

ANÁLISE DINÂMICA NÃO-LINEAR DE SISTEMAS  
RÍGIDO-FLEXÍVEIS

Roberto Dalledone Machado

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE  
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE  
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO  
DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.).

Aprovada por:

  
Nelson Francisco Favilla Ebecken  
(Presidente)

  
Edison Castro Prates de Lima

  
Andres Ludovico Halbritter

  
Fernando Venancio Filho

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL  
AGOSTO DE 1983

MACHADO, ROBERTO DALLEONE

Análise Dinâmica Não-Linear de Sistemas Rígido-Flexíveis [Rio de Janeiro] 1983.

VIII, 153 p. 29,7 cm (COPPE-UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1983)

Tese - Univ. Fed. Rio de Janeiro. Fac. Engenharia

1. Análise Dinâmica Não-Linear I. COPPE/UFRJ  
II. Título (série).

*À minha esposa, Vânia.*

*Aos meus filhos, Roberto e Gustavo.*

## AGRADECIMENTOS

Ao Professor Nelson Francisco Favilla Ebecken, pela orientação segura e paciente prestada a este trabalho.

Ao corpo docente do Programa de Engenharia Civil da COPPE/UFRJ, na pessoa do Professor Fernando Luiz Lobo B. Carneiro, pelos ensinamentos transmitidos.

Aos colegas Vanderlei Tizatto, Adilson Carvalho Benjamim, Regina C.P.L. Toledo e Cláudio Luiz Curotto, pelo incentivo e solidariedade.

Aos companheiros do Núcleo de Computação Eletrônica da UFRJ, em particular, à Srta. Lúcia Bruno, pelo apoio dispensado.

À Universidade Federal de Viçosa (MG), pela acolhida generosa.

## RESUMO

Nos problemas que envolvem a interação de diversos meios, é vantajoso tratar as regiões de características diferentes através de algoritmos implícitos e explícitos simultaneamente.

O objetivo do presente trabalho é estudar um algoritmo misto de integração no tempo das equações gerais da dinâmica, aplicado a problemas não-lineares. A integração explícita é efetuada pelo Método da Diferença Central, enquanto que a implícita, pelo Operador de Newmark.

A análise é dirigida a sistemas rígido-flexíveis, tais como os associados a problemas de interação solo-fluido-estrutura. Nos casos de interação fluido-estrutura, examina-se a possibilidade de se desprezar a contribuição da rigidez do domínio fluido.

Utilizam-se elementos finitos isoparamétricos de variado número de pontos nodais. As matrizes de massa são do tipo discreta e agrupada a partir da matriz de massa consistente.

Alguns exemplos são apresentados e seus resultados comparados com os procedimentos usuais.

## ABSTRACT

In the analysis of interaction problems is advantageous to treat each region by implicit or explicit algorithms implemented in the same computational program.

The objective of the present work is to study a mixed time integration algorithm applied to non-linear problems. The explicit integration is obtained by the Central Difference Method, while the implicit uses the Newmark Operator.

Rigid-flexible systems, as soil-fluid-structures interaction problems, are analysed. In the fluid-structure interaction, the stiffness contribution of fluid domains is disconsidered in order to improve the efficiency of a full implicit algorithm.

Isoparametric finite elements with variable nodal points are used. Lumped or diagonal mass matrix based in the consistent mass matrix are utilized.

Some examples are presented and the results are obtained by implicit, explicit and implicit-explicit analysis.

## ÍNDICE

	Página
I - INTRODUÇÃO	
1.1. Análise Dinâmica Não-Linear de Sistemas Rígido-Flexíveis .....	1
1.2. Os Algoritmos de Integração no Tempo .....	3
II - MÉTODOS DIRETOS DE INTEGRAÇÃO	
2.1. Sistemas Semi-Discretos de Equações na Mecânica Não-Linear .....	14
2.2. Os Métodos Diretos de Integração .....	19
2.2.1. Algoritmos Explícitos: O Método da Diferença Central .....	20
2.2.2. Algoritmos Implícitos: O Método de Newmark .....	26
2.2.3. Algoritmos Mistos Implícitos-Explícitos	35
2.3. Estabilidade dos Algoritmos .....	41
2.4. Escolha do Intervalo de Integração .....	48
III - SISTEMAS RÍGIDO-FLEXÍVEIS: MODELOS IMPLEMENTADOS	
3.1. Tipos de Problemas .....	53
3.2. Formulação do Problema Pelo Método dos Elementos Finitos ..	
3.2.1. Discretização do Meio Contínuo .....	54
3.2.2. Formulação dos Efeitos Não-Lineares ....	59

3.2.3. Formulação dos Efeitos Dinâmicos .....	63
3.3. Implementação Numérica .....	
3.3.1. Integração das Matrizes do Sistema ....	67
3.3.2. Matriz de Massa .....	69
3.3.3. Matriz de Amortecimento .....	70
3.4. Discretização do Fluido .....	
3.4.1. Detalhes de Implementação .....	72
3.4.2. Influência da Rigidez do Fluido .....	75
3.5. O Modelo de Interface .....	76
 IV - APLICAÇÕES	
4.1. Viga Bi-Apoiada .....	79
4.2. Propagação de Ondas em Meio Fluido .....	81
4.3. Fluido Confinado em Tubo Cilíndrico .....	97
4.4. Calota Esférica Delgada .....	108
4.5. Fundação Circular Sobre Maciço Terroso .....	111
4.6. Casca Cilíndrica Imersa em Meio Fluido .....	119
4.7. Vaso de Pressão .....	126
 V - COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES .....	139
 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	145

## I - INTRODUÇÃO

### 1.1. Análise Dinâmica Não-Linear em Sistemas Rígido Flexíveis

Atualmente, o engenheiro estrutural se defronta com problemas complexos, cuja análise deve ser realizada no domínio da dinâmica não-linear. A solução desses problemas era, entretanto, extremamente difícil, se não mesmo impossível, há pouco tempo atrás. Alguns fatores motivaram o tratamento de modelos cada vez mais complexos.

Houve uma mudança no conceito de utilização dos materiais, procurando-se maior economia que, aliada à garantia de segurança, visava a um completo aproveitamento das características de resistência. Em consequência, surgiram estruturas mais esbeltas e com maiores possibilidades de apresentarem um comportamento não-linear, quer em termos de equação constitutiva (não-linearidade física), quer em termos de grandes deslocamentos e mudanças acentuadas na geometria (não-linearidade geométrica).

O segundo fator é devido ao aparecimento de novos e complexos sistemas estruturais, sujeitos a ações preponderantemente dinâmicas. É o caso, por exemplo, das estruturas *off-shore*, de prospecção e exploração de petróleo na plataforma marítima continental. A análise dinâmica dessas estruturas é fundamental, pois um dos carregamentos mais importantes a ser considerado no projeto é devido à ação das ondas.

Muitas vezes a estrutura se comporta de uma maneira não-linear quando submetida a carregamentos dinâmicos. Por exemplo, em transientes de curta duração, como no caso de cargas de impacto ou de explosões, pode ocorrer um escoamento do material, ocasionado por elevadas tensões.

Grandes obras, tais como barragens e reatores nucleares, por segurança, ou mesmo por exigências de normas técnicas especializadas, devem ser analisadas dinamicamente e verificados os efeitos não-lineares, mesmo que o comportamento da es-

trutura seja linear.

Apesar dessas análises serem dispendiosas, são importantes na proporção em que um acidente puder se tornar catástrofico. Assim, verificações de choques, explosões, abalos sísmicos, etc., precisam ser consideradas no projeto.

Dentro desse contexto, é que os problemas que envolvem a interação de diversos meios de características diferentes - tema central deste estudo, devem ser encarados, de maneira global.

O inter-relacionamento entre os diversos meios deve ser considerado para permitir análises mais seguras e precisas. Tratados independentemente sob um carregamento dinâmico, podem provocar uma solução diferente da realidade. Por exemplo, o comportamento de um corpo elasto-plástico mergulhado em um meio fluido, com o qual interage dinamicamente, é outro daquele quando isolado. Devido às vibrações do corpo, surgirão pressões hidro-dinâmicas (admitindo-se que se trate de água). O aparecimento de tais pressões é um novo carregamento que modifica as deformações do corpo. Essas deformações, por sua vez, acabam alterando as próprias pressões hidro-dinâmicas que lhes causaram, num mecanismo contínuo.

É evidente que, além dos aspectos acima discutidos, as análises no campo da dinâmica não-linear só puderam ser concretizadas com o aperfeiçoamento dos computadores digitais, que se tornaram mais rápidos e com maior capacidade de armazenamento de dados. Em paralelo, houve um aprimoramento nos processos e nas técnicas de programação, que permitiram a implementação de programas eficientes.

Deve-se destacar a importância do Método dos Elementos Finitos que, pela sua simplicidade e pelo seu vasto campo de aplicação, é hoje uma ferramenta de cálculo universalmente consagrada. Através dele, discretizando-se o meio contínuo de modo sistemático e uniforme, foi possível a realização de análises tão sofisticadas quanto precisas.

Este trabalho visa apresentar e discutir novas técnicas de análise dinâmica não-linear, em problemas que envolvem a interação de sistemas rígido-flexíveis, através do Método dos Elementos Finitos. Para tanto, desenvolveu-se um programa de computador em linguagem FORTRAN-IV, com os recursos do sistema Borroughs B-6700, permitindo a comparação entre essas novas técnicas e os algoritmos tradicionalmente utilizados.

O estudo limitou-se aos casos de não-linearidade física, correspondendo a equações constitutivas não-lineares e mantendo a linearidade geométrica, definida por pequenos deslocamentos e deformações.

### 1.2. Os Algoritmos de Integração no Tempo

As equações gerais da dinâmica podem ser integradas por dois grupos distintos de algoritmos [01], a saber: os Processos Diretos, pelos quais a solução é obtida passo a passo, em intervalos discretos de tempo, e o Método da Superposição Modal, onde se transformam as coordenadas do sistema estrutural para o sistema modal, com o objetivo de se reduzir o número de graus de liberdade do mesmo.

A escolha apropriada desses algoritmos é responsável pela eficiência da análise. Ao contrário dos programas de análise estática, que podem ser utilizados como verdadeiras *caixas-pretas* pelo engenheiro, os de análise dinâmica podem fornecer resultados absolutamente irrealistas, se o usuário não tiver um profundo conhecimento dos algoritmos de integração no tempo das equações gerais da dinâmica. Além disso a solução pode se tornar muito onerosa se estes programas forem empregados inadequadamente.

A utilização do Método da Superposição Modal só é eficiente se apenas poucos modos de vibração forem necessários para a análise, ou se o sistema for localmente não-linear [02].

Deste modo, os problemas dinâmicos não-lineares

tem sido resolvidos preferencialmente através dos métodos diretos. Nesses, nenhuma transformação de coordenadas é realizada. Partindo-se dos deslocamentos e velocidades no tempo  $t = 0$ , e utilizando-se um intervalo de integração  $\Delta t$  convenientemente escolhido, as soluções são obtidas nos tempos  $t + \Delta t$ ,  $t + 2 \Delta t$ ,  $t + 3 \Delta t$ , etc.

Quando a solução for obtida a partir das condições de equilíbrio no tempo  $t$ , diz-se que o algoritmo é *explícito*. Caso contrário, se o equilíbrio for considerado no tempo  $t + \Delta t$ , então o algoritmo será *implícito*. Do primeiro grupo, destaca-se o Método da Diferença Central, por ser o mais utilizado e conhecido. Os métodos de Newmark, Wilson, Houbolt e Park são exemplos característicos do segundo grupo de algoritmos.

A escolha de um desses processos deve se basear em diversos aspectos, tais como o tipo e o tamanho do problema que se defronta, a capacidade de armazenamento de dados de computador utilizado e os custos computacionais resultantes.

Os problemas dinâmicos podem ser classificados em dois grupos de características distintas: os de propagação de ondas e os de dinâmica estrutural propriamente dita (ou vibração forçada). A diferença básica entre essas duas classes de problemas é que nos de vibração forçada, apenas os modos mais baixos do sistema físico são excitados pelas cargas aplicadas. Em tais casos, não há necessidade de se determinar a influência dos modos mais altos, pois elevaria o esforço computacional, sem melhorar, consideravelmente, a precisão dos resultados.

Há uma preferência em se utilizar algoritmos implícitos na análise de problemas de vibração forçada. Eles apresentam a vantagem de serem incondicionalmente estáveis para intervalos de integração não inferiores a  $\pi/10\omega_{\mu}$ , sendo  $\omega_{\mu}$  a mais alta frequência do carregamento aplicado [02].

É importante ressaltar que a estabilidade do algoritmo implica na convergência dos resultados. A noção de estabilidade garante que, para pequenos intervalos de tempo, a

energia do sistema se conservará e, para intervalos maiores, não ocorrerá amplificação dos modos mais altos de vibração [03].

Os algoritmos implícitos têm o inconveniente de exigirem a montagem das matrizes globais do sistema, inúmeras fatorizações e retro-substituições. Em geral, cada fatorização envolve  $0.5 Nm^2$  operações; cada vetor solução implica em  $2 Nm$  operações; onde  $N$  é o número de graus de liberdade do sistema, e  $m$  é a semi-largura de banda da matriz de rigidez efetiva. A largura de banda é diretamente proporcional ao número de graus de liberdade e de uma numeração apropriada dos elementos.

Conseqüentemente, dependendo do caso, o custo global da análise pode sofrer uma variação linear ou cúbica, em função do número de graus de liberdade.

Quando houver um refinamento da malha de elementos finitos, para melhorar a precisão dos resultados, o esforço computacional será majorado. Tal situação tornar-se-á crítica se, com o aumento do tamanho das matrizes, decorrente do refinamento, houver necessidade de utilização de memória virtual ou particionamento em blocos.

Considerando-se o problema de custos, é vantajoso o emprego de matriz de massa consistente e elementos finitos de ordem superior. Esse tipo de tratamento mostrou-se eficaz na análise estática, podendo ser estendido aos problemas dinâmicos, se os mesmos forem considerados como estáticos, levando-se em conta os efeitos de inércia.

Os algoritmos explícitos tornam-se mais atrativos quando o sistema possuir um número elevado de graus de liberdade e, particularmente, se o problema for de propagação de ondas. De um modo geral, as operações de montagem das matrizes globais não são mais necessárias, dispensando o uso de memória virtual.

O uso de matriz de massa discreta aumenta a eficiência dos métodos explícitos, pois o sistema resultante terá

equações desacopladas e cada uma delas poderá ser resolvida independentemente.

Estes algoritmos, no entanto, têm a desvantagem de não serem estáveis para qualquer intervalo de tempo escolhido. A condição de estabilidade impõe que o intervalo de integração seja inferior a um determinado valor - o intervalo crítico, que depende do maior período de vibração do sistema. Essa é a principal limitação do método, o que implica, em certos casos, na utilização de pequenos intervalos de tempo.

Quando se adota o método explícito da Diferença Central, a consideração de matriz de massa diagonal e de elementos finitos simples deve ser a mais conveniente.

Em muitos problemas que envolvem a interação de diversos meios, é eficiente tratar as várias regiões componentes do sistema, por algoritmos implícitos e explícitos simultaneamente [04]. Esse raciocínio é compreendido através da seguinte situação: considere-se um sistema rígido-flexível, tal como o associado a um conjunto fluido-estrutura. A análise global desses problemas constata que determinadas regiões do sistema respondem mais rapidamente às ações aplicadas do que outras. Tais respostas podem ser medidas em termos de deformações. As partes rígidas (no caso, a estrutura) deformam-se menos que as flexíveis (o fluido).

A utilização de um algoritmo implícito em todo o sistema teria o inconveniente de despende um grande esforço na montagem das matrizes globais, que incluiriam os efeitos de inércia da região flexível. Entretanto, esses efeitos são desprezíveis em relação aos da parte rígida. Logo, a solução elevaria o custo global da análise.

Por outro lado, se a escolha fosse um algoritmo explícito, o intervalo de integração seria muito reduzido, pois estaria limitado ao intervalo crítico determinado em função da parte rígida, que possui o menor período de vibração do sistema. Porém, se o valor crítico fosse considerado na zona flexível, o

intervalo de tempo poderia ser muito maior, atendendo a condição de estabilidade e reduzindo o número de passos necessários na análise.

Em função do exposto, tais problemas podem ser eficientemente resolvidos, se a parte rígida for analisada por um algoritmo implícito e a flexível por um explícito. Surgiram, assim, os algoritmos *mistos* ou *implícitos-explícitos*.

Inicialmente, tentou-se solucionar tais casos através de programas independentes e específicos, acoplando-os por intermédio de uma sub-rotina de entrada e de saída. Esse tipo de acoplamento, considerado *frágil*, não trouxe bons resultados.

Belytschko e Mullen [04, 05] desenvolveram pela primeira vez um acoplamento do tipo *forte*, implementando em um único programa os dois algoritmos. A malha foi dividida em três classes de elementos: os do domínio implícito, os do explícito, e os de interface. Os nós foram classificados em implícitos e explícitos, conforme a região a que pertenciam. Em cada intervalo de tempo integravam-se os nós da zona explícita, e os seus resultados eram utilizados como *condições de contorno* para a integração dos nós implícitos.

Esquemáticamente, o funcionamento do método pode ser representado pela figura (I-1) para um sistema unidimensional. Os elementos explícitos representados na malha estão entre círculos vazios, enquanto que os implícitos estão entre círculos cheios. As informações entre os elementos de cada domínio estão indicadas em traço cheio, para os explícitos e, em pontilhado, para os implícitos.

Observa-se que, no domínio explícito, o fluxo de informações percorre apenas os nós adjacentes durante um passo de integração. Na região implícita da malha, as informações são transmitidas instantaneamente entre todos os elementos do domínio, no mesmo intervalo de tempo. O deslocamento de qualquer nó da zona implícita depende das respostas de todos os elementos dessa região. Já entre os elementos de interface, há um fluxo de

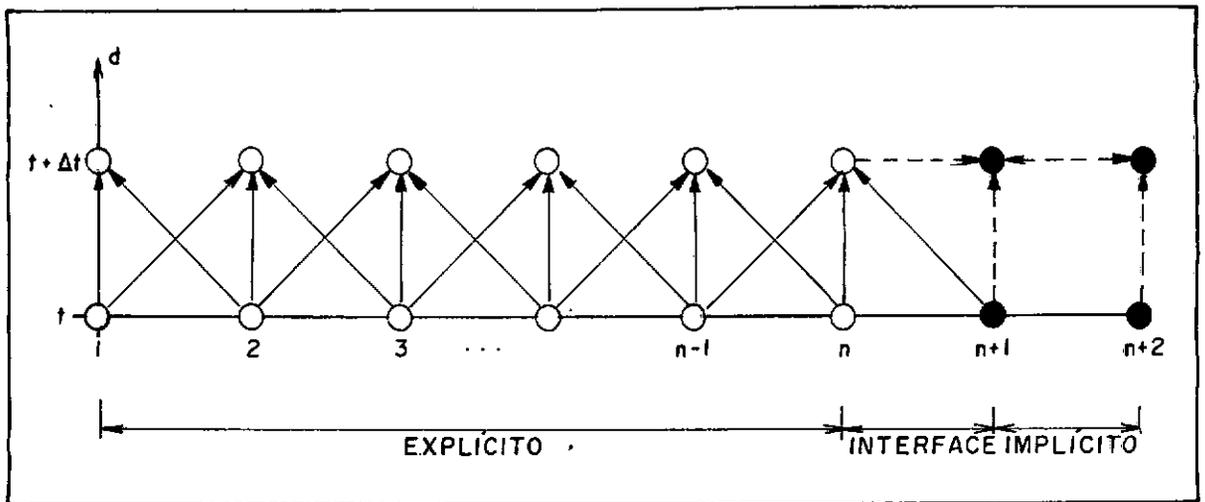


Figura (I.1)-Fluxo de Informações entre os Elementos de uma Malha Unidimensional Implícita-Explícita, com o Mesmo Intervalo de Tempo

informações no sentido da malha explícita para a implícita, mas o contrário não ocorre. Nesses casos, o  $n$ -ésimo nó da malha, por pertencer ao domínio explícito, sofre deslocamento em um intervalo de tempo, representado por  $d_n(t + \Delta t)$ , que independe do deslocamento  $d_{n+1}(t + \Delta t)$  do nó vizinho do domínio implícito. No entanto,  $d_{n+1}(t + \Delta t)$  depende do valor de  $d_n(t + \Delta t)$ . É por essa razão que os nós dos elementos explícitos eram integrados, primeiramente, a cada intervalo de tempo.

O exemplo ilustrado acima refere-se à utilização de um mesmo intervalo de integração para as duas regiões. É possível adotar tempos diferentes em cada domínio, mas os problemas devidos ao acoplamento tornam-se maiores, não se aconselhando soluções dessa natureza. Belytschko [06] previu que o número de elementos de interface depende da relação entre os intervalos de tempo da região implícita e da explícita. Se essa relação for igual a  $N$ , então serão necessários  $N$  elementos de interface. A figura (I-2) mostra uma malha unidimensional, em que o intervalo de tempo dos elementos implícitos é o dobro dos explícitos, havendo, portanto, dois elementos de interface.

Por meio do esquema proposto, outras combinações de acoplamentos, além da implícita-explicita (I - E), podem ser realizadas em sistemas rígido-flexíveis. Pode-se adotar o algo

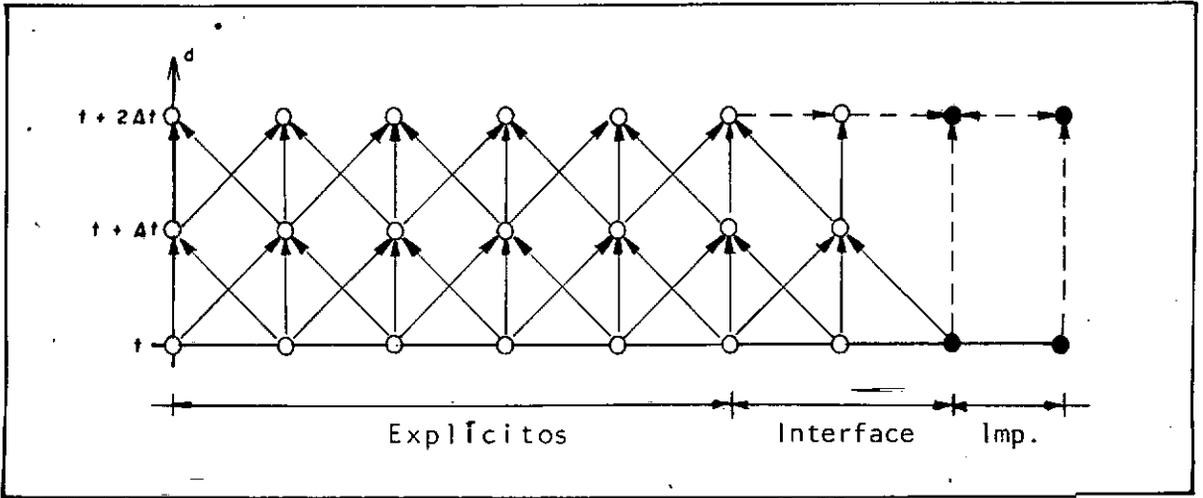


Figura (I.2)- Fluxo de Informações entre os Elementos de uma Malha Unidimensional Implícita-Explícita, com o Intervalo de Tempo do Domínio Implícito Igual ao Dobro do Explícito

rítmo implícito para as duas regiões da malha, mas cada uma delas será integrada por diferentes intervalos de tempo (partição I - I). Analogamente, o problema pode ser resolvido através do algoritmo explícito, com intervalos distintos para cada domínio (partição  $E^m - E$ ).

Nas integrações implícita-implícita (I - I) e explícita-explícita ( $E^m - E$ ), as equações de diferenças não são suficientes para determinar todas as variáveis presentes no procedimento de integração ao longo do tempo. Algumas aproximações precisam ser realizadas. Nas partições (I - I), são necessárias algumas extrapolações nos nós de interface, enquanto que nas ( $E^m - E$ ) devem ser processadas algumas interpolações. Essas simplificações afetam a estabilidade da integração.

Conseqüentemente, acoplamentos do tipo (I - I) são instáveis na ausência de amortecimento, porém a introdução de elementos de interface com amortecimento pode tornar o algoritmo estável. A estabilidade dos algoritmos ( $E^m - E$ ) depende do tipo de interpolação adotado: se a interpolação for linear, o método será condicionalmente estável [06].

Algumas possíveis combinações de acoplamentos es

tão ilustradas na figura (I-3), em sistemas unidimensionais. A figura (I-3.a) mostra um exemplo de partição ( $E^m - E$ ), com interpolação na interface. A malha da figura (I-3.b) é do tipo ( $E^m - E$ ), mas sem interpolações nos elementos de fronteira. Finalmente, a figura (I-3.c) apresenta o caso de um acoplamento ( $I - I$ ), onde são feitas algumas extrapolações.

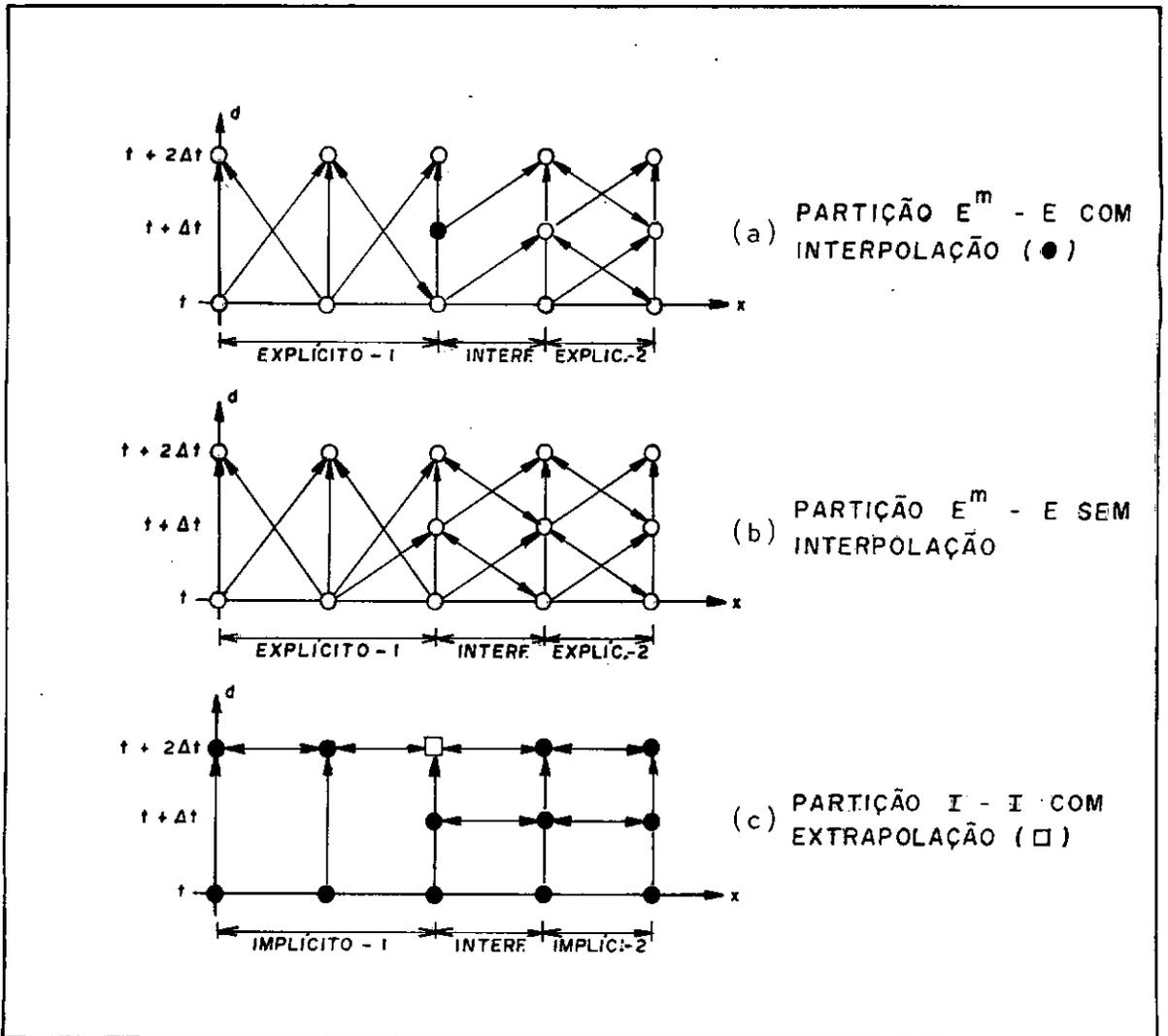


Figura (I.3)-Outros Tipos de Acoplamentos com Diferentes Intervalos de Integração

Na referência [06], Belytschko expõe um tipo de acoplamento que, associado ao esquema iterativo descrito em [05], provou ser um recurso efetivo para a análise não-linear, resultando em um algoritmo estável no domínio implícito e que atende as condições de Courant-Fredrichs-Lewy na região explícita.

Felipa realiza um estudo, em [07], sobre as propriedades de estabilidade dos algoritmos implícitos-explicitos, concluindo que, para interpolação linear, o método é condicionalmente estável.

A solução apresentada por Belytschko [04, 05] mostrou-se eficiente para análises não-lineares. Porém, devido ao tratamento especial dos elementos de interface, a sua implementação exige cuidados adicionais, com o inconveniente de alterar profundamente a estrutura de um programa de integração.

Visando sanar tais problemas, Hughes [8-11] implementou um novo tipo de algoritmo de integração implícita-explicita, cujo acoplamento é de fácil programação. Através dele, as características de estabilidade e precisão são mantidas. Nessa técnica, dispensa-se o uso dos elementos de interface. A malha é dividida apenas em elementos implícitos e explícitos. Os nós não são mais caracterizados de acordo com o domínio a que pertencem, pois um mesmo nó pode estar associado a um elemento implícito e a outro explícito.

O acoplamento das duas regiões é feito ao nível de elemento, durante o processo usual de *montagem* das matrizes globais pelo Método dos Elementos Finitos. Quando a matriz de massa for diagonal, a matriz de rigidez efetiva, resultante desse processo, é simétrica, positiva-definida, e possui sub-regiões diagonais correspondentes aos elementos explícitos. A figura (I-4) mostra a composição dessa matriz para uma malha bi-dimensional de elementos finitos implícitos-explicitos.

A topologia da matriz de rigidez recomenda o uso de esquemas de solução do tipo coluna ativa, pelos quais os coeficientes nulos, fora do *sky-line*, não são armazenados nem ope-

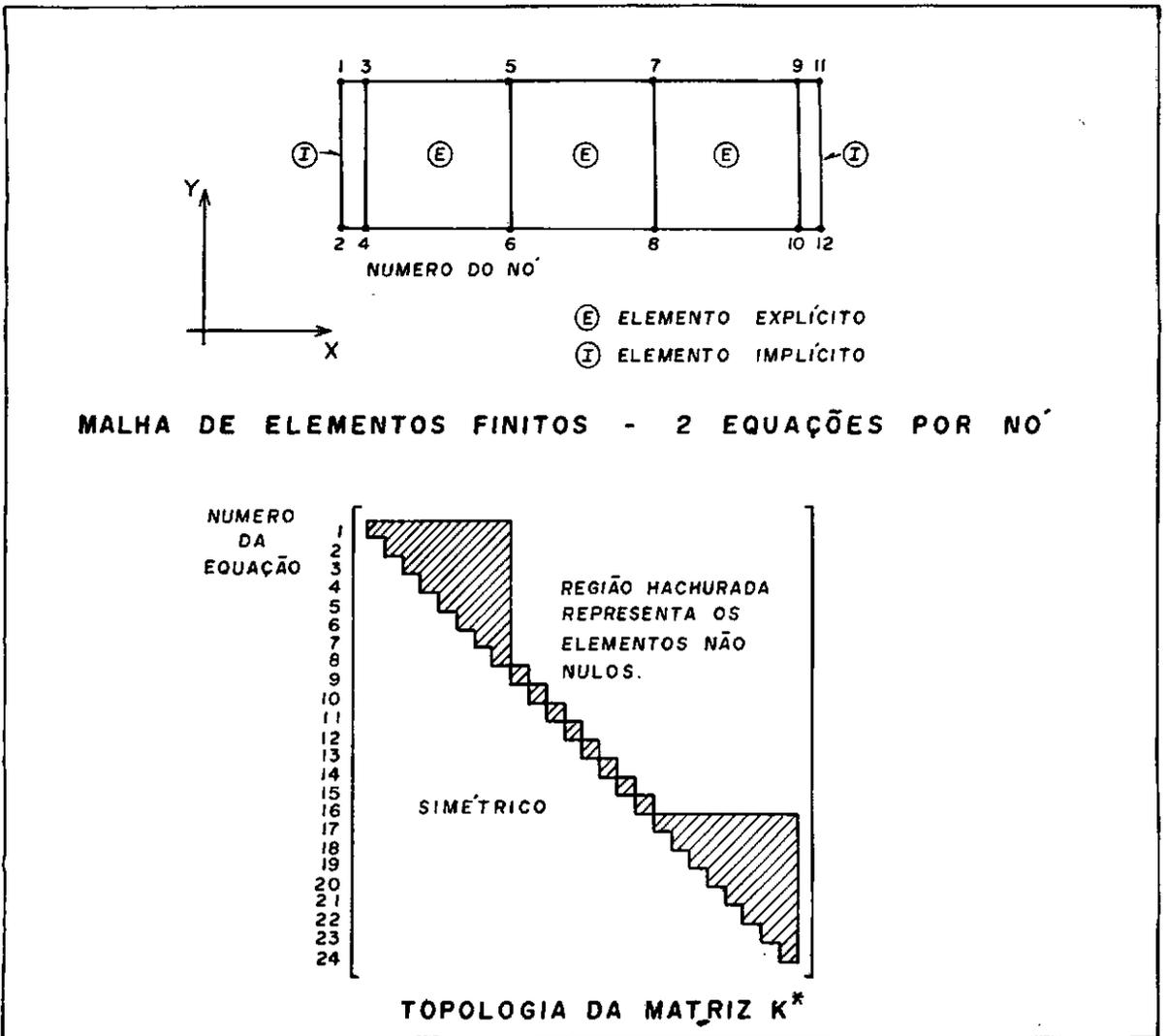


Figura (1.4)- Malha Bi-Dimensional de Elementos Finitos Implícitos-Explícitos e a Correspondente Matriz de Rigidez Efetiva

rados [12-14]. Seguindo essa orientação, a integração implícita-explícita no tempo não apresenta nenhuma dificuldade adicional, podendo ser facilmente implementada em programas que se utilizam de algoritmos implícitos.

Este trabalho procurou seguir as recomendações indicadas por Hughes [08-11], desenvolvendo um algoritmo misto implícito-explícito de implementação muito simples e adaptando-o a um programa destinado à análise dinâmica não-linear, por meio do algoritmo explícito [15]. A integração explícita foi atendida pelo Método da Diferença Central, enquanto que a implícita pelo

Método de Newmark. A distribuição de massa utilizou o conceito de matriz de massa agrupada.

O algoritmo desenvolvido é apresentado no Capítulo II, bem como os métodos da Diferença Central e o de Newmark. São discutidos os detalhes de implementação, as vantagens e as limitações de cada processo, comparando-os entre si. São expostos estudos referentes à estabilidade e precisão.

O Capítulo III trata dos sistemas rígido-flexíveis, onde os modelos implementados para utilização em cada domínio são apresentados. Discute-se o tratamento não-linear empregado.

No quarto capítulo, são mostradas algumas aplicações, e os resultados são comparados com os processos tradicionais. O programa implementado permite a comparação fiel entre os diversos métodos, já que é possível definir a análise totalmente implícita, totalmente explícita, ou mista.

No quinto e último capítulo são discutidos os resultados, apresentadas algumas conclusões e colocadas sugestões para estudos futuros.

## II - MÉTODOS DIRETOS DE INTEGRAÇÃO

### 2.1. Sistemas Semi-Discretos de Equações na Mecânica Não-Linear

Freqüentemente, os problemas da mecânica computacional podem ser representados por meio de sistemas de equações tais como:

$$\underline{M} \cdot \underline{a} = \underline{F} \quad (\text{II.1})$$

onde:

$\underline{M}$  - matriz de massa generalizada

$\underline{a}$  - vetor das acelerações

$\underline{F}$  - vetor das forças aplicadas

A discretização de um meio contínuo qualquer, através de elementos finitos, resulta em um sistema de equações semelhante a (II.1). Em geral,  $\underline{M}$ ,  $\underline{a}$ , e  $\underline{F}$  são dependentes do tempo. A seguir, apresentam-se algumas aplicações, como ilustração.

#### A) Dinâmica Linear Estrutural

Neste caso, o vetor das forças pode ser decomposto em:

$$\underline{F} = \underline{F}^{\text{ext}} - \underline{C} \cdot \underline{v} - \underline{K} \cdot \underline{d} \quad (\text{II.2})$$

onde:

$\underline{C}$  - matriz de amortecimento viscoso

$\underline{K}$  - matriz de rigidez

$\underline{F}^{\text{ext}}$  - vetor das forças externas aplicadas

$\underline{d}$  - vetor dos deslocamentos

$\underline{v}$  - vetor das velocidades

A equação (II.2), aplicada em (II.1), pode ser considerada como um equilíbrio estático no tempo  $t$  das seguintes parcelas:

$$\underline{F}_I(t) = \underline{F}^{ext}(t) - \underline{F}_D(t) - \underline{F}_S(t) \quad (II.3)$$

$$\underline{F}_I(t) = \underline{M} \cdot \underline{a} \quad - \quad \text{forças de inércia}$$

$$\underline{F}_D(t) = \underline{C} \cdot \underline{v} \quad - \quad \text{forças de amortecimento}$$

$$\underline{F}_S(t) = \underline{K} \cdot \underline{d} \quad - \quad \text{forças elásticas}$$

Todas as parcelas são dependentes do tempo. Normalmente, as matrizes  $\underline{M}$ ,  $\underline{C}$  e  $\underline{K}$  são constantes e simétricas;  $\underline{M}$  e  $\underline{K}$  são positivas definidas;  $\underline{C}$  é positiva semi-definida; e  $\underline{F}^{ext} = \underline{F}^{ext}(t)$  é uma função genérica do tempo.

Os vetores de velocidades e acelerações podem ser representados como derivadas primeira e segunda, respectivamente, do vetor de deslocamentos em relação ao tempo:

$$\underline{v} = \underline{d}' = \partial \underline{d} / \partial t \quad (II.4)$$

$$\underline{a} = \underline{d}'' = \partial^2 \underline{d} / \partial t^2 \quad (II.5)$$

Trata-se de um problema de valor inicial, que consiste em se encontrar uma função  $\underline{d} = \underline{d}(t)$ , que satisfaça (II.1) e (II.2) e as condições iniciais:

$$\underline{d}(0) = \underline{d}_0 \quad (II.6)$$

$$\underline{v}(0) = \underline{v}_0 \quad (II.7)$$

Onde  $\underline{d}_0$  e  $\underline{v}_0$  são os vetores dos valores iniciais conhecidos.

## B) Condução Linear de Calor

Em problemas desta natureza:

$$\underline{F} = \underline{F}^{\text{ext}} - \underline{C} \cdot \underline{v} \quad (\text{II.8})$$

Onde:

- $\underline{M}$  - matriz de capacidade térmica
- $\underline{C}$  - matriz de condutividade térmica
- $\underline{F}^{\text{ext}}$  - vetor de transmissão de calor
- $\underline{v}$  - vetor das temperaturas
- $\underline{a}$  - vetor dos gradientes de temperatura

Em geral,  $\underline{M}$  e  $\underline{C}$  são considerados constantes, simétricas e positivas definidas; e  $\underline{F}^{\text{ext}} = \underline{F}^{\text{ext}}(t)$  é uma função genérica do tempo.

Procura-se uma função  $\underline{v} = \underline{v}(t)$ , que satisfaça (II.1) e (II.8) e às condições iniciais:

$$\underline{v}(0) = \underline{v}_0 \quad (\text{II.9})$$

Onde  $\underline{v}_0$  é dado.

## C) Escoamentos Viscosos Incompressíveis

Segundo a formulação da equação de Navier-Stokes em coordenadas Eulerianas [16], tem-se:

$$\underline{F} = \underline{F}^{\text{ext}} - \underline{C}_{\mu} \cdot \underline{v} - \underline{N}(v) \quad (\text{II.10})$$

Onde:

- $\underline{C}_{\mu}$  - é a soma das matrizes de viscosidade e incompressibilidade

$\underline{N}$  - vetor das forças convectivas

$\underline{v}$  - velocidade do escoamento

Nesta formulação,  $\underline{M}$  e  $\underline{C}$  são constantes, simétricas e positivas definidas;  $\underline{a} = \underline{v}'$  é a derivada Euleriana da velocidade em relação ao tempo.

Resolve-se o problema de valor inicial quando se encontrar uma função  $\underline{v} = \underline{v}(t)$  que satisfaça (II.1), (II.9) e (II.10).

#### D) Dinâmica Estrutural Não-Linear

Usualmente empregam-se coordenadas Lâgrangeanas na formulação da dinâmica estrutural não-linear. Nestes casos, tem-se:

$$\underline{F} = \underline{F}^{\text{ext}} - \underline{F}^{\text{int}} \quad (\text{II.11})$$

Onde:

$\underline{F}^{\text{int}}$  - vetor das forças internas, que dependem dos deslocamentos, das velocidades e das suas respectivas *histórias*

$\underline{F}^{\text{ext}}$  - vetor das forças externas

$\underline{d}$  - vetor dos deslocamentos em relação a uma configuração de referência

$\underline{v} = \underline{d}'$  - vetor das velocidades

$\underline{a} = \underline{v}' = \underline{d}''$  - vetor das acelerações

As não-linearidades a serem consideradas são devidas a grandes deslocamentos da estrutura, ou a uma plastificação parcial ou total da mesma. Analiticamente, estes efeitos podem ser representados por complexas equações algébricas, equações diferenciais, equações integrais, ou, algumas vezes, são necessárias inequações como na Teoria da Plasticidade.

Assim, o vetor das forças internas pode ser escrito da seguinte forma:

$$\underline{F}^{int} = \underline{N}(\underline{d}, \underline{v}) \quad (\text{II.12})$$

Onde  $\underline{N}$  é uma função não-linear dos deslocamentos e das velocidades.

As derivadas parciais de  $\underline{N}$  em relação a  $\underline{d}$  e a  $\underline{v}$

$$\underline{K}_T = \partial \underline{N} / \partial \underline{d} \quad (\text{II.13})$$

e

$$\underline{C}_T = \partial \underline{N} / \partial \underline{v} \quad (\text{II.14})$$

são conhecidas como matriz de rigidez tangente e matriz de amortecimento tangente, respectivamente. São operadores lineares associados a  $\underline{N}$ , mas, em geral, não variam linearmente em relação a  $\underline{d}$  e a  $\underline{v}$ .

Nestes casos,

- $\underline{M}$  - constante
- $\underline{M}$ ,  $\underline{K}_T$ ,  $\underline{C}_T$  - simétricas
- $\underline{M}$ ,  $\underline{K}_T$  - positivas definidas
- $\underline{C}_T$  - positiva semi-definida

O problema de valor inicial consiste em se encontrar uma função  $\underline{d} = \underline{d}(t)$  que satisfaça as equações (II.1), (II.6), (II.7), (II.11) e (II.12).

Este trabalho se limitou ao estudo das equações deste item, considerando apenas as não-linearidades do tipo físico, onde as equações constitutivas não seguem variações lineares. Para representar o comportamento elasto-plástico dos materiais, utilizou-se o Modelo de Von Mises, desenvolvido na Teoria Matemática da Plasticidade, conforme será discutido no

Capítulo III).

As equações diferenciais serão integradas por algoritmos diretos, descritos a seguir.

## 2.2. Os Métodos Diretos de Integração

Os métodos diretos tem por objetivo integrar no tempo sistemas de equações análogos ao (II.1), através de procedimentos do tipo passo a passo, sem efetuar nenhuma mudança de base de coordenadas [17-19]. Sumariamente, estes algoritmos se apoiam nos seguintes aspectos:

a) A solução é do tipo discreto, ou seja, resolve-se o sistema de equações em apenas um número inteiro de intervalos de tempo  $t + \Delta t$ ,  $t + 2 \Delta t$ ,  $t + 3 \Delta t$ , etc. Os efeitos de inércia e amortecimento são considerados apenas naqueles pontos correspondentes aos intervalos de integração. Desta forma, a cada intervalo de tempo, podem ser utilizados os processos de resolução de sistemas de equações empregados na análise estática.

b) Assume-se uma variação contínua dos deslocamentos, velocidades e acelerações em cada intervalo de integração, a menos que a estrutura atinja o colapso. Esta definição é, em última análise, a que determina a precisão, a estabilidade e o custo do processo de solução.

Os métodos diretos, conforme o tempo em que se efetua o equilíbrio das equações gerais da dinâmica, dividem-se em:

- algoritmos explícitos - se o equilíbrio acontece no tempo  $t$ ;

- algoritmos implícitos - caso o equilíbrio seja atingido no tempo  $t + \Delta t$ .

Comentou-se, no primeiro capítulo, as vantagens e

as limitações destes algoritmos, e mostrou-se que, em problemas que envolvem a interação de dois ou mais meios diferentes, é interessante a utilização simultânea dos mesmos, através dos processos mistos. Os detalhes de implementação serão apresentados nos itens que se seguem, de acordo com a seqüência: inicialmente os algoritmos explícitos, por meio do Método da Diferença Central; a seguir, os implícitos, que serão abordados apenas através do Método de Newmark; compreendidos estes dois grupos de algoritmos, estuda-se o Método Misto Implícito-Explícito.

Antes, porém, deve ser feita uma observação a respeito da equação (II.12). Se a matriz de amortecimento for obtida a partir da matriz de massa, conforme será visto no Capítulo III, então o vetor das forças internas passa a ser uma função não-linear apenas dos deslocamentos, reduzindo-se a:

$$\underline{\underline{F}}^{int} = \underline{\underline{N}}(\underline{\underline{d}}) \quad (II.15)$$

Tal procedimento será adotado neste trabalho, convencendo-se, daqui por diante, que o vetor  $\underline{\underline{F}}^{int}(t)$  é o correspondente a equação (II.15), e atendendo-se a equação (II.13).

