} = \frac{M_0}{E_c I} \quad L_0 = \left( \frac{l}{r_0}, M_0 \right)$$

Segundo Tramo (determinação de  $L_1$ )

$I_{II}$  - momento de inércia da seção fissurada (A.1.II.2)

$M_1$  - momento no escoamento (A.1.II.2)

$$\frac{l}{r_1} = \frac{M_1}{E_c I_{II}} \quad L_1 = \left( \frac{l}{r_1}, M_1 \right)$$

Terceiro Tramo (determinação de  $L_{2i}$  e  $L_{2s}$ )

$L_p$  - comprimento de plastificação da seção

$M_u$  - momento último da seção (A.1.II)

$\theta_i$  - rotação limite inferior do diagrama de Macchi (A.1.II)

$\theta_s$  - rotação limite superior do diagrama de Macchi (A.1.II)

$$\frac{l}{r_i} = \frac{\theta_i}{\lambda_p} + \frac{l}{r_1} \quad L_{2i} = \left( \frac{l}{r_i}, M_u \right)$$

$$\frac{l}{r_s} = \frac{\theta_s}{\lambda_p} + \frac{l}{r_1} \quad L_{2s} = \left( \frac{l}{r_s}, M_u \right)$$

### A.3.4. DETERMINAÇÃO DOS MOMENTOS HIPERESTÁTICOS EQUILIBRANTES

A determinação dos momentos hiperestáticos é feita a partir da resolução do sistema de equações representado pela expressão (V.6), onde, expandida em termos das contribuições dos trechos dos vãos, fica expressada indicialmente pela expressão:

$$\sum_{i=1}^n \left[ \sum_{L=1}^m \left[ \sum_{T=1}^{NT} \left( \int_{\ell_{T-1}}^{\ell_T} X_i \frac{M_i^i M_i^i}{K_T} dx + \sum_{\substack{j=i \\ j \neq i}}^n \int_{\ell_{T-1}}^{\ell_T} X_j \frac{M_i^i M_L^j}{K_T} dx \right) \right] \right] = \phi$$

- n - grau de hiperestaticidade
- m - nº de vãos
- NT - nº de trecho dos vãos
- $K_T$  - rigidez tangente no trecho

#### A.3.4.1. DETERMINAÇÃO DAS CONTRIBUIÇÕES DOS TRECHOS DOS VÃOS

Do valor do momento, obtido da distribuição dos mesmos da iteração anterior, levado ao diagrama  $[M-\phi]$ , traçado para a seção correspondente ao trecho em estudo (A.2.3), obtem-se o valor da rigidez correspondente ao mesmo.

Aplicando-se este valor à integral cujo desenvolvimento está expresso no item A.3.6, para todos os trechos, com a rigidez correspondente, compõe-se o sistema de equações, acima descrito.

A resolução do mesmo conduz a novos valores para os momentos hiperestáticos.

O processo é repetido até se obter a convergência desejada.

### A.3.5. VERIFICAÇÃO DO ESTADO LIMITE DE RUTURA

A verificação do estado de rutura é feita na observância do processo de convergência e nos valores máximos e mínimos do conjunto dos valores dos hiperestáticos obtidos em cada iteração.

### A.3.6. ELEMENTOS DE CÁLCULO PELO MÉTODO ITERATIVO DIRETO

#### A.3.6.1. DETERMINAÇÃO DAS INTEGRAIS DAS DISTRIBUIÇÕES DE ESFORÇOS NOS TRECHOS

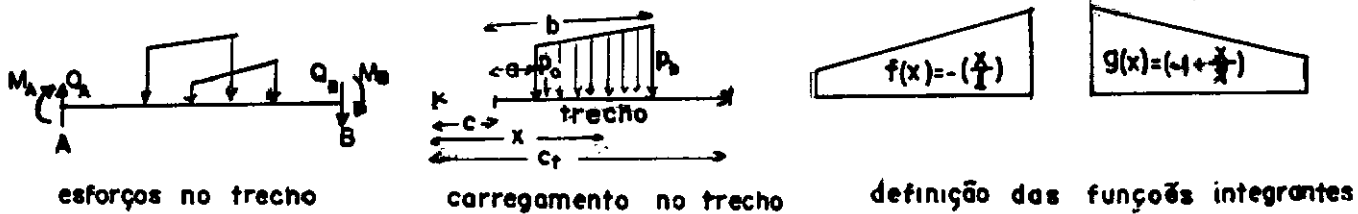


FIG A3.6

$$M_x = M_A + Q_A(x-c) + \sum M_x^{c_1} + M_x^{c_2}$$

$$a < x \leq b \rightarrow M_x^{c_1} = -\frac{P_a(x-a)^2}{2} - \frac{(P_b - P_a)(x-a)^3}{6(b-a)}$$

$$b < x \leq cT \rightarrow M_x^{c_2} = -P_a(b-a)(x - \frac{b+a}{2}) + \frac{(P_b - P_a)(b-a)}{2} (x - \frac{2b+a}{3})$$

