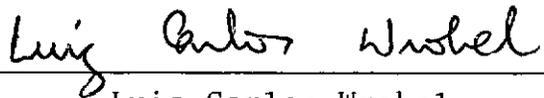


DIFRAÇÃO E REFRAÇÃO DE ONDAS: UMA ANÁLISE POR
MEIO DE ELEMENTOS FINITOS E INFINITOS

Andrē Nachbin

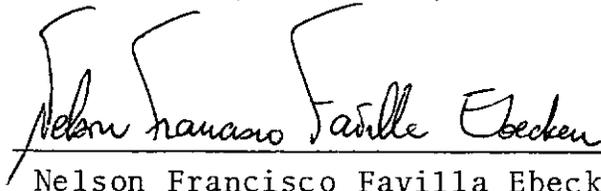
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.) EM ENGENHARIA CIVIL

Aprovada por

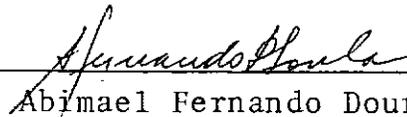


Luiz Carlos Wrobel

(Presidente)



Nelson Francisco Favilla Ebecken



Abimael Fernando Dourado Loula

RIO DE JANEIRO, RJ — BRASIL

ABRIL DE 1984

NACHBIN, ANDRÉ

Difração e Refração de Ondas: Uma Análise por Meio de Elementos Finitos e Infinitos (Rio de Janeiro) 1984.

ix , 157 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1984)

Tese — Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1. Difração e Refração de Ondas 2. Elementos Finitos 3. Elementos Infinitos

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Ao Azul que Graça nos deixou,
e ao Vermelho que dele Marcia se apossou.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Luiz Carlos Wrobel pelo seu espírito prestativo demonstrado durante o período de orientação, assim como a sua amizade e incentivo transmitidos em vários momentos difíceis.

Ao Corpo Docente do Programa de Engenharia Civil da COPPE/UFRJ. Em especial aos Professores Roberto Fernandes de Oliveira e Luiz Landau pela amizade e oportunidades que me proporcionaram.

Aos Professores Luiz Carlos Wrobel, Fernando L.B. Lobo Carneiro, Nelson F.F. Ebecken e Ronaldo de C. Batista pelo apoio quanto a um possível Doutorado no exterior.

A todos os colegas e funcionários presentes na luta do dia a dia da vida universitária.

Ao meu pai, Prof. Leopoldo Nachbin pelos conselhos dados com entusiasmo.

Ao Laboratório de Computação Científica (LCC/CNPq) pelo apoio dado na fase de conclusão desta tese. Em especial aos professores Marco A. Raupp, Abimael F.D. Loula, Carlos A. de Moura e Leon Sinay.

Ao CNPq pelo suporte financeiro, através de uma bolsa de Mestrado.

À arquiteta Marcia Pumar Nachbin pelo primor dos desenhos e gráficos. E também pela sua paciência.....

À Mariza V. Cortez Marote pelo capricho no difícil trabalho de datilografia.

A todos os brasileiros que na luta pela sobrevivência, legaram a poucos, condições para chegar ao Mestrado.

RESUMO DA TESE APRESENTADA À COPPE/UFRJ COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

DIFRAÇÃO E REFRAÇÃO DE ONDAS: UMA ANÁLISE POR
MEIO DE ELEMENTOS FINITOS E INFINITOS

Andrê Nachbin

Abril 1984

ORIENTADOR: *Luiz Carlos Wrobel*
PROGRAMA: *Engenharia Civil*

O presente trabalho trata do fenômeno de Difração e Refração de ondas gravitacionais de superfície, através de uma formulação bi-dimensional, dada pela equação de Berkhoff.

O Método dos Elementos Finitos é utilizado na resolução numérica do problema. No entanto, o principal objetivo desta tese é a formulação e implementação de um programa computacional com elementos capazes de modelar um domínio infinito: estes são conhecidos como Elementos Infinitos.

A partir de um estudo feito com os Elementos Infinitos existentes na literatura, foi possível formular e implementar um novo e eficiente elemento. Este tem as características geométricas de um Elemento Finito Isoparamétrico, sendo no entanto integrado em um domínio aberto.

O potencial da onda, sendo uma função complexa, leva a uma série de dificuldades na programação. É mantida a estrutura de um programa para solução de sistemas com equações lineares reais. O armazenamento da matriz do sistema é feito em perfil ("sky-line"). A programação é feita em linguagem FORTRAN.

ABSTRACT OF THESIS PRESENTED TO COPPE/UFRJ AS PARTIAL
FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER
OF SCIENCE (M.Sc.)

DIFFRACTION AND REFRACTION OF WAVES: AN ANALYSIS
BY MEANS OF FINITE AND INFINITE ELEMENTS

Andr e Nachbin

April 1984

CHAIRMAN: *Luiz Carlos Wrobel*

DEPARTMENT: *Civil Engineering*

In the present work the phenomena of diffraction and refraction of gravitational surface waves is treated by using a two-dimensional formulation, given by Berkhoff's equation.

The Finite Element Method is used in the solution of the numerical problem. However, the main objective of this thesis is the formulation and implementation of a computational program with elements that model an infinite domain: they are called Infinite Elements.

By studying the existing Infinite Elements it was possible to formulate a new and efficient one. Its geometrical characteristics are the same as for the Isoparametric Finite Element, but the integration is over an unbounded domain.

Because the wave potential is a complex function, a series of difficulties appear in the program development. The program structure for the solution of a real linear system is maintained. The Sky-line technique is used in the storage of the system global matrix. The programming language is FORTRAN.

ÍNDICE

	Págs.
<u>CAPÍTULO I</u>	
INTRODUÇÃO.....	1
I.1 - Motivação e Objetivos.....	1
I.2 - Organização.....	3
<u>CAPÍTULO II</u>	
INTRODUÇÃO AO PROBLEMA DE DIFRAÇÃO E REFRAÇÃO DE ONDAS....	5
II.1 - Generalidades sobre Fenômenos de Hidráulica Marítima.....	6
II.2 - Aplicação do Escoamento Potencial ao Problema de Difração de Ondas.....	10
II.3 - Equação de Berkhoff para Difração e Refração de Ondas.....	16
<u>CAPÍTULO III</u>	
MODELO MATEMÁTICO.....	22
III.1 - Formulação Variacional.....	22
III.1.1 - Problema com Profundidade constante	27
III.1.2 - Problema com Variação de Profundidade	34

CAPÍTULO IV

MÉTODO NUMÉRICO.....	45
IV.1 - Introdução.....	45
IV.2 - Escolha e Apresentação do Elemento Finito.....	47
IV.3 - Aplicação do Elemento Finito ao Problema de Difração e Refração de Ondas.....	54
IV.3.1 - Integração Numérica das Matrizes de Rigidez e Massa Hidrodinâmica	60
IV.3.2 - Integração Numérica da Matriz de Amortecimento Hidrodinâmico	67
IV.3.3 - Parcela de Carga Devido à Impermeabilidade dos Obstáculos	70
IV.4 - Aplicação de Elementos Infinitos à Discretização de Meios Infinitos.....	72
IV.4.1 - Introdução	72
IV.4.2 - Pequeno Histórico dos Elementos Infinitos.....	74
IV.4.3 - Teste de Consistência do Elemento Infinito.....	81
IV.4.4 - Um Novo e Eficiente Elemento Infinito	88
IV.4.5 - Integração Numérica para o Elemento Infinito Formulado	98
IV.4.6 - Cálculo do Fator de Decaimento L	104
IV.4.7 - Integração Numérica da Parcela de Carga	104

CAPÍTULO V

ANÁLISE DE RESULTADOS.....	111
V.1 - Difração em um Cilindro Circular.....	114
V.2 - Difração em um Caixaõ Quadrado.....	119

	Págs.
V.3 - Difração e Refração em uma Ilha Circular com Fundo Parabólico.....	126
V.4 - Difração em uma Ilha Elíptica com Base Circular (Problema Tridimensional).....	133
 <u>CAPÍTULO VI</u>	
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	138
VI.1 - Conclusões.....	138
VI.2 - Recomendações.....	
 BIBLIOGRAFIA.....	 140
 SÍMBOLOS.....	 148
 APÊNDICE.....	 151

C A P Í T U L O I

INTRODUÇÃO

I.1 - MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS

O grande desenvolvimento da moderna tecnologia em computadores, associado ao avanço da Matemática Aplicada, abriram novas perspectivas na modelação de fenômenos que interessam à Engenharia. Em particular, o Método dos Elementos Finitos se tornou extremamente popular pela sua aplicabilidade a diversos tipos de problemas. Cada vez mais, foram sendo estudados problemas complexos, requerendo grande esforço computacional. Assim, eficiência e otimização passaram a ter destaque na concepção de novos programas de computador.

O estudo do fenômeno de Difração e Refração de ondas é de grande interesse na Engenharia. O crescimento considerável na produção do petróleo vem exigindo um maior refinamento nos projetos de estruturas marítimas para exploração de petróleo (estruturas "offshore"). O cálculo e verificação des-

tas estruturas, quanto às ações ambientais, é fundamental. Neste sentido, a ação de ondas em plataformas não pode ser deixada de lado. Em particular, no cálculo de cargas hidrodinâmicas em plataformas de gravidade, a Teoria da Difração deve ser aplicada pois o fato das suas dimensões características serem muito grandes, constitui um obstáculo considerável para as ondas incidentes. Se as obstruções estiverem localizadas em uma região em que a profundidade varie, dar-se-á também o fenômeno da refração. O modelo matemático formulado para estes problemas se aplica também à ressonância em bacias portuárias. Como a linha da costa constitui uma obstrução infinita, pequenas mudanças devem ser feitas para o programa levar isto em conta.

Os problemas enunciados acima são tratados por um modelo que matematicamente se estende ao infinito. Ao longo dos anos diversas técnicas surgiram, e foram implantadas, para modelar meios infinitos. Nos modelos numéricos utilizando Elementos Finitos, estas vão desde processos mais triviais como o simples truncamento de uma malha, até outros mais refinados como o acoplamento de Elementos de Contorno ou Elementos Infinitos. Entende-se que estes últimos são os que mais facilmente podem ser adaptados a um programa de Elementos Finitos. Assim, a partir dos Elementos Infinitos existentes foi possível formular um novo elemento que, além de manter a simetria e a banda do sistema de equações, não adiciona novas equações ao sistema (52,53).

Uma série de exemplos atestam a eficiência do novo Elemento Infinito. O fenômeno em bacias portuárias não foi estudado dando-se assim maior enfoque à aplicação em estruturas marítimas.

É também objetivo deste trabalho a programação e implementação de um programa eficiente de Elementos Finitos e Infinitos para solução do fenômeno descrito. Para tal foi utilizada uma programação estruturada com um armazenamento da matriz do sistema, em forma de perfil ("sky-line"). A estrutura do programa segue a linha do STAP (Structural Analysis Program) dado por BATHE e WILSON (13). Algumas modificações são necessárias para compatibilizar o sistema de equações lineares complexas com um sistema real. A linguagem de programação utilizada foi o FORTRAN.

I.2 - ORGANIZAÇÃO

O presente trabalho está dividido em 6 capítulos e um apêndice.

No segundo capítulo apresentam-se algumas generalidades sobre os fenômenos de hidráulica marítima com o intuito de dar informações básicas quanto ao estudo a ser feito. A formulação matemática da Teoria da Difração é rapidamente delineada, assim como a transformação para o problema bidimensional.

No terceiro capítulo é feito um pequeno resumo dos conceitos básicos de Cálculo Variacional, de maneira a se introduzir os funcionais necessários à aplicação do Método de Rayleigh-Ritz. Três tipos de problemas são discutidos. É feita a verificação quanto à validade de cada funcional em cada problema.

No quarto capítulo apresenta-se o processo

de aproximação dos funcionais para a aplicação do método de Rayleigh-Ritz. É feito o cálculo explícito da matriz dos coeficientes de um Elemento Finito. Uma análise crítica dos Elementos Infinitos existentes na literatura, leva ao estudo de um novo elemento infinito. Antes, no entanto, é enunciado um teste de consistência, para testar novos elementos. Um exemplo ilustrativo é integralmente resolvido. A seguir, discutem-se as características do novo e eficiente elemento infinito proposto. Apresenta-se a fórmula para o cálculo dos coeficientes da matriz deste elemento. O problema da integração numérica em um domínio infinito é discutido. Todos os demais parâmetros necessários à implementação de um elemento infinito, de três nós, são fornecidos.

No quinto capítulo são apresentados e discutidos os resultados. Quatro exemplos são dados: dois enfocando apenas o fenômeno da difração, um apresentando um problema de difração e refração e, por último, um problema tridimensional.

Finalmente, no sexto e último capítulo, são feitas as considerações finais do presente trabalho.

No apêndice são apresentadas considerações gerais quanto a estrutura e a técnica de programação.

C A P Í T U L O I IINTRODUÇÃO AO PROBLEMA DE DIFRAÇÃO E REFRAÇÃO DE ONDAS

A formulação matemática da Teoria de Ondas, em sua forma geral, é bastante complexa. Dependendo do tipo de aplicação a ser feita, uma série de simplificações podem ser levadas em conta, reduzindo o problema geral a um mais simples de resolver. Diversos trabalhos (1-5) tratam destas teorias, apresentando de uma forma bastante acessível a teoria tanto para ondas lineares como para os casos mais complicados.

Neste capítulo, em face da existência de excelentes textos sobre propagação de ondas em meios fluidos, apenas os conceitos e equações necessárias ao entendimento dos capítulos subsequentes serão apresentadas. A justificativa para este procedimento é que o objetivo principal deste trabalho é a formulação e implementação de um elemento infinito capaz de modelar um domínio infinito. Para se caracterizar o fenômeno da difração, um corpo deve ter dimensões significantes em compara-

ção com o comprimento da onda. A relação D/λ deve ser grande; D é chamado comprimento característico do corpo (dimensão horizontal perpendicular à onda incidente). Vários autores (1,3,5) adotam a relação $\frac{D}{\lambda} > 0,2$ para caracterizar um problema onde a ação da onda sobre um corpo é dada pela teoria da difração. No caso de valores abaixo de 0,2 deve-se utilizar a equação de Morrison (3).

II.1 - GENERALIDADES SOBRE OS FENÔMENOS DE HIDRÁULICA MARÍTIMA

Não se pretende fazer uma referência exaustiva de todos os fenômenos de hidráulica marítima que ocorrem em regiões costeiras. Far-se-á, apenas, uma breve introdução aos principais fenômenos, diretamente ligados com os movimentos do mar.

Uma primeira classificação global de tais fenômenos, dada de uma forma descritiva, assenta no respectivo período ou escala de tempo. Os movimentos do mar podem então classificar-se em ondas de curto período, ondas de longo período e marés, conforme mostra a tabela (II.1).

TABELA II.1 - Classificação das variações do nível do mar.

NOME	PERÍODO (Ordem de Grandeza)	EXEMPLOS
Ondas de curto período	$T < 30 \text{ s}$	Vagas, ondulações
Ondas de longo período	$30 \text{ s} < T < \text{algumas horas}$	Ondas sísmicas
Marés	$T > \text{algumas horas}$	Ondas de marés

As ondas a serem estudadas são ditas ondas gravitacionais de superfície. Entenda-se por onda gravitacional de superfície uma variação ou perturbação da superfície livre em que a ação da gravidade desempenha o papel preponderante como campo de forças para sua propagação. Uma onda deste tipo, com perfil constante, que se propaga sobre um fundo horizontal, fica completamente definida por três parâmetros. São eles: a altura da onda H , o comprimento da onda λ e a profundidade local h , medida desde o fundo até o nível médio de repouso (NMR) no plano vertical, como mostra a figura (II.1).

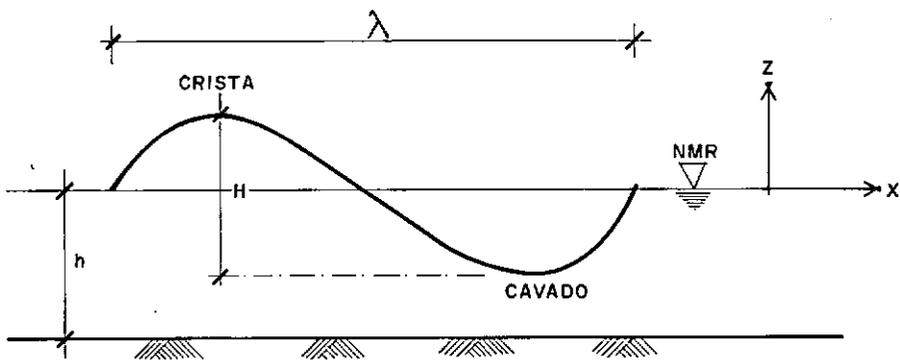


Figura (II.1) = PARÂMETROS DA ONDA

O NMR é definido de tal modo que a área sob a crista da onda é igual à área sobre o cavado da onda. Na teoria das ondas de pequena amplitude (a ser utilizada no presente trabalho) as amplitudes da crista e do cavado são iguais e dadas por

$$a = \frac{H}{2} \quad (\text{II.1})$$

O período T é o intervalo entre a passagem de duas cristas sucessivas, por um ponto fixo de observação.

Num movimento ondulatório no plano horizontal, chama-se frente de onda ou linha de frente a uma linha de fase constante, linha esta descrita pelos pontos da crista conforme indica a figura (II.2a).

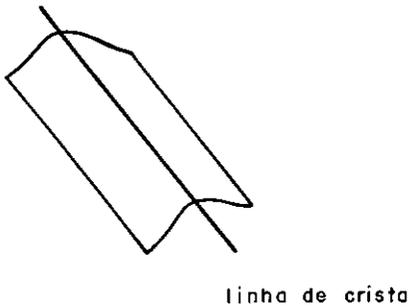


Figura (II.2a) = FRENTE DE ONDA

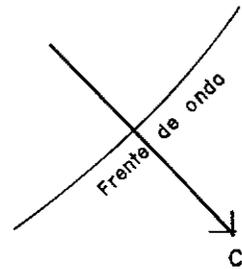


Figura (II.2b) = TRAJETÓRIA DA FRENTE DE ONDA.

A direção de propagação da onda é dada pelas ortogonais, que são as direções perpendiculares às frentes de onda, como mostra a figura (II.2b). Numa onda progressiva, as frentes propagam-se com velocidades de fase C na direção das ortogonais. (C = velocidade da onda).

Na teoria das ondas de pequena amplitude, a energia total da onda E (soma da energia cinética e da energia potencial) propaga-se com a velocidade de grupo C_g na direção das ortogonais, caso não haja outros campos de velocidades que não sejam os das ondas. A potência da onda ou fluxo de energia é dada pelo produto E por C_g . Em águas de grande profundidade

relativa,

$$\frac{h}{\lambda} > 0,5 \quad (\text{II.2})$$

a velocidade de grupo (ou celeridade de grupo) é a metade da velocidade de fase. Em águas de pequena profundidade relativa

$$\frac{h}{\lambda} < 0,05 \quad (\text{II.3})$$

estas velocidades são praticamente iguais, desde que no local não existam correntes.

Num movimento ondulatório puro (é o caso das ondas de Airy, utilizadas neste estudo) não há transporte de massa e, conseqüentemente, as órbitas das partículas do fluido são curvas fechadas circulares em grandes profundidades relativas, e elípticas em pequenas profundidades relativas. As ondas gravitacionais de superfície apresentam outras classificações com base na altura, comprimento da onda e profundidade. Chama-se a atenção para o fato de as diferentes classificações e nomenclaturas não constituírem um fenômeno mas apenas um processo de descrição do fenômeno que é o movimento ondulatório.

Todos os fenômenos da natureza são NÃO-LINEARES. Por vezes tal não-linearidade não é pronunciada. Isto ocorre com ondas quando a declividade e a altura relativa tomam valores pequenos,

$$\begin{aligned} \text{declividade} & \frac{H}{\lambda} \rightarrow 0 \\ \text{altura relativa} & \frac{H}{h} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

e a onda diz-se: de pequena amplitude, linear, infinitesimal, de

Airy , de Stokes de primeira ordem ou, simplesmente, harmônica simples. Quando a declividade e a altura relativa não forem pequenas e, portanto, não se puder admitir a linearidade do fenômeno, a onda diz-se de amplitude finita ou não-linear, de que são exemplos as ondas de Stokes e as ondas cnoidais. Com base nesta classificação, Le MÉHAUTÉ (2) apresenta uma tabela classificativa e com fórmulas de todas as teorias de onda.

Pela profundidade relativa (h/λ), as ondas dizem-se de pequena profundidade relativa para ($h/\lambda < 0,05$), de profundidade relativa intermediária para ($0,05 < h/\lambda < 0,5$) e de grande profundidade relativa para ($h/\lambda > 0,5$).

II.2 - APLICAÇÃO DO ESCOAMENTO POTENCIAL AO PROBLEMA DE DIFRAÇÃO DE ONDAS

A um movimento irrotacional num fluido incompressível e não viscoso chama-se movimento potencial. Neste caso, o fluido diz-se perfeito e a velocidade das partículas é dada pelo gradiente de uma função escalar, o potencial de velocidades ϕ .

$$\underline{V} = (u, v, w) = \nabla\phi \quad (\text{II.5})$$

A observação mostra que, longe da zona de geração, a agitação marítima caracteriza-se por uma regularidade progressiva do estado do mar, em que as cristas das ondas se tornam bastante compridas e propagam-se aproximadamente com a mesma direção e velocidade. Chama-se onda plana monocromática a um único trem de ondas de crista longa. Sempre que possam ser

desprezados os efeitos não-lineares associados à agitação marítima local, o estudo da propagação de ondas do mar pode basear-se no princípio de cada trem de ondas presente no espectro propagar-se independentemente. O problema fica linearizado e consiste em estudar cada trem separadamente para depois fazer uso do princípio de superposição de efeitos, no local e instantes desejados. A aplicação desta hipótese simplificadora deve, contudo, ser devidamente ponderada em cada estudo a realizar, levando-se em conta possíveis efeitos secundários. Em bacias portuárias estes efeitos secundários podem originar fenômenos de ressonância.

Admitindo, então, que não há interação entre ondas de diferentes frequências e, portanto, é possível considerar a superposição de trens de ondas com diferentes frequências e admitindo ainda que cada um destes trens pode ser representado por uma onda plana monocromática, o estudo da agitação marítima pode ser feito com base na Teoria das Ondas de Pequena Amplitude, que é uma teoria baseada na linearização das condições de contorno da superfície livre.

A seguir pretende-se estabelecer as hipóteses simplificadoras do comportamento real do fenômeno de propagação de ondas, para aplicação de uma análise determinística com base na teoria de ondas de pequena amplitude. O modelo mais simples para ondas gravitacionais de superfície assenta nas seguintes hipóteses (1):

- (a) As ondas do mar são planas ou de crista longa. Isto é, a altura da onda é constante ao longo da linha de cris-

ta. Considerando também que o período é constante (onda plana monocromática), a presente teoria só deve ser aplicada em regiões muito afastadas da zona de geração de ondas.

- (b) Satisfação da equação de continuidade (fluidos incompressíveis)

$$\nabla \cdot \underline{V} = 0 \quad (\text{II.6})$$

- (c) São desprezíveis os efeitos de viscosidade, turbulência, tensão superficial e atrito de fundo.

- (d) Considera-se a declividade das ondas muito pequena, chamando-as de ondas ABATIDAS

$$\frac{H}{\lambda} \ll 1 \quad (\text{II.7})$$

- (e) As forças são conservativas.

Compondo as equações (II.5) e (II.6), obtém-se a equação de Laplace, dada a seguir:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (\text{II.8})$$

$$\text{com} \quad \nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$$

O problema (linear) de difração de ondas com pequenas amplitudes se reduz ao cálculo de uma função escalar $\Phi(x,y,z,t)$, dependendo do tempo t , que satisfaça a equação (II.8) no domínio do fluido, assim como as condições de contorno dadas abaixo.

Condição Linearizada na Superfície Livre

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{em} \quad z = 0 \quad (\text{II.9})$$

sendo a elevação da onda dada por

$$\eta = - \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \quad \text{em} \quad z = 0 \quad (\text{II.10})$$

onde g é a aceleração da gravidade

Condição de Impermeabilidade do Fundo

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{em} \quad z = -h \quad (\text{II.11})$$

Condição no Obstáculo

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad (\text{II.12})$$

indicando que a velocidade das partículas fluidas na direção normal (n) do obstáculo é nula. As condições (II.9)-(II.12) e suas deduções podem ser encontradas em SARPKAYA e ISAACSON (3), ou em uma série de textos que tratam do fenômeno da difração.

Em um problema de difração de ondas é usual representar o potencial total Φ por uma soma do potencial da onda incidente com o da onda difratada.

$$\Phi = \Phi^I + \Phi^D \quad (\text{II.13})$$

Esta separação só pode ser feita em regiões com profundidade constante. A grandes distâncias dos corpos (obstruções), requer-se que o potencial difratado Φ^D corresponda às ondas que se afastam da origem. A condição de radiação, dada em (II.14) garante que estas ondas além de se afastarem, não reflitam em corpos infinitamente distantes voltando a incidir nos obstáculos em

questão.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^m \left(\frac{\partial \Phi^D}{\partial r} - i \frac{\omega}{C} \Phi^D \right) = 0 \quad (\text{II.14})$$

com $\Phi^D \rightarrow 0$

$$\frac{\partial \Phi^D}{\partial r} \rightarrow 0$$

$$m = (n-1)/2$$

$$\omega = 2\pi/T$$

A frequência angular ω é calculada a partir do período T e "n" indica o número de dimensões da onda do problema. Esta é a condição de SOMMERFELD (II.15). Sendo a onda plana ($n = 2$), re-escreve-se (II.14) como

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial \Phi^D}{\partial r} - i \frac{\omega}{C} \Phi^D \right) = 0 \quad (\text{II.15})$$

sendo r a direção radial. Uma observação deve ser feita quanto aos eixos coordenados que definem a geometria do problema. Os eixos x e y estão apoiados no plano horizontal que contém o NMR (figura (II.1)), sendo o eixo z positivo para fora do meio fluido. Pode-se constatar que as condições (II.9)-(II.11) estão de acordo com esta convenção.

A expressão do potencial na forma (II.13), envolvendo uma separação em uma onda incidente não perturbada ("undisturbed wave") e uma onda difratada ("scattered wave"), constitui a base da teoria da difração. O potencial incidente, por si próprio, satisfaz as equações (II.8)-(II.11) e pode ser dado como a função complexa

$$\phi^I(x, y, z, t) = A \frac{\cosh(K(z+h))}{\cosh(Kh)} e^{iK(x\cos\gamma + y\sin\gamma)} e^{-i\omega t} \quad (\text{II.16})$$

com $A = \frac{-igH}{2\omega}$

γ = ângulo de incidência da onda

K = número da onda

Sendo todas as equações lineares, ϕ^D também irá satisfazer as equações (II.8)-(II.11), assim como a condição (II.15). Pela equação (II.13) reescreve-se a condição (II.12) como

$$\frac{\partial \phi^D}{\partial \mathbf{n}} = - \frac{\partial \phi^I}{\partial \mathbf{n}} \quad \text{no obstáculo} \quad (\text{II.17})$$

mostrando a dependência de ϕ^D com relação a ϕ^I . O potencial incidente ϕ^I , pelas hipóteses do problema de difração, é uma solução da equação (II.8). A expressão (II.16a) realça a separação de variáveis feitas em (II.16).

$$\phi^I(x, y, z, t) = A Z(z) \phi(x, y) T(t) \quad (\text{II.16a})$$

Substituindo a equação (II.16a) em (II.9) obtém-se

$$(A Z \phi) \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + g(A \phi T) \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \quad \text{em } z = 0$$

Simplificando, a nova equação é dada por

$$Z \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + gT \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.18})$$

Mas em $z = 0$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = - \omega^2 T$$

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = K \tanh(Kh) \quad (\text{II.19})$$

$$Z = 1$$

Substituindo (II.19) em (II.18) obtém-se a equação de DISPERSÃO, dada abaixo.

$$\omega^2 = Kg \tanh(Kh) \quad (\text{II.20})$$

Assim, a função que satisfizer a condição de superfície livre (II.9) estará satisfazendo a equação de dispersão (II.20)

O número da onda K será calculado na equação (II.20) para determinados valores da frequência angular e da profundidade h . O número K será a raiz real positiva da equação de dispersão, que será resolvida de forma iterativa, pelo método de Newton-Raphson.

II.3 - EQUAÇÃO DE BERKHOFF PARA REFRAÇÃO E DIFRAÇÃO DE ONDAS

Em projetos de portos, estruturas "Offshore" e trabalhos de proteção da costa (por exemplo um quebra-mar), é de grande interesse a formulação de um modelo matemático com aplicação aos diversos tipos de problemas de propagação de ondas em meios fluidos. BERKHOFF (6), em seu trabalho de 1972, afirma que para ondas lineares harmônicas existem modelos matemáticos que tratam do fenômeno da difração e refração separadamente. O efeito combinado dos dois fenômenos, apenas no caso de ondas longas, era descrito pela equação bidimensional linear para águas rasas ("shallow water equations"). Para o caso de ondas curtas isto não era possível.

BERKHOFF (7) define o fenômeno de difração e refração de ondas como: "ondas propagando sobre um fundo irregular são perturbadas pela presença de um obstáculo e pela variação da profundidade". A sua formulação ainda se restringe a ondas lineares harmônicas, sendo o fluido incompressível, o movimento irrotacional e não havendo dissipação de energia devido à rebentação ou fricção em algum contorno sólido.

A nova formulação se dá a partir de três equações básicas:

Equação de um potencial tridimensional $\bar{\phi}(x,y,z)$

$$\nabla^2 \bar{\phi} = 0 \quad (\text{II.21})$$

A condição de superfície livre linearizada

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \bar{\phi} = 0 \quad \text{em } z = 0 \quad (\text{II.22})$$

A condição no fundo variável

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad \text{em } z = -h(x,y) \quad (\text{II.23})$$

com x,y = coordenadas horizontais

z = coordenada vertical

$\bar{\phi}(x,y,z)$ = potencial tridimensional

$h(x,y)$ = profundidade variável

A parcela de tempo é dada por $e^{-i\omega t}$, sendo assim uma função conhecida. BETTESS e ZIENKIEWICZ (29), assim

como BERKHOFF (6), ao contrário da maioria dos autores (3, 45, 48), tomam esta parcela como $e^{i\omega t}$. Uma diferença que resulta desta ambiguidade é o sinal nas equações (II.9) e (II.10) relativas à superfície livre. No mais os resultados são os mesmos.

