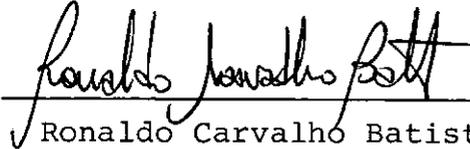


INFLUÊNCIA DA INTERAÇÃO ENTRE MODOS
E IMPERFEIÇÕES NA FLAMBAGEM DE
CASCAS CILÍNDRICAS AXIALMENTE COMPRIMIDAS

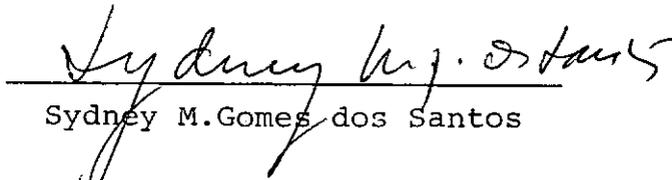
Ricardo Coscarelli Antonini

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO
DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

Aprovada por:



Ronaldo Carvalho Batista
(Presidente)



Sydney M. Gomes dos Santos



Luiz Bevilacqua



Sergio Fernandes Villaça

ANTONINI, RICARDO COSCARELLI

Influência da interação entre modos e imperfeições na flambagem de cascas cilíndricas axialmente comprimidas (Rio de Janeiro) 1981

IX, 122 p. 29,7 cm (COPPE-UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1981).

Tese - Univ. Fed. Rio de Janeiro, Fac. de Engenharia.

1. Instabilidade de Cascas

I. COPPE/UFRJ

II. Título (Série)

AGRADECIMENTOS

Ao prof. Ronaldo Carvalho Batista pela valiosa orientação em todas as etapas deste trabalho.

Ao prof. Alcebíades de Vasconcellos Filho que sempre me incentivou e apoiou na realização dos estudos de pós-graduação.

A todos os professores da COPPE e da Escola de Engenharia da UFMG pelos ensinamentos recebidos.

A meus pais, familiares e à minha esposa pela motivação, força, paciência e dedicação.

A todos os colegas e amigos que incentivaram o meu trabalho.

À Coordenação do Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), que através do Programa Institucional de Capacitação de Docentes (PICD), financiaram meus estudos de pós-graduação e ao Conselho de Pós-Graduação da UFMG pelo atendimento cordial e eficiente.

A Bety e Gilmar pela esmerada elaboração gráfica deste trabalho.

RESUMO

Apresentam-se resultados de uma análise não-linear de cascas cilíndricas circulares sob compressão axial. Incluem-se nesta análise a verificação dos efeitos de imperfeições geométricas iniciais e do acoplamento entre modos de deslocamento na resposta não-linear dessas cascas.

A partir da investigação da variação das distribuições de energia durante a resposta não-linear, comprova-se, que as contribuições de energia (ou rigidez) de membrana para a estabilidade da casca são reduzidas substancialmente pelos efeitos combinados da interação não-linear entre os modos dominantes e imperfeições iniciais. Os resultados dessa investigação são usados para validar um modelo teórico linearizado com energia reduzida, recentemente proposto, que fornece limites inferiores das cargas de flambagem. Estendendo um pouco mais estas investigações, obtêm-se informações que permitem a proposição de um modelo não-linear com energia reduzida que, simulando o efeito do acoplamento entre vários modos de deslocamento, fornece estimativas das cargas de flambagem, em função de imperfeições medidas experimentalmente, com pequeno esforço computacional.

Mostra-se que os resultados teóricos obtidos com estes modelos simplificados se comparam favoravelmente a resultados experimentais e representam alternativas simples quando correlacionados com outros procedimentos teóricos.

ABSTRACT

Results from a non-linear analysis of circular cylindrical shells under axial compression are presented. Included in this analysis are the effects that mode coupling and initial geometric imperfections have on the non-linear buckling behaviour.

It is shown, through the inspection of energy distributions, that the stabilizing membrane energy contributions are eroded substantially during the imperfection-sensitive non-linear mode interaction that occurs in the buckling of these shells. The results of this analysis are used to validate a recently proposed linearized reduced energy model that provides theoretical lower bound estimates of reported buckling loads. Extending this analysis to advanced post-critical (post-buckling) equilibrium states, important qualitative informations were obtained and made it possible to propose a non-linear reduced energy model which seems to provide close estimates for the buckling loads with little computational effort.

Finally, the theoretical results obtained with these simplified models are shown to compare favourably with experimental results, representing, unlike other procedures, simple alternative methods for calculating buckling loads.

ÍNDICE

I -	INTRODUÇÃO	1
I.1 -	Histórico	1
I.2 -	Objetivos e Procedimentos deste Trabalho	5
II -	APLICAÇÃO DA TEORIA DA ESTABILIDADE ELÁSTICA A CAS CAS CILÍNDRICAS AXIALMENTE COMPRIMIDAS	7
II.1 -	Critérios da Análise Estática de Estabilida de Baseados na Energia Potencial Total	7
II.2 -	O Funcional de Energia Potencial Total	16
II.2.1 -	Hipóteses simplificadoras na teo- ria de cascas esbeltas para o estu- do de estabilidade	16
II.2.2 -	Energia potencial total	18
II.2.3 -	Energia potencial total na forma incremental: A Variação Total de Energia	21
II.3 -	Estado de Equilíbrio Crítico	23
II.3.1 -	Equações de equilíbrio crítico	23
II.3.2 -	Determinação da carga crítica e dos modos críticos	25
II.4 -	Equações Diferenciais Não-Lineares de Equi- líbrio para Cascas Imperfeitas	27
III -	DESENVOLVIMENTO ANALÍTICO PARA O ESTUDO DO COMPOR TAMENTO NÃO-LINEAR	31
III.1 -	Interação Entre Modos de Deformação	31
III.2	Equações Algébricas Não-Lineares de Equilí- brio	38
III.3	Expressões das Parcelas de Energia	42