Cálculo das Integrais

$$I \rightarrow \int_c^{cT} M_x f(x) dx = \int_c^{cT} M_a \left(\frac{-x}{\ell}\right) dx + \int_c^{cT} Q_a(x-c) \left(\frac{-x}{\ell}\right) dx + \sum \int_a^b M_x^{c_1} \left(\frac{-x}{\ell}\right) dx + \sum \int_b^{cT} M_x^{c_2} \left(\frac{-x}{\ell}\right) dx$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_c^{cT} M_x f(x) dx &= -\frac{M_A(C_T^2 - C^2)}{2\ell} + \frac{Q_A C(C_T - C^2)}{2\ell} - \frac{Q_A(C_T^3 - C^3)}{3\ell} + \\ &+ \Sigma \frac{P_a}{2\ell} \left( \frac{b^4}{4} - \frac{2ab^3}{3} + \frac{a^2b^2}{2} - \frac{a^4}{12} \right) + \\ &+ \frac{(P_b - P_a)}{6(b-a)\ell} \left( \frac{b^5}{5} - \frac{3ab^4}{4} + \frac{a^2b^3}{1} - \frac{a^3b^2}{2} + \frac{a^5}{20} \right) + \\ &+ \Sigma \frac{P_a(b-a)}{\ell} \left( \frac{C_T^3 - b^3}{3} - \frac{(b+a)(C_T^2 - b^2)}{4} \right) + \\ &+ \frac{(P_b - P_c)(b-a)}{2\ell} \left( \frac{C_T^3 - b^3}{3} - \frac{(2b+a)(C_T^2 - b^2)}{6} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II} \rightarrow \int_c^{cT} M_x g(x) dx &= \int_c^{cT} M_A \left(-1 + \frac{x}{\ell}\right) dx + \int_c^{cT} Q_A(x-c) \left(-1 + \frac{x}{\ell}\right) dx + \Sigma \int_c^b M_x^{c_1} \left(-1 + \frac{x}{\ell}\right) dx + \\ &+ \Sigma \int_b^{cT} M_x^{c_2} \left(-1 + \frac{x}{\ell}\right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_c^{cT} M_x g(x) dx &= -\int_c^{cT} M_x f(x) dx - M_A(C_T - C) - Q_A \frac{(C_T^2 - C^2)}{2} + Q_A C(C_T - C) + \\ &+ \frac{P_a}{2} \left( \frac{b^3}{3} - ab^2 + a^2b - \frac{a^3}{3} \right) + \frac{(P_b - P_a)}{6(b-a)} \left( \frac{b^4}{4} - \frac{ab^3}{1} + \frac{3a^2b^2}{2} - \right. \\ &- \frac{a^3b}{1} + \frac{3}{4} a^4 \left. \right) + P_a(b-a) \left[ \left( \frac{C_T^2 - b^2}{2} - \left( \frac{b+a}{2} \right) (C_T - b) \right) \right] + \\ &+ \left( \frac{P_b - P_a}{2} \right) (b-a) \left[ \frac{C_T^2 - C^2}{2} - \frac{(2b+a)}{3} (C_T - C) \right] \end{aligned}$$

$$\text{III} \rightarrow \int_c^{cT} f(x) f(x) dx = \int_c^{cT} \left( \frac{-x}{\ell} \right) \left( \frac{-x}{\ell} \right) dx = \frac{(C_T^3 - C^3)}{3\ell^2}$$

$$\text{IV} \rightarrow \int_c^{cT} f(x) g(x) dx = \int_c^{cT} \left( \frac{-x}{\ell} \right) \left( -1 + \frac{x}{\ell} \right) dx = \frac{(C_T^2 - C^2)}{2\ell} - \frac{(C_T^3 - C^3)}{3\ell^2}$$

### A.3.6.2. DETERMINAÇÃO DOS ESFORÇOS NOS TRECHOS

$$M_B = M_A + Q_A(C_T - C) - \Sigma(P_A(b-a)[C_T - \frac{(b+a)}{2}]) + (\frac{P_b - P_a}{2})(b-a)(C_T - \frac{(2b+a)}{3})$$

$$Q_B = Q_A - \Sigma \frac{P_a + P_b}{2} (b-a)$$

$$V \rightarrow \int_C^{CT} g(x)g(x) dx = \int_C^{CT} (-1 + \frac{x}{\ell})(-1 + \frac{x}{\ell}) dx = (CT - C) - \frac{(C_T^2 - C^2)}{\ell} + \frac{(C_T^3 - C^3)}{3\ell^2}$$

## A.4. APLICAÇÃO DO MÉTODO DIRETO (EXEMPLIFICAÇÃO MANUAL)

### A.4.1. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

O exemplo aqui desenvolvido tem a mesma definição do resolvido no item A.2 (Aplicação do método de Macchi).

### A.4.2. PREPARAÇÃO DOS ELEMENTOS DE CÁLCULO

#### (DEFINIÇÃO DOS TRECHOS NOS ELEMENTOS)

Distribuindo a armadura conforme os dados do problema e procurando caracterizar bem as regiões de momentos positivos e negativos, constituíram-se os trechos conforme mostra fig. A.4.1.

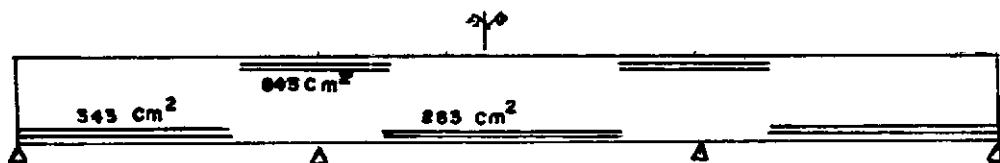


FIG A.4.1 DISTRIBUIÇÃO DA ARMADURA

### A.4.3. DETERMINAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DOS MOMENTOS FLETORES ELÁSTICOS

No sentido facilitar a resolução do problema, pode se desprezar a influência da armadura da seção no cálculo do momento de inércia, e assim considerar constante para todos os termos o valor da "rigidez elástica", já que a seção permanece constante ao longo de toda viga.