### 2.2.1. Algoritmos Explícitos: O Método da Diferença Central

Considere-se a equação (II.1) que no caso mais geral da dinâmica estrutural pode ser expressa por:

$$\underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{a}} + \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{v}} + \underline{\underline{F}}^{int} = \underline{\underline{F}}^{ext}(t) \quad (II.16)$$

A integração no tempo desta equação pode ser feita por expressões em diferenças finitas, para aproximar acelerações e velocidades em termos de deslocamentos. Embora teoricamente qualquer uma possa ser utilizada, a escolha deve ser cuidadosa para que o esquema de solução seja efetivo. Poucas são as expressões que apresentam resultados satisfatórios. Dentre essas, aquela que vem sendo utilizada com mais freqüência é a

correspondente ao Método da Diferença Central.

Neste método, assume-se que:

$$\underline{a}_t = \frac{1}{\Delta t^2} \left[ \underline{d}_{t-\Delta t} - 2 \cdot \underline{d}_t + \underline{d}_{t+\Delta t} \right] \quad (\text{II.17})$$

Como em (II.17) o erro apresentado é da ordem de  $\Delta t^2$ , para que a expressão das velocidades mantenha a mesma ordem, toma-se:

$$\underline{v}_t = \frac{1}{2 \Delta t} \left[ - \underline{d}_{t-\Delta t} + \underline{d}_{t+\Delta t} \right] \quad (\text{II.18})$$

Desta forma, o equilíbrio da equação (II.16) acontecerá no tempo  $t$ , ou seja,

$$\underline{M} \cdot \underline{a}_t + \underline{C} \cdot \underline{v}_t + \underline{F}^{\text{int}}(t) = \underline{F}^{\text{ext}}(t) \quad (\text{II.19})$$

Substituindo-se (II.17) e (II.18) em (II.19), obtêm-se a expressão que fornece os deslocamentos no tempo  $t + \Delta t$  em função daqueles obtidos no tempo  $t$ :

$$\begin{aligned} (\underline{M} + 0,5 \Delta t \underline{C}) \cdot \frac{\underline{d}_{t+\Delta t}}{\Delta t^2} &= \underline{F}^{\text{ext}} - \underline{F}^{\text{int}} + \\ &+ \frac{2}{\Delta t^2} \cdot \underline{M} \cdot \underline{d}_t - (\underline{M} - 0,5 \Delta t \underline{C}) \frac{\underline{d}_{t-\Delta t}}{\Delta t^2} \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

Como os deslocamentos no tempo  $t + \Delta t$  foram obtidos através de (II.20) a partir de uma condição de equilíbrio no tempo  $t$ , diz-se que o algoritmo é *explícito*.

Pode ser observado em (II.20) que a determinação

de  $\underline{d}_{t+\Delta t}$  envolve os termos  $\underline{d}_t$  e  $\underline{d}_{t-\Delta t}$ . Quando  $t = 0$ , há necessidade de um esquema especial de partida, a fim de que se obtenha o valor de  $\underline{d}_{-\Delta t}$ . Como em geral  $\underline{d}_0$  e  $\underline{v}_0$  são conhecidos, e  $\underline{a}_0$  pode ser determinado através de (II.19), as relações (II.17) e (II.18) devem ser utilizadas para o cálculo de  $\underline{d}_{-\Delta t}$ . Neste caso, para cada elemento (i) dos vetores considerados, tem-se:

$$\underline{d}_{-\Delta t}^{(i)} = \underline{d}_0^{(i)} - \Delta t \cdot \underline{v}_0^{(i)} + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \underline{a}_0^{(i)} \quad (\text{II.21})$$

O Método da Diferença Central, conforme apresentado, é uma prática ferramenta de análise, principalmente se a matriz de massa utilizada for diagonal. Quando isto acontece, a matriz de amortecimento, que em geral é expressa em função da matriz de massa, passa a ser também diagonal, permitindo reescrever a equação (II.20) de uma maneira mais compacta:

$$\hat{\underline{M}} \cdot \underline{d}_{t+\Delta t} = \hat{\underline{F}}_t \quad (\text{II.22})$$

Onde:

$$\hat{\underline{M}} = (\underline{M} + 0.5 \Delta t \underline{C}) \cdot \frac{1}{\Delta t^2} \quad (\text{II.23})$$

e

$$\begin{aligned} \hat{\underline{F}}_t = & \underline{F}_t^{\text{ext}} - \underline{F}_t^{\text{int}} + \frac{2}{\Delta t^2} \cdot \underline{M} \cdot \underline{d}_t - \\ & - (\underline{M} - 0.5 \Delta t \underline{C}) \cdot \frac{\underline{d}_{t-\Delta t}}{\Delta t^2} \end{aligned} \quad (\text{II.24})$$

Sob estas condições, não há necessidade de se realizar a montagem das matrizes do sistema, pelo processo tradicional de *espalhamento dos coeficientes*, nem proceder a resolução do sistema de equações (II.16). Isto porque as equações deste sistema são desacopladas e podem ser resolvidas, independentemente

temente, ao nível do elemento. Neste caso, o cálculo dos deslocamentos será efetuado por meio de uma expressão algébrica como a de (II.25); para cada grau de liberdade  $i$ , tem-se:

$$d_{t+\Delta t}^{(i)} = \frac{\hat{F}_t^{(i)}}{\hat{m}_{ii}} \quad (\text{II.25})$$

Onde:

$$\hat{m}_{ii} = \frac{m_{ii}}{\Delta t^2} + \frac{c_{ii}}{2 \cdot \Delta t}$$

e

$m_{ii}$  e  $c_{ii}$  - são o  $i$ -ésimo elemento da diagonal das matrizes de massa e de amortecimento, respectivamente

$$m_{ii} > 0$$

Esta é a principal vantagem do Método da Diferença Central. Como as matrizes do sistema não precisam ser montadas, o gasto de memória será reduzido, e a solução poderá ser rapidamente obtida ao nível do elemento [20].

Contudo, sua eficiência depende de se adotarem matrizes de massa e amortecimento diagonais. Além disso, o intervalo de tempo não deve ser maior que o intervalo crítico:

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{T_n}{\pi} \quad (\text{II.26})$$

Onde  $T_n$  é o menor período de vibração de todos os elementos finitos, e  $n$  é a ordem do sistema de equações.

Esta limitação é devida ao fato de que o método é instável para intervalos de tempo maiores do que o crítico.

Nessas situações, os erros de truncamento e arredondamento da análise numérica crescem indefinidamente, ocasionando uma resposta que não corresponde a realidade.

O período de vibração do elemento é diretamente proporcional à quantidade de massa que o mesmo possui. Por esse motivo, exige-se que  $m_{ii}$  seja maior do que zero em (II.25) para que o processo possa ser realizado. Caso contrário, o intervalo crítico será nulo, tornando impossível a análise.

A necessidade de se utilizar intervalos de tempo menores do que o crítico representa a maior desvantagem do Método da Diferença Central, que, por este motivo, é considerado *condicionalmente estável*. Esta limitação pode ser compreendida através do seguinte caso. Seja um sistema de ordem  $n$  elevada. Por hipótese, um de seus elementos tem massa tão pequena que se aproxima de zero, implicando em um período de vibração muito reduzido. Em consequência, tal elemento determinará o valor crítico de intervalo de integração que, por sua vez, será bastante reduzido. Os intervalos de tempo a serem adotados deverão ser muito pequenos para que satisfaçam (II.26). Com isto, o esforço computacional será majorado, o custo total da análise se elevará, e o algoritmo poderá deixar de ser vantajoso.

O Método da Diferença Central só é compensador se as matrizes de massa e de amortecimento forem diagonais e se o intervalo de tempo de integração não for muito reduzido (sem deixar de atender ao intervalo crítico) [21-23]. Caso contrário, a análise corre o risco de se tornar ineficiente, e, se assim for, é preferível a mudança de algoritmo.

O Quadro II.1 apresenta o procedimento para implementação do Método da Diferença Central.

QUADRO (II.1) - Roteiro para Implementação do Método da Diferença Central

---

- 1) Início do processo:  $t = 0$
- 2) Montagem das matrizes do sistema:

$$\underline{\underline{M}}, \underline{\underline{C}}, \text{ e } \underline{\underline{F}}^{int}$$

( $\underline{\underline{M}}$  e  $\underline{\underline{C}}$  diagonais)

- 3) Inicialização dos deslocamentos, velocidades e acelerações:

$$\underline{\underline{d}}_0, \underline{\underline{v}}_0, \text{ e } \underline{\underline{a}}_0$$

- 4) Escolha de  $\Delta t \leq \Delta t_{cr}$

- 5) Cálculo de  $\underline{\underline{d}}_{-\Delta t}$ :

$$\underline{\underline{d}}_{-\Delta t}^{(i)} = \underline{\underline{d}}_0^{(i)} - \Delta t \cdot \underline{\underline{v}}_0^{(i)} + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \underline{\underline{a}}_0^{(i)}$$

- 6) Cálculo da matriz de massa  $\hat{\underline{\underline{M}}}$ :

$$\hat{\underline{\underline{M}}} = \frac{1}{\Delta t^2} \cdot \underline{\underline{M}} + \frac{1}{2\Delta t} \cdot \underline{\underline{C}}$$

- 7) Incrementação do tempo:  $t = t + \Delta t$

- 8) Cálculo do vetor de forças  $\hat{\underline{\underline{F}}}_t$ :

$$\begin{aligned} \hat{\underline{\underline{F}}}_t &= \underline{\underline{F}}_t^{ext} - \underline{\underline{F}}_t^{int} + \frac{2}{\Delta t^2} \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{d}}_t - \\ &- (\underline{\underline{M}} - 0,5 \Delta t \underline{\underline{C}}) \cdot \frac{\underline{\underline{d}}_{t-\Delta t}}{\Delta t^2} \end{aligned}$$

Continua ...

---

 QUADRO (II.1) - Continuação...
 

---

9) Cálculo dos deslocamentos, velocidades e acelerações, por meio de equações desacopladas, ao nível do elemento:

$$d_{t+\Delta t}^{(i)} = \frac{\hat{F}_t^{(i)}}{\hat{m}_{ii}}$$

$$a_t^{(i)} = \frac{1}{\Delta t^2} (d_{t-\Delta t}^{(i)} - 2 d_t^{(i)} + d_{t+\Delta t}^{(i)})$$

$$v_t^{(i)} = \frac{1}{2\Delta t} (d_{t+\Delta t}^{(i)} - d_{t-\Delta t}^{(i)})$$

10) Retorno do processo ao item (7) até que se atinja o tempo final de análise.

---

### 2.2.2. Algoritmos Implícitos: O Método de Newmark

Os algoritmos implícitos são aqueles que resolvem o sistema de equações (II.16) obtendo a solução dos deslocamentos a partir de uma condição de equilíbrio no tempo  $t+\Delta t$ . A grande vantagem desses métodos é que, em geral, eles são incondicionalmente estáveis, ou seja, qualquer intervalo de integração pode ser adotado sem prejuízo da estabilidade da solução [24-26]. Em relação ao Método da Diferença Central, intervalos maiores podem ser considerados, diminuindo o número de iterações, sem que se atinja uma condição de instabilidade numérica.

Por outro lado, há necessidade de fatorização da matriz de rigidez efetiva do sistema. Isto representa um esforço computacional enorme na medida em que o número de graus de liberdade cresce.

Portanto, a eficiência dos algoritmos implícitos

está intimamente relacionada com o processo de resolução do sistema de equações, bem como com as técnicas empregadas para o armazenamento das matrizes do sistema. Em geral, devido as características topológicas de tais matrizes e, com a finalidade de se reduzir o gasto de memória, é aconselhável a utilização de um esquema de armazenamento do tipo coluna ativa, onde os elementos nulos acima do *sky-line* não são armazenados.

O custo da análise é o fator limitante do emprego dos algoritmos implícitos. Quanto mais refinada for a malha de elementos finitos, maior será a ordem das matrizes do sistema, que, por sua vez, exigirão um gasto excessivo de memória, podendo ser necessária a utilização de memória virtual ou partição em bloco para a resolução do sistema. Em decorrência, os custos da análise se elevarão, até o ponto em que uma solução alternativa seja mais atraente.

Assim como os explícitos, os algoritmos implícitos são desenvolvidos a partir de expressões em diferenças finitas. Os mais utilizados na análise estrutural são os métodos de Houbolt, o de Wilson, e o de Newmark. Pela precisão, facilidade de implementação, e por ser o mais comumente utilizado, optou-se pelo algoritmo de Newmark, sobre o qual se discutirá a seguir. Os outros métodos podem ser encontrados nas referências [24-27].

O algoritmo de Newmark pode ser entendido como uma extensão do método da aceleração linear. Assume-se que a aceleração varie linearmente em relação ao tempo (conforme a figura (II.1)), e, desta forma, os deslocamentos e as velocidades podem ser expressos nos seguintes termos:

$$\underline{v}_{t+\Delta t} = \underline{v}_t + [(1 - \gamma) \underline{a}_t + \gamma \cdot \underline{a}_{t+\Delta t}] \cdot \Delta t \quad (\text{II.27})$$

$$\underline{d}_{t+\Delta t} = \underline{d}_t + \underline{v}_t \cdot \Delta t + [(0.5 - \beta) \cdot \underline{a}_t + \beta \cdot \underline{a}_{t+\Delta t}] \cdot \Delta t^2$$

onde

$\beta$  e  $\gamma$  são parâmetros que determinam a estabilidade e a precisão numérica.

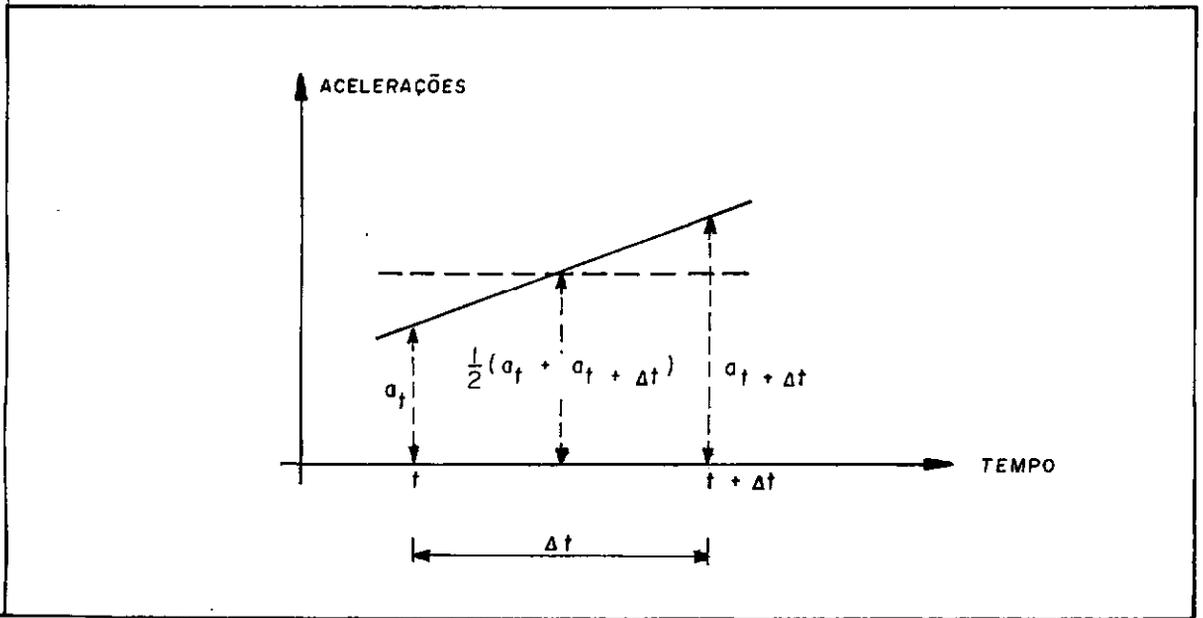


FIGURA (II.1) - O Método da Aceleração Linear.

Quando:

$$\gamma \geq 0,5 \quad \text{e} \quad \beta \geq 0,25 \cdot (0,50 + \gamma)^2$$

o método é incondicionalmente estável. Newmark havia sugerido inicialmente que se adotassem 0,5 e 0,25 para  $\gamma$  e  $\beta$  respectivamente. Quando  $\gamma = 0,5$  e  $\beta = 0,167$ , as relações (II.27) e (II.28) correspondem ao método da aceleração linear.

O algoritmo de Newmark é considerado implícito porque o equilíbrio é obtido no tempo  $t + \Delta t$ . Desta forma, a equação (II.16) passa a ser expressa por:

$$\tilde{M} \cdot \tilde{a}_{t+\Delta t} + \tilde{C} \cdot \tilde{v}_{t+\Delta t} + \tilde{F}_{t+\Delta t}^{\text{int}} = \tilde{F}_{t+\Delta t}^{\text{ext}} \quad (\text{II.29})$$

Sejam, por definição:

$$\tilde{v}_{t+\Delta t} = v_t + (1 - \gamma) \cdot \underline{a}_t \cdot \Delta t \quad (\text{II.30})$$

e

$$\tilde{d}_{t+\Delta t} = d_t + v_t \cdot \Delta t + (0.5 - \beta) \cdot \underline{a}_t \cdot \Delta t^2 \quad (\text{II.31})$$

Onde:

$\tilde{d}_{t+\Delta t}$  e  $\tilde{v}_{t+\Delta t}$  são os *valores preditores* (ou das estimativas) dos deslocamentos e das velocidades, respectivamente, no tempo  $t$  em relação ao tempo  $t + \Delta t$ .

Observe-se que as equações (II.27) e (II.28) podem ser expressas em função dos valores preditores definidos em (II.30) e (II.31). Nestas condições, tem-se:

$$v_{t+\Delta t} = \tilde{v}_{t+\Delta t} + \gamma \cdot \underline{a}_{t+\Delta t} \cdot \Delta t \quad (\text{II.32})$$

e

$$d_{t+\Delta t} = \tilde{d}_{t+\Delta t} + \beta \cdot \underline{a}_{t+\Delta t} \cdot \Delta t^2 \quad (\text{II.33})$$

Onde:

$v_{t+\Delta t}$  e  $d_{t+\Delta t}$  são conhecidos como os *valores corretos* das velocidades e dos deslocamentos no tempo  $t + \Delta t$ .

Dessa forma, o algoritmo de Newmark consiste em resolver o sistema de equações (II.29), utilizando (II.32) e (II.33), e satisfazendo as condições iniciais  $\underline{d}(0)$  e  $\underline{v}(0)$  definidas em (II.6) e (II.7), respectivamente.

Da equação (II.33), obtêm-se:

$$\underline{a}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \cdot (d_{t+\Delta t} - \tilde{d}_{t+\Delta t}) \quad (\text{II.34})$$

Levando (II.34) em (II.32) encontra-se:

$$\underline{v}_{t+\Delta t} = \tilde{\underline{v}}_{t+\Delta t} + \frac{\gamma}{\beta \cdot \Delta t} \cdot \underline{a}_{t+\Delta t} \quad (\text{II.35})$$

Substituindo-se convenientemente (II.30) e (II.31) em (II.34) e (II.35), e aplicando-se estas últimas em (II.29) chega-se a:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\underline{M}}{\beta \Delta t^2} + \frac{\underline{C} \gamma}{\beta \Delta t} + \underline{F}_{t+\Delta t}^{\text{int}} \right] \cdot \underline{d}_{t+\Delta t} = \\ & = \underline{F}_{t+\Delta t}^{\text{ext}} + \frac{\underline{M}}{\beta \Delta t^2} \left[ \underline{d}_t + \underline{v}_t \Delta t + (0.5 - \beta) \underline{a}_t \Delta t^2 \right] \\ & + \underline{C} \cdot \left[ \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \underline{d}_t + \left( \frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \underline{v}_t + \left( \frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \underline{a}_t \Delta t \right] \end{aligned} \quad (\text{II.36})$$

O sistema de equações não-lineares que (II.36) representa permite a determinação dos deslocamentos no tempo  $t+\Delta t$ . As velocidades e acelerações ficam automaticamente estabelecidas através de (II.34) e (II.35).

Um outro tipo de implementação pode ser feito no algoritmo de Newmark, através de um processo iterativo como o de Newton-Raphson Modificado. Transforma-se o sistema, resolvendo-o como um *problema estático efetivo*. Nesse sentido, as seguintes etapas devem ser percorridas:

a) Estimam-se os valores dos deslocamentos e das velocidades através dos *valores preditores* - equações (II.30) e (II.31). Admite-se que as acelerações iniciais são nulas, ou seja:

$$\underline{d}_{t+\Delta t}^{(i)} = \tilde{\underline{d}}_{t+\Delta t} \quad (\text{II.37})$$

$$\underline{v}_{t+\Delta t}^{(i)} = \underline{\tilde{v}}_{t+\Delta t} \quad (\text{II.38})$$

e

$$\underline{a}_{t+\Delta t}^{(i)} = \underline{0} \quad (\text{II.39})$$

onde:

$i = 0$  - índice contador de iterações.

b) Calcula-se o vetor das forças residuais por meio da equação (II.29):

$$\underline{\Delta F} = \underline{F}_{t+\Delta t}^{\text{ext}} - \underline{M} \underline{a}_{t+\Delta t}^{(i)} - \underline{C}_T \underline{v}_{t+\Delta t}^{(i)} - \underline{K}_T \underline{d}_{t+\Delta t}^{(i)} \quad (\text{II.40})$$

c) Monta-se a *matriz de rigidez efetiva* (compare com os termos da esquerda na equação (II.36)):

$$\underline{K}^* = \frac{1}{\Delta t \cdot \beta} \cdot \underline{M} + \frac{\gamma}{\Delta t \cdot \beta} \cdot \underline{C}_T + \underline{K}_T \quad (\text{II.41})$$

d) Resolve-se o *problema estático efetivo*, por exemplo, através do método de eliminação de Gauss.

$$\underline{K}^* \cdot \underline{\Delta d} = \underline{\Delta F} \quad (\text{II.42})$$

onde:

$\underline{\Delta d}$  - é a variação dos deslocamentos em cada iteração.

Desta forma,

$$\underline{d}_{t+\Delta t}^{(i+1)} = \underline{d}_{t+\Delta t}^{(i)} + \underline{\Delta d} \quad (\text{II.43})$$

As velocidades e as acelerações da iteração (i+1) são obtidas através de (II.34) e (II.35).

e) Se houver necessidade de novas iterações, incrementa-se o índice contador  $i$  em uma unidade e recomeça-se o processo a partir do item  $b$ . Quando se atingir uma condição de convergência para  $\Delta \underline{d}$  ou  $\Delta \underline{F}$ , chega-se ao fim desta etapa. Os deslocamentos, as velocidades e as acelerações no tempo  $t+\Delta t$  correspondem aos últimos valores da iteração, ou seja:

$$\underline{d}_{t+\Delta t} = \underline{d}_{t+\Delta t}^{(i+1)}$$

$$\underline{v}_{t+\Delta t} = \underline{v}_{t+\Delta t}^{(i+1)}$$

$$\underline{a}_{t+\Delta t} = \underline{a}_{t+\Delta t}^{(i+1)}$$

Retorna-se ao item  $a$  sempre que se desejar calcular os deslocamentos, velocidades e acelerações para um novo tempo. Encerra-se o processo ao se atingir o tempo final de análise.

A figura (II.2) representa o processo incremental utilizado, se a iteração for simples, e a figura (II.3) representa o mesmo processo quando a matriz de rigidez efetiva for atualizada.

O presente trabalho desenvolveu o algoritmo de Newmark na forma de um *problema estático efetivo*, resolvendo-o pelo processo de Newton-Raphson modificado. Os parâmetros de controle  $\gamma$  e  $\beta$  foram tomados constantes e iguais a 0.50 e 0.25 respectivamente. O critério de controle de convergência foi adotado pela expressão (II.44), em consonância com a referência [29], limitado ao número máximo de iterações.

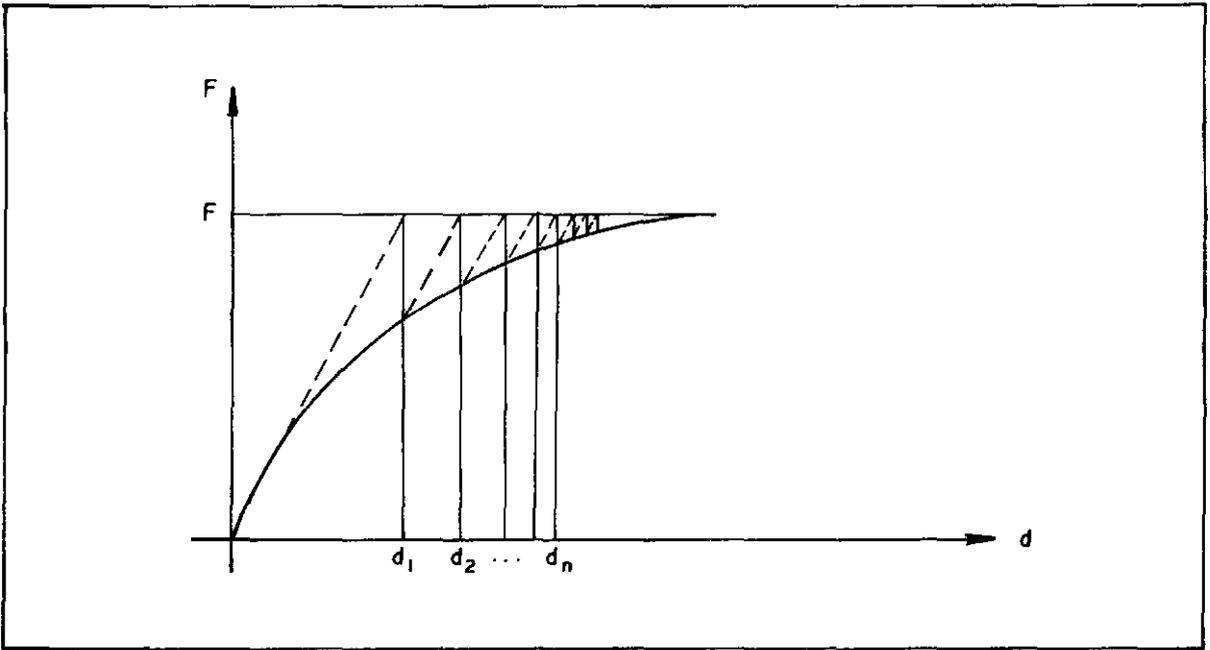


FIGURA (II.2) - Processo Incremental sem Atualização da Matriz de Rigidez (Método de Newton-Raphson Modificado)

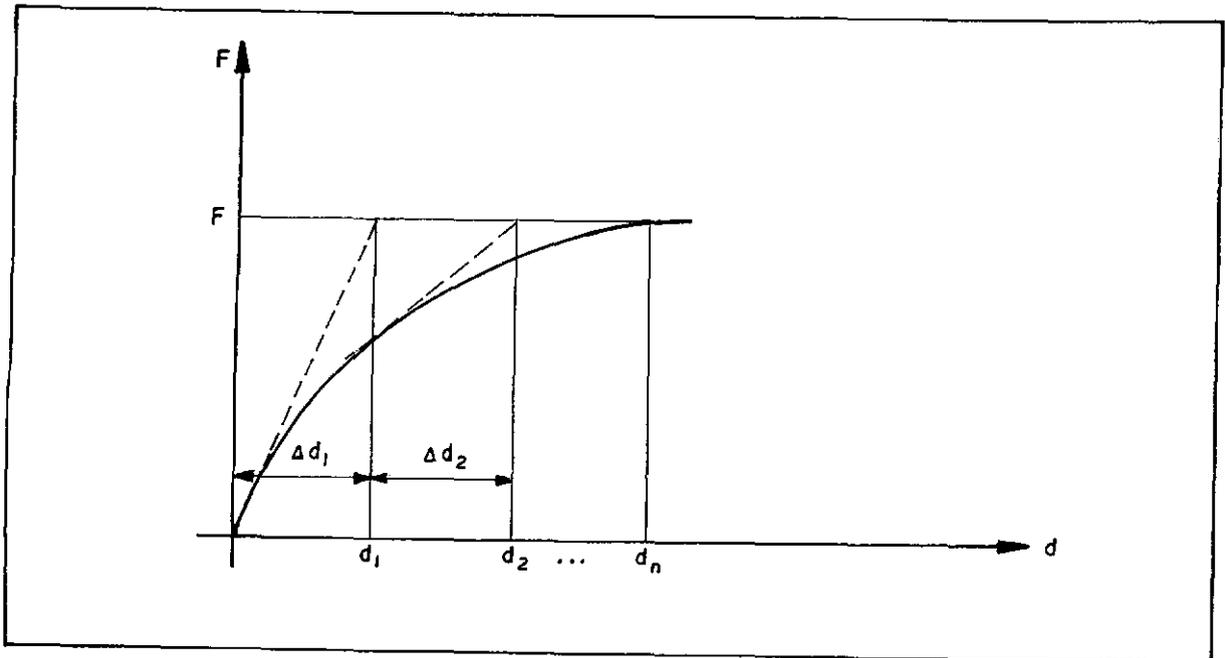


FIGURA (II.3) - Processo Incremental com Atualização da Matriz de Rigidez (Método de Newton-Raphson Original).

$$\left| \frac{\left\| \underline{\underline{d}}_{\tilde{t}+\Delta t}^{(i+1)} - \underline{\underline{d}}_{\tilde{t}+\Delta t}^{(i)} \right\|}{\left\| \underline{\underline{d}}_{\tilde{t}+\Delta t}^{(i+1)} \right\|} \right| \leq \text{tolerância} \quad (\text{II.44})$$

Onde  $\left\| \underline{\underline{d}} \right\|$  é a norma euclidiana do vetor  $\underline{\underline{d}}$ .

O Quadro (II.2) apresenta o procedimento para implementação do algoritmo de Newmark na forma em que foi adotado neste trabalho.

#### QUADRO (II.2) - Roteiro para Implementação do Método de Newmark

---

- 1) Início do processo:  $t = 0$
- 2) Montagem das matrizes do sistema:

$$\underline{\underline{M}}, \underline{\underline{C}}, \text{ e } \underline{\underline{F}}^{\text{int}}$$

- 3) Fase das estimativas:

$i = 0$  (índice contador de iterações)

$$\underline{\underline{d}}_{\tilde{t}+\Delta t}^{(i)} = \underline{\underline{d}}_{\tilde{t}+\Delta t}$$

$$\underline{\underline{v}}_{\tilde{t}+\Delta t}^{(i)} = \underline{\underline{v}}_{\tilde{t}+\Delta t}$$

$$\underline{\underline{a}}_{\tilde{t}+\Delta t}^{(i)} = \underline{\underline{0}}$$

- 4) Montagem do vetor das forças residuais:

$$\underline{\underline{\Delta F}}_{\tilde{t}+\Delta t}^{(i)} = \underline{\underline{F}}_{\tilde{t}+\Delta t}^{\text{ext}} - \underline{\underline{M}} \underline{\underline{a}}_{\tilde{t}+\Delta t}^{(i)} - \underline{\underline{C}}_T \underline{\underline{v}}_{\tilde{t}+\Delta t}^{(i)} - \underline{\underline{F}}_{\tilde{t}+\Delta t}^{\text{int}(i)}$$

- 5) Montagem da matriz de rigidez efetiva:

$$\underline{\underline{K}}^* = \frac{1}{\Delta t^2 \beta} \underline{\underline{M}} + \frac{\gamma}{\Delta t \cdot \beta} \underline{\underline{C}}_T + \underline{\underline{K}}_T$$

Continua...

QUADRO (II.2) - Continuação ...

---

6) Resolução do sistema de equações (problema estático efetivo):

$$\tilde{K}^* \cdot \Delta \tilde{d}^{(i)} = \Delta \tilde{F}^{(i)}$$

7) Fase das correções:

$$\tilde{d}_{t+\Delta t}^{(i+1)} = \tilde{d}_{t+\Delta t}^{(i)} + \Delta \tilde{d}^{(i)}$$

$$\tilde{a}_{t+t}^{(i+1)} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\tilde{d}_{t+\Delta t}^{(i+1)} - \tilde{d}_{t+\Delta t}^{(i)})$$

$$\tilde{v}_{t+\Delta t}^{(i+1)} = \tilde{v}_{t+\Delta t}^{(i)} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \tilde{a}_{t+\Delta t}^{(i+1)}$$

8) Verificação do processo de convergência:

a) se NÃO CONVERGIU: faz-se  $i=i+1$  e retorna-se ao item 4.

b) se CONVERGIU: faz-se  $t=t+\Delta t$  e retorna-se ao item 3, até se atingir o tempo final de análise.

---

### 2.2.3. Algoritmos Mistos Implícitos-Explícitos

Tendo se discutido os aspectos mais importantes dos algoritmos implícitos e explícitos, e verificado que os mesmos possuem características próprias que devem ser levadas em consideração na análise de problemas específicos, porque não associá-los para resolver determinados casos, como os de interação de diversos meios, aproveitando-os de uma forma mais eficiente?

Tal idéia originou o algoritmo misto implícito-explícito. Por meio dele, nos problemas que envolvem meios distintos, as regiões rígidas da malha são resolvidas por elemen-

tos implícitos, enquanto que as partes flexíveis são analisadas através dos explícitos. Outros algoritmos mistos, combinando do mínimos implícitos (ou explícitos) com diferentes intervalos de integração, puderam ser desenvolvidos a partir do mesmo princípio [30]. O presente trabalho se limitou ao estudo do primeiro tipo de associação, a qual tratará, daqui por diante, apenas por *algoritmo misto*.

Além de conciliar eficientemente as características dos dois métodos, o algoritmo misto deve ser de fácil implementação. Portanto, permanecem válidas as observações quanto ao tratamento que deve ser dado a cada processo, conforme discutido nos itens anteriores. Da maneira como será apresentado, o algoritmo misto pode ser facilmente implementado a um programa de elementos finitos para a análise dinâmica não-linear, que tenha sido desenvolvido originalmente por um método implícito.

A utilização do referido algoritmo implicará na divisão da malha em elementos implícitos e explícitos. Desta forma, as matrizes do sistema vão apresentar sub-regiões características de cada domínio. Fica convençãoado que  $\underline{M}^I$ ,  $\underline{C}_T^I$ ,  $(\underline{F}^{int})^I$  e  $(\underline{F}^{ext})^I$  são as matrizes de massa e de amortecimento, e os vetores das forças internas e externas do domínio implícito, respectivamente. A substituição do superíndice  $I$  por  $E$  corresponde, de maneira análoga, às matrizes de massa e amortecimento e aos vetores de forças do domínio explícito. Assume-se que  $\underline{M}^E$  seja diagonal.

O algoritmo implícito-explicito, assim como no método de Newmark que lhe serviu de base, faz com que o equilíbrio das equações da dinâmica seja atingido no tempo  $t + \Delta t$ . Nestes termos, o sistema de equações (II.16) passa a ser representado por:

$$\begin{aligned} \underline{M} \cdot \underline{a}_{t+\Delta t} + \underline{C}_T^I \cdot \underline{v}_{t+\Delta t} + \underline{C}_T^E \cdot \underline{\tilde{v}}_{t+\Delta t} + (\underline{F}^{int})_{t+\Delta t}^I \\ + (\underline{F}^{int})_{t+\Delta t}^E = \underline{F}_{t+\Delta t}^{ext} \end{aligned} \quad (\text{II.45})$$

onde:

$$\tilde{M} = \tilde{M}^I + \tilde{M}^E \quad (\text{II.46})$$

$$\tilde{F}_{t+\Delta t}^{\text{ext}} = (\tilde{F}_{t+\Delta t}^{\text{ext}})^I + (\tilde{F}_{t+\Delta t}^{\text{ext}})^E \quad (\text{II.47})$$

$$(\tilde{F}_{t+\Delta t}^{\text{int}})^I = N^I(\tilde{d}_{t+\Delta t}) = K_T^I \cdot \tilde{d}_{t+\Delta t} \quad (\text{II.48})$$

e

$$(\tilde{F}_{t+\Delta t}^{\text{int}})^E = N^E(\tilde{d}_{t+\Delta t}) \quad (\text{II.49})$$

Os valores preditores e corretores das equações acima são os mesmos que os definidos em (II.30) e (II.31). As expressões (II.45) e (II.46) permitem que sejam acrescentadas nas parcelas da direita novas massas ou forças externas nodais. No entanto, quando forem utilizados molas ou amortecedores nodais, deve-se ficar bem claro em qual domínio, implícito ou explícito, estão atuando esses elementos, não sendo permitido utilizá-los na interface\*, para não tornar a equação (II.45) incompatível.

A análise por meio do algoritmo misto pode ser feita na mesma seqüência das equações (II.37) a (II.43) do item anterior. As únicas diferenças são nas montagens do vetor de forças residuais e da matriz de rigidez efetiva, que devem levar em consideração a influência dos elementos explícitos.

Assim sendo, o vetor de forças residuais passa a ser determinado por:

---

(\*) Quando forem necessários elementos escalares de mola ou de amortecimento na interface entre os diversos domínios, adotam-se faixas de pequena largura de elementos implícitos, dentro da zona flexível, para que as molas ou os amortecedores atuem em um único domínio.

$$\Delta \tilde{F}^{(i)} = \tilde{F}_{t+\Delta t}^{ext} - \tilde{M} \tilde{a}_{t+\Delta t}^{(i)} - \tilde{C}_T^I \tilde{v}_{t+\Delta t}^{(i)} - \tilde{C}_T^E \tilde{v}_{t+\Delta t}^{(i)} -$$

$$- (\tilde{F}^{int})_{t+\Delta t}^I - (\tilde{F}^{int})_{t+\Delta t}^E \quad (II.50)$$

A matriz de rigidez efetiva fica estabelecida por:

$$\tilde{K}^* = \frac{1}{\Delta t^2 \beta} \cdot \tilde{M} + \frac{\gamma}{\Delta t \cdot \beta} \cdot \tilde{C}_T^I + \tilde{K}_T^I \quad (II.51)$$

onde as matrizes:

$$\tilde{K}_T^I = \partial \tilde{N}^I / \partial \tilde{d} \quad (II.52)$$

$$\tilde{C}_T^I = \partial \tilde{N}^I / \partial \tilde{v} \quad (II.53)$$

são funções dos deslocamentos e das velocidades no tempo  $t + \Delta t$  da  $i$ -ésima iteração. Estas matrizes possuem uma estrutura do tipo *banda*, decorrente da conectividade dos elementos do domínio implícito. Conseqüentemente, a matriz de rigidez efetiva, que é simétrica positiva definida, possui sub-regiões diagonais correspondentes aos elementos explícitos. A topologia de tal matriz pode ser ilustrada através da figura (I-4) para uma malha simplificada.

A estrutura da matriz  $\tilde{K}^*$  é melhor explorada se for adotado um sistema de armazenamento do tipo *coluna ativa*, ou seja, os coeficientes nulos acima do *sky-line* não são armazenados nem operados.

A eficiência do algoritmo pode ser melhorada por meio de uma escolha criteriosa da malha de elementos finitos e da numeração de seus nós.

Embora as atualizações da matriz de rigidez efetiva sirvam para acelerar o processo de convergência, elas devem ser evitadas, quando excessivas. A convergência pode ser atingida mais rapidamente alterando-se o intervalo de integração, conforme os trabalhos de [21, 22] em relação ao Método da Diferença Central. Na análise dinâmica linear, se o intervalo de integração permanecer constante, a matriz de rigidez efetiva precisará ser montada e fatorizada apenas uma única vez.

Quando inúmeras iterações forem necessárias para se atingir a convergência, é aconselhável armazenar os vetores:

$$\tilde{F}_{t+\Delta t}^{ext} - C_T^E \cdot \tilde{v}_{t+\Delta t}^{(i)} - (\tilde{F}_{t+\Delta t}^{int})^E$$

que se mantêm constante ao longo de um intervalo de tempo, podendo ser aproveitados para o cálculo das iterações subsequentes. A solução para os nós entre os elementos explícitos é obtida após a primeira iteração, dependendo do tipo de controle de convergência a ser realizado.

Da maneira como foi implementado, o algoritmo apresenta a particularidade de poder resolver os problemas discretizando o meio contínuo com todos os elementos implícitos ou todos explícitos. Pode, dessa forma, comparar os resultados de um mesmo exemplo entre os algoritmos empregados, e verificar a eficiência de cada um deles através do mesmo programa.

Deve-se ressaltar que a eficiência do método misto está intimamente relacionada com dois aspectos:

1º) da escolha apropriada do processo de solução do sistema de equações (problema estático efetivo) - no caso deste trabalho, adotou-se o Método da Triangularização de Gauss;

2º) da eficiência das subrotinas de formação e montagem das matrizes dos elementos e dos vetores de forças internas.

O roteiro para a implementação do algoritmo misto está apresentado no Quadro (II.3).

QUADRO (II.3) - Roteiro para Implementação do Método Misto

---

1) Início do processo :  $t = 0$

2) Montagem das matrizes do sistema:

$$\underline{M}, \underline{C}_T^I, \underline{C}_T^E, \underline{K}_T^I, (\underline{F}^{int})^E$$

3) Fase das estimativas:

$i = 0$  (índice contador de iterações)

$$\underline{d}_{t+\Delta t}^{(i)} = \underline{\tilde{d}}_{t+\Delta t}$$

$$\underline{v}_{t+\Delta t}^{(i)} = \underline{\tilde{v}}_{t+\Delta t}$$

$$\underline{a}_{t+\Delta t}^{(i)} = \underline{0}$$

4) Montagem do vetor de forças residuais:

$$\begin{aligned} \underline{\Delta F}_{t+\Delta t}^{(i)} = & \underline{F}_{t+\Delta t}^{ext} - \underline{M}_{t+\Delta t} \underline{a}_{t+\Delta t}^{(i)} - \underline{C}_T^I \underline{v}_{t+\Delta t}^{(i)} - \underline{C}_T^E \underline{\tilde{v}}_{t+\Delta t} - \\ & - (\underline{F}^{int})_{t+\Delta t}^I - (\underline{F}^{int})_{t+\Delta t}^E \end{aligned}$$

5) Montagem da matriz de rigidez efetiva:

$$\underline{K}_{t+\Delta t}^* = \frac{1}{\Delta t \cdot \beta} \cdot \underline{M}_{t+\Delta t} + \frac{\gamma}{\Delta t \cdot \beta} \cdot \underline{C}_T^I + \underline{K}_T^I$$

6) Resolução do sistema de equações (problema estático efetivo):

Continua...

QUADRO (II.3) - Continuação ...

---

$$\tilde{K}^* \cdot \Delta \tilde{d}^{(i)} = \Delta F^{(i)}$$

7) Fase das correções:

$$\tilde{d}_{t+\Delta t}^{(i+1)} = \tilde{d}_{t+\Delta t}^{(i)} + \Delta \tilde{d}^{(i)}$$

$$\tilde{a}_{t+\Delta t}^{(i+1)} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \cdot (\tilde{d}_{t+\Delta t}^{(i+1)} - \tilde{d}_{t+\Delta t}^{(i)})$$

$$\tilde{v}_{t+\Delta t}^{(i+1)} = \tilde{v}_{t+\Delta t}^{(i)} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \cdot \tilde{a}_{t+\Delta t}^{(i+1)}$$

8) Verificação do processo de convergência:

a) se NÃO CONVERGIU: faz-se  $i = i+1$  e retorna-se ao item 4.

b) Se CONVERGIU: faz-se  $t = t+\Delta t$  e retorna-se ao item 3, até que se atinja o tempo final de análise.

---

### 2.3. Estabilidade dos Algoritmos

Para que um algoritmo seja estável, é necessário que qualquer erro que tenha sido introduzido durante a análise não seja amplificado acima de um determinado valor limite. Esta é uma definição sumária de *estabilidade*, válida para qualquer algoritmo.

O estudo de tal assunto em processos de integração no tempo para análise não-linear é muito controvertido, pois existem vários critérios de estabilidade, e nem sempre o algoritmo atende a todos simultaneamente.

Dada a complexidade do assunto, e para não se afastar do tema central deste trabalho, evitar-se-á uma discussão

mais aprofundada, indicando-se as referências [31-35] para maiores esclarecimentos. Como o método misto é decorrente da associação de dois algoritmos distintos, implícito e explícito, a estabilidade do mesmo será considerada após uma abordagem sobre o comportamento numérico daqueles processos.

A estabilidade do algoritmo explícito é, em geral, controlada pela escolha apropriada do intervalo de tempo  $\Delta t$ , que deve estar limitado a um valor  $\Delta t_{cr}$ .

O intervalo crítico é proporcional à maior frequência de vibração, ou seja,

$$\Delta t_{cr} = \frac{T_n}{\pi} \quad (\text{II.54})$$

onde  $T_n$  é o menor período do sistema.

A referida limitação pode também ser expressa pela condição de Courant, pela qual o intervalo crítico deve ser igual ao menor tempo de propagação das ondas *cisalhantes* para qualquer elemento do domínio. Esta limitação é válida tanto para a análise linear como para a não-linear.

Para se compreender melhor o comportamento numérico do algoritmo nos dois tipos de análise, considere-se o seguinte exemplo. Seja um sistema em que o intervalo de integração adotado é inferior ao tempo crítico  $\Delta t_{cr}$  durante certo período de tempo, mas, em um determinado momento, ele se torna ligeiramente maior, retornando ao seu valor original logo em seguida. Na análise não-linear, os resultados não mostram uma situação evidente de instabilidade, mas, ao contrário, os erros se acumulam durante o período em que  $\Delta t \geq \Delta t_{cr}$ , alterando significativamente a solução do problema. Na análise linear este procedimento não acontece pois os resultados crescem rapidamente sob a condição de intervalos maiores do que o crítico.

Para o algoritmo implícito de Newmark, garante-

se que não haverá instabilidade se  $\gamma \geq 1/2$  e  $\beta \geq \gamma/2$ . A estabilidade será incondicional quando  $\beta = (\gamma + 0.5)/4$ .

Belytschko e Schoeberle [24], para as análises implícitas, fazem uso do conceito de *estabilidade na energia*, pelo qual o algoritmo é estável se o incremento da energia de deformação puder ser calculado usando a regra dos trapézios, e as iterações de equilíbrio forem desenvolvidas até que se atinja um critério de convergência. Em outras palavras, um algoritmo implícito é estável se, em cada intervalo de tempo, a soma das energias cinética e interna estiver limitada a soma do trabalho externo mais as energias cinética e interna do intervalo anterior, isto é,

$$(T_{i+1} + U_{i+1}) \leq C \cdot (T_i + U_i + \Delta W) \quad (\text{II.55})$$

onde:

T - energia cinética do sistema

U - energia interna

$\Delta W$  - variação do trabalho externo

C - constante arbitrária.