IV -	RESULTADOS TEÓRICOS	51
IV.1 -	Procedimento Numérico de Cálculo	51
IV.2 -	A Influência da Interação entre Modos e Imperfeições Geométricas	53
IV.2.1 -	Análise da resposta não-linear	55
IV.2.2 -	Análise das distribuições de energia	60
IV.3 -	A Influência da Variação dos Parâmetros Geométricos	67
V -	MODELOS SIMPLIFICADOS PARA A ESTIMATIVA DA CARGA DE FLAMBAGEM	75
V.1 -	Introdução	75
V.2 -	Estimativas de Limites Inferiores para Cargas de Flambagem	77
V.2.1 -	O problema linearizado com energia reduzida	78
V.2.2 -	Correlações teórico-experimentais	84
V.3 -	Estimativas das Cargas de Flambagem	85
V.3.1 -	O comportamento não-linear em estágios pós-críticos avançados	85
V.3.2 -	O problema não-linear com energia reduzida	94
VI -	COMPARAÇÃO DE RESULTADOS	103
VI.1 -	Comparação entre Resultados Teóricos Obtidos com o Modelo Linearizado da Seção (V.2) e Resultados Experimentais	103
VI.2 -	Correlações entre Resultados Teóricos de Modelos Não-Lineares e Comparações com Resultados Experimentais	106
VII -	CONCLUSÕES	111

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	114
SIMBOLOGIA	117

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

I.1 - Histórico

Na atualidade, fatores econômicos e funcionais exigem soluções estruturais cada vez mais leves. A utilização de cascas esbeltas tem sido crescente aliando as vantagens de peso mínimo a eficiência de formas geométricas capazes de resistir esforços através da rigidez de membrana. Contudo, formas estruturais ótimas, como cilindros sob compressão axial e esferas sob pressão radial externa, têm o comportamento pós-crítico altamente instável devido ao acoplamento de vários modos de deformação. A grande sensibilidade a imperfeições geométricas, típica dessas cascas, e o amplo espectro de imperfeições que influenciam o seu comportamento fazem com que a flambagem ocorra para um carregamento muito inferior à carga crítica teórica. O mesmo acontece quando é feita a otimização do dimensionamento de estruturas compostas, fazendo com que as cargas críticas teóricas dos diversos componentes estruturais ocorram simultaneamente; neste caso ocorrerá o acoplamento entre os modos de flambagem associados a cada um dos componentes, o que poderia levar a uma perda precoce da estabilidade.

O estudo da estabilidade de cascas cilíndricas axialmente comprimidas tem grande importância, pois, além de ser um problema estrutural frequente, é uma introdução ao estudo de cascas mais complexas. Mesmo tratando-se de uma geometria tão simples, e submetida a um carregamento axissimétrico, a flambagem dessas cascas é um fenômeno cuja interpretação física e solução teórica ainda apresenta grandes obstáculos. Estes obstáculos e a evidente importância das cascas cilíndricas nas indústrias aeronáutica, naval e de grandes estruturas "off-shore", etc, têm motivado o desenvolvimento de pesquisas científicas e tecnológicas. Apesar do grande número de publicações, que abordam o tema com tratamento teórico ou experimental, pode-se dizer que até os dias de hoje não se chegou a uma compreensão total do compor

tamento de flambagem dessas cascas. Nas referências 1 e 2 encontram-se revisões sobre a evolução da pesquisa sobre a estabilidade elástica de estruturas e quase dois mil trabalhos, que tratam exclusivamente de cascas cilíndricas, foram listadas por GRIGOLIUK e KABANOV³.

As primeiras equações de estabilidade^{4,5} ou, mais precisamente, equações linearizadas de equilíbrio crítico para cascas cilíndricas sob compressão axial, datam do início deste século. Entretanto, foram observadas grandes discrepâncias entre as cargas críticas teóricas obtidas com estas equações e as cargas experimentais de flambagem.

Buscando um esclarecimento para essas discrepâncias DONNELL⁶, em 1934, levou em conta a existência de imperfeições geométricas iniciais nas cascas cilíndricas, introduzindo-as nas equações não-lineares para grandes deslocamentos (equações de von Kármán-Donnell), baseadas na teoria apresentada por VON KÁRMÁN⁷ para placas. Mas devido a excessivas simplificações introduzidas para o cálculo manual, os resultados para cargas de flambagem apresentados neste trabalho⁶ não foram satisfatórios para explicar o fenômeno. Em 1941, VON KÁRMÁN e TSIEN⁸ demonstraram a grande influência de grandes deflexões no comportamento pós-crítico dessas cascas e em 1950, DONNELL e VAN⁹ mostraram, em cálculo mais refinado, a grande sensibilidade das cargas de flambagem a imperfeições iniciais. Mas foi KOITER¹⁰ que, em 1945, demonstrou rigorosamente, através de uma análise assintótica, que discrepâncias entre teoria e experiência eram devidas aos efeitos combinados da interação não-linear entre modos de deformação e de imperfeições, mesmo pequenas, na forma desses modos.