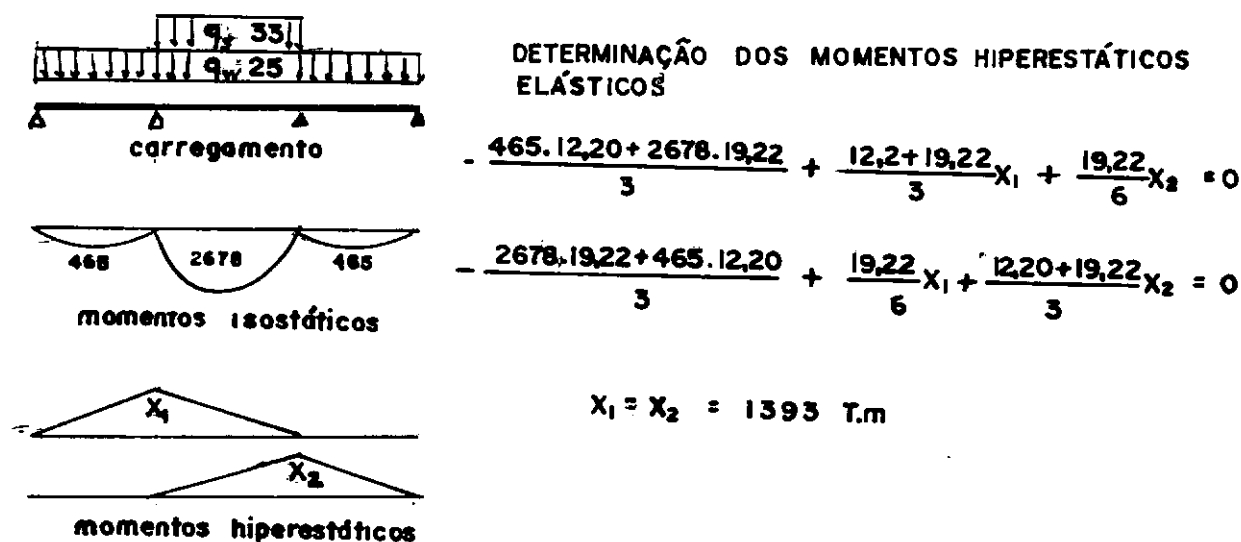


FIG A 4.2

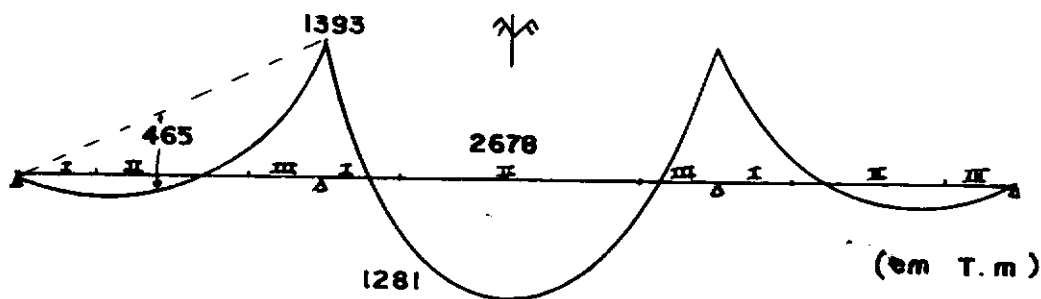


FIG A 4.3 DISTRIBUIÇÃO DOS MOMENTOS FLETORES ELÁSTICOS

#### A.4.5. DETERMINAÇÃO DAS CONTRIBUIÇÕES POR TRECHO

##### 1º Vão

Trecho I: O momento médio obtido na distribuição anterior. "Distribuição elástica",  $\bar{m}$  é de aproximadamente 100 ton.m. Sendo uma seção de vão lateral vai-se na curva  $[M-\phi]$ , fig. A.4.4c, e obtém-se  $K_{\text{trecho}} = 7,31 \cdot 10^5 \text{ ton/m}^2$ ; a resolução das integrais no trecho

$$\delta_{10}^I = \int_0^3 \frac{M_1^0 M_1^1}{K_I} dx \quad \text{e} \quad \delta_{11}^I = \int_0^3 \frac{M_1^1 M_1^1}{K_I} dx$$

podem ser resolvidas segundo A.3.6

$$\delta_{10}^I = \frac{1}{7,31 \cdot 10^5} \left[ -\frac{152,5 \cdot 3^3}{3 \cdot 12,2} + \frac{25 \cdot 3^4}{2 \cdot 12,2 \cdot 2,4} \right] = -12,55 \cdot 10^{-5}$$

$$\delta_{11}^I = \frac{1}{7,31 \cdot 10^5} \left[ \frac{3^3}{3 \cdot 12,2^2} \right] = 0,0083 \cdot 10^{-5}$$