Segundo este raciocínio, se as energias cinética e interna do sistema forem limitadas, os deslocamentos e as velocidades também o serão, garantindo a estabilidade do algoritmo.

Hughes [03] provou que, em certas ocasiões, o cálculo da energia de deformação pela regra dos trapézios não garante a estabilidade do processo.

Bathe e Cimento [36] concluíram que, para haver estabilidade na energia, o cálculo da energia interna de deformações deve ser o mais rigoroso possível, não podendo nunca ser negativo. Além disso, deve-se adotar um critério apropriado de convergência na energia para a solução iterativa do sistema de

equações (II.42). Esses pesquisadores sugerem que duas condições de convergência sejam atendidas simultaneamente, quais sejam:

$$\frac{\left\| \left[ \tilde{F}_{t+\Delta t}^{\text{ext}} - M \cdot \tilde{a}_{t+\Delta t}^{(i-1)} - (F_{t+\Delta t}^{\text{int}})^{(i-1)} \right] \right\|_2}{\left\| \left[ \tilde{F}_t^{\text{ext}} - M \cdot \tilde{a}_{t-\Delta t} - (F_{t-\Delta t}^{\text{int}}) \right] \right\|_2^{\max}} \leq \text{RTOL} \quad (\text{II.56})$$

e

$$\frac{\Delta \tilde{a}^{(i)T} \cdot \left[ \tilde{F}_{t+\Delta t}^{\text{ext}} - M \cdot \tilde{a}_{t+\Delta t}^{(i-1)} - (F_{t+\Delta t}^{\text{int}})^{(i-1)} \right]}{\Delta \tilde{a}^{(1)T} \cdot \left[ \tilde{F}_{t+\Delta t}^{\text{ext}} - M \cdot \tilde{a}_t - (F_t^{\text{int}}) \right]} \leq \text{ETOL} \quad (\text{II.57})$$

onde:

RTOL e ETOL são as tolerâncias de equilíbrio das forças e na energia respectivamente.

Na primeira expressão,  $\| \underline{p} \|_2$  significa a norma Euclidiana do vetor  $\underline{p}$ , e o superíndice *max* indica que deve ser adotado o valor máximo no intervalo.

Toledo [32] desenvolve um estudo sobre os métodos de integração direta para a análise dinâmica não-linear com parando o uso de diversas normas de controle de convergência.

É de se esperar que o método misto, decorrente da associação dos algoritmos implícito e explícito, sofra as mesmas considerações ou limitações de cada processo individualmente. Neste sentido, para provar a estabilidade do algoritmo misto, Hughes [10] se utiliza do conceito de *estabilidade linearizada*, desenvolvendo a *equação variacional* que governa as propriedades de crescimento ou de decaimento das pequenas perturbações (ou variações) que surgem na análise.

A partir da equação (II.45), tem-se:

$$\begin{aligned} \underline{M} \cdot \delta \underline{a}_{\underline{t}+\Delta t} + \underline{C}_T^I \cdot \delta \underline{v}_{\underline{t}+\Delta t} + \underline{C}_T^E \cdot \delta \underline{\tilde{v}}_{\underline{t}+\Delta t} + \\ + \delta(\underline{F}^{int})_{\underline{t}+\Delta t}^I + \delta(\underline{F}^{int})_{\underline{t}+\Delta t}^E = \underline{0} \end{aligned} \quad (\text{II.58})$$

onde:

$$\delta(\underline{F}^{int})_{\underline{t}+\Delta t}^I = \underline{K}_T^I \cdot \delta \underline{d}_{\underline{t}+\Delta t} \quad (\text{II.59})$$

$$\delta(\underline{F}^{int})_{\underline{t}+\Delta t}^E = \underline{N}^E (\delta \underline{\tilde{d}}_{\underline{t}+\Delta t}) \quad (\text{II.60})$$

$$\delta \underline{d}_{\underline{t}+\Delta t} = \delta \underline{\tilde{d}}_{\underline{t}+\Delta t} + \Delta t^2 \cdot \beta \cdot \delta \underline{a}_{\underline{t}+\Delta t} \quad (\text{II.61})$$

$$\delta \underline{v}_{\underline{t}+\Delta t} = \delta \underline{\tilde{v}}_{\underline{t}+\Delta t} + \Delta t \cdot \gamma \cdot \delta \underline{a}_{\underline{t}+\Delta t} \quad (\text{II.62})$$

$$\delta \underline{\tilde{d}}_{\underline{t}+\Delta t} = \delta \underline{d}_{\underline{t}} + \Delta t \cdot \delta \underline{v}_{\underline{t}} + \frac{\Delta t^2}{2} (1-2\beta) \cdot \delta \underline{a}_{\underline{t}} \quad (\text{II.63})$$

$$\delta \underline{\tilde{v}}_{\underline{t}+\Delta t} = \delta \underline{v}_{\underline{t}} + \Delta t \cdot (1-\gamma) \cdot \delta \underline{a}_{\underline{t}} \quad (\text{II.64})$$

O critério de estabilidade linearizada implica em que as variações  $\delta \underline{d}_{\underline{t}}$ ,  $\delta \underline{v}_{\underline{t}}$  e  $\delta \underline{a}_{\underline{t}}$ ,  $t = 0, 1, 2, \dots$ , sejam *uniformemente limitadas* para valores iniciais arbitrários de  $\delta \underline{d}_{\underline{0}}$ ,  $\delta \underline{v}_{\underline{0}}$ ,  $\delta \underline{a}_{\underline{0}}$ . Entende-se que um vetor genérico  $\underline{p}$  é uniformemente limitado quando a sua norma euclidiana for menor do que uma constante arbitrária não negativa, ou seja,

$$\|\underline{p}\| < C$$

Por meio deste procedimento, prova-se que, se as combinações das matrizes do sistema forem positivas definidas, então  $\delta \underline{d}_{\underline{t}}$ ,  $\delta \underline{v}_{\underline{t}}$ , e  $\delta \underline{a}_{\underline{t}}$  são uniformemente limitados quando  $\delta \geq 1/2$ .

Além disso, quando  $\beta \geq \gamma/2$  a estabilidade é incondicional para os elementos implícitos. No caso em que  $\beta = (\gamma + 0.5)^2/4$ , a dissipação numérica da mais alta frequência será maximizada, sendo esta situação a desejável.

Quando  $\beta < \gamma/2$  a instabilidade do algoritmo implícito será condicional, restringindo-se o intervalo de tempo a:

$$\Omega < \Omega_{cr}^{IMP}$$

onde:

$$\Omega = \omega \cdot \Delta t \quad (II.65)$$

Define-se  $\Omega_{cr}^{IMP}$  como sendo igual a:

$$\Omega_{cr}^{IMP} = \frac{\xi(\gamma - 0.5) + \left[ \xi^2 \cdot (\gamma - 0.5)^2 + (\gamma/2 - \beta) \right]^{1/2}}{(\gamma/2 - \beta)} \quad (II.66)$$

onde:

$$\xi = \frac{\underline{\phi}^T \cdot \underline{C}_T \cdot \underline{\phi}}{2} \text{ é o amortecimento viscoso do sistema; e}$$

$\omega$  - frequência de vibração

$\phi$  - vetor dos modos de vibração

$\omega^2$  e  $\phi$  são, respectivamente, o autovalor e o auto-vetor do problema de auto-valores.

Verifica-se que, para um aumento do amortecimento viscoso, ocorrerá um aumento do intervalo crítico de tempo. Para um sistema não amortecido,  $\xi = 0$  e

$$\Omega_{cr} = (\gamma/2 - \beta)^{-1/2}$$

No domínio explícito, o intervalo de tempo está restrito a:

$$\Omega < \Omega_{cr}^{EXP}$$

onde, neste caso, por definição:

$$\Omega_{cr}^{EXP} = \left[ (\xi^2 + 2\gamma)^{1/2} - \xi \right] / \gamma \quad (II.67)$$

Um aumento de  $\xi$  ou  $\gamma$  faz diminuir o intervalo crítico de tempo. É necessário, pois, fazer uma estimativa de  $\xi$  para a determinação do intervalo que garanta a estabilidade do algoritmo.

Para maximizar a dissipação numérica da mais alta frequência,  $\Omega$  deve ser igual a:

$$\Omega = \Omega_{bif} = 2(1 - \xi) / (\gamma + 0.5) \quad (II.68)$$

Se esta situação ocorrer, a estabilidade estará assegurada, pois  $\Omega_{bif} < \Omega_{cr}^{EXP}$ .

Para se compreender melhor a diferença entre  $\Omega_{cr}$  e  $\Omega_{bif}$ , a figura (II.4) apresenta diversas curvas relacionando  $\Omega$  e o raio espectral, em função de vários valores de  $\gamma$ . Tal figura foi preparada com  $\xi = 0$ .

A condição de estabilidade exige que o raio espectral de amplificação da matriz de rigidez efetiva seja no máximo igual a unidade, conforme pode ser observado na figura. Quando  $\gamma > 0.50$ , o raio espectral é menor do que um, até que se atinja um determinado ponto onde  $\Omega = \Omega_{bif}$ , a partir do qual diverge para o infinito, provando a situação de instabilidade. Portanto,  $\Omega_{bif}$  é o ponto de descontinuidade ou de bifurcação da curva, correspondendo ao caso em que as raízes principais (complexo conjugado) da matriz de amplificação tornam-se reais e bifurcam;  $\Omega_{cr}$  é definido como sendo o ponto no qual o raio espectral é igual a um. Na falta de amortecimento viscoso,  $\Omega_{cr} = (2/\gamma)^{0.5}$ . O valor máximo de  $\Omega_{cr}$  é igual a 2 e ocorre quando

$\gamma = 0.5$ . Esta condição é totalmente equivalente ao Método da Diferença Central.

Em síntese, a estabilidade do algoritmo misto deve atender simultaneamente as exigências de cada algoritmo em particular. Geralmente, a restrição do intervalo de tempo para os elementos explícitos é suficiente para estabilizar o processo como um todo.

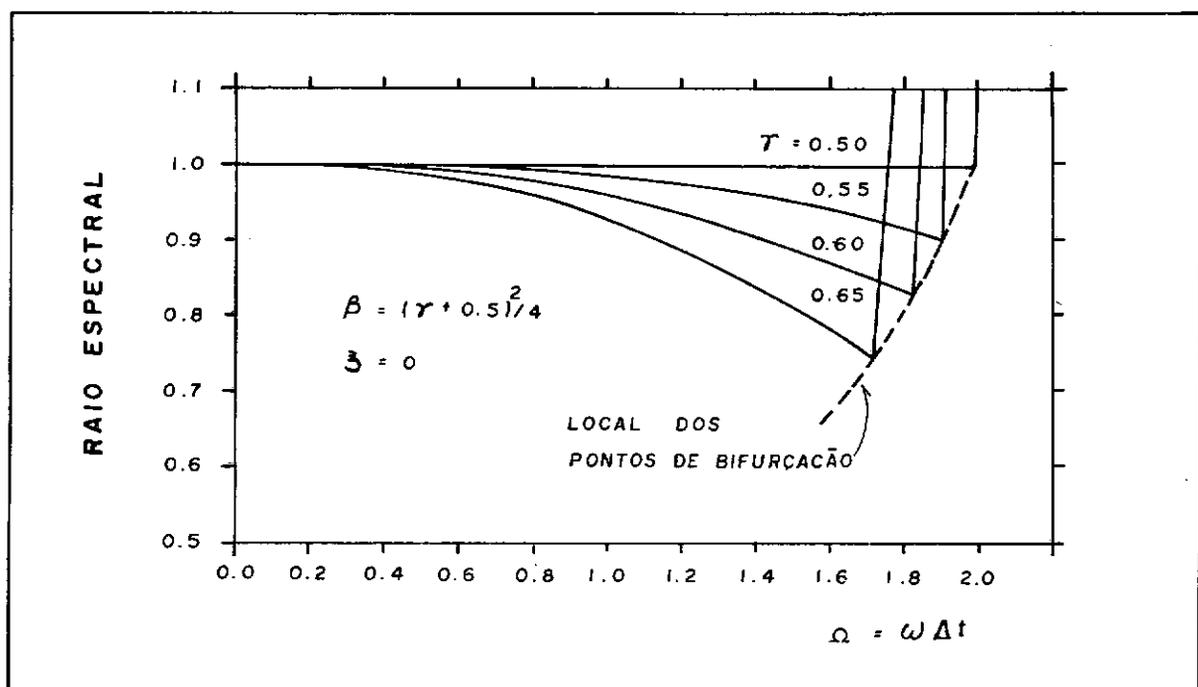


FIGURA (II.4) - Curvas  $\Omega$  x Raio Espectral

#### 2.4. Escolha do Intervalo de Integração

Uma das decisões mais importantes na análise de um problema dinâmico é a determinação do intervalo de integração a ser utilizado. Em alguns métodos, como nos algoritmos explícitos, tal escolha é responsável direta pela estabilidade. De um modo geral, o intervalo de tempo é fator preponderante na precisão dos resultados, assim como nos custos globais da análise.

se.

A escolha do intervalo de integração depende do tipo de problema que se defronta, se de dinâmica estrutural (vibração forçada) ou de propagação de ondas.

Nos primeiros, apenas os modos mais baixos, ou alguns modos intermediários de vibração, são excitados pelo carregamento. Se as frequências contidas no carregamento forem inferiores a um determinado valor  $\omega_u$ , então a malha de elementos finitos deve ser capaz de representar com precisão todas as frequências do sistema atuais maiores do que quatro vezes  $\omega_u$ . Não há necessidade de se determinar as mais altas frequências do sistema, pois a sua influência é desprezível.

Desta forma, a escolha do intervalo de tempo em problemas de vibração forçada pode ser feita através do seguinte procedimento:

1º) Determinam-se as frequências contidas no carregamento, através, por exemplo, de Séries de Fourier;

2º) Adota-se uma malha de elementos finitos que represente com precisão todas as frequências do sistema até cerca de quatro vezes a mais alta frequência  $\omega_u$  contida no carregamento;

3º) Considera-se o intervalo de tempo igual a aproximadamente 5% de  $T_u$ , onde  $T_u = 2\pi/\omega_u$ , ou menor do que isso, por questões de estabilidade.

Os problemas de propagação de ondas são caracterizados pelo grande número de frequências excitadas pelo sistema (possivelmente de zero a infinito). Para a solução de tais problemas, poderia ser utilizado o mesmo raciocínio, adotando-se uma frequência  $\omega_u$  elevada, que permitisse uma resposta precisa. No entanto, a dificuldade em se determinar esse valor é grande e sugere outro tipo de procedimento.

Denotando-se por  $L_w$  o comprimento da onda, o tempo total de propagação em um ponto será de:

$$t_w = \frac{L_w}{c} \quad (\text{II.69})$$

onde:

$c$  é a velocidade de propagação da onda.

A representação da onda por meio de  $n$  intervalos de tempo conduz a:

$$\Delta t = \frac{t_w}{n} \quad (\text{II.70})$$

Dessa forma, o comprimento do elemento finito fica condicionado a:

$$L_e = c \cdot \Delta t \quad (\text{II.71})$$

A determinação de  $L_e$  varia com o tipo de algoritmo. No Método da Diferença Central, por exemplo, quando se utiliza matriz de massa agrupada, os elementos finitos de ordem inferior podem ser mais efetivos. Neste caso,  $L_e$  é igual a menor distância entre dois nós adjacentes da malha empregada.

Nos algoritmos implícitos,  $L_e$  deve ser a menor distância entre dois nós que estejam na direção da propagação da onda. Quando forem considerados os efeitos não-lineares do material, e utilizados elementos de ordem superior, é aconselhável adotar para  $L_e$  o valor da menor distância entre os pontos de integração que estejam na direção de propagação da onda.

O procedimento para a determinação do intervalo de tempo acima descrito é geral e foi indicado por Bathe [2]. Em termos práticos, é comum escolher-se o intervalo de integração conforme o algoritmo que se esteja utilizando.

No Método da Diferença Central, procura-se um intervalo de tempo que atenda a condição (II.26). O intervalo crítico é determinado em função do menor período natural do sistema, que pode ser obtido resolvendo-se o problema de auto-valores. Uma outra maneira consiste em relacionar a velocidade de propagação das ondas ao longo do elemento com as propriedades do material. Isto pode ser feito, por exemplo, para o caso de elementos bidimensionais, por meio de:

$$c = \sqrt{\frac{E(1 - \nu)}{\rho(1 + \nu)(1 - 2\nu)}} \quad (\text{II.72})$$

onde:

- $\rho$  - massa específica do material
- $E$  - módulo de elasticidade
- $\nu$  - coeficiente de Poisson
- $c$  - velocidade de propagação da onda.

Assim sendo, o intervalo crítico fica determinado por:

$$\Delta t_{cr} = \Psi \cdot \frac{L_e}{c} \quad (\text{II.73})$$

onde:

- $\Psi$  - é um coeficiente de minoração
- $L_e$  - é a menor distância entre dois pontos nodais adjacentes.

O coeficiente  $\Psi$  pode variar de 0,9 a 1 para os elementos lineares e de 0,2 a 0,6 para os elementos quadráticos.

No algoritmo implícito de Newmark costuma-se escolher o intervalo de tempo como sendo uma fração do período fundamental do sistema, e não do menor período de vibração do car-

regamento. Segundo [37], na ausência de maiores informações, pode-se considerar o intervalo de integração como sendo:

$$\Delta t_{\text{imp}} \cong \frac{1}{100} T_n \quad (\text{II.74})$$

onde:

$T_n$  - é o menor período de vibração do sistema, ou o período fundamental.

O intervalo de tempo a ser adotado no algoritmo misto deve atender concomitantemente as limitações ou as condições de cada domínio. Neste trabalho procurou-se utilizar as expressões (II.73) e (II.74) para a determinação do  $\Delta t$ . Entre os dois valores calculados, adotou-se o menor deles. Em geral, o intervalo de tempo é condicionado pelo domínio explícito. A condição  $\Delta t \leq \Delta t_{\text{cr}}^{\text{EXP}}$  é suficiente para a maioria dos problemas.

Apesar das expressões (II.73) e (II.74) terem sido extrapoladas da análise linear, elas foram utilizadas, com bons resultados, no presente estudo.

### III - SISTEMAS RÍGIDO-FLEXÍVEIS: MODELOS IMPLEMENTADOS

#### 3.1. Tipos de Problemas

Os sistemas rígrado-flexíveis a serem tratados no presente capítulo relacionam-se aos problemas que envolvem interações dinâmicas entre os meios solo-fluido-estrutura. Tais interações devem ser consideradas sempre que ocorrer um movimento relativo entre as partes do sistema. É indispensável o conhecimento da mecânica dos meios contínuos para o tratamento global dos referidos problemas [38].

Com a finalidade de simplificar a análise, é conveniente classificar os diversos casos dessa natureza segundo o seu comportamento. Assim, cada situação pode se enquadrar em uma das três seguintes categorias:

a) Problemas com grandes movimentos relativos.

São situações onde ocorrem interações entre o solo e/ou estrutura com um meio fluido em escoamento. Tais problemas são governados pelas características de escoamento do fluido, não se considerando, em geral, os efeitos da compressibilidade. Como exemplo, pode-se citar a análise de escoamento e flutuações das asas de aeronaves, oscilação de pontes suspensas (pênseis ou estaiadas) submetidas a rajadas de vento, etc.

b) Problemas de curta duração com limitado deslocamento entre os meios.

É o que acontece, por exemplo, nos casos de explosões ou cargas de impacto em estruturas que interagem com o solo ou um meio fluido em confinamento. O deslocamento total do meio flexível, no caso o solo ou o fluido, está limitado, porém a compressibilidade é um fator decisivo na análise.

c) Problemas de longa duração com limitado deslocamento entre os meios.

Tais situações são semelhantes às classificadas

no item anterior, exceto que o carregamento atua por um longo período de tempo. As estruturas *off-shore* de prospecção de petróleo submetidas a ação dinâmica das ondas têm um comportamento periódico que ilustra claramente estes casos. As estruturas submetidas a terremotos, a vibrações acústicas; o movimento dos navios; etc., são problemas cujo transiente é de longa duração, mas o deslocamento entre os meios é limitado.

Os problemas relacionados com o item *a* são de grande interesse aos engenheiros aeronáuticos. O presente trabalho se limitará ao estudo dos casos classificados no item *b*, cujo tratamento, em algumas ocasiões, é semelhante ao dispensado aos casos enquadrados no item *c*.

### 3.2. Formulação do Problema pelo Método dos Elementos Finitos

#### 3.2.1. Discretização do Meio Contínuo

Os problemas tratados neste trabalho são analisados pelo Método dos Elementos Finitos. Para tanto, o domínio contínuo é discretizado por vários elementos de dimensões definidas, conectadas entre si por um número determinado de pontos. São utilizados elementos finitos isoparamétricos com variado número de pontos nodais, para o estudo de três categorias de sistemas estruturais: Estado Plano de Tensões, Estado Plano de Deformações, e Estado Axi-simétrico de Tensões [39].

As coordenadas e os deslocamentos de qualquer ponto do meio contínuo ficam estabelecidos em função das coordenadas e dos deslocamentos dos pontos nodais dos elementos, através de funções de interpolação do tipo *serendipity*:

$$t_{x_i}^k = \sum_{k=1}^n h_k \cdot t_{x_i}^k \quad (\text{III.1})$$

$$t_{d_i}^k = \sum_{k=1}^n h_k \cdot t_{d_i}^k \quad (\text{III.2})$$

$$\Delta d = \sum_{k=1}^n h_k \cdot \Delta d_i^k \quad (\text{III.3})$$

onde:

$i = 1$  ou  $2$ , conforme a análise seja em uma ou duas dimensões;

$n$  - número de nós do elemento;

${}^t x_i$  - coordenada de um ponto do elemento  $i$  no instante  $t$ ;

${}^t d_i$  - deslocamento de um ponto do elemento  $i$  no instante  $t$ ;

$\Delta d_i$  - variação dos deslocamentos;

$h$  - função de interpolação, definida na tabela (III.1) em termos das coordenadas locais dos elementos.

Em Formulação matricial, as expressões anteriores podem ser representadas por:

$${}^t \underline{x}_i = \underline{H} \cdot \underline{x} \quad (\text{III.4})$$

$${}^t \underline{d}_i = \underline{H} \cdot \underline{d} \quad (\text{III.5})$$

onde:

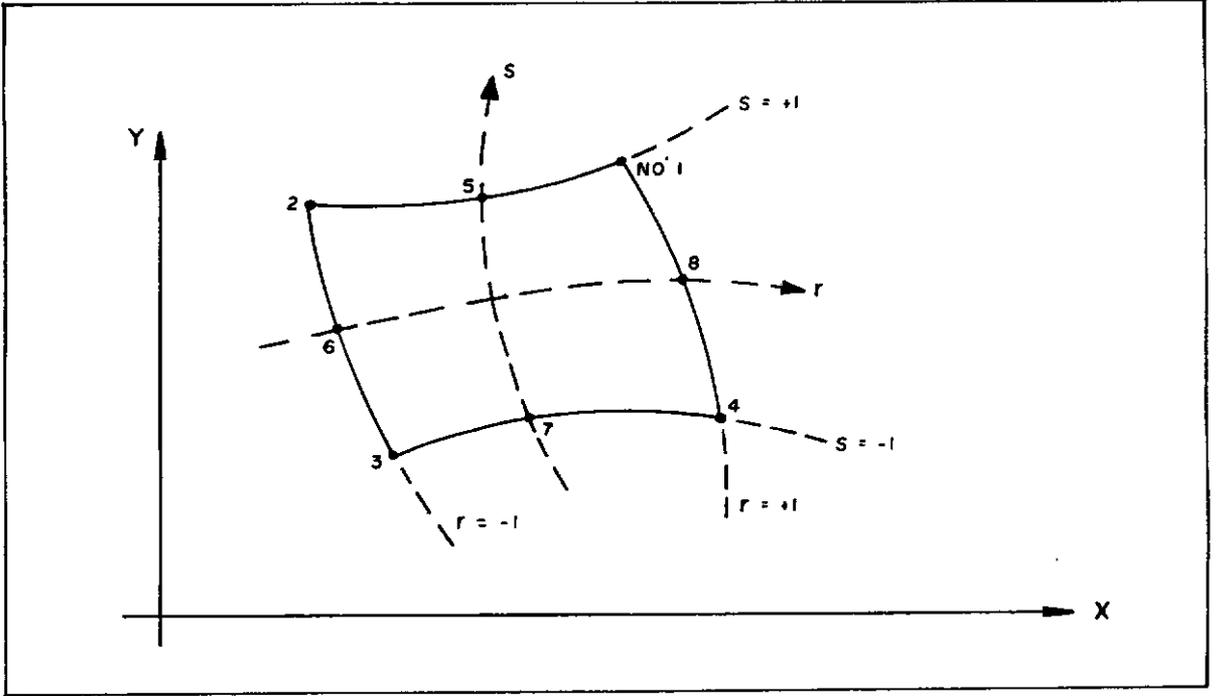
$\underline{H}$  - matriz correspondente às funções de interpolação;

$\underline{x}$  - vetor das coordenadas nodais;

$\underline{d}$  - vetor dos deslocamentos nodais.

As velocidades e as acelerações podem ser expressas em função dos deslocamentos nodais através dos seguintes vetores:

TABELA (III.1) - Funções de Interpolação para Elementos Isoparamétricos



Elemento Isoparamétrico Bi-Dimensional com Número Variado de Pontos Nodais (4 a 8).

	Incluir somente se o nó $i$ for considerado			
	$i=5$	$i=6$	$i=7$	$i=8$
$h_1 = 0.25 (1+r)(1+s)$	$-0.5 h_5$			$-0.5 h_8$
$h_2 = 0.25 (1-r)(1+s)$	$-0.5 h_5$	$-0.5 h_6$		
$h_3 = 0.25 (1-r)(1-s)$		$-0.5 h_6$	$-0.5 h_7$	
$h_4 = 0.25 (1+r)(1-s)$			$-0.5 h_7$	$-0.5 h_8$
$h_5 = 0.50 (1-r^2)(1+s)$				
$h_6 = 0.50 (1-r)(1-s^2)$				
$h_7 = 0.50 (1-r^2)(1-s)$				
$h_8 = 0.50 (1+r)(1-s^2)$				

$$\underline{v} = \underline{H} \cdot \underline{d}' \quad (\text{III.6})$$

$$\underline{a} = \underline{H} \cdot \underline{d}'' \quad (\text{III.7})$$

onde  $\underline{d}'$  e  $\underline{d}''$  correspondem, respectivamente, às derivadas primeira e segunda dos deslocamentos em relação ao tempo.

O campo de deformações é determinado pelo vetor  $\underline{\varepsilon}$  calculado por:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{B}^T \cdot \underline{d} \quad (\text{III.8})$$

onde a matriz  $\underline{B}$  é um operador linear dos deslocamentos, e tem por finalidade, transformar as derivadas desses em relação ao sistema cartesiano, necessárias para o cálculo das deformações, em derivadas em relação ao sistema global. Essa matriz depende do tipo de problema que se está analisando, ou seja, se Estado Plano de Tensões, Estado Plano de Deformações ou Estado Axi-simétrico de Tensões.

Definindo-se:

$$\Delta \underline{\varepsilon}^{t+\Delta t} = \underline{B}^T \cdot \Delta \underline{d}^{t+\Delta t} \quad (\text{III.9})$$

onde:

$$\Delta \underline{d}^{t+\Delta t} = \underline{d}^{t+\Delta t} - \underline{d}^t \quad (\text{III.10})$$

$$\Delta \underline{\varepsilon}^{t+\Delta t} = \underline{\varepsilon}^{t+\Delta t} - \underline{\varepsilon}^t \quad (\text{III.11})$$

A equação (III.9) expressa a variação das deformações no instante  $t+\Delta t$ . Conseqüentemente, as tensões em qualquer ponto do elemento ficam determinadas através de:

$$\underline{\sigma}^{t+\Delta t} = \underline{\sigma}^t + \Delta \underline{\sigma}^{t+\Delta t} \quad (\text{III.12})$$

onde:

$$\underline{\Delta\sigma}^{t+\Delta t} = \underline{D}^{t+\Delta t} \cdot \underline{\Delta\varepsilon}^{t+\Delta t} \quad (\text{III.13})$$

$\underline{\Delta\sigma}^{t+\Delta t}$  = é o vetor das variações de tensões no tempo  $t+\Delta t$ ;

$\underline{D}^{t+\Delta t}$  = é a matriz constitutiva do material do elemento, atualizada no tempo  $t+\Delta t$ .

A discretização do meio contínuo da maneira como foi apresentada, permite o acompanhamento de cada ponto nodal ao longo de sua trajetória, determinando-se, a cada instante, as suas condições de movimento. Como o referencial é fixo, as coordenadas de cada partícula variam com o tempo. Tal procedimento é conhecido como *Formulação Lagrangeana*, e a malha de elementos finitos associada à dita *lagrangeana* [40].

Normalmente, em se tratando de fluidos, prefere-se a *Formulação Euleriana*, pela qual cada ponto da malha é considerado fixo, com suas coordenadas invariantes no tempo. Entretanto, a sua implementação trás alguns inconvenientes. Quando o meio contínuo se deforma, os contornos e interfaces de cada domínio movem-se através da malha, acarretando uma topologia muito complexa. Existem problemas de acoplamento entre as diversas regiões que podem afetar os custos computacionais. Além disso, as soluções Eulerianas tendem a ser numericamente menos comportadas.

Assim sendo, o presente trabalho fará uso da *Formulação Lagrangeana* para todo o meio contínuo, inclusive para o domínio fluido. Deve-se ressaltar que esse tipo de solução não representa bem os problemas de propagação de ondas com grandes deformações de qualquer região. A malha se tornaria muito distorcida, inviabilizando a análise. Isto porém, não aconteceu neste trabalho, em função dos problemas estudados, de acordo com o item 3.1.

### 3.2.2. Formulação dos Efeitos Não-Lineares

Em geral, nas análises não-lineares, a matriz  $\underline{D}$  da equação (III.13) varia constantemente, sendo necessárias atualizações sucessivas. A frequência dessas operações tende a diminuir a eficiência computacional, o que não é desejável. O problema pode ser minimizado atualizando-se a matriz constitutiva apenas em determinados intervalos de tempo previamente estabelecidos.

Quando se consideram somente os efeitos não-lineares do material, a matriz  $\underline{D}$  torna-se dependente das deformações, sendo conveniente o seu desdobramento em duas parcelas distintas [41-45]:

$$\underline{D} = \underline{D}^e + \underline{D}^{ep} \quad (\text{III.14})$$

onde:

$\underline{D}^e$  - matriz das constantes elásticas

$\underline{D}^{ep}$  - matriz das constantes elasto-plásticas.

Quando o carregamento se concentrar no domínio elástico, as tensões resultantes estarão abaixo do limite de escoamento do material, e, em consequência, a matriz  $\underline{D}^{ep}$  será nula.

A condição para que o carregamento permaneça no regime elástico é expressa por uma função  $\phi$  de escoamento tal que:

$$\phi(\sigma, \epsilon^P, K) < 0 \quad (\text{III.15})$$

onde:

$\epsilon^P$  - deformação plástica efetiva;

$\kappa$  - função de escoamento de material, com endurecimento após a plastificação.

Se a inequação (III.15) for atendida, então  $\underline{D}^{eP} = 0$  e  $\underline{D} = \underline{D}^e$ .

Na plastificação, a função de escoamento  $\phi(\sigma, \epsilon^P, \kappa)$  se iguala a zero, e duas situações distintas podem ocorrer a partir daí:

a) Um descarregamento.

O material retorna a sua posição inicial, apresentando uma deformação residual, voltando a adquirir características elásticas. Nesses casos, a matriz constitutiva será simplesmente:

$$\underline{D} = \underline{D}^e \quad (\text{III.16})$$

b) Um carregamento plástico.

Em geral, os materiais sofrem um processo de endurecimento (*work hardening*) quando atingem a plastificação. Significa que, para cada ciclo de carregamento e de descarregamento plástico, corresponde uma nova tensão limite de escoamento. O fenômeno está representado na figura (III.1), que ilustra essa situação para o caso mais simples de um ensaio uni-axial de compressão para um material genérico. A plastificação está caracterizada pela mudança na inclinação da curva  $\sigma \times \epsilon$ , implicando na transformação da matriz constitutiva para:

$$\underline{D} = \underline{D}^{eP} \quad (\text{III.17})$$

onde:

$$\underline{D}^{eP} = \underline{D}^{eP}(\sigma, \epsilon^P, \kappa, \underline{D}^e) \quad (\text{III.18})$$

A matriz elasto-plástica  $\underline{D}^{eP}$  é função da *história* de carregamento, mas não depende do tempo de aplicação das car-

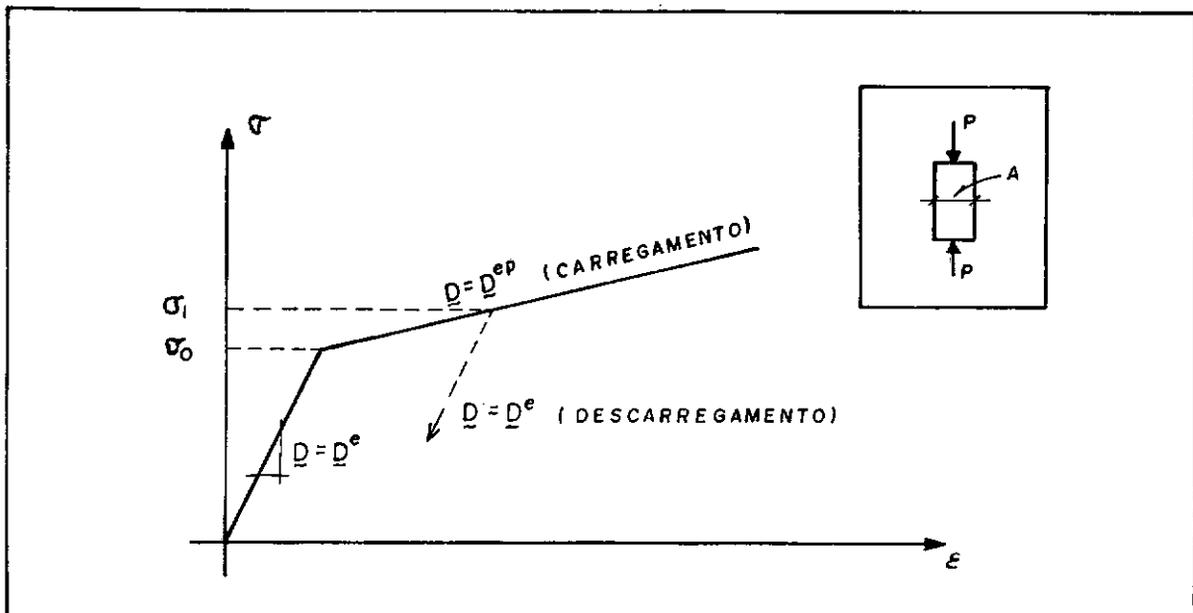


FIGURA (III.1) - Matrizes Constitutivas Elástica e Elasto-Plástica para um Ensaio de Compressão Uni-Axial

gas.

Os materiais conhecidos como plásticos perfeitos são aqueles que não sofrem processo de endurecimento após a plastificação, apresentando um patamar de escoamento horizontal na curva  $\sigma \times \epsilon$  de um ensaio análogo ao da figura (III.1). Como são casos particulares dos discutidos acima, as mesmas considerações permanecem válidas.

Atualmente existem vários processos que estabelecem uma lei de variação da função  $\phi$  de escoamento da equação (III.15). Dentre esses, destacam-se os critérios de Von Mises, Mohr-Coulomb, Tresca, Rankine, etc. [44, 45]. O primeiro deles foi o critério adotado neste trabalho, dada a sua validade experimental, o seu vasto campo de aplicação, e o seu uso bastante difundido.

O Método de Von Mises determina que o início da plastificação é atingido quando o segundo invariante das tensões desviatórias alcança um valor crítico. Isto significa que:

$$\phi(\sigma, \epsilon^P, \kappa) = 0 \quad (\text{III.19})$$

quando

$$J_2 = \frac{1}{3} \sigma_y^2 \quad (\text{III.20})$$

onde:

$J_2$  - é o segundo invariante de tensões desviatórias;

$\sigma_y$  - é a tensão de escoamento do estado uniaxial de tensões.

O segundo invariante de tensões desviatórias é definido por:

$$J_2 = \frac{1}{6} \left[ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right] \quad (\text{III.21})$$

Ou então:

$$J_2 = \frac{1}{2} (S_x^2 + S_y^2 + S_z^2) + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{zy}^2 \quad (\text{III.22})$$

onde:

$$S_x = \sigma_x - \sigma_m \quad (\text{III.23})$$

$$s_y = \sigma_y - \sigma_m \quad (\text{III.24})$$

$$s_z = \sigma_z - \sigma_m \quad (\text{III.25})$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \quad (\text{III.26})$$

Quando a equação (III.20) for satisfeita, o material começará a se deformar plasticamente. Se, a partir deste ponto, houver um descarregamento, o mesmo apresentará uma deformação residual, e sua tensão de escoamento será alterada, passando a depender dos valores das tensões atingidas na última etapa de carregamento. Isto significa, em última análise, o processo de endurecimento do material.

O tratamento dispensado aos efeitos não-lineares, da maneira como foi apresentado acima, é semelhante ao desenvolvimento na referência [15], da qual se utilizou as rotinas para o cálculo das tensões e deformações plásticas. Assim sendo, recomenda-se a consulta àquele trabalho para maiores esclarecimentos sobre o assunto.

### 3.2.3. Formulação dos Efeitos Dinâmicos

O Princípio dos Trabalhos Virtuais estabelece a igualdade entre o trabalho produzido pelas forças internas ao realizado pelas forças externas:

$$W_{int} = W_{ext} \quad (III.27)$$

onde:

$W_{int}$  - trabalho das forças internas;

$W_{ext}$  - trabalho das forças externas.

$$W_{int} = \int_V \delta \tilde{\epsilon}^T \cdot \tilde{\sigma} \cdot dv \quad (III.28)$$

$$W_{ext} = \int_V \delta \tilde{d}^T \cdot \tilde{f}_V \cdot dv + \int_S \delta \tilde{d}_S^T \cdot \tilde{f}_S \cdot ds + \\ + \sum \delta \tilde{d}_i^T \cdot \tilde{F}_i \quad (III.29)$$

$\underline{f}_v$  - forças de volume

$\underline{f}_s$  - forças de superfície

$\underline{F}_i$  - força nodal concentrada

$\delta \underline{d}_s, \delta \underline{d}_i$  - deslocamentos virtuais no contorno e em um nó, respectivamente.

Levando as expressões (III.28) e (III.29) em (III.27), chega-se à equação do equilíbrio estático, levada a todos os elementos de contínuo. Pelo Princípio de D'Alambert essa equação pode ser generalizada à análise dinâmica, pela consideração dos efeitos de inércia como forças de volume adicionais [46]:

$$\underline{f}_i = - \rho \cdot \underline{d}_t'' = - \rho \cdot \underline{a}_t \quad (\text{III.30})$$

onde  $\rho$  é a massa específica do material do elemento.

De modo análogo, as forças de amortecimento também podem ser incluídas como forças de volume adicionais:

$$\underline{f}_d = - k_t \cdot \underline{d}_t' = -k_t \cdot \underline{v}_t \quad (\text{III.31})$$

onde  $k_t$  é o coeficiente de amortecimento viscoso do material do elemento.

A equação geral do equilíbrio dinâmico é obtida levando-se as expressões (III.30) e (III.31) em (III.27) que, estendida a todos os elementos, fica determinada por:

$$\begin{aligned} \int_V \delta \underline{\varepsilon}^T \cdot \underline{\sigma} \cdot dV &= \int_V \delta \underline{d}^T \cdot \underline{f}_v \cdot dV + \int_S \delta \underline{d}_s^T \cdot \underline{f}_s \cdot dS - \\ &- \int_V \delta \underline{d}^T \cdot \rho \cdot \underline{a}_t \cdot dV - \\ &- \int_V \delta \underline{d}^T \cdot k_t \cdot \underline{v}_t \cdot dV + \end{aligned}$$

$$+ \sum_i \delta \underline{d}_i^T \cdot \underline{F}_i \quad (\text{III.32})$$

Pelas equações (III.5) e (III.8) tem-se:

$$\delta \underline{d}_i = \underline{H}_t \cdot \delta \underline{d} \quad (\text{III.33})$$

e

$$\delta \underline{\epsilon} = \underline{B}_t^T \cdot \delta \underline{d} \quad (\text{III.34})$$

Conduzindo-se estas duas últimas expressões à (III.32), conclui-se que:

$$\begin{aligned} \int_V \underline{B}_t^T \cdot \delta \underline{d} \cdot \underline{\sigma} \cdot d\underline{v} &= \int_V \delta \underline{d}^T \cdot \underline{H}_t^T \cdot \underline{f}_v \cdot d\underline{v} + \\ &+ \int_S \delta \underline{d}^T \cdot \underline{H}_t^T \cdot \underline{f}_s \cdot d\underline{s} - \\ &- \int_V \delta \underline{d}^T \cdot \underline{H}_t^T \cdot \rho \cdot \underline{H}_t \cdot \underline{a}_t \cdot d\underline{v} - \\ &- \delta \underline{d}^T \cdot \underline{F}_t \quad (\text{III.35}) \end{aligned}$$

Nos casos de não-linearidade física, as matrizes  $\underline{B}$  e  $\underline{H}$  são constantes ao longo do tempo, permitindo a seguinte simplificação:

$$\begin{aligned} \delta \underline{d}^T \cdot \left( \int_V \underline{B}_t^T \cdot \underline{\sigma} \cdot d\underline{v} + \int_V \underline{H}_t^T \cdot \rho \cdot \underline{H}_t \cdot \underline{a}_t \cdot d\underline{v} + \right. \\ \left. + \int_V \underline{H}_t^T \cdot \underline{k}_t \cdot \underline{H}_t \cdot \underline{v}_t \cdot d\underline{v} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_V \tilde{H}^T \cdot \underline{f}_v \cdot dv - \\
 & - \int_S \tilde{H}^T \cdot \underline{f}_s \cdot ds - \underline{F}_t) = 0
 \end{aligned}
 \tag{III.36}$$

Esta expressão, levada ao longo de todo o domínio equivale a:

$$\underline{M} \cdot \underline{a}_t + \underline{C} \cdot \underline{v}_t + \underline{F}_t^{int} = \underline{F}_t^{ext}
 \tag{III.37}$$

onde:

$$\underline{M} = \int_V \tilde{H}^T \cdot \rho \cdot \underline{H} \cdot dv - \text{matriz de massa do problema.}$$

$$\underline{C} = \int_V \tilde{H}^T \cdot \underline{k}_t \cdot \underline{H} \cdot dv - \text{matriz de amortecimento viscoso.}$$

$$\underline{F}_t^{int} = \int_V \underline{B}^T \cdot \underline{\sigma} \cdot dv - \text{vetor das forças nodais internas.}$$

e

$$\underline{F}_t^{ext} = \int_V \tilde{H}^T \cdot \underline{f}_v \cdot dv + \int_S \tilde{H}^T \cdot \underline{f}_s \cdot ds + \underline{F}_t - \text{vetor das forças nodais externas.}$$

A expressão (III.37) representa, afinal, o sistema de equações do equilíbrio dinâmico, cuja solução foi discutida no capítulo anterior. Os efeitos não-lineares são considerados no vetor de forças nodais internas. No caso particular de uma análise elástica, esse vetor corresponde à parcela da rigi-

dez do problema. Os detalhes de implementação serão discutidos a seguir.

### 3.3. Implementação Numérica

#### 3.3.1. Integração das Matrizes do Sistema

A montagem das matrizes globais da equação (III.37) envolve integrações numéricas que devem ser realizadas de forma eficiente. O presente trabalho utilizou o Método da Quadratura de Gauss, com 1 x 1 ou 2 x 2 pontos de integração, conforme mostra a figura (III.2), apresentando ótimos resultados através dos elementos isoparamétricos.

Basicamente, o Método de Gauss consiste em se substituir as integrais de volume e de superfície da referida equação, do sistema global para o sistema de coordenadas naturais, transformando essas integrais em somatórios ao longo dos pontos de integração. Assim sendo, as matrizes do sistema ao nível do elemento ficam determinadas por:

$$\tilde{M}_e = \sum_{ij} \omega_i \cdot \omega_j \cdot \tilde{H}_{ij}^T \cdot \rho \cdot \tilde{H}_{ij} \cdot \det J_{ij} \cdot \Psi_{ij} \quad (\text{III.38})$$

$$\tilde{F}_e^{\text{int}} = \sum_{ij} \omega_i \cdot \omega_j \cdot \tilde{B}_{ij}^T \cdot \tilde{\sigma}_{ij} \cdot \det J_{ij} \cdot \Psi_{ij} \quad (\text{III.39})$$

$$\tilde{F}_e^{\text{ext}} = \sum_{ij} \omega_i \cdot \omega_j \cdot \tilde{H}_{ij}^T \cdot \tilde{f}_{v_{ij}} \cdot \det J_{ij} \cdot \Psi_{ij} +$$

$$+ \sum_i \omega_i \cdot \tilde{H}_s^T(\phi_i) \cdot \tilde{f}_s(\phi_i) \cdot d\ell(\phi_i) +$$

$$+ \tilde{F}_t \quad (\text{III.40})$$

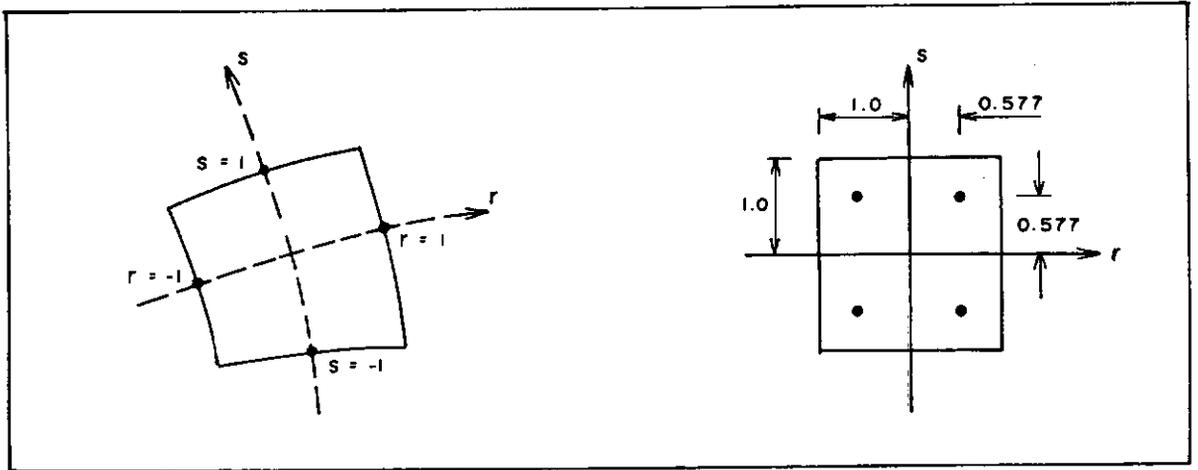


FIGURA (III.2) - Regra de Integração de Gauss (2 x 2 pontos).

onde:

$\omega_i, \omega_j$  - são os fatores de pesos da Quadratura de Gauss

$\det \underline{J}$  - determinante do operador Jacobiano

$\phi_i$  - coordenada natural do contorno do elemento

$d\ell$  - comprimento diferencial do contorno

$\Psi_{ij}$  - variável que deve assumir um dos seguintes valores conforme o tipo de problema a ser analisado:

$\Psi = t$  (espessura) - Estado Plano de Tensões

$\Psi = 1$  - Estado Plano de Deformações

$\Psi = R$  - (raio do ponto de integração) - Sólidos Axi-simétricos.