O problema transiente é reduzido a um problema estacionário no qual deseja-se calcular a função $\bar{\phi}$. Introduzindo uma série de parâmetros adimensionais, BERKHOFF (6) faz uma aproximação, que permite integrar na direção vertical, reduzindo o problema até então tridimensional, a um problema bidimensional. As condições (II.22) e (II.23) são satisfeitas implicitamente no desenvolvimento matemático, restando ainda satisfazer a equação de dispersão (II.20). Uma função hiperbólica Z é obtida neste processo.

$$Z(z) = \frac{\cosh(K(h(x,y) + z))}{\cosh(Kh(x,y))} \quad (\text{II.24})$$

A função Z está escrita como tendo apenas uma variável independente z , pois a função $h(x,y)$ é um dado do problema. Em outras palavras, a variação do potencial (em um ponto (x,y)) ao longo de um eixo vertical é dada por $Z(z)$. Isto só é válido em problemas com obstáculos com seção constante ao longo da profundidade. Desta forma a incôgnita do problema $\bar{\phi}$ é separada em duas funções, sendo uma conhecida.

$$\bar{\phi}(x,y,z) = \phi(x,y) Z(z) \quad (\text{II.25})$$

A função bidimensional ϕ é chamada de potencial total reduzido, e é a solução da equação de Berkhoff dada abaixo:

$$\nabla \cdot (CCg \nabla \phi) - \frac{\omega^2 Cg}{C} \phi = 0 \quad (\text{II.26})$$

As celeridades têm suas equações fornecidas a seguir:

Celeridade C

$$C = \frac{\omega}{K} \quad (\text{II.27})$$

sendo K calculado em (II.20)

Celeridade de grupo Cg

$$C_g = \frac{C}{2} \left(1 + \frac{2Kh}{\sinh(Kh)} \right) \quad (\text{II.28})$$

A equação de Berkhoff (II.26) é aplicável a problemas de difração e refração de ondas, tanto em "águas profundas" como em "águas rasas". Para comprovar esta afirmação, seja uma onda com um comprimento λ muito grande, dado pela seguinte equação:

$$\lambda = \frac{2\pi}{K} \quad (\text{II.29})$$

Esta pode ser usada como uma maneira alternativa de calcular o número da onda (2). Observa-se em (II.29) que K será muito pequeno. Isto permite aproximar a tangente hiperbólica em (II.20) pelo seu argumento obtendo

$$\omega^2 \approx K^2 gh \quad (\text{II.30})$$

Substitui-se (II.30) em (II.27) e aproxima-se Cg pelo mesmo critério.

$$\begin{aligned} C^2 &\approx gh \\ C_g &\approx C \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

Colocando-se as aproximações (II.31) na equação de Berkhoff es-

ta se degenera na equação de águas rasas ("shallow water equation") dada em (II.32).

$$\nabla \cdot (h \nabla \phi) + \frac{\omega^2}{g} \phi = 0 \quad (\text{II.32})$$

Em um caso de profundidade constante, genérico, C e C_g são constantes. A equação (II.26) se reduz a uma equação de Helmholtz (eq. (II.33)).

$$\nabla^2 \phi + K^2 \phi = 0 \quad (\text{II.33})$$

Este novo problema tem apenas duas condições de contorno a serem satisfeitas: a condição no obstáculo (II.12) e a condição de Sommerfeld (II.36) que é escrita em termos apenas do potencial difratado reduzido. Observando que a função Z em (II.24) é a mesma dada em (II.16), o potencial incidente reduzido é dado por

$$\phi^I(x, y) = A e^{iK(x \cos \gamma + y \sin \gamma)} \quad (\text{II.34})$$

Em regiões de profundidade constante é válida a separação

$$\phi = \phi^I + \phi^D \quad (\text{II.35})$$

A condição de Sommerfeld pode ser escrita em termos do potencial reduzido ϕ^D :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial \phi^D}{\partial r} - i \frac{\omega}{C} \phi^D \right) = 0 \quad (\text{II.36})$$

A condição no obstáculo é simplesmente

$$\phi_n = 0 \quad (\text{II.37})$$

Desta forma o problema resume-se em resolver a equação diferencial parcial a coeficientes variáveis dada por Berkhoff (II.26), satisfazendo à equação da dispersão (II.20) e as condições de contorno (II.36) e (II.37). Calculada a solução desta equação, a solução do problema de refração e difração de ondas é

$$\Phi(x,y,x,t) = \phi(x,y) \frac{\cosh(K(h+z))}{\cosh(Kh)} e^{-i\omega t} \quad (\text{II.38})$$

CAPÍTULO III

MODELO MATEMÁTICO

III.1 - FORMULAÇÃO VARIACIONAL

O Método dos Elementos Finitos (MEF) permite obter as matrizes de elementos através de uma formulação variacional. Os coeficientes destas matrizes surgem espontaneamente a partir da extremização de um funcional aproximado. No próximo capítulo será visto o cálculo das mesmas.

O Método de Rayleigh-Ritz é um método aproximado para se resolver uma equação diferencial. Para sua aplicação é necessário se construir um funcional que tenha como equação de Euler-Lagrange, a equação diferencial que rege o problema. Variando-se o funcional, ou seja tornando-o estacionário, está se resolvendo a equação de Euler-Lagrange. Se o funcional é aproximado segundo uma determinada técnica, a equação diferencial terá uma solução também aproximada. Esta técnica será enfocada no capítulo IV. Deve-se ter em mente que o problema de Teoria do Potencial aqui estudado, não tem

nenhum princípio de trabalho ou energia por trás dele. Desta forma o funcional, ao se tornar estacionário para uma certa função, não está necessariamente sendo minimizado como acontece no Princípio da Energia Potencial Total em Mecânica dos Sólidos (39). Mas provando-se que o operador diferencial é auto-adjunto, positivo definido, garante-se que o funcional será minimizado. Estas considerações no entanto estão além dos objetivos deste trabalho.

A equação diferencial parcial linear com coeficientes variáveis dada por BERKHOFF (6,7) para o problema de refração e difração de ondas está referenciada pela equação (II.26) e é aqui novamente indicada.

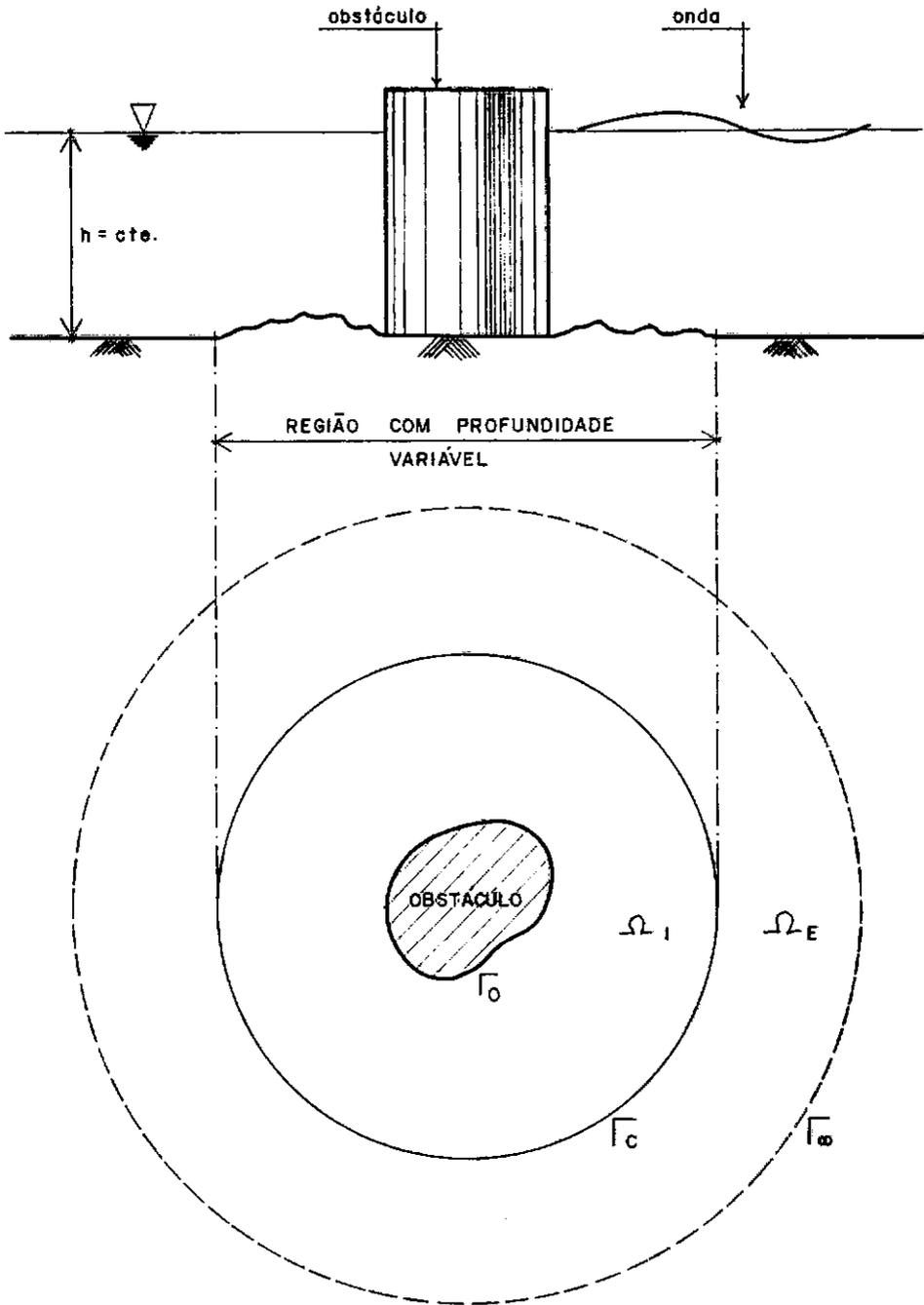
$$\nabla \cdot (C \text{ Cg } \nabla \phi) + \frac{Cg \omega^2}{C} \phi = 0 \quad (\text{III.1})$$

O domínio do problema será dividido, por conveniência, segundo a figura (III.1).

Fazendo uma breve recordação de cálculo variacional, seja o funcional Π tal que $\Pi = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$. A primeira variação $\delta^{(1)} \Pi$ sendo nula, após um certo número de operações resulta em

$$\delta^{(1)} \Pi = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right] \delta y dx = 0 \quad (\text{III.2})$$

sendo δy uma pequena variação admissível, arbitrária, dada à solução do problema (a função $y(x)$). Para que Π seja máximo ou mínimo, o valor de δy deve ser tal que a integral Π , dada acima, não mude de sinal ao longo de todo o intervalo $[x_1, x_2]$.



- Ω_I * DOMÍNIO INTERNO - região de profundidade variável
 Ω_E * DOMÍNIO EXTERNO - região de profundidade constante
 Γ_0 * $\sum \Gamma_n$ = CONTORNO DOS OBSTÁCULOS ($n=1$, um obstáculo)
 Γ_C * CONTORNO INTERMEDIÁRIO
 Γ_∞ * CONTORNO FICTÍCIO (matematicamente está no infinito)

Figura (III.1) - DOMÍNIO DE APLICAÇÃO DO PROBLEMA DE REFRAÇÃO E DIFRAÇÃO DE ONDAS

Mas δy calculado em um x qualquer poderá assumir um valor $\pm \beta$, onde β é um valor pequeno. Por conseguinte a condição de estacionariedade (III.2) só será satisfeita se o termo entre colchetes for nulo:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad (\text{III.3})$$

Esta é a equação de Euler-Lagrange para funcionais idênticos a Π (9, 10). Pelas mesmas referências pode-se verificar que um funcional do tipo

$$\Pi = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} F(f, f_x, f_y) dx dy,$$

onde $f = f(x, y)$ e f_x, f_y são as derivadas parciais em x e y respectivamente, terá sua equação de Euler-Lagrange na forma

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial f_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial f_y} \right) = 0 \quad (\text{III.4})$$

A equação diferencial de Berkhoff está escrita em termos de $\phi = \phi(x, y)$ e $\nabla\phi$, ou melhor, em ϕ, ϕ_x e ϕ_y . O integrando F será do tipo $F = F(\phi, \phi_x, \phi_y)$, ou seja, análogo ao indicado acima. Antes de montar o funcional seria providencial lembrar que o potencial total ϕ pode ser expresso segundo uma separação de variáveis (6, 7).

$$\phi(x, y, z, t) = \phi(x, y) Z(z) e^{-i\omega t} \quad (\text{III.5})$$

A função $Z(z)$ já é conhecida e $\phi(x, y)$, o potencial total reduzido, é a incógnita do problema. O domínio do problema, no caso mais geral, está separado em duas partes: uma interna ΩI , regi-

ão onde se dá o fenômeno da refração e difração, e outra externa ΩE que vai da fronteira com ΩI até o infinito.

O funcional a ser montado deverá satisfazer a equação diferencial em ambos os domínios. Existem então duas condições de contorno a serem levadas em conta. A primeira se refere à condição de permeabilidade do obstáculo, que é dada por:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = i\alpha \frac{\omega}{C} \phi \text{ em } \Gamma_0 \quad (\text{III.6})$$

onde α = coeficiente de permeabilidade, que varia de 0 a 1
 $i = \sqrt{-1}$

Como ϕn é a velocidade na direção normal a Γ_0 (aos obstáculos), $\alpha = 0$ implica em $\phi n = 0$ o que significa que o obstáculo é impermeável. Há uma reflexão total da onda ao incidir sobre o mesmo. Se $0 < \alpha \leq 1$ existirá um fluxo através do obstáculo ($\phi n \neq 0$) que será tido como permeável. A segunda condição é a condição de radiação (8, 29), já enunciada, que é dada por:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial \phi^D}{\partial r} - i \frac{\omega}{C} \phi^D \right) = 0 \quad (\text{III.7})$$

Seja Π um funcional válido para o domínio Ω indicado na figura (III.1):

$$\Pi = \iint_{\Omega} F(\phi, \phi_x, \phi_y) dx dy + \oint_{\Gamma_0} G(\phi) d\Gamma_0 \quad (\text{III.8})$$

onde

$$\Omega = \Omega I + \Omega E$$

$G(\phi)$ = uma função a ser integrada no contorno Γ_0 , onde de

ve ser satisfeita a condição (III.6).

Mais adiante ficará evidente a necessidade do acoplamento ao funcional Π da integral em Γ_0 e como a condição (III.7) será satisfeita.

Dois tipos de problemas serão estudados: um em que não existam variações de profundidade e outro em que estas variações ocorram proporcionando o fenômeno da refração. Em cada caso um funcional semelhante a (III.8) será construído e verificado.

III.1.1 - *Problema com Profundidade Constante*

Inicialmente será feita uma análise para o caso particular em que não existem variações de profundidade. Isto simplifica o estudo, uma vez que desaparecerá o contorno intermediário Γ_c que divide as regiões de fundo variável e fundo constante (figura (III.2)). Em regiões de fundo constante o potencial reduzido total pode ser separado em duas parcelas, u ma devido à onda incidente e outra devido à difratada, com

$$\phi = \phi^I + \phi^D \quad (\text{III.9})$$

Nestas condições de fundo não se dará o fenômeno da refração. O potencial incidente ϕ^I , por hipótese, deve ser uma solução da equação diferencial de Berkhoff, quaisquer que sejam as condições de contorno do problema. A equação (III.1) sendo linear permite fazer uso do princípio de superposição de efeitos. Fica claro que neste contexto a resolução do problema com apenas

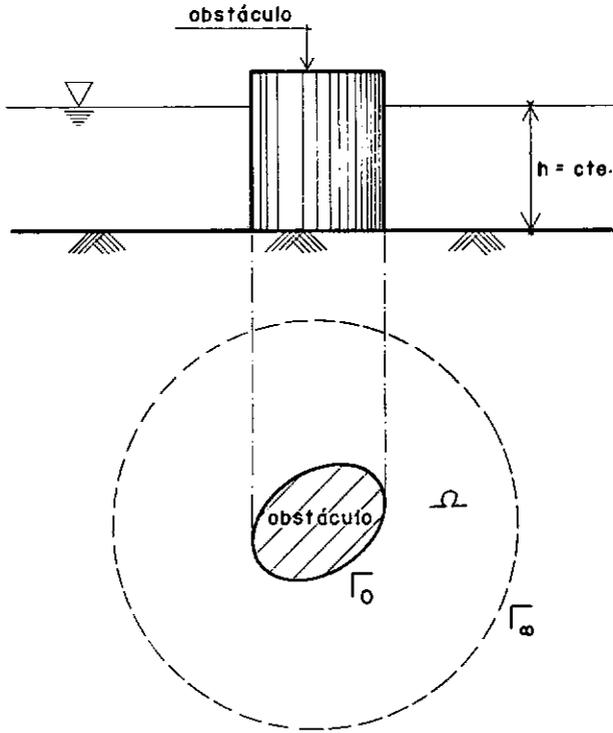


Figura (III-2) = DOMÍNIO DE APLICAÇÃO DO PROBLEMA DE DIFRAÇÃO DE ONDAS

ϕ^D é perfeitamente válida. Calculado o potencial difratado e efetuando-se a soma deste com o potencial incidente em todo o domínio, obtem-se o potencial reduzido total ϕ .

Abaixo está indicado um funcional complexo Π , que supostamente atende ao problema segundo os critérios de Rayleigh-Ritz.

$$\Pi = \iint_{\Omega} \frac{1}{2} (C C_g (\nabla \phi^D \cdot \nabla \phi^D) - \frac{\omega^2 C_g}{C} \phi^{D^2}) dx dy + \int_{\Gamma_0} C C_g (\phi_n^I) \phi^D d\Gamma_0 \quad (\text{III.10})$$

O funcional representará adequadamente o problema delineado se,

feita sua primeira variação, for resolvida a equação diferencial satisfazendo as condições de contorno estipuladas, o que será verificado a seguir.

Para facilitar o manuseio das próximas equações, o potencial difratado (a incôgnita deste problema) será denotado apenas por ϕ , abdicando-se do índice "D".

Seja $\delta^{(1)}\Pi$ a primeira variação do funcional complexo Π :

$$\begin{aligned} \delta^{(1)}\Pi = & \iint_{\Omega} (C C_g (\phi_x \delta\phi_x + \phi_y \delta\phi_y) - \frac{\omega^2 C_g}{C} \phi \delta\phi) dx dy + \\ & + \oint_{\Gamma_0} C C_g \phi_n^I \delta\phi d\Gamma_0 \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

No primeiro termo da integral dupla existem variações das derivadas parciais do potencial difratado. Integrando este termo por partes (a primeira parcela em x e a segunda em y), restarão apenas variações $\delta\phi$,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (C C_g (\phi_x \delta\phi_x + \phi_y \delta\phi_y) dx dy = & \\ = & \oint_{\Gamma} [(C C_g \phi_x) n_x \delta\phi] d\Gamma - \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} (C C_g \phi_x) \delta\phi dx dy + \\ & + \oint_{\Gamma} [(C C_g \phi_y) n_y \delta\phi] d\Gamma - \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} (C C_g \phi_y) \delta\phi dx dy \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

onde Γ representa o contorno total do domínio Ω , ou seja,

$$\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_{\infty} \quad (\text{III.13})$$

A expressão (III.12) pode ser condensada na forma

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} C C_g (\phi_x \delta \phi_x + \phi_y \delta \phi_y) dx dy = \\ = \int_{\Gamma_0} [C C_g \phi_n \delta \phi] d\Gamma_0 - \iint_{\Omega} [\nabla \cdot (C C_g \nabla \phi) \delta \phi] dx dy \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

A integral de contorno em Γ_{∞} desaparece pois existe uma condição complementar à dada em (III.7) que diz que

$$\left. \begin{aligned} \phi^D &\rightarrow 0 \\ \frac{\partial \phi^D}{\partial r} &\rightarrow 0 \end{aligned} \right\} \text{ conforme o raio } r \text{ tende a } \infty,$$

sendo que para distâncias grandes ϕ_r^D se confunde com ϕ_n^D .

Voltando à variação do funcional em (III.11), pode-se escrever,

$$\begin{aligned} \delta^{(1)} \Pi = - \iint_{\Omega} \left[\nabla \cdot (C C_g \nabla \phi) + \frac{\omega^2 C_g}{C} \phi \right] \delta \phi dx dy + \\ + \int_{\Gamma_0} [C C_g \phi_n] \delta \phi d\Gamma_0 + \int_{\Gamma_0} [C C_g \phi_n^I] \delta \phi d\Gamma_0 \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

A condição de extremização do funcional Π é dada por

$$\delta^{(1)} \Pi = 0 \quad (\text{III.16})$$

Tanto em Ω como em Γ_0 $\delta \phi$ é pequeno e arbitrário. De acordo com a Teoria do Cálculo Variacional são as seguintes as equações que garantirão a estacionariedade de Π :

Em Ω (Equação de Euler-Lagrange)

$$\nabla \cdot (C C_g \nabla \phi^D) + \frac{\omega^2 C_g}{C} \phi^D = 0 \quad (\text{III.17})$$

que é a equação de Berkhoff que governa o problema. Neste caso C e C_g são constantes e esta equação (III.17) se reduz a uma equação de Helmholtz.

Em Γ_0

$$C C_g \phi_n^D + C C_g \phi_n^I = 0 \quad \text{ou ainda}$$

$$\frac{\partial \phi^D}{\partial n} + \frac{\partial \phi^I}{\partial n} = \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (\text{III.18})$$

que é a condição de impermeabilidade dos obstáculos limitados por Γ_0 . Esta condição é um caso particular ($\alpha = 0$) da enunciada em (III.6). Neste trabalho não houve preocupação de se levar em conta casos com obstáculos permeáveis, em face dos exemplos estudados terem apenas corpos impermeáveis.

Falta satisfazer a condição de Sommerfeld (III.7), que será imposta de formas distintas dependendo da filosofia adotada para simular o "contorno no infinito".

Duas técnicas serão vistas:

- (a) Truncamento da malha de elementos finitos com a imposição de uma condição aproximada neste contorno "finito".
- (b) Acoplamento de elementos finitos com elementos infinitos, que além de discretizar a região infinita irão sa-

tisfazer a condição (III.7).

No caso (a) deve-se escolher uma distância para truncar a malha, tal que a condição de Sommerfeld seja aproximadamente satisfeita. O decaimento da parcela entre parênteses em (III.7) deve ser mais rápido que o crescimento de \sqrt{r} . A grandes distâncias da origem pode se tomar a respectiva parcela como sendo aproximadamente nula, indicado que a derivada radial de ϕ começa a se confundir com ϕ , a menos de uma constante. O funcional terá então uma parcela capaz de satisfazer a condição abaixo.

$$\frac{\partial \phi^D}{\partial r} - i \frac{\omega}{C} \phi^D \approx 0 \quad (\text{III.19})$$

em Γ_T , chamado de contorno de truncamento. Na equação (III.13) o contorno Γ_∞ será trocado pelo Γ_T , devido ao truncamento de um domínio inicialmente infinito. A parcela integrada em Γ_T não sumirá como ocorria com Γ_∞ na passagem de (III.12) para (III.14), sendo então indicada abaixo

$$\oint_{\Gamma_T} \left[C C_g \phi_n \delta \phi \right] d\Gamma_T \quad (\text{III.20})$$

ϕ_n irá se confundir com ϕ_r quanto mais longe estiver Γ_T . Isto tem grande importância quanto à eficiência da aproximação. Uma vez que a derivada normal consiga ser confundida com a radial, basta subtrair do funcional Π a parcela (III.21), para em Γ_T ficar caracterizada a condição desejada.

$$\oint_{\Gamma_T} \frac{1}{2} C C_g (i \frac{\omega}{C} \phi^2) d\Gamma_T \quad (\text{III.21})$$

Extremizando Π , com a nova parcela em Γ_T , surgirá de (III.20) e (III.21) a condição

$$\oint_{\Gamma_T} C C_g \left[\frac{\partial \phi}{\partial n} - i \frac{\omega}{C} \phi \right] \delta \phi d\Gamma_T = 0 \quad (\text{III.22})$$

sendo $\delta \phi$ arbitrário ao longo de Γ_T obtem-se a condição aproximada de Sommerfeld,

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} - i \frac{\omega}{C} \phi = 0 \quad (\text{III.23})$$

satisfeita em Γ_T . Com isto o funcional Π retrata fielmente a equação diferencial e as condições de contorno do problema, quando o domínio infinito for truncado.

A condição aproximada (III.23) tem no sentido físico, a propriedade de não deixar que ondas difratadas, afastando-se da região de perturbação (região dos obstáculos), reflitam sobre Γ_T voltando a incidir em Γ_0 . Alguns autores (29) dão a (III.21) o nome de termo de *AMORTECIMENTO*, apesar de não estar explicitamente ligado a um parâmetro de velocidade. (As derivadas cartesianas do potencial é que são termos de velocidade). Vale a pena ressaltar a analogia da equação (III.23) com (III.6) para $\alpha = 1$. (permeabilidade total do obstáculo). Em outras palavras a condição em Γ_T indica uma total permeabilidade ao longo do mesmo, para a onda difratada.

Na expressão seguinte o funcional Π para este caso é dado por completo.

$$\Pi = \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} (C C_g (\nabla \phi^D \cdot \nabla \phi^D) - \frac{\omega^2 C_g}{C} \phi^D{}^2) dx dy + \oint_{\Gamma_0} C C_g \phi_n^I \phi^D d\Gamma_0 -$$

$$- \int_{\Gamma_T} \frac{1}{2} C C_g (i \frac{\omega}{C} \phi^D)^2 d\Gamma_T \quad (\text{III.24})$$

Note-se que da integral em Ω surgirão parcelas em Γ_0 e Γ_T para compor as condições de contorno do problema.

No caso (b), no qual se fará uso de elementos infinitos, o funcional Π não se altera com respeito ao dado em (III.10) uma vez que as próprias funções de interpolação dos elementos infinitos irão satisfazer completamente a condição de Sommerfeld. Isto ficará claro quando da apresentação do método numérico.

III.1.2 - Problema com Variação de Profundidade

Tendo em vista a possibilidade de existir uma região com profundidade variável, um novo estudo se faz necessário para a montagem de funcional capaz de representar o novo problema. A figura (III.1) apresenta um domínio Ω composto por duas regiões Ω_I e Ω_E , especificadas no início deste capítulo. Fica também caracterizado o contorno Γ_C entre ambas.

BETTESS e ZIENKIEWICZ (17) sugerem o seguinte funcional complexo:

$$\Pi = \iint_{\Omega} \frac{1}{2} (C C_g (\nabla \phi \cdot \nabla \phi) - \frac{\omega^2 C_g}{C} \phi^2) dx dy - \int_{\Gamma_0} \frac{1}{2} \alpha (i \omega C_g) \phi^2 d\Gamma_0 \quad (\text{III.25})$$

onde $\Omega = \Omega_I + \Omega_E$

ϕ é o potencial total

α é o coeficiente de permeabilidade

Analogamente ao problema de fundo constante, segue a verificação quanto à adequação do funcional Π acima. Reescrevendo a expressão (III.25), obtem-se

$$\Pi = \iint_{\Omega} \frac{1}{2} (C C_g (\phi_x^2 + \phi_y^2) - \frac{\omega^2 C_g}{C} \phi^2) dx dy - \int_{\Gamma_0} \frac{1}{2} \alpha (i\omega C_g) \phi^2 d\Gamma_0 \quad (\text{III.26})$$

Fazendo uso de cálculo integral elementar separa-se Ω em dois domínios de integração Ω_I e Ω_E e introduzindo a notação $\Pi = \Pi_I + \Pi_E$, seguem:

$$\Pi_I = \iint_{\Omega_I} \frac{1}{2} (C C_g (\phi_x^2 + \phi_y^2) - \frac{\omega^2 C_g}{C} \phi^2) dx dy - \int_{\Gamma_0} \frac{1}{2} \alpha (i\omega C_g) \phi^2 d\Gamma_0 \quad (\text{III.27a})$$

$$\Pi_E = \iint_{\Omega_E} \frac{1}{2} (C C_g (\phi_x^2 + \phi_y^2) - \frac{\omega^2 C_g}{C} \phi^2) dx dy \quad (\text{III.27b})$$

onde Π_I = funcional para o domínio interno composto por Ω_I , Γ_0 e Γ_c

Π_E = funcional para o domínio externo composto por Ω_E , Γ_c e Γ_∞

A primeira variação de Π é igual a

$$\delta^{(1)} \Pi = \delta^{(1)} \Pi_I + \delta^{(1)} \Pi_E \quad (\text{III.28})$$

Por questões de facilidade de manuseio será feita uma separação dos dois termos à direita na equação (III.28). Resulta da primeira variação de Π_I ,

$$\delta^{(1)} \Pi_I = \iint_{\Omega_I} \left[C C_g (\phi_x \delta \phi_x + \phi_y \delta \phi_y) - \frac{\omega^2 C_g}{C} \phi \delta \phi \right] dx dy -$$

$$- \int_{\Gamma_0} \alpha(i\omega Cg)\phi\delta\phi d\Gamma_0 \quad (\text{III.29})$$

Para que o funcional fique em termos apenas de $\delta\phi$, será necessário fazer duas integrações por partes, uma em x e outra em y , para eliminar $\delta\phi_x$ e $\delta\phi_y$ da integral em ΩI . Esta passagem será omitida, por se tratar de uma integral muito semelhante à expressa em (III.12). A equação (III.29) é então substituída por:

$$\begin{aligned} \delta^{(1)} \Pi I = & \iint_{\Omega} - \left[\nabla \cdot (CCg\nabla\phi) + \frac{\omega^2 Cg}{C}\phi \right] \delta\phi dx dy + \\ & + \int_{\Gamma I} CCg\phi_n \delta\phi d\Gamma I - \int_{\Gamma_0} \alpha(i\omega Cg)\phi\delta\phi d\Gamma_0 \end{aligned} \quad (\text{III.30})$$

No domínio interno C e Cg não são constantes pois as celeridades variam com a profundidade. O contorno interno ΓI é dado por

$$\Gamma I = \Gamma_0 + \Gamma_c \quad (\text{III.31})$$

Trabalhando agora como funcional externo ΠE (III.27b), tem-se que

$$\Pi E = \iint_{\Omega E} \frac{1}{2} \left[((\phi_x^I + \phi_x^D)^2 + (\phi_y^I + \phi_y^D)^2) - \frac{\omega^2 Cg}{C}(\phi^I + \phi^D)^2 \right] dx dy \quad (\text{III.32})$$

onde ϕ foi substituído por $\phi = \phi^I + \phi^D$, pois em se tratando de profundidade constante o potencial total é dado pela soma do potencial incidente com o potencial difratado. Este funcional externo pode ser simplificado. Como se conhece o potencial incidente ϕ^I e suas derivadas, ao se variar ΠE com relação a ϕ na

verdade faz-se uma variação com respeito a ϕ^D . Desde já, então, eliminam-se as parcelas quadráticas em ϕ^I .

$$\begin{aligned} \Pi E = & \iiint_{\Omega E} \frac{1}{2} \left[CCg (\phi_x^I)^2 + 2\phi_x^I \phi_x^D + \phi_x^D{}^2 + \phi_y^I{}^2 + 2\phi_y^I \phi_y^D + \right. \\ & \left. + \phi_y^D{}^2 \right) - \frac{\omega^2 Cg}{C} (\phi^I{}^2 + 2\phi^I \phi^D + \phi^D{}^2) \Big] dx dy \end{aligned} \quad (III.33)$$

Mas separando ΠE em duas integrais,

$$\begin{aligned} \Pi E = & \iiint_{\Omega E} \frac{1}{2} \left[CCg (\phi_x^D{}^2 + \phi_y^D{}^2) - \frac{\omega^2 Cg}{C} \phi^D{}^2 \right] dx dy + \\ & + \iiint_{\Omega E} \left[CCg \cdot ((\phi_x^I \phi_x^D) + (\phi_y^I \phi_y^D)) - \frac{\omega^2 Cg}{C} \phi^I \phi^D \right] dx dy \end{aligned} \quad (III.34)$$

o segundo termo de ΠE pode ser reescrito na forma

$$\begin{aligned} 2^\circ \text{ TERMO} = & \iiint_{\Omega E} \left[CCg \left(\frac{\partial}{\partial x} (\phi_x^I \phi^D) + \frac{\partial}{\partial y} (\phi_y^I \phi^D) \right) \right] dx dy - \\ & - \iiint_{\Omega E} \left[CCg (\phi_{xx}^I \phi^D + \phi_{yy}^I \phi^D) + \frac{\omega^2 Cg}{C} \phi^I \phi^D \right] dx dy \end{aligned} \quad (III.35)$$

$$\begin{aligned} 2^\circ \text{ TERMO} = & \iiint_{\Omega E} \left[CCg \left(\frac{\partial}{\partial x} (\phi_x^I \phi^D) + \frac{\partial}{\partial y} (\phi_y^I \phi^D) \right) \right] dx dy - \\ & - \iiint_{\Omega E} \left[CCg \nabla \cdot (\nabla \phi^I) + \frac{\omega^2 Cg}{C} \phi^I \right] \phi^D dx dy \end{aligned} \quad (III.36)$$

A segunda integral tem o termo entre colchetes nulo. Deve se fazer notar que estando em uma região de profundidade constante

CCg não é mais variável e assim não é diferenciável. Observa-se então que sendo ϕ^I , por imposição das hipóteses formuladoras do problema, uma das soluções da equação (III.1), realmente o termo indicado acima é nulo e conseqüentemente a integral é nula. O 2º termo reduz-se à primeira integral apenas.