Igualmente, no trecho II, para um momento médio de 300tm e uma rigidez de  $K_{II} = 300/16 \cdot 10^{-4} = 1,875 \cdot 10^5 \text{ t/m}^2$ ; vem:

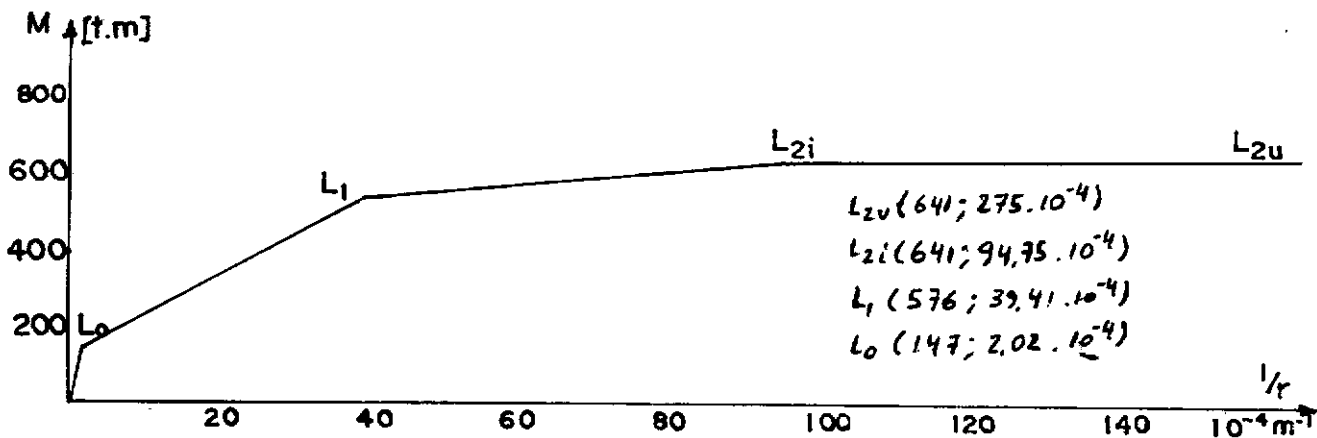
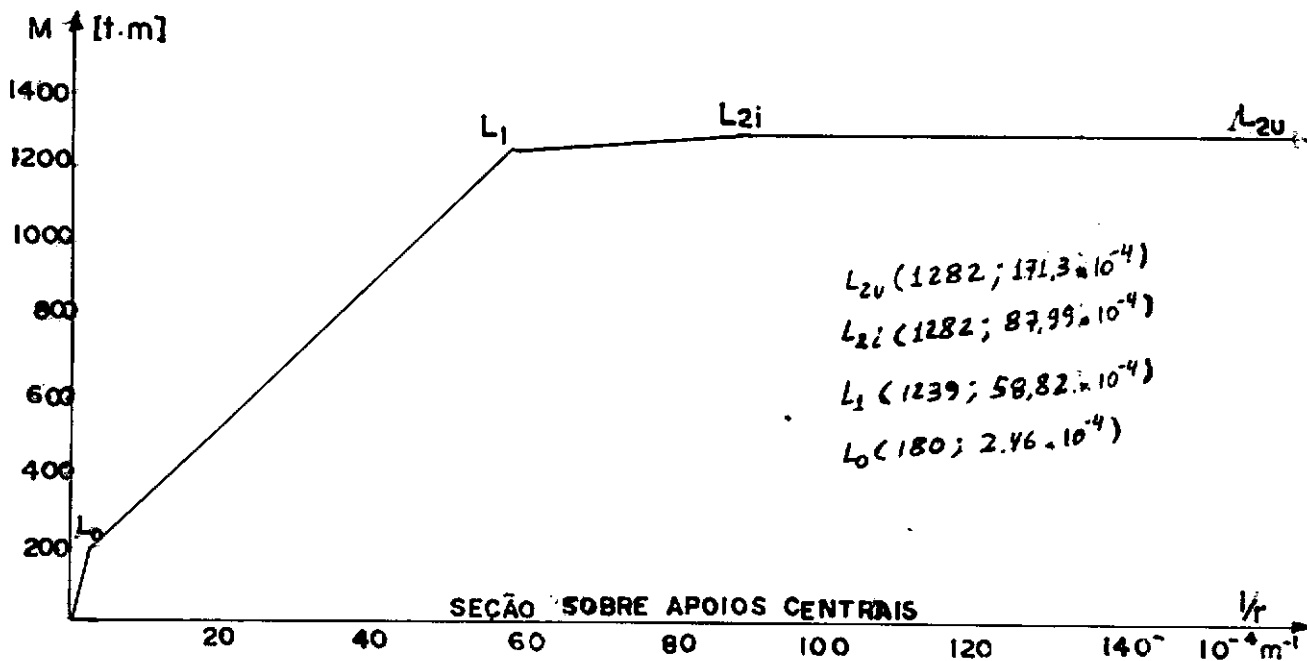
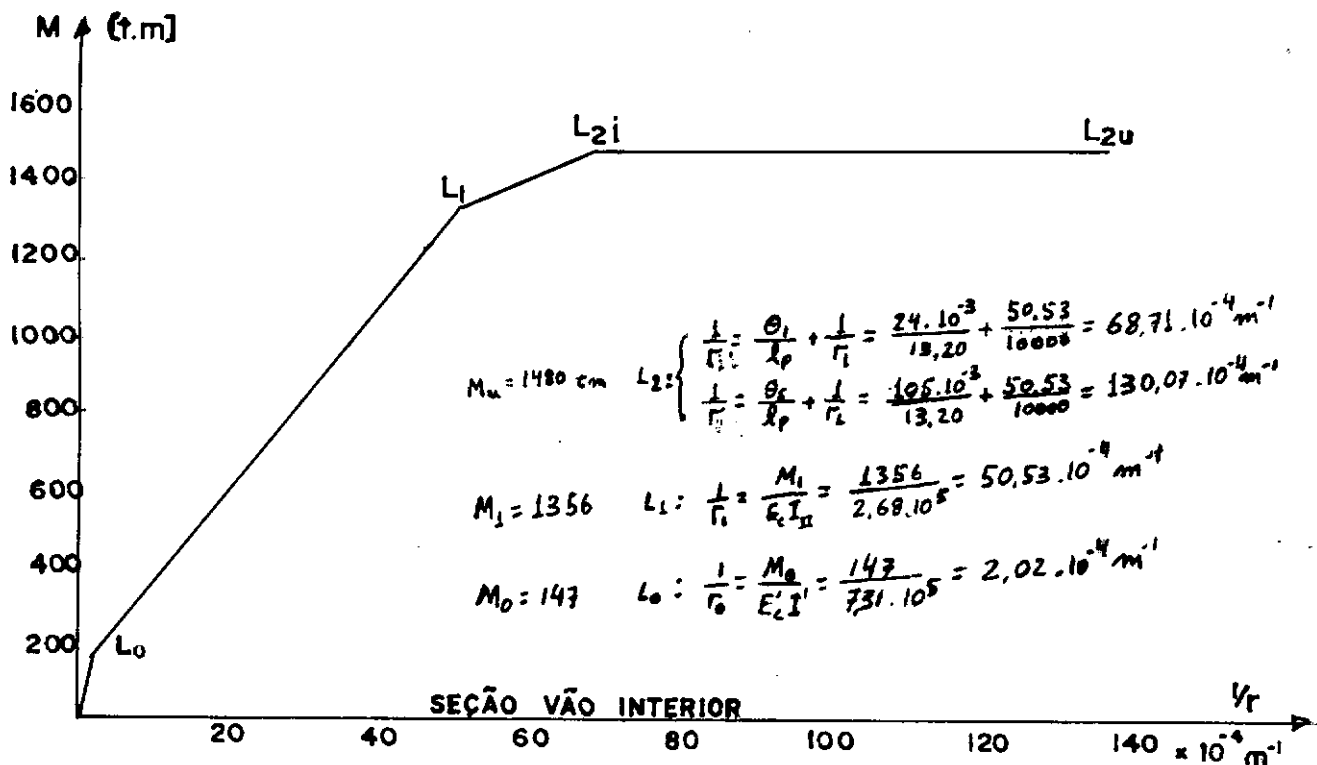
$$\delta_{10}^{II} = -702,91 \quad \text{e} \quad \delta_{11}^{II} = 0,897$$