Motivados pela grande sensibilidade a imperfeições, pelo comportamento altamente instável e pela dificuldade de se obter a priori as amplitudes de imperfeições, alguns pesquisadores¹¹⁻¹⁵ buscaram, através de análise não linear, o valor mínimo da carga durante a resposta pós-crítica (mínimo pós-crítico), para representar um limite inferior das cargas de flambagem. Para isto, foram tomados números cada vez maiores de termos da sé

rie dupla de Fourier usada para representar os deslocamentos ra diais. Tem sido mostrado^{1,16} entretanto, que os resultados des- sas análises não são conclusivos sendo por isso inadequadas pa- ra uso na engenharia.

Em todos esses trabalhos⁶⁻¹⁵, foram considerados apenas modos de deformação com ondas curtas longitudinais, os quais representam a configuração deformada característica do estado avançado pós-flambagem, observada experimentalmente. Mas, programas experimentais mais recentes^{17,18} revelaram, através de mapeamentos da superfície a cada nível da carga, que o pro- cesso de flambagem de cascas cilíndricas sob compressão axial é dominado por modos de ondas longas axiais.

Além disso, tem sido mostrado^{19,20} que, a influên- cia de diferentes condições de contorno é desprezível em situa- ções práticas, quando o comportamento da casca é dominado pelo efeito das imperfeições geométricas iniciais.

Dirigidas à indústria aero-espacial, onde as tole- râncias e o controle de fabricação são mais rigorosos, as pes- quisas sobre a influência das formas e amplitudes de modos de imperfeição na flambagem de cascas cilíndricas tiveram grande progresso nos anos 70. A análise multimodos, apresentada por ARBOCZ e BABCOCK²¹ em 1976, é até o momento o que há de mais so- fisticado para o cálculo da carga de flambagem em função das am- plitudes de imperfeições medidas em protótipos e modelos experi- mentais. Nesse trabalho²¹, é considerado o acoplamento de modos de ondas longas longitudinais, que dominam em estados pré-flam- bagem, com modos de ondas curtas, que são dominantes em estados pós-flambagem avançados. Apesar de proporcionar uma boa aproxi- mação da carga de flambagem experimental, este processo de cál- culo ainda não foi adotado na prática, pois sua utilização depende- ria do conhecimento prévio dos modos dominantes e das amplitu- des de imperfeição em cada um desses modos. Além disso, a espe- cificação de tolerâncias para amplitudes de imperfeição, bem co- mo seu controle na fabricação apresentam grandes dificuldades. Assim, a análise multimodos teria aplicação somente na verifica- ção das cargas máximas ou de flambagem de protótipos onde imper

feições iniciais pudessem ser medidas. Além disso, somente pequenas imperfeições em relação à espessura das cascas são consideradas nesta análise, o que limita a sua utilização à indústria aeronáutica onde, devido ao processo de fabricação as imperfeições são pequenas e onde a construção em série permite a formação de um banco de dados com informações sobre forma e amplitudes dessas imperfeições. Entretanto, em outras indústrias, como por exemplo a da engenharia civil, os processos de fabricação são suficientemente distintos para que os dados obtidos na indústria aeronáutica não possam ser aplicados diretamente.

Assim, na falta de uma teoria simples e racional, curvas empíricas, baseadas em resultados experimentais selecionados, ainda têm sido usadas no projeto de cascas cilíndricas axialmente comprimidas.

Para se evitar esse procedimento empírico de projeto, foi proposta recentemente uma teoria simplificada^{10, 22, 23} de estabilidade de cascas cilíndricas sob compressão axial. Esta teoria tem levado à formulação de problemas de autovalor não clássicos que fornecem cargas críticas teóricas reduzidas e modos críticos associados que se comparam favoravelmente a resultados experimentais que têm sido relatados ao longo dos últimos 50 anos. Estas cargas críticas teóricas reduzidas representam limites inferiores das cargas experimentais de flambagem. Neste novo modelo teórico, a simplificação introduzida consiste, em resumo, em eliminar do problema linearizado a mais importante componente estabilizadora de energia (ou rigidez) de membrana, a qual, poderia ser reduzida substancialmente pelos efeitos combinados da interação entre modos e imperfeições geométricas. Entretanto, embora se utilizando apropriadamente do conhecimento do comportamento pós-crítico instável dessas cascas^{6, 7}, para explicar o mecanismo pelo qual certas componentes de energia de membrana poderiam ser minadas durante a resposta não-linear, a identificação dessas componentes estabilizadoras é baseada essencialmente na investigação de distribuições de energia nos modos críticos, isto é, na investigação de estados de deformação vizinhos ao estado crítico para o sistema perfeito. Porém, apesar da evidência experimental já referida, se faz necessária uma

avaliação teórica do modelo proposto através de um estudo não-linear da influência da interação entre modos de deformação, incluindo aqueles identificados como dominantes^{17,18}, na resposta de flambagem de cascas geometricamente imperfeitas.

I.2 - Objetivos e Procedimentos deste Trabalho

O principal objetivo do presente trabalho é investigar a validade do modelo teórico proposto nas referências 18,22 e 23. Apresentam-se então os resultados, de uma análise não-linear da estabilidade de cascas cilíndricas sob compressão axial uniforme contendo imperfeições geométricas iniciais. Leva-se em conta nesta análise a interação não linear entre modos de deformação que, conforme observado experimentalmente^{17,18} dominam o processo de flambagem. As formas destes modos são confirmadas por resultados teóricos recentes¹⁸ e pela interpretação dos resultados obtidos no presente trabalho.

A partir da solução das equações não lineares de equilíbrio, são calculadas as contribuições de energia a cada nível de carga, permitindo assim a investigação das distribuições de energia durante o processo não-linear. Nos capítulos (II) e (III) encontram-se os critérios, hipóteses e procedimentos analíticos aqui adotados e no capítulo (IV) os resultados obtidos são analisados.