Seja o teorema de Green dado por

$$\oint_{\Gamma} (Pdx + Qdy) = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (\text{III.37})$$

Aplicando o teorema em (III.36)

$$2^\circ \text{ TERMO} = \oint_{\Gamma} \text{CCg} (\phi_x^I \phi^D dy - \phi_y^I \phi^D dx) \quad (\text{III.38})$$

O contorno Γ_E do domínio externo Ω_E pode ser escrito como

$$\Gamma_E = \Gamma_c + \Gamma_{\infty} \quad (\text{III.39})$$

Substituindo a equação (III.38) em (III.34) obtem-se uma expressão para Π_E , em função apenas do potencial difratado como é de se esperar para um funcional aplicável a uma região de fundo constante.

$$\begin{aligned} \Pi_E = & \iint_{\Omega_E} \frac{1}{2} \left[\text{CCg} (\phi_x^D{}^2 + \phi_y^D{}^2) - \frac{\omega^2 \text{CCg}}{c} \phi^D{}^2 \right] dx dy + \\ & + \oint_{\Gamma_E} \left[\phi_x^I \phi^D dy - \phi_y^I \phi^D dx \right] \end{aligned} \quad (\text{III.40})$$

Da mesma maneira que se variou Π pode se variar Π_E . A primeira integral é análoga à primeira integral em Π , a menos do índice D. Assim, evitando-se fazer novamente as integrações por partes,

escreve-se por analogia a (III.15).

$$\begin{aligned} \delta^{(1)} \Pi_E = & \iint_{\Omega E} - \left[\nabla \cdot (CCg \nabla \phi^D) + \frac{\omega^2 Cg}{C} \phi^D \right] \delta \phi \, dx dy + \\ & + \int_{\Gamma E} CCg \left[\phi^I_x dy - \phi^I_y dx \right] \delta \phi^D + \int_{\Gamma E} \left[CCg \phi_n^D \right] \delta \phi^D \, d\Gamma c \end{aligned} \quad (III.41)$$

Substituindo (III.30) e (III.41) em (III.28) e aplicando a condição de estacionaridade $\delta^{(1)} \Pi = 0$ obtém-se

$$\begin{aligned} \delta^{(1)} \Pi = & \delta^{(1)} \Pi_I + \delta^{(1)} \Pi_E = - \iint_{\Omega I} \left[\nabla \cdot (CCg \nabla \phi) + \frac{\omega^2 Cg}{C} \phi \right] \delta \phi \, dx dy + \\ & + \int_{\Gamma I} CCg (\phi_n) \delta \phi \, d\Gamma I - \int_{\Gamma O} \alpha (i\omega Cg) \phi \delta \phi \, d\Gamma o - \\ & - \iint_{\Omega E} \left[\nabla \cdot (CCg \nabla \phi^D) + \frac{\omega^2 Cg}{C} \phi^D \right] \delta \phi \, dx dy + \\ & + \int_{\Gamma E} CCg \left[\phi^I_x dy - \phi^I_y dx \right] \delta \phi^D + \int_{\Gamma E} \left[CCg \phi_n^D \right] \delta \phi^D \, d\Gamma c = 0 \end{aligned} \quad (III.42)$$

Em Γ_∞ $\delta \phi^D$ é assumido como nulo, já que o potencial difratado extremizante e qualquer outro admissível tendem a zero. Matematicamente $\delta \phi^D$ é dado por

$$\delta \phi^D = \bar{\phi}^D - \phi^D \quad (III.43)$$

onde $\bar{\phi}^D$ é o potencial difratado admissível (não torna Π estacionário, mas preenche as condições de contorno do problema). Se $\bar{\phi}^D \rightarrow 0$ em Γ_∞ , assim como ϕ^D , então

$$\delta \phi^D \rightarrow 0 \quad \text{em } \Gamma_\infty \quad (III.44)$$

Por meio de (III.44) pode-se eliminar, nas integrais em ΓE , as parcelas em Γ_∞ .

Em ΩI e em $\Gamma I = \Gamma_0 + \Gamma_c$, $\delta\phi$ é pequeno e arbitrário, assim como $\delta\phi^D$ em ΩE e Γ_c . Segundo a teoria de Cálculo Variacional pode-se escrever as seguintes equações decorrentes de $\delta^{(1)}\Pi = 0$.

Na região interna:

$$\nabla \cdot \frac{EM}{C} \nabla \phi + \frac{\omega^2 C g}{C} \phi = 0 \quad (III.45)$$

$$\frac{EM}{C} \phi_n - i\alpha\omega C g \phi = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \alpha \left(i \frac{\omega}{C} \right) \phi \quad (III.46)$$

que é a condição (III.6) já apresentada. No presente trabalho serão considerados apenas obstáculos impermeáveis, ou seja, com $\alpha = 0$.

Na região externa:

$$\nabla \cdot \frac{EM}{C} \nabla \phi^D + \frac{\omega^2 C g}{C} \phi^D = 0 \quad (III.47)$$

No contorno intermediário Γ_c

Existem três integrais ao longo de Γ_c , uma

dependendo de $\delta\phi$ e duas de $\delta\phi^D$. Deve-se compatibilizá-las de maneira a extrair uma única equação. Admitindo que Γ_C já esteja sobre uma faixa de fundo constante, por menor que seja, faz-se a seguinte simplificação:

$$\delta\phi = \delta\phi^I + \delta\phi^D \quad \text{em } \Gamma_C$$

Mas o potencial incidente não admite variações por ser conhecido ($\delta\phi^I = 0$). Assim em Γ_C vale a identidade

$$\delta\phi = \delta\phi^D \quad (\text{III.48})$$

Para variações arbitrárias, mas não independentes entre si, de tanto ϕ como ϕ^D vem:

$$\oint_{\Gamma_C} CCg\phi_n d\Gamma_C + \oint_{\Gamma_C} CCg \left[\phi_x^I dy - \phi_y^I dx \right] + \oint_{\Gamma_C} CCg\phi_n^D d\Gamma_C = 0 \quad (\text{III.49a})$$

ou ainda

$$\oint_{\Gamma_C} \phi_n d\Gamma_C = \oint_{\Gamma_C} \left[\phi_y^I dx - \phi_x^I dy \right] - \oint_{\Gamma_C} \phi_n^D d\Gamma_C \quad (\text{III.49b})$$

Esta condição retrata a compatibilidade do fluxo normal através de Γ_C . O lado esquerdo da equação indica o fluxo que sai de Γ_C , a partir do domínio interno Ω_I . Já o lado direito representa o fluxo que sai do domínio externo Ω_E . Em outras palavras, esta seria uma condição de conservação de massa fluida passando no contorno intermediário, pois o que "entra" através de Γ_C deve ser igual ao que "sai". Observando a figura abaixo, este significado físico ficará evidenciado.

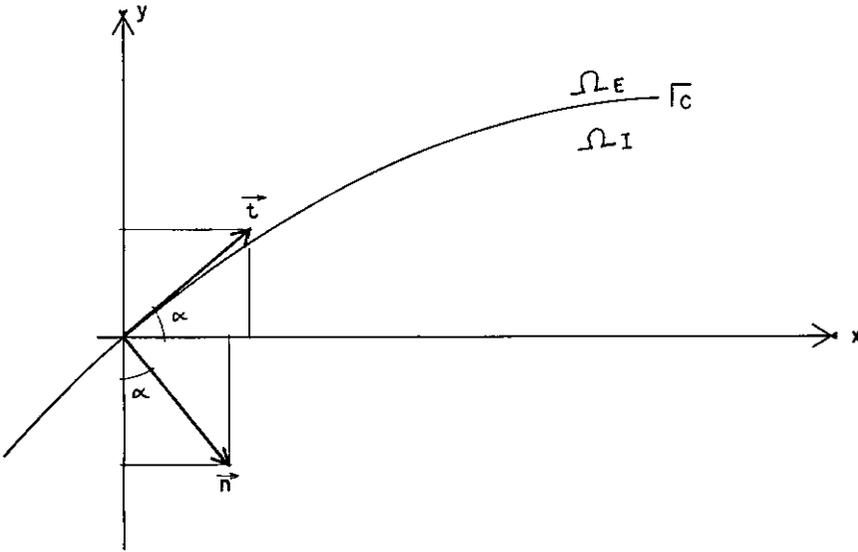


Figura (III.3) = CONVENÇÃO PARA A DIREÇÃO NORMAL A Γ_C , EM Ω_E

A primeira integral da equação (III.49b) terá como derivadas normais positivas aquelas no sentido "para fora" de Ω_I , ou seja, apontando de Ω_I para Ω_E , normal a Γ_C .

Para um melhor entendimento da segunda integral, uma certa manipulação matemática se faz necessária. Na figura (III.3) está indicado um par de vetores normal e tangente ao contorno Γ_C , nos sentidos positivos com respeito a Ω_E . O vetor tangente unitário pode ser dado por:

$$\underline{u}_T = (\cos \alpha, \text{sen } \alpha) \quad (\text{III.50})$$

O cálculo diferencial permite escrever que

$$dx = \frac{\partial x}{\partial n} dn + \frac{\partial x}{\partial t} dt$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial n} dn + \frac{\partial y}{\partial t} dt \quad (\text{III.51})$$

Substituindo na integral em questão fornece

$$\oint_{\Gamma_C} \left[\phi_y^I \left(\frac{\partial x}{\partial n} dn + \frac{\partial x}{\partial t} dt \right) - \phi_x^I \left(\frac{\partial y}{\partial n} dn + \frac{\partial y}{\partial t} dt \right) \right] \quad (\text{III.52})$$

Esta pode ser reescrita como

$$\oint_{\Gamma_C} \left[\left(\phi_y^I \frac{\partial x}{\partial n} - \phi_x^I \frac{\partial y}{\partial n} \right) dn + \left(\phi_y^I \frac{\partial x}{\partial t} - \phi_x^I \frac{\partial y}{\partial t} \right) dt \right] \quad (\text{III.53})$$

Ao longo de Γ_C a coordenada n não varia ($dn = 0$) e $dt = d\Gamma_C$.

A integral se reduz a:

$$\oint_{\Gamma_C} \left[\phi_y^I \frac{\partial x}{\partial t} - \phi_x^I \frac{\partial y}{\partial t} \right] d\Gamma_C \quad (\text{III.54})$$

De acordo com a geometria da figura (III.3)

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = \cos \alpha \\ \frac{\partial y}{\partial t} = \text{sen } \alpha \end{cases} \quad \text{coordenadas do vetor tangente a } \Gamma_C$$

Assim

$$\oint_{\Gamma_C} \left[\phi_y^I \cos \alpha - \phi_x^I \text{sen } \alpha \right] d\Gamma_C \quad (\text{III.55})$$

O vetor normal unitário pode ser dado por

$$\underline{u}_N = (\text{sen } \alpha, -\cos \alpha) = \left(\frac{\partial y}{\partial n}, -\frac{\partial x}{\partial n} \right) \quad (\text{III.56})$$

Substituindo na integral, (III.55) torna-se mais simples e

$$\int_{\Gamma_C} \left[\phi_y^I \left(-\frac{\partial y}{\partial n} \right) - \phi_x^I \left(\frac{\partial x}{\partial n} \right) \right] d\Gamma_C = \int_{\Gamma_C} - \left[\phi_n^I \right] d\Gamma_C \quad (\text{III.57})$$

Voltando à equação (III.49b) a compatibilidade de fluxos é patente.

$$\int_{\Gamma_C} \phi_n d\Gamma_C = - \int_{\Gamma_C} \phi_n^I d\Gamma_C - \int_{\Gamma_C} \phi_n^D d\Gamma_C \quad (\text{III.58})$$

O sinal negativo do lado direito está de acordo com as convenções adotadas, já que as normais calculadas em Ω_I e em Ω_E tem sentidos contrários.

Nos próximos capítulos será visto que esta propriedade resulta em um termo de carga.

C A P Í T U L O I V

MÉTODOS NUMÉRICOS

IV.1 - INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta com mais detalhe o método de Rayleigh-Ritz para solução aproximada da equação diferencial (III.1), permitindo ainda uma visão geral da aplicação do Método dos Elementos Finitos (MEF).

No caso mais geral, o domínio do problema é dividido em dois subdomínios Ω_I e Ω_E , os quais serão discretizados separadamente. Como na formulação variacional esta separação já foi levada em conta, surgiu uma integral de contorno que retrata a compatibilização de fluxos entre o domínio interno e o externo (equação (III.49)).

O domínio de fundo variável Ω_I (interno) é dividido em regiões nas quais a solução da equação diferencial e as condições de contorno são modeladas segundo um critério.

Elemento Finito (EF) é o nome dado a cada uma destas regiões. Esta é uma maneira bastante simples e intuitiva de encarar os EF sem o seu caracter estrutural. Uma série de textos (11-13), no entanto, apresentam os conceitos clássicos de EF, hoje em dia bastante difundidos.

O outro domínio também será dividido em regiões, só que semi-infinitas, nas quais a modelagem segue um critério distinto ao de ΩI . Estas se chamarão Elementos Infinitos (EI) e constituem o objetivo principal deste trabalho.

O Método de Rayleigh-Ritz consiste em aproximar as funções admissíveis de um funcional por um conjunto de n polinômios p_i em que não se conhece seus coeficientes α_i . Por exemplo

$$y(x) \approx \alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x) + \dots + \alpha_n p_n(x) \quad (\text{IV.1})$$

Assim em vez de se descobrir qual a função que extremizará o funcional, desconhece-se apenas um número finito n de coeficientes α_i . Em linguagem matemática isto equivale a escolher uma base p_i num espaço de dimensão finita n (14,15). Cada elemento terá uma base atuando em seu domínio, sendo a solução numérica, gerada por uma combinação linear dos elementos da base. Calculando os valores destes parâmetros α_i , tem-se um polinômio que é solução aproximada da equação diferencial, dentro de cada região.

Esta não é a única maneira possível para se estudar numericamente o problema. O Método dos Resíduos Ponderados seria uma alternativa.

IV.2 - ESCOLHA E APRESENTAÇÃO DO ELEMENTO FINITO

A escolha de um EF em um determinado problema se faz de maneira a satisfazer de forma equilibrada, os critérios para modelagem tanto das possíveis geometrias como da solução do problema. Seja então um obstáculo qualquer no qual incide uma onda com características conhecidas. A região Ω (figura IV.1) é escolhida, em termos ilustrativos, para sofrer uma discretização por EF. Dividindo-a em pequenas regiões (figura IV.2), fica caracterizada a geometria de cada elemento Ω_m , den-

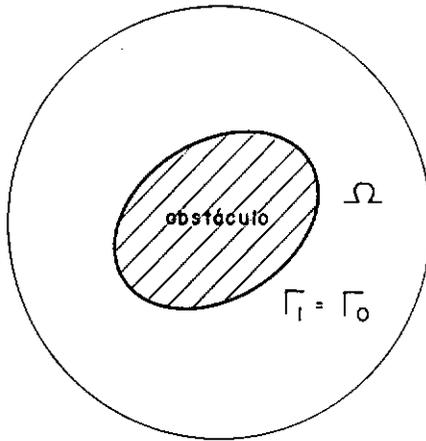


Figura (IV.1) = DOMÍNIO DO PROBLEMA

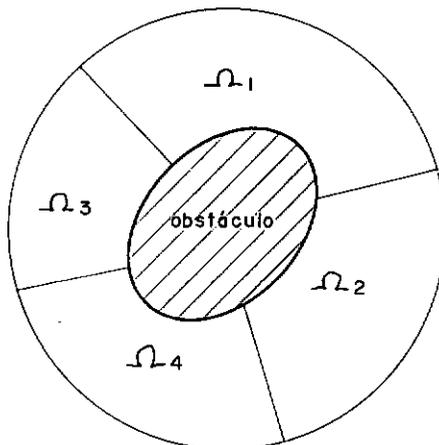


Figura (IV.2) = DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO Ω

tro da qual se arbitrará um "perfil" para a solução (no caso de polinômios estes podem ser Lagrangeanos, Serendipity, Hermitianos, etc...)

Para um obstáculo com uma forma curva qualquer entende-se ter uma boa aproximação da geometria usando-se EF que interpolem (aproximem) as coordenadas com polinômios do segundo grau. Sendo o potencial da onda de Airy uma função senoidal, pode-se modelar uma fração do comprimento da onda também por um polinômio do segundo grau. Esta fração, no entanto, deve no máximo ser de $\lambda/3$. Além deste valor não se conseguem boas aproximações.

A suficiência do uso de um EF isoparamétrico quadrático fica patente. Isoparamétrico no sentido de que coordenadas e potencial são interpolados pelo mesmo conjunto de funções, e quadrático indicando polinômios do segundo grau. De acordo com a teoria já conhecida para elementos isoparamétricos (11, 13, 16), este é mapeado das coordenadas globais (x, y) para as coordenadas naturais (locais) (ξ, η) usando-se uma matriz Jacobiana. Esta pode ser montada pela regra da cadeia, pois

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

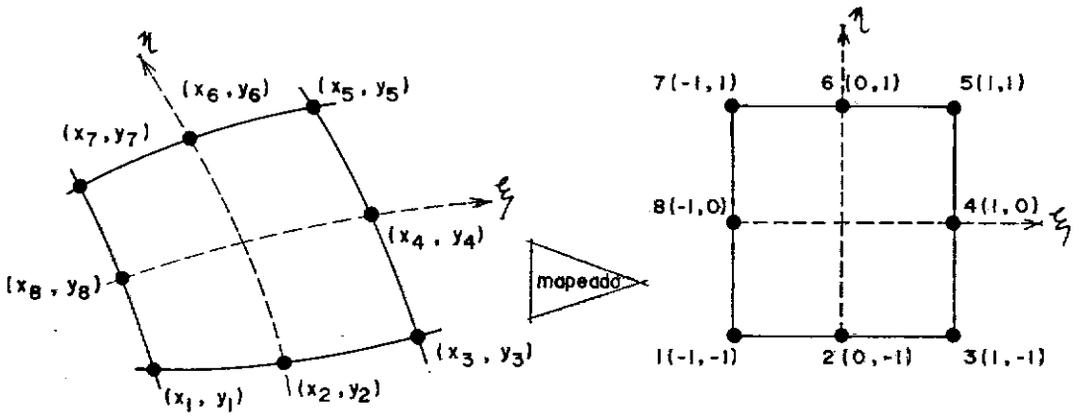
que arranjado em forma matricial dá

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.2})$$

A matriz de ordem 2 é a matriz Jacobiana J , de transformação do sistema global para o natural. O sistema natural, que não é cartesiano, tem as seguintes características:

- (i) As coordenadas ξ e η assumem valores no intervalo $[-1, 1]$.
- (ii) Um EF com uma forma distorcida no sistema global é sempre mapeado como um quadrado de lado igual a 2, no sistema natural (figura IV.3).

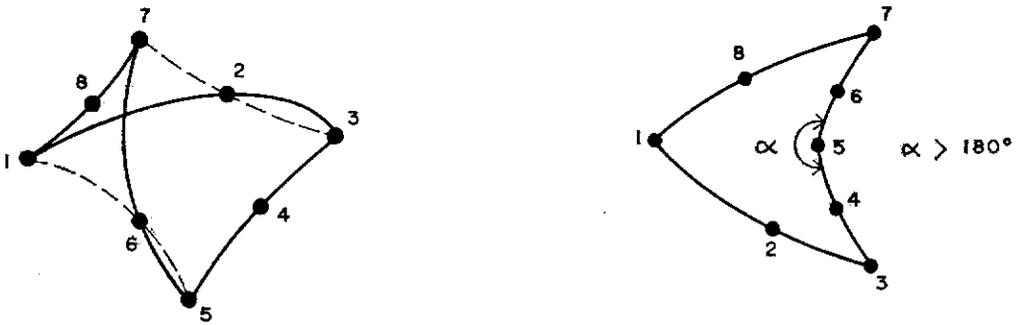
Na figura (IV.3) encontra-se esboçado um EF quadrilátero, do tipo a ser utilizado nesta formulação. Os três nós ao longo de cada face garantem a unicidade da curva do segundo grau ali definida. As funções de interpolação são todas escritas em coordenadas naturais, mas há derivadas cartesianas presentes na formulação. Assim será necessária uma "volta" para o sistema global. Isto será feito através da inversa da matriz Jacobiana. Além de quadrada, esta deverá ser regular, para que a inversa J^{-1} exista. Assegura-se uma matriz quadrada pelo simples fato dos dois sistemas de coordenadas serem bidimensionais. Um contra-exemplo seria um elemento de barra isoparamétrico, para estudo de pórticos espaciais. A regularidade ($\det J \neq 0$) fica garantida desde que o EF não seja inconvenientemente distorcido, como nos exemplos da figura (IV.4). É necessário haver uma relação unívoca $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$.



(x_i, y_i) = coordenada global do nó de numeração local i

$1, 2, \dots, 8$ = nº do nó para efeito de controle local

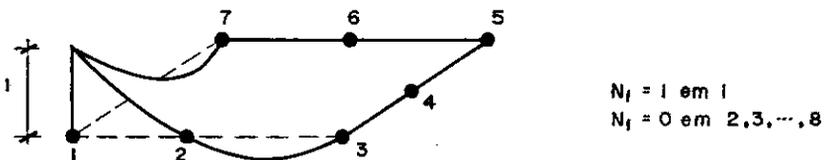
Figura (IV-3) = MAPEAMENTO DE UM EF SERENDIPITY QUADRÁTICO



a) Não cruzar os lados dos elementos

b) Todos os ângulos interiores devem ser menores que 180°

Figura (IV-4) = EF MAL CONFIGURADO



$N_1 = 1$ em i
 $N_1 = 0$ em $2, 3, \dots, 8$

Figura (IV-5) = FUNÇÃO DE FORMA DO NÓ 1

Pré-multiplicando a equação (IV.2), em ambos os lados, por J^{-1} ,

$$J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.3})$$

obtém-se uma fórmula para transformar derivadas naturais nas derivadas cartesianas equivalentes. Mais adiante será dado o cálculo numérico da matriz Jacobiana e sua inversa.

A escolha das funções de forma (ou funções de interpolação) $N_i(\xi, \eta)$ é uma tarefa das mais importantes. O perfil da solução aproximada do problema, dentro dos limites do EF, será determinado a partir destas funções. A prática revela que na categoria dos EF isoparamétricos quadráticos, os da família Serendipity primam pela sua simplicidade e eficiência, na programação e nos resultados. O nome Serendipity se deve ao facto das funções de forma desta família não terem uma fórmula geral de construção, como acontece com a Lagrangeana. Um EF Serendipity requer 8 nós enquanto que o Lagrangeano necessita de 9 nós.

Qualquer que seja a família adotada, as seguintes condições devem ser satisfeitas:

- (i) N_i deve valer UM no seu nó de referência (nó i) e ZERO em todos os demais. Cada nó tem uma função de forma a ele referenciada.
- (ii) Ter uma variação parabólica bem definida ao longo do elemento.

Na figura (IV.5) é dado um esboço da função N_i .

As coordenadas cartesianas de um ponto P interior ao EF e localizado por um par de coordenadas naturais (ξ_p, η_p) , são

$$\begin{aligned} x_p &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi_p, \eta_p) x_i \\ y_p &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi_p, \eta_p) y_i \end{aligned} \quad (\text{IV.4})$$

onde (x_i, y_i) é localização global do nó i

Aplicando a definição de EF isoparamétrico, o potencial da onda em P é

$$\phi_p = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi_p, \eta_p) \phi_i \quad (\text{IV.5})$$

onde ϕ_i é o potencial no nó i , também chamado de parâmetro nodal. Este parâmetro nodal, ao contrário dos problemas usuais, é um número complexo. O tratamento dado, em termos de programação, será visto no apêndice.

Os polinômios quadráticos N_i , listados nas referências (13) (16), entre outras, estão listados abaixo:

$$\begin{aligned} N1(\xi, \eta) &= (-1 + \xi\eta + \xi^2 + \eta^2 - \xi^2\eta - \xi\eta^2)/4 \\ N2(\xi, \eta) &= (1 - \eta - \xi^2 + \xi^2\eta)/2 \\ N3(\xi, \eta) &= (-1 - \xi\eta + \xi^2 + \eta^2 - \xi^2\eta + \xi\eta^2)/4 \\ N4(\xi, \eta) &= (1 + \xi - \eta^2 - \xi\eta^2)/2 \\ N5(\xi, \eta) &= (-1 + \xi\eta + \xi^2 + \eta^2 + \xi^2\eta + \xi\eta^2)/4 \\ N6(\xi, \eta) &= (1 + \eta - \xi^2 - \xi^2\eta)/2 \\ N7(\xi, \eta) &= (-1 - \xi\eta + \xi^2 + \eta^2 + \xi^2\eta - \xi\eta^2)/4 \\ N8(\xi, \eta) &= (1 - \xi - \eta^2 + \xi\eta^2)/2 \end{aligned} \quad (\text{IV.6})$$

Os parâmetros nodais ϕ_i , indicados em (IV.5), constituem os elementos do vetor solução do sistema de equações lineares, a ser resolvido. Uma vez obtidos seus valores, o potencial pode ser calculado, dentro de qualquer EF, pela respectiva equação (IV.5) do elemento.

Seja um caso particular em que para um elemento se obteve

$$\phi_1 = \phi_2 = \dots = \phi_8 = \bar{\phi} \quad (\text{IV.7})$$

e conseqüentemente todos os nós tem o mesmo valor $\bar{\phi}$ (conhecido). A interpolação em um ponto P qualquer deve resultar em

$$\phi_p = \bar{\phi} \quad (\text{IV.8})$$

Isto é intuitivo, já que numa região EQUIPOTENCIAL todos os pontos tem o mesmo potencial. O EF formulado deve estar preparado para representar este estado, mesmo que dificilmente ele venha a ocorrer. Pelas equações (IV.5) e (IV.8)

$$\bar{\phi} = \sum_{i=1}^8 N_i \phi_i$$

Mas (IV.7) permite escrever

$$\bar{\phi} = \left(\sum_{i=1}^8 N_i \right) \bar{\phi} \quad (\text{IV.9})$$

A única forma de satisfazer (IV.9), resulta em uma propriedade adicional para a família das funções N_i

$$\sum_{i=1}^8 N_i = 1 \quad (\text{IV.10})$$

Um EF munido desta propriedade será capaz de representar, quando necessário, o estado acima sugerido. As funções listadas em (IV.6) satisfazem plenamente (IV.10). Esta propriedade (IV.10) é conhecida como condição de completude (13). Em problemas clássicos que trabalham com deslocamentos, esta condição reflete a capacidade do elemento assimilar um deslocamento de corpo rígido sem se deformar, o que fisicamente está correto.

IV.3 - APLICAÇÃO DO ELEMENTO FINITO AO PROBLEMA DE DIFRAÇÃO E REFRAÇÃO DE ONDAS

Os três tipos de problemas formulados utilizam EF:

- (i) malha de EF truncada, fazendo uso de uma condição de não reflexão de ondas.
- (ii) malha de EF acoplada a EI para estudo da difração.
- (iii) malha de EF acoplada a EI para estudo da difração e refração.

Nos dois primeiros casos a profundidade é tida como constante. Os EF terão como parâmetro nodal apenas o potencial difratado. Em (iii) este parâmetro é o potencial total. Isto no entanto não afetará a equação que dá a matriz dos coeficientes. No decorrer deste item, esta afirmação tornar-se-á evidente.

O caso (i) é tomado como base para a aplicação do método numérico. Ao se dividir um domínio Ω em vários subdomínios Ω_m , que são os EF, o funcional Π dado em (III.24) po-

de ser reescrito como

$$\Pi = \sum_{m=1}^M \Pi_m \quad (\text{IV.11})$$

onde M é o número total de subdomínios Ω_m

Π_m é o funcional integrado em cada Ω_m

Aproximando-se a função admissível ϕ^D , em cada Ω_m , pela correspondente equação (IV.5), obtem-se um funcional Π^a aproximado dependente de NTNO parâmetros ϕ_j^D , com NTNO indicando o número total de nós presentes em $\Sigma\Omega_m$. Ω_m deve ser pequena suficiente para que a expansão polinomial dada por (IV.5) aproxime a solução do problema. Por outro lado deverá também ser "grande" de maneira a não discretizar exageradamente o domínio estudado, evitando-se manipular sistemas com um grande número de equações. Um ponto médio de equilíbrio é de extrema importância no aspecto computacional.

Reescrevendo (IV.11) para Π^a

$$\Pi^a = \sum_{m=1}^M \Pi_m^a \quad (\text{IV.11a})$$

ou ainda, para (III.24),

$$\begin{aligned} \Pi^a = & \sum_{m=1}^M \left\{ \frac{1}{2} \iint_{\Omega_m} \left[CCg \left(\nabla \left(\sum_{j=1}^8 N_j \phi_j^D \right)_m \right)^2 - \frac{\omega^2 CCg}{C} \left(\sum_{j=1}^8 N_j \phi_j^D \right)_m^2 \right] dx dy - \right. \\ & \left. - \int_{\Gamma_T^m} \frac{1}{2} CCg \left[iK \left(\sum_{j=1}^8 N_j \phi_j^D \right)_m^2 \right] d\Gamma_T + \int_{\Gamma_O^m} CCg \left[\phi_n^I \left(\sum_{j=1}^8 N_j \phi_j^D \right)_m \right] d\Gamma_O \right\} \end{aligned}$$

(IV.11b)

Recordando que

Ω_m = domínio do EF de número m

$(\sum_{j=1}^8 N_j \phi_j^D)_m$ = As funções N_j e os parâmetros ϕ_j^D que pertencem ao elemento m . Nem todos os elementos precisam ter as mesmas funções N_j .

Γ_T^m = Contorno do elemento m onde será aplicada a condição de radiação.

Γ_O^m = Contorno do elemento m em contato com os obstáculos (Γ_O)

O problema foi reduzido ao de extremizar um funcional Π^a em termos de um número finito (NTNO) de parâmetros (ϕ_j^D). Igualando a zero cada equação obtida na variação de Π^a com relação a um parâmetro ϕ_j^D , monta-se um sistema de equações lineares complexas. A variação em relação a um parâmetro nodal que pertença a apenas algumas regiões Ω_m (por exemplo $m = a, b$ (figura (IV.6))), implica na eliminação das parcelas relativas às outras Ω_m ($m \neq a, b$). Isto é devido ao fato de que os parâmetros nodais são independentes entre si, ou seja, ao ser feita uma variação com respeito a um deles, deve-se considerar os outros constantes. A extremização de Π^a com respeito a ϕ_K^D , sendo ϕ_K^D localizado em Θ , figura (IV.6), pode ser expressa por

$$\frac{\partial \Pi^a}{\partial \phi_K^D} = \frac{\partial \Pi_a^a}{\partial \phi_K^D} + \frac{\partial \Pi_b^a}{\partial \phi_K^D} = 0 \quad (\text{IV.12})$$

(IV.12) representa, no sistema, a K -ésima equação.

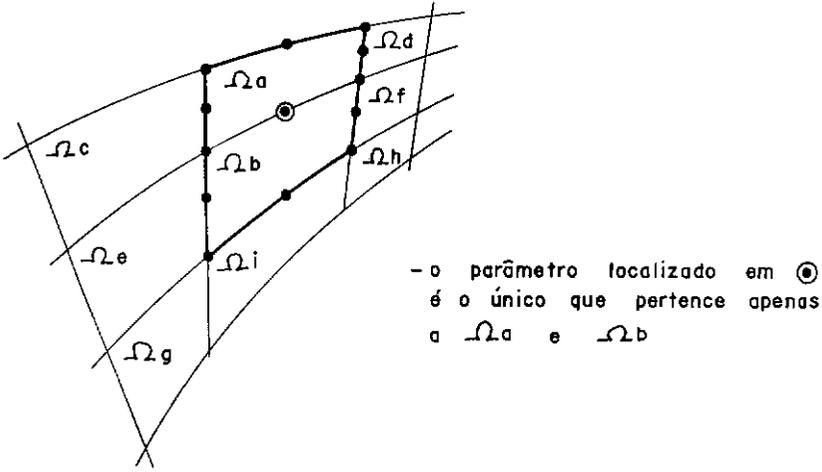


Figura (IV.6) = INFLUÊNCIA ENTRE NÓS

Para uma malha genérica de EF, seja a extremização de (IV.11b) com respeito a um ϕ_I qualquer, onde o índice I (maiúsculo) indica o número global (no sistema) do parâmetro ϕ_i . O índice D de difratado será omitido.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi^a}{\partial \phi_I} = & \sum_{m=1}^{\bar{M}} \left\{ \iint_{\Omega_m} \left[CCg \sum_{j=1}^8 (\nabla N_i \cdot \nabla N_j) \phi_j - \frac{\omega^2 CCg}{C} \sum_{j=1}^8 N_i N_j \phi_j \right] dx dy - \right. \\ & - \left. \oint_{\Gamma_T^m} CCg (iK) \left[\sum_{j=1}^8 N_i N_j \phi_j \right]_m d\Gamma_T + \right. \\ & + \left. \oint_{\Gamma_T^m} CCg \left[\phi_n^I N_i \right]_m d\Gamma_o \right\} = 0 \end{aligned} \quad (IV.13)$$

com \bar{M} indicando o número de elementos que contem ϕ_i (local) $\leftrightarrow \phi_I$ (global). Em (IV.13) aplicou-se a comutatividade entre os operadores Σ e ∇ . Fazendo o mesmo para Σ e as integrais vem

$$\begin{aligned}
& \bar{M} \quad 8 \\
& \Sigma \quad \{ \Sigma \quad \left[\iint_{\Omega_m} (CCg (\nabla N_i \cdot \nabla N_j) - \frac{\omega^2 Cg}{C} N_i N_j) \, dx dy - \right. \\
& m=1 \quad j=1 \\
& \left. - \int_{\Gamma_T^m} (CCg \, iK (N_i N_j)) \, d\Gamma_T \right] \phi_J \} = \\
& = - \Sigma_{m=1}^{\bar{M}} \int_{\Gamma_o^m} CCg \left[\phi_n^I N_i \right] \, d\Gamma_o \quad (IV.14)
\end{aligned}$$

Os parâmetros ϕ_J , por estarem com um índice maiúsculo (global), indicam as colunas, na equação I, de cada parcela $()_m$ por eles multiplicada. Para cada EF, existem 8 parâmetros ϕ_J , que podem ou não ser somados a parâmetros ϕ_J dos $(\bar{M} - 1)$ elementos restantes. Este seria o caso do parâmetro localizado em Θ no exemplo ilustrativo dado na figura (IV.6). A equação acima dá uma idéia quanto à configuração do sistema global de equações, que na forma matricial é dado por

$$\underline{K} \, \underline{\phi} = \underline{F} \quad (IV.15)$$

A matriz \underline{K} é a matriz dos coeficientes, $\underline{\phi}$ o vetor das incógnitas e \underline{F} o vetor dos termos independentes ou vetor de carga, de um sistema de equações COMPLEXAS.