Os índices  $ij$  nas matrizes  $\underline{H}$ ,  $\underline{B}$  e  $\underline{J}$ , bem como nos vetores  $\underline{g}$  e  $\underline{f}_v$ , significam que tais arranjos devem ser desenvol

vidos para cada ponto de integração. Como a solução do sistema de equações de (III.37) ao longo do tempo exige os valores das tensões nos intervalos anteriores ao que se efetua o equilíbrio, tais valores devem ser armazenados em  $\underline{\sigma}$  e  $\Delta\underline{\sigma}$  para cada ponto de Gauss.

### 3.3.2. Matriz de Massa

A determinação da matriz de massa conforme indicada anteriormente, conduz a uma matriz consistente (cheia), pouco eficiente em termos computacionais. É mais aconselhável a utilização de matrizes de massa diagonais ou agrupadas, de acordo com as referências [47, 48]. Tal condição é fundamental para o bom desempenho do algoritmo misto, na forma em que foi implementado.

A diagonalização da matriz de massa pode ser feita através das seguintes transformações:

a) Calculam-se os coeficientes da diagonal principal da matriz de massa consistente do elemento:

$$M_{ii} = \int_V \underline{H}_i^T \cdot \rho \cdot \underline{H}_i \cdot dV \quad (\text{III.41})$$

$$(i = 1, 2, \dots, 8)$$

b) Determina-se a massa do elemento:

$$M_e = \int_V \rho \cdot dV \quad (\text{III.42})$$

c) Os coeficientes da diagonal principal da matriz de massa diagonalizada são calculados por uma média ponderada:

$$m_{ii} = M_e \cdot \frac{M_{ii}}{\sum_i M_{ii}} \quad (\text{III.43})$$

Um segundo processo, muito mais simples e algumas vezes tão preciso quanto o de agrupamento da matriz de massa, consiste na distribuição eqüitativa da massa do elemento entre os seus pontos nodais. A matriz resultante é também diagonal, e é conhecida como *matriz de massa discreta*. Ambos os processos foram empregados com sucesso no presente trabalho, conforme será discutido no Capítulo IV.

### 3.3.3. Montagem da Matriz de Amortecimento

Considere-se a matriz de amortecimento calculada de acordo com:

$$\underline{C} = \int_V \underline{H}^T \cdot k_t \cdot \underline{H} \cdot dV \quad (\text{III.44})$$

Por melhor que seja feita a integração dessa matriz, a precisão da análise pode ficar comprometida se o coeficiente de amortecimento viscoso  $k_t$  não for bem determinado no instante  $t$ .

Em termos práticos, é totalmente desaconselhável a montagem da matriz  $\underline{C}$  a partir do agrupamento das matrizes de amortecimento dos elementos conforme (III.44), já que as propriedades de amortecimento do sistema estrutural são funções das frequências de vibração e variam com o tempo.

Como há necessidade de se montar a matriz de amortecimento explicitamente para os métodos de integração passo-a-passo, costuma-se considerá-la na forma de amortecimento de Rayleigh [46], como uma combinação linear das matrizes de massa e de rigidez:

$$\underline{C} = \alpha^* \underline{M} + \beta^* \underline{K} \quad (\text{III.45})$$

onde  $\alpha^*$  e  $\beta^*$  são coeficientes arbitrários de proporcionalidade.

Considerando-se que, em sistemas amortecidos, a matriz de amortecimento é ortogonal à matriz dos modos de vibração, assume-se a sua proporcionalidade a:

$$\underline{\phi}_i^T \cdot \underline{C} \cdot \underline{\phi}_j = 2\omega_i \xi_i \delta_{ij} \quad (\text{III.46})$$

onde:

$\underline{\phi}$  - matriz dos modos de vibração

$\xi_i$  - parâmetro (porcentagem) de amortecimento modal

$\omega_i$  - frequência de vibração

$\delta_{ij}$  - delta de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{quando } i \neq j \\ 1, & \text{quando } i = j. \end{cases}$$

Os coeficientes  $\alpha^*$  e  $\beta^*$  podem ser determinados levando-se a equação (III.46) em (III.45):

$$\underline{\phi}_i^T \cdot (\alpha^* \underline{M} + \beta^* \underline{K}) \cdot \underline{\phi}_j = 2 \cdot \omega_i \cdot \xi_i \cdot \delta_{ij} \quad (\text{III.47})$$

Devido às propriedades de ortogonalidade das matrizes  $\underline{M}$  e  $\underline{K}$ , chega-se a um sistema de duas equações e duas incógnitas, resolvendo-se o problema:

$$\alpha^* + \beta^* \cdot K_i = 2 \cdot \omega_i \cdot \xi_i, \quad i = 1, 2 \quad (\text{III.48})$$

Na prática, costuma-se adotar um coeficiente  $\xi_i$  de amortecimento modal que já tenha sido utilizado satisfatoriamente em problemas similares.

Como a montagem da matriz de rigidez no algoritmo

desenvolvido neste trabalho é feita apenas para o domínio implícito, e pelo fato de que as constantes  $\alpha^*$  e  $\beta^*$  são escolhidas arbitrariamente em função de (III.48), então pode-se assumir que:

$$\underline{C} = \alpha^* \cdot \underline{M} \quad (\text{III.49})$$

A expressão (III.49) foi a adotada no presente trabalho.

### 3.4. Discretização do Fluido

#### 3.4.1. Detalhes de Implementação

Como já foi dito, o domínio fluido também será analisado pelo Método dos Elementos Finitos, apesar de que, historicamente, o Método das Diferenças Finitas tenha sido o mais empregado. Serão utilizados elementos isoparamétricos para discretizar o meio, e a formulação será do tipo Lagrangeana, para uniformizar a solução em todo o contínuo. A integração no tempo das equações gerais de movimento será feita preferencialmente pelo método direto da Diferença Central.

O material constituinte do meio rígido pode ser isotrópico ou anisotrópico, porém o fluido será considerado essencialmente isotrópico. Neste caso, a matriz constitutiva  $\underline{D}$  pode ser escrita da seguinte forma, segundo [41]:

$$\underline{D} = \underline{\bar{D}}_0 \cdot K + \frac{2}{3} \cdot \underline{\bar{\bar{D}}}_0 \cdot G \quad (\text{III.50})$$

onde:

K - constante de deformação volumétrica

G - constante de deformação cisalhante.

Nos problemas bi-dimensionais as matrizes  $\underline{\bar{D}}_0$  e  $\underline{\bar{\bar{D}}}_0$  são quadradas, com (4 x 4) elementos, e podem ser escritas da

seguinte maneira:

$$\underline{\underline{D}}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.51})$$

$$\underline{\underline{D}}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.52})$$

Para fluidos usuais, é comum desprezar-se a resistência dos mesmos ao cisalhamento, especialmente se forem isentos de viscosidade. Neste caso,  $G = 0$  e a matriz constitutiva será simplesmente  $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}}_0 K$ .

Quando a viscosidade for importante na análise, aparecerão forças dissipativas no meio fluido que precisarão ser consideradas. Os efeitos do amortecimento poderão ser tratados como um sistema de tensões adicionais  $\sigma'$  dependente da velocidade de de formação dos elementos, ou seja:

$$\underline{\underline{\sigma}}' = \mu \cdot \underline{\underline{D}}_0 \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{v}} \quad (\text{III.53})$$

onde  $\mu$  é a viscosidade do fluido.

Desta forma, as forças de viscosidade ficam determinadas por:

$$\underline{\underline{F}} = \int_V \underline{\underline{B}}^T \cdot \underline{\underline{\sigma}}' \cdot dV = \underline{\underline{C}}_\mu \cdot \underline{\underline{v}} \quad (\text{III.54})$$

onde:

$$\underline{\underline{C}}_\mu = \int_V \underline{\underline{B}}^T \cdot \mu \cdot \underline{\underline{D}}_0 \cdot \underline{\underline{B}} \cdot dV \quad (\text{III.55})$$

$C_{\mu}$  - matriz de amortecimento viscoso.

A montagem da matriz de amortecimento pela expressão anterior resulta em uma matriz esparsa. A sua diagonalização pode ser feita de modo análogo à da matriz de massa, considerando-se a matriz  $B$  constante ou através do seguinte procedimento, em função das velocidades:

$$\tilde{v}_t = \frac{\tilde{d}_t - \tilde{d}_{t-\Delta t}}{\Delta t} \quad (\text{III.56})$$

Levando (III.56) em (III.54) tem-se:

$$C_{\mu} \cdot \tilde{v} = \frac{1}{\Delta t} \cdot (C_{\mu} \cdot \tilde{d}_t - C_{\mu} \cdot \tilde{d}_{t-\Delta t}) \quad (\text{III.57})$$

sendo:

$$F_{\mu t} = \frac{1}{\Delta t} \cdot C_{\mu} \cdot \tilde{d}_t \quad (\text{III.58})$$

e

$$F_{\mu t-\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \cdot C_{\mu} \cdot \tilde{d}_{t-\Delta t} \quad (\text{III.59})$$

As forças dissipativas  $F_{\mu t}$  e  $F_{\mu t-\Delta t}$  podem então ser consideradas nas equações de equilíbrio dinâmico como forças adicionais, sendo facilmente implementadas nos algoritmos discutidos no Capítulo II.

Os efeitos da compressibilidade no fluido devem ser considerados quando o intervalo de aplicação do carregamento for muito menor do que o tempo de propagação acústica transversal sobre o domínio fluido. Tais efeitos serão levados em consideração por meio do coeficiente  $K$  de variação volumétrica do fluido.

### 3.4.2. Influência da Rigidez do Fluido

Em sistemas que envolvem a interação fluido-estrutura, verifica-se que a influência da matriz de massa, em relação ao domínio fluido, é preponderante na montagem da matriz efetiva do problema, quando se tratam de pequenos intervalos de tempo [49]. Assim sendo, utilizando-se a matriz de massa diagonal, é interessante não se considerar a contribuição da matriz de rigidez dos elementos que constituem o domínio fluido na matriz de rigidez global, especialmente se o número de nós desta região for muito grande. Considerando-se que a matriz de rigidez tangente utilizada na expressão (II.41) pode ser decomposta em duas sub-matrizes, tal que:

$$\tilde{K}_T = \tilde{K}_T^e + \tilde{K}_T^f \quad (\text{III.60})$$

onde  $\tilde{K}_T^e$  e  $\tilde{K}_T^f$  são as matrizes de rigidez da estrutura e do fluido, respectivamente.

Desprezando-se a influência da rigidez dos elementos do meio fluido, a montagem da matriz de rigidez efetiva pode então ser feita através de:

$$\tilde{K}^* = \frac{1}{\Delta t^2 \cdot \beta} \cdot \tilde{M} + \frac{1}{\Delta t \cdot \beta} \cdot \tilde{C}_T + \tilde{K}_T^e \quad (\text{III.61})$$

O uso da equação (III.61) é geral e recomenda um esquema de solução do tipo misto, onde a estrutura é analisada por um algoritmo implícito, enquanto que o domínio fluido por um método explícito. A grande vantagem em se realizar a montagem da matriz  $\tilde{K}^*$  dessa maneira é que, se o problema for analisado unicamente por um algoritmo implícito, o número de coeficientes da matriz de rigidez será bastante reduzido. Além disso, a topologia dessa matriz é totalmente semelhante a ilustrada na figura (I.4), com sub-regiões características de cada domínio. O algoritmo implícito utilizado dessa forma passa a se comportar de modo inteiramente análogo ao do método misto.

### 3.5. O Modelo de Interface

Um dos grandes problemas a ser enfrentado em um sistema rígido-flexível é o que trata do acoplamento entre os diversos meios. Vários modelos têm sido desenvolvidos para representar adequadamente as ligações entre as partes do contínuo, sem comprometer a estabilidade e a precisão da análise.

No caso de interações fluido-estrutura existem diversas formas de tratamento [50-59]. O presente trabalho utiliza elementos escalares de mola para simular a interface entre os dois meios. Tais elementos são dotados de rigidez suficiente, em uma das direções, para impedir o descolamento do fluido em relação a estrutura. Na outra direção, não há impedimento algum dos deslocamentos relativos entre as partes. Dessa forma, os problemas que possuem uma superfície livre podem ser convenientemente representados.

Em dois nós, infinitamente próximos um do outro, um pertencente ao domínio da estrutura, e o outro ao meio fluido, ao sofrerem um deslocamento genérico devido ao carregamento aplicado, surgirão forças contrárias ao movimento, graças à deformação do elemento de mola. Essas forças podem ser obtidas por:

$$F_i = -F_j = k_m \cdot \Delta d \quad (\text{III.62})$$

onde:

$k_m$  - é a constante de mola (ou a sua rigidez) e  
 $\Delta d$  - é a variação dos deslocamentos entre os dois meios

$$\Delta d = d_i - d_j \quad (\text{III.63})$$

Em termos matriciais, tem-se:

$$\vec{F}_m = \vec{K}_m \cdot \vec{d} \quad (\text{III.64})$$

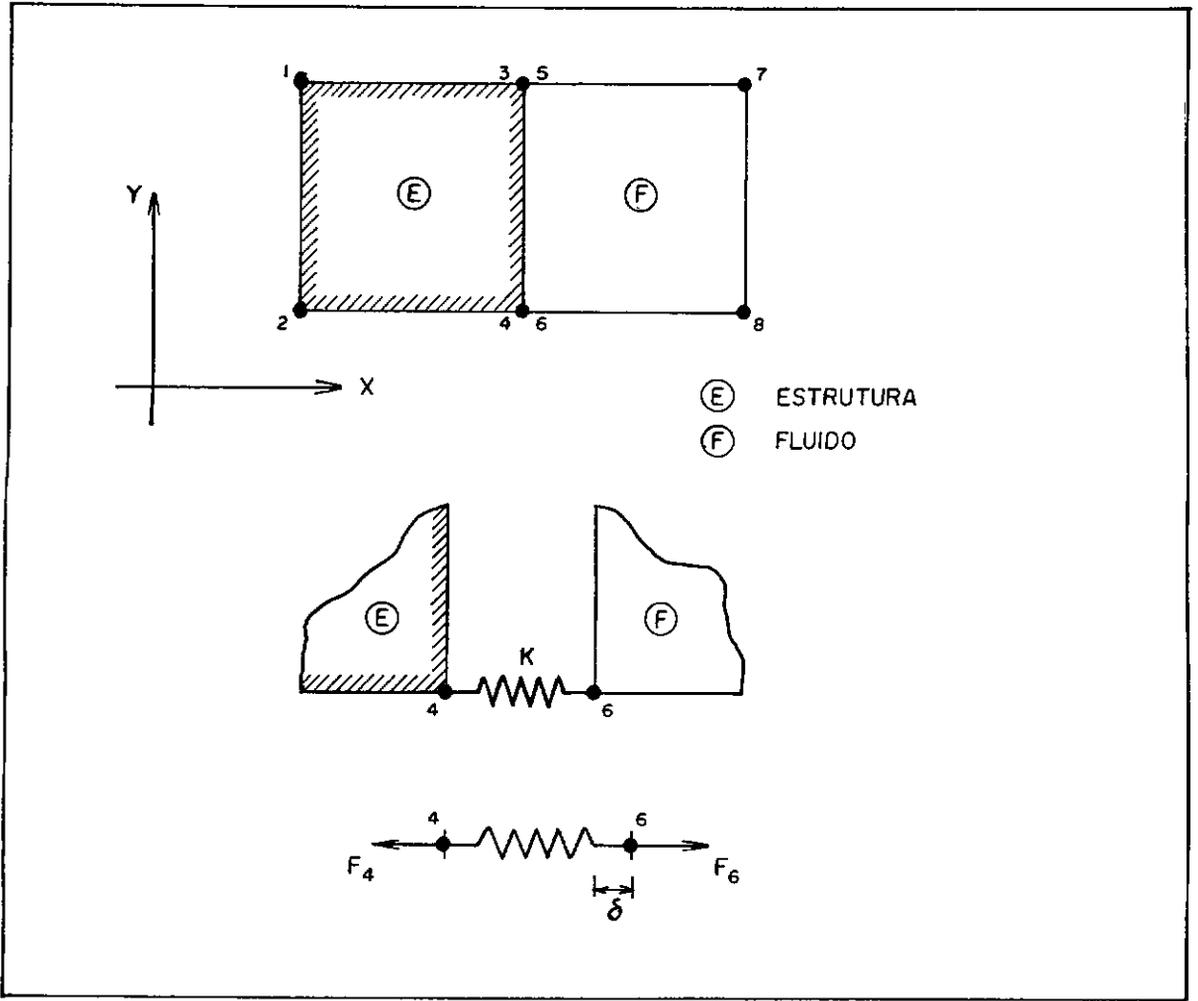


FIGURA (III.3) - Esquema de Funcionamento de Elementos Escalares para Sistemas Fluido-Estrutura.

Ou seja:

$$\begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_m & -k_m \\ -k_m & k_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \end{Bmatrix} \quad (\text{III.65})$$

O vetor de forças adicionais  $\underline{F}_m$  deve ser aplicado, a cada iteração, no vetor de forças nodais internas do sistema global. A matriz  $\underline{K}_m$  deve ser considerada na montagem da matriz de rigidez efetiva do problema.

Este procedimento pode ser ilustrado através da figura (III.3). Observa-se que a tendência de afastamento na  $d_i$

reção horizontal entre os nós 4 e 6 provoca o aparecimento das forças nodais  $F_4$  e  $F_6$ , provenientes da deformação da mola, impedindo o deslocamento entre os meios. No entanto, os dois domínios podem se movimentar independentemente no sentido vertical, já que não existe um elemento de mola nessa direção e o único considerado é incapaz de impedir tais deformações.

O tratamento de interface pode ser representado com exatidão pela técnica de restrições generalizadas, que é amplamente difundida na literatura. Entretanto, no presente trabalho preferiu-se simular o comportamento da interface de outra maneira para não trazer dificuldades adicionais a implementação dos algoritmos em estudo.

## IV - APLICAÇÕES

### 4.1. *Viga Bi-Apoiada*

Como primeira aplicação, analisou-se o comportamento elasto-plástico de uma viga bi-apoiada, submetida a um carregamento uniformemente distribuído, com intensidade igual a 75% da carga crítica de colapso. São apresentados na figura (IV.1) os dados geométricos da peça, bem como as características do material empregado, o qual possui um comportamento plástico-perfeito considerado segundo o Critério de Escoamento de Von Mises.

A discretização da estrutura foi feita aproveitando-se as características de simetria, e utilizando-se elementos isoparamétricos quadráticos, com oito pontos nodais, e (2 x 2) pontos de integração de Gauss.

O principal objetivo deste exemplo é comparar a precisão dos resultados obtidos por meio do algoritmo explícito da Diferença Central, com aqueles decorrentes do algoritmo misto implementado, com todos os elementos implícitos, ou seja, com o próprio algoritmo implícito de Newmark.

A análise das frequências naturais revelou que o período fundamental da viga é de  $4,94203 \times 10^{-3}$  seg, o que implicou na utilização de um intervalo de tempo de  $5,0 \times 10^{-5}$  seg para a integração por meio do algoritmo implícito. Para tal problema, o intervalo crítico é igual a  $0,75 \times 10^{-6}$  seg, sendo esse o valor utilizado pelo algoritmo explícito.

Como a diferença entre os intervalos de tempo adotados para os dois métodos é muito grande (da ordem de 66 vezes) a favor do Processo de Newmark, por meio do qual a análise foi muito mais rápida, não houve preocupação em se comparar os tempos de processamento. Este problema é tipicamente melhor analisado, em termos de tempo de execução, por meio de um algoritmo implícito. Daí o motivo de se comparar apenas a precisão dos resultados.

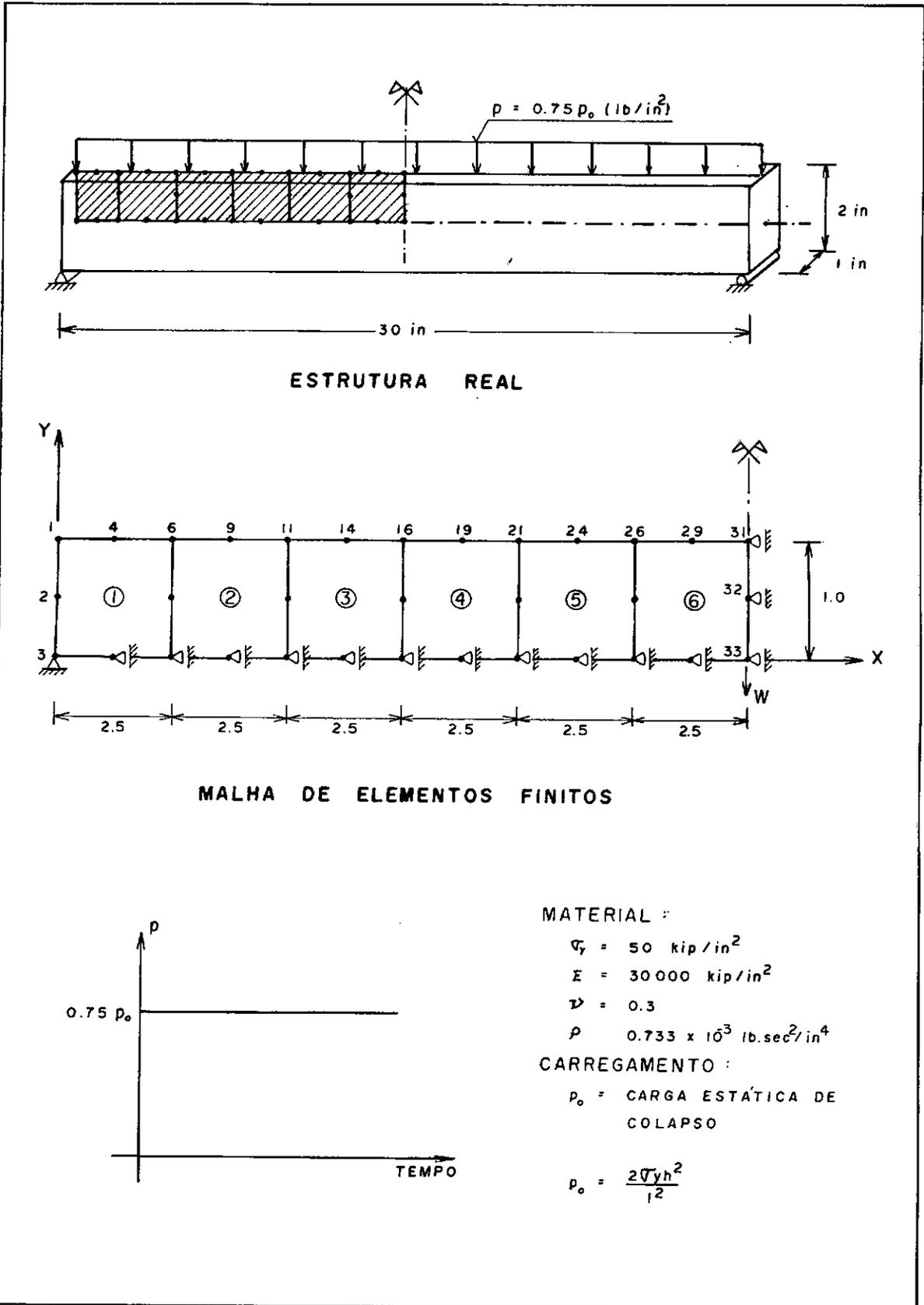


FIGURA (IV.1) - Viga Bi-Apoiada, Análise Elasto-Plástica: Características do Problema.

Neste caso, dispensou-se a análise completa do problema através do algoritmo misto, com elementos implícitos-explicitos. Em tal situação, o intervalo de integração seria idêntico ao tempo crítico, pelo fato de existir um único material. Dessa maneira, a análise se tornaria ineficiente, por ali às limitações do intervalo de tempo, os gastos decorrentes da montagem das matrizes globais e resolução do sistema de equações.

A título de ilustração, a tabela (IV.1) apresenta os valores dos deslocamentos verticais do nó 33 em alguns intervalos de tempo, obtidos por meio dos algoritmos implícito, explícito, e misto com todos os elementos explícitos.

A curva de variação de tais deslocamentos é apresentada no gráfico da figura (IV.2), que compara as soluções através do algoritmo de Newmark com o Método da Diferença Central, ambos adotando matriz de massa agrupada. Nessa mesma figura é apresentada a solução obtida pelo programa NONSAP [60] que também utiliza o processo de Newmark, porém com matriz de massa do tipo consistente. A figura (IV.3) mostra a variação das tensões  $\sigma_x$  de um ponto de integração ao longo do tempo.

O problema foi analisado considerando-se controle de convergência das iterações de equilíbrio igual a 1,0%. Apenas por informação, ao se atingir o tempo de  $0,75 \times 10^{-2}$  seg de análise, o algoritmo explícito havia percorrido 10.000 intervalos, em 6.410,2 segundos, enquanto que o implícito precisara de somente 150 intervalos, num total de 293,02 segundos. Não se observou um número superior a duas iterações ao longo de toda a análise por meio do algoritmo de Newmark.

#### 4.2. Propagação de Ondas em Meio Fluido

A finalidade deste exemplo é demonstrar a eficiência do modelo fluido implementado no Capítulo III. Para tanto é analisado o comportamento de um fluido inteiramente confinado em três lados de um tubo, sobre o qual, na extremidade livre, é

TABELA (IV.1) - Viga Bi-Apoiada: Resultados dos Deslocamentos do N<sup>o</sup> 33 (Em Polegadas)

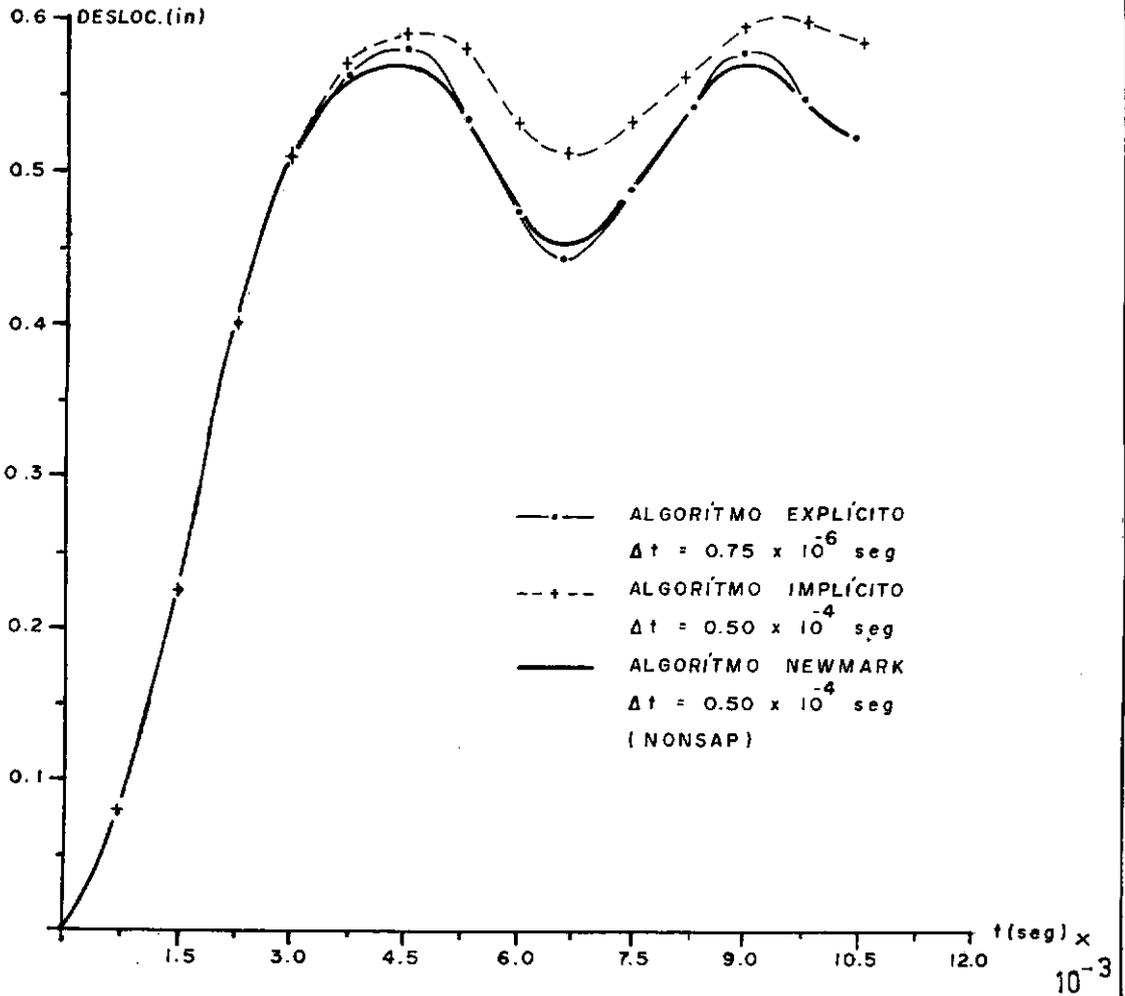
Tempo (seg) x 10 <sup>-3</sup>	Alg. Misto com El. Explícitos	Alg. Explícito	Alg. Implícito
0,15	-0,0025	-0,0025	-
0,30	-0,0113	-0,0113	-
0,45	-0,0277	-0,0277	-
0,60	-0,0495	-0,0495	-
0,75	-0,0742	-0,0742	-0,0742
0,80	-0,1030	-0,1030	-
1,05	-0,1363	-0,1363	-
1,20	-0,1703	-0,1703	-
1,35	-0,2030	-0,2030	-
1,50	-0,2371	-0,2371	-0,2371
1,65	-0,2737	-0,2737	-
1,80	-0,3122	-0,3122	-
1,95	-0,3445	-0,3445	-
2,10	-0,3710	-0,3710	-
2,25	-0,3976	-0,3976	-0,3976

aplicado um carregamento uniformemente distribuído e constante ao longo do tempo, conforme mostra a figura (IV.4). O problema é considerado segundo o Estado Plano de Deformações, e sua solução teórica pode ser encontrada na referência [41].

Deseja-se observar a propagação das tensões de compressão do fluido ao longo do tubo. A seqüência de figuras (IV.5) a (IV.12) mostra o desenvolvimento dessas tensões, para vários tipos de análise, tendo uma razoável coincidência com os resultados teóricos. Verifica-se também que o fenômeno da reflexão das ondas pode ser simulado através do modelo utilizado.

A discretização do problema foi feita por meio de

## DESLOCAMENTO VERTICAL DO NÓ 33



VIGA BI-APOIADA - ANÁLISE ELASTO-PLÁSTICA

FIGURA (IV.2) - Viga Bi-Apoiada: Variação dos Deslocamentos Verticais do NÓ 33.

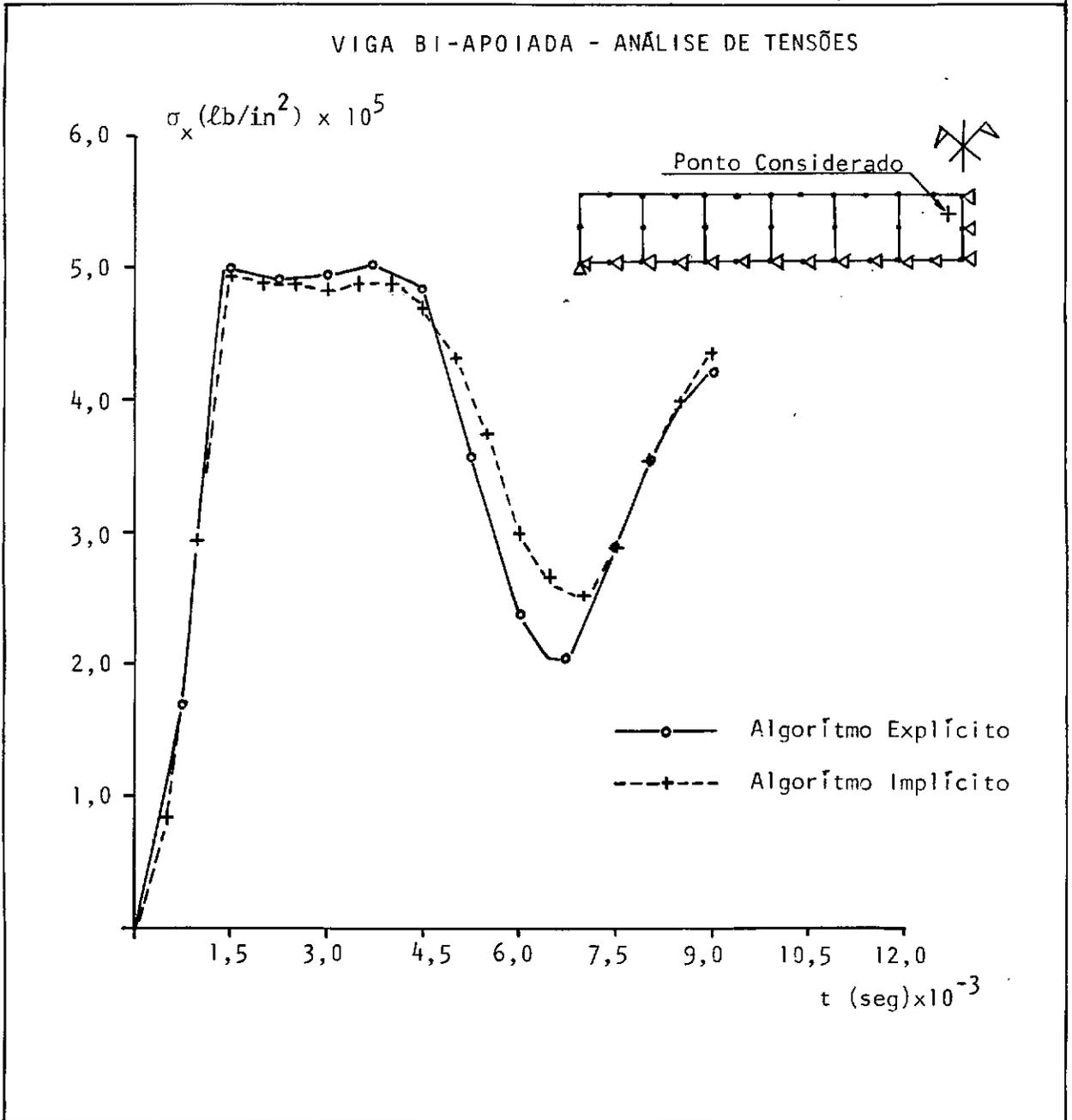
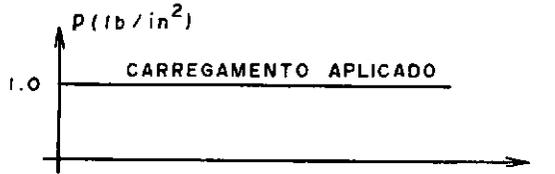
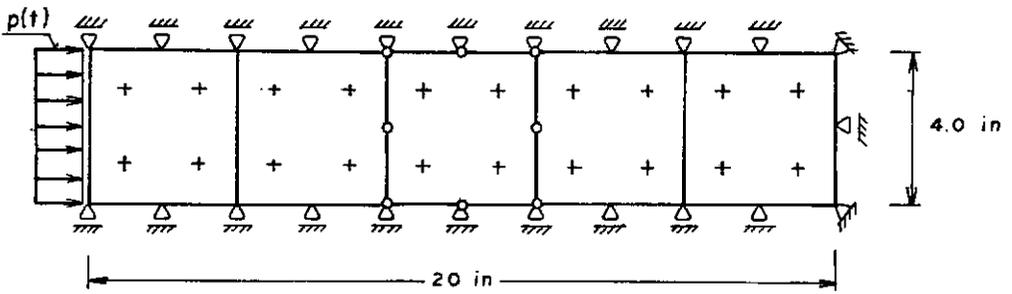


FIGURA (IV.3) - Viga Bi-Apoiada: Variação das Tensões em um Ponto de Integração.

## ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÕES



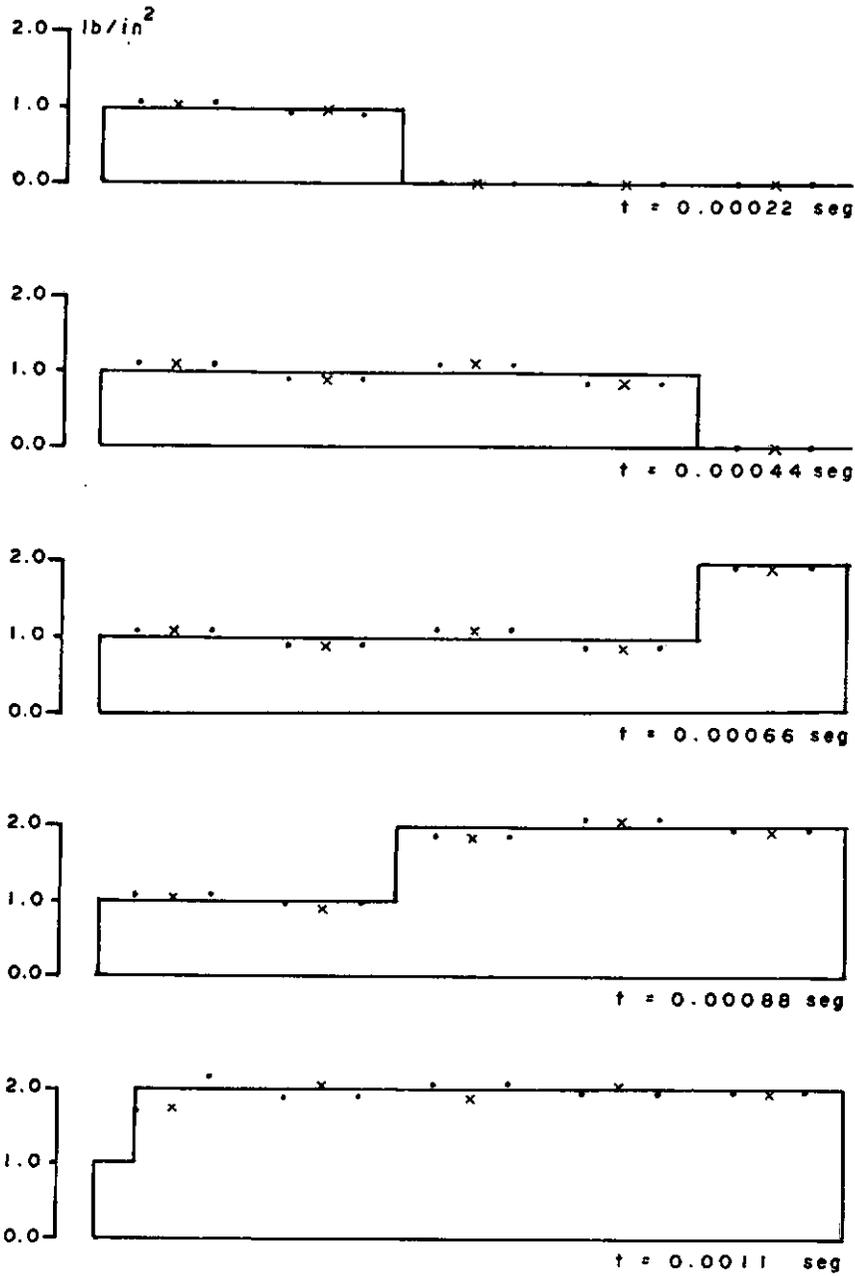
DADOS DO FLUIDO :  $k = 120\,000 \text{ lb/in}^2$   
 $\nu = 0.5$   
 $\rho = 0.935 \times 10^4 \text{ lb.s}^2/\text{in}^4$

FIGURA (IV.4) - Propagação de Ondas em Meio Fluido: Características do Problema.

elementos finitos isoparamétricos com quatro ou oito pontos nodais. As análises foram desenvolvidas variando-se o número de pontos de integração de Gauss, o intervalo de tempo, e o controle de convergência. As figuras (IV.5) a (IV.12) não representam todas as combinações possíveis realizadas, mas são uma amostra fiel do total dos resultados. Para melhor compreensão, elas devem ser consideradas duas a duas, formando um total de quatro grupos distintos, com as seguintes características:

- a) Algoritmo Explícito: figuras (IV.5) e (IV.6);
- b) Algoritmo Misto, com todos os elementos explícitos: figura (IV.7) e (IV.8);
- c) Algoritmo Misto, com elementos implícitos e explícitos: figuras (IV.9) e (IV.10);

PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM MEIO FLUIDO  
ALGORÍTMO EXPLÍCITO



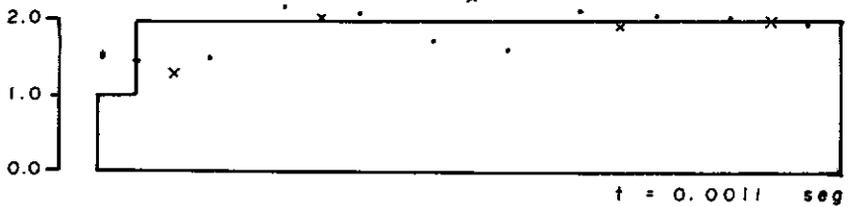
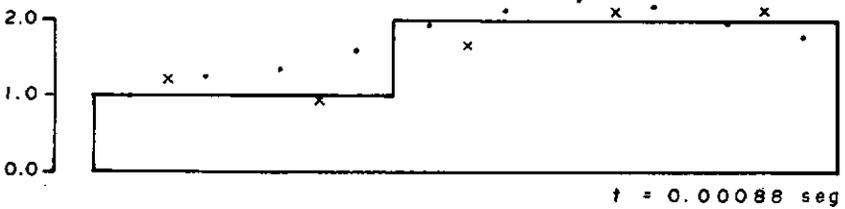
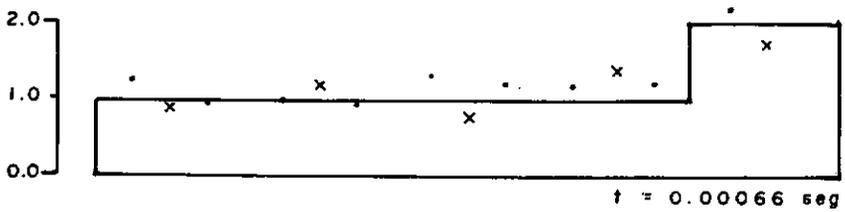
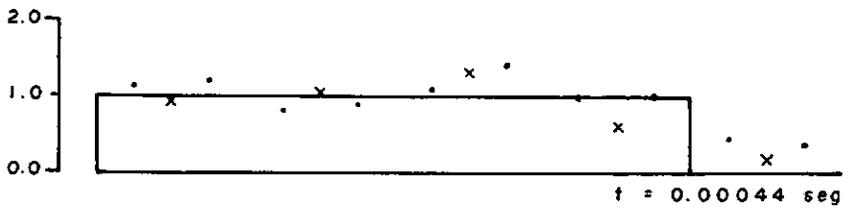
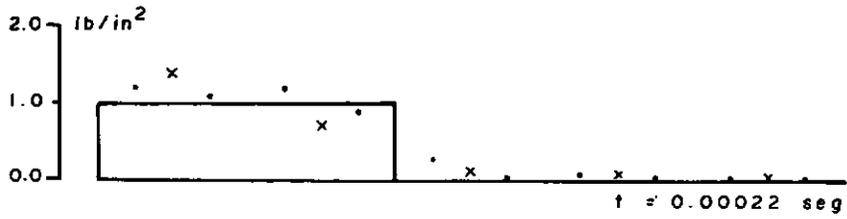
— SOLUÇÃO TEÓRICA

x GAUSS (1x1); ELEMENTOS COM 4 NÓS;  $\Delta t = 0.11 \times 10^{-3}$  seg

• GAUSS (2x2); ELEMENTOS COM 4 NÓS;  $\Delta t = 0.11 \times 10^{-3}$  seg

FIGURA (IV.5)

PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM MEIO FLUIDO  
ALGORÍTMO EXPLÍCITO