Mostra-se também que a análise das distribuições de energia é uma alternativa poderosa para o estudo de estruturas cujo comportamento apresenta dificuldades de interpretação física, cedendo informações qualitativas bastante úteis. Os resultados dessa análise, além de conferir validade teórica ao modelo proposto nas referências 18, 22 e 23, auxiliaram a interpretação de observações experimentais e levaram à proposição de um modelo simplificado para a verificação da carga de flambagem quando são dadas as amplitudes de imperfeição nos modos dominantes. No capítulo (V) são apresentados esses dois modelos simplificados com energia reduzida.

Finalmente, no capítulo (VI), são apresentadas algumas comparações entre os resultados teóricos obtidos com os modelos simplificados com energia reduzida e resultados experimentais e teóricos disponíveis na literatura, ressaltando-se, no capítulo (VII), o significado que estes métodos poderiam vir a ter no projeto simples, mas seguro, de cascas cilíndricas sob compressão axial.

CAPÍTULO II

APLICAÇÃO DA TEORIA DA ESTABILIDADE ELÁSTICA
 À CASCAS CILÍNDRICAS AXIALMENTE COMPRIMIDAS

II.1 - Critérios de Análise Estática de Estabilidade Baseados
 na Energia Potencial Total

Apresenta-se a seguir a aplicação do critério de energia de estabilidade elástica a um sistema estrutural sob a ação de cargas "quase-estáticas" conservativas associadas a um único parâmetro fundamental de carregamento, λ . Para isto, considera-se inicialmente que a configuração original, de uma estrutura elasticamente deformada, em um estado fundamental de equilíbrio, é descrita por um campo de deslocamentos \underline{u}^F e energia potencial total $V(\underline{u}^F)$. Segundo o critério de Lagrange, este equilíbrio será estável se e somente se, para toda configuração vizinha, definida por deslocamentos $\underline{u} = \underline{u}^F + \underline{v}$,

$$V(\underline{u}^F + \underline{v}) > V(\underline{u}^F), \quad (\text{II.1})$$

sendo \underline{v} um campo incremental de deslocamentos pequeno e cinematicamente admissível.

Para a definição de um estado de equilíbrio estático, de uma estrutura com carregamento fixado, a condição necessária e suficiente é que $V(\underline{u})$ seja estacionária com respeito ao campo de deslocamentos \underline{u} . Essa condição de estacionaridade de energia é dada pela equação variacional:

$$\delta V(\underline{u}; \lambda) = 0, \text{ para todo } \delta \underline{u} \text{ admissível} \quad (\text{II.2})$$

A equação (II.2) é chamada equação de equilíbrio, sendo que um estado de equilíbrio associado é estável se e somente se este ponto estacionário de V for, conforme indica a inequação (II.1), um mínimo relativo e completo. A instabilidade

de ocorre quando tal condição não é satisfeita.

Para valores discretos de λ , a equação (II.2) fornece distintas configurações deformadas, definindo assim caminhos não-lineares de equilíbrio $\underline{u} = f(\lambda)$. A figura (II.1) mostra a projeção de um caminho fundamental de equilíbrio $\delta V(\underline{u}^F(\lambda); \lambda) = 0$ no plano λ - \underline{u} particular e ilustra a condição de estabilidade (II.1) através da representação esquemática do mapeamento do espaço $\lambda - (\underline{u}^F + \underline{v})$ sobre o espaço transformado λ - \underline{v} .

Assumindo que V é uma função analítica na vizinhança de $\underline{u}^F(\lambda)$ e observando que \underline{u}^F varia suavemente com o acréscimo