As integrais de contorno Γ_T^m só serão computadas se o EF m estiver em contato com a fronteira mais externa, ou seja, se tiver nós ao longo de Γ_T . Seus valores são computados convenientemente na matriz dos coeficientes. Estes termos adicionais levam o nome de coeficientes de amortecimento hidrodinâmico.

As integrais de contorno Γ_0^m também só serão calculadas para elementos adjacentes aos obstáculos. Seus valores, no entanto, vão para o vetor de carga.

A matriz dos coeficientes MC deste EF será composta por três parcelas:

$$\underline{MC} = \underline{RH} - \omega^2 \underline{MH} - iK \underline{AH} \quad (\text{IV.16})$$

sendo a última complexa. A matriz global K será montada a partir do "espalhamento" dos coeficientes da MC de cada elemento. Em termos de programação é mais fácil montar inicialmente estas matrizes para depois montar o sistema principal. Isto equivale a calcular todas as integrais referentes a um mesmo Ω_m , para depois alocar corretamente nas equações do tipo (IV.14), que contenham este Ω_m . Comparando (III.14) com (III.16),

$$RH_{ij} = \iint_{\Omega_m} [CCg \nabla N_i \cdot \nabla N_j] dx dy$$

$$MH_{ij} = \iint_{\Omega_m} \frac{Cg}{C} (N_i N_j) dx dy \quad (\text{IV.17a,b,c})$$

$$AH_{ij} = \oint_{\Gamma_T^m} CCg (N_i N_j) d\Gamma_T$$

são os coeficientes das matrizes em (IV.16). PORTELA (1) atribuiu nomes de maneira a caracterizar fisicamente cada parcela.

RH = matriz de Rigidez Hidrodinâmica (relaciona as velocidades em um ponto i com a de um ponto j)

MH = matriz de Massa Hidrodinâmica (este nome se origina da ligação com a frequência angular ω)

AH = matriz de Amortecimento Hidrodinâmico (é incorporada apenas em casos de truncamento de malha)

A matriz de Amortecimento pode ser tomada como os coeficientes de um elemento quadrático unidimensional (elemento de radiação) disposto em Γ_T , que evita a reflexão das ondas difratadas.

A parcela que irá para o vetor de carga F se encontra à direita do sinal de igual em (IV.14)

$$F_I = - \sum_{m=1}^{\bar{M}} \int_{\Gamma_O^m} C C g \left[\phi_n^I N_i \right]_m d\Gamma_O \quad (IV.18)$$

Este termo não precisa ser armazenado por elemento podendo ser colocado diretamente na posição I do vetor F. Este termo é complexo devido à presença de ϕ_n^I .

As integrais em (IV.17a,b,c) e (IV.18) devem sofrer uma transformação de coordenadas em virtude de seus integrandos serem função das coordenadas naturais. As integrais duplas sofrerão transformações diferentes das integrais de contorno. O cálculo numérico de cada uma destas integrais é apresentado nos sub-itens seguintes.

IV.3.1 - Integração Numérica das Matrizes de Rigidez e Massa Hidrodinâmica

Quando se faz um programa de EF, costuma-se fazer a montagem da matriz de cada elemento, para em seguida, fazendo uso da técnica de armazenamento a ser adotada, espalhar seus coeficientes no sistema global.

Tanto a matriz \underline{RH} como \underline{MH} são calculadas por integrais duplas. Juntando as duas em uma única integral, para cada i e j ($i, j = 1$ a 8), obtem-se um coeficiente

$$\bar{K}_{ij} = \iint_{\Omega_m} \left[CCg \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) - \frac{\omega^2 Cg}{C} N_i N_j \right] dx dy \quad (IV.19)$$

As funções N_i e N_j são polinômios em ξ e η . Suas derivadas cartesianas são obtidas através de (IV.3). Inicialmente deve-se estimar a matriz Jacobiana para proceder ao cálculo de sua inversão.

Os termos da matriz Jacobiana em (IV.2) podem ser aproximados de acordo com (IV.4). Assim

$$J = \begin{bmatrix} 8 \\ \sum_{i=1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \end{bmatrix} [x_i \ y_i] \quad (IV.20)$$

Esta matriz é de ordem 2 ($x, y \rightarrow \xi, \eta$). Obtem-se a inversa pelo processo da adjunta (17). O determinante de J também é utilizado na transformação de coordenadas (IV.21), dada pelo cálculo diferencial.

$$dx dy = |J| d\xi d\eta \quad (IV.21)$$

Nota-se que $|J|$, segundo a aproximação (IV.20), resulta em um polinômio em ξ e η , assim como $\frac{N_i}{\partial x}$ e $\frac{N_i}{\partial y}$.

Os elementos isoparamétricos quadráticos tem, como característica principal, o poder de serem distorcidos com

a liberdade, quase que total, de assumir quaisquer curvas do segundo grau. A cada configuração geométrica, um diferente Jacobiano é gerado. Uma malha irregular implica em uma série de EF com diferentes transformações de mapeamento $(x,y \rightarrow \xi,\eta)$. A única forma de automatizar o cálculo da integral se faz por um método numérico de integração. A quadratura de Gauss, amplamente utilizada no MEF (13), será adotada. Nesta, o integrando é calculado em uma série de pontos pré-estipulados, sendo multiplicado pelo respectivo peso, obtidos em tabelas para cada ordem de integração. O número de pontos indica a ordem arbitrada. A quadratura de Gauss integra de maneira exata, com n pontos, um polinômio de grau $2n-1$. Assim as integrais duplas serão substituídas por somatórios: um para a direção ξ e outro para η . Reescrevendo (IV.19) utilizando (IV.21) e os conceitos acima vem:

$$\bar{K}_{ij} = \sum_{r=1}^{NINT} \sum_{s=1}^{NINT} \{ [CCg(\nabla N_i(\xi_r, \eta_s) \cdot \nabla N_j(\xi_r, \eta_s)) - \frac{\omega^2 Cg}{C} N_i(\xi_r, \eta_s) N_j(\xi_r, \eta_s)] |J| PESO(r) PESO(s) \} \quad (IV.22)$$

onde $NINT$ = ordem de integração
 (ξ_r, η_s) = pontos de integração
 $PESO(r)$ = peso para o ponto ξ_r
 $PESO(s)$ = peso para o ponto η_s
 $|J|$ = é o determinante da matriz Jacobiana a ser calculado em (ξ_r, η_s)

Algumas observações devem ser realçadas:

- (i) A quadratura de Gauss ou integração de Gauss-Legendre é especialmente formulada para domínios definidos em $[-1, 1]$.
- (ii) Em se tratando de uma região de fundo constante os parâmetros CCg e $\frac{\omega^2 Cg}{C}$ não variam de elemento para elemento. Na programação isto deve ser levado em conta.

No início do item (IV.3) foram enunciados três tipos de problemas. O caso (i), em que a malha de EF é truncada, foi desenvolvido integralmente. O caso (ii) é muito parecido. Em se tratando de um problema de difração, o funcional a ser utilizado (eq. (III.10)) apresenta como única diferença a eliminação da integral no contorno Γ_T . Elementos Infinitos serão formulados e acoplados aos EF simplesmente fazendo aproximações adequadas em algumas das subregiões Ω_m . Estes elementos serão estudados no item (IV.4). Os EF, por sua vez, são exatamente iguais aos do caso (i), tendo então seus coeficientes dados por (IV.22).

No caso (iii) o fundo do meio fluido apresenta variações na região Ω_I , implicando no fenômeno de refração. A onda incidente fica sujeita a certas mudanças ao entrar na região onde se dão estas variações de profundidade. O número da onda K , calculado pela equação de dispersão (IV.23a), terá seu valor alterado, de forma discreta, de acordo com cada profundidade h dada no programa. Sejam as seguintes equações:

$$\omega^2 = Kg \tanh (Kh) \quad (IV.23a)$$

$$CCg = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{K}\right)^2 \left(1 + \frac{2Kh}{\sinh (Kh)}\right) \quad (IV.23b)$$

$$\frac{\omega^2 Cg}{C} = \frac{CCg}{K^2} \quad (\text{IV.23c})$$

Os parâmetros CCg e $\omega^2 Cg/C$, que dependem de K e h , também variam. Esta seria a primeira diferença deste EF para o apresentado em (i) e (ii). Na programação CCg e $\omega^2 Cg/C$ serão calculados diretamente nos pontos de integração, devendo a profundidade h , que é dada por $n\bar{o}$, ser interpolada nestes pontos. A resolução de (IV.23a) para este h se dá por Newton-Raphson, conforme indicado no capítulo II. Este é o procedimento correto de sensibilizar um elemento bi-dimensional para variações de profundidade.

O parâmetro nodal neste caso não poderá ser apenas o potencial difratado. É imperativo trabalhar-se com o potencial total. Isto está explícito no funcional ΠI para o domínio interno ΩI , indicado pela equação (III.27a). No caso (i) todo o domínio Ω foi discretizado com EF. Aqui apenas o domínio ΩI terá EF. Não há motivos para discretizar o potencial total, dentro de um EF, com uma expressão diferente da utilizada para o difratado. Então

$$\phi_p = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi_p, \eta_p) \phi_i \quad (\text{IV.24})$$

onde ϕ_i é o potencial total em cada $n\bar{o}$ i .

Eliminando-se em (III.27a) a integral de contorno, em face dos obstáculos serem impermeáveis, e aplicando (IV.24) o processo de extremização em termos de um ϕ_i qualquer, levará a uma expressão idêntica a (IV.19), para os coeficientes da matriz dos elementos. O funcional aproximado é dado em (IV.25).

$$\Pi I^a = \sum_{m=1}^{MF} \left\{ \frac{1}{2} \iint_{\Omega_m} [C C g (\nabla \sum_{j=1}^8 N_j \phi_j)_m]^2 - \frac{\omega^2 C g}{C} (\sum_{j=1}^8 N_j \phi_j)_m^2 \right\} dx dy \quad (IV.25)$$

onde MF = número de EF

A integração numérica será feita por Gauss-Legendre, possibilitando assim a utilização de (IV.22).

O funcional ΠE para a região externa ΩE , será tratado de uma forma diferente, devido ao emprego de EI.

O contorno Γ_c (figura (III.1)) determinará a interface entre EF e EI. Num problema com refração haverá a necessidade de se efetuar uma compatibilização de parâmetros no o dais ao longo de Γ_c . Seja o exemplo ilustrativo da figura (IV.7).

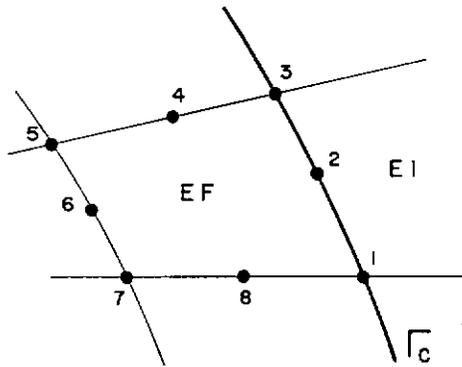


Figura (IV.7) = CONTORNO INTERMEDIÁRIO Γ_c

Admitindo que 1, 2, ..., 8 sejam os números globais dos nós, as equações 1, 2, ..., 8 do sistema podem ser expressas como

$$\bar{K}_{11}\phi_1 + \hat{K}_{11}\phi_1^D + \bar{K}_{12}\phi_2 + \hat{K}_{12}\phi_2^D + \bar{K}_{13}\phi_3 + \hat{K}_{13}\phi_3^D + \bar{K}_{14}\phi_4 + \dots + \bar{K}_{18}\phi_8 + \dots = F_1$$

$$\bar{K}_{21}\phi_1 + \hat{K}_{12}\phi_1^D + \bar{K}_{22}\phi_2 + \hat{K}_{22}\phi_2^D + \bar{K}_{23}\phi_3 + \hat{K}_{23}\phi_3^D + \bar{K}_{24}\phi_4 + \dots + \bar{K}_{28}\phi_8 + \dots = F_2$$

$$\bar{K}_{81}\phi_1 + \hat{K}_{81}\phi_1^D + \bar{K}_{82}\phi_2 + \hat{K}_{82}\phi_2^D + \bar{K}_{83}\phi_3 + \hat{K}_{83}\phi_3^D + \bar{K}_{84}\phi_4 + \dots + \bar{K}_{88}\phi_8 + \dots = F_8$$

(IV.26)

onde os \hat{K}_{ij} são coeficientes provenientes dos elementos infinitos, que trabalham com o potencial difratado ϕ^D por estarem definidos em ΩE . Um artifício extremamente simples consiste em colocar a interface Γ_c de tal maneira que ΩI contenha uma faixa de profundidade constante, permitindo que nos nós mais externos da última camada de EF o potencial total seja separado em incidente e difratado. No exemplo da figura (IV.7) isto implica em

$$\phi_1 = \phi_1^I + \phi_1^D$$

$$\phi_2 = \phi_2^I + \phi_2^D$$

$$\phi_3 = \phi_3^I + \phi_3^D$$

(IV.27)

Substituindo (IV.27) em (IV.26), surgirá uma nova parcela de carga ΔF_I .

$$(\bar{K}_{11} + \hat{K}_{11})\phi_1^D + (\bar{K}_{12} + \hat{K}_{12})\phi_2^D + (\bar{K}_{13} + \hat{K}_{13})\phi_3^D + \bar{K}_{14}\phi_4 + \dots + \bar{K}_{18}\phi_8 + \dots = F_1 - \Delta F_1$$

$$(\bar{K}_{21} + \hat{K}_{21})\phi_1^D + (\bar{K}_{22} + \hat{K}_{22})\phi_2^D + (\bar{K}_{23} + \hat{K}_{23})\phi_3^D + \bar{K}_{24}\phi_4 + \dots + \bar{K}_{28}\phi_8 + \dots = F_2 - \Delta F_2$$

$$(\bar{K}_{81} + \hat{K}_{81})\phi_1^D + (\bar{K}_{82} + \hat{K}_{82})\phi_2^D + (\bar{K}_{83} + \hat{K}_{83})\phi_3^D + \bar{K}_{84}\phi_4 + \dots + \bar{K}_{88}\phi_8 + \dots = F_8 - \Delta F_8$$

(IV.28a)

com

$$\begin{aligned}
 \Delta F_1 &= \bar{K}_{11} \frac{I}{1} + \bar{K}_{12} \frac{I}{2} + \bar{K}_{13} \frac{I}{3} \\
 \Delta F_2 &= \bar{K}_{21} \frac{I}{1} + \bar{K}_{22} \frac{I}{2} + \bar{K}_{23} \frac{I}{3} \\
 \hline
 \Delta F_8 &= \bar{K}_{81} \frac{I}{1} + \bar{K}_{82} \frac{I}{2} + \bar{K}_{83} \frac{I}{3}
 \end{aligned}
 \tag{IV.28b}$$

Em termos de programação estes procedimentos se tornam mais simples ainda. Para obtenção dos termos $(\bar{K}_{ij} + \hat{K}_{ij})$ nada precisa ser feito pois será consequência natural do espalhamento das matrizes de EF e EI. Deve-se apenas ter cuidado com o controle de quais incôgnitas são potenciais difratados e quais são potenciais totais. Já as parcelas (IV.28b) podem ser obtidas ao final da montagem da matriz de cada EF com um lado em Γ_c .

IV.3.2 - Integração Numérica da Matriz de Amortecimento Hidrodinâmico

O cálculo desta matriz somente se fará necessário em EF com um de seus lados sobre o contorno Γ_T (figura (IV.8)). A numeração destes elementos deve seguir a convenção da figura (IV.8). Assim sabe-se que para este tipo de caso os 3 primeiros nós estão sobre Γ_T , ou seja no lado $\eta = -1$. A integral em (IV.17c) poderá ser efetuada em ξ , sendo que os nós ($i = 4, 5, 6, 7, 8$) não contribuirão pois

$$N_i(\xi, -1) = 0 \quad i = 4, 5, \dots, 8 \tag{IV.29}$$

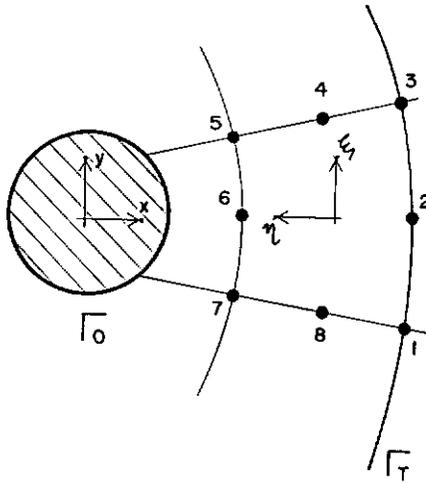


Figura (IV.8) = CONTORNO DE TRUNCAMENTO Γ_T

Nove coeficientes comporão uma matriz 3×3 , fazendo com que alguns autores (1, 18) a classifiquem como a matriz de um elemento unidimensional quadrático, tido como "elemento de radiação".

A integral (IV.17c) é extremamente simples, necessitando apenas uma transformação de $d\Gamma_T$ para $d\xi$, caracterizada como uma mudança de escala. Seja a figura (IV.9)

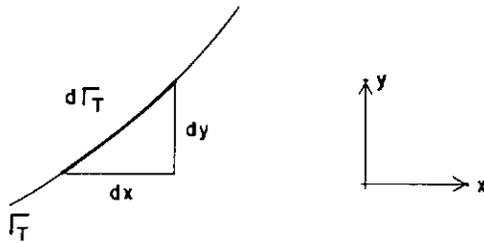


Figura (IV.9) = GEOMETRIA PARA TRANSFORMAÇÃO DE ESCALAS

onde

$$d\Gamma_T = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad (IV.30)$$

Sabe-se que

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta \quad (\text{IV.31})$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta$$

em razão da integral ser ao longo de ξ . Substituindo (IV.31) em (IV.30)

$$d\Gamma_T^m = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2} d\xi \quad (\text{IV.32a})$$

ou

$$d\Gamma_T^m = T d\xi \quad (\text{IV.32b})$$

definindo uma transformação de coordenadas T . Esta pode ser calculada numericamente de forma análoga ao que foi visto para a primeira linha da matriz Jacobiana em (IV.20). Assim

$$d\Gamma_T^m \approx \bar{T}(\xi, -1) d\xi \quad (\text{IV.33a})$$

com

$$\bar{T}(\xi, -1) = \left[\left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \right)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{IV.33b})$$

Em seguida procede-se a integração numérica de Gauss-Legendre para a direção ξ , obtendo-se a fórmula dos coeficientes da matriz de amortecimento.

$$AH_{ij} = \sum_{r=1}^{NINT} CCg \left[N_i(\xi_r, -1) N_j(\xi_r, -1) \right]_m \bar{T}(\xi_r, -1) PESO(r)$$

(IV.34)

sendo NINT a ordem de integração adotada.

IV.3.3 - Parcela de Carga Devido à Impermeabilidade dos Obstáculos

Analogamente ao ocorrido para o amortecimento, só será feito o cômputo da integral para EF com nós sobre Γ_0 . A convenção para o ordenamento dos nós do EF é feita de acordo com a figura (IV.8). Desta forma os nós 5, 6 e 7 estarão sobre Γ_0 , e a integral (IV.35) será em ξ , mas com $\eta = +1$.

$$F_I = - \oint_{\Gamma_0^m} CCg \left[\phi_{n_i}^I \right] d\Gamma_0 \quad (IV.35)$$

FI indica a contribuição de carga do elemento m na equação I.

No integrando existe uma derivada normal do potencial incidente. A equação deste potencial é conhecida. Mas como será feita uma integração numérica, é necessário calcular ϕ_n^I em cada ponto de integração. Isto pode ser feito por etapas:

- (i) Cálculo da derivada normal nos nós 5, 6 e 7 de um elemento. Seja a equação do potencial incidente

$$\phi^I = - \frac{igH}{2\omega} e^{i(Kx \cos \gamma + Ky \sin \gamma)} \quad (IV.36a)$$

as derivadas cartesianas podem ser prontamente calculadas, nos nós indicados, e aplicadas na equação (IV.36a)

$$\phi_n^I = \phi_x^I nx + \phi_y^I ny \quad (IV.36b)$$

onde nx e ny são as coordenadas ou cossenos diretores do vetor normal unitário em cada nó de Γ_0^m . A convenção tradicional indica que a normal é positiva para fora do do-

mínio em estudo. Conseqüentemente o vetor normal em um nó será perpendicular a Γ_0^m e seu sentido será para fora de Ω_m , ou seja, para dentro do obstáculo.

(ii) Cálculo da derivada normal no ponto de integração. A etapa (i) é realizada três vezes, uma para cada nó em Γ_0^m . Foram obtidas três derivadas normais do potencial incidente, que podem ser chamadas de ϕ_n^I , ϕ_n^I e ϕ_n^I . É perfeitamente lícito se interpolar estas derivadas da mesma forma que os parâmetros nodais ϕ^D . Para qualquer ponto ao longo de Γ_0^m (lado $n = +1$),

$$\phi_n^I = \sum_{i=5}^7 N_i(\xi_p, +1) \phi_n^I \quad (\text{IV.37})$$

Um outro caminho que poderia ser adotado seria calcular diretamente ϕ_n^I nos pontos de integração. Para tal bastaria calcular (IV.36b) com

$$\begin{aligned} x_p &= \sum_{i=5}^7 N_i(\xi_p, 1) x_i \\ y_p &= \sum_{i=5}^7 N_i(\xi_p, 1) y_i \end{aligned} \quad (\text{IV.38})$$

No entanto a parcela harmônica em (IV.36a) se transformaria em

$$i(K x_p \cos \gamma + K y_p \sin \gamma)$$

e

onde x_p e y_p são polinômios quadráticos em ξ . A integração analítica de cossenos e senos com argumentos quadráticos, da forma descrita, é por vezes impossível.

A transformação de coordenadas é análoga ao caso do amortecimento. De (IV.33a) vem

$$d\Gamma_o^m = \bar{T}(\xi, +1) d\xi \quad (IV.39)$$

Integrando numericamente (IV.35), fazendo uso de (IV.37) e (III.39), obtem-se os coeficientes da parcela de carga.

$$F_I = - \sum_{r=1}^{NINT} \{CCg \left[\phi_n^I(\xi_r, 1) N_i(\xi_r, 1) \right] \bar{T}(\xi_r, 1) PESO(r) \}_m \quad (IV.40)$$

Este termo de carga se presta aos casos (i) e (ii) indicados no início do item (IV.3).

IV.4 - APLICAÇÃO DE ELEMENTOS INFINITOS À DISCRETIZAÇÃO DE MEIOS INFINITOS

IV.4.1 - Introdução

Na formulação matemática de certos modelos físicos é muitas vezes conveniente assumir que o domínio do problema se estende ao infinito. Nos últimos anos, o estudo deste tipo de problema pelo MEF tem se dado por diferentes técnicas, cada qual com suas vantagens e desvantagens. As mais importantes são o simples truncamento da malha (19,20), o uso de soluções analíticas para as regiões distantes ("far-field solution") (6,7,21,22), o Método dos Elementos de Contorno (23,24), além dos Elementos Infinitos (25-27).

Uma das características comuns aos EF é que

uma quantidade é sempre integrada num domínio finito; no caso dos isoparamétricos o intervalo é $[-1, 1]$. Aparentemente não há razão para que esta integral não se dê em um domínio aberto, se a quantidade integrada se mantiver limitada. Assim um EI guardará em sua concepção uma certa semelhança com os EF. Sua filosofia é basicamente a mesma, a menos do processo de interpolação, que agora tanto para as coordenadas como para os parâmetros nodais, será feito ao longo de uma região semi-infinita. Em cada elemento será estipulada uma origem a partir da qual o elemento se estende ao infinito, em pelo menos uma de suas direções. Existem elementos (25), infinitos em duas direções. Este tipo pode ser facilmente implementado uma vez que se domina o elemento na forma aqui apresentada. Um exemplo de EI é dado na figura (IV.10).

Um dos grandes atrativos na utilização de EI reside no fato de que podem ser prontamente incorporados a qualquer programa de EF, além do que não destroem a simetria nem a característica de banda da matriz do sistema.

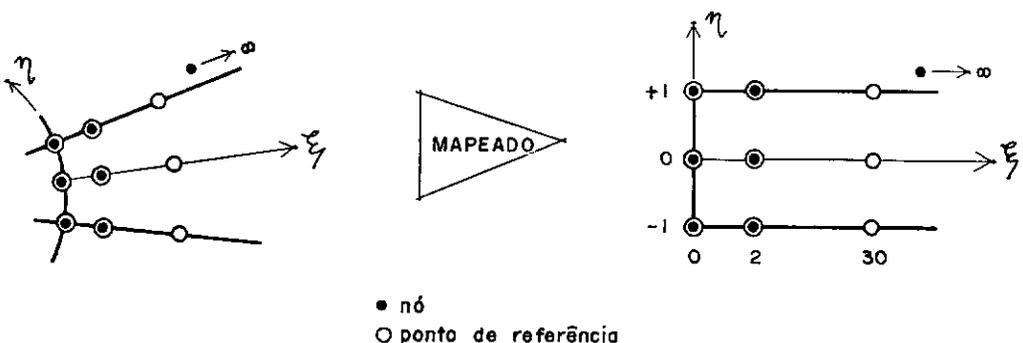


Figura (IV.10) = EI LAGRANGEANO QUADRÁTICO

Existem vários EI na literatura, para diferentes tipos de problemas. Todos apresentam qualidades e limitações. O elemento a ser desenvolvido neste trabalho tem o mérito de trazer consigo a maior parte das vantagens, sendo assim um novo e eficiente EI. De maneira a evidenciar seus pontos favoráveis, será dado um pequeno histórico da evolução dos EI, alguns com aplicação à difração e refração de ondas.

IV.4.2 - Pequeno Histórico dos Elementos Infinitos

O EI introduzido por BETTESS (25), foi concebido com a intenção de modelar o domínio infinito de um problema periódico, a partir de uma certa distância da origem de onde já se tenha uma noção quanto à forma da solução do problema. Este elemento, no entanto, só pode ser usado nos casos em que a função a ser integrada é limitada. Bettess então acoplou às tradicionais funções de interpolação de elementos isoparamétricos um termo de decaimento. De acordo com o problema em questão utilizam-se decaimentos do tipo $1/r$ ou decaimentos exponenciais. Com isso a integral imprópria assume um valor finito.

Bettess apresentou a teoria, que seria aplicada a problemas dinâmicos (periódicos) ainda em 1977. No entanto o primeiro trabalho, já levando em conta o nome elemento infinito, pertence a UNGLESS (1973) (28).

BETTESS e ZIENKIEWICZ (29) desenvolveram um EI paramétrico quadrático Langrangeano para aplicar ao problema de refração e difração de ondas (figura (IV.10)). O elemento tem 3 pontos de referência em cada direção natural, nos quais as co-

ordenadas globais (x,y) são especificadas. Para a construção de uma representação paramétrica os terceiros pontos de referência da direção ξ são colocados a uma distância grande mas finita. Valores arbitrários são dados a ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 . Bettess e Zienkiewicz optaram por 0,2 e 30 respectivamente. Isto é feito de maneira que a matriz Jacobiana de transformação de coordenadas seja estimada através de pontos "longe" da origem. Segue-se então a uma mudança de escala em ξ , de maneira que comprimentos nesta direção estejam na escala global, possibilitando a "calibração" das funções de decaimento. Seja s , a nova coordenada na direção ξ , dada na figura (IV.11)

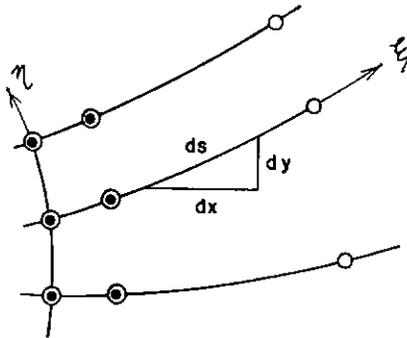


Figura (IV.11) = GEOMETRIA PARA A TRANSFORMAÇÃO
DE COORDENADAS $\xi \rightarrow s$

A transformação a ser obtida é análoga a (IV.32a), podendo-se escrever

$$ds = T d\xi \quad (\text{IV.41})$$

De maneira a evitar uma dominância das parcelas ligadas a $\xi_3 = 30$, toma-se uma média \bar{T} da transformação T . No novo sistema s , os pontos de referência ficam dados por

$$s = \bar{T} \xi \quad (\text{IV.42a})$$

$$\text{com } \bar{T} = \frac{T(\xi_1) + T(\xi_2) + T(\xi_3)}{3} \quad (\text{IV.42b})$$

As funções de interpolação de parâmetros, para a direção s , tem a seguinte expressão geral

$$p(s) e^{-s/L} e^{iKs} \quad (\text{IV.43})$$

onde $p(s)$ = polinômio de Lagrange em s

L = comprimento de decaimento L

K = número da onda

A justificativa de (IV.43) é bastante simples:

- (i) o termo polinomial $p(s)$ dá o poder de variação para s finito.
- (ii) o termo exponencial de decaimento $e^{-s/L}$ faz com que a função interpolada amortença, para grandes valores de s . O comprimento de decaimento L , a ser ajustado em cada problema estudado, dá a severidade do decaimento. Deve-se notar que com este termo a função de forma satisfaz a condição de Sommerfeld.
- (iii) o termo harmônico complexo faz com que a função interpolada tenha uma forma senoidal semelhante ao tipo básico de um potencial de onda. É oportuno lembrar a identidade de Euler.

$$e^{iks} = \cos Ks + i \text{ sen } Ks \quad (\text{IV.44})$$

sendo a periodicidade igual a

$$\lambda = \frac{2\pi}{K} \quad (\text{IV.45})$$

que é o comprimento da onda incidente. Desta forma a onda difratada em regiões distantes da perturbação, tem um comprimento semelhante ao da onda incidente.

Este elemento possui 9 nós, sendo que 3 estão "localizados no infinito" (figura (IV.10)). Como o potencial difratado é nulo nestes nós, estes são supérfluos pois o valor do parâmetro nodal é prescrito e igual a zero. O decaimento da função de forma garante esta prescrição. A função de forma referente a um nó i , onde o n -ésimo nó está no infinito, é

$$Ns_i = e^{\frac{(s_i - s)}{L}} e^{iks} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq i}}^{n-1} \left(\frac{s_q - s}{s_q - s_i} \right) \quad (\text{IV.46})$$

O último termo, um produtório, é a fórmula geral de um polinômio de Lagrange $p(s)$. Para problemas onde for necessário computar os nós no infinito, a função de forma destes nós, para a direção s é

$$Ns_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} N_i \quad (\text{IV.47})$$

Esta é uma maneira bastante interessante de definir estas funções pois além de ser mantida a propriedade

$$\begin{aligned} N_\eta &\rightarrow 1 & s &\rightarrow \infty \\ N_\eta &= 0 & \text{nos outros nós} \end{aligned}$$

obtem-se

$$\sum_{i=1}^n Ns_i = 1 \quad (\text{IV.48})$$

As funções de forma finais são obtidas multiplicando-se convenientemente as funções de cada direção umas pelas outras. Utilizando o esquema da figura (IV.12) determinam

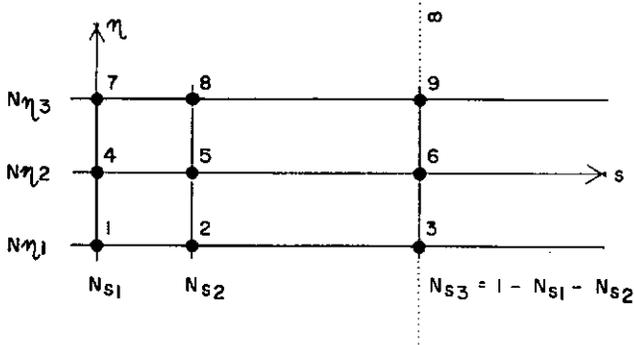


Figura (IV.12) = MONTAGEM DAS FUNÇÕES DE FORMA DO EI LAGRANGEANO

-se as funções de forma $M_i(s, \eta)$ por

$$\begin{aligned}
 M_1(s, \eta) &= N_{s_1}(s) N_{\eta_1}(\eta) \\
 M_2(s, \eta) &= N_{s_2}(s) N_{\eta_1}(\eta) \\
 &\text{-----} \\
 M_9(s, \eta) &= N_{s_3}(s) N_{\eta_3}(\eta)
 \end{aligned}
 \tag{IV.49}$$

Aplica-se o teste da completude dado em (IV.10)

$$\sum_{j=1}^9 M_j = N_{\eta_1}(N_{s_1} + N_{s_2} + N_{s_3}) + \dots + N_{\eta_3}(N_{s_1} + N_{s_2} + N_{s_3})
 \tag{IV.50}$$

N_{η_i} são as funções de forma tradicionais para $\eta \in [-1, 1]$

$$\text{como } \sum_{i=1}^3 N_{s_i} = 1 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^3 N_{\eta_i} = 1 \quad \text{então}$$

$$\sum_{j=1}^9 M_j = 1
 \tag{IV.51}$$

Este elemento pode reproduzir um estado equipotencial virtual. Dentro da presente teoria o único estado equipotencial possível seria com um potencial nulo. Outros não podem ser configurados devido a presença do decaimento, mas a característica acima mostra que matematicamente pode-se incorporá-lo, com poucas mudanças. A integração numérica apresentada em (29) se faz através de uma fórmula modificada de Newton-Cotes. Como alternativa pode-se utilizar o esquema de Gauss-Laguerre, especialmente formulado e otimizado para domínios infinitos. As abscissas e pesos de integração são dados por RABINOWITZ e WEISS (30) para um máximo de 32 pontos. Os resultados obtidos foram considerados apenas razoáveis. O cálculo do decaimento L será omitido para que possa ser enunciado juntamente com o EI formulado neste trabalho.