Para o trecho III, já se tratando de uma seção sobre apoio, vai-se na curva  $[M-\phi]$ , fig. A.4.4b, e com momento médio de 980 tm obtém-se  $K_{III} = 900/40,5 \cdot 10^{-4} = 2,22 \cdot 10^5 \text{ t/m}^2$  através do A.3.6

$$\delta_{10}^{III} = -217,14 \cdot 10^{-5} \quad \text{e} \quad \delta_{11}^{III} = 1,051 \cdot 10^{-5}$$

Somando as contribuições neste trecho

fig.4.4 DIAGRAMAS MOMENTO-CURVATURA PARA AS SEÇÕES





$$\delta_{10} = (-12,55-702,91-217,14) \cdot 10^{-5} = -932,60 \cdot 10^{-5}$$

$$\delta_{11} = (0,0083+0,897+1,051) \cdot 10^{-5} = 1,956 \cdot 10^{-5}$$

Da mesma forma se obtêm os coeficientes clapeironianos para os demais vãos.

### 2º Vão

$$\delta_{10} = \delta_{20} = (-786,54-3904,84-89,88) \cdot 10^{-5} = -4781,26 \cdot 10^{-5}$$

$$\delta_{11} = \delta_{22} = (0,9963+1,0021+0,0094) \cdot 10^{-5} = 2,0078 \cdot 10^{-5}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = (0,0817+0,7292+0,0817) \cdot 10^{-5} = 0,8926 \cdot 10^{-5}$$

### 3º Vão

$$\delta_{20} = -932,60 \cdot 10^{-5} \quad e \quad \delta_{22} = 1,956 \cdot 10^{-5}$$

Somando as contribuições dos diversos vãos

$$\delta_{10} = \delta_{20} = (-932,60-4781,26) \cdot 10^{-5} = -5713,86 \cdot 10^{-5}$$

$$\delta_{11} = \delta_{22} = (1,956+2,0078) \cdot 10^{-5} = 3,9638 \cdot 10^{-5}$$

$$\delta_{21} = \delta_{22} = 0,8926 \cdot 10^{-5}$$

Montando o sistema de equações (5.6)

$$\begin{aligned} -5713,86+3,9638X_1+0,8926X_2 &= 0 \\ -5713,86+0,8926X_1+3,9638X_2 &= 0 \end{aligned} \implies X_1=X_2=1176,56 \text{ tm}$$

Obtendo-se assim os valores dos hiperestáticos referentes a primeira iteração (fig. A.4.5). Estes diferindo de 15,5% dos valores anteriores.