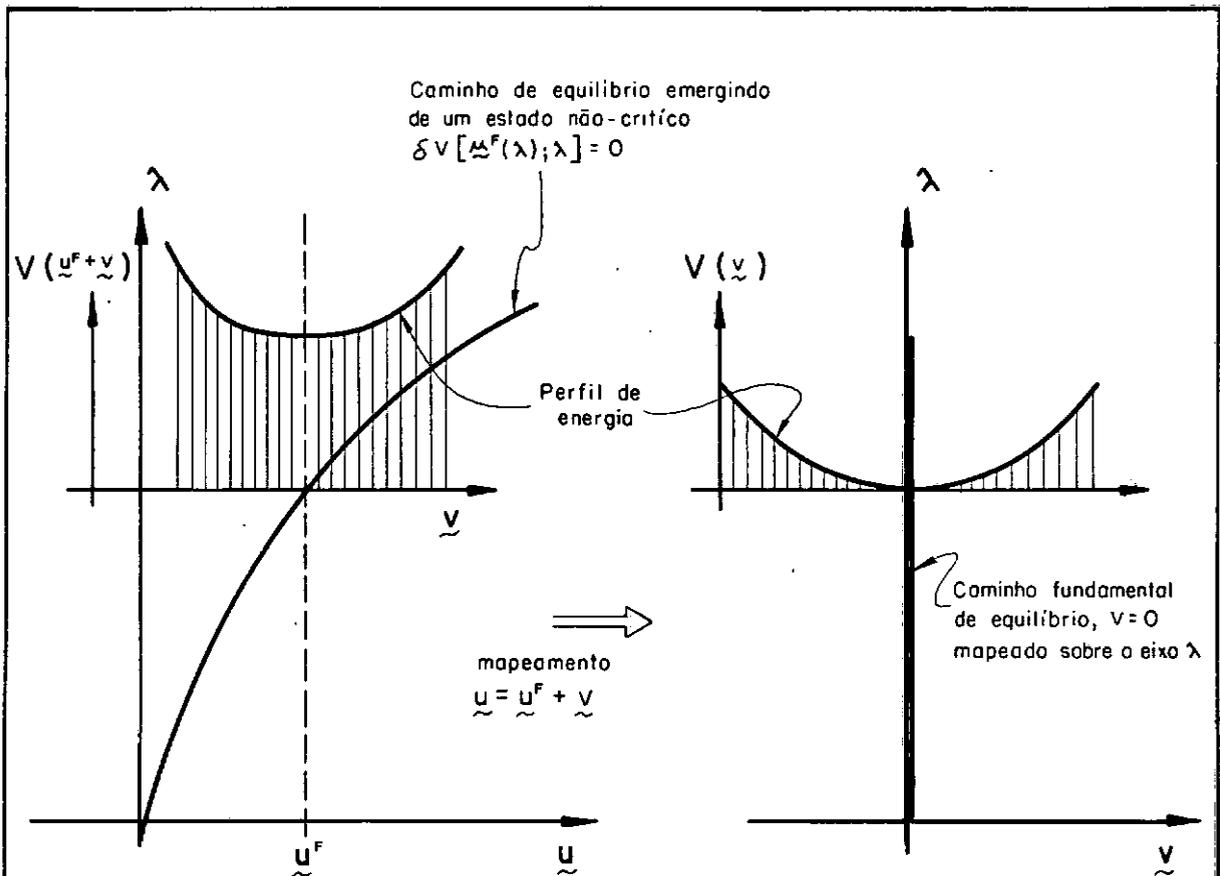


Figura: II.1 - REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DO MAPEAMENTO DO ESPAÇO $\lambda - (\underline{u}^F + \underline{v})$ SOBRE O ESPAÇO TRANSFORMADO $\lambda - \underline{v}$.

A figura ilustra uma projeção λ - \underline{u} particular.

mo de λ , pode-se escrever:

$$V\left[\underline{u}^F(\lambda) + \underline{v}; \lambda\right] = V\left[\underline{u}^F(\lambda); \lambda\right] + \frac{d}{d\underline{v}} \left\{ V\left[\underline{u}^F(\lambda); \lambda\right] \right\} \underline{v} + \quad (II.3)$$

$$+ \frac{1}{2!} \frac{d^2}{d\underline{v}^2} \left\{ V\left[\underline{u}^F(\lambda); \lambda\right] \right\} \underline{v}^2 + \dots$$

Tomando \underline{v} como uma variação $\delta\underline{u}^F$ do campo de deslocamentos original, a variação total de energia potencial $V(\underline{v}; \lambda)$ fica:

$$V(\underline{v}; \lambda) \equiv V\left[\underline{u}^F(\lambda) + \underline{v}; \lambda\right] - V\left[\underline{u}^F(\lambda); \lambda\right] \equiv \quad (II.4)$$

$$\equiv \delta V\left[\underline{v}; \underline{u}^F(\lambda); \lambda\right] + \frac{1}{2!} \delta^2 V\left[\underline{v}; \underline{u}^F(\lambda); \lambda\right] + \dots \equiv$$

$$\equiv \quad V_1 \quad + \quad V_2 \quad + \dots$$

onde V_1, V_2, V_3, \dots contêm somente termos lineares, quadráticos, cúbicos, ... em \underline{v} e suas derivadas e cujos coeficientes podem conter $\underline{u}^F(\lambda)$ como parâmetro.

Como a configuração original é um estado de equilíbrio,

$$V_1 \equiv \delta V(\underline{v}; \underline{u}^F; \lambda) \equiv 0, \text{ para todo } \delta\underline{u} \text{ admissível} \quad (II.5)$$

Observando (II.4), conclui-se que para \underline{v} pequeno em relação à unidade:

$$|V_2| > |V_3| > |V_4| \dots \quad (II.6)$$

Logo, uma condição necessária para a estabilidade no estado fundamental é:

$$V_2 \equiv \frac{1}{2} \delta^2 V(\underline{v}, \underline{u}^F; \lambda) > 0 \quad (II.7)$$

O caso crítico de equilíbrio ocorre quando $V_2 \equiv 0$ para um ou mais campos de deslocamentos linearmente independentes. Esta situação ocorre para determinados pares $(\lambda_c^{(i)}, \underline{v}_c^{(i)})$, soluções do problema de autovalor (II.10) apresentado mais adiante. Os pontos $\underline{u}^F(\lambda_c^{(i)})$, pontos críticos, são as interseções do caminho fundamental, ou pré-crítico, de equilíbrio dado por $\delta V(\underline{u}^F(\lambda); \lambda) = 0$ com outros secundários ou pós-críticos, $\underline{u} = \underline{u}^F(\lambda) + \underline{v}(\lambda)$, definidos pela equação (II.2), que expandida em série de Taylor, fica:

$$\delta V(\underline{u}^F + \underline{v}; \lambda) = \delta \left\{ V(\underline{u}^F; \lambda) + \frac{d}{d\underline{v}} \left[V(\underline{u}^F; \lambda) \right] \underline{v} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2!} \frac{d^2}{d\underline{v}^2} \left[V(\underline{u}^F; \lambda) \right] \underline{v}^2 + \dots \right\} = 0 \quad (\text{II.8})$$

onde por conveniência, passa-se a escrever $\underline{u}^F(\lambda) = \underline{u}^F$ e $\underline{v}(\lambda) = \underline{v}$