Uma série de EI foram surgindo na literatura, cada qual apresentando uma novidade, em decorrência da aplicação a ser feita. BEER e MEEK (31) apresentam um elemento paramétrico com duas grandes novidades:

- (i) A geometria do elemento é mapeada em uma de suas direções com funções com singularidades em $\xi = +1$. Estas funções podem ser expressas por

$$N_i(\xi) = \frac{\bar{N}_i(\xi)}{(1-\xi)} \quad (\text{IV.52})$$

sendo \bar{N}_i uma função de interpolação qualquer. Observa-se que quando $\xi \rightarrow 1$, $N_i \rightarrow \infty$. Assim o elemento, em sua forma mapeada (em coordenadas naturais), fica definido como um elemento finito.

(ii) As incógnitas são discretizadas somente ao longo do lado finito do elemento. Isto é uma grande vantagem pois o elemento não introduzirá novas equações no sistema global.

O decaimento é do tipo $1/r$ e o problema é estático, ao contrário do elemento em (29). Isto representa uma grande facilidade em termos de formulação e programação. O domínio sendo mapeado para uma configuração finita, permite o uso da integral numérica de Gauss-Legendre.

Outro EI com decaimento $1/r$ é apresentado por LYNN e HADID (32). O elemento é extremamente simples, é estático, mas sendo setorial (sua geometria é um setor circular) permite a integração analítica de seus coeficientes, em coordenadas polares.

CHOW e SMITH (33) propuseram um EI, semelhante ao de Bettess e Zienkiewicz, fazendo uso de funções de interpolação Serendipity que tem se mostrado mais populares que as Lagrangeanas. A utilização da família Serendipity decorre de um segundo trabalho de Bettess (26) para EI. As funções para a direção infinita são dadas diretamente em ξ . O problema é periódico e um fator L/ξ_i é utilizado no lugar do tradicional comprimento de decaimento L . Este fator evita o cálculo do L mas implica em uma estimativa arbitrária de L/ξ_i . Os resultados, no entanto, são pouco sensíveis a este valor. A integração numérica é feita através de Newton-Cotes modificado (29), com pequenas modificações quanto aos pontos de integração.

BURAGOHAİN e AGRAWAL (34) apresentam um ele

mento setorial como o de Lynn e Hadid mas com duas diferenças:

- i) o elemento tem decaimento exponencial
- ii) o elemento é periódico (exponencial complexo)

É dada uma fórmula trivial para o cálculo do comprimento de decaimento L , baseada em critérios de energia, como será visto a diante. A maioria das integrais são resolvidas analiticamente, sendo as restantes calculadas por Simpson. Nestas são utilizados aproximadamente 20 pontos por comprimento de onda.

Para finalizar, recentemente ZIENKIEWICZ et al (35) apresentaram um elemento muito parecido com o de BEER e MEEK (31), com a diferença de ser realmente isoparamétrico. Uma extensão deste é dada em (36) sendo que agora o problema é periódico e o elemento retorna à condição de paramétrico. Problemas de refração e difração de ondas foram estudados e os resultados são da mesma qualidade que em (29). As integrações são feitas tomando-se cuidados especiais.

IV.4.3 - Teste de Consistência do EI

Um novo EF, ao ser formulado, além de preencher certos requerimentos, deve passar por testes que comprovem a convergência da solução com o refinamento da malha. O método do "PATCH-TEST", enunciado primeiramente por IRONS (11), surgiu para testar EF, inclusive os não-conformes. Com EI o patch-test não é aplicável já que o refinamento de uma malha não necessariamente leva a um "estado constante" no EI, podendo ainda fornecer resultados sem o menor significado físico. BETTESS et al (37) desenvolveram uma maneira de verificar se um EI se presta a resol-

ver determinado tipo de problema. O teste se resume em estudar as aproximações para a direção infinita. Assim constroi-se uma equação diferencial ordinária (uma variável independente) com as mesmas características da equação original. Deve-se notar que será feito um modelo unidimensional análogo ao bidimensional. O método dos EI é então introduzido, para resolver a nova equação, fazendo-se uma análise crítica da solução numérica.

Quanto aos requerimentos referidos acima, MEDINA (38) estabeleceu que, dada uma equação de equilíbrio com derivadas de ordem até p , um elemento:

- i) é COMPATÍVEL com respeito a outro elemento adjacente se, na interface comum, as incógnitas são expandidas com as mesmas funções, sendo contínuas até a ordem $p-1$.
- ii) é COMPLETO quando as funções de forma são contínuas e suas derivadas ao longo do elemento, conforme o tamanho do elemento tende para zero (no limite).
- iii) infinito é LIMITADO quando todas as derivadas das funções de forma, até a ordem p , desaparecem no infinito.
- iv) infinito em propagação de ondas, deve satisfazer a condição de Sommerfeld.

Na prática as condições i) e ii) não precisam ser satisfeitas, em especial ii) não se presta a EI. A precisão na direção infinita só pode ser melhorada se forem selecionadas funções de forma mais realísticas, ou acrescentar-se mais nós. Se um EI é compatível com respeito a um EF adjacente, então o EI é dito CONSISTENTE.

A seguir, por meio de um exemplo numérico, será apresentado integralmente o teste de consistência, mostrando sua importância na análise crítica de alguns aspectos, como por exemplo a matriz Jacobiana.

Seja a equação diferencial

$$\phi_{xx} - (iK - 1)\phi = 0 \quad (\text{IV.53})$$

$$\text{que tem como solução } \phi(x) = e^{-x} e^{ikx} \quad (\text{IV.54})$$

Assumindo $x \in [0, \infty)$, as condições de contorno do problema (IV.53) são

$$\phi_x(0) = (iK - 1) \quad (\text{IV.55a})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi = \lim_{x \rightarrow \infty} \phi_x = 0 \quad (\text{IV.55b})$$

O problema está definido. É montado um funcional de maneira a resolver a equação (IV.53) pelo Método de Rayleigh-Ritz.

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [\phi_x^2 + (iK - 1)\phi^2] dx + (iK - 1)\phi \Big|_{x=0} \quad (\text{IV.56})$$

O termo calculado em $(x = 0)$ é colocado no funcional de forma a ser satisfeita a condição natural (IV.55a).

Um EI paramétrico de 2 nós é utilizado para discretizar o problema (figura (IV.13)).

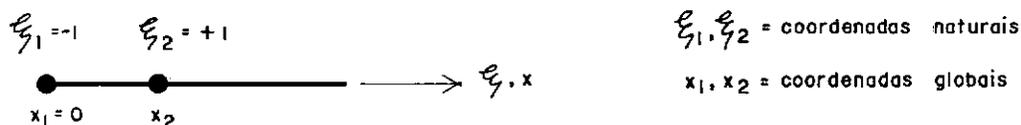


Figura (IV.13) = EI UNIDIMENSIONAL (TESTE)

As funções de forma para interpolar as coordenadas são

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= (1 - \xi)/2 \\ N_2(\xi) &= (1 + \xi)/2 \end{aligned} \quad (\text{IV.57})$$

A coordenada de um ponto $P(\xi_p)$ qualquer, do elemento, é dada por

$$x = \sum_{j=1}^2 N_j x_j \quad (\text{IV.58})$$

A transformação de coordenadas, dada pela matriz Jacobiana (aqui de ordem 1 \rightarrow um escalar), é $dx = Jd\xi$, com

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{dN_1}{d\xi} x_1 + \frac{dN_2}{d\xi} x_2 \quad (\text{IV.59})$$

Substituindo (IV.57) em (IV.59)

$$J = \frac{x_2 - x_1}{2} \quad (\text{IV.60})$$

Estando ciente de que o aumento de nós de um EI não necessariamente leva a melhores resultados, pode-se fazer uso de apenas um nó para os parâmetros. O elemento apresentado por BETTESS e ZIENKIEWICZ (29) tem nós e pontos de referência com localizações distintas. Isto elimina, em parte, qualquer dúvida que possa surgir com respeito ao uso de um número de pontos de referência maior do que o número de nós. Os pontos de referência tem como função única e exclusiva a de definir uma matriz Jacobiana consistente.

$$\phi = \sum_{j=1}^1 M_j \phi_j = M_1 \phi_1 \quad (\text{IV.61})$$

onde a função de forma M_1 e suas derivadas são dadas abaixo.

$$M_1(\xi) = e^{-\frac{(\xi+1)}{L}} e^{ik(\xi+1)} \quad (\text{IV.62a})$$

$$\frac{dM_1}{d\xi} = \left(ik - \frac{1}{L}\right) M_1 \quad (\text{IV.62b})$$

$$\frac{dM_1}{dx} = \frac{dM_1}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{dM_1}{d\xi} J^{-1} = \frac{2}{(x_2 - x_1)} \frac{dM_1}{d\xi} \quad (\text{IV.62c})$$

Substituindo (IV.61) e (IV.62a,b,c) em (IV.56) surge um funcional aproximado

$$\Pi^a = \frac{1}{2} \int_{-1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{dM_1}{d\xi} \phi_1 J^{-1} \right)^2 + (ik-1) (M_1 \phi_1)^2 \right\} J d\xi + (ik-1) M_1 \phi_1 \quad (\text{IV.63})$$

Variando com relação a ϕ_1

$$\frac{d\Pi^a}{d\phi_1} = \int_{-1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{dM_1}{d\xi} \right)^2 (J^{-2}) \phi_1 + (ik-1) M_1^2 \phi_1 \right\} J d\xi + (ik-1) M_1 \Big|_{\xi=-1} \quad (\text{IV.64})$$

Extremizando Π^a , lembrando que $M_1(-1) = 1$, obtem-se um sistema com uma equação.

$$\int_{-1}^{\infty} \left\{ \left[\left(ik - \frac{1}{L} \right)^2 (J^{-2}) + (ik-1) \right] M_1^2 \right\} J d\xi \{ \phi_1 \} = - (ik-1) \quad (\text{IV.65})$$

Desta equação obtem-se o valor de ϕ_1 , determinando assim a solução numérica dada por (IV.61). Atribuindo às coordenadas globais os valores

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0,4 \end{aligned} \quad (\text{IV.66})$$

Obtem-se para o Jacobiano

$$|J| = \frac{x_2 - x_1}{2} = 0,2 \quad (\text{IV.67})$$

e para ϕ_1

$$\phi_1 = \frac{2(iK-1)(iK-1/L)}{5(iK-1/L)^2 + 0,2(iK-1)^2} \quad (\text{IV.68})$$

Comparando a solução analítica (IV.54) com a função de forma (IV.62a) torna-se evidente que a opção mais adequada para o valor de L é a unidade. Fazendo $L = 1$ em (IV.68) vem

$$\phi_1 = \frac{2[iK-1]^2}{5,2[iK-1]^2} = \frac{2}{5,2} = 0,3846 \neq 1 \quad (\text{IV.69})$$

ou ainda para $L = 5$ $|\phi_1| = 0,4249$

$L = 10$ $|\phi_1| = 0,4291$

onde $|\phi_1|$ é o módulo de ϕ_1 , que é complexo. Aparentemente não há um L que faça $\phi_1 \approx 1$ ou $|\phi_1| \approx 1$.

Seja o mesmo problema, simplesmente mudando-se a posição do segundo nó, que tem apenas uma função geométrica, ou seja, de auxiliar no processo de mapeamento. Tomando

$$x_2 = 2,0 \quad (\text{IV.70})$$

o Jacobiano passa a valer

$$J = \frac{x_2 - x_1}{2} = 1 \quad (\text{IV.71})$$

Isto indica que as coordenadas ξ e x estão na mesma escala, apenas com uma defasagem entre suas origens. Resolvendo a equação (IV.65)

$$\phi_1 = \left(\frac{(iK-1/L)}{2(iK-1)} + \frac{(iK-1)}{2(iK-1/L)} \right)^{-1} \quad (\text{IV.72})$$

Fazendo $L = 1$ em (IV.72) obtém-se

$$\phi_1 = \left(\frac{(iK-1) + (iK-1)}{2(iK-1)} \right)^{-1} = 1 \quad (\text{IV.73})$$

que é a solução exata em $(x = 0)$.

A solução numérica fica expressa em função do parâmetro nodal como

$$\phi_1 = \phi_1 M_1 = e^{-(\xi+1)} e^{iK(\xi+1)} \quad (\text{IV.74})$$

Pela figura (IV.13) observa-se que $x = \xi+1$, mostrando que neste caso particular a solução numérica se confunde com a analítica.

Para o presente trabalho ainda foram feitos outros testes nos quais ou foi aumentado o número de nós do EI ou acoplou-se um EF ao EI. Estes testes forneceram duas conclusões das mais importantes na formulação de um EI paramétrico:

- a) Um elemento paramétrico qualquer não precisa ter o mesmo número de nós para a definição da geometria que para definição dos parâmetros nodais.
- b) Deve haver um mapeamento especial de maneira a se calcular o comprimento de decaimento L convenientemente. Conclui-se que isto pode ser conseguido mapeando-se a coordenada natural da direção infinita para uma escala coincidente com a das coordenadas globais.

No teste que envolveu um EF e um EI, pode-se constatar seu perfeito entrosamento, com a ressalva de que o tamanho do EF não ultrapasse $(2\pi/3K)$.

BETTESS (25) mostra ainda que apesar de L ter pouca influência no resultado seu valor não deve ser subestimado. É melhor superestimar. A figura (IV.14) mostra um gráfico no qual o resultado (IV.72) é calculado para diferentes valores de L .

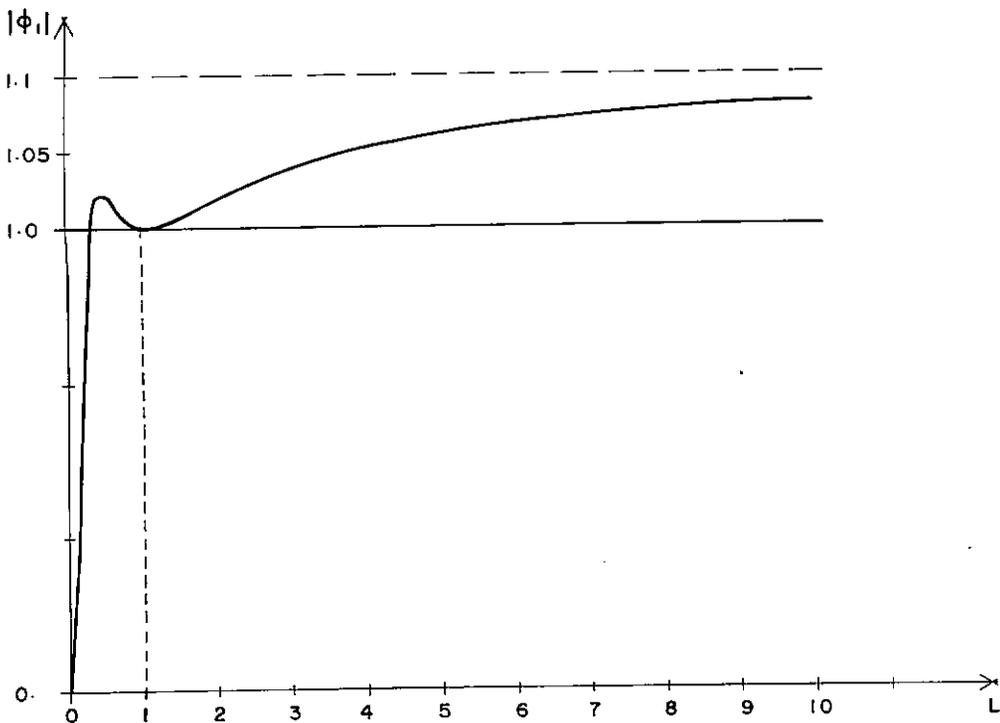


Figura (IV.14) = DIAGRAMA DE ϕ_1

IV.4.4 - Um Novo e Eficiente Elemento Infinito

Com a implementação de um EI não será mais necessário truncar a malha de EF. As condições de radiação serão satisfeitas de forma mais rigorosa, pelos EI em contornos infinitamente distantes, em qualquer tipo de problema. A matriz dos coeficientes de um EI é tratada da mesma forma quer o problema seja de refração ou difro-refração. Na programação resolveu-se

evitar o cálculo da parcela de carga análoga a (IV.35). Em outras palavras, este elemento jamais fará fronteira com um obstáculo, sendo necessária pelo menos uma camada de EF capaz de computar (IV.35). Isto não implica na impossibilidade de EI adjacentes a Γ_0 . Achou-se, no entanto, que no presente trabalho esta possibilidade era irrelevante. BETTESS e ZIENKIEWICZ (29) apresentam resultados neste sentido.

A utilização do teste de consistência na verificação da formulação numérica facilita a compreensão da introdução dos novos aspectos apresentados a seguir. Seja o EF de 6 nós, esboçado na figura (IV.15).

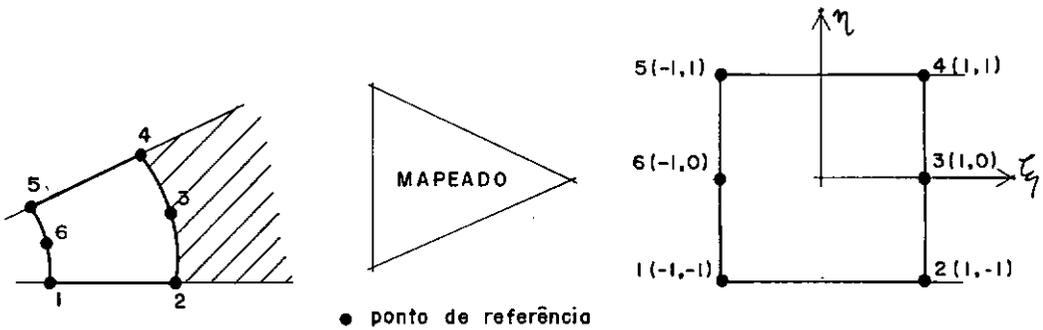


Figura (IV.15) = EI SERENDIPITY QUADRÁTICO

Em (13) são dadas as funções de forma, da família Serendipity, que se aplicam a este elemento. São elas:

$$N_1(\xi, \eta) = (-\eta + \xi\eta + \eta^2 - \xi\eta^2)/4$$

$$N_2(\xi, \eta) = (-\eta - \xi\eta + \eta^2 + \xi\eta^2)/4$$

$$N_3(\xi, \eta) = (1 + \xi - \eta^2 - \xi\eta^2)/2$$

$$\begin{aligned}
 N_4(\xi, \eta) &= (\eta + \xi\eta + \eta^2 + \xi\eta^2)/4 \\
 N_5(\xi, \eta) &= (\eta - \xi\eta + \eta^2 - \xi\eta^2)/4 \\
 N_6(\xi, \eta) &= (1 - \xi - \eta^2 + \xi\eta^2)/2
 \end{aligned}
 \tag{IV.75}$$

As funções N_i são lineares na direção ξ e quadráticas na direção η . O elemento distorcido, em um referencial global, deverá ter coordenadas tais que seus lados (1-2) e (4-5) determinem uma reta, e os lados (2-3-4) e (5-6-1) uma curva do segundo grau. Com esta definição de geometria monta-se uma matriz Jacobiana adequada. Bettess relata em (7), que o Jacobiano estando convenientemente definido na região de um EF, também valerá em pontos fora (por exemplo, a região hachurada da figura (IV.15)). Fica claro que esta é uma boa maneira de definir a geometria de um EI, que manterá as características paramétricas e utilizará funções mais populares como as Serendipity. O fato de dois lados serem retos não é uma limitação. Na verdade isto é feito de propósito, para diminuir o número de conectividades a serem lidas assim como o grau do Jacobiano. Estando o elemento quase sempre disposto radialmente, não há razão para que os lados da direção infinita sejam definidos por curvas.

Pelas conclusões apresentadas no item (IV.4.3) sabe-se que um elemento não precisa ter o mesmo número de nós para definir a geometria e para os parâmetros nodais. Chamando de "elemento geométrico" o elemento dado pelos pontos de referência, e "elemento físico" aquele dado pelos nós, no EI é interessante o fato de que o elemento geométrico pode ser finito enquanto que o físico é infinito. Retornando ao elemento de BETTESS e ZIENKIEWICZ (29), as coordenadas naturais $\xi_i = 0,2,30$ ($i = 1,2,3$) fazem com que o elemento geométrico, que define a

região onde são feitas as integrações, seja o maior possível. Já o elemento físico é infinito, podendo ou não ter nós no infinito. Os nós e pontos de referência às vezes não coincidem. Isto é uma propriedade a ser explorada. O presente EI terá APENAS três nós dispostos ao longo da sua "face finita" (figura (IV.16)).

Ainda é necessária a mudança de escalas (IV.41) ao longo de ξ . Sendo \bar{T} a transformação aproximada para EI com seis pontos de referência, obtém-se

$$\bar{T} = \left[\left(\sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \right)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{IV.76})$$

É importante fazer a ressalva de que neste caso

$$\bar{T} = \bar{T}(\eta) \quad (\text{IV.77})$$

em razão das funções N_i serem lineares em ξ . Frequentemente os EI são dispostos de uma forma circular em torno da origem. Com isto as duas camadas de pontos de referência estarão sobre arcos de círculos com raios R_1 e R_2 respectivamente (figura (IV.16)). Neste caso particular, fazendo uso de coordenadas polares, chega-se a seguinte expressão para \bar{T} :

$$\bar{T}(\eta) = \frac{R_2 - R_1}{2} \left[(\cos \alpha_m - 1)^2 \eta^4 - (\cos \alpha_m - 1)^2 \eta^2 + 1 \right]^{1/2} \quad (\text{IV.78})$$

sendo α_m a metade do ângulo entre os lados (1-2) e (4-5) do elemento. A parcela entre colchetes em (IV.78) é sempre igual a UM nos nós ($\eta = 1, 0, +1$). Para η qualquer, no intervalo $[-1, 1]$, e

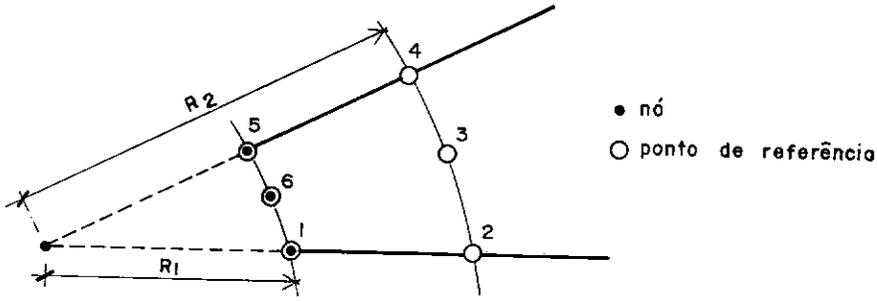


Figura (IV.16) = EI COM OS NÓS SOBRE UM ARCO CIRCULAR

com $\alpha_m \in (0^0, 45^0)$ esta parcela mantém-se em torno de 1 (nunca menor que 0,99). É perfeitamente aceitável dizer que em EI setoriais

$$\bar{T} \approx \frac{R_2 - R_1}{2} = \text{constante} \quad (\text{IV.79})$$

Deve-se frisar que apenas os nós estão sobre um arco de círculo já que a face do elemento é parabólica.

São apresentadas abaixo as vantagens em se criar um EI dentro das características expostas:

- a) A geometria é construída de maneira que o elemento geométrico tenha características semelhantes ao de um EF. Como vantagens segue:
 - a.1) maior facilidade para geração automática de nós
 - a.2) o "casamento" geométrico com um EF não apresenta problemas de transição como em (34)
 - a.3) propicia uma simplificação da transformação de escalas \bar{T} , no caso particular enunciado

b) O fato do elemento físico ter 3 nós sobre a interface com os EF faz com que:

b.1) não sejam introduzidas equações no sistema global, levando também a simplificações nas funções de forma

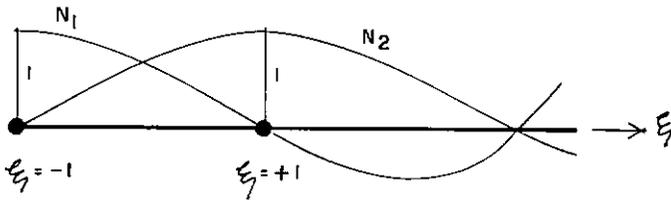
b.2) a condição de compatibilidade entre elementos, não seja violada, sejam eles finitos ou não

O EI deve ser capaz de representar a solução da equação diferencial, em regiões distantes das perturbações. Em se tratando de uma região de fundo constante (apenas a onda difratada é modelada) a equação se reduz a uma equação de Helmholtz. As funções de forma M_i para os parâmetros nodais, terão constantes físicas semelhantes às da onda incidente, que também é solução da equação. Adota-se a seguinte função:

$$M_i(s, \eta) = N_i(\eta) e^{-s/L} e^{iks} \quad (\text{IV.80})$$

$N_i(\eta)$ é uma função Serendipity quadrática em η . M_i não apresenta nenhum termo polinomial para a outra direção, além de ser uma função para interpolação de parâmetros que é complexa. Com isto sejam as novas propriedades c) e d).

c) Como este EI, na direção s , trabalha com apenas um nó, não se justifica o emprego de um termo polinomial de maneira a zerar a função de forma nos nós subsequentes, como no exemplo da figura (IV.17). Alguns zeros surgirão espontaneamente devido ao termo harmônico complexo em (IV.80).



$$N_1 = \left(\frac{1-\xi}{2} \right) e^{-\left(\frac{\xi+1}{2} \right) \left(\frac{1}{l} - iK \right)}$$

$$N_2 = \left(\frac{1+\xi}{2} \right) e^{-\left(\frac{\xi-1}{2} \right) \left(\frac{1}{l} - iK \right)}$$

Figura (IV.17) = EI COM 2 NÓS NA DIREÇÃO ξ

- d) Em integrações numéricas, como as de Gauss-Laguerre ou Newton-Cotes modificado, o grau do polinômio sendo reduzido diminui o número de pontos requeridos.

A supressão do polinômio em s pode piorar um pouco os resultados em regiões distantes das perturbações e conseqüentemente de pouco interesse. Os resultados, no entanto, atestam a qualidade da solução numérica ao longo dos obstáculos. Um raciocínio puramente intuitivo leva a entender este EI da seguinte forma: é um elemento que modela uma região ilimitada, aproximando a solução da equação diferencial por um decaimento exponencial associado a um exponencial complexo (funções senoidais). Então este trabalha como um amortecedor altamente refinado, que além de não permitir a reflexão de ondas difratadas nos contornos com EF, ainda dita de uma forma grosseira o comportamento desta onda em regiões longínquas, tudo isto sem acréscimo de equações para o sistema.

As funções indicadas em (IV.80) satisfazem à

condição de Sommerfeld. Verificando:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sqrt{s} \left(\frac{\partial \phi^D}{\partial s} - iK \phi^D \right) = 0 \quad (\text{IV.81})$$

Mas neste EI, o ϕ^D é

$$\phi^D = \sum_{j=1}^3 M_j \phi_j^D \quad (\text{IV.82})$$

Logo

$$\sum_{j=1}^3 \left[\lim_{s \rightarrow \infty} \sqrt{s} \left(\frac{\partial M_j}{\partial s} - iKM_j \right) \right] \phi_j^D = 0$$

$$\sum_{j=1}^3 \left[-\frac{N_j}{L} \lim_{s \rightarrow \infty} \sqrt{s} e^{-s/L} e^{iKs} \right] \phi_j^D = 0 \quad (\text{IV.83})$$

A condição de Sommerfeld é satisfeita de antemão por causa do decaimento exponencial.

A demonstração da fórmula que fornece os termos da matriz dos coeficientes do EI, em si não apresenta grandes novidades. Esta surge da extremização do funcional aproximado na região ΩE , por um procedimento análogo ao realizado para o EF.

O funcional ΠE (III.30) a ser aproximado é expresso em termos de ϕ^D , quer o problema analisado tenha variação de profundidade ou não. No caso de fundo constante o funcional nem é dividido em $\Pi I + \Pi E$. Conclui-se que um mesmo tipo de matriz de coeficientes será montada em ambos os casos. Aproximan

do (III.40) por meio de (IV.82) e variando com respeito a um parâmetro nodal ϕ_I^D , resulta

$$\frac{\partial \Pi E^a}{\partial \phi_I^D} = \sum_{M=1}^{MI} \left\{ \sum_{j=1}^3 \iint_{\Omega_m} [CCg(\nabla M_i \cdot \nabla M_j) - \frac{\omega^2 Cg}{C} M_i M_j] \phi_J^D dx dy + \right. \\ \left. + \oint_{\Gamma_C^m} CCg [\phi_x^I M_i dy - \phi_y^I M_i dx] \right\} \quad (IV.84) \\ (MI = n^\circ \text{ de EI})$$

Na equação acima a primeira integral resulta, para cada valor de i e j , em um coeficiente da matriz do elemento INFINITO m . A integral de contorno, como foi visto no item (III.1.2), expressa uma compatibilidade de fluxos ao longo do contorno intermediário Γ_C e representa uma parcela dos termos de carga. É importante observar que esta integral só se define em problemas de refração de ondas, pois existem regiões com ϕ e outras com ϕ^D .

Finalmente pode se escrever uma equação do sistema para difração e refração de ondas como

$$\frac{\partial \Pi^a}{\partial \phi_I} = \frac{\partial \Pi_I^a}{\partial \phi_I} + \frac{\partial \Pi_E^a}{\partial \phi_I^D} - F_I = 0 \quad (IV.85)$$

A junção da parte externa com a interna deve ser acompanhada da compatibilização de parâmetros nodais indicada no item (IV.3.1), já que em nós sobre Γ_C estão localizados dois potenciais diferentes.

A matriz dos coeficientes (MC) de um EI é composta por

$$RH_{ij} = \iint_{\Omega_m} [CCg \nabla M_i \cdot \nabla M_j] \, dx dy \quad (IV.86a)$$

$$MH_{ij} = \iint_{\Omega_m} \left[\frac{Cg}{C} M_i M_j \right] \, dx dy \quad (IV.86b)$$

tal que

$$\underline{MC} = \underline{RH} - \omega^2 \underline{MH} \quad (IV.86c)$$

A nomenclatura é a mesma adotada no item (IV.3).

O termo de carga dado por

$$TC_I = \oint_{\Gamma_c^m} -CCg [\phi_y^I M_i dx - \phi_x^I M_i dy] \quad (IV.87)$$

é adicionado a \underline{F} em (IV.85).

No cálculo da matriz de um EF pode-se notar que os parâmetros nodais são números complexos. Os coeficientes de RH, MH e AH são reais. A equação (IV.16) no entanto, indica que se for computada a parcela AH a matriz dos coeficientes MC será complexa. Já em EI os coeficientes de RH e MH são complexos pois as funções de forma destes elementos são funções complexas.

Sendo o potencial incidente dado por uma função complexa e estando as parcelas de carga escritas em função deste termo, o vetor de carga também é complexo.

Um tratamento algébrico é dado ao sistema complexo de maneira que na programação sejam utilizadas as subrotinas tradicionais para solução de sistemas lineares reais.