A partir da distribuição obtida na iteração anterior (fig. A.4.5), determinam-se os coeficientes clapeironianos com base em novos valores da rigidez nos trechos:

$$\begin{aligned}\delta_{10} = \delta_{20} &= [-(12,55+180,29+214,25)-(715,14+4125,87+81,72)] \cdot 10^{-5} \\ &= -5329,82 \cdot 10^{-5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_{11} = \delta_{22} &= [(0,0083+0,2300+1,0062)+(0,9058+1,0588+0,0085)] \cdot 10^{-5} \\ &= 3,2116 \cdot 10^{-5}\end{aligned}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = [(0,0742+0,7705+0,0742)] \cdot 10^{-5} = 0,9190 \cdot 10^{-5}$$

Montando e resolvendo o sistema de equações

$$-5329,82 + 3,2116X_1 + 0,9190X_2 = 0$$

$$-5329,82 + 0,9192X_1 + 3,2116X_2 = 0 \quad ; \text{ donde}$$

$$X_1 = X_2 = 1290,32$$

Diferindo 9,7% do anterior, como mostra a fig. A.4.6. Refazendo os cálculos dos coeficientes para esta nova distribuição:

$$\begin{aligned}\delta_{10} = \delta_{20} &= [-(12,55+348,65+219,12)-(730,69+4049,46+83,50)] \cdot 10^{-5} \\ &= -5443,97 \cdot 10^{-5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_{11} = \delta_{22} &= [(0,0083+0,4448+1,0291)+(0,9255+1,0392+0,0087)] \cdot 10^{-5} \\ &= 3,4556 \cdot 10^{-5}\end{aligned}$$

$$\delta_{21} = \delta_{12} = (0,0758+0,7562+0,0758) \cdot 10^{-5} = 0,9078 \cdot 10^{-5}$$

Montando e resolvendo o sistema, temos os valores dos momentos hiperestáticos na 3ª iteração de:

$$-5443,97 + 3,4556X_1 + 0,9078X_2 = 0$$

$$-5443,97 + 0,9078X_1 + 3,4556X_2 = 0$$

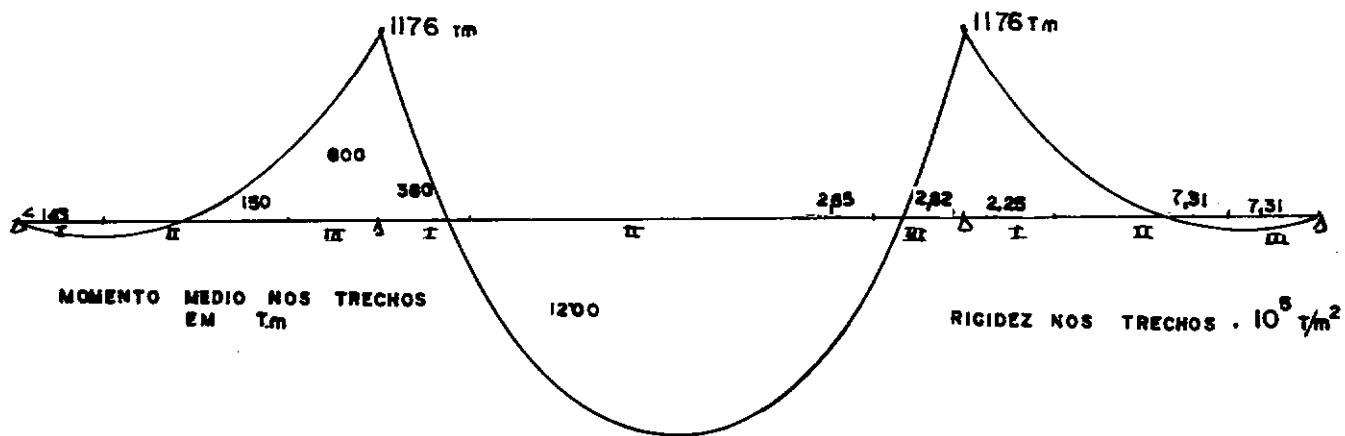


Fig. A.4.5. Distribuição dos Momentos Fletores após a 1ª Iteração

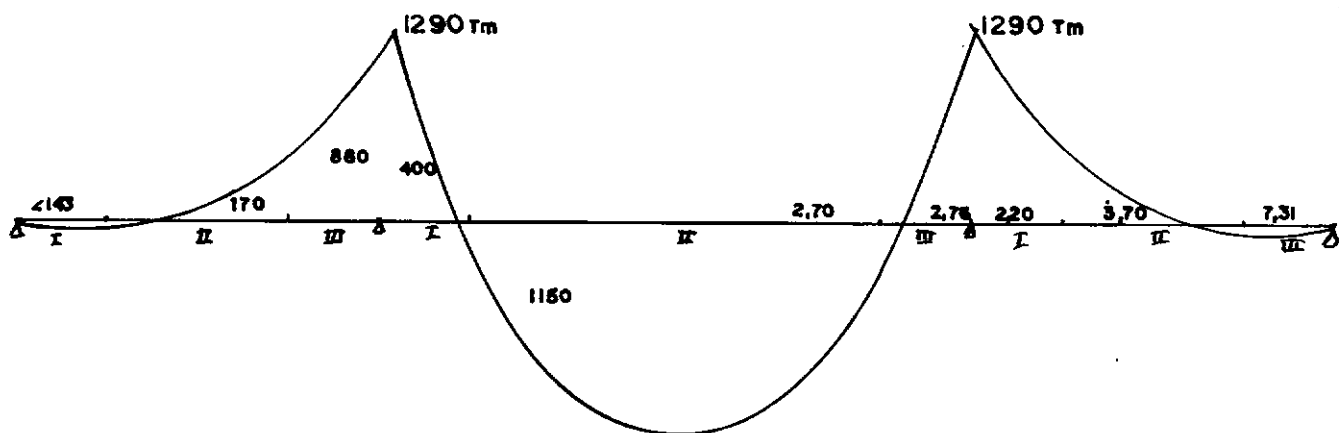


Fig. A.4.6. Distribuição dos Momentos Fletores após a 2ª Iteração

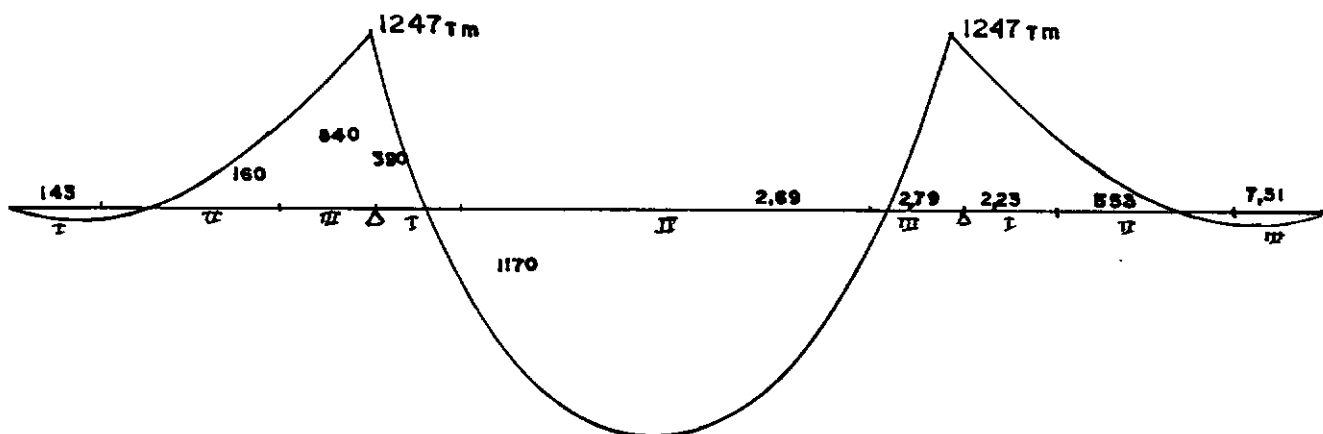


Fig. A.4.7. Distribuição dos Momentos Fletores após a 3ª Iteração

$$X_1 = X_2 = 1247,64 \text{ tm}$$

Diferindo de 3,3% do anterior, como mostra a fig. A.4.7.

Refazendo os cálculos dos coeficientes para esta nova distribuição:

$$\delta_{10} = \delta_{20} = [-(12,55 + 247,26 + 216,17) + (723,87 + 4064,51 + 82,72)] \cdot 10^{-5} \\ = -5347,08 \cdot 10^{-5}$$

$$\delta_{11} = \delta_{22} = [(0,0083 + 0,3154 + 1,0152) + (0,9168 + 1,0431 + 0,0086)] \cdot 10^{-5} \\ = 3,3074 \cdot 10^{-5}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = (0,0751 + 0,7590 + 0,0751) \cdot 10^{-5} = 0,9092 \cdot 10^{-5}$$

Montando e resolvendo o sistema para esta iteração

$$-5347,08 + 3,3074X_1 + 0,9092X_2 = 0$$

$$-5347,08 + 0,9092X_1 + 3,3074X_2 = 0$$

Obtendo assim  $X_1 = X_2 = 1268,10 \text{ tm}$ . Diferindo de 1,6%.

O processo demonstra ser convergente, conduzindo ao valor final em torno de:

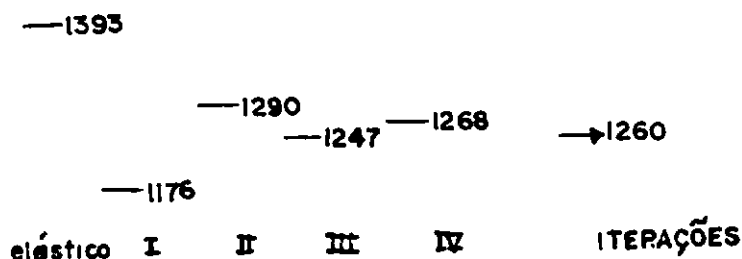


FIG. A.4.8 PROCESSO DE CONVERGÊNCIA DOS ESFORÇOS

Este valor convergente de 1260 tm difere do valor do mo-

mento na suposta fase elástica 1393 tm em torno de 10%.