Observando que $\delta V(\underline{u}^F; \lambda) = 0$, pois $\underline{u}^F(\lambda)$ é considerado constante, e tomando \underline{v} como uma variação $\bar{\delta}\underline{u}$, pode-se reescrever (II.8) na forma:

$$\delta V(\underline{u}; \lambda) \equiv \bar{\delta} \left[\delta V(\underline{v}; \underline{u}^F; \lambda) + \frac{1}{2!} \delta^2 V(\underline{v}; \underline{u}^F; \lambda) + \dots \right] \equiv \\ \equiv \bar{\delta} \left[\quad v_1 \quad + \quad \quad v_2 \quad + \quad \dots \right] = 0 \quad (\text{II.9})$$

O primeiro termo da equação (II.9) se anula em virtude de (II.5). A condição de estacionaridade no ponto crítico (para o qual $V_2 \equiv 0$) é expressa pela equação variacional tirada de (II.9),

$$\bar{\delta} \left[\delta^2 V(\underline{v}; \underline{u}^F; \lambda) \right] \equiv \bar{\delta} (V_2) = 0 \quad (\text{II.10})$$

para toda variação ($\bar{\delta}$) do campo de deslocamentos \underline{v} .

A equação (II.10) fornece as equações diferenciais linearizadas de equilíbrio crítico. Como $\underline{u}^F = \underline{u}^F(\lambda)$ é, em (II.10), um parâmetro que é solução do problema fundamental $\delta V(\underline{u}^F; \lambda) = 0$, o que resulta da equação (II.10) é um problema de autovalor que fornece os modos críticos $\underline{v} = \underline{v}_C^{(i)}$, e os parâmetros críticos de carregamento, $\lambda = \lambda_C^{(i)}$, para $\underline{u}^F(\lambda_C^{(i)})$. A carga crítica, λ_{cr} , será definida pelo menor dos autovalores $\lambda_C^{(i)}$, não necessitando contudo estar associada a um único modo crítico $\underline{v}_C^{(i)}$; este último caso é, como se verá na seção (II.3.2), característica da casca cilíndrica sob compressão axial. O procedimento acima, expresso pela equação (II.10), para a determinação de pontos críticos de equilíbrio é devido a TREFFTZ²⁴.

Deve-se enfatizar aqui que, como a equação de equilíbrio crítico resulta de uma primeira variação (δ) da forma quadrática, V_2 , do incremento total de energia potencial, este procedimento leva a um problema linearizado de autovalor, o qual nada informa sobre a estabilidade da configuração crítica de equilíbrio. A representação gráfica da solução desse problema de autovalor é feita na figura (II.3) pela horizontal em traço-ponto, a qual tem sido por vezes incorretamente associada a uma condição de estabilidade "neutra" da estrutura, não tendo porém essa situação nenhum significado físico.

Como, no ponto crítico, $V_2 \equiv 0$ para qualquer combinação dos $\underline{v}_C^{(i)}$, uma condição necessária para a estabilidade de um estado de equilíbrio crítico é que (veja as equações (II.4 a II.6)):

$$\frac{1}{3!} \delta^3 V \equiv V_3 \equiv 0, \text{ para uma combinação arbitrária dos } \underline{v}_C^{(i)} \quad (\text{II.11})$$

$$\frac{1}{4!} \delta^4 V \equiv V_4 > 0, \text{ para todas as combinações dos } \underline{v}_C^{(i)} \quad (\text{II.12})$$

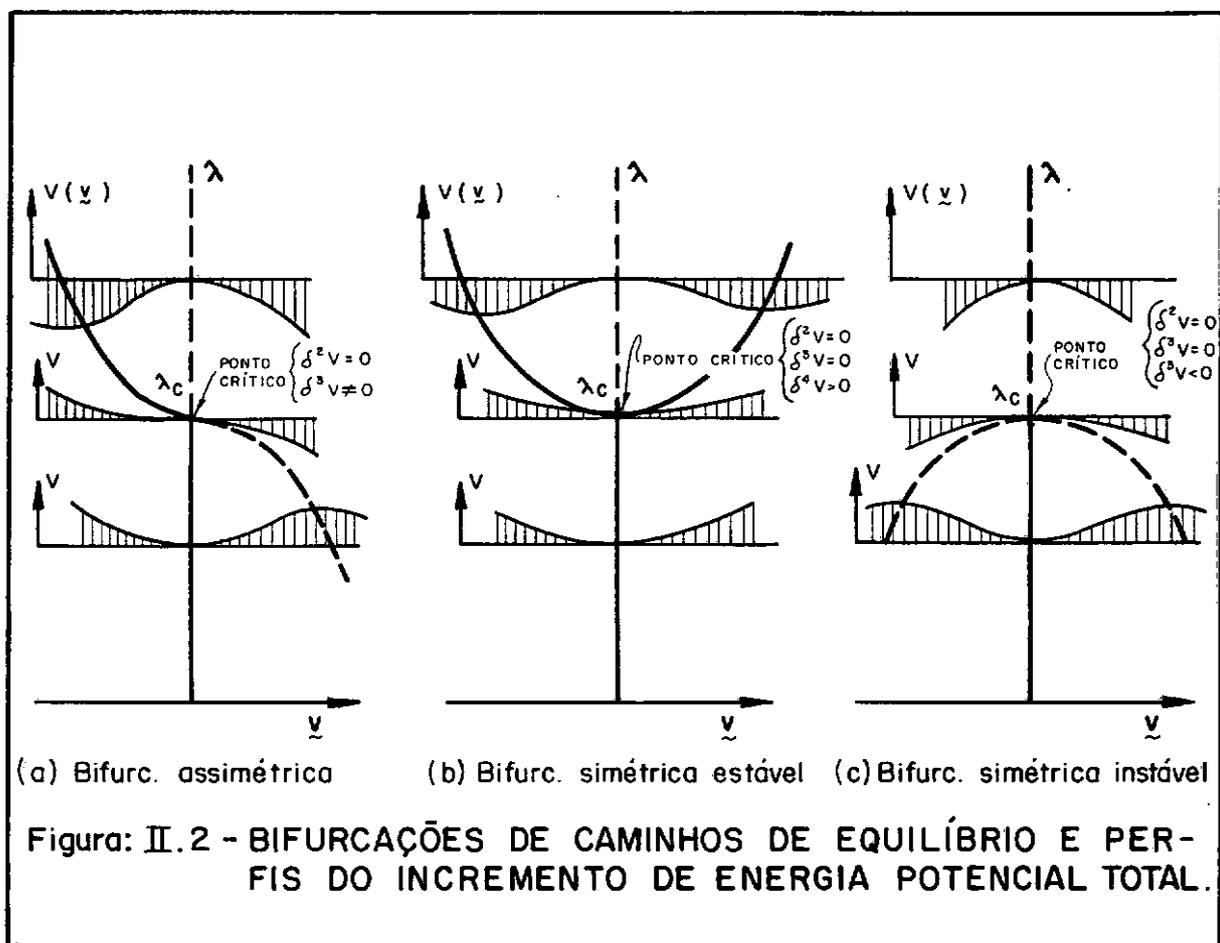
Além disso, a condição de suficiência para a estabilidade de estados críticos e a investigação dos comportamentos crí