— SOLUÇÃO TEÓRICA

× GAUSS (1x1); ELEMENTOS COM 4 NÓS;  $\Delta t = 0.550 \times 10^{-4}$  seg

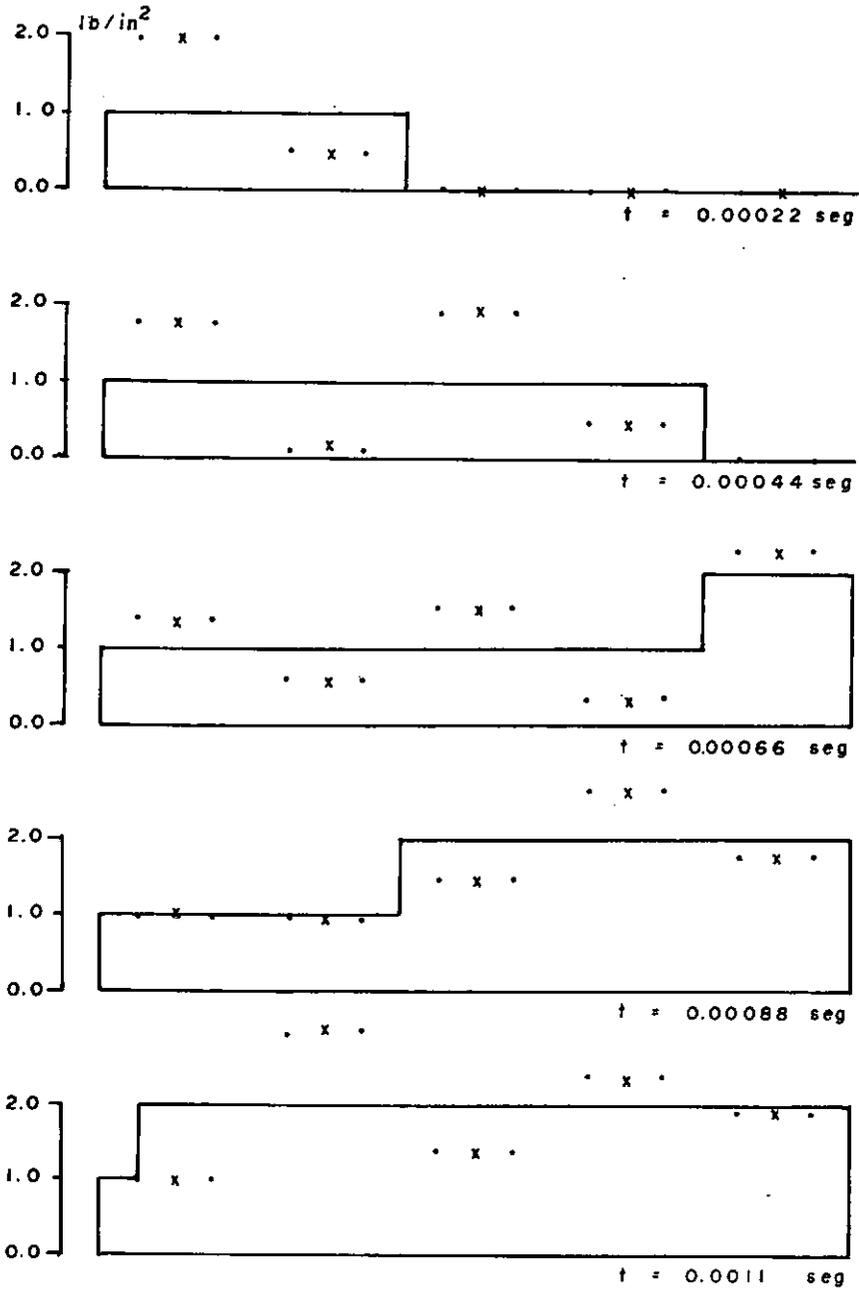
• GAUSS (2x2); ELEMENTOS COM 8 NÓS;  $\Delta t = 0.275 \times 10^{-4}$  seg

FIGURA (IV.6)

# PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM MEIO FLUIDO

ALGORÍTMO MISTO - ELEMENTOS EXPLÍCITOS

(CONTROLE DE CONVERGÊNCIA : 1% OU 0.1%)



— SOLUÇÃO TEÓRICA

x GAUSS (1x1) ; ELEMENTOS COM 4 NÓS ;  $\Delta t = 0.11 \times 10^{-3} \text{ seg}$

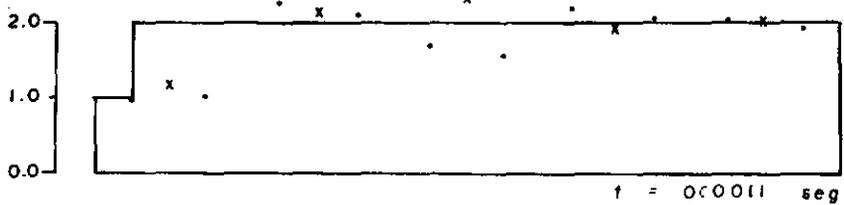
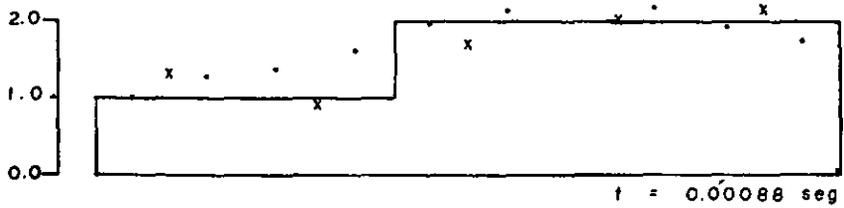
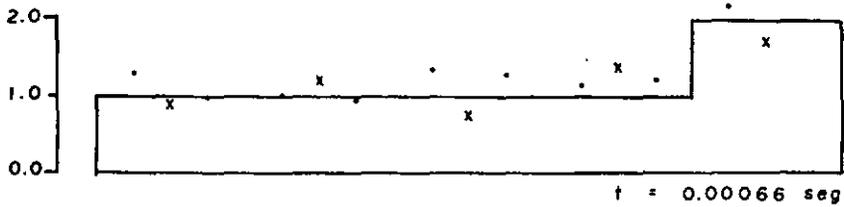
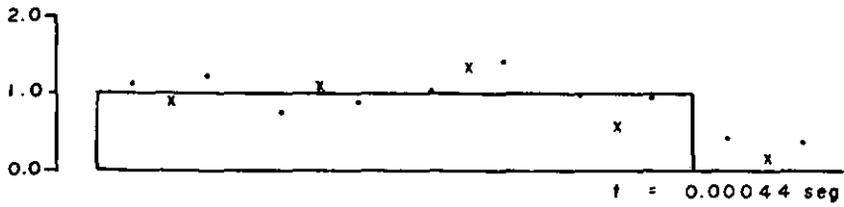
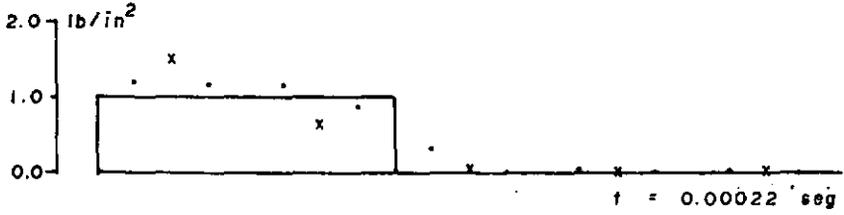
• GAUSS (2x2) ; ELEMENTOS COM 4 NÓS ;  $\Delta t = 0.11 \times 10^{-3} \text{ seg}$

FIGURA (IV.7)

# PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM MEIO FLUIDO

## ALGORÍTMO MISTO - ELEMENTOS EXPLÍCITOS

(CONTROLE DE CONVERGÊNCIA : 0.1%)



— SOLUÇÃO TEÓRICA

x GAUSS (1 x 1) ; ELEMENTOS COM 4 NÓS ;  $\Delta t = 0.550 \times 10^{-4} \text{ seg}$

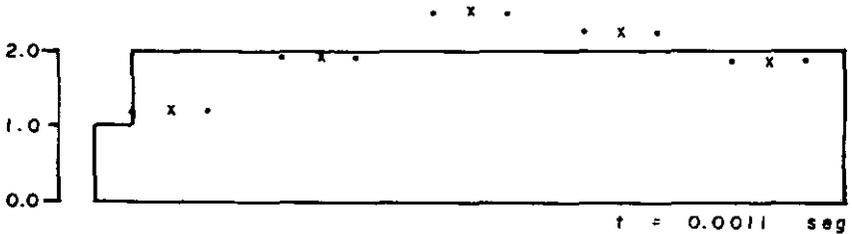
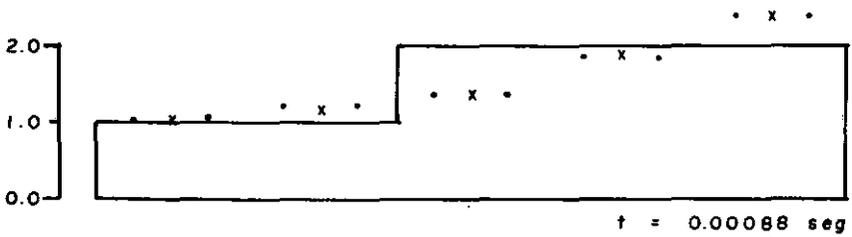
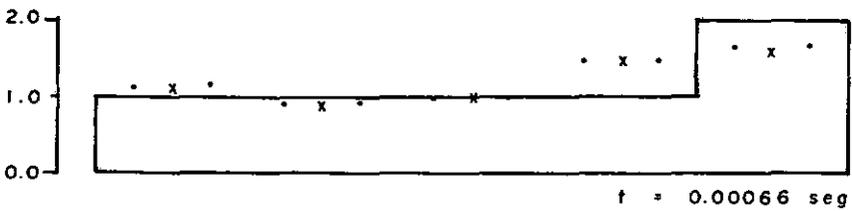
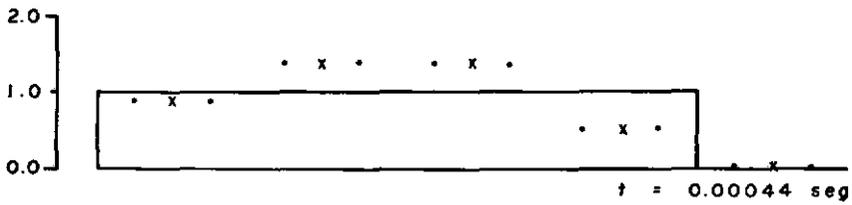
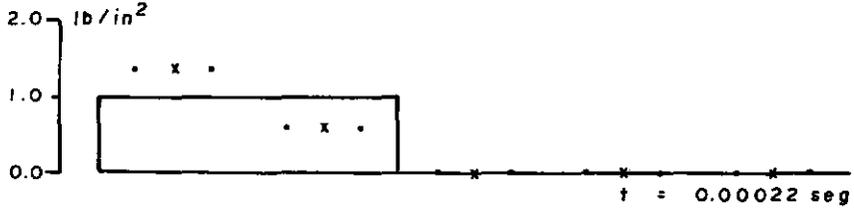
• GAUSS (2 x 2) ; ELEMENTOS COM 8 NÓS ;  $\Delta t = 0.275 \times 10^{-4} \text{ seg}$

FIGURA (IV.8)

# PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM MEIO FLUIDO

## ALGORÍTMO MISTO - ELEMENTOS MISTOS

(CONTROLE DE CONVERGÊNCIA : 1%)



— SOLUÇÃO TEÓRICA

x GAUSS (1x1); ELEMENTOS COM 4 NÓS;  $\Delta t = 0.11 \times 10^{-3} \text{ seg}$

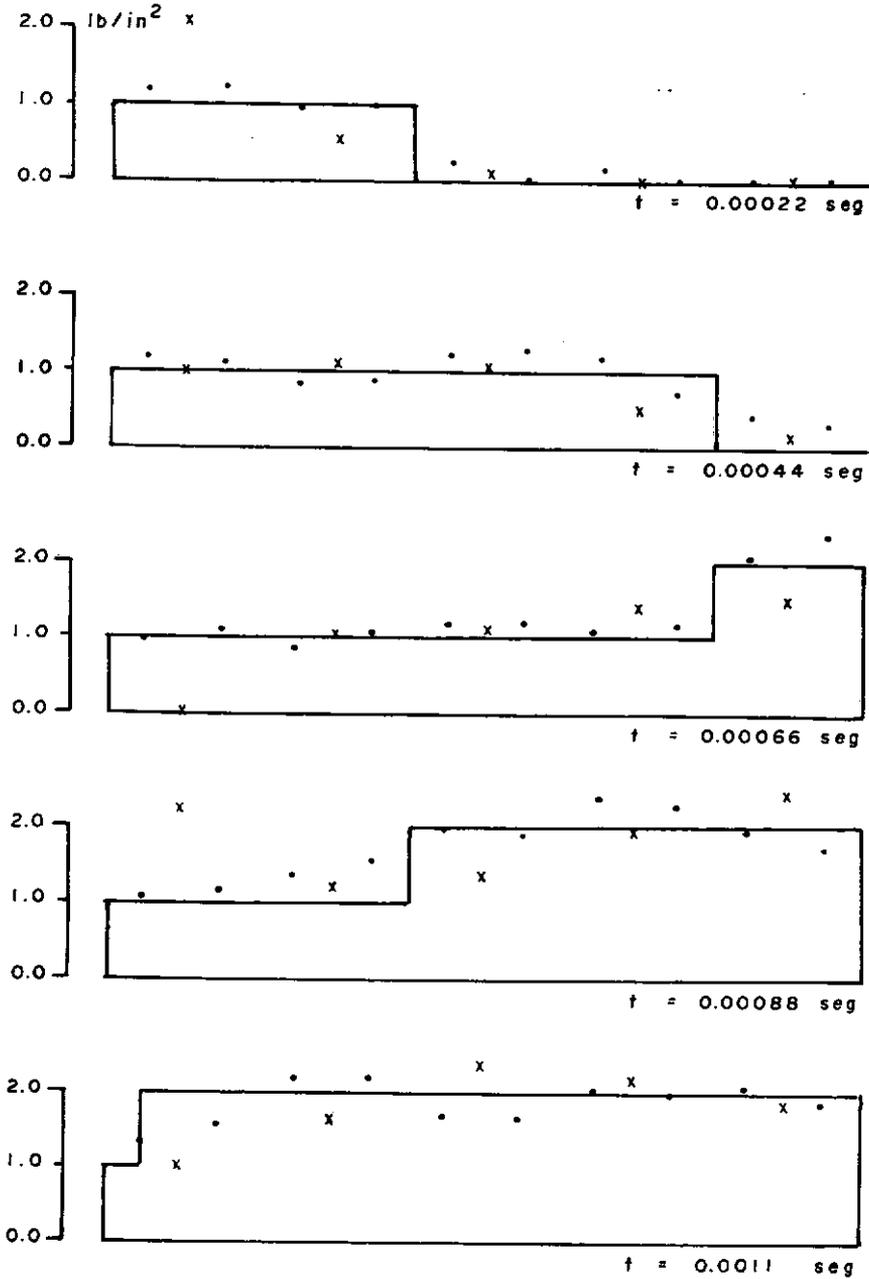
• GAUSS (2x2); ELEMENTOS COM 4 NÓS;  $\Delta t = 0.11 \times 10^{-3} \text{ seg}$

FIGURA (IV.9)

# PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM MEIO FLUIDO

ALGORÍTMO MISTO - ELEMENTOS MISTOS

(CONTROLE DE CONVERGÊNCIA : 1% OU 0.1%)



— SOLUÇÃO TEÓRICA

x GAUSS (1 x 1) ; ELEMENTOS COM 4 NÓS ;  $\Delta t = 0.110 \times 10^{-3} \text{ seg}$

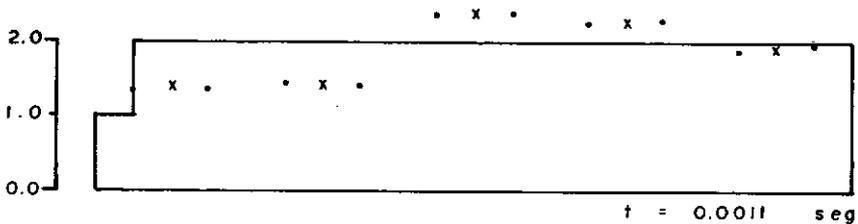
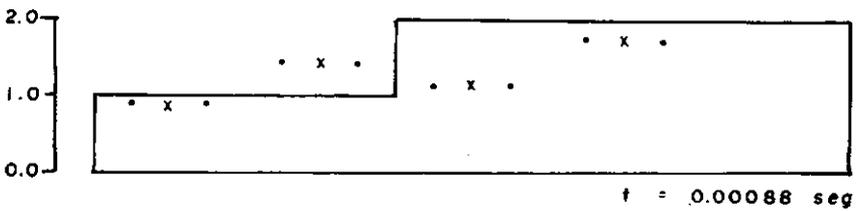
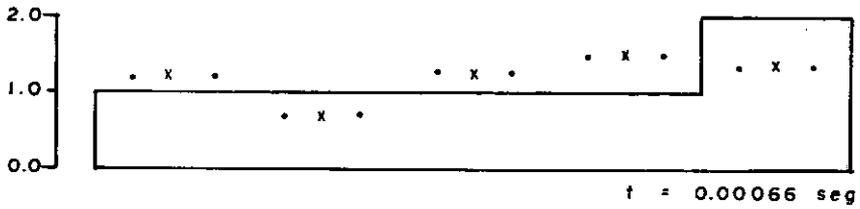
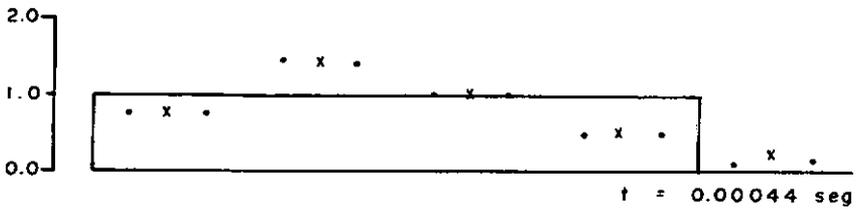
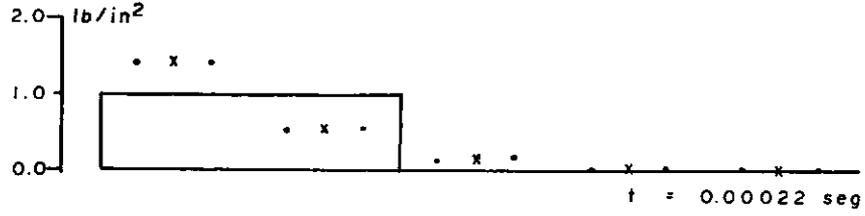
• GAUSS (2 x 2) ; ELEMENTOS COM 8 NÓS ;  $\Delta t = 0.275 \times 10^{-4} \text{ seg}$

FIGURA (IV.10)

# PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM MEIO FLUIDO

## ALGORÍTIMO IMPLÍCITO

(CONTROLE DE CONVERGÊNCIA : 0.1%)



— SOLUÇÃO TEÓRICA

x GAUSS (1 x 1); ELEMENTOS COM 4 NÓS;  $\Delta t = 0.11 \times 10^{-3} \text{ seg}$

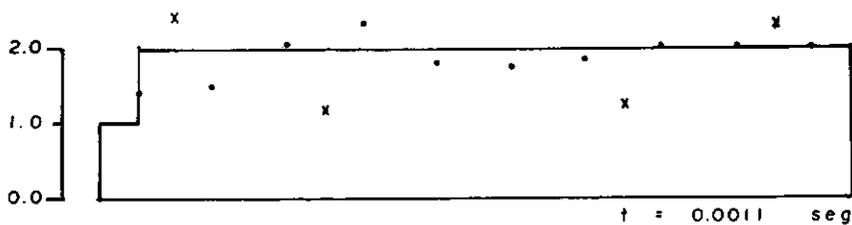
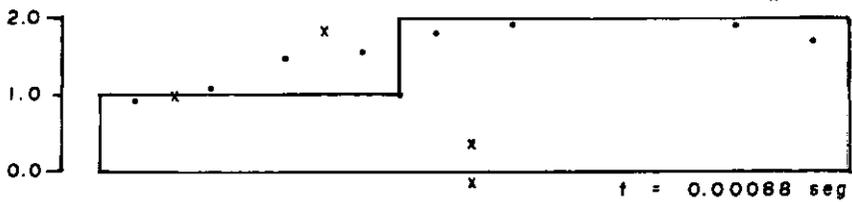
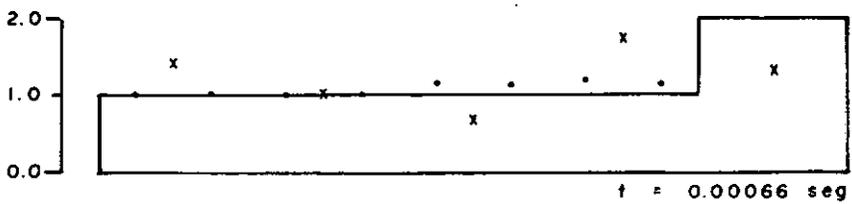
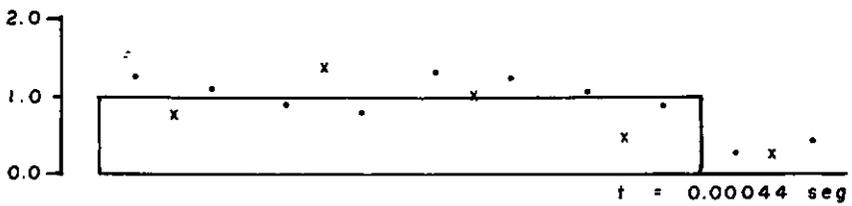
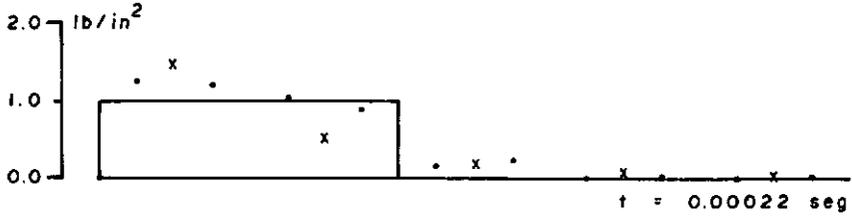
• GAUSS (2 x 2); ELEMENTOS COM 4 NÓS;  $\Delta t = 0.11 \times 10^{-3} \text{ seg}$

FIGURA (IV.11)

# PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM MEIO FLUIDO

## ALGORÍTMO IMPLÍCITO

(CONTROLE DE CONVERGÊNCIA : 1%)



— SOLUÇÃO TEÓRICA

x GAUSS (1x1) ; ELEMENTOS COM 4 NÓS ; SEM RIGIDEZ ;  $\Delta t = 0.11 \times 10^{-3}$  seg

• GAUSS (2x2) ; ELEMENTOS COM 8 NÓS ; COM RIGIDEZ ;  $\Delta t = 0.275 \times 10^{-4}$  seg

FIGURA (IV.12)

d) Algoritmo Implícito: figuras (IV.11) e (IV.12).

Os intervalos de tempo utilizados foram iguais a  $0,11 \times 10^{-3}$  segundos, ou a metade desse valor, para os elementos com quatro nós; e  $0,275 \times 10^{-4}$  segundos para os elementos com oito nós.

A figura (IV.5) mostra os resultados do algoritmo explícito, com elementos de quatro nós, intervalo de tempo igual a  $0,11 \times 10^{-3}$  seg, e variando-se o número de pontos de integração de Gauss. O mesmo algoritmo foi utilizado na figura (IV.6), que mostra as respostas nos casos de elementos com oito nós, Gauss (2 x 2),  $\Delta t = 0,275 \times 10^{-4}$  seg, e elementos com quatro nós, Gauss (1 x 1) e  $\Delta t = 0,55 \times 10^{-4}$  seg.

O algoritmo misto, com todos os elementos explícitos, foi empregado nas figuras (IV.7) e (IV.8). Na primeira delas, os elementos são de quatro nós, variou-se o número de pontos de integração e o controle de convergência, para um tempo de  $\Delta t = 0,11 \times 10^{-3}$  seg. A variação da tolerância não afetou consideravelmente os resultados. Na figura seguinte, são mostradas as respostas para os casos de elementos com oito nós, Gauss (2 x 2), e elementos de quatro nós, Gauss (1 x 1),  $\Delta t = 0,55 \times 10^{-4}$  seg.

Elementos implícitos e explícitos foram utilizados simultaneamente para as análises representadas nas figuras (IV.9) e (IV.10). A figura (IV.9) foi preparada com elementos de quatro nós,  $\Delta t = 0,11 \times 10^{-3}$  seg, tolerância igual a 1%, e variando-se o número de pontos de integração de Gauss. A seguir, a tolerância é reduzida para 0,1%, e os resultados são plotados na figura (IV.10) para Gauss (1 x 1). Nessa mesma figura apresentam-se as respostas no caso de elementos de oito nós, com (2 x 2) pontos de integração, e tolerância de 1%. As duas figuras foram preparadas considerando-se que os elementos de extremidade são implícitos e os demais, explícitos (I-E-E-E-I). Contudo, a solução da figura (IV.10), que utiliza elementos de quatro nós, corresponde a distribuição: E-I-I-E-E.

As figuras (IV.11) e (IV.12) representam as soluções por meio do algoritmo de Newmark. Na primeira, comparam-se as respostas quando se utilizam elementos com quatro nós,  $\Delta t = 0,11 \times 10^{-3}$  seg, tolerância de 0,1%, e variando-se o número de pontos de integração. Na última, estão representadas as soluções dos casos de elementos com quatro pontos nodais, sem rigidez do fluido, e elementos com oito pontos, mas com a rigidez considerada.

Em função dos resultados obtidos, podem-se fazer as seguintes observações:

1º) *Quanto à precisão:*

Dos quatro grupos, os resultados que mais se aproximaram dos valores teóricos, desenhados em linha cheia, foram os do algoritmo explícito. O modelo se comportou melhor para os elementos lineares de quatro nós, possibilitando respostas mais precisas que as dos elementos quadráticos de oito nós.

A redução do intervalo de tempo implica num aumento da precisão. Em compensação, os resultados são pouco alterados quando se diminui a tolerância nas verificações do processo de convergência. Praticamente a ordem de grandeza dos resultados não se altera sensivelmente com a mudança de tolerância.

Não é possível reparar uma variação acentuada nos resultados quando a integração de Gauss é realizada com (1 x 1) ou (2 x 2) pontos de integração. O mesmo pode ser dito quanto a posição e a quantidade dos elementos implícitos na malha.

Interessante é o resultado apresentado na figura (IV.12) obtido em uma análise onde a influência da rigidez dos elementos de fluido é desprezada, conforme discutido no Capítulo III. Apesar desta não ser a ocasião apropriada para se testar o procedimento, já que o problema não é de interação fluido-estrutura, houve convergência das iterações mesmo, que lenta e monotonicamente (em alguns intervalos, chegou-se a gastar cerca

de 34 iterações para se atingir a convergência). A reflexão das ondas de propagação foi também simulado por meio desta análise.

### 29) Quanto ao Tempo de processamento

Sendo um exemplo bastante simples, a diferença entre os tempos de processamento foi muito pequena entre os diversos casos analisados. Apesar disso, foi possível observar que, qualquer tentativa no sentido de se melhorar a precisão dos resultados, quer pela redução do intervalo de tempo ou da tolerância, quer pelo aumento do número de pontos nodais ou de integração de Gauss, acarreta num aumento do tempo de processamento. A redução do intervalo de tempo à metade, provocou um gasto adicional de cerca de 15% no tempo de análise para o algoritmo explícito, chegando a 60 ou 80% para o algoritmo misto. Tais características podem ser vistas nas tabelas (IV.2), (IV.3) e (IV.4). O posicionamento dos elementos implícitos não afetou a eficiência da análise, porém a quantidade de tais elementos tende a aumentar os gastos computacionais.

TABELA (IV.2) - Tempos de Processamento (Seg) Utilizando-se: Regra de Integração de Gauss (1 x 1); Elementos Lineares;  $\Delta t = 0,11 \times 10^{-3}$  Seg

Algoritmo	Tolerância		
	1%	0,1%	0,01%
Explícito	6,89	6,89	6,89
Misto c/ el. explícitos	7,80	8,43	8,59
Misto c/ el. mistos	7,59	9,83	12,38
Implícito	9,24	9,58	13,56

TABELA (IV.3) - Tempos de Processamento(Seg)Utilizando-se: Regra de Integração de Gauss (2 x 2); Elementos Quadráticos;  $\Delta t = 0,275 \times 10^{-4}$  Seg.

Algoritmo	Tolerância	
	1%	0,1%
Explícito	32,29	32,29
Misto c/ el. explícitos	50,41	60,14
Misto c/ el. mistos	54,69	60,46
Implícito	52,69	61,02

TABELA (IV.4) - Tempos de Processamento(Seg)Utilizando-se: Regra de Integração de Gauss (2 x 2); Elementos Lineares;  $\Delta t = 0,11 \times 10^{-3}$  Seg

Algoritmo	Tolerância	
	1%	0,1%
Explícito	8,79	8,79
Misto c/ el. explícitos	15,42	15,94
Misto c/ el. mistos	15,11	20,54
Implícito	16,47	27,50

#### 4.3. Fluido Confinado em Tubo Cilíndrico

O problema que agora se discute envolve a interação de dois meios distintos. Trata-se de um tubo cilíndrico cheio de fluido no seu interior em total confinamento, conforme apresentado em [49]. O tubo é submetido a um carregamento axial súbito, de grande intensidade, que lhe provocará uma redistribuição acentuada de tensões, devido a plastificação do material

constituente.

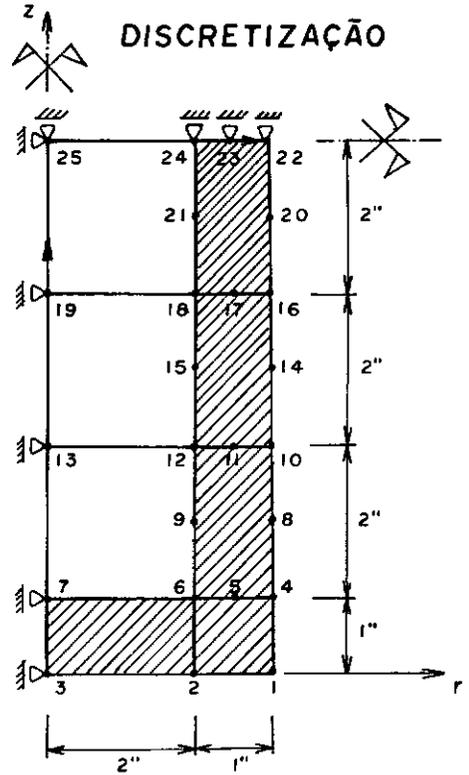
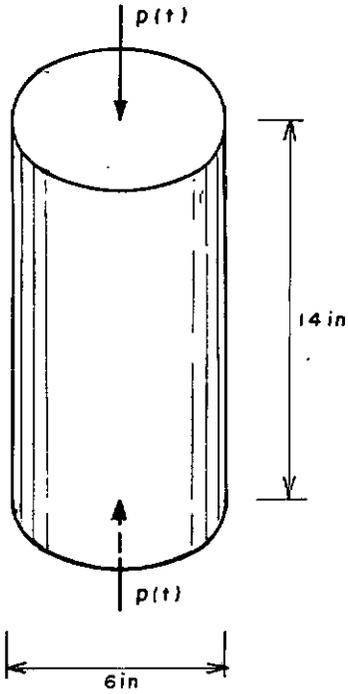
As dimensões do tubo, bem como as características dos materiais e do carregamento, estão apresentadas na figura (IV.13). O material do tubo sofre um processo de endurecimento após ter atingido a tensão de escoamento. Adotou-se o Critério de Escoamento de Von Mises, que representa perfeitamente o comportamento do material em questão.

O sistema foi discretizado por meio de oito elementos isoparamétricos, três dos quais pertencem ao domínio fluido, com variado número de pontos nodais. Foram utilizadas matrizes de massa discreta e agrupada, a partir da matriz de massa consistente. Em todos os casos foram empregados (2 x 2) pontos de integração. O valor da tolerância para as verificações de convergência dos algoritmos misto e implícito foi considerado igual a 1,0 ou 0,1%.

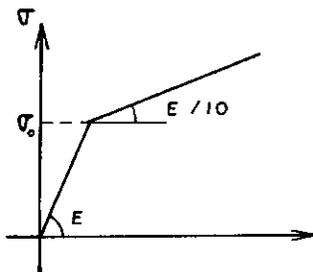
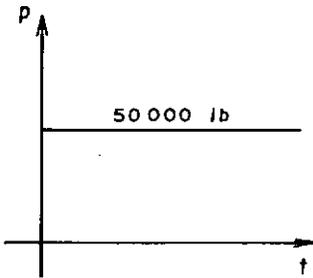
A escolha do intervalo de tempo depende do tipo de análise. A integração de todo o sistema por meio do algoritmo explícito implica na consideração do intervalo ser igual ao tempo crítico, que no caso vale  $1,0 \times 10^{-6}$  seg. A utilização do algoritmo misto está condicionada ao intervalo crítico da região fluida, igual a  $2,2 \times 10^{-6}$  seg. No entanto, nas análises que fazem uso de tal procedimento, adotou-se o tempo de  $2,0 \times 10^{-6}$  seg. Para a determinação do intervalo de integração do método de Newmark, a análise das frequências naturais de vibração, revelou o período fundamental do tubo como sendo igual a  $3,41678 \times 10^{-4}$  seg. Apesar de o intervalo poder ser maior, em todas as análises foi considerado igual a  $2,0 \times 10^{-6}$  seg, exceto em uma delas, onde se utilizou  $\Delta t = 3,0 \times 10^{-6}$  seg.

Com os tempos de integração definidos acima, prepararam-se os gráficos das figuras (IV.14) a (IV.18), por meio das quais são comparadas as respostas dos vários algoritmos. Como o problema é fortemente não-linear, apresentando uma plastificação do material logo no início da análise, foi feita, em algumas ocasiões, a atualização da matriz de rigidez efetiva. Sendo esta uma situação típica de interação fluido-estrutura, processou

## TUBO CHEIO DE FLUIDO



8 ELEMENTOS  
25 NÓS



## MATERIAL DO TUBO :

$$E = 17.2 \times 10^6 \text{ psi}$$

$$\nu = 0.355$$

$$\rho = 8.31 \times 10^4 \text{ slug.ft/in}^4$$

$$\sigma_0 = 25\,000 \text{ psi}$$

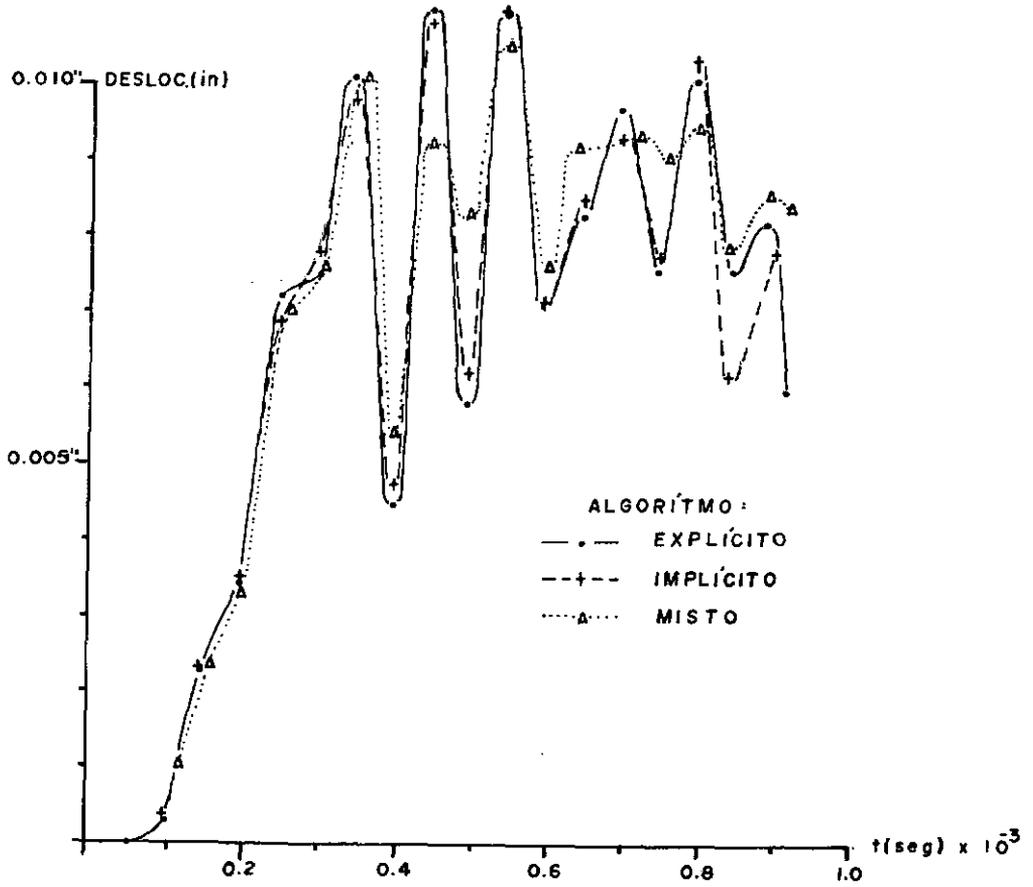
## FLUIDO :

$$K = 30\,000 \text{ psi}$$

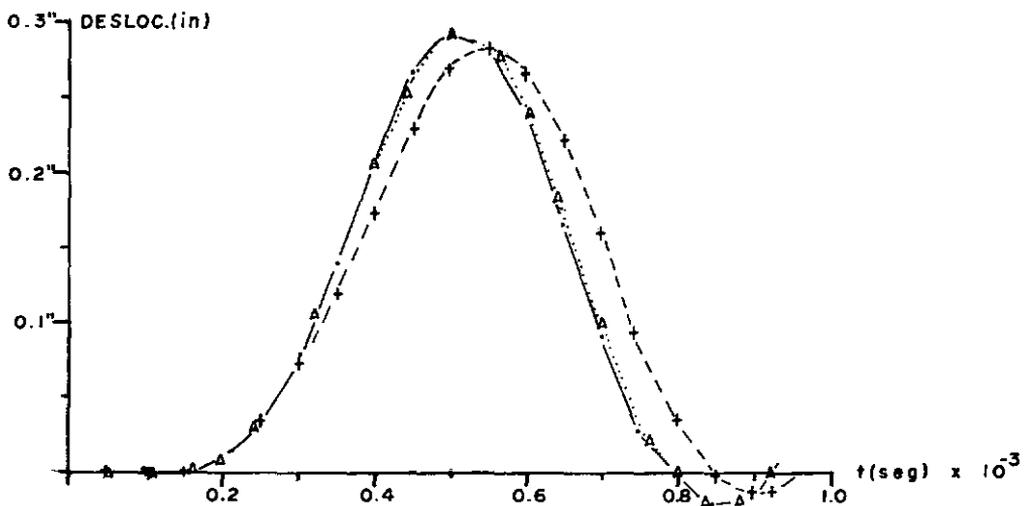
$$\rho = 9.36 \times 10^5 \text{ slug.ft/in}^4$$

FIGURA (IV.13) - Tubo Cheio de Fluido. Características do Problema.

## DESLOCAMENTO HORIZONTAL DO NÓ 23



## DESLOCAMENTO VERTICAL DO NÓ 19

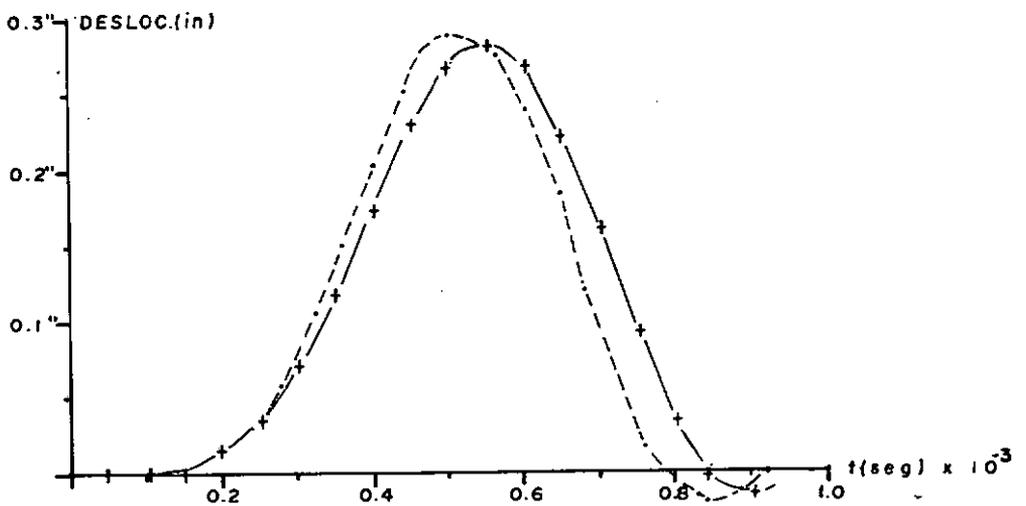
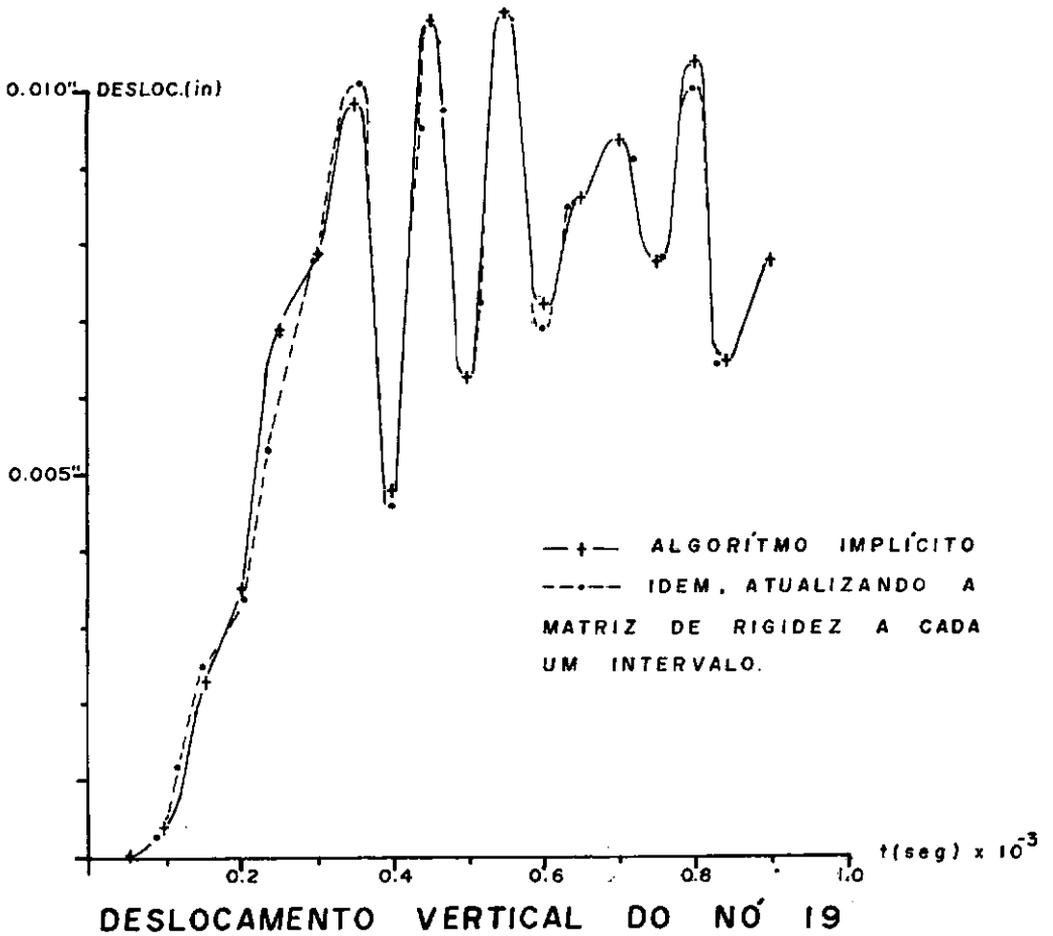


TUBO CHEIO DE FLUIDO - MASSA AGRUPADA

 $\Delta t_{EXP} = 1.0 \times 10^{-6} \text{ seg}$  ;  $\Delta t_{IMP} = \Delta t_{MIS} = 2.0 \times 10^{-6} \text{ seg}$ 

FIGURA (IV.14) - Comparação entre os Algoritmos.

## DESLOCAMENTO HORIZONTAL DO N° 23

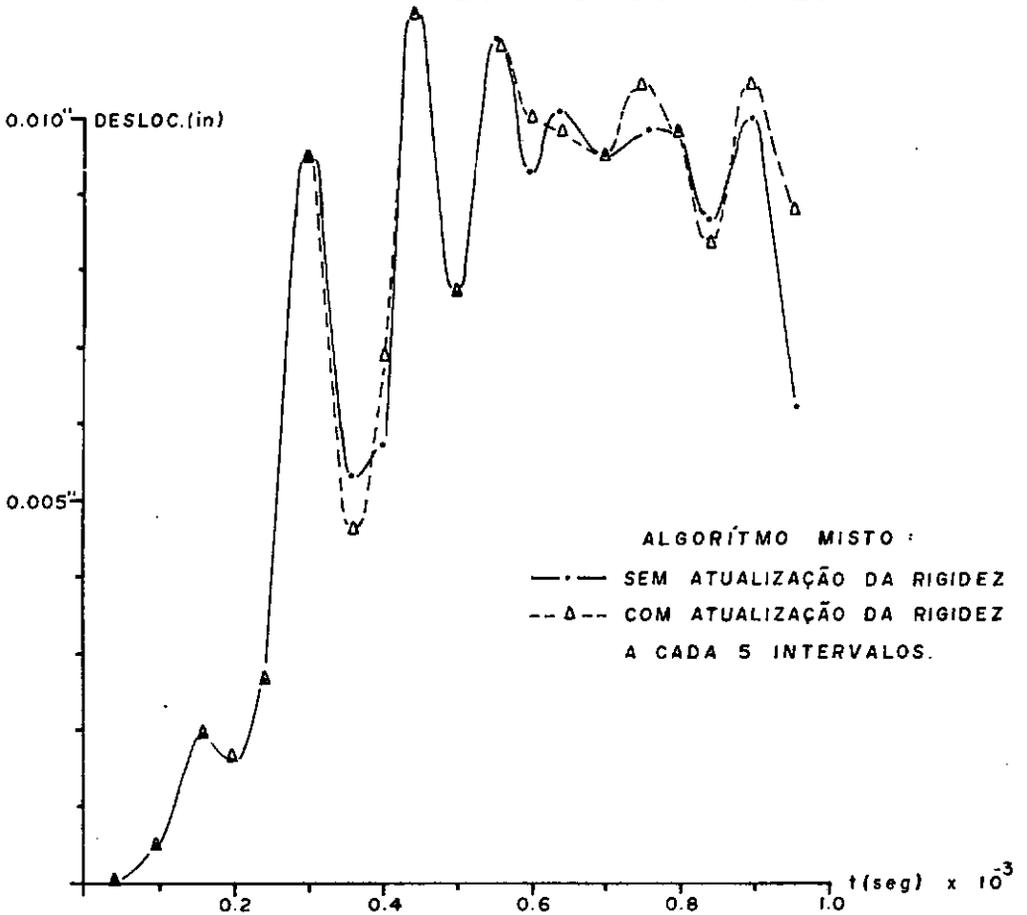


TUBO CHEIO DE FLUIDO - MASSA AGRUPADA

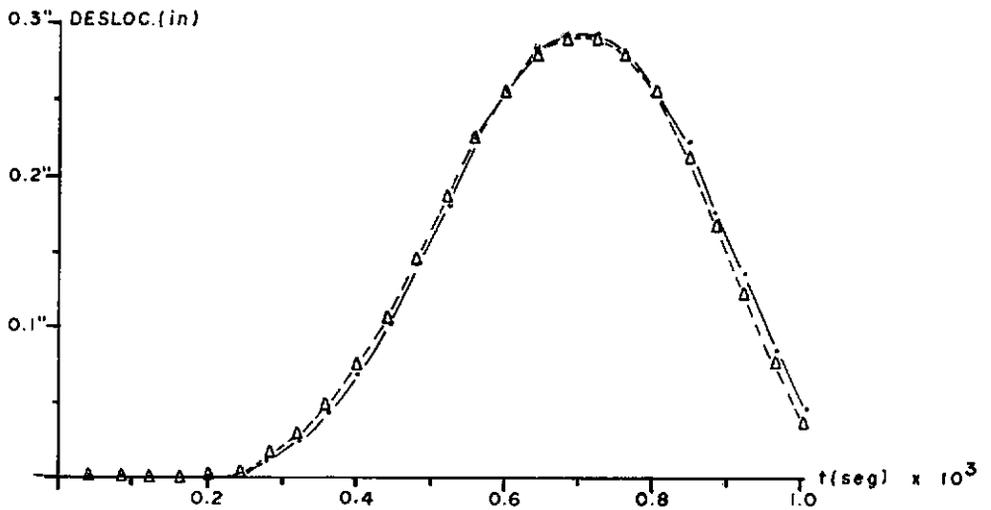
$$\Delta t = 2.0 \times 10^{-6} \text{ seg}$$

FIGURA (IV.15) - Resultados do Algoritmo Implícito Atualizando-se ou Não a Matriz de Rigidez.