No quadro A.4 está mostrada a significativa mudança no valor da rigidez nos trechos.

VÃO	TRECHO	RIGIDEZ REAL	% DIFERENCIAL
	I	$7,31 \cdot 10^5$	0
1º	II	$5,33 \cdot 10^5$	18,7%
	III	$2,23 \cdot 10^5$	69,6%
2º	I	$2,78 \cdot 10^5$	61,9%
	II	$2,69 \cdot 10^5$	63,20%

Os resultados obtidos por este processo como os encontrados na aplicação do método de MACCHI, A.3, mostram uma aproximação razoável.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ARAUJO E SILVA, P.J.C. - "Redistribuição de Momentos Fletores em Estruturas Hiperestáticas", Tese de M.Sc., COPPE, 1980, p
2. BAKER, A.L.L. - "Ultimate Load Theory Applied to the Design of Reinforced and Prestressed Concrete Frames", Concrete Publications Ltd., London, 1956.
3. BAKER, A.L.L. - "The Inelastic Space Frame", Concrete Publications Ltd., London, 1967, p. 13.
4. BAKER, A.L.L. and AMARAKONE, A.M.N. - "Inelastic Hiperestatical Frames - Analysis and Applications of the International Tests", Bull. d'Inf. du CEB nº 52, nov. 1965, p. 207.
5. BASE, G.B. and READ, J.B. - "Effectiveness of Helical Binding in the Compression Zone of Concrete Beams", Journal ACI, vol. 61, nº 7, July 1964, pp. 763-778.
6. CAMPORA, G. FRAGELLI - "Cálculo Plástico; Analisis y Diseño Limite de Sistemas Estructurales Planos", Editora Buenos Ayres, Buenos Ayres, 1967, p. 16.
7. CARNEIRO, F.L.L.C. - "Cálculo das Estruturas Hiperestáticas de Concreto Armado na Fase Plástica", 1ªs Jornadas Luso-Brasileiras de Eng. Civil, Lisboa, 1965, vol. I, p. 251-292.
8. CARNEIRO, F.L.L.C. - "Sugestões para uma Norma de Cálculo Plástico de Estruturas Hiperestáticas de Concreto Armado", Rev. Estrutura nº 38, 1968, p. 49-89.
9. COHN, M.Z. - "Limit-Design Solutions for Concrete Structures", Journal of the Structural Division, ASCE, fev. 1967, pp. 37-57.
10. CORLEY, W. GERE - "Rotational Capacity of Reinforced Concrete Beams", Journal of the Structural Division, ASCE, vol. 92, October, 1966, pp. 121-146.

11. FERRY BORGES et alli - "Analytical Results concerning the Nonlinear Behavior of Reinforced Concrete Structure", Bull. d'Inf. du CEB, 1966, nº 53.
12. KENT, D.C. and PARK, Robert - "Flexural Members with Confined Concrete", Journal of the Structure Division, ASCE, july 1971, pp. 1969-1990.
13. MACCHI, G. - "Proposition de Calcul Basée sur la Theorie des Rotations Imposées", Bull. d'Inf. du CEB, 1960, nº 21.
14. MATTOCK, A.H. - "Rotational Capacity of Hingins Regions in Reinforced Concrete Beams", Int. Symposium on Flexural Mechanics of Reinforced Concrete, Miami, nov. 1964, pp. 143-181.
15. MICHALKA, Camilo - "Rótulas Condicionadas no Cálculo Plástico de Concreto Armado", Tese de M.Sc., COPPE, 1981.
16. MORETO, Orestes - "Curso de Hormigon Armado", Editora El Ateneo, Buenos Ayres, 1976, pgs. 86, 108.
17. NBI/78 - "Projeto e Execução de Obras de Concreto Armado", ABNT, Edição 1978.
18. PARK, R. and PAULAY, T. - "Reinforced Concrete Structures", A Wiley-Interscience Publication, New Zealand, 1974, Caps. 2, 3, 4, 5, 6 e 11.
19. PIRES Sobr., C.W.A. e SANTOS, Sydney M.G. - "Influência da Armadura Longitudinal e Transversal no Comportamento de Peças de C.A.", RBE Caderno Estruturas (em prelo), 1985.
20. SANTOS, Sydney M.G. - "Hiperestática das Rótulas Condicionadas", 1ªs Jornadas Luso-Brasileiras de Eng. Civil, Lisboa 1965, vol. I, pp. 431-450.
21. SANTOS, Sydney M.G. - "A Questão do EJ no Cálculo do Concreto Armado na Fase Plástica", 1ªs Jornadas Luso-Brasileiras de Eng. Civil, Lisboa, 1965, pp. 451-471.
22. SORIANO, H.L.; HASS, J.W. et alli - "Notas de Aula do Curso de Edifícios Altos; Prog. ATEEL", COPPE, 1983.
23. TELLES, J.C. de Faria - "Análise do Comportamento Não Linear Geométrico e Físico de Pórticos Planos de C.A.", Tese de M.Sc., COPPE, 1976.

24. TICHY, M. et RÁKOSNIK - "Calcul Plastique des Ossatures en Beton", Editions Eyrolles, Paris, 1975, Caps. 2, 4 e 5.
25. ZIENKIEWICZ, O.C. - "El Método de Los Elementos Finitos", Editorial Reverté S.A., España, 1980, Caps. 2, 18.