ticos e pós-críticos pode ser feita através de uma análise assintótica^{10,25}, a qual permite um tratamento formal e matematicamente elegante dos problemas de estabilidade. Mas devido às peculiaridades do problema aqui tratado e aos objetivos do presente trabalho torna-se convenientemente a aplicação direta do procedimento geral da teoria não-linear da estabilidade elástica. Neste caso, o comportamento estrutural e a estabilidade de estados críticos e pós-críticos serão estudados através da solução direta da equação não-linear de equilíbrio (veja as equações (II.9) e (II.5)):

$$\bar{\delta} \left[\frac{1}{2!} \delta^2 V(\underline{v}; \underline{u}^F; \lambda) + \frac{1}{3!} \delta^3 V(\underline{v}; \underline{u}^F; \lambda) + \right. \\ \left. + \frac{1}{4!} \delta^4 V(\underline{v}; \underline{u}^F; \lambda) \right] = 0 \quad (\text{II.13})$$

A figura (II.2) mostra os três tipos básicos de comportamento encontrados em problemas de estabilidade estrutural, os quais são associados a respostas não-lineares obtidas de (II.13). Conforme visto anteriormente, estas respostas constituem caminhos pós-críticos de equilíbrio que interceptam o caminho fundamental no ponto crítico, o qual é na terminologia matemática chamado de ponto de bifurcação; daí os três tipos de comportamento mostrados na figura (II.2) serem geralmente denominados: bifurcação simétrica estável, simétrica instável e assimétrica.

A figura (II.2) mostra também os perfis de energia potencial total, V , relacionados a distintos níveis de carga λ , os quais indicam com $\delta^2 V \gtrless 0$ a estabilidade ou instabilidade de estados de equilíbrio pós-críticos. A estabilidade dos estados críticos é indicada pelas condições (II.11) e (II.12), ou ainda pela seguinte observação: se para uma variação arbitrária de \underline{v} (isto é positiva ou negativa) o parâmetro de carga λ é sempre incrementado a partir de λ_c , o estado de equilíbrio crítico é estável; caso contrário é instável, incluindo-se aí o estado crítico associado à bifurcação assimétrica.



É sabido, da literatura sobre o assunto^{6,8,10,13}, que a casca cilíndrica sob compressão axial apresenta o fenômeno da bifurcação simétrica instável caracterizado por perda de rigidez durante a resposta pós-crítica não-linear. É sabido também que as cargas experimentais de flambagem são sempre inferiores, e por vezes bastante inferiores, à carga crítica teórica clássica e que essas discrepâncias entre a teoria clássica e experiência têm como fator mais importante a influência de imperfeições geométricas iniciais, as quais são inevitáveis em modelos experimentais ou protótipos.

Assim, torna-se necessária a investigação da resposta não-linear de flambagem dessas cascas imperfeitas.

Considerando então que a estrutura seja geometricamente imperfeita, porém livre de tensões iniciais, isto é, que apresente pequenos desvios iniciais \bar{u} da geometria idealizada

quando descarregada, o campo de deslocamentos associado a uma configuração deformada sob uma carga λ , pode ser descrito por:

$$\underline{u} + \underline{\bar{u}} = \underline{u}^F(\lambda) + \underline{\bar{u}} + \underline{\bar{v}}(\underline{\bar{u}}, \lambda) \quad (\text{II.14})$$

onde, deve-se observar que a configuração deformada da estrutura perfeita, em estado fundamental de equilíbrio, foi tomada como referência.