## DESLOCAMENTO HORIZONTAL DO NÓ 23



## DESLOCAMENTO VERTICAL DO NÓ 19



TUBO CHEIO DE FLUIDO - MASSA DISCRETA

$$\Delta t = 2.0 \times 10^6 \text{ seg}$$

FIGURA (IV.16) - Resultados do Algoritmo Misto Atualizando-se ou Não a Matriz de Rigidez.

## DESLOCAMENTO HORIZONTAL DO NÓ 23

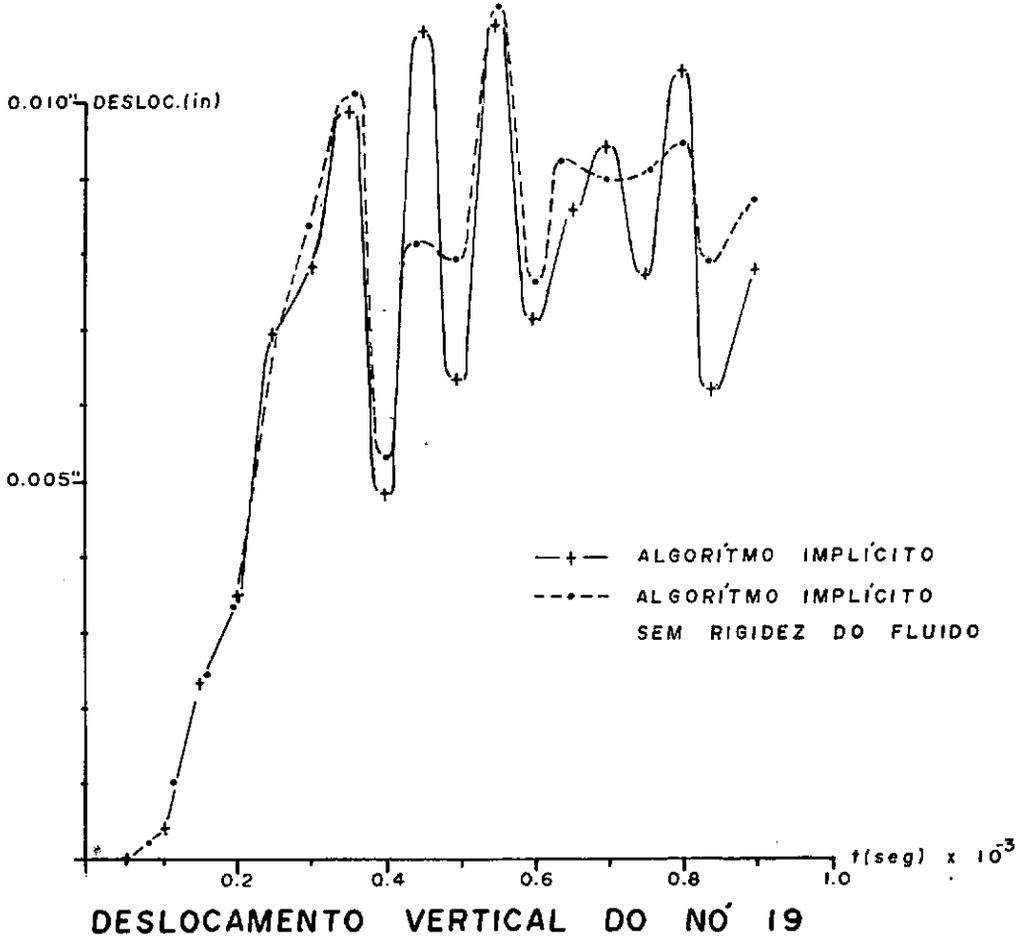


FIGURA (IV.17) - Resultados do Algoritmo Implícito, Considerando-se ou Não a Rigidez dos Elementos do Domínio Fluido.

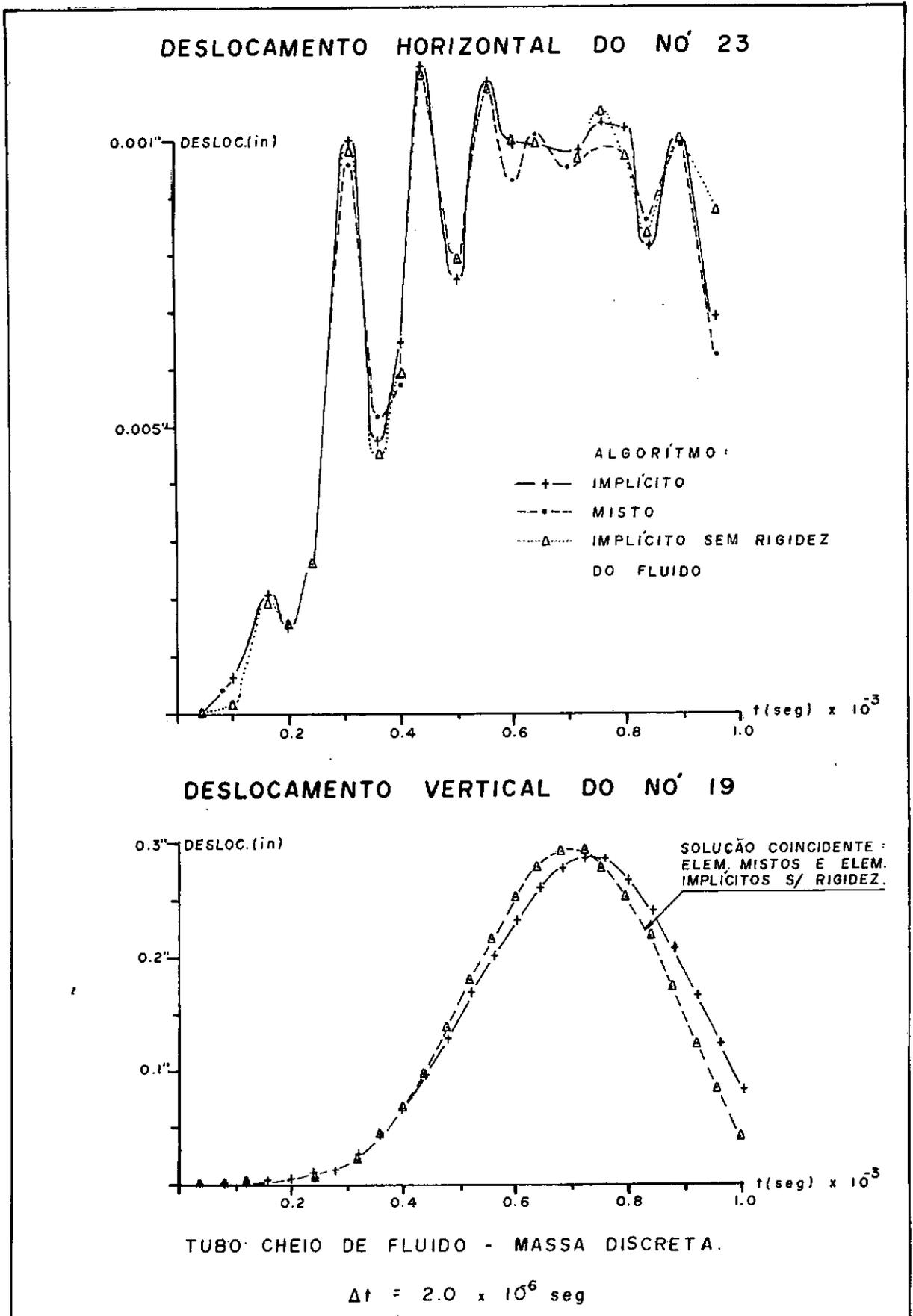
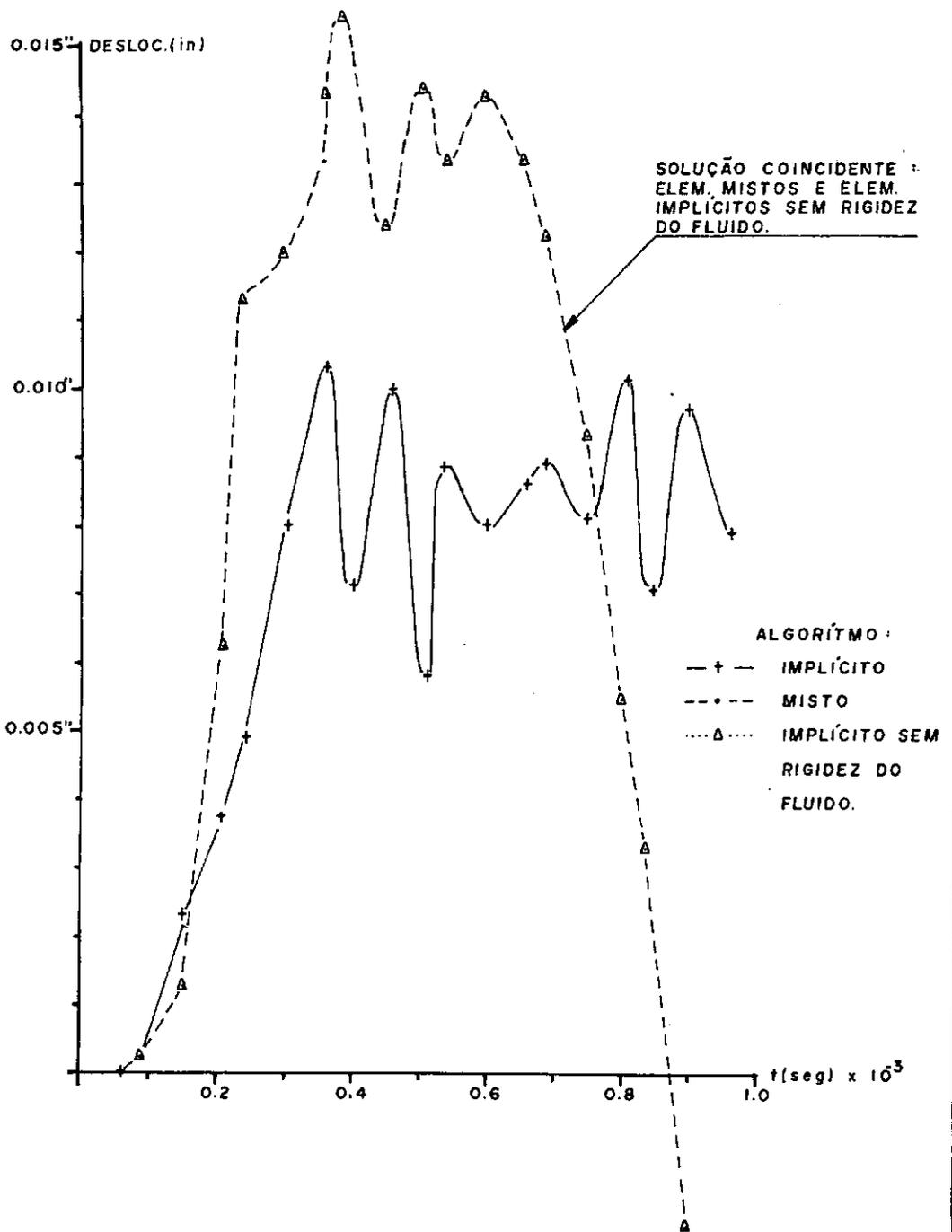


FIGURA (IV.18) - Resultados dos Algoritmos Implícito (Com e Sem Rigidez do Fluido) e Misto.

## DESLOCAMENTO HORIZONTAL DO NÓ 23



TUBO CHEIO DE FLUIDO - MASSA AGRUPADA

$$\Delta t = 3.0 \times 10^6 \text{ seg} > \Delta t_{cr}$$

FIGURA (IV.19) - Resultados dos Algoritmos Implícito (Com e Sem Rigidez do Fluido) e Misto Quando  $\Delta t > \Delta t_{crit}$ .

-se este exemplo desprezando-se a influência da rigidez dos elementos fluidos na matriz de rigidez global.

Estudam-se os deslocamentos horizontal e vertical, respectivamente, dos nós 23 e 19. Tais deslocamentos são apresentados na figura (IV.14), que compara os resultados entre os três algoritmos, quando a matriz de massa utilizada é a agrupada.

Os casos em que se atualiza a matriz de rigidez efetiva são mostrados nas figuras (IV.15) e (IV.16). Na primeira delas, utiliza-se o algoritmo implícito com matriz de massa agrupada, e a atualização é feita a cada intervalo. Na segunda, o algoritmo adotado é o misto com matriz de massa discreta e atualização a cada 5 intervalos.

A seqüência de figuras (IV.17) a (IV.19) foi elaborada para os casos em que se despreza a contribuição da matriz de rigidez dos elementos fluidos. Na figura (IV.17) são comparadas as soluções do algoritmo implícito considerando-se ou não a rigidez do fluido, sendo a matriz de massa agrupada. O mesmo é feito na figura (IV.18), que também apresenta a resposta do algoritmo misto. A matriz de massa utilizada para essa figura foi do tipo discreta. Deve-se observar as soluções dos métodos misto e implícito sem rigidez do fluido que são bastante próximas. A figura (IV.19) é um contra-exemplo, pois foi preparada com um intervalo de tempo  $\Delta t = 3,0 \times 10^{-6}$  seg, maior, portanto, que o intervalo crítico do domínio fluido. Como era de se esperar, as respostas do algoritmo implícito considerando-se a rigidez do fluido foram semelhantes às dos casos anteriores. Para o algoritmo misto, os resultados não convergiram, e a figura mostra uma nítida situação de instabilidade numérica. Esta situação foi idêntica àquela obtida por meio do algoritmo implícito desprezando-se a rigidez do fluido. Esse resultado permite observar que, quando a rigidez dos elementos de fluido não é considerada, o método de Newmark torna-se semelhante ao misto, tanto em termos de precisão dos resultados, como, especialmente, em termos de estabilidade, pelo menos para as condições de convergência adotadas no presente estudo para o processo de verifi

mo, os vinte primeiros intervalos; a partir daí, uma única ite-

cação do equilíbrio dinâmico.

A eficiência computacional dos algoritmos pode ser analisada em função dos tempos de processamento dos diversos casos apresentados. A utilização de massa agrupada implicou nos seguintes gastos computacionais, considerando-se o controle de convergência igual a 1,0%:

- algoritmo explícito: - 1.119 seg
- algoritmo implícito com rigidez do fluido: - 1.006 seg
- algoritmo implícito sem rigidez do fluido: - 1.148 seg
- algoritmo misto: - 1.253 seg.

Os resultados obtidos com massa discreta e mesmo controle de convergência foram os seguintes:

- algoritmo explícito: - 1.087 seg
- algoritmo implícito com rigidez do fluido: - 1.264 seg
- algoritmo implícito sem rigidez do fluido: - 1.200 seg
- algoritmo misto: - 1.070 seg.

A atualização da matriz de rigidez elevou excessivamente o tempo de processamento. Os casos analisados apresentaram os seguintes tempos:

- algoritmo implícito, massa agrupada, atualização a cada intervalo: - 3.002 seg
- algoritmo misto, massa discreta, atualização a cada intervalo: - 2.445 seg
- algoritmo misto, massa discreta, atualização a cada 5 intervalos: - 1.405 seg

A respeito da atualização da matriz de rigidez, devem ser feitas algumas observações. Apesar do problema ser fortemente não-linear, e de ocorrer plastificação acentuada do material do tubo logo nos primeiros intervalos, não se gastou, em nenhum caso, mais do que duas iterações para se atingir a tolerância exigida. Em todas as análises, a condição de convergência era satisfeita com apenas duas iterações durante, no máximo, os vinte primeiros intervalos; a partir daí, uma única ite-

ração era suficiente.

A atualização da matriz de rigidez efetiva visa a aceleração do processo de convergência. Mas, como foi visto, a convergência já era atingida em, no máximo, duas iterações, mesmo para as análises que não atualizavam a matriz. Em consequência, o processo de atualização não foi efetivo, como pode ser observado pelos tempos gastos de processamento. Isto é decorrente, também, do fato de não se conhecer, *a priori*, quais os intervalos em que ocorrerão plastificações, justamente aqueles nos quais a matriz de rigidez deveria ser modificada. A escolha arbitrária do número de atualizações dessa matriz pode provocar, como foi comprovado, gastos excessivos e desnecessários no tempo de processamento.

#### 4.4. Calota Esférica Delgada

Uma calota esférica de pequena espessura, representada na figura (IV.20) é a seguir analisada, quando submetida a um carregamento uniformemente distribuído em sua superfície. Trata-se de um sólido axi-simétrico, discretizado por meio de dez elementos isoparamétricos, com oito pontos nodais. Foram utilizados (2 x 2) pontos de integração de Gauss, e matriz de massa agrupada.

O problema original consistia em um único material na casca, cujas características eram as seguintes:

$$\begin{aligned}
 E &= 10,5 \times 10^6 \text{ lb/in}^2 \\
 \nu &= 0,3 \\
 \sigma_y &= 24,0 \times 10^3 \text{ lb/in}^2 \\
 E_t &= 2,1 \times 10^5 \text{ lb/in}^2 \\
 \rho &= 2,45 \times 10^{-4} \text{ lb.sec}^2/\text{in}^4
 \end{aligned}$$

Considerando-se a proposta da referência [37], a análise da estrutura foi realizada utilizando-se dois elementos rígidos no topo da calota, feitos de um outro material, cujas ca

racterísticas são as seguintes:

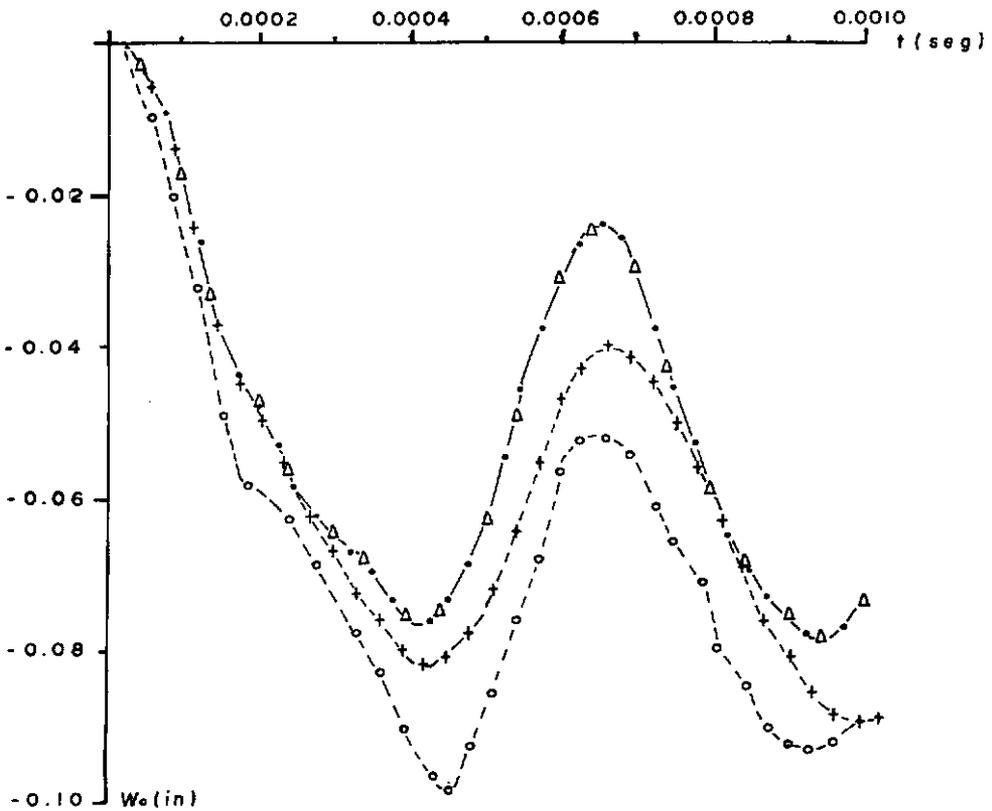
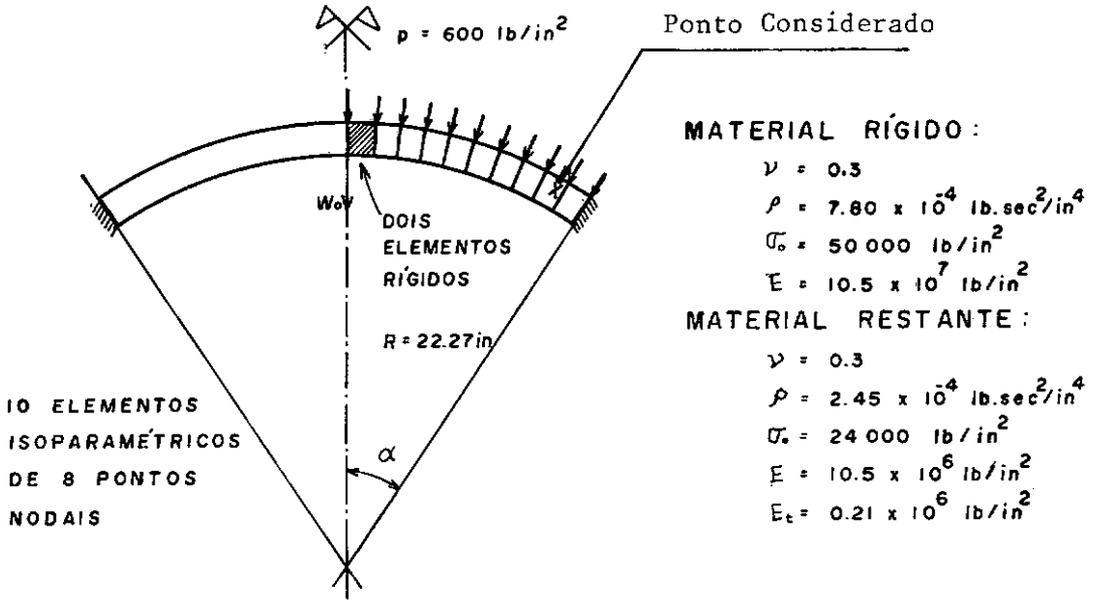
$$\begin{aligned} E &= 10,5 \times 10^7 \text{ lb/in}^2 \\ \nu &= 0,3 \\ \sigma_y &= 50,0 \times 10^3 \text{ lb/in}^2 \\ \rho &= 7,80 \times 10^{-3} \text{ lb.sec}^2/\text{in}^4 \end{aligned}$$

A inclusão dos dois elementos rígidos caracteriza o problema como de interação entre dois meios distintos, cuja solução será diferente do caso original. Para a situação inicial, o período fundamental da casca é igual a  $0,547 \times 10^{-3}$  seg e o menor período de vibração é igual a  $1,380 \times 10^{-6}$  seg. Para a calota modificada, o período fundamental é igual a  $0,592 \times 10^{-3}$  seg, e o período mínimo é igual a  $0,776 \times 10^{-6}$  seg. Portanto, a consideração de dois elementos rígidos no topo da estrutura não altera significativamente o período fundamental, porém o menor período sofre uma variação considerável.

Para a integração implícita, o intervalo de tempo que pode ser adotado é igual a, aproximadamente,  $T_f/100$ , onde  $T_f$  é o período fundamental. Para o problema original ou o modificado, o intervalo de integração adotado foi igual a  $0,60 \times 10^5$  seg.

Para que a solução por meio do algoritmo explícito seja estável, é necessário que o intervalo de tempo não supere o valor  $T_{\min}/\pi$ , onde  $T_{\min}$  é o menor período de vibração da estrutura. Esta condição implica na adoção do intervalo de  $0,40 \times 10^6$  seg para a casca original, e de  $0,25 \times 10^6$  seg para a modificada.

Então, a consideração dos dois elementos rígidos à estrutura não afetará consideravelmente a solução por meio do algoritmo implícito, mas a análise através do algoritmo explícito se tornará mais cara. Procedendo-se a análise por meio do algoritmo misto, pelo qual os elementos de menor rigidez são integrados pelo Método da Diferença Central, e os mais rígidos pelo Método de Newmark, pode-se minimizar tal situação. Como a condição de estabilidade é governada pelo intervalo crítico do do-



- ALGORÍSMO EXPLÍCITO ;  $\Delta t = 0.25 \times 10^{-6} \text{ seg}$
- Δ--- ALGORÍSMO MISTO ;  $\Delta t = 0.40 \times 10^{-6} \text{ seg}$
- +--- ALGORÍSMO IMPLÍCITO ;  $\Delta t = 0.60 \times 10^{-5} \text{ seg}$
- o--- ALGORÍSMO IMPLÍCITO ; CASCA ORIGINAL (SEM ELEM. RÍGIDOS)

FIGURA (IV.20) - Calota Esférica Delgada: Características do Problema e Comparação entre os Resultados dos Algoritmos.

mínio explícito, o intervalo de tempo pode ser exatamente o mesmo da calota original, diminuindo-se os custos da análise.

A finalidade deste exemplo é comparar as soluções de cada um dos algoritmos, com os intervalos de tempo discutidos acima. Os resultados obtidos estão apresentados na própria figura (IV.20), onde é mostrada também a resposta da calota original, analisada pelo algoritmo de Newmark. Pode-se constatar a coincidência entre as soluções. A tabela (IV.5) mostra os valores das tensões em um ponto de integração do segundo elemento próximo à seção do engaste. Pode-se constatar a plastificação do referido ponto durante um determinado período de tempo. A tabela foi preparada por meio do algoritmo misto.

Os tempos de processamento gastos para a análise foram os seguintes:

- Algoritmo Explícito,  $\Delta t = 0,25 \times 10^{-6}$  seg = 5.354 seg em  $4000\Delta t$ 's
- Algoritmo Misto,  $\Delta t = 0,40 \times 10^{-6}$  seg = 6.209 seg em  $2500\Delta t$ 's
- Algoritmo Implícito,  $\Delta t = 6,0 \times 10^{-6}$  seg = 599 seg em  $166\Delta t$ 's.

#### 4.5. Fundação Circular sobre Maciço Terroso

Neste problema, estuda-se a resposta dinâmica elasto-plástica de uma fundação circular assente sobre um maciço de solo argiloso. O carregamento aplicado é súbito e uniformemente distribuído, e a fundação circular é considerada rígida o suficiente para que não haja possibilidade de sua plastificação, conforme [61].

Devido ao transiente de curta duração aplicado, admite-se que não exista condição de drenagem, podendo o solo ser estudado segundo tensões totais em regime elástico e plástico. Nestes termos, o material do maciço é considerado seguir o Critério de Von

TABELA (IV.5) - Histórico de Tensões em Um Ponto da Calota Esférica ( $\text{lb/in}^2$ )-Algoritmo Misto

Tempo (seg) $\times 10^{-4}$	$\sigma_R$	$\sigma_Z$	$\tau_{RZ}$	$\sigma_\theta$	Estado Físico*
0,40	+947	+487	+892	-675	E
0,80	-7.437	-1.537	+5.396	-4.273	E
1,20	-16.480	-2.892	+10.025	-7.096	E
1,60	-20.422	-2.708	+10.716	-8.516	P
2,00	-23.404	-4.536	+10.350	-10.334	P
2,40	-22.645	-3.714	+10.239	-9.764	E
2,80	-20.457	-3.255	+9.209	-9.179	E
3,20	-19.102	-3.081	+8.635	-8.456	E
3,60	-17.071	-2.575	+7.406	-7.590	E
4,00	-13.392	-1.787	+6.081	-6.673	E
4,40	-11,446	-1.256	+5.126	-6.220	E
4,80	-9.925	-956	+4.993	-6.208	E
5,20	-9.580	-909	+5.049	-6.369	E
5,60	-12.356	-1.443	+5.922	-6.968	E
6,00	-14.434	-1.927	+6.859	-7.647	E
6,40	-16.557	-2.414	+7.919	-8.554	E
6,80	-18.164	-2.752	+8.757	-9.214	E
7,20	-17.200	-2.461	+8.641	-9.131	E

\* E - Elástico  
P - Plástico.

Mises, como material plástico perfeito.

As características geométricas do problema são representadas na figura (IV.21). A malha de elementos finitos foi discretizada por meio de elementos de quatro nós, com (2 x 2) pontos de integração de Gauss. Todos os casos analisados utilizaram matriz de massa agrupada.

A análise das frequências naturais do problema re

velou que o período fundamental do sistema global vale  $7,8136 \times 10^{-2}$  seg, o que implica na utilização de um intervalo de tempo para o algoritmo implícito de, aproximadamente,  $8,0 \times 10^{-4}$  seg. O intervalo crítico do algoritmo explícito é igual a  $1,0 \times 10^{-4}$  seg, e, para o algoritmo misto, esse valor aumenta para  $6,0 \times 10^{-4}$  seg.

Apesar de intervalos relativamente próximos entre os algoritmos implícito e misto, os tempos de processamento foram menores para o primeiro deles. Foram observados os seguintes gastos na análise do problema:

- Algoritmo Explícito,  $\Delta t = 1,0 \times 10^{-4}$  seg = 4.356 seg
- Algoritmo Misto,  $\Delta t = 6,0 \times 10^{-4}$  seg = 1.496 seg
- Algoritmo Implícito,  $\Delta t = 8,0 \times 10^{-4}$  seg = 1.073 seg

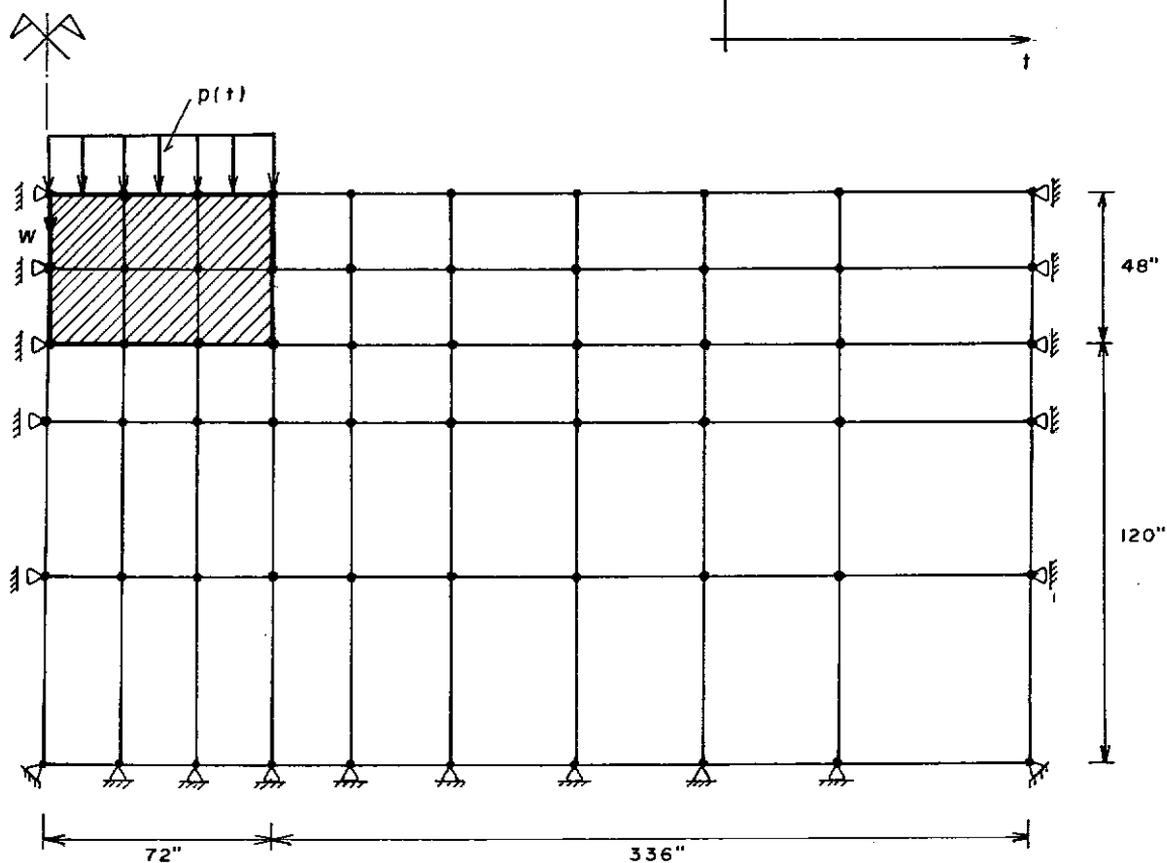
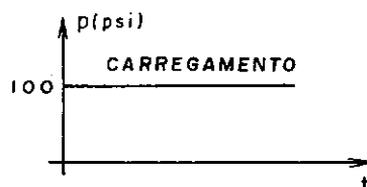
Deve-se ressaltar que, nas análises implícitas, foram ocupadas 1.586 posições do vetor de armazenamento da matriz de rigidez efetiva. Esse número caiu para apenas 381 posições, quando utilizado o algoritmo misto. Isto representa uma economia, em termos de memória, de 75,97% a favor do algoritmo misto, apesar de que o tempo de processamento gasto nesta análise ter sido 39,5% superior ao do algoritmo implícito.

Um estudo das tensões no maciço terroso revela que o solo tem um comportamento não-linear acentuado, caracterizado por plastificação em diversos pontos. A figura (IV.22) ilustra tal situação para um ponto do maciço próximo à fundação, apresentando-se a variação das tensões  $\sigma_z$  por meio dos três algoritmos implementados. A tabela (IV.6) foi preparada com idêntica finalidade, considerando-se o histórico de tensões para um outro ponto do terreno. Essa tabela foi determinada por meio do algoritmo misto.

Em função do comportamento não-linear do problema, realizou-se uma segunda análise, desta vez atualizando a matriz de rigidez efetiva a cada intervalo. Os tempos gastos de processamento foram os seguintes:

- Algoritmo misto,  $\Delta t = 6,0 \times 10^{-4}$  seg = 1.932 seg
- Algoritmo implícito,  $\Delta t = 8,0 \times 10^{-4}$  seg = 2.752 seg

FUNDAÇÃO CIRCULAR EM  
MACIÇO TERROSO



FUNDAÇÃO CIRCULAR :

$$E = 1000\,000 \text{ psi}$$

$$\nu = 0.25$$

$$\rho = 2.243 \times 10^{-4} \text{ lb.s}^2/\text{in}^4$$

SOLO DE FUNDAÇÃO :

$$E = 10\,000 \text{ psi}$$

$$\nu = 0.45$$

$$\rho = 1.682 \times 10^{-4} \text{ lb.s}^2/\text{in}^4$$

$$G_0 = 28.4 \text{ lbf}/\text{in}^2$$

FIGURA (IV.21) - Fundação Circular em Maciço Terroso - Características do Problema.

FUNDAÇÃO CIRCULAR EM MACIÇO TERROSO  
ANÁLISE DE TENSÕES NO SOLO

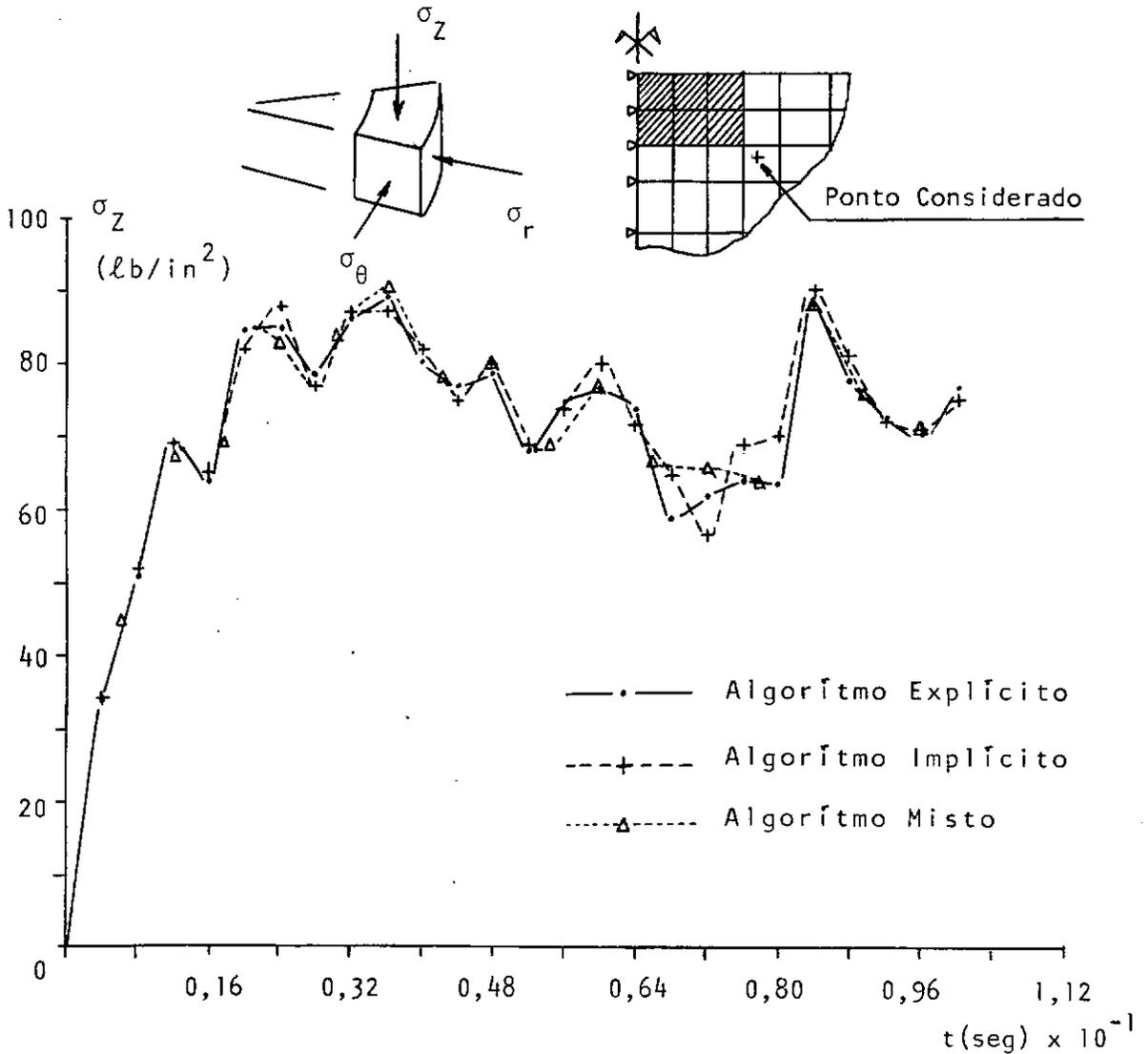
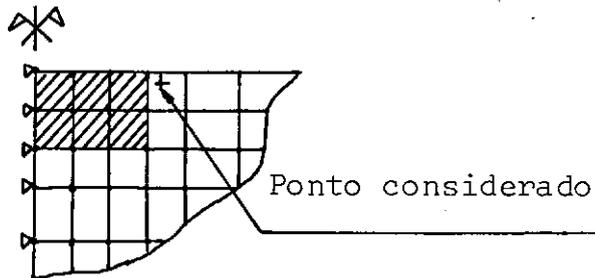


FIGURA (IV.22) - Variação das Tensões  $\sigma_z$  para Um Determinado Ponto do Maciço Terroso.

A economia obtida neste caso através do algoritmo misto foi de 25,7%. Este resultado era perfeitamente previsível, devido ao número de operações ser muito grande.

As respostas dos diversos algoritmos para as duas análises discutidas estão apresentadas nas figuras (IV.23) e (IV.24), onde se pode reparar a plena concordância dos resultados.

TABELA (IV.6) - Histórico de Tensões no Solo ( $\text{lb/in}^2$ ) - Algoritmo Misto



Tempo (seg)	$\sigma_R$	$\sigma_Z$	$\tau_{RZ}$	$\sigma_\theta$	Estado Físico*
0,006	-9,623	-10,116	+10,642	-9,036	E
0,012	-16,195	-14,540	+16,374	-14,902	E
0,018	-35,091	-32,167	+16,312	-32,252	P
0,024	-44,195	-39,443	+16,198	-40,248	P
0,030	-35,604	-34,641	+16,387	-34,581	E
0,036	-27,696	-28,188	+14,666	-27,934	E
0,042	-25,671	-28,009	+8,995	-26,990	E
0,048	-13,547	-17,324	+6,556	-16,266	E
0,054	+1,660	-5,284	+8,843	-3,671	E
0,060	-9,456	-14,579	+12,444	-13,046	E
0,066	-13,399	-16,797	+8,861	-15,575	E
0,072	-18,844	-21,381	+6,201	-20,618	E
0,078	-23,779	-23,378	+12,035	-23,971	E
0,084	-30,518	-30,324	+16,396	-30,409	P
0,090	-25,534	-24,676	+15,301	-25,458	E
0,096	-37,630	-37,756	+9,874	-36,702	E

\* E - Elástico  
P - Plástico.