IV.4.5 - Integração Numérica para o Elemento Infinito Formulado

As integrais em ΩE tem como integrando as funções $M_i(s, \eta)$ e suas derivadas. Os limites de integração e os infinitésimos devem sofrer uma transformação para o sistema local (s, η) . Como a geometria de um EI é definida de forma análoga a do EF pode-se, utilizando as equações (IV.20), (IV.21) e (IV.76), escrever

$$dxdy = |J| \bar{T}(\eta) dsd\eta \quad (IV.88)$$

Chamando um coeficiente arbitrário de \underline{MC} por K_{ij} , vem que

$$K_{ij} = \int_{-1}^1 \int_0^\infty \left[CCg \left(\frac{\partial M_i}{\partial x} \frac{\partial M_j}{\partial x} + \frac{\partial M_i}{\partial y} \frac{\partial M_j}{\partial y} \right) - \frac{\omega^2 Cg}{C} M_i M_j \right] |J| \bar{T} dsd\eta \quad (IV.89)$$

Os limites de integração são automaticamente mudados lembrando que a coordenada s é inicializada sempre na origem $s = 0$. Sendo corriqueira a utilização de EI com os nós apoiados em arcos circulares o Jacobiano pode, nestes casos, ser tomado como

$$|J| = \left[\frac{(R_2 - R_1)^2 \xi + (R_2^2 - R_1^2)}{4} \right] \left[(\cos \alpha - 1) \eta^2 + 1 \right] \text{sen} \alpha \quad (IV.90)$$

Nesta expressão pode-se comprovar que a transformação de coordenadas (GLOBAL \rightarrow NATURAL) é quadrática em η e linear em ξ , como era de se esperar. As derivadas cartesianas de M_i necessitam de um cuidado em seu cálculo. Uma derivada cartesiana de M_i pode ser obtida por (IV.3). Mas M_i não está expressa em termos de ξ , então

$$\frac{\partial M_i}{\partial \xi} = \frac{\partial M_i}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \xi} + \frac{\partial M_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \xi}$$

Logo,

$$\frac{\partial M_i}{\partial \xi} = \frac{\partial M_i}{\partial s} T(\eta) \quad (\text{IV.91})$$

A expressão das derivadas cartesianas de M_i passa a ser

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial M_i}{\partial x} \\ \frac{\partial M_i}{\partial y} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \bar{T}(iK-1/L)N_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{matrix} e^{-s/L} & e^{iks} \end{matrix} \quad (\text{IV.92})$$

Seja $\bar{N}_i(\eta)$ uma forma reduzida de M_i tal que

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial M_i}{\partial x} \\ \frac{\partial M_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{matrix} e^{-s/L} & e^{iks} \end{matrix} \quad (\text{IV.93})$$

Pode-se reescrever o coeficiente K_{ij} de uma maneira mais conveniente para a programação

$$K_{ij} = \int_{-1}^1 \int_0^\infty \left[CCg(\nabla \bar{N}_i \cdot \nabla \bar{N}_j) - \frac{\omega^2 Cg}{C} N_i N_j \right] |J| \bar{T} e^{-\frac{2s}{L}} e^{2iks} ds d\eta \quad (\text{IV.94})$$

Para calcular uma coordenada ξ em função de s , integra-se

$$ds = T(\eta) d\xi$$

obtendo $s = T(\eta)\xi + \text{constante de integração}$

Para que $\xi = -1$ coincida com $s = 0$

$$s = T(\eta)\xi + T(\eta) \quad (\text{IV.95a})$$

e manipulando, obtem-se

$$\xi = \frac{s}{T(\eta)} - 1 \quad (\text{IV.95b})$$

A integração numérica de (IV.94) na direção η é feita por Gauss-Legendre. BETTESS (25) chama a atenção para o fato de que a integração na direção η , de um EI distorcido, é definida em um domínio que tende ao infinito conforme s tende ao infinito, o que invalidaria a integração adotada. Até o presente não existe uma resposta a esta dúvida, mas este fato aparentemente não influi nos resultados. O maior problema reside na integração para a direção infinita s . Uma observação importante deve ser feita: na programação não foram levadas em conta variáveis complexas, ou seja, as operações complexas foram des^uacopladas em duas reais. Por exemplo

$$\begin{array}{ccccccc} (a + ib) \cdot (c + id) & = & (ac - bd) & + & i(ad + bc) & & \\ \text{complexa} & & \text{real} & & \text{real} & & \end{array} \quad (\text{IV.96})$$

Desta forma uma integração em e^{ix} resulta em duas integrais: uma com $\cos(x)$ e outra com $\sin(x)$. Isto complica extremamente o trabalho do programador mas possibilita ao programa ser acoplado a qualquer outro, dos tradicionais, com uma subrotina para mont^uagem e solução do sistema de equações lineares reais.

BETTESS e ZIENKIEWICZ (29) apresentam duas maneiras para a integração em s . A primeira seria utilizar a t^uc^unica de Gauss-Laguerre que dá resultados razoáveis se usados muitos pontos de integração, no cálculo de uma integral seme^u

lhante a

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} f(x) dx \quad (\text{IV.97})$$

Na referência (30) nada está especificado quanto à função $f(x)$, que presume-se seja uma função com um comportamento não muito diferente de um polinômio. No caso em estudo, será um coseno ou um seno, que "amortecido" pelo efeito de e^{-x} pode ser tratado como um polinômio. Calcula-se o valor da integral utilizando um máximo de 32 pontos e pesos previamente calculados. A integral do EI, separada em partes real e imaginária, pode ser vista como

$$\int_0^{\infty} s^n e^{-s/L} \frac{\cos}{\text{sen}}(Ks) ds \quad (\text{IV.98})$$

uma pequena mudança de variáveis faz com que $e^{-s/L}$ se transforme em e^{-x} , caindo em uma integral do tipo de (IV.97). Esta técnica no entanto deve ser utilizada com um cuidado especial. No caso particular em que K e L são grandes, os 32 pontos, além de insuficientes, levam a integral a um valor divergente do analítico. Isto pode ser entendido pelo fato do coseno ou seno, com K grandes, oscilarem muito enquanto que o exponencial com $\frac{1}{L}$ pequeno decai lentamente. Isto simula a presença de um polinômio de grau extremamente alto, exigindo assim um refinamento maior no cálculo. Três casos marcantes estudados dão uma noção do que pode acontecer. A tabela abaixo compara a integral do coseno por Gauss-Laguerre com a analítica correspondente.

TABELA (IV.1)

	n	ANALÍTICA	G-LAGUERRE
L=5	0	0.19231E + 00	0.29978E + 00
K=1	6	-0.61647E + 03	0.41012E + 07
L=1	0	0.50000E + 00	0.50000E + 00
K=1	6	0.0	-0.12442E - 04
L=1	0	0.58824E - 01	0.62027E - 01
K=4	6	-0.35175E - 01	0.81360E + 02

A segunda técnica apresentada em (29) é um Newton-Cotes Modificado onde os pontos de integração, que são igualmente espaçados, são dispostos arbitrariamente entre os zeros de e^{iks} .

Para o presente trabalho optou-se inicialmente integrar por uma maneira mais segura que é via Simpson, apesar da sua ineficiência computacional. Em (34) tomam-se 20 pontos, aproximadamente, por comprimento de onda. O método de Simpson calcula a área sob segmentos parabólicos de acordo com a figura (IV.18). Com um estudo rápido pode-se mostrar que quatro segmentos parabólicos aproximam muito bem uma senoide. Assim, 9 pontos y_i são necessários por cada onda, o que torna este método viável no computador. A integral sob uma curva é dada por

$$S = \int_{x_1}^{x_3} y(x) dx = \frac{h}{3} (y_1 + 4y_2 + y_3) \quad (\text{IV.99})$$

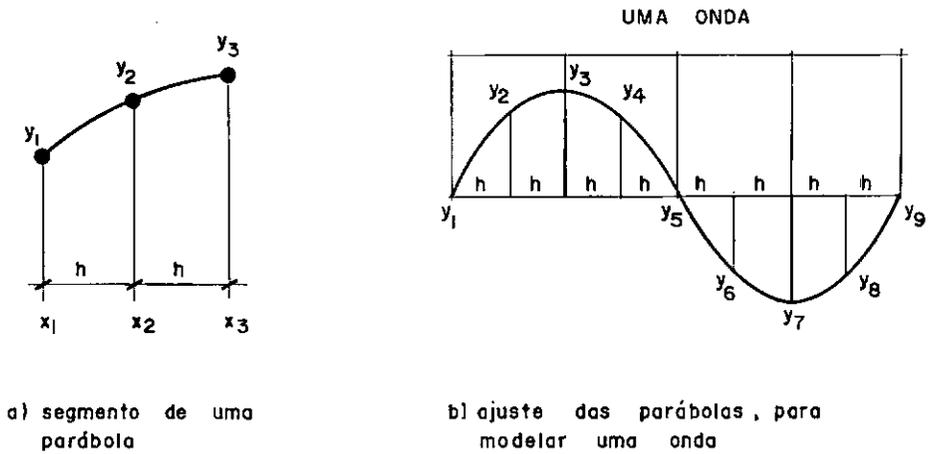


Figura (IV 18) = INTEGRAÇÃO POR SIMPSON

No programa, como o domínio é infinito, faz-se uso de um limite de tolerância abaixo do qual trunca-se o valor da integral de Simpson, acumulada para todas as ondas computadas. A tabela (IV.2) mostra a integral dada em (IV.98) calculada num caso altamente desfavorável, onde NO é o número de ondas computadas no cálculo. A partir destes testes pode-se concluir, quanto a sua

TABELA (IV.2)

	n	NO	ANALÍTICA	SIMPSON
L=5	0	30	0.12469E - 01	0.123770E - 01
K=4	3	74	0.22857E - 01	0.190739E - 01

aplicabilidade, que:

(i) Esta integração é feita em regiões de fundo constante.

Sendo $K = \frac{2\pi}{\lambda}$ uma onda com grande λ , e em geral um gran-

de L (sua influência só será desprezível a grandes distâncias) terá um K pequeno. Dificilmente existirá um K e L grandes exigindo demais em termos de esforço computacional na integração.

- (ii) O polinômio em s a ser integrado jamais terá um grau igual a três, como o da tabela (IV.2).
- (iii) Nos casos mais usuais a integração por Simpson não se mostra ineficiente, com a vantagem de que sua precisão pode ser controlada por um usuário, através do número de segmentos parabólicos por onda e da estimativa de erro adotada.
- (iv) Em exemplos práticos é comum a malha ter vários EI com a mesma configuração geométrica, o que permite calcular apenas uma matriz de coeficientes para todos os EI. Isto torna mais eficiente a montagem do sistema de equações em termos de tempo de processamento.

Tendo o método de Simpson demonstrado um desempenho satisfatório, não se aplicaram técnicas mais refinadas e otimizadas para as integrações. Entre as técnicas enumeradas poderia ainda ser adicionada uma recentemente formulada por Pissanetzky (39).

IV.4.6 - Cálculo do Fator de Decaimento L

Entre os diversos pesquisadores que trabalham com EI existe um consenso quanto a pouca sensibilidade da solução numérica em relação ao fator L . No entanto não se pode simplesmente

te ignorá-lo e fazer em qualquer problema $L=1$. Deve-se fazer uma estimativa quanto à sua ordem de grandeza. Dentro deste critério, BETTESS e ZIENKIEWICZ (29) sugerem que o valor de L na região perto do fenômeno de difração e refração seja tal que o decaimento de $e^{-s/L}$, a grosso modo, se pareça com o decaimento do primeiro termo de $H_0^{(1)}(Kr)$, onde $H_0^{(1)} = (J_0 + iY_0)$ é a função de Hankel de primeira classe de ordem zero e r a distância do ponto estudado à origem. Isto se deve ao fato de em regiões de profundidade constante a equação de Berkhoff se reduzir a uma equação de Helmholtz, sendo $H_0^{(1)}$ uma solução geral em série, desta equação. Através de uma regra de três, feita a partir de dois pontos de referência ξ_1 e ξ_2 , obtém-se

$$\frac{e^{-s_2/L}}{e^{-s_1/L}} = \frac{[(J_0(Kr_2))^2 + (Y_0(Kr_2))^2]^{1/2}}{[(J_0(Kr_1))^2 + (Y_0(Kr_1))^2]^{1/2}} \quad (\text{IV.100})$$

onde s_1 e s_2 correspondem a ξ_1 e ξ_2 respectivamente. Reescrevendo (IV.100) vem

$$e^{\frac{s_1 - s_2}{L}} = \frac{\|H_0^{(1)}(Kr_2)\|}{\|H_0^{(1)}(Kr_1)\|}$$

Tirando o logarítmo neperiano em ambos os lados e substituindo $(s_1 - s_2)$ por $(-2\bar{T})$, L é dado por

$$L = \frac{-2\bar{T}}{\ln\left(\frac{\|H_0^{(1)}(Kr_2)\|}{\|H_0^{(1)}(Kr_1)\|}\right)} \quad (\text{IV.101})$$

A maior dificuldade está em calcular $H_0^{(1)}(Kr)$ automaticamente

em um programa ou consultando as tabelas dadas em (40). A equação acima só tem sentido se r e s estiverem na mesma escala, justificando assim a transformação de coordenadas (IV.76).

BURAGOHAIN e AGRAWAL (34) apresentam um processo alternativo para o cálculo de L e que está fundamentado em um critério de energia. Nestes termos, a energia total distribuída em cada anel da figura (IV.19), é constante.

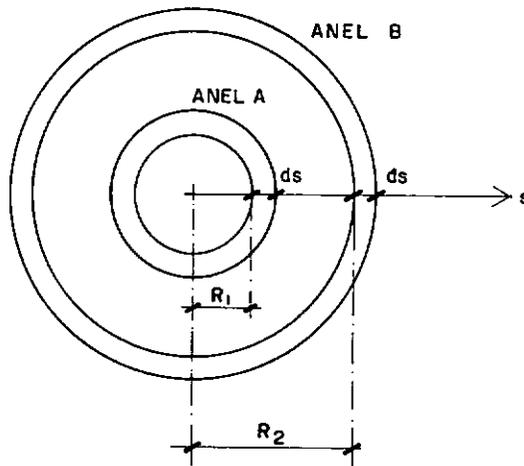


Figura (IV.19) = GEOMETRIA PARA O CRITÉRIO DE ENERGIA

Definindo a densidade energética δ como a energia por unidade de área (problema bidimensional), a relação entre as densidades δ_a e δ_b dos dois anéis pode ser dada por

$$\frac{\Pi((R_1 + ds)^2 - R_1^2)}{\Pi((R_2 + ds)^2 - R_2^2)} = \frac{\delta_b}{\delta_a} \quad (\text{IV.102})$$

A densidade diminui conforme a área aumenta, de maneira a satis

fazer a conservação de energia. Algo semelhante deve acontecer para o potencial e conseqüentemente para a altura da onda. A relação (IV.102) está em termos de "área", enquanto que deseja-se obter um "comprimento" de decaimento. Tirando a raiz em (IV.102) e comparando ao decaimento exponencial, resulta o seguinte:

$$\sqrt{\frac{2R_1 ds + ds^2}{2R_2 ds + ds^2}} = \frac{e^{-s_2/L}}{e^{-s_1/L}} \quad (\text{IV.103})$$

onde s_2 e s_1 são as coordenadas locais do círculo médio em cada anel. Estando em regime linear, de pequenas variações, o termo ds^2 torna-se desprezível e assim

$$\sqrt{\frac{R_1}{R_2}} = \frac{e^{-s_2/L}}{e^{-s_1/L}} \quad (\text{IV.104})$$

Colocando a origem de s coincidente com R_1 e fazendo o limite quando $ds \rightarrow 0$, surgem as seguintes aproximações:

$$\begin{aligned} s_1 &\rightarrow 0 \\ R_2 &\rightarrow R_1 + s_2 \end{aligned}$$

Substituindo em (IV.104)

$$\left(1 + \frac{s_2}{R_1}\right)^{-1/2} = e^{-s_2/L} \quad (\text{IV.105})$$

Tirando o logarítmo neperiano em ambos os lados

$$-\frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{s_2}{R_1}\right) = -\frac{s_2}{L}$$

e manipulando obtem-se uma fórmula simples para o L .

$$L = \frac{2 s_2}{\ln\left(1 + \frac{s_2}{R_1}\right)} \quad (\text{IV.106})$$

A coordenada s é um sistema local em escala com o global. Tomando a posição destes anéis como sendo a dos pontos de referência $\xi_1 = -1$, $\xi_2 = +1$ do EI, pode-se chegar a uma expressão imediata para L . Em um elemento genérico

$$s = T(n) (\xi+1) \quad (\text{IV.95a})$$

Desta forma

$$s_2 = 2 T(n)$$

e

$$L = \frac{4 T(n)}{\ln\left(1 + \frac{2T(n)}{R_1}\right)} \quad (\text{IV.107})$$

Esta última leva apenas a uma ordem de grandeza de L uma vez que as linhas equipotenciais não formam círculos. Dentro do espírito de se estimar um valor, aplica-se a aproximação de EI setoriais (IV.79), em (IV.107) obtendo

$$L = \frac{2(R_2 - R_1)}{\ln\left(1 + \frac{R_2 - R_1}{R_1}\right)} \quad (\text{IV.108})$$

onde L está expresso em termos de parâmetros puramente geométricos. No capítulo de resultados práticos poderá ser constatada a validade desta fórmula trivial, que ao contrário do indicado em (34) não requer nenhum parâmetro obtido por tentativa e erro. A única arbitrariedade fica por conta da segunda camada de pontos

de referência colocada em R_2 , que em geral é colocada na proporção dos nós $\xi = -1$ e $\xi = +1$ de um EF.

IV.4.7 - Integração Numérica da Parcela de Carga

A parcela de carga apresentada em (IV.87) reflete uma compatibilidade de fluxos entre Ω_I e Ω_E , conforme apresentado no Capítulo III. As integrais de contorno computadas pelos EF só eram levadas em conta se o elemento fosse adjacente ao contorno. No caso dos EI, a integral (IV.87) será sempre computada, para todos os elementos em problemas de refração e difração de ondas. Se o problema tiver profundidade constante então (IV.87) não é calculada, em hipótese alguma.

A integral está expressa em termos de x e y . Para calculá-la a nível de cada EI é necessária uma transformação para o sistema natural. Seja uma transformação semelhante à (III.51) onde os infinitésimos das direções normais e tangenciais (dn , dt) são substituídos por ($d\xi$, $d\eta$). Aplicando em (IV.87), a integral torna-se

$$\oint_{\Gamma_C} \left[\left(\phi_y^I \frac{\partial x}{\partial \xi} - \phi_x^I \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) d\xi + \left(\phi_y^I \frac{\partial x}{\partial \eta} - \phi_x^I \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) d\eta \right] M_i \quad (IV.109)$$

Ao longo de Γ_C , ξ não varia e (IV.109) se reduz a

$$\int_{-1}^1 \left[\left(\phi_y^I \frac{\partial x}{\partial \eta} - \phi_x^I \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) N_i d\eta \right] \quad (IV.110)$$

sendo que M_i , em Γ_C ($s = 0$), se confunde com $N_i(\eta)$. Os limites

de integração para η são colocados diretamente, sem necessidade de fazer uma mudança de escalas, pois a transformação que leva (IV.87) em (IV.109) implicitamente se encarrega disto.

As derivadas naturais em η e x e y são calculadas de acordo com a segunda linha da matriz J apresentada em (IV.20).

As derivadas cartesianas do potencial incidente são calculadas a partir de (IV.36a) e levadas aos pontos de integração numérica por um processo análogo ao apresentado em ii) (item IV.3.3), com a expressão (IV.37).

Adotando-se Gauss-Legendre para a integração, o termo de carga é dado pela fórmula seguinte.

$$TC_I = - \sum_{s=1}^{NINT} \left[\left(\bar{\phi}_y^I \frac{\partial x}{\partial \eta} - \bar{\phi}_x^I \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) Ni \right]_m \text{ PESO}(s) \quad (\text{IV.111})$$

C A P Í T U L O VANÁLISE DE RESULTADOS

A equação de Berkhoff se presta à análise de problemas com obstruções finitas (estruturas "offshore", ilhas, etc) e também ao estudo do fator de amplificação de ondas em portos (21, 29), tendo este uma obstrução infinita. Apenas o primeiro caso será analisado, mostrando a aplicação do modelo numérico implantado a estruturas marítimas (estruturas "offshore").

A estrutura do programa e os critérios adotados para montagem, armazenamento e solução do sistema serão enfocados em apêndice. No entanto, para apresentação dos resultados, pode-se adiantar que a solução de um sistema complexo $(n \times n)$ é transformado em um sistema real $(2n \times 2n)$. Com isto, uma malha com n nós ativos (sem contar pontos de referência) resultará em um sistema de $2n$ equações.

Em um problema de refração e difração de on

das, o vetor das incógnitas do sistema será composto por potenciais totais e potenciais difratados. Para que seja reconstituída uma solução em termos dos potenciais totais, é necessário somar ao vetor de incógnitas um vetor contendo potenciais incidentes em posições semelhantes ao dos difratados. No caso de difração apenas, em todas as posições do vetor de incógnitas devem ser somados os potenciais incidentes. De posse do potencial total reduzido, a elevação da onda no instante $t = 0$ é dada pela equação (II.10), aqui reescrita para o potencial reduzido.

$$\eta(x,y) = i \frac{\omega}{g} \phi(x,y) \quad (V.1)$$

A elevação η é uma função complexa que depende do potencial total. Neste trabalho, a elevação é utilizada na comparação dos resultados. No entanto, a partir do potencial, pode-se calcular a pressão e, por integração, as forças e momentos consequentes da ação da onda sobre o obstáculo. Estas cargas são muito importantes no dimensionamento e verificação de estruturas marítimas.

No tocante às unidades, pode-se adiantar que a aceleração de gravidade, no programa, é dada por

$$g = 9,80665 \frac{m}{s^2}$$

Assim, todas as grandezas de comprimento devem ser dadas em metros. São elas:

- λ = comprimento de onda
- x,y = coordenadas
- h = profundidade
- a = amplitude
- η = (resultado) = elevação da onda

As grandezas de tempo são dadas em segundos:

T = período

t = tempo

os ângulos são dados em graus:

γ = ângulo de incidência

θ = ângulo de coordenadas polares

V.1 - DIFRAÇÃO EM UM CILINDRO CIRCULAR

O problema de difração de ondas em um cilindro localizado em uma região de profundidade constante apresenta solução analítica dada por MacCAMY e FUCHS (41). Este exemplo é extremamente simples e, por isso, serviu como teste fundamental para depuração do programa implantado. Para testar apenas os EF, utilizou-se a técnica do truncamento da malha, com uso de amortecedores. BETTESS e ZIENKIEWICZ (29) adotam a seguinte geometria para a análise numérica do problema:

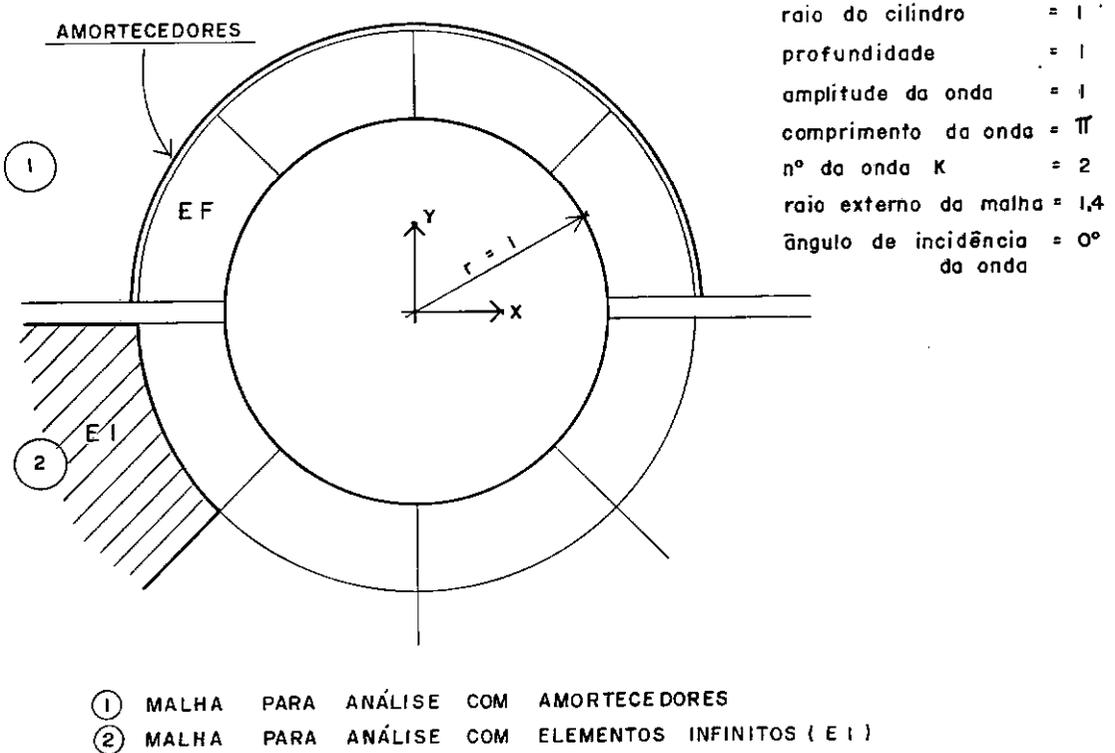


Figura (V.1) = MALHAS PARA AS DUAS ANÁLISES

Fazendo uso da simetria do problema, na análise com amortecedores a malha tem 23 nós, ou seja, 46 equações reais. Já na análise com EI, a malha tem 23 nós e 9 pontos de referência mas igualmente 46 equações. Os resultados são dados pelo gráfico da figura (V.2).

Quanto aos dados indicados na figura (V.1), existe uma questão importante: o valor do raio externo da malha é aparentemente escolhido de forma arbitrária. Ele poderia, no máximo, ser igual a $(1 + \pi/3)$ de maneira que um EF não ultrapasse seu comprimento máximo, conforme explicado no item (IV.2). Além disto, no caso do amortecimento, o número de camadas de EF deveria aumentar até que, em um raio externo maior, seja aplicada a condição de radiação aproximada (III.19). Foram feitos inúmeros testes com um refinamento cada vez maior da malha e os resultados eram extremamente piores que o apresentado na figura (V.2). Através da solução analítica de MacCAMY e FUCHS estimou-se o ponto onde a condição (III.19) estaria praticamente satisfeita, ou ainda, o ponto a partir do qual a diferença $(\frac{\partial \phi}{\partial r} - iK\phi)$ fosse identicamente nula. Constatou-se que este ponto é excessivamente distante do cilindro, impossibilitando qualquer tentativa de discretização da região por EF. No entanto, verificou-se que sendo $\frac{\partial \phi}{\partial r}$ e ϕ funções periódicas, existem PONTOS onde a diferença acima é nula. Perto de $r = 1,4$ isto ocorre, justificando assim o porque de uma malha tão simples e pouco refinada levar a resultados tão bons. A condição de Sommerfeld, além de aproximada, é satisfeita artificialmente. Conclui-se que este tipo de aproximação só pode ser feita se for conhecida a solução analítica do problema. BANDO et al (20) desenvolveram um amorte

cedor de ordem superior que, segundo exemplos apresentados, pode ser colocado em qualquer lugar, ou seja, a malha de EF pode ser truncada próxima do obstáculo. O modelo é desenvolvido para a equação de Helmholtz, que trata de regiões de profundidade constante. É também apresentado um gráfico comparando diversos tipos de amortecedores, mostrando que em torno de $r = 2,0$, os resultados obtidos com o amortecedor de ordem superior e o apresentado neste trabalho coincidem. Por outro lado, na análise por meio de EI, todos os parâmetros são determinados de forma automática.

Seja a seguir o cálculo do comprimento de decaimento pelas duas técnicas enunciadas em (IV.4.6). As funções de Hankel devem ser calculadas para os pontos

$$Kr_1 = 2 * 1,4 = 2,8 \tag{V.2}$$

$$Kr_2 = 2 * 1,8 = 3,6$$

Pelas tabelas (40), obtêm-se para Kr_1 e Kr_2 :

$$\begin{aligned} Jo(Kr_1) &= - 0.18503 60333 64387 \\ Jo(Kr_2) &= -0,39176 98937 00798 \\ Yo(Kr_1) &= 0,43591 59856 \\ Yo(Kr_2) &= 0,14771 00126 \end{aligned} \tag{V.3}$$

Aplicando (V.3) em (IV.101), fazendo uso da condição (IV.79) para elementos setoriais,

$$L = 3,248 \tag{V.4}$$

Por outro lado, com (IV.108), o valor calculado de L é

$$L = \frac{2(0,4)}{\ln \left(1 + \frac{0,4}{1,4}\right)} = 3,183 \quad (\text{V.5})$$

Comparando (V.4) e (V.5) observa-se que a diferença no cálculo do L é irrelevante.

A integração do EI é feita através de Gauss-Legendre (ordem 4) na direção finita η . No método de Simpson, um total de 9 pontos é usado em cada onda integrada. A matriz do EI é calculada apenas uma vez, devido a regularidade da malha.

A simplicidade deste exemplo, no entanto, não diminui sua importância na prática. Diversas plataformas, principalmente as de gravidade, são compostas por pernas cilíndricas.

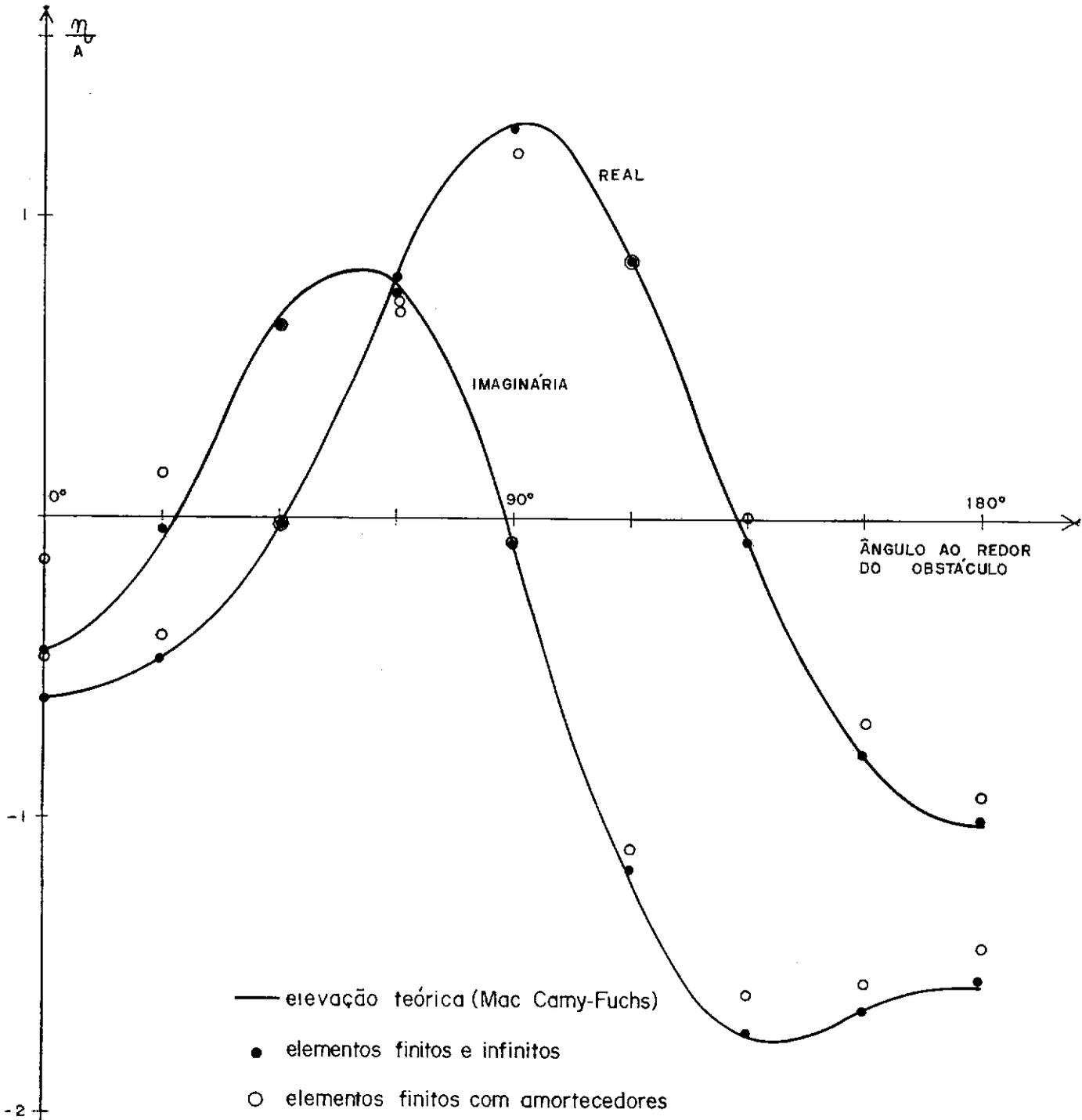


Figura (V.2) = RESULTADOS PARA AS DUAS ANÁLISES

V.2 - DIFRAÇÃO EM UM CAIXÃO QUADRADO

Este problema é de considerável importância no projeto de estruturas marítimas e em certos tipos de reservatórios de óleo. Em termos numéricos, sua importância principal está no estudo das propriedades decorrentes da discretização de um obstáculo poligonal. Isto permite, por exemplo, analisar problemas nos cantos vivos, ou seja, da descontinuidade da derivada normal do potencial ao longo do corpo.

Os resultados foram comparados aos obtidos por MASETTI e WROBEL (24), que fizeram uso do Método dos Elementos de Contorno (MEC). Este problema não tem solução analítica, mas Masetti e Wrobel puderam comparar seus resultados com os de MODGRIDGE e JAMIESON (42), obtidos em termos de forças.