## FUNDAÇÃO CIRCULAR SOBRE MACIÇO TERROSO

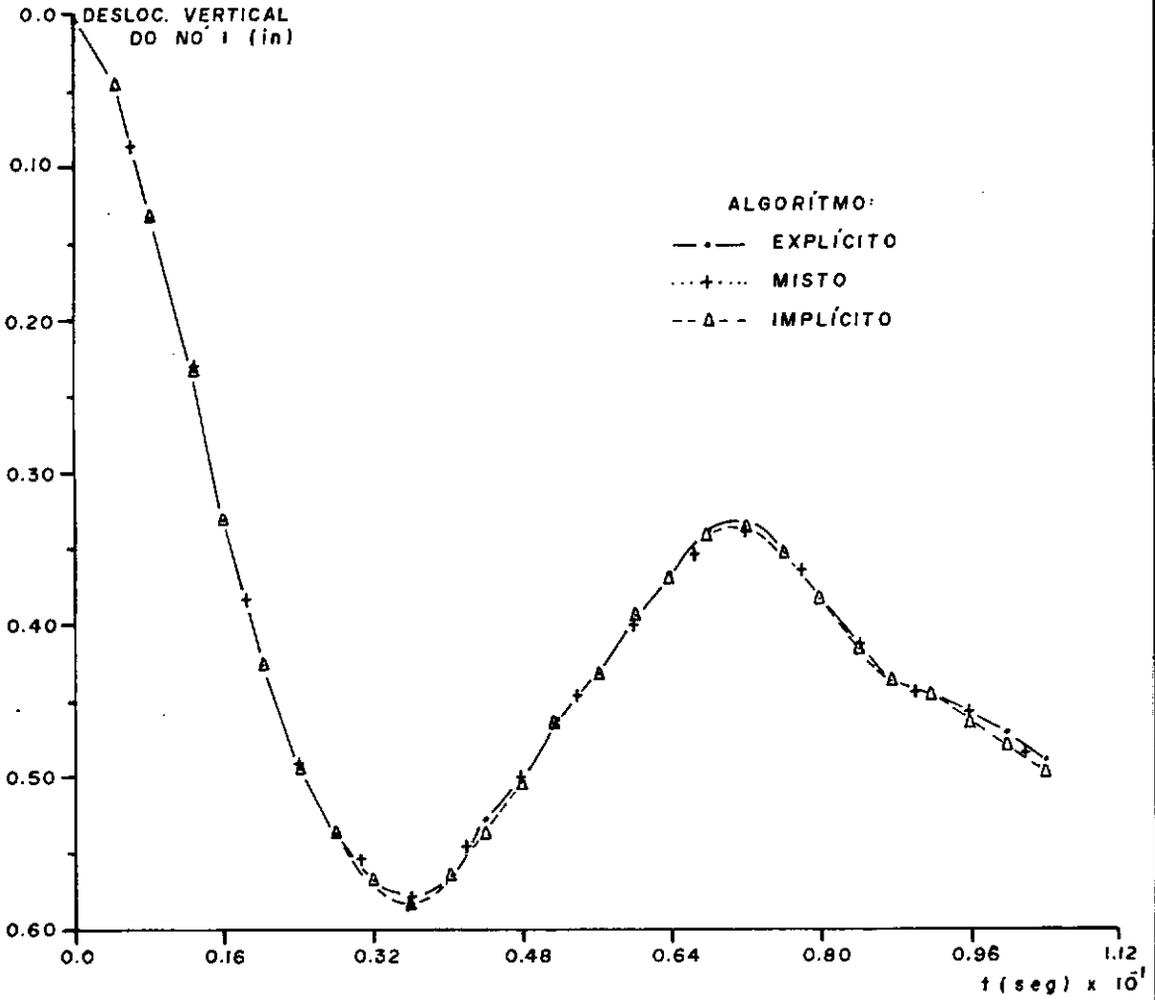


FIGURA (IV.23) - Comparação dos Resultados entre os Algoritmos.

$$\Delta t_{\text{exp}} = 1.0 \times 10^{-4} \text{ seg}$$

$$\Delta t_{\text{mis}} = 6.0 \times 10^{-4} \text{ seg}$$

$$\Delta t_{\text{imp}} = 8.0 \times 10^{-4} \text{ seg}$$

## FUNDAÇÃO CIRCULAR SOBRE MACIÇO TERROSO

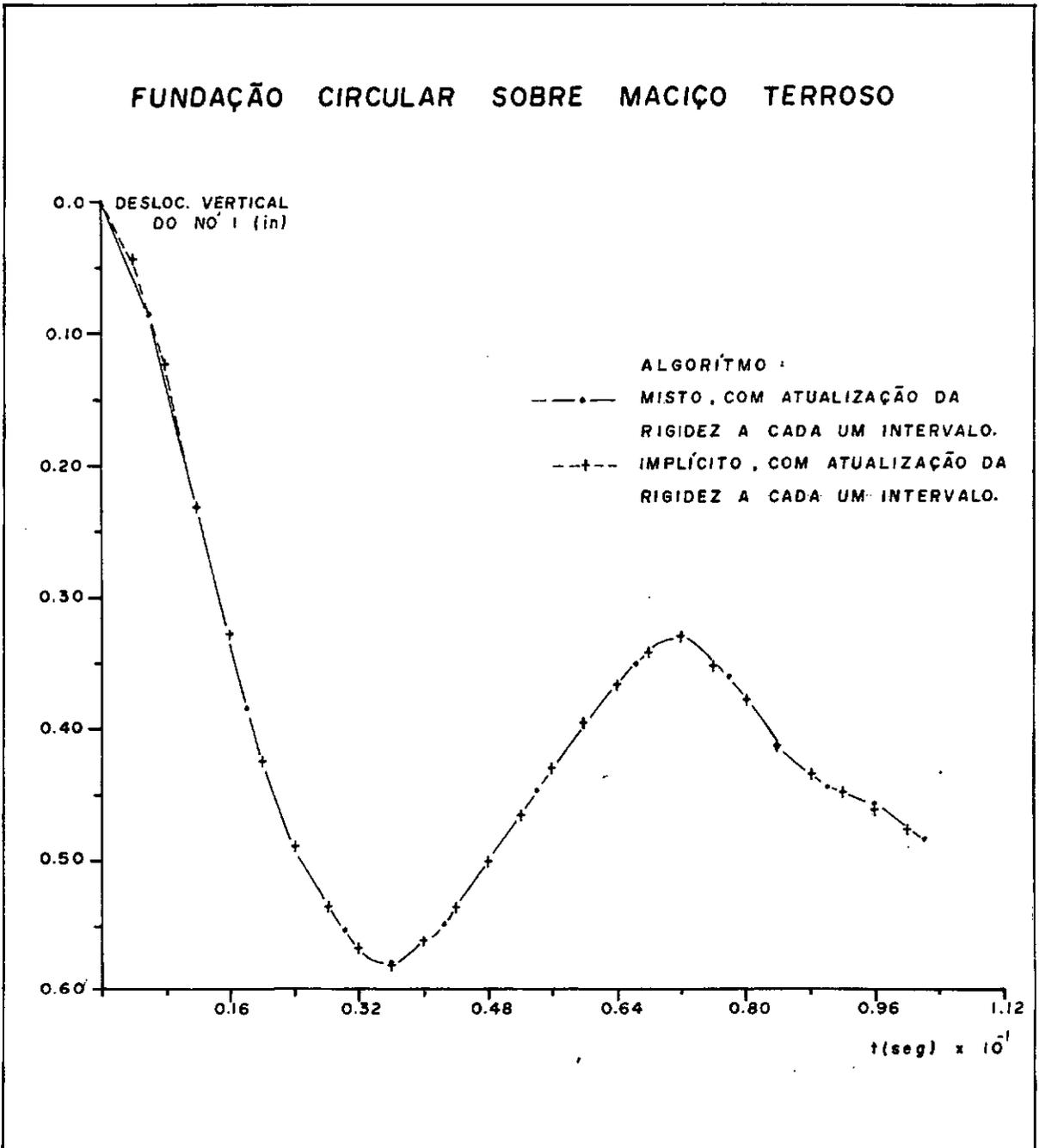


FIGURA (IV.24) - Algoritmos Implícito e Misto com Atualizações Sucessivas da Matriz de Rigidez.

#### 4.6. Casca Cilíndrica Imersa em Meio Fluido

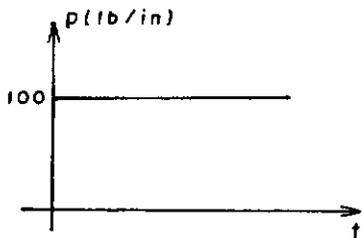
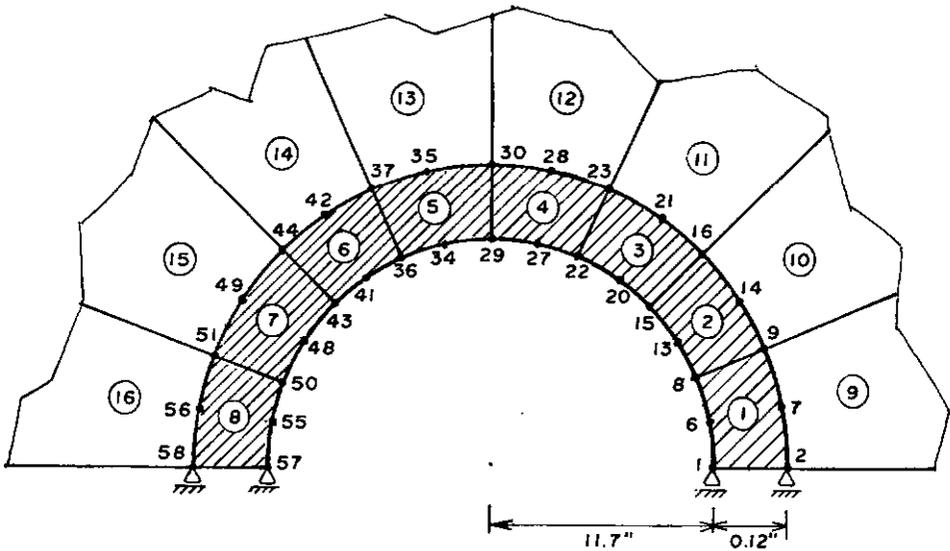
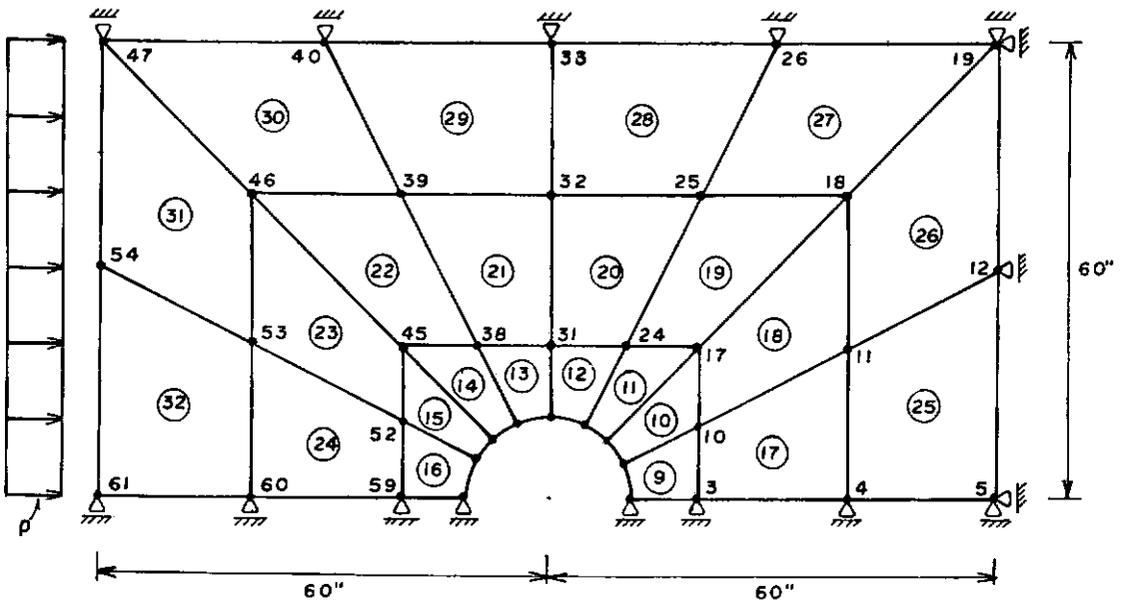
Neste exemplo, analisa-se o comportamento de um tubo cilíndrico de grande comprimento, em uma seção transversal, imerso em um meio fluido. O problema é tratado como sendo do Estado Plano de Deformações [49, 59]. O tubo está afastado das bordas a uma distância de 60 in a partir do seu centro de gravidade. Os deslocamentos estão prescritos em três lados. No bordo livre é aplicada uma pressão uniformemente distribuída e constante, com valor de 100 lb/in.

Os dados de geometria e as características dos materiais estão indicadas na figura (IV.25). Foram discretizadas duas malhas distintas, apesar de ser representada apenas uma delas. A primeira malha faz uso de elementos isoparamétricos, sendo o domínio fluido constituído por elementos com variado número de pontos nodais, e o domínio da estrutura por elementos de oito nós. O problema completo consiste em um total de 61 nós, dos quais 16 são prescritos. Para esta solução, o armazenamento da matriz de rigidez efetiva exigiu uma área na memória correspondente a 832 posições, em se tratando do algoritmo misto, ou 1.392 para o implícito.

A segunda malha discretizada é totalmente semelhante à indicada na figura (IV.25), exceto que todos os elementos, independente do domínio, são de oito pontos nodais. No total, são 121 pontos, dos quais 30 estão restritos. Neste caso, a ocupação da memória para o armazenamento da matriz de rigidez é de 1.999 posições para o algoritmo misto, e de 5.020 para o implícito.

A análise foi feita utilizando-se matriz de massa discreta ou agrupada, e a tolerância para verificação do critério de convergência foi, na maioria das vezes, igual a 1%. Não se notou um aumento acentuado de precisão quando a tolerância passou para 0,1%. O problema também foi examinado pelo algoritmo implícito, desprezando-se a rigidez do domínio fluido. As taxas de ocupação de memória, nestes termos, foram idênticas às do algoritmo misto.

## ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÕES



CASCA :  $E = 3.0 \times 10^7$  psi  
 $\nu = 0.25$   
 $\rho = 7.35 \times 10^4$  lb.s<sup>2</sup>/in<sup>4</sup>

FLUIDO :  $\kappa = 3.0 \times 10^5$  psi  
 $\rho = 9.35 \times 10^5$  lb.s<sup>2</sup>/in<sup>4</sup>

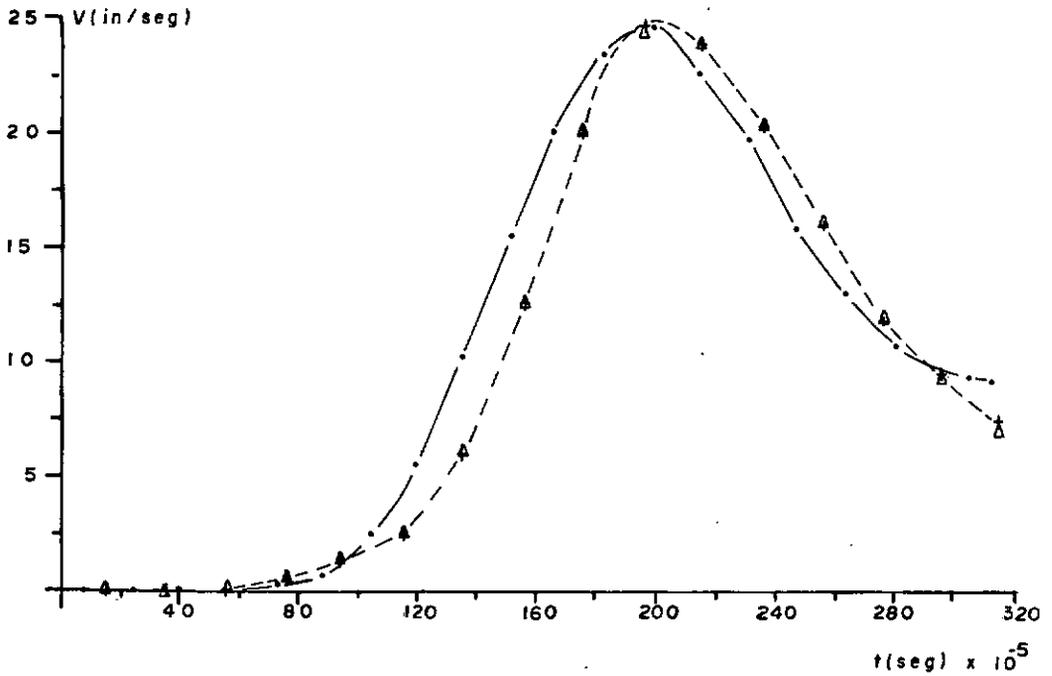
FIGURA (IV.25) - Casca Cilíndrica Imerse em Meio Fluido - Características do Problema.

A análise do problema por meio do algoritmo explícito exigiria um intervalo de tempo de  $3,0 \times 10^{-7}$  seg, pois era este o tempo crítico do sistema, determinado pelo domínio da estrutura. O domínio fluido exigia um intervalo de no máximo  $4,0 \times 10^{-5}$  seg, igual ao valor crítico para a região. O período fundamental do sistema corresponde a  $8,48 \times 10^{-3}$  seg. Este resultado acarretou na escolha do intervalo de tempo para o algoritmo implícito igual a  $8,0 \times 10^{-5}$  seg. Enquanto que o intervalo do algoritmo implícito é igual ao dobro do misto, este último é superior a cem vezes o intervalo crítico do algoritmo explícito. Por causa dessa enorme diferença, dispensou-se análise do problema por meio do Método da Diferença Central.

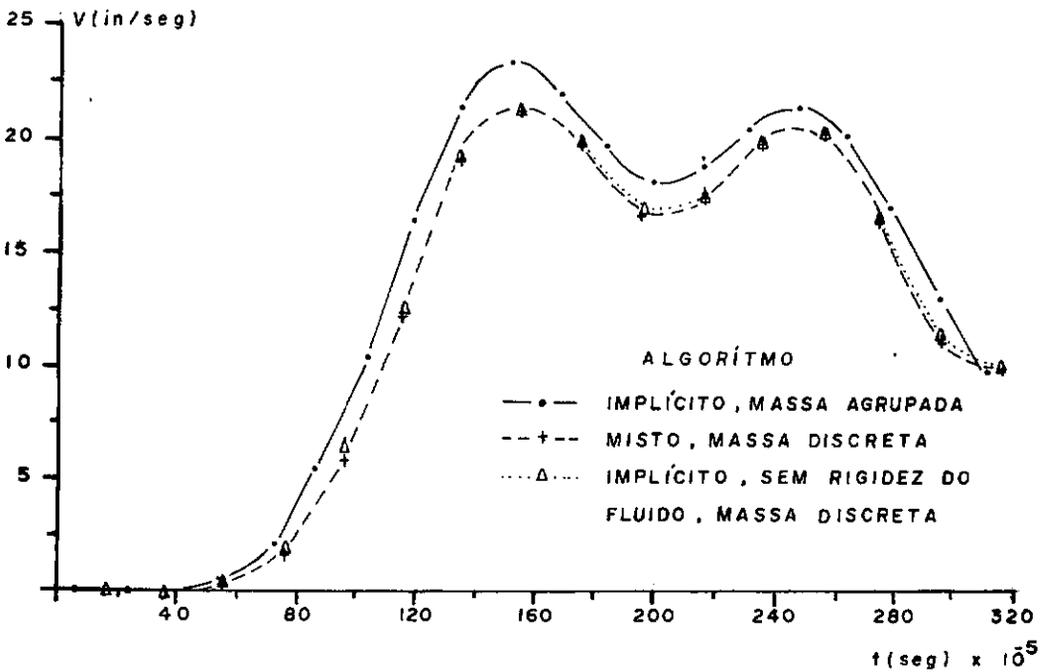
As figuras (IV.26) a (IV.27) mostram as variações das velocidades horizontais dos nós 1 e 29 para a malha de 61 nós. Na primeira figura, são apresentadas as respostas das análises por meio dos algoritmos implícitos, com massa agrupada; misto, com massa discreta; e implícito, sem a rigidez do fluido, com massa discreta e mesmo intervalo de tempo do procedimento misto. Observa-se a boa concordância entre os diferentes resultados, especialmente entre aqueles obtidos por meio do algoritmo implícito, sem rigidez do fluido, e o misto. A segunda figura foi apresentada para reforçar as conclusões obtidas no exemplo (IV.3), a respeito da condição de estabilidade do algoritmo implícito, quando se desprezam as influências da matriz de rigidez dos elementos fluidos na matriz global. Em tal figura, são comparadas as respostas do algoritmo implícito, sem rigidez do fluido, com massa discreta, e com os intervalos de tempo iguais a  $0,4 \times 10^{-4}$  seg e  $0,8 \times 10^{-4}$  seg. Utilizando o primeiro destes dois valores, ou o segundo com uma tolerância de 0,001, os resultados convergiram e foram aproximadamente iguais. No entanto, quando se alterou a tolerância para 0,01, não houve convergência para o maior dos dois intervalos, caracterizando-se uma nítida situação de instabilidade.

A figura (IV.28) mostra os resultados obtidos com a malha de 121 nós. As velocidades analisadas corresponderam às dos mesmos nós do caso anterior. Os gráficos foram obtidos considerando-se matriz de massa discreta e controle de conver-

## VELOCIDADES HORIZONTAIS DO NÓ 1



## VELOCIDADES HORIZONTAIS DO NÓ 29

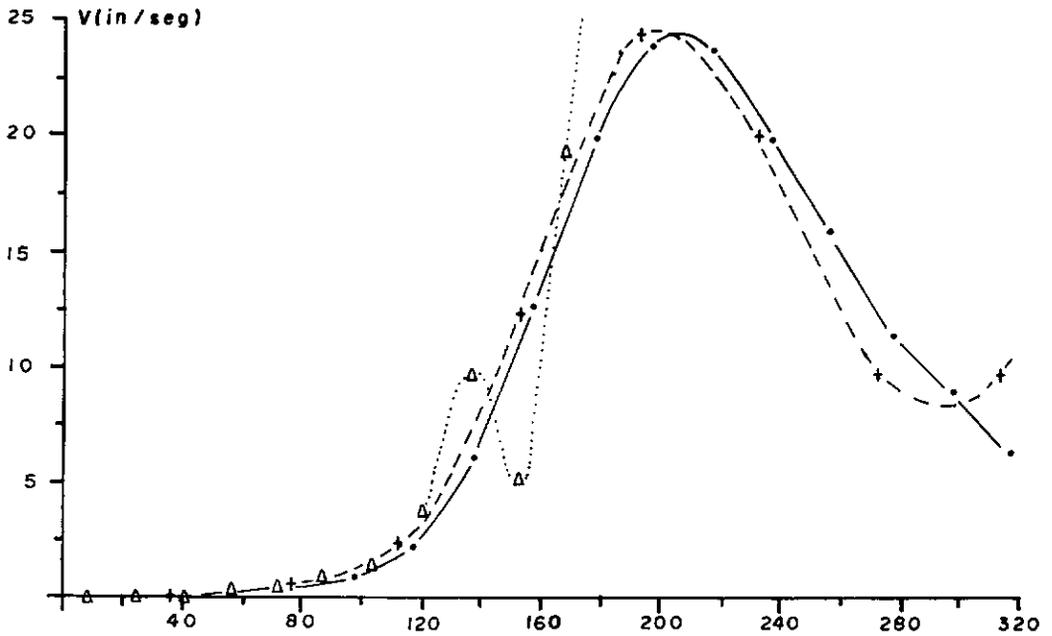


CASCA IMERSA EM MEIO FLUIDO

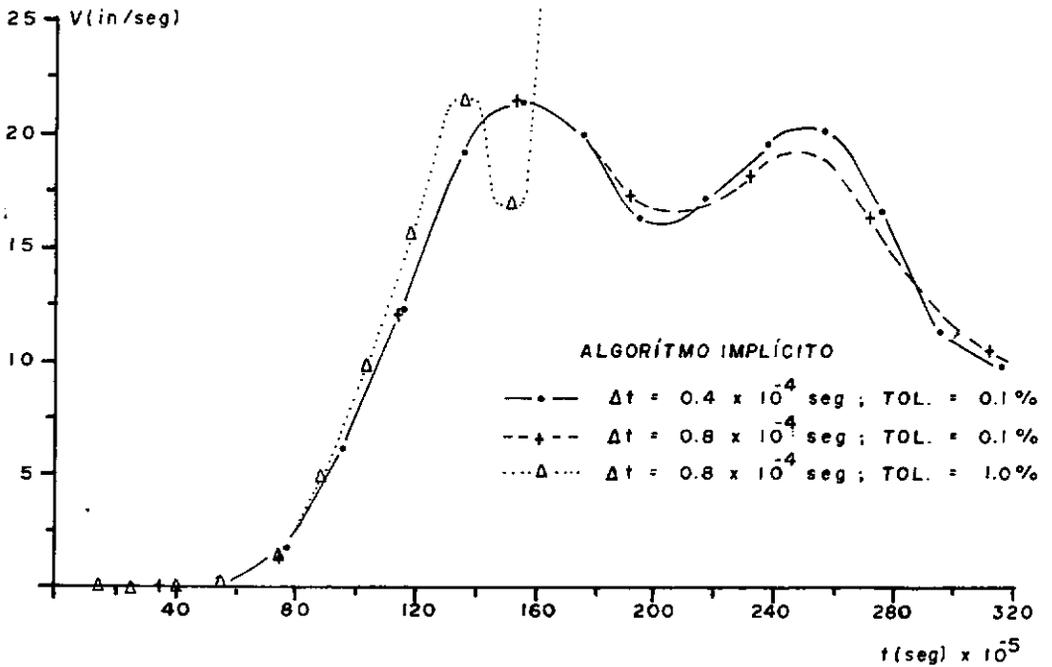
MALHA COM 61 NÓS

FIGURA (IV.26) - Resultados dos Algoritmos Implícito Com e Sem Rigidez do Fluido; e Misto.

## VELOCIDADES HORIZONTAIS DO NÓ 1



## VELOCIDADES HORIZONTAIS DO NÓ 29



CASCA CILÍNDRICA EM MEIO FLUIDO

MASSA DISCRETA - SEM RIGIDEZ DO FLUIDO

FIGURA (IV.27) - Resultados do Algoritmo Implícito Não se Considerando a Rigidez de Fluido (Malha com 61 Nós).

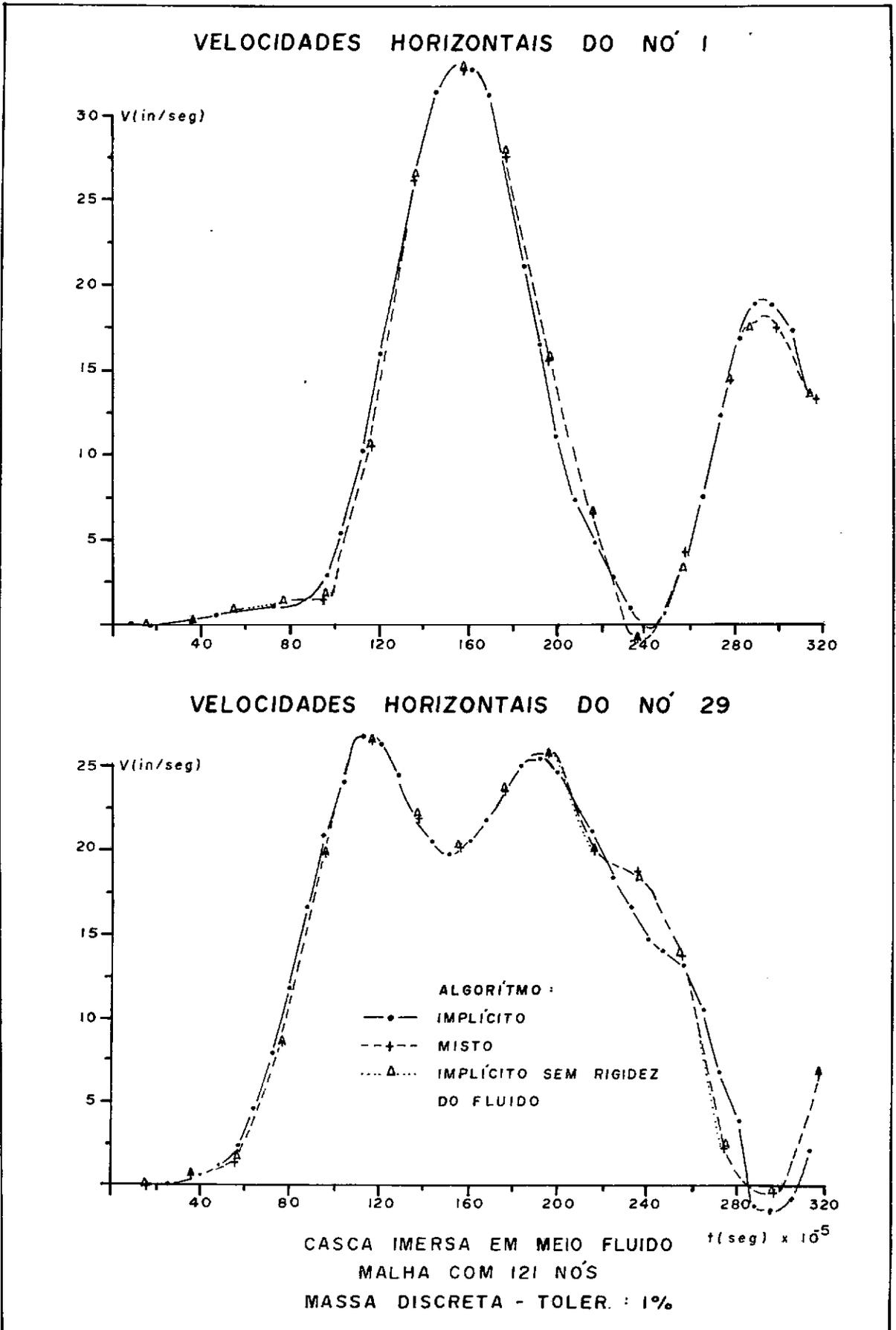


FIGURA (IV.28) - Resultados dos Algoritmos Implícitos Com ou Sem Rigidez do Fluido, e Misto (121 Nós).

gência igual a 0,01. Note-se a excelente aproximação entre os algoritmos misto e implícito sem rigidez do fluido. Tentou-se processar este último algoritmo com um intervalo de tempo maior, igual ao do algoritmo implícito original e, mesmo com tolerâncias da ordem de 0,0001 não houve convergência.

O algoritmo implícito, sem rigidez do fluido, se instabilizou com um intervalo igual a  $0,8 \times 10^{-4}$  seg, mesmo reduzindo-se as tolerâncias, enquanto que, para a malha de 61 nós, este procedimento foi suficiente para estabilizá-lo. Como esta discussão ultrapassa os objetivos do presente trabalho, será considerado suficiente a condição de que o algoritmo implícito sem a rigidez do fluido é estável sob as mesmas condições do algoritmo misto, quando o controle de convergência das iterações for feito através da equação (II.44).

Em termos de eficiência computacional, foram observados os seguintes tempos de processamento:

a) Malha de 61 nós:

- Algoritmo implícito, massa agrupada, tolerância de 0,01,  $\Delta t = 0,8 \times 10^{-4}$  seg = 302,8 seg
- Algoritmo misto, massa discreta, tolerância de 0,01,  $\Delta t = 0,4 \times 10^{-4}$  seg = 478,6 seg
- Algoritmo implícito, massa discreta, tolerância de 0,01,  $\Delta t = 0,4 \times 10^{-4}$  seg, sem rigidez do fluido = 575,8 seg
- Algoritmo implícito, massa discreta, tolerância de 0,001,  $\Delta t = 0,8 \times 10^{-4}$  seg., sem rigidez do fluido = 384,9 seg

b) Malha de 121 nós:

- Algoritmo implícito, massa discreta, tolerância de 0,01,  $\Delta t = 0,8 \times 10^{-4}$  seg = 393,0 seg
- Algoritmo implícito, massa discreta, tolerância de 0,01,  $\Delta t = 0,4 \times 10^{-4}$  seg = 720,8 seg

- Algoritmo implícito, massa discreta, tolerância de 0,01,  $\Delta t = 0,4 \times 10^{-4}$  seg, sem rigidez do fluido = 680,5 seg

#### 4.7. Vaso de Pressão

Uma das aplicações mais importantes dos algoritmos que tratam de sistemas rígido-flexíveis do tipo fluido-estrutura, é a relacionada com os vasos de pressão [64]. Neste exemplo, procura-se analisar o comportamento de um vaso de pressão, representado na figura (IV.29), solicitado por uma pressão interna súbita, de grande intensidade e curta duração, simulando a carga de uma explosão. É um problema de sólido Axi-simétrico, cuja discretização foi feita aproveitando-se das características de simetria existentes. Admite-se que o reator esteja circundado por um fluido, confinado em três lados, e com a superfície livre para quaisquer deformações. O vaso tem paredes de 1,0 in de espessura, e o raio interno do mesmo é igual a 19 in.

O carregamento aplicado é de  $300 \text{ lb/in}^2$ , durante o período de  $0,1 \times 10^{-4}$  seg, reduzindo-se a zero ao final desse intervalo. Admite-se que o comportamento do material do vaso é plástico perfeito, sendo sua resistência ao escoamento igual a  $50.000 \text{ lb/in}^2$ .

Foram efetuadas três etapas distintas de análise:

1º) O reator é analisado isoladamente, desprezando-se a influência do fluido circundante. A análise foi feita pelo algoritmo de Newmark, determinando-se os deslocamentos dos nós N1 e N2 da malha correspondente indicada na figura (IV.30).

2º) Considera-se a interação fluido-estrutura, e o problema é analisado de maneira global. Porém, a simulação da interface entre as duas regiões é feita por elementos fluidos de pequena espessura, que permitem o movimento da superfície livre do líquido.

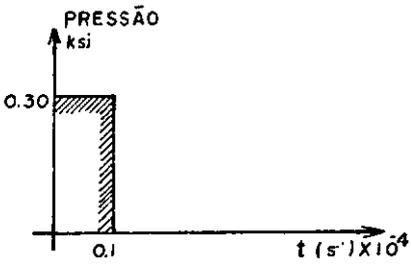
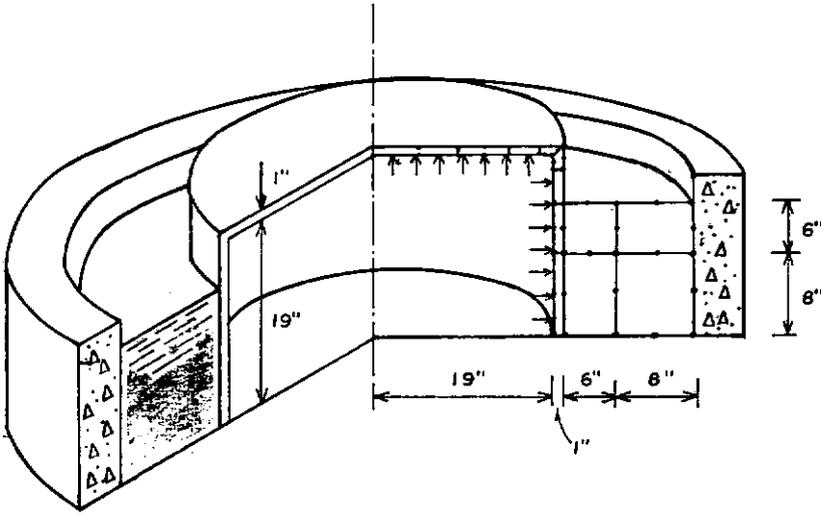
39) A análise é equivalente à do item anterior, substituindo-se os elementos de pequena espessura por elementos escalares de mola na interface, conforme discutido no Capítulo III. Dessa maneira, ficam simulados os deslocamentos relativos entre o fluido e a estrutura, no sentido vertical, mas o deslocamento entre os dois meios no sentido horizontal está impedido.

Em todos os casos foram utilizados elementos finitos isoparamétricos de oito pontos nodais, com (2 x 2) pontos de integração. Fez-se uso de matriz de massa agrupada.

A análise das frequências naturais do problema revelou que o maior período de vibração do mesmo é igual a  $2,41848 \times 10^{-3}$  seg, o que implica na utilização de um intervalo de, aproximadamente,  $2,5 \times 10^{-5}$  seg para o algoritmo de Newmark. O máximo intervalo de tempo permitido para garantir a estabilidade do Método da Diferença Central é igual a  $6,0 \times 10^{-7}$  seg, valor adotado nas análises que fazem uso desse algoritmo. Para o processo misto, o intervalo adotado depende do tempo crítico do domínio fluido. Então, para a segunda etapa de análises, quando foram utilizados elementos fluidos de pequena espessura na interface, considerou-se que tais elementos fariam parte do domínio implícito, aumentando-se a matriz de rigidez efetiva, mas em compensação, podendo adotar um intervalo igual a  $1,0 \times 10^{-5}$  seg (tempo crítico para o domínio fluido, sem a faixa de elementos pouco espessos). Quando a análise foi feita com elementos escalares de mola na interface, a condição de que tais elementos devam estar em um único domínio obrigou a utilização, no caso do algoritmo misto, de alguns elementos fluidos como se fossem implícitos. Tal solução acarretou num aumento do número de nós da malha, sendo evidente que a eficiência da análise ficou comprometida.

A figura (IV.31) mostra os deslocamentos dos nós N1 e N2 para a primeira etapa de análise. As figuras (IV.32) e (IV.33) indicam os deslocamentos dos mesmos nós por meio das segunda e terceira etapas, respectivamente. Para cada fase de análise, foi considerada a malha correspondente da figura (IV.30).

## VASO DE PRESSÃO



## FLUIDO :

$$\begin{aligned} \chi &= 3.0 \times 10^5 \text{ lb/in}^2 \\ \nu &= 0.5 \\ \sigma_y &= 10^{30} \text{ lb/in}^2 \\ \rho &= 0.33 \times 10^{-4} \text{ lb s}^2/\text{in}^4 \end{aligned}$$

## ESTRUTURA :

$$\begin{aligned} E &= 3.0 \times 10^7 \text{ lb/in}^2 \\ \nu &= 0.3 \\ \sigma_y &= 50\,000 \text{ lb/in}^2 \\ \rho &= 0.259 \times 10^{-3} \text{ lb s}^2/\text{in}^4 \end{aligned}$$

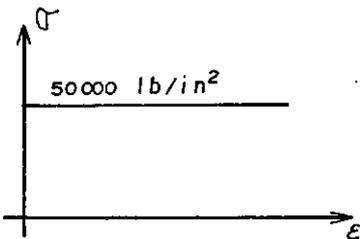
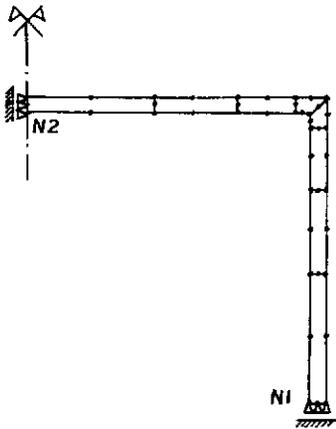
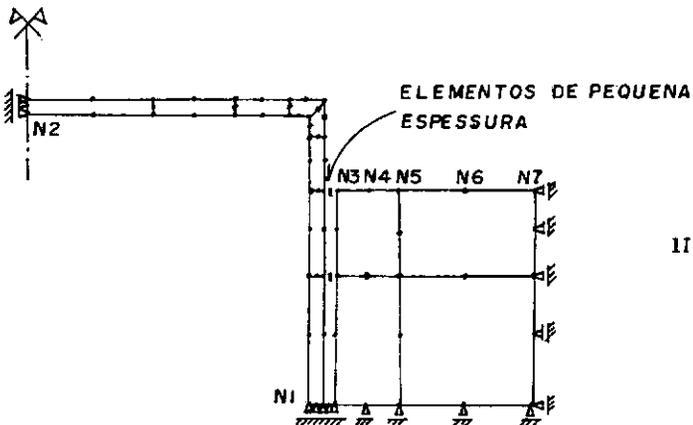


FIGURA (IV.29) - Vaso de Pressão - Características do Problema.

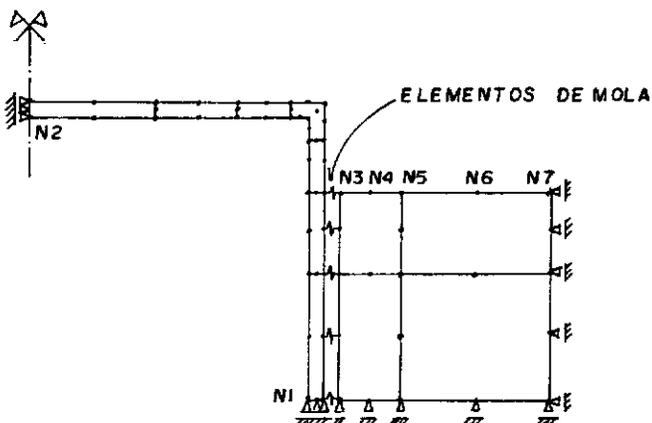
## VASO DE PRESSÃO : MALHAS DISCRETIZADAS



I) SÓ ESTRUTURA  
8 ELEMENTOS  
43 NÓS



II) COMPLETO SEM INTERFACE  
14 ELEMENTOS  
67 NÓS



III) COMPLETO COM INTERFACE  
12 ELEMENTOS  
64 NÓS  
5 ELEMENTOS DE MOLA

FIGURA (IV.30) - Discretizações Efetuadas para o Vaso de Pressão .

## VASO DE PRESSÃO - SEM INTERAÇÃO FLUIDO - ESTRUTURA

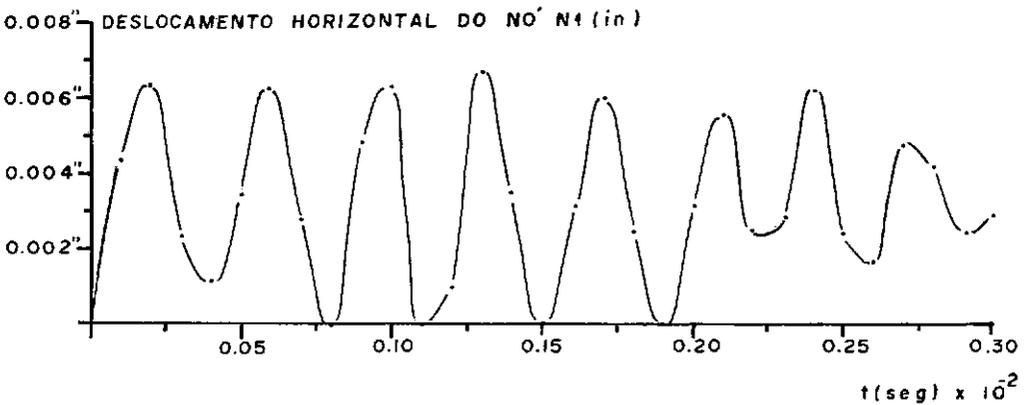
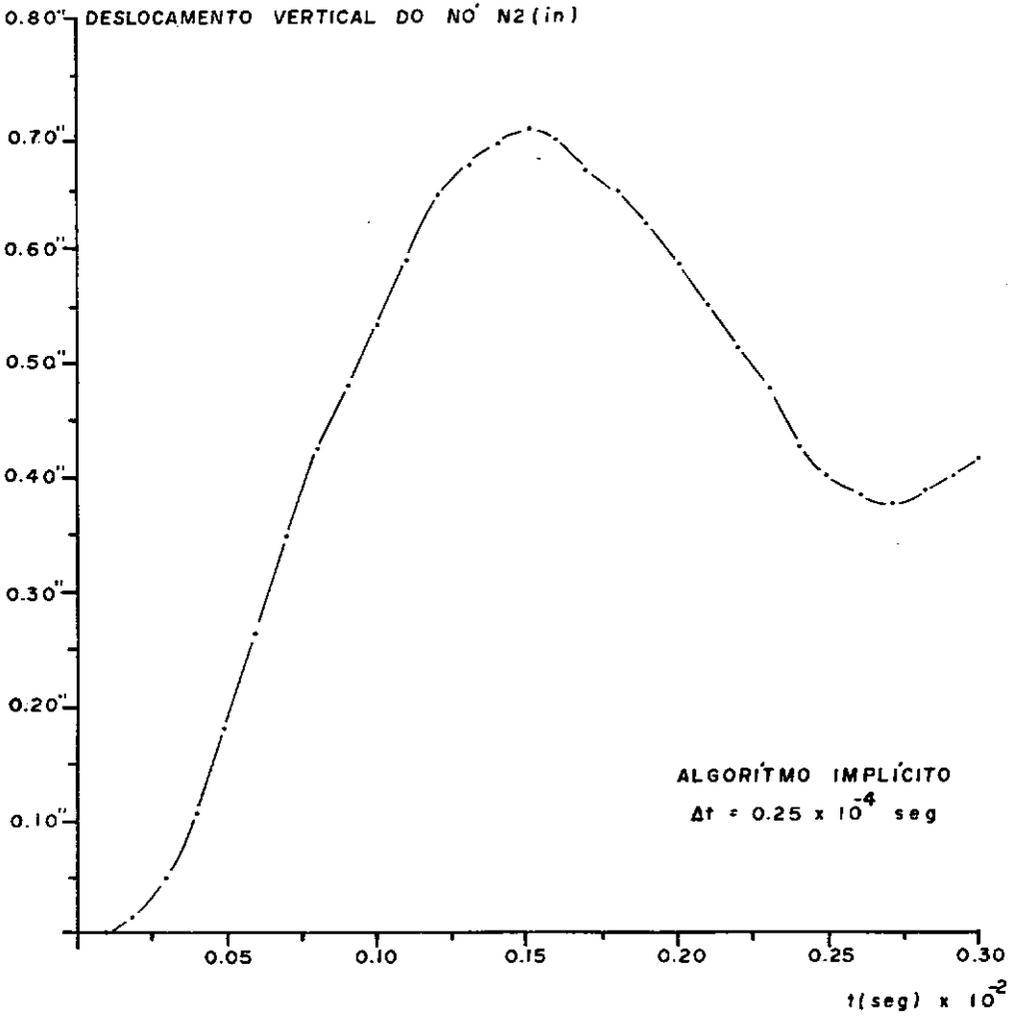
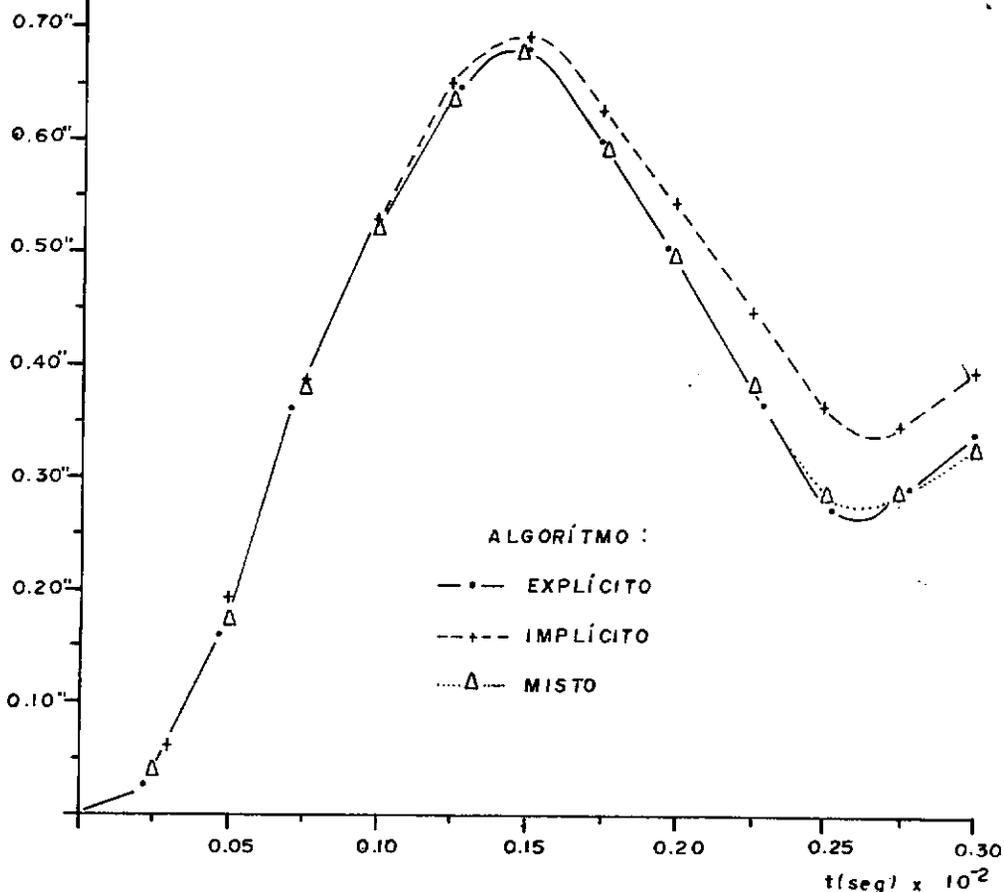


FIGURA (IV.31) - Resultados do Algoritmo Implícito Sem Considerar a Interação Fluido-Estrutura (1.ª Malha).

VASO DE PRESSÃO - COM INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA  
(SEM ELEMENTOS DE MOLA NA INTERFACE)

0.80" DESLOC. VERTICAL DO NÓ N2 (in)



0.008" DESLOC. HORIZONTAL DO NÓ N1 (in)

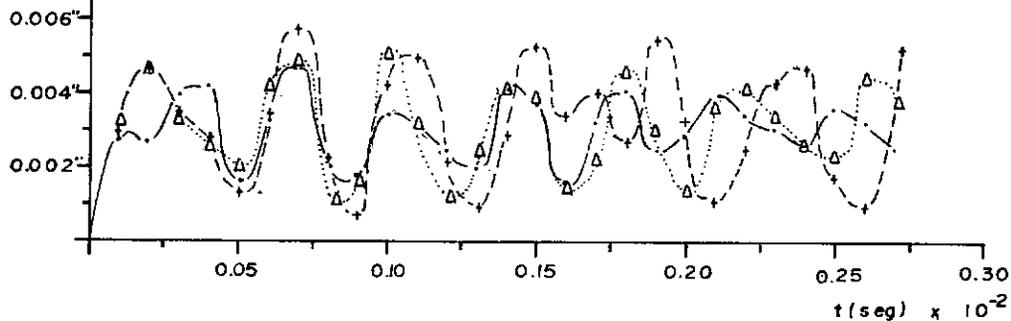


FIGURA (IV.32) - Resultados dos Algoritmos Considerando-se a Interação Fluido-Estrutura, mas sem Elementos Escales de Mola na Interface.

# VASO DE PRESSÃO - COM INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA

(COM ELEMENTOS DE MOLA NA INTERFACE)

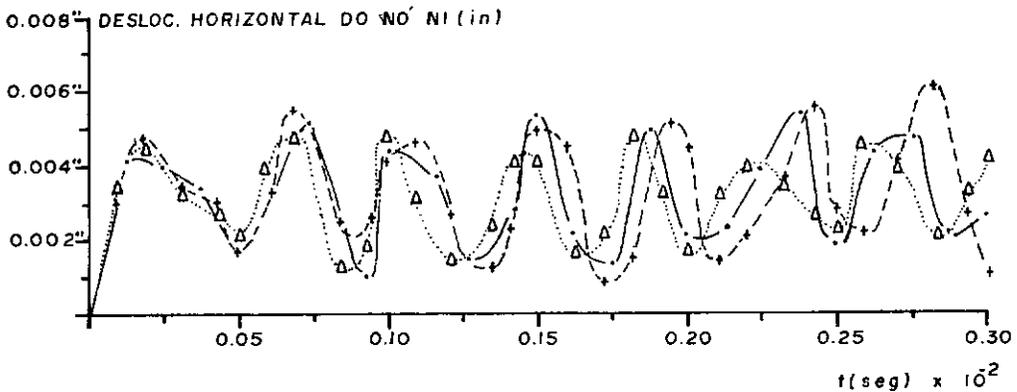
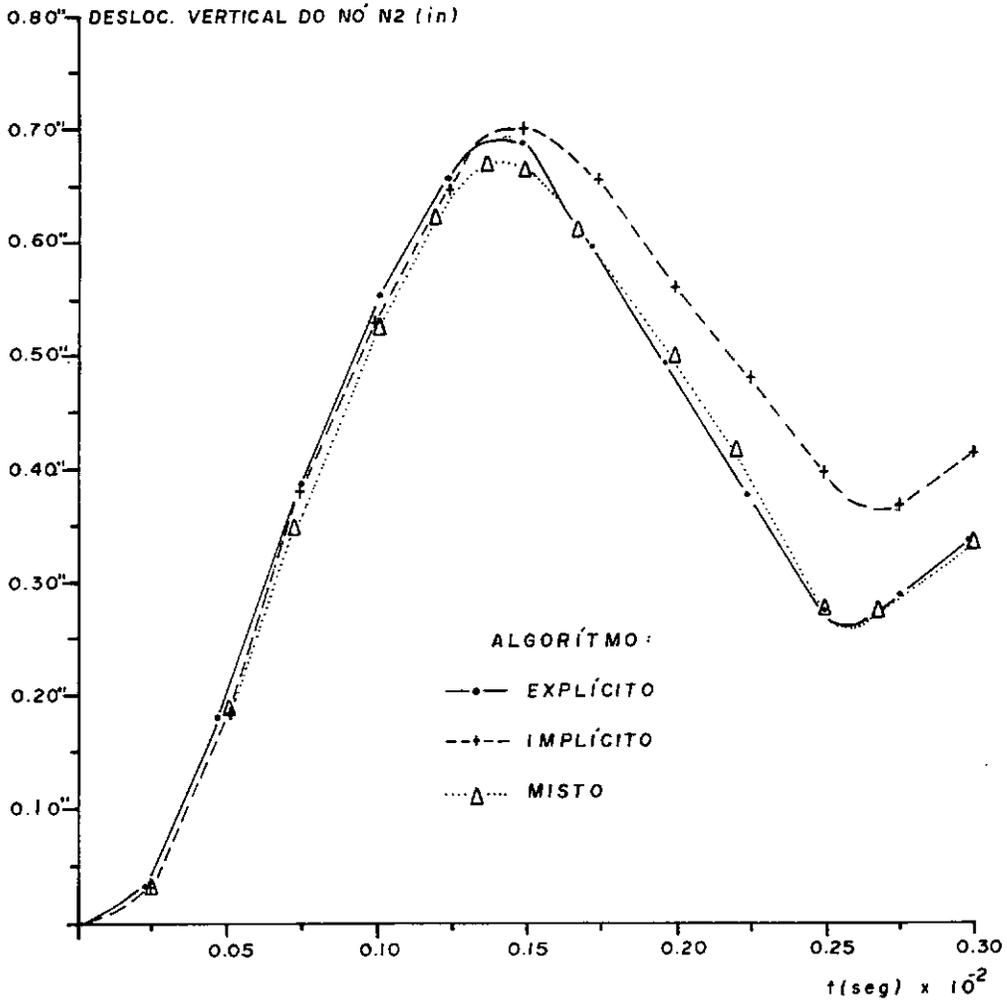


FIGURA (IV.33) - Resultados dos Algoritmos Considerando-se a Interação Fluido-Estrutura e a Presença de Elementos Escalares de Mola na Interface.

O comportamento não-linear do sistema pode ser ilustrado pela figura (IV.34) que apresenta as curvas de variação das tensões  $\sigma_\theta$  para um determinado ponto do reator próximo ao seu eixo de simetria. Assim como  $\sigma_\theta$ , as tensões  $\sigma_R$ ,  $\sigma_Z$  e  $\tau_{EZ}$  atingem valores excessivos acarretando algumas plastificações no referido ponto. Tal figura foi preparada através do algoritmo de Newmark, considerando as três situações distintas: estrutura isolada; estrutura e fluido, sem elementos escalares de mola; e, estrutura e fluido, com a presença dos elementos escalares de mola na interface.

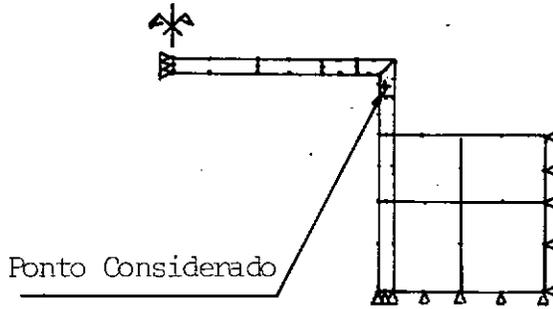
A tabela (IV.7) apresenta o histórico de tensões para um outro ponto do vaso de pressões, determinado por meio do algoritmo misto, sem a presença dos elementos escalares de mola na interface. Apesar de os valores das tensões terem sido grandes, ainda não foram suficientes para provocar plastificações no local.

As figuras (IV.35) e (IV.36) mostram a superfície livre do líquido, em diferentes tempos, e associadas ao uso de elementos de pequena espessura ou de molas na interface, respectivamente. A concordância entre as duas soluções é prova do bom funcionamento do modelo implementado. Os diversos algoritmos apresentaram idênticos resultados.

A comparação entre os tempos de processamento para os vários algoritmos deste problema só pode ser efetuada no caso de elementos de pequena espessura na interface, já que a malha é a mesma para todos, com o número de nós e de elementos constantes. Mesmo assim, a comparação ficará mascarada, visto que, esses elementos de interface, quando analisados pelo algoritmo misto, tiveram que ser considerados no domínio implícito, para não reduzir drasticamente o intervalo de tempo. Em tais análises, foram necessárias 1.945 posições no vetor de armazenamento da matriz de rigidez para o algoritmo implícito, e 1.485 para o algoritmo misto. Nestas condições os tempos de processamento obtidos foram:

- Algoritmo Explícito,  $\Delta t = 6,0 \times 10^{-7}$  seg = + de 7.200 seg
- Algoritmo Misto,  $\Delta t = 1,0 \times 10^{-5}$  seg = 1.165 seg
- Algoritmo Implícito,  $\Delta t = 2,5 \times 10^{-5}$  seg = 585 seg

TABELA (IV.7) - Histórico de Tensões (Vaso de Pressão). Algoritmo Misto, - Sem Elementos Escalares de Molas.



Tempo (seg) $\times 10^{-2}$	$\sigma_R$	$\sigma_Z$	$\tau_{RZ}$	$\sigma_\theta$	Estado Físico*
0,02	3.620	11.857	-2.417	3.700	E
0,04	6.311	20.759	-3.718	4.209	E
0,06	8.225	26.316	-4.708	4.255	E
0,08	12.969	40.834	-7.033	5.272	E
0,10	15.173	48.690	-8.871	8.287	E
0,12	15.781	52.270	-9.109	8.218	E
0,14	14.016	46.185	-7.930	7.426	E
0,16	14.208	48.627	-8.242	8.059	E
0,18	13.774	46.394	-8.223	8.849	E
0,20	9.980	34.926	-5.885	6.480	E
0,22	6.400	24.265	-4.016	5.393	E
0,24	6.168	23.336	-4.053	6.329	E
0,26	4.964	20.413	-3.172	6.019	E
0,28	3.231	14.719	-2.426	4.399	E
0,30	5.660	20.863	-3.651	5.552	E

\* E - Elástico  
P - Plástico.

Como ilustração, no caso de elementos escalares de mola na interface, o algoritmo de Newmark necessitou de 1.728 posições de memória para armazenar a matriz de rigidez efetiva, enquanto que o algoritmo misto precisou de 1.773, devido aos problemas discutidos anteriormente. Nestas condições, o tempo de processamento de cada análise foi igual a:

VASO DE PRESSÃO  
ANÁLISE DE TENSÕES - ALGORÍTMO IMPLÍCITO

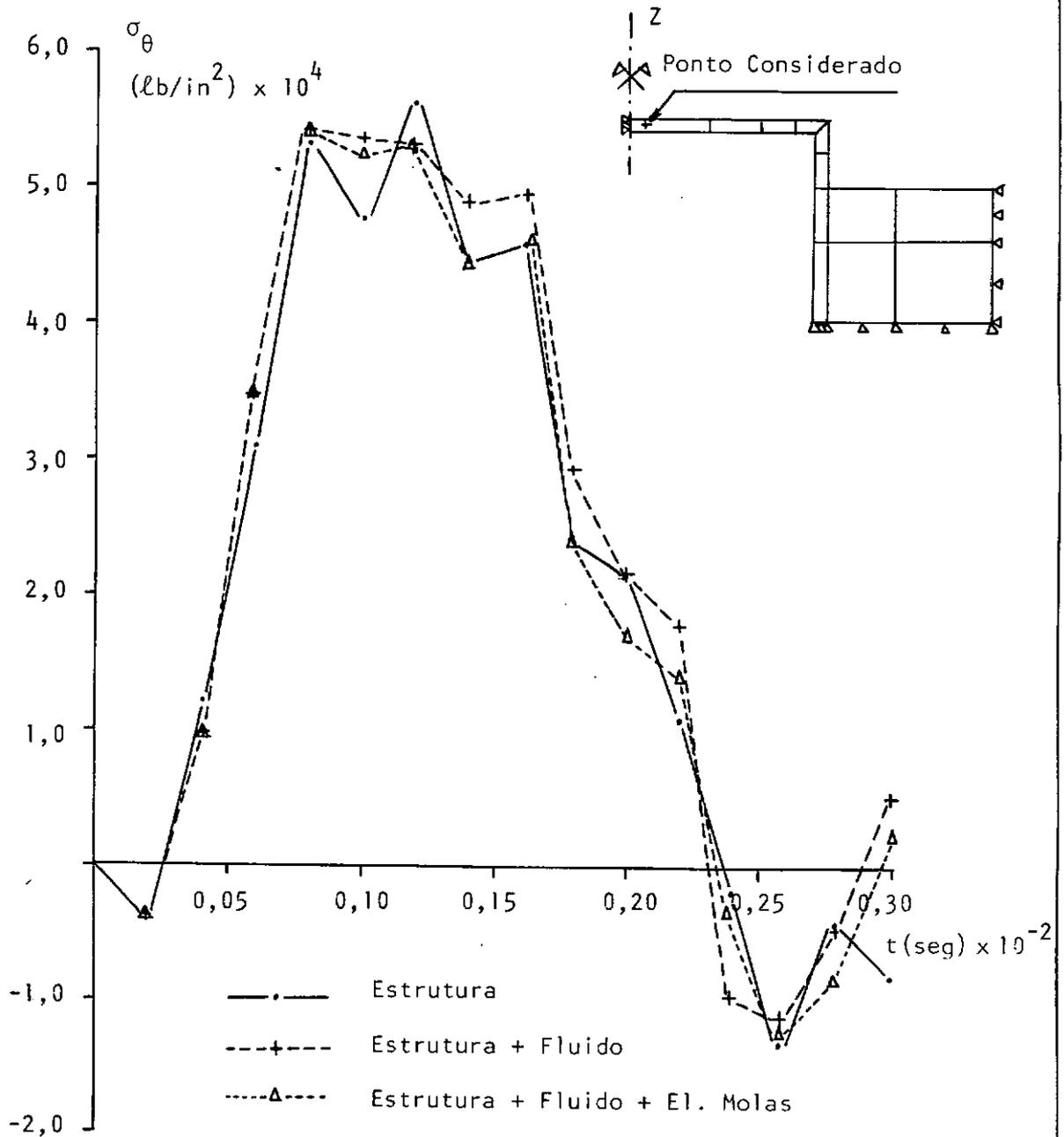


FIGURA (IV.34) - Vaso de Pressão: Variação das Tensões  $\sigma_\theta$  para um Determinado Ponto da Estrutura.

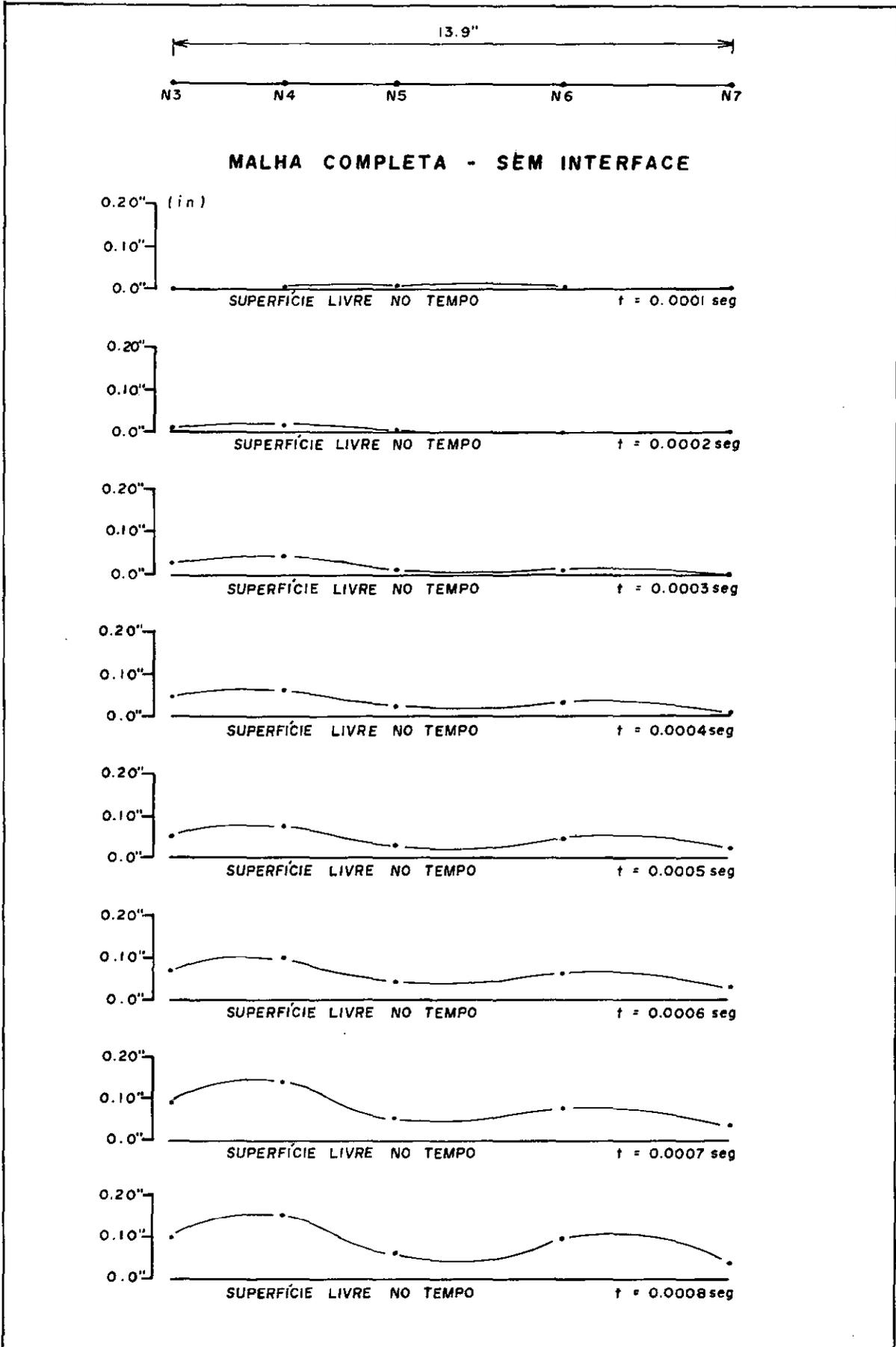
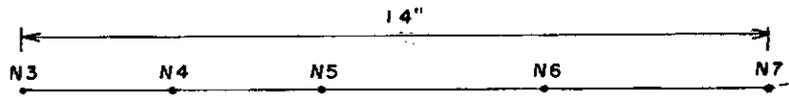


FIGURA (IV.35) - Deslocamento da Superfície Livre do Fluido sem Consideração dos Elementos Escalares de Mola da Interface.



### MALHA COMPLETA - COM INTERFACE

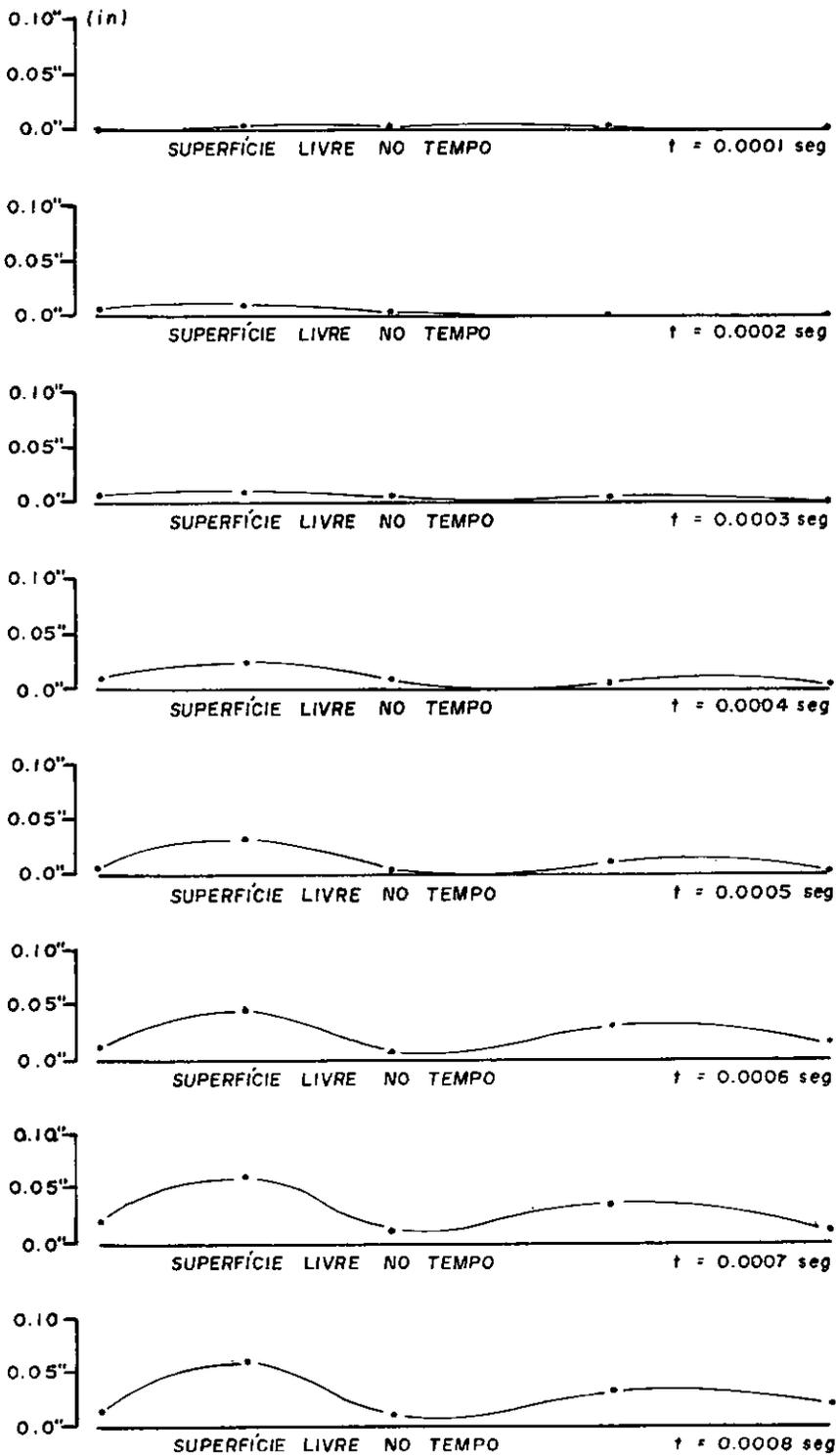


FIGURA (IV.36) - Deslocamento da Superfície Livre do Fluido, Considerando a Presença de Elementos Escalares de Mola na Interface.

- Algoritmo Explícito, 64 nós,  $\Delta t = 6,0 \times 10^{-7}$  seg = + de 7.200 seg
- Algoritmo Misto, 72 nós,  $\Delta t = 1,0 \times 10^{-5}$  seg = 1.296 seg
- Algoritmo Implícito, 64 nós,  $\Delta t = 2,5 \times 10^{-5}$  seg = 554 seg

Pode-se concluir que, em termos de precisão, os algoritmos apresentaram resultados bem semelhantes. A simulação do movimento relativo entre o fluido e a estrutura apresentou resultados satisfatórios. Para os algoritmos explícito e implícito, é mais conveniente a utilização de elementos escalares de mola na interface, pois, desta forma, pode-se reduzir o número de nós e de elementos, sem afetar a simulação do comportamento fluido. Para o algoritmo misto, a melhor alternativa é a de elementos de pequena espessura na interface, visto que, o uso de molas na interface implica no aparecimento de outros elementos para compatibilizarem suas deformações.

## V - COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

Este trabalho teve por finalidade apresentar um estudo sobre o algoritmo misto implícito-explicito de integração das equações dinâmicas no tempo, discutir a sua performance e compará-lo com os processos tradicionais de análise.

Para tanto, implementou-se um programa em linguagem FORTRAN IV que, sendo modular, permitiu a análise independente de cada algoritmo, de maneira tal que as comparações de eficiência computacional puderam ser realizadas fielmente. A comparação do resultado e do comportamento dos vários métodos de integração por meio de programas diferentes era um fator que mascarava a análise, não permitindo conclusões mais seguras.

O programa desenvolvido mostrou-se prático e seguro. Originário do trabalho da referência [15], no qual se implementou a integração explícita por meio do Método da Diferença Central, bem como a solução não-linear do sistema, acrescentou-se a integração implícita através do Método de Newmark. Permiteu-se também que fossem realizadas atualizações sucessivas na matriz de rigidez efetiva.

O algoritmo implícito foi preparado na forma preditor-corretora, como explicado no Capítulo II. O método misto foi igualmente implementado, equivalendo a se desenvolver, no mesmo programa, o algoritmo explícito outra vez.

Significa, por conseguinte, que a solução através do algoritmo explícito poderia ser obtida pelo Método da Diferença Central original, pré-estabelecido, ou pelo dispositivo preditor-corretor do algoritmo misto, com todos os elementos explícitos. É lógico que a eficiência do algoritmo, quando processado desta última forma, não é maior que a original, pois, além das limitações do intervalo de tempo reduzido, há a montagem da matriz de rigidez efetiva. Assim sendo, todas as comparações entre os algoritmos foram feitas considerando o método explícito original.

Em termos de precisão, os resultados obtidos com provaram a boa resposta do algoritmo implementado. Os valores calculados pelos três métodos foram aproximadamente iguais, quer em termos de deslocamentos nodais, como em velocidades ou tensões dos pontos de integração, para as três categorias de sistemas estruturais consideradas: Estado Plano de Tensões, Estado Plano de Deformações e Sólidos Axi-simétricos. Como era de se esperar, os resultados do algoritmo misto ficaram, na maioria das vezes, entre aqueles do método implícito e os do explícito, aproximando-se mais deste último.

Verificou-se ainda que soluções como o refinamento da malha, a redução no intervalo de integração, ou mesmo a variação do número de pontos de integração alteram decisivamente os resultados da análise. Não se constatou, em nenhuma aplicação, uma melhora acentuada na precisão dos mesmos, quando se reduz o controle de convergência das iterações de equilíbrio. Tais respostas alteram-se profundamente, se considerados os efeitos das interações entre os vários meios, conforme mostra o exemplo do vaso de pressão.

Comprovou-se, claramente, a estabilidade do algoritmo misto, de acordo com o discutido no Capítulo II. A condição de que o intervalo de tempo adotado deve ser menor que o intervalo crítico do domínio explícito mostrou-se suficiente na maioria das vezes (os coeficientes adotados para o algoritmo de Newmark foram iguais a  $\gamma = 0,5$  e  $\beta = 0,25$ ). Apenas no caso do tubo cheio de fluido é que se usou um intervalo menor que o crítico, pois assim o exigia a condição de precisão dos resultados do domínio implícito, em função do período fundamental de vibração do problema.

O modelo implícito, preparado desprezando-se a influência da rigidez dos elementos de fluido na matriz de rigidez efetiva, em problemas de interação fluido-estrutura, mostrou-se eficaz e preciso. Os resultados são bastante coincidentes com os do próprio algoritmo misto, e as condições de estabilidade são garantidas, se forem considerados como daquele algoritmo. Tal fato foi constatado nos exemplos do tubo cheio de fluido, cas

ca imersa em meio líquido, e do vaso de pressão. É importante considerar os casos processados com  $\Delta t > \Delta t_{cr}$  do domínio explícito, que comprovaram nitidamente que o algoritmo implícito, sem a rigidez do fluido, é instável quando não se atende à essa condição, e quando o controle das iterações é feito por meio da equação (II.44).

O elemento escalar de mola mostrou-se eficiente, simulando com precisão o movimento relativo entre o fluido com superfície livre e a estrutura.

Encontrou-se uma enorme dificuldade em se obter resultados representativos para a comparação dos tempos de processamento entre os diversos algoritmos implementados, mesmo estando em um único programa. Problemas de sobrecarregamento do sistema operacional impediram a determinação de parâmetros reais de comparação. Um exemplo, processado duas vezes pelo mesmo algoritmo, era capaz de apresentar gastos computacionais diversos, mesmo que o processamento fosse realizado em horários iguais ou diferentes.

Devido a tais limitações, que infelizmente escaparam do alcance deste trabalho, as comparações entre os tempos de processamento devem ser observadas com ressalvas e cuidados. Os valores do tempo de análise apresentadas nos diversos exemplos, foram escolhidos de forma criteriosa, procurando-se aqueles resultados mais representativos.

Em decorrência, pode-se afirmar que o algoritmo implícito foi o mais eficiente para os exemplos analisados em termos de gastos computacionais. Note-se que as comparações foram feitas para condições ideais, ou seja, o máximo intervalo de tempo permitido para cada algoritmo. Mesmo nos problemas de interação entre dois meios distintos, o Método de Newmark mostrou-se o mais eficaz.

De modo geral, ao longo de todas as análises, foi o método implícito que se mostrou mais eficiente, mesmo que, em cada iteração, ele tenha sido mais lento que o algoritmo misto.

A principal razão desse resultado é, sem dúvidas, o fato do intervalo de tempo do algoritmo implícito ser suficientemente maior que o do algoritmo misto. Dessa forma, garante-se a realização da análise em menor tempo, mesmo que a ocupação da memória seja superior (armazenamento de dados na matriz de rigidez efetiva), ou que o número de operações para a montagem e resolução do sistema de equações também seja superior. Em outras palavras, nos exemplos aqui processados, não se observou uma redução na montagem das matrizes ou no tamanho do sistema, que compensasse o menor intervalo de tempo do algoritmo misto.

A integração mista no tempo foi mais eficiente que a implícita nas situações em que o intervalo adotado entre os dois métodos foi aproximadamente o mesmo, como no exemplo do tubo, ou então, nos casos de atualização sucessiva da matriz de rigidez, quando o número de operações se eleva drasticamente, comprometendo a performance da análise implícita.

Em função do exposto, é possível tirar algumas conclusões importantes:

1º) O algoritmo implícito-explicito é, comprovadamente, mais uma ferramenta a que pode recorrer o projetista estrutural em situações particulares.

2º) A princípio, é o algoritmo de Newmark o mais eficiente. Sua escolha fica na dependência do número de equações do sistema não ser muito grande, da numeração dos nós da malha de elementos finitos ser adequada e do intervalo de tempo ser escolhido em função do período fundamental do problema global. Nem sempre se consegue atingir essas três condições. O número de equações do sistema e a numeração dos nós, que determinam o tamanho das matrizes e a área de armazenamento de dados, dependem da capacidade do computador utilizado. Muitas vezes é necessária a divisão em blocos dessas matrizes, ou o uso de memória virtual, que comprometem a eficiência do algoritmo. A determinação do máximo intervalo de tempo exige uma análise de vibrações livres do sistema, por vezes onerosa, comparando-se ao próprio cálculo da resposta dinâmica que se procura. Isso faz com que, em certas ocasiões, o intervalo de tempo seja adotado

por tentativas, com poucas chances de ser a solução ideal.

3º) Quando  $\gamma \geq 0,5$  e  $\beta \geq (\gamma + 0,5)^2/4$ , o intervalo de tempo a ser utilizado no algoritmo misto é, em geral, determinado pelo intervalo crítico do domínio explícito. Eventualmente, esse valor pode ser inferior, a fim de se atender às condições de precisão e estabilidade para o domínio implícito. Isso exigiria também uma análise do espectro das frequências naturais do sistema e do carregamento.

4º) Se os intervalos de tempo do domínio implícito, e do explícito forem aproximadamente iguais, o algoritmo misto deve ser o mais eficiente.

5º) O mesmo acontece se houver atualização sucessiva da matriz de rigidez, com o intuito de se acelerar a convergência a cada iteração ou quando se defronta com materiais que possuem propriedades que variam acentuadamente. No entanto, a atualização da matriz de rigidez só tem sentido quando surgirem os efeitos não-lineares. A condição ideal é a atualização dessa matriz apenas naqueles intervalos onde se fizerem sentir os efeitos da plastificação do material (o presente trabalho se limitou a esse tipo de não-linearidade). A verificação de tais intervalos é muito complexa e não foi realizada no programa. Atualizar a matriz de rigidez, em intervalos determinados de tempo, pode também não ser uma opção conveniente, pois não se sabe, *a priori*, se esses intervalos coincidirão com aqueles onde ocorrerão as plastificações. Assim, para contornar o problema, deve-se atualizar a rigidez em todos os intervalos, solução essa bastante onerosa, só se justificando em problemas altamente não-lineares. Deve ser registrado que, nos exemplos analisados, mesmo nos acentuadamente não-lineares, não eram necessárias mais do que três iterações para se atingir a convergência, tanto no algoritmo misto como no implícito.

6º) O algoritmo misto só deve ser utilizado em problemas que envolvam a interação de sistemas rígidos-flexíveis.

7º) No caso de interações fluido-estrutura, po-

de-se utilizar o algoritmo implícito modificado, desprezando-se a rigidez do domínio fluido. Essa situação é condicionada às mesmas limitações do algoritmo misto, mas tem a vantagem de poder ser implementada facilmente em um programa de integração implícita.

8º) Os elementos escalares de mola provaram simular com eficiência os movimentos relativos entre o fluido e a estrutura. Pelo fato de serem localizados em um único domínio, só devem ser utilizados nos algoritmos implícito e explícito. Devido a essa situação, é desaconselhável o seu uso no processo misto, pois haveria necessidade de uma faixa adicional de elementos que compatibilizassem os dois meios. Em decorrência, o tamanho das matrizes do sistema seria majorado.

9º) Se o problema for do tipo não-linear geométrico, o algoritmo misto deve ser o mais eficiente, dada a necessidade de se atualizar, constantemente, a matriz de rigidez efetiva.

Como complementação deste trabalho, sugere-se que sejam estudados os seguintes tópicos:

- Comportamento dos procedimentos implementados com critérios de verificação do equilíbrio dinâmico e estabilidade dos algoritmos baseados no conceito de conservação de energia;

- Variação do intervalo de integração durante a análise ou adoção de intervalos de tempo distintos para cada domínio;

- Atualização da matriz de rigidez efetiva, apenas nos intervalos onde ocorrerem efeitos não-lineares;

- Implementação de uma sub-rotina para a análise não-linear geométrica;

- Implementação de elementos infinitos para análises de problemas de interação solo-fluido-estrutura em meios semi-infinitos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. BATHE, K.J.; WILSON, E.L. *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, New Jersey, 1976.
2. BATHE, K.J. *Finite Formulation, Modeling, and Solution of Nonlinear Dynamics Problems*; Numerical Methods for Partial Differential Equations, Academic Press, 1979, pp. 1-40.
3. HUGHES, T. *Stability, Convergence and Growth and Decay of Energy of the Average Acceleration Method in Nonlinear Structural Dynamics*, Computers & Structures, Vol. 6, 1976, pp. 313-324.
4. BELYTSCHKO, T.; MULLEN, R. *Mesh Partitions of Explicit-Implicit Time Integration*. US-Germany Symposium on Formulations and Computational Algorithms in Finite Element Analysis, MIT, Cambridge, 1976, pp. 673-690.
5. BELYTSCHKO, T.; MULLEN, R. *Stability of Explicit-Implicit Mesh Partitions in Time Integration*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 12, 1978, pp. 1575-1586.
6. BELYTSCHKO, T.; YEN, H.; MULLEN, R. *Mixed Methods for Time Integration*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 17/18, 1979, pp. 259-275.
7. FELIPPA, C.; PARK, K. *Staggered Transient Analysis Procedures For Coupled Mechanical Systems: Formulation*, Applied Mechanics Laboratory, Palo Alto, California, 1979.
8. HUGHES, T.; LIU, W. *Implicit-Explicit Finite Elements in Transient Analysis: Stability Theory*, Journal of Applied Mechanics, Vol. 45, June, 1978, pp. 371-374.

9. HUGHES, T.; LIU, W. *Implicit-Explicit Finite Elements in Transient Analysis: Implementation and Numerical Examples*, Journal of Applied Mechanics, Vol. 45, June, 1978, pp. 375-378.
10. HUGHES, T.; PISTER, K.; TAYLOR, R. *Implicit-Explicit Finite Elements in Nonlinear Transient Analysis*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 17/18, 1979, pp. 159-182.
11. HUGHES, T. *Recent Developments in Computer Methods for Structural Analysis*, Nuclear Engineering and Design, Nº 57, 1980, pp. 427-439.
12. MONDKAR, D.P.; POWEL, G.H. *Towards Optimal in Core Equations Solving*, Computers & Structures, Vol. 4, pp. 531-548. 1974..
13. FELIPPA, C.A. *Solution of Linear Equations with Skyline Stored Symmetric Matrix*, Computers & Structures, Vol. 5, pp. 13-29. 1975.
14. WINGET, J.; HUGHES, T. *A Profile Solver for Specially Structured Symmetric - Unsymmetric Equation Systems*, Adv. Eng. Software, Vol. 4, Nº 2, 1982, pp. 64-67.
15. COSTA, A.M. *Análise Dinâmica Elasto-Plástica de Transiente de Curta Duração Incluindo os Efeitos da Interação Solo-Fluido-Estrutura*, Tese M.Sc., COPPE/UFRJ, 1978.
16. HUGHES, T.J.R.; LIU, W.K.; BROOKS, Q. *Finite Element Analysis of Incompressible Viscous Flows by The Penalty Function Formulation*, J. Comp. Phys, 1979.
17. NICKELL, R.E. *Direct Integration Methods in Structural Dynamics*, Journal of the Engineering Mechanics Division, Nº 2, April, 1973, pp. 303-317.
18. WEEKS, G. *Temporal Operators for Nonlinear Structural Dynamics Problems*, Journal of the Engineering Mechanics Division, Nº 5, October, 1972, pp. 1087-1104.

19. BERGAN, P.G.; SOREIDE, T. *A Comparative Study of Different Numerical Solution Techniques as Applied to a Nonlinear Structural Problem*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, N<sup>o</sup> 2, 1973, pp. 185-201.
20. BELYTSCHKO, T. *Explicit Time Integration of Structure-Mechanical Systems*, Advanced Structural Dynamics, Edited by J. Donea, Applied Science Publishers Ltd, London, 1980, pp. 97-122.
21. PARK, K.; UNDERWOOD, P. *A Variable-Step Central Difference Method For Structural Dynamics Analysis - Part 1. Theoretical Aspects*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, N<sup>o</sup> 22, 1980, pp. 241-258.
22. UNDERWOOD, P.; PARK, K. *A Variable-Step Central Difference Method For Structural Dynamics Analysis - Part. 2. Implementation and Performance Evaluation*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, N<sup>o</sup> 23, 1980, pp. 259-279.
23. UNDERWOOD, P.; PARK, K. *Stint/CD: A Stand-Alone Explicit Time Integration Package for Structural Dynamics Analysis*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 17, 1981, pp. 1285-1312.
24. BELYTSCHKO, T.; SCHOEBERLE, D. *On the Unconditional Stability of an Implicit Algorithm for Nonlinear Structural Dynamics*, Journal of Applied Mechanics, December, 1975, pp. 865-869.
25. KEY, S.W. *Transient Response by Time Integration: Review of Implicit and Explicit Operators*, Advanced Structural Dynamics. Edited by J. Donea, Applied Science Publishers Ltd, London, 1980, pp. 71-95.
26. OWEN, D.R. *Implicit Finite Element Methods for the Dynamic Transient Analysis of Solids with Particular Reference to Non-Linear Situations*, Advanced Structural Dynamics. Edited by J. Donea, Applied Science Publishers Ltd, London, 1980, pp. 123-152.

27. BATHE, K.J.; WILSON, E.L. *Stability and Accuracy Analysis of Direct Integration Methods*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 1, 1973, pp. 283-291.
28. LIMA, E.C.P. *LORANE DINA - Uma Linguagem Orientada para Análise Dinâmica de Estruturas*, Tese D.Sc., COPPE/UFRJ, 1977.
29. EBECKEN, N. *LORANE-NL - Uma Linguagem Orientada à Análise Estrutural Não-Linear*, Tese D.Sc., COPPE/UFRJ, 1977.
30. WRIGHT, J. *Mixed Time Integration Schemes*, Computers & Structures, Vol. 10, 1979, pp. 235-238.
31. PARK, K.C. *Practical Aspects of Numerical Time Integration*, Computers & Structures, Vol. 7, 1977, pp. 343-353.
32. TOLEDO, R.C.P.L. *Um Estudo sobre Métodos de Integração Direta para a Análise Dinâmica Não-Linear de Estruturas*, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, 1983.
33. HILBER, H.; HUGHES, T.; TAYLOR, R. *Improved Numerical Dissipation for Time Integration Algorithms in Structural Dynamics*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 5, 1977, pp. 283-292.
34. HILBER, H.; HUGHES, T. *Collocation, Dissipation and 'Overshoot' for Time Integration Schemes in Structural Dynamics*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 6, 1978, pp. 99-117.
35. JENSEN, P. *Transiente Analysis of Structures by Stiffly Stable Methods*, Computers & Structures, Vol. 4, 1974, pp. 615-626.
36. BATHE, K.; CIMENTO, A. *On the Time Integration of Nonlinear Dynamic Response*, Proceedings, GAMM/GAMNI Conference, Paris, Nov. 1978.

37. OWEN, D.R.J.; HINTON, E. *Finite Elements in Plasticity*  
Pineridge Press, Swansea, 1980.
38. MALVERN, L.E. *Introduction to the Mechanics of a Continuous  
Medium*, Prentice-Hall Inc., 1969.
39. ZIENKIEWICZ, O.C. *The Finite Element Method in Engineering  
Science*, McGraw-Hill, 1971.
40. CESCOTTO, S.; FREY, F.; FONDER, G. *Total and Updated Lagran-  
gian Descriptions in Nonlinear Structural Analysis: A  
Unified Approach*, Energy Methods in Finite Element Analysis,  
Cap. 15, pp. 283-296.
41. SHANTARAM, D.; OWEN, D.; ZIENKIEWICZ, O. *Dynamic Transient  
Behaviour of Two-And-Three-Dimensional Structures  
Including Plasticity, Large Deformation Effects And  
Fluid Interaction*, Earthquake Engineering and Structu-  
ral Dynamic, Vol. 4, 1976, pp. 561-578.
42. NAGARAJAN, S.; POPOV, E. *Elastic-Plastic Dynamic Analysis  
of Axi-symmetric Solids*, Computers & Structures, Vol. 4,  
1974, pp. 1117-1134.
43. LIU, S.; LIN, T. *Elastic-Plastic Dynamic Analysis of Struc-  
tures Using Known Elastic Solutions*, Earthquake Engi-  
neering and Structural Dynamics, Vol. 7, 1979, pp. 147-  
159.
44. NOVOZHILOV, V. *Foundations of the Nonlinear Theory of Elas-  
ticity*, Graylock Press, Rochester, New York, 1953.
45. MENDELSON, A. *Plasticity, Theory and Application*, The Mac  
Millan Co., New York, 1968.
46. CLOUGH, R.W.; PENZIEN, J. *Dynamics of Structures*, McGraw-  
Hill, Honyakusha, 1975.

47. HINTON, E.; ROCK, T.; ZIENKIEWICZ, O.C. *A Note on Mass Lumping and Related Process in the Finite Element Methods*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 4, 245-249, 1976.
48. WILLMERT, K.D. *Numerical Determination of the Response of a Linear Vibration System With a Singular Mass Matrix*, Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Industry, February, 1972, pp. 64-69.
49. EBECKEN, N.; MACHADO, R. *Análise Transiente Não-Linear de Vasos de Pressão Considerando-se a Interação Fluido Estrutura*, Simpósio Brasileiro de Tubulações e Vasos de Pressão, Salvador, BA, 1980.
50. BELYTSCHKO, T. *Methods and Programs for Analysis of Fluid-Structure Systems*, Nuclear Engineering and Design, Nº 42, 1977, pp. 41-52.
51. DUNGAR, R. *An Efficient Method of Fluid-Structure Coupling in The Dynamic Analysis of Structures*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 13, 1978, pp. 93-107.
52. ZIENKIEWICZ, O.; BETTESS, P. *Fluid-Structure Dynamic Interaction and Wave Forces. An Introduction to Numerical Treatment*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 13, 1978, pp. 1-16.
53. DESHPANDE, S.; BELKUNE, R.; RAMESH, C. *Dynamic Analysis of Coupled Fluid-Structure Interaction Problems*, Numerical Methods for Coupled Problems, Swansea, 1981, pp. 367-378.
54. BATHE, K.; HAHN, W. *On Transient Analysis of Fluid-Structures Systems*, Computers & Structures, Vol. 10, 1979, pp. 383-391.

55. AKKAS, N.; AKAY, H.; YILMAZ, C. *Applicability of General-Purpose Finite Element Programs in Solid-Fluid Interaction Problems*, Computers & Structures, Vol. 10, 1979, pp. 773-783.
56. OWEN, D.R.; MARQUES, J.M. *Coupled Implicit-Explicit Time Integration With Frontal Substructuring in Two Dimensional Quasistatic Elasto-Viscoplasticity*. Numerical Methods for Coupled Problems, Swansea, 1981, pp. 147-160.
57. NEISHLOS, H.; ISRAELI, M.; KIVITY, Y. *A Coupling Algorithm For Fluid And Structure With Different Time Steps*, Numerical Methods for Coupled Problems, Swansea, 1981, pp. 313-334.
58. HOFMEISTER, L. *Dynamic Analysis of Structures Containing Nonlinear Springs*, Computers & Structures, Vol. 8, 1978, pp. 609-614.
59. EBECKEN, N.; MACHADO, R. *Análise de Interação Fluido Estrutura com Integração Implícita-Explícita no Tempo*, II Congresso Latino-Americano para Métodos Computacionais em Engenharia, Curitiba, PR, 1980.
60. BATHE, K.J.; WILSON, E.L. *NONSAP - A Nonlinear Structural Analysis Program*, Nuclear Engineering and Design, Vol. 29, 1974.
61. ZIENKIEWICZ, O.C.; HUMPHENSON, C.; LEWIS, R.W. *A Unified Approach to Soil Mechanics Problems (Including Plasticity and Visco-Plasticity)*, Finite Elements in Geomechanics, Edited by G. Gudehus, John Wiley & Sons, 1977.
62. KUNAR, R.; RODRIGUEZ-OVEJERG, L. *A Model With Non-Reflecting Boundaries For Use in Explicit Soil-Structure Interaction Analyses*, Earthquake Engineering and Structural Dynamic, Vol. 8, 1980, pp. 361-374.

63. EBECKEN, N.; MACHADO, R. *Análise Transiente Não-Linear de Sistemas Rígido-Flexíveis*, VI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Rio de Janeiro, 1981.
64. BELYTSCHKO, T.; SCHUMANN, U. *Fluid-Structure Interactions In Light Water Reactor Systems*, Nuclear Engineering and Design, Nº 60, 1980, pp. 173-195.
65. STRICKLIN, J.A. *et alii*. *Nonlinear Dynamic Analysis of Shells of Revolution by Matrix Displacement Methods*, AIAA Journal, Vol. 9, Nº 4, April, 1971, pp. 629-636.
66. EBECKEN, N. *Análise Dinâmica Não-Linear de Estruturas pelo Método dos Elementos Finitos com Integração Implícita-Explícita no Tempo*, V Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Campinas, SP, 1979, pp. 303-312.