O estudo é feito para um quadrado com 12 m de lado. Uma das malhas é dada na figura (V.3). As constantes físicas são:

$$\begin{aligned}
 \text{número da onda } K &= 0,6 \\
 \text{amplitude} &= 1 \text{ m} \\
 \text{profundidade} &= 20 \text{ m} \\
 \text{ângulo de incidência} &= 0^\circ
 \end{aligned}
 \tag{V.6}$$

Considerando um regime de "águas profundas" ($\frac{h}{\lambda} > 0,5$), calculam-se as outras constantes a partir de (V.6)

$$\begin{aligned}
 \text{período } T &= \frac{2\pi}{\sqrt{Kg}} = 2,590 \text{ s} \\
 \text{comprimento da onda } \lambda &= \frac{2\pi}{K} = 10,472 \text{ m}
 \end{aligned}
 \tag{V.7}$$

Observa-se que em (V.7) tomou-se uma aproximação para a equação de dispersão ($\tanh(Kh) \rightarrow 1$).

Inicialmente, faz-se uma comparação entre EF e Elementos de Contorno (EC). Um total de 24 EC constantes foram usados. Em contrapartida, um total de 12 EF são dispostos ao longo de meio obstáculo de maneira a definir, no seu contorno, o mesmo número de conectividades que para os EC. O ponto médio entre cada par de nós de um EF quadrático coincide exatamente com a localização do nó de cada EC. Para um EF, a elevação da onda no ponto correspondente ao nó do EC é dada por

$$\eta = \sum_{i=5}^7 N_i(\xi, l) \eta_i \quad (V.8)$$

com $\xi = \pm 0,5$, sendo o somatório feito de acordo com a convenção da figura (IV.7). Na figura (V.4) encontram-se os resultados para os dois métodos citados. Ambos levam praticamente aos mesmos valores para a elevação da onda.

A parcela do vetor de carga (IV.18) será calculada ao longo de todo o obstáculo. Esta, no entanto, depende da derivada normal do potencial incidente. Um nó situado em um canto do quadrado pertence a dois EF adjacentes, sendo um perpendicular ao outro. A direção normal neste nó de canto, dependendo do elemento em questão, terá valores diferentes. Percorrendo os elementos, há uma descontinuidade da direção normal justamente nas quinas do caixão. Uma malha especialmente traçada para detectar a importância desta descontinuidade foi testada. Nesta, os cantos foram ligeiramente arredondados, atenuando a brusca mudança de direção da normal. Aumentou-se, também, a concentra-

ção de EF em torno dos cantos, utilizando um total de 14 EF ao longo do caixão (malha com 102 nós.

Para completar este estudo com respeito a considerações geométricas, foram testados dois tipos de contornos intermediários entre os EF e os EI. Para a mesma malha de 88 nós (utilizada na comparação com os EC), testou-se os EI com os nós dispostos em uma semi-circunferência ou dispostos sobre um quadrado com os lados paralelos ao caixão.

Estes resultados estão apresentados na figura (V.5). Pode-se observar que o cuidado especial dado ao problema do nó de canto altera muito pouco a solução (comparar a "malha circular" de 88 nós com a malha de 102 nós). Os resultados para as malhas "circulares" e "quadradas", com 88 nós, também divergem pouco. Isto se deve não só à geometria da interface EF-EI, como também ao fato de ter sido usado o mesmo comprimento de decaimento L em ambos os casos. Na malha "quadrada", os EI estão a diferentes distâncias da origem não permitindo, a rigor, o uso do mesmo L. O cálculo do L pelas funções de Hankel é dado a seguir:

$$\begin{aligned} Kr_1 &= 0,6 * 9,0 = 5,4 \\ Kr_2 &= 0,6 * 10,0 = 6,0 \end{aligned} \quad \text{aplicados em (IV.101)}$$

fornecem $L = 21,0$

já pelo critério de energia

$$L = 18,98$$

Um exemplo adicional é indicado na figura (V.5), no qual se testou uma malha extremamente simples (32 nós

com um contorno (EF-EI) quadrado), ainda assim obtendo resultados considerados satisfatórios.

Em todos estes testes fez-se uso de EI. Consequentemente, para o número de nós indicados em cada caso, deve-se descontar o número de pontos de referência, para então calcular a quantidade de equações em cada sistema resolvido.

No cálculo dos coeficientes dos elementos, as integrais numéricas foram resolvidas com as seguintes ordens de integração:

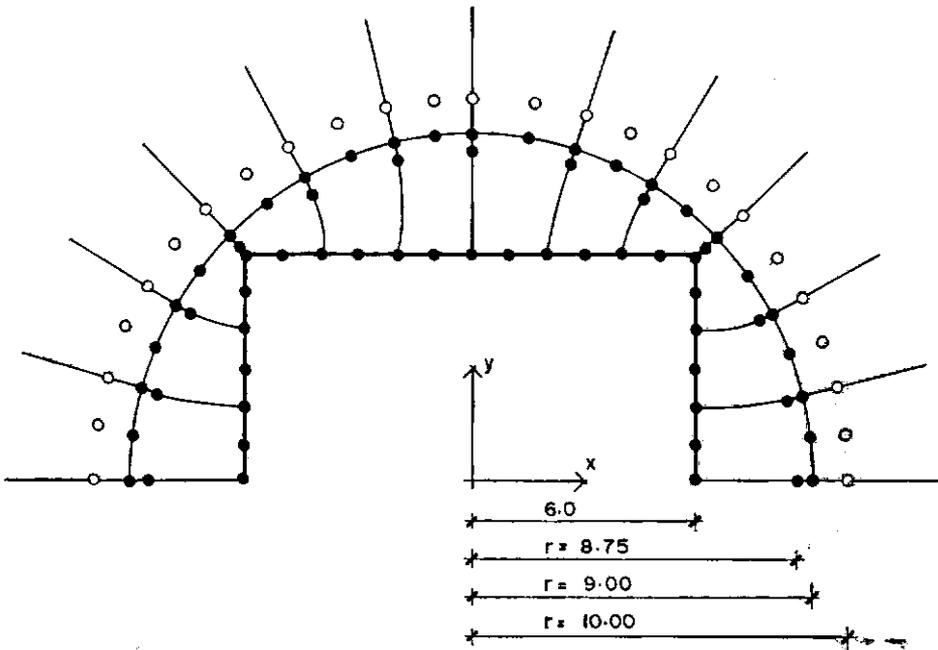
EF (quadratura de Gauss) \rightarrow NINT = 2

EI (quadratura de Gauss em η) \rightarrow NINT = 2

(integral de Simpson em ξ) \rightarrow 9 pontos por
comprimento de onda

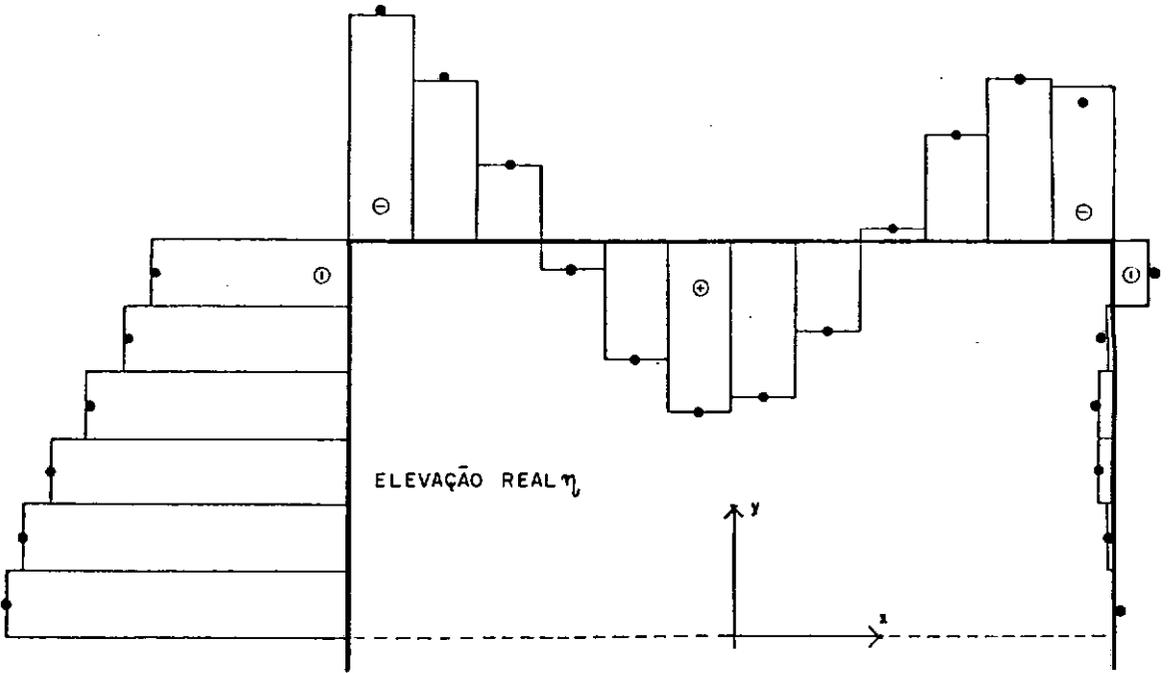
Obteve-se o resultado na integral de Simpson, dentro dos limites arbitrados, para um total de 23λ no primeiro ponto em η , e um total de 17λ para o segundo ponto em η . Nos casos de "malhas circulares", com elementos igualmente espaçados, apenas uma matriz de cada tipo de elemento é calculada. Isto significa uma razoável economia de tempo no computador.

Para finalizar, MASETTI e WROBEL (24) mostram que a magnitude da força no caixão é pouco sensível ao ângulo de ataque da onda. Assim, os estudos apresentados dão uma idéia geral do fenômeno de difração em um caixão quadrado e comprovam a eficiência do EI de três nós.



- nó
- ponto de referência

Figura (V.3) = MALHA COM 88 NÓS COM INTERFACE EF-EI CIRCULAR




 ELEMENTOS DE CONTORNO
 ● ELEMENTOS FINITOS

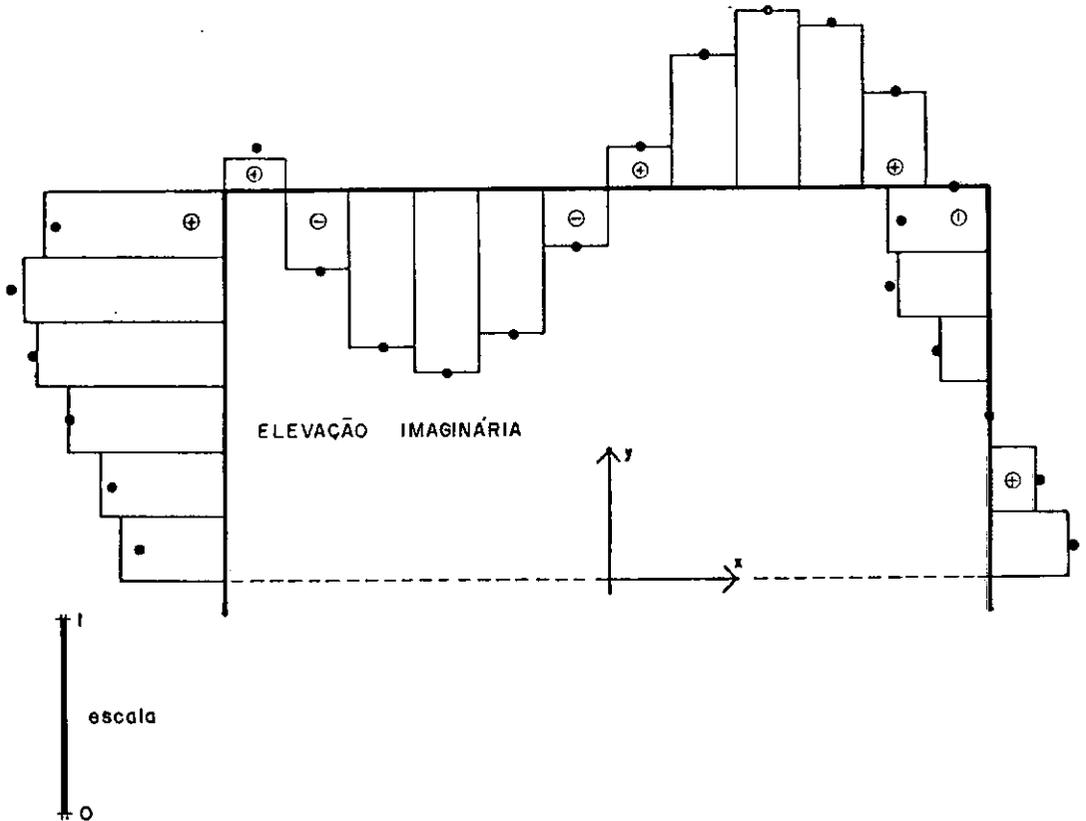


Figura (V · 4) = ELEVAÇÃO DA ONDA EM TORNO DO CAIXÃO

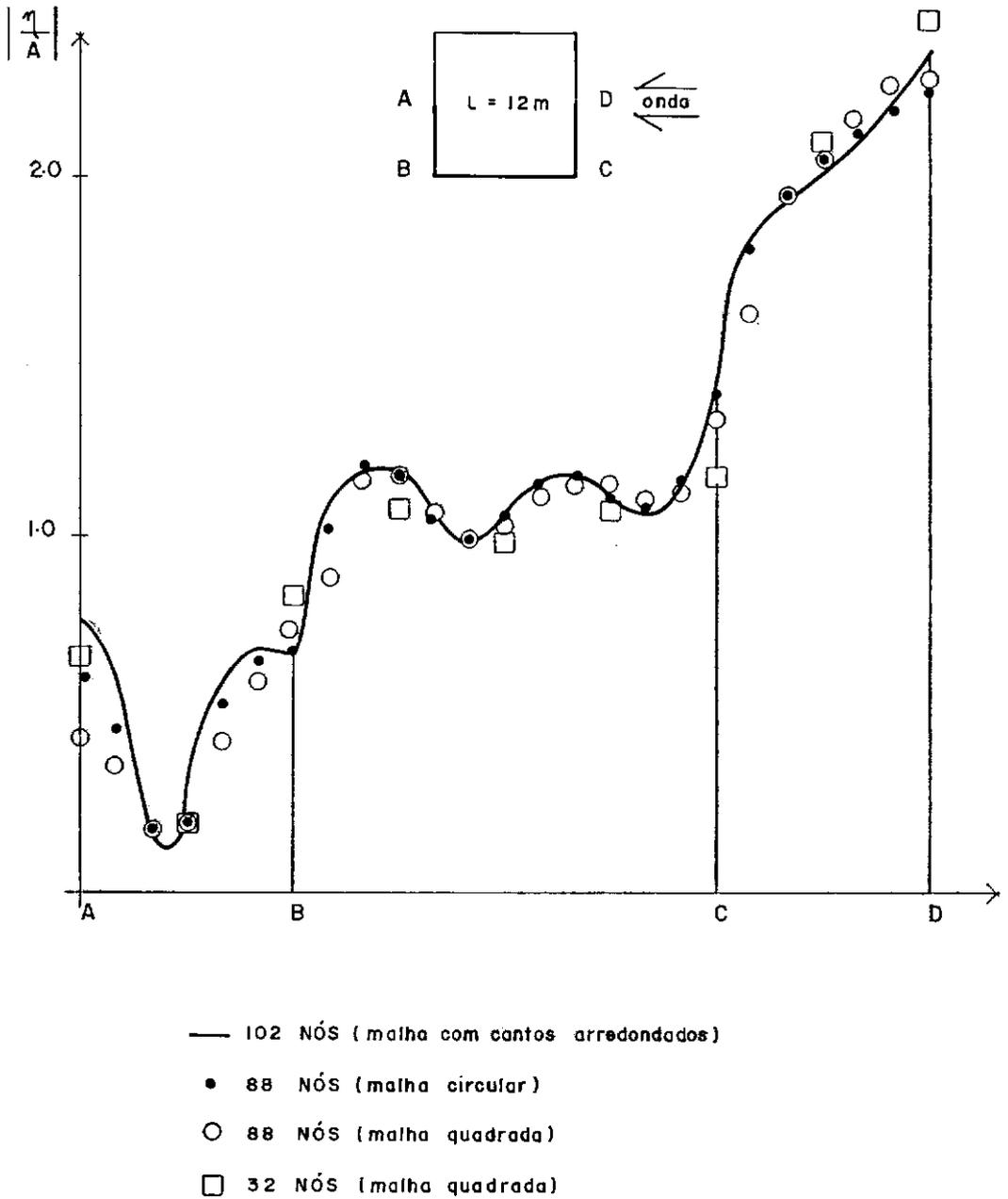


Figura (V-5) = RESULTADOS PARA DIFERENTES MALHAS DE ELEMENTOS FINITOS

V.3 - DIFRAÇÃO E REFRAÇÃO EM UMA ILHA CIRCULAR, COM FUNDO PARABÓLICO

Uma grande quantidade de análises foram feitas para o presente problema. Todas são baseadas no trabalho de HOMMA (43) que, em 1950, modelou a ilha de Kauai (Havaí) para a ação de um tsunami. A ilha foi idealizada como um cilindro sobre um parabolóide, obtendo-se uma solução analítica baseada na teoria de ondas longas. Soluções numéricas utilizando funções de Hankel (44, 45) foram desenvolvidas, assim como uma série de trabalhos utilizando EF (6, 46, 48) e EI (36, 49). Nestes trabalhos, alguns resultados são comparados com o de outros autores sem o devido cuidado quanto aos dados em questão. ZIENKIEWICZ e BETTESS (50), em uma carta ao editor de uma revista científica, chamam a atenção para este fato. A geometria adotada no presente estudo é dada pela figura (V. 6) e corresponde a da referência (11).

Este problema tornou-se um dos exemplos mais testados em difração e refração de ondas. Três períodos de onda são adotados:

$$\text{períodos da onda} \left\{ \begin{array}{l} T_1 = 240 \text{ s} \\ T_2 = 480 \text{ s} \\ T_3 = 720 \text{ s} \end{array} \right.$$

Para cada período T é calculado um número de onda K correspondente, dado pela fórmula a seguir:

$$K = \frac{2\pi}{T} (gh)^{-1/2} \quad (\text{V.9})$$

Na equação (V.9), a equação de dispersão (II.20) é forçosamente aproximada para o caso de águas profundas (estudado por Homma), onde

$$\frac{h}{\lambda} > 0,5$$

No entanto, a geometria do problema fornece

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{3600}{47102} \approx 0,076 < 0,5$$

Observou-se que o cálculo de K segundo (V.9), leva a soluções numéricas mais parecidas com a analítica dada por Homma. Nas figuras (V. 7) e (V. 8) é feita uma comparação entre o modelo de EI apresentado e a solução analítica. Uma excelente aproximação é obtida para os três períodos sendo que, no caso mais desfavorável ($T_1 = 240s$), o erro nos piores pontos não ultrapassa 5%.

Os comprimentos de decaimento L, calculados para $R_1 = 35000$ m e $R_2 = 40000$ m, são indicados abaixo:

(i) utilizando funções de Hankel

$$T = 240s \rightarrow L \approx 78000 \text{ (K calculado em (V. 9))}$$

$$\rightarrow L \approx 75513 \text{ (K calculado em (II.20))}$$

(ii) critério de energia (independe do T)

$$L \approx 74889$$

Para os demais períodos foram utilizados os mesmos L observando-se que, quanto maior o período das ondas, mais insensível é a solução à aproximação dada a L e K.

A integração do EI pelo método de Simpson se mostra eficiente, principalmente em problemas simétricos. As ordens de integração que levam o EI ao melhor resultado foram:

Gauss-Legendre = 4

Simpson = 4 segmentos parabólicos por comprimento da onda λ , com um total de 18, 14, 8 e 12 λ para cada η assumido (erro = 10^{-5})

O sistema complexo, desdobrado em um sistema real, apresenta as seguintes características:

número total de nós ativos	=	419
número de pontos de referência	=	49
número de equações	=	838
total de elementos	=	120 (EF) + 24 (EI)
largura máxima da banda	=	40
largura média da banda	=	31
número de coeficientes da matriz do sistema armazenados pelo "sky-line"	=	26565

Esses dados são apresentados em face deste ser o maior exemplo testado. Fazendo uso da semelhança de matrizes entre os elementos de cada camada da malha (figura (V. 6)), o tempo de processamento médio (ou ordem de grandeza) gasto indica a eficiência do programa implementado. Em um Burroughs B6700, do NCE/UFRJ, foram gastos $\pm 1,5$ minutos. No IBM 370/158, do LCC/CNPq, gastos ± 25 segundos, em período de utilização normal da máquina.

TSAY e LIU (48) utilizaram um EF híbrido para solução do mesmo problema. Para $T = 240$ seg foram empregados 1152 elementos triangulares para discretizar meio-domínio. HOUSTON (47) utilizou EF triangulares associados a funções de Hankel. Sua discretização, também em meio-domínio, envolveu 2640 EF. Pode-se observar que EF quadriláteros quadráticos associados a EI levam a sistemas menores e eficientes.

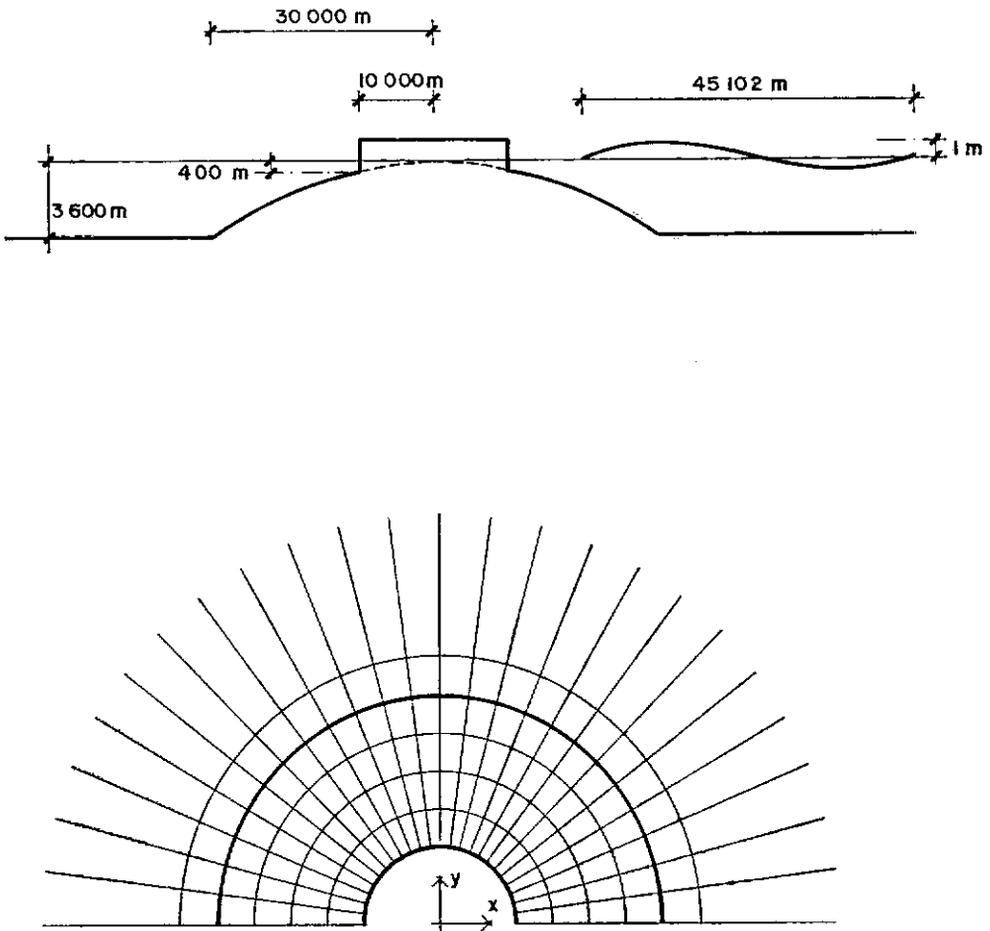


Figura (V.6) = GEOMETRIA E MALHA DE ELEMENTOS FINITOS

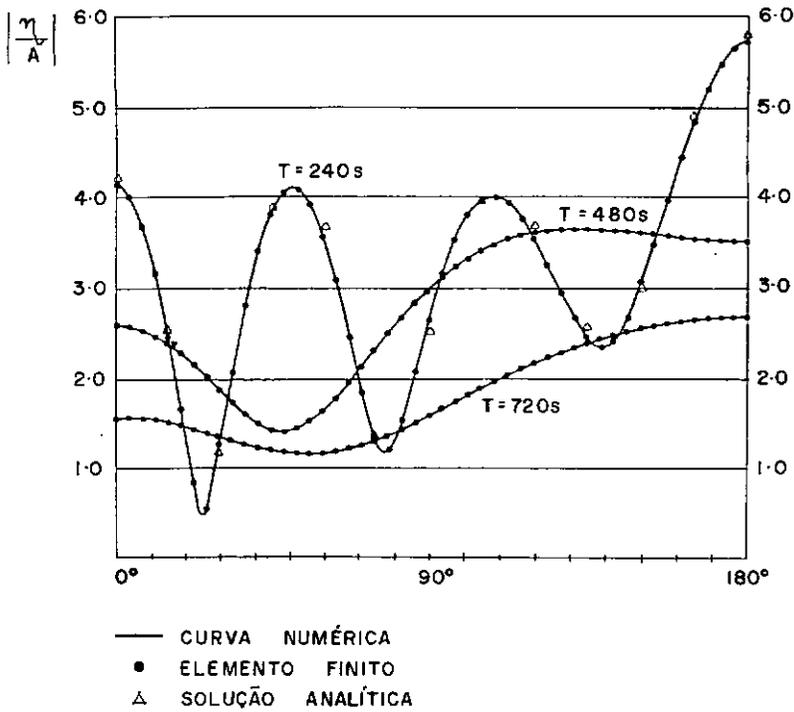
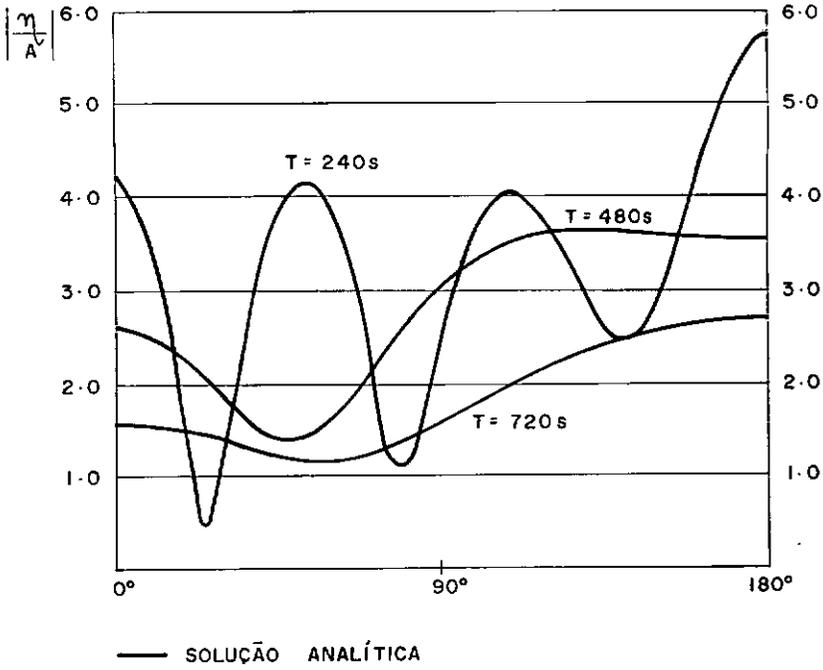


Figura (V. 7) = COMPARAÇÃO ENTRE A SOLUÇÃO ANALÍTICA E A NUMÉRICA

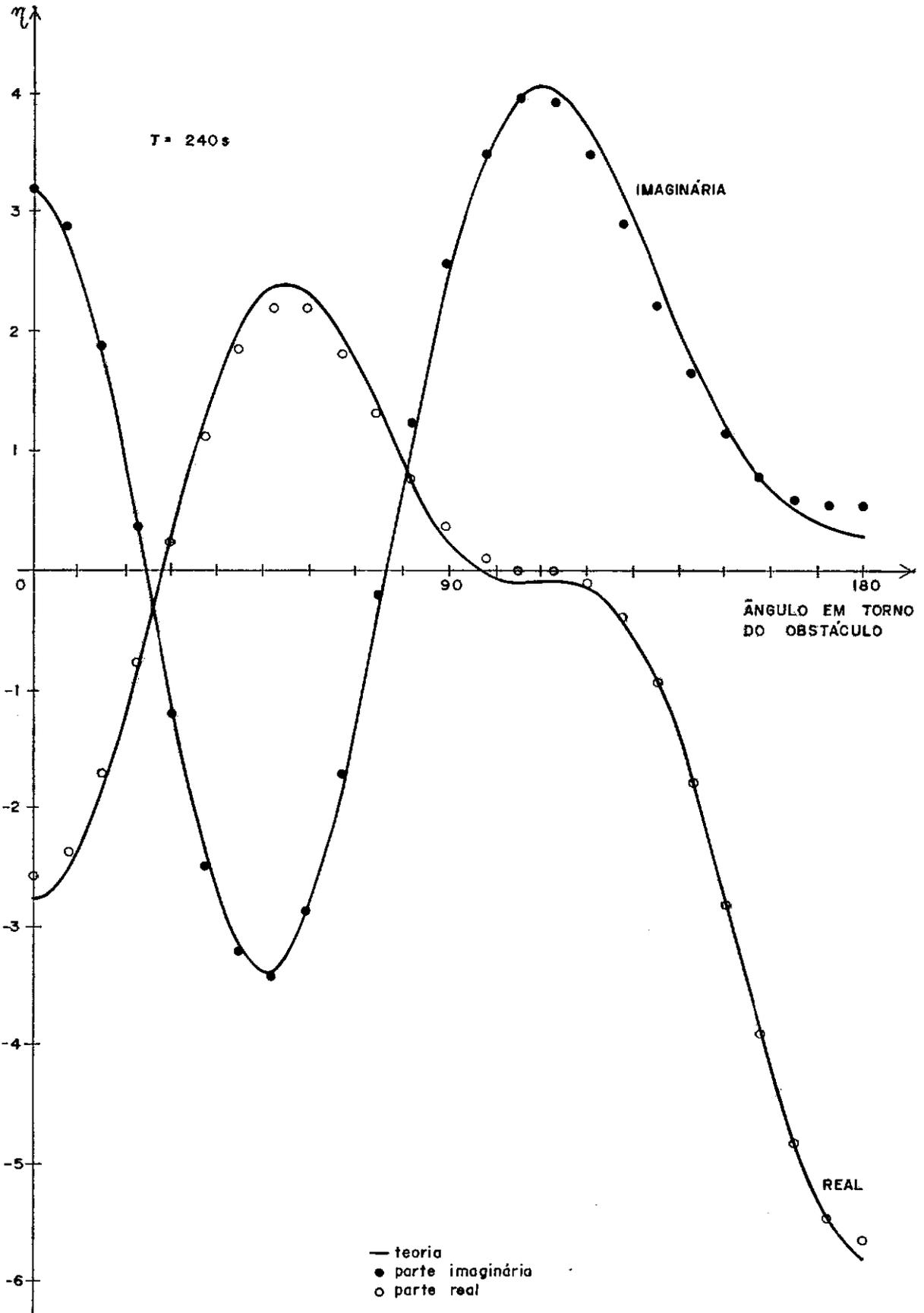


Figura (V. 8) = RESULTADOS PARA $T = 240s$

V.4 - DIFRAÇÃO EM UMA ILHA ELÍPTICA COM BASE CIRCULAR
(PROBLEMA TRIDIMENSIONAL)

Este problema é extremamente interessante pois, a rigor, sua análise requer uma discretização tridimensional. No entanto a base da ilha, figura (V. 9), é tratada como sendo parte do fundo, causando uma refração da onda incidente. Esta aproximação, porém, viola a condição de mudanças suaves ("mild-slope condition") do fundo, exigida por Berkhoff.

YUE et al (51) apresentam uma solução numérica em termos de um parâmetro geométrico "a", para o problema tridimensional. Os resultados são dados para $Ka = 1$. Um parâmetro λ , que varia de 0 a 1, é utilizado para determinar a seção da ilha sob o cilindro elíptico. A equação desta seção é dada por

$$\frac{x^2}{(\lambda(A-R) + R)^2} + \frac{y^2}{(\lambda(B-R) + R)^2} = 1 \quad (V.10)$$

onde A e B são os eixos da elipse e R é o raio do círculo da base.

A seguir, apresenta-se o cálculo dos dados da onda, para "águas rasas". São dados iniciais

$$T = 8,5 \text{ s} \quad (V.11a)$$

$$Ka = 1 \quad (V.11b)$$

Sabe-se que

$$Ka = \frac{2\pi}{T} (gh)^{-1/2} a = 1 \quad (V.12)$$

Substituindo $h = a$ em (V.12) e elevando ambos os lados ao quadrado obtem-se

$$\frac{4\pi^2 a^2}{T^2 g a} = 1$$

ou ainda

$$a = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = 17.95$$

Adota-se $a = 18$. O valor de K é dado por

$$K = \frac{\omega}{\sqrt{ga}} = 0,0557$$

Pode-se verificar que $Ka \approx 1$.

Toma-se para a amplitude da onda um valor u nitário. O comprimento da onda é calculado de maneira a satisfazer a condição de águas rasas (ou ondas longas).

$$\lambda > \frac{h}{0,05}$$

Fazendo $h = a$, leva-se à condição

$$\lambda > 360$$

arbitrou-se $\lambda = 365$.

TSAY e LIU (48), com 720 elementos, e HOUSTON (47), com 1200 elementos, apresentam boas aproximações bidimensionais para o problema tridimensional enunciado.

Para o presente exemplo foram testadas duas malhas com EI. Na primeira, apenas uma camada de EF foi utilizada na região de fundo variável, com um total de 144 equações complexas (figura (V.9)). A segunda malha consiste de três ca-

malhas de EF na região de fundo variável; no entanto, tomando vantagem da simetria, o sistema tem apenas 135 equações complexas. Os resultados para as duas malhas são semelhantes, atestando que foi obtida a melhor resposta para a aproximação bidimensional.

Dois ângulos de incidência foram utilizados. Os resultados se encontram na figura (V.10). Pode-se observar a boa qualidade dos mesmos, atentando para o fato de que os taludes (1:1) e (1:2) e, conseqüentemente, os ângulos de incidência, tem influência na aproximação obtida. A condição de pequenas variações do fundo é menos violada para o talude (1:2). Pode-se notar também que há um comportamento muito parecido entre as soluções bi e tri-dimensionais. Os resultados apresentados por Houston não tem este comportamento.

Mais uma vez o comprimento de decaimento L , calculado pelas funções de Hankel e pelo critério de energia, apresentam valores semelhantes.

$$L \text{ (Hankel)} = 84$$

$$L \text{ (energia)} = 81$$

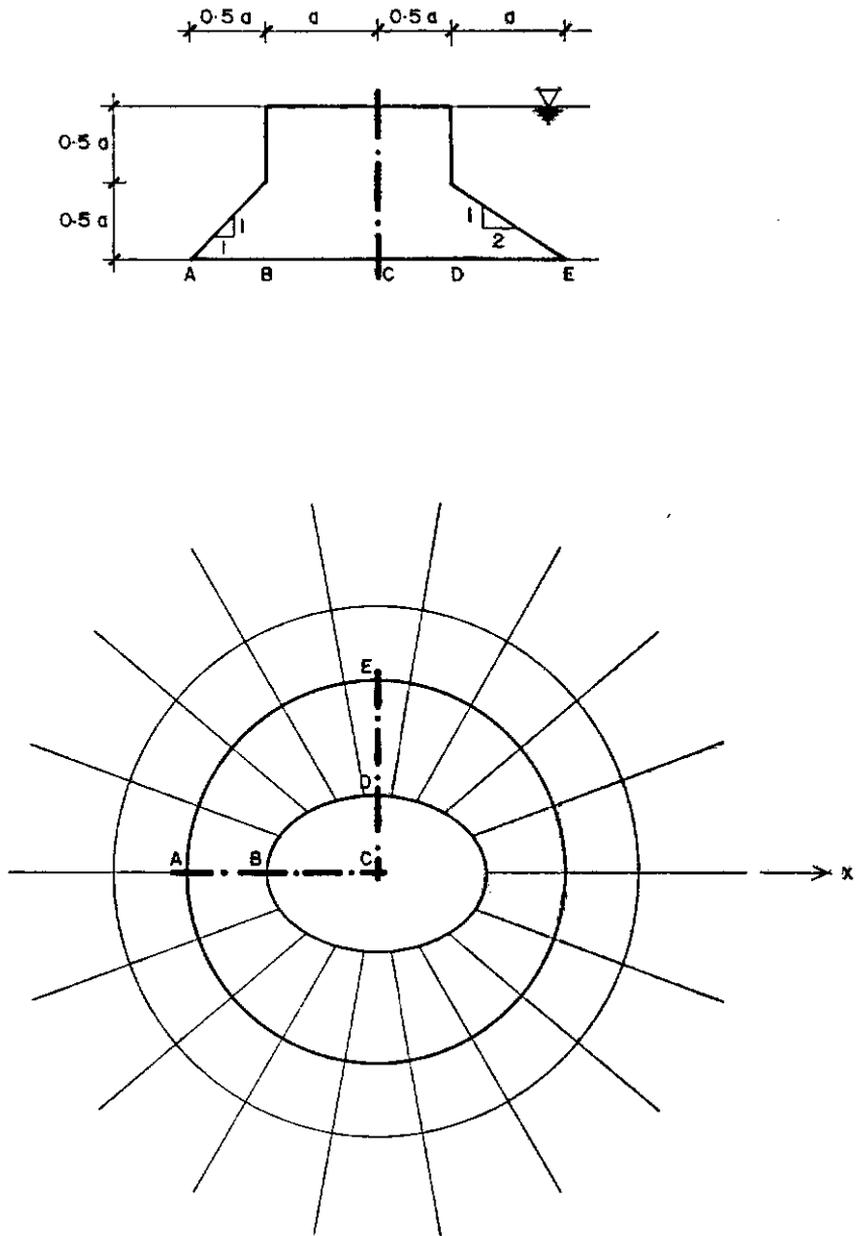
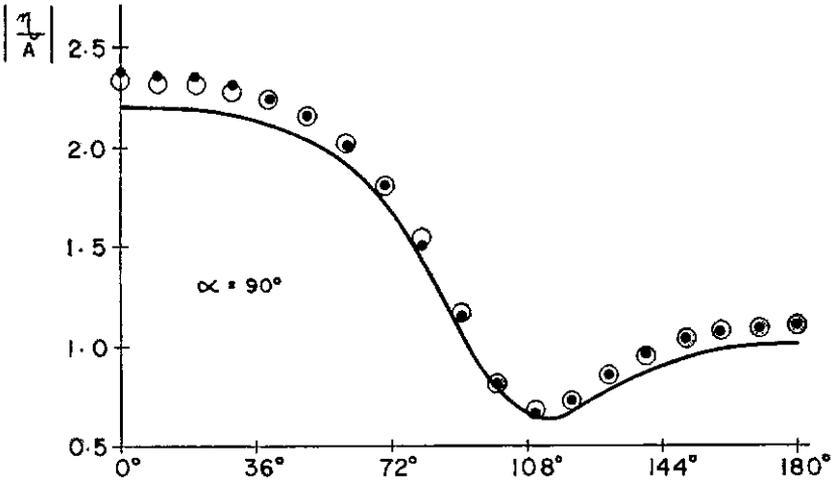
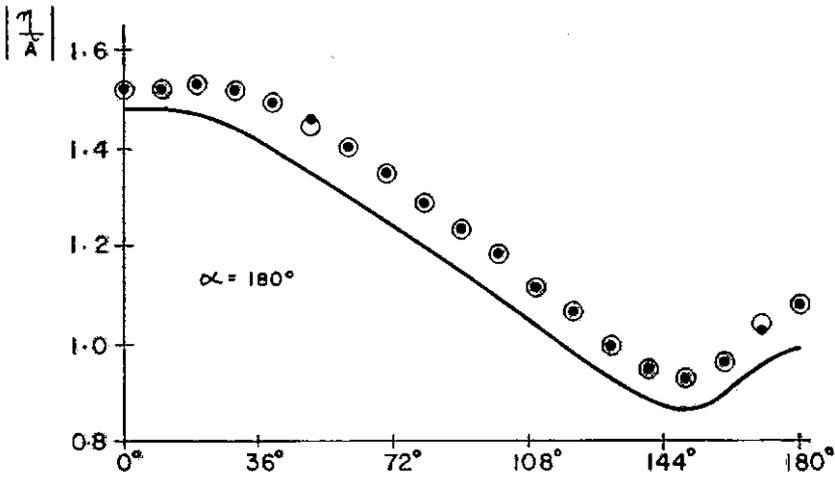


Figura (V-9) = GEOMETRIA E MALHA DE ELEMENTOS FINITOS



$Ka = 1$
 $a = 18$
 $T = 8.5 \text{ s}$

● 144 equações
 ○ 135 equações
 — solução tridimensional



Figura(V.10) • RESULTADOS NUMÉRICOS PARA ELEVAÇÃO DA ONDA

C A P Í T U L O VI

CONSIDERAÇÕES FINAIS

VI.1 - CONCLUSÕES

O presente trabalho apresenta uma série de facilidades para a formulação e implementação de Elementos Infinitos. O problema de difração e refração de ondas é modelado por Elementos Finitos acoplados a Elementos Infinitos, com um reduzido esforço computacional.

O novo Elemento Infinito desenvolvido apresenta uma série de atrativos que, combinados, asseguram a sua eficiência. As propriedades são listadas a seguir:

- a geometria é definida de forma análoga a de um Elemento Finito de 6 nós, o que facilita para efeito de geração automática de malha e entrada de dados em geral. O acoplamento entre ambos os elementos, é imediato.

- nem todos os pontos de referência (nós para definição da geometria) são nós com parâmetros nodais.
- o elemento é paramétrico, permitindo distorções.
- o elemento quando disposto de forma setorial, dá lugar a uma série de simplificações em seu cálculo.
- as funções de interpolação, na direção infinita, são constituídas por apenas dois termos exponenciais (não há termos polinomiais).
- a integração numérica é feita pelo método de Simpson, que é extremamente simples.
- o comprimento de decaimento L pode ser calculado por uma expressão com parâmetros puramente geométricos.
- o elemento pode estar localizado em qualquer lugar de uma região com profundidade constante.
- o elemento não adiciona equações ao sistema (elemento com 3 nós apenas).

Com todas estas simplificações e facilidades, os resultados apresentados são da mesma qualidade que os de outros Elementos Infinitos mais refinados.

Observa-se também que o esforço de memória para o presente estudo é bem menor que o para outras técnicas referenciadas no Capítulo V.

A maioria das características deste elemento são aplicáveis em outros problemas, que não o de difração e

refração de ondas.

Os resultados numéricos obtidos demonstram que o uso acoplado de Elementos Finitos e Infinitos leva a boas aproximações, o que recomenda a sua aplicação a problemas práticos de Engenharia.

VI.2 - RECOMENDAÇÕES

O modelo linear pode tornar-se ainda mais realístico se for levada em conta a permeabilidade dos obstáculos e o atrito de fundo (1).

Este modelo também pode ser estendido para análises tridimensionais. O Elemento Infinito a ser usado neste caso ainda é o bidimensional, pois a partir de uma certa região onde o fundo é reto e horizontal, a variação do potencial ao longo da profundidade pode ser dada por uma função hiperbólica $Z(z)$. Esta formulação permite estudar problemas em que a seção transversal do obstáculo não é constante.

O problema de ressonância em bacias portuárias pode ser analisado com pequenos ajustes no programa. Uma das modificações seria a implementação de um Elemento Infinito unidimensional, que serviria para discretizar a linha da costa fazendo valer a condição de impermeabilidade ou permeabilidade ao longo da mesma.

BIBLIOGRAFIA

- (1) PORTELA, A., - Sobre a Propagação de Ondas do Mar em Regiões Costeiras — Análise pelo Método dos Elementos Finitos, Tese apresentada ao Concurso para Especialista do Laboratório Nacional de Engenharia Civil (LNEC), Lisboa, Portugal, 1982.
- (2) LE MÉHAUTÉ, B., - An Introduction to Hydrodynamics and Water Waves, Springer-Verlag, 1976.
- (3) SARPKAYA, T., ISAACSON, M., - Mechanics of Wave Forces on Offshore Structures, Van Nostrand, 1981.
- (4) STOKER, J.J., - Water Waves, Interscience, New York, 1957.
- (5) BORGMAN, L.E., DEAN, R.G., MADSEN, O.S., - Coastal Wave Hydrodynamics — Theory and Engineering Applications, Lecture Notes for Summer Course at M.I.T., 1976.
- (6) BERKHOFF, J.C.W., - Computation of Combined Refraction-Diffraction, 13th International Conference on Coastal Engineering, Vancouver, July 1972.
- (7) BERKHOFF, J.C.W., - Linear Wave Propagation Problems and the Finite Element Method, Finite Elements in Fluids, Vol. 1, ed. R.H.Gallagher et al., John Wiley, London, 1975.

- (8) SOMMERFELD, A., - Partial Differential Equations in Physics, Academic Press, 1949.
- (9) DYM, C.L., SHAMES, I.H., - Solid Mechanics: A Variational Approach, McGraw-Hill Kogakusha, 1973.
- (10) ELSGOLTZ, L., - Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional, Ed. Mir, Moscou, 1977.
- (11) ZIENKIEWICZ, O.C., - The Finite Element Method, 3^a edição, McGraw-Hill, 1977.
- (12) ZIENKIEWICZ, O.C., MORGAN, K., - Finite Elements and Approximation, John Wiley, 1983.
- (13) BATHE, K.J., WILSON, E.L., - Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice-Hall, 1976.
- (14) STRANG, G., FIX, G.J., - An Analysis of the Finite Element Method, Prentice-Hall, 1973.
- (15) ODEN, J.T., REDDY, J.N., - An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements, John Wiley, New York, 1976.
- (16) HINTON, E., OWEN, D.R.J., - Finite Element Programming, Academic Press, 1977.
- (17) GERE, J.M., WEAVER, W., - Matrix Algebra for Engineers, Van Nostrand, 1965.
- (18) BREBBIA, C.A., TELLES, J.C.F., WROBEL, L.C., - Boundary Element Technique, Springer Verlag, 1984.

- (19) TAYLOR, C., HOOD, P., - A Numerical Solution of Navier Stokes Equation Using the Finite Element Technique, Computer and Fluids, 1(73-100), 1973.
- (20) BANDO, K., BETTESS, P., EMSON, C., - The Effectiveness of Dampers for the Analysis of Exterior Scalar Wave Diffraction by Cylinders and Ellipsoids, Report C/R/ /430/82, Inst. for Numerical Meth. in Engineering, University College of Swansea, País de Gales, 1982.
- (21) CHEN, H.S., MEI, C.C., - Oscillation and Wave Forces in a Man Made Harbour in the Open Sea, 10th Naval Hydrodynamics Symposium, Junho 1974.
- (22) BAI, K.J., YEUNG, R.W., - Numerical Solutions to Free-Surface Flow Problems, 10th Naval Hydrodynamics Symposium, Junho 1974.
- (23) ZIENKIEWICZ, O.C., KELLY, D.W., BETTESS, P., - The Coupling of the Finite Element Method and the Boundary Solution Procedures, Int. J. Num. Meth. Engng, Vol. 11, Nº 2(355-375), 1977.
- (24) MASETTI, I.Q., WROBEL, L.C., - A Study of the Interaction Between Cylinders in Waves Using Boundary Elements, Offshore Engineering, Vol. 4, ed. Carneiro, F.L.L.B., Ferrante, A.J., Batista, R.C., Pentech Press, Londres, 1984.
- (25) BETTESS, P., - Infinite Elements, Int. J. Num. Meth. Engng, Vol. 11 (53-64), 1977.

- (26) BETTESS, P., - More on Infinite Elements, Int. J. Num. Meth. Engng, Vol. 15(1613-1626), 1980.
- (27) COSTA, A.M., EBECKEN, N.F.F., - Análise de Modelos para Discretização de Domínios Infinitos, Congresso Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia, Buenos Aires, 1982.
- (28) UNGLESS, R.F., - An Infinite Finite Element, M.A.Sc.Thesis, Univ. of British Columbia, 1973.
- (29) BETTESS, P., ZIENKIEWICZ, O.C., - Diffraction and Refraction of Surface Waves Using Finite and Infinite Elements, Vol. 11 (1271-1290), 1977.
- (30) RABINOWITZ, P., WEISS, G., - Tables of Abcissas and Weights for Numerical Integrals of the Form $\int_0^{\infty} e^{-x} x^n f(x) dx$, Mathematical Tables and Other Aids to Computation, 13(285-294), 1959.
- (31) BEER, G., MEEK, J.L., - 'Infinite Domain' Elements, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 17(43-52), 1981.
- (32) LYNN, P.P., HADID, H.A., - Infinite Elements with $1/r^n$ Type Decay, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 17(347-355), 1981.
- (33) CHOW, Y.K., SMITH, I.M., - Static and Periodic Infinite Solid Elements, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 17 (503-526), 1981.

- (34) BURAGOHAIN, D.N., AGRAWAL, B.L., - Hydrodynamics Forces on Large Offshore Structures under Ground Excitation, Numerical Methods in Coupled Problems, ed. Hinton, E., et al., Pineridge Press, Swansea, 1981.
- (35) ZIENKIEWICZ, O.C., EMSON, C., BETTESS, P., - A Novel Boundary Infinite Element, Int. J. Num. Meth. Engng, Vol. 19(393-404), 1983.
- (36) BETTESS, P., EMSON, C., CHIAM, T.C., - New Mapped Infinite Element for Exterior Wave Problem, Report C/R/403/ /82, Inst. Num. Meth. in Engng., University College of Swansea, País de Gales, 1982.
- (37) BETTESS, P., EMSON, C., BANDO, K., - Some Useful Techniques for Testing Infinite Elements, Appl. Mathematical Modeling, Vol. 6, Dezembro 1982.
- (38) MEDINA, F., TAYLOR, R.L., - Finite Element Technique for Problems of Unbounded Domains, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 19 (1209-1226), 1983.
- (39) PISSANETZKY, S., - An Infinite Element and a Formula for Numerical Quadrature Over an Infinite Interval, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 19 (913-927), 1983.
- (40) ABRAMOWITZ, M., STEGUN, I.A., - Handbook of Mathematical Functions, Dover, 1965.
- (41) MacCAMY, R.C., FUCHS, R.A., - Wave Forces on Piles: A Diffraction Theory, Inst. Eng. Research, Waves Investigation Laboratory, Series 3, ISSUE 334, Berkeley, California, 1952.

- (42) MOGRIDGE, G.R., JAMIESON, W.W., - Wave Forces on Square Caissons, Proceedings of the 5th Coastal Eng. Conference, Vol. III(2271-2289), 1976.
- (43) HOMMA, S., - On the Behaviour of Seismic Sea Waves Around Circular Island, The Geophysical Magazine, Central Meteorological Observatory, Vol. XXI(199-208), Tokyo, Japão, 1950.
- (44) VASTANO, A.C., REID, R.O., - Tsunami Response for Islands: Verification of a Numerical Procedure, Journal of Marine Research, 25(129-139), 1967.
- (45) JONSSON, I.G., SKOVGAARD, O., BRINK-KJAER, O., - Diffraction and Refraction Calculations for Waves Incident on an Island, Journal of Marine Research, 34(469-496), 1976.
- (46) HOUSTON, J.R., - Modeling of Short Waves Using the Finite Element Method, Proc. 3rd International Conf. on Finite Elements in Water Resources, (5181-5195), 1980.
- (47) HOUSTON, J.R., - Combined Refraction and Diffraction of Short Waves Using the Finite Element Method, Applied Ocean Research, Vol. 3, Nº 4, 1981.
- (48) TSAY, T-K, LIU, P.L-F., - A Finite Element Model for Wave Refraction and Diffraction, Applied Ocean Research, Vol. 5, Nº 1, 1983.

- (49) ZIENKIEWICZ, O.C., BETTESS, P., KELLY, D.W., - The Finite Element Method for Determining Fluid Loadings on Rigid Structures: Two- and Three-Dimensional Formulations, Cap. 4, Numerical Methods in Offshore Engineering, Eds. Zienkiewicz, O.C., Lewis, R.W. Stagg, K.G., John Wiley, 1978.
- (50) ZIENKIEWICZ, O.C., BETTESS, P., - Letter to the Editor, Applied Ocean Research, Vol. 4, Nº 2, 1982.
- (51) YUE, D.K.P., CHEN, H.S., MEI, C.C., - A Hybrid Element Method for Diffraction of Water Waves by Three-Dimensional Bodies, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 12, Nº 2(245-266), 1978.
- (52) NACHBIN, A., WROBEL, L.C., - An Efficient Infinite Element for Fluid-Structure Interaction, Numerical Methods for Transient and Coupled Problems, ed. Lewis, R. W., et all. Pineridge Press, Swansea, 1984.
- (53) NACHBIN, A., WROBEL, L.C., - Finite Element Analysis of Combined Diffraction - Refraction, Finite Elements in Water Resources, vol. 5, Springer-Verlag, 1984.
- (54) SORIANO, H.L., COSTA, A.M., - Sugestões quanto ao Desenvolvimento de programações para análise estrutural em FORTRAN IV, PDD15/78, publicação da COPPE/UFRJ, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1978.

SÍMBOLOS

- a = amplitude da onda
- A = constante complexa, na equação do potencial incidente
- C = celeridade da onda
- Cg = celeridade de grupo
- D = comprimento característico de um corpo, índice respectivo à difratado
- EC = elemento de contorno
- EF = elemento finito
- EI = elemento infinito
- F = integrando do funcional Π
- g = aceleração da gravidade
- G = função definida em um contorno Γ
- h = profundidade
- H = altura da onda
- i = $\sqrt{-1}$
- I = índice respectivo a incidente, índice global do sistema de equações
- i, j = índices em uma matriz
- J = matriz Jacobiana
- K = número da onda
- L = comprimento de decaimento
- MEF = Método dos Elementos Finitos
- MEC = Método dos Elementos de Contorno

M_i	= função de interpolação de parâmetros nodais em elementos infinitos
n, t	= direção normal e tangencial
N_i	= função de forma para direções finitas
NINT	= ordem de integração
NMR	= Nível Médio de Repouso
$p(x)$	= polinômio em x
r	= direção radial
R	= raio
S	= coordenada local
t	= tempo
$T(t)$	= função no tempo
$T(\eta)$	= transformação de escalas
T	= período da onda
\underline{u}	= vetor unitário
u, v, w	= componentes do vetor velocidade
\underline{V}	= vetor velocidade
x, y, z	= coordenadas cartesianas
Z	= função hiperbólica em z
α	= coeficiente de permeabilidade
γ	= ângulo de incidência da onda
Γ	= contorno
Γ^m	= contorno relativo ao elemento m
$\delta^{(1)} \Pi$	= primeira variação do funcional Π
$\delta \phi$	= variação da função ϕ
η	= elevação da onda
λ	= comprimento da onda
ξ, η	= coordenadas naturais
Π	= funcional

Π_m^a	= funcional aproximado, na região do elemento m
ϕ	= potencial reduzido
ϕ_i	= potencial reduzido no nó i (local)
ϕ_I	= potencial reduzido no nó I (global)
ϕ^I	= potencial incidente reduzido
ϕ_n	= derivada normal do potencial reduzido
Φ	= potencial
ω	= frequência
Ω	= domínio bidimensional
Ω_m	= domínio definido pelo elemento m
∇	= gradiente = $(\partial/\partial x, \partial/\partial y)$
∇^2	= Laplaciano = $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

APÊNDICECONSIDERAÇÕES QUANTO À TÉCNICA DE PROGRAMAÇÃOA.1 - INTRODUÇÃO

A análise numérica de problemas pelo Método dos EF pode levar a sistemas muito grandes, caso estes exijam uma malha muito refinada. Por outro lado as matrizes dos sistemas, na maioria das aplicações com EF, tem características que possibilitam a implementação de algoritmos especiais que visam: economia de memória e eficiência em termos de tempo de processamento.

BATHE e WILSON (13) apresentam um programa para análise estrutural (STAP - Structural Analysis Program) com uma metodologia muito boa, tanto em termos de memória como em termos de tempo.

O STAP foi idealizado para resolver sistemas de equações com matrizes reais, simétricas, em banda e esparsas. Este faz uma economia, em área de memória, armazenando apenas o perfil superior da matriz do sistema (figura A.1).

1	3	0	9	0
	2	5	8	0
		4	7	0
			6	11
				10

Figura (A.1) - Armazenamento em perfil (SKY-LINE).

Este perfil é chamado de "Sky-line". O perfil por sua vez é alocado, colocando-se coluna por coluna, em um vetor. A posição de um elemento do perfil, dentro do vetor, é indicada pelos números na figura (A.1). Observa-se então que o vetor relativo à matriz (5 x 5), deste sistema, terá apenas 11 posições. Para se poder reconstituir a matriz inicial faz-se uso de um outro vetor, que guarda os endereços dos elementos diagonais. No exemplo da figura este vetor (MAXA) seria dado como

$$\underline{MAXA} = (1, 2, 4, 6, 10) \quad (A.1)$$

Uma subrotina especial se encarrega de resolver sistemas com suas matrizes dadas em vetores.

Um outro aspecto importante do STAP, no sentido de tornar eficiente o dimensionamento de matrizes e vetores, é a utilização de um "VETOR DE TRABALHO". Este vetor, que é chamado de A, é dimensionado de maneira a comportar uma série de informações relativas ao programa. Em outras palavras, todas as propriedades geométricas e físicas dos EF e/ou EI, assim como a "matriz" do sistema e o vetor de carga, são "guardados" em A. Para encontrar cada uma destas "coisas" dentro de A, são usa

dos uma série de apontadores, que devem ser definidos com muito cuidado, pois podem ocorrer erros não detectáveis pelo sistema do computador em questão (por exemplo, considerar os endereços em MAXA como coordenadas dos nós). Mas, o fato de uma série de informações serem armazenadas diretamente em forma de vetores (que é como os computadores internamente fazem), representa também um ganho em tempo de processamento.

Todos estes conceitos são difíceis de serem entendidos em poucos parágrafos. Duas referências (13, 54) tratam deste assunto com cuidado.

A.2 - DESCRIÇÃO GERAL DO PROGRAMA

PETARDO é o nome dado ao programa aqui desenvolvido (nos moldes do STAP), sendo este nome dado pelas iniciais de: Programa de Engenharia Tratando da Análise de Refração e Difração de Ondas.

Algumas propriedades, relativas aos EF e EI utilizados, marcam a diferença básica entre o STAP e o PETARDO: o primeiro trabalha com sistemas de variáveis e coeficientes REAIS e o segundo com sistemas de variáveis e coeficientes COMPLEXOS. Para compatibilizar as subrotinas do STAP, relativas ao "sky-line", com o PETARDO, resolveu-se explicitar toda a aritmética e álgebra complexa. Por exemplo: uma equação com coeficientes e variáveis complexas será transformada em duas equações reais, sendo uma relativa à parte real e outra à parte imaginária da equação inicial.

Em termos de programação esta técnica será aplicada a nível de elemento. Para tal separa-se o parâmetro nodal ϕ em dois parâmetros nodais α e β , tal que

$$\phi = \alpha + i\beta \quad (\text{A.2})$$

Um EF passa a ter 2 "graus de liberdade" por nó, num total de 16 equações por elemento. Num EI serão 6 equações. Mas na programação armazena-se apenas o número da equação complexa relativa a um nó, já que a prescrição de α implica na prescrição de β e vice-versa. Desta forma, seja NE o número da equação complexa relativa a um certo nó, o parâmetro α estará sempre na posição $(2 * \text{NE}-1)$ do vetor de incógnitas e o parâmetro β na posição $(2 * \text{NE})$. Obedecendo esta regra, é fácil localizar um parâmetro (real ou imaginário) no sistema de equações reais, conhecendo-se o número das equações complexas.

As funções N_i dos EF são funções reais. A matriz (8×8) de um elemento, no sistema complexo, ao ser expandida para (16×16) , resultará em duas equações semelhantes (uma real e uma imaginária). Seja a expressão complexa

$$K_{11} \phi_1 + K_{12} \phi_2 + \dots + K_{18} \phi_8 \quad (\text{A.3})$$

Adotando a separação dada em (A.2), (A.3) é reescrita da seguinte forma:

$$K_{11}\alpha_1 + K_{12}\alpha_2 + \dots + K_{18}\alpha_8 + i(K_{11}\beta_1 + \dots + K_{18}\beta_8) \quad (\text{A.4})$$

Os coeficientes da matriz e os parâmetros nodais serão dispostos da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix}
 K_{11} & 0 & K_{12} & 0 & \dots & K_{18} & 0 \\
 0 & K_{11} & 0 & K_{12} & \dots & 0 & K_{18} \\
 \hline
 K_{81} & 0 & K_{82} & 0 & \dots & K_{88} & 0 \\
 0 & K_{81} & 0 & K_{82} & \dots & 0 & K_{88}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \alpha_1 \\
 \beta_1 \\
 \alpha_8 \\
 \beta_8
 \end{bmatrix}
 \quad (A.5)$$

Esta é a matriz de um EF, sendo K_{ij} dado pela equação (IV.22). É preservada a simetria da matriz. Os zeros que aparecem são frutos da utilização de uma função de interpolação real, o que desacopla os potenciais reais dos imaginários. Isto ocorrerá em qualquer EF, para profundidade variável ou não, a menos dos casos em que a malha é truncada. Pela equação (IV.16) pode-se observar que o termo complexo de amortecimento eliminará alguns destes zeros.

Já as funções M_i dos EI são funções complexas. A matriz (3 x 3) de um elemento, no sistema complexo, ao ser expandida para (6 x 6) resultará em duas equações, em que as partes reais e imaginárias do potencial ϕ^D , não ficam desacopladas. Para tal, seja inicialmente feita as seguintes separações:

para o potencial difratado vale

$$\phi^D = \alpha^D + i \beta^D \quad (A.6)$$

e o para o coeficiente K vale

$$K = KR + i KI \quad (A.7)$$

A primeira linha da matriz dos coeficientes multiplicada pelas

respectivas incógnitas, resulta em

$$K_{11}\phi_1^D + K_{12}\phi_2^D + K_{13}\phi_3^D \quad (\text{A.8})$$

Substituindo (A.6) e (A.7) em (A.8) vem:

$$\begin{aligned} & KR_{11}\alpha_1^D - KI_{11}\beta_1^D + KR_{12}\alpha_2^D - KI_{12}\beta_2^D + KR_{13}\alpha_3^D - KI_{13}\beta_3^D + \\ & + i(KI_{11}\alpha_1^D + KR_{11}\beta_1^D + KI_{12}\alpha_2^D + KR_{12}\beta_2^D + KI_{13}\alpha_3^D + KR_{13}\beta_3^D) \end{aligned}$$

Dispondo estes coeficientes de uma maneira análoga a (A.5) obtem-se

$$\begin{bmatrix} KR_{11} & -KI_{11} & KR_{12} & -KI_{12} & KR_{13} & -KI_{13} \\ KI_{11} & KR_{11} & KI_{12} & KR_{12} & KI_{13} & KR_{13} \\ KR_{21} & -KI_{21} & KR_{22} & -KI_{22} & KR_{23} & -KI_{23} \\ KI_{21} & KR_{21} & KI_{22} & KR_{22} & KI_{23} & KR_{23} \\ KR_{31} & -KI_{31} & KR_{32} & -KI_{22} & KR_{33} & -KI_{33} \\ KI_{31} & KR_{31} & KI_{32} & KR_{22} & KI_{33} & KR_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^D \\ \beta_1^D \\ \alpha_2^D \\ \beta_2^D \\ \alpha_3^D \\ \beta_3^D \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

Esta é a matriz de um EI, sendo K_{ij} ($=KR_{ij} + iKI_{ij}$) dado em (IV.94). Os termos KR_{ij} e KI_{ij} são obtidos explicitando-se os produtos entre as funções complexas (\bar{N}_i , \bar{N}_j e e^{2iKs}) presentes em (IV.94). Observa-se, no entanto, que esta matriz *real* não é simétrica, devido aos sinais negativos obtidos com $i^2 = -1$. Um artifício extremamente simples restitui à matriz a condição de simetria, possibilitando assim o uso das subrotinas do STAP.

Este consiste em multiplicar as *colunas* pares por (-1) , notando que o vetor de soluções também deve ser multiplicado por (-1) nas *linhas* pares, para que o sistema não se altere.

As matrizes dos EF devem sofrer também uma multiplicação por (-1) , em suas colunas pares, de maneira que em nós coincidentes de EF e EI, os parâmetros nodais sejam (α) e $(-\beta)$. Isto não altera a simetria da matriz.

As matrizes, antes complexas, estão prontas para serem "espalhadas" em um sistema global, por meio de subrotinas que operam apenas números reais. A estrutura do programa, por sua vez, exige que antes deste "espalhamento" a parte superior da matriz seja disposta por linhas em um vetor, que então será devidamente alocado no vetor A. Em PETARDO um algoritmo eficiente é desenvolvido montando diretamente os coeficientes K_{ij} num vetor, levando em conta que este coeficiente aparece em mais de uma posição. Desta forma cada coeficiente é calculado apenas uma vez, economizando-se o tempo gasto em integrações numéricas.