A energia potencial total pode agora ser escrita como

$$\hat{V} \equiv V(\underline{u}; \lambda) + \bar{V}(\underline{\bar{u}}; \underline{u}; \lambda) \quad (\text{II.15})$$

onde $V(\underline{u}; \lambda)$ é a energia potencial total do sistema estrutural perfeito e a contribuição adicional $\bar{V}(\underline{\bar{u}}; \underline{u}; \lambda)$, devida à existência de imperfeições, obedece as condições:

$$\bar{V}(\underline{0}, \underline{u}; \lambda) = 0, \text{ para todo } \underline{u} \quad (\text{II.16a})$$

$$\bar{V}(\underline{\bar{u}}, \underline{0}; \lambda) = 0, \text{ para todo } \underline{\bar{u}} \quad (\text{II.16b})$$

$$\text{De (II.14) tem-se, } \underline{u} = \underline{u}^F + \underline{\bar{v}}(\underline{\bar{u}}; \lambda), \quad (\text{II.14}') \quad (\text{II.14'})$$

onde pode-se notar que é o campo de deslocamentos incremental que define a influência das imperfeições no comportamento do sistema estrutural.

O princípio de estacionaridade (II.2) é agora dado pela equação variacional:

$$\delta \hat{V}(\underline{\bar{u}}, \underline{u}; \lambda) = 0 \quad (\text{II.17})$$

Utilizando expansões análogas às dadas por (II.8) e (II.9), chega-se à equação não-linear de equilíbrio para cascas imperfeitas,

$$\bar{\delta} \left[\delta \hat{V}(\bar{v}, \bar{u}^F; \lambda) + \frac{1}{2!} \delta^2 \hat{V}(\bar{v}; \bar{u}^F; \lambda) + \frac{1}{3!} \delta^3 \hat{V}(\bar{v}; \bar{u}^F; \lambda) + \dots \right] = 0 \quad (\text{II.18})$$

As respostas não-lineares de flambagem obtidas da equação (II.18) são, para a casca em estudo, da forma indicada na figura (II.3) e caracterizam um problema de ponto limite. O estudo da estabilidade, de estados de equilíbrio ao longo dos caminhos imperfeitos ou de flambagem, é feito observando-se a variação de λ com \bar{v} , em procedimento análogo ao estudo de caminhos pós-críticos.

Em estruturas de comportamento pós-crítico instável, o caminho de equilíbrio da estrutura imperfeita é estável até que λ passa por um máximo em relação a \bar{v} , tornando-se então instável. Este valor máximo de $\lambda = \lambda_f$ define a carga de flambagem.

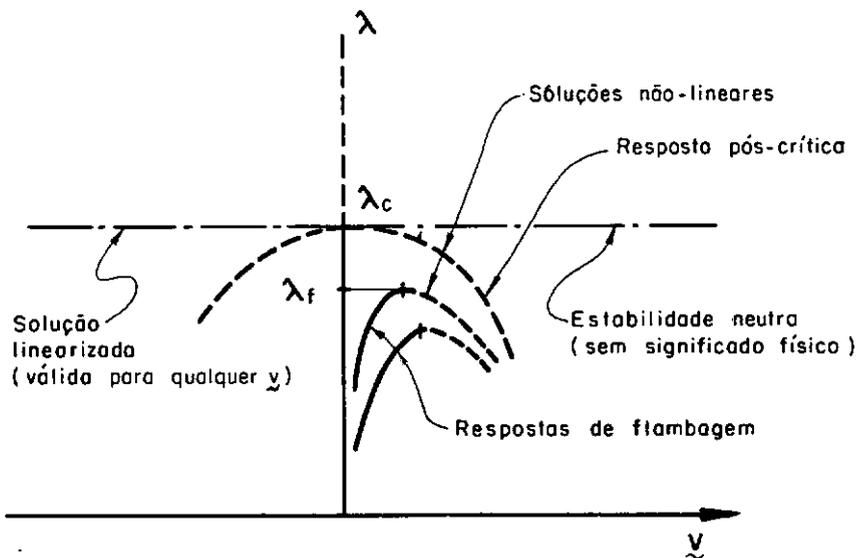


Figura: II.3 - SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO.

II.2 - O Funcional de Energia Potencial Total

II.2.1 - Hipóteses simplificadoras na teoria de cascas esbeltas para o estudo de estabilidade

No que se segue, utilizam-se as hipóteses simplificadoras físicas usuais para uma casca esbelta: O material é considerado homogêneo e isotrópico, e as hipóteses de Kirchhoff são utilizadas. As deformações específicas são sempre pequenas e o estado de tensões é considerado como aproximadamente plano e paralelo à superfície média da casca. A energia de deformação elástica é tomada, em primeira aproximação devida a Love, como a soma das energias de membrana e flexão descritas como funções quadráticas das deformações específicas e mudanças de curvatura medidas com referência à casca indeformada.

Desta forma, e fazendo a direção normal à superfície média positiva quando apontada para o centro, as deformações específicas de um ponto da superfície média são dadas pelas expressões^{2 6}.

$$\varepsilon_x = u_{,x} + \frac{1}{2} (u_{,x}^2 + v_{,x}^2 + w_{,x}^2) \quad (\text{II.19a})$$

$$\varepsilon_y = v_{,y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left[u_{,y}^2 + \left(v_{,y} - \frac{w}{R} \right)^2 + \left(w_{,y} + \frac{v}{R} \right)^2 \right] \quad (\text{II.19b})$$

$$\gamma_{xy} = v_{,x} + u_{,y} + u_{,x} u_{,y} + v_{,x} \left(v_{,y} - \frac{w}{R} \right) + w_{,x} \left(w_{,y} + \frac{v}{R} \right) \quad (\text{II.19c})$$

onde (x, y, z) são as coordenadas locais, (u, v, w) são as componentes de deslocamento correspondentes e R o raio do cilindro. A figura (II.4) mostra a notação e a convenção adotadas para a geometria e direções positivas dos deslocamentos e resultantes dos esforços internos.

Uma simplificação das expressões (II.19) pode ser ainda conseguida considerando-se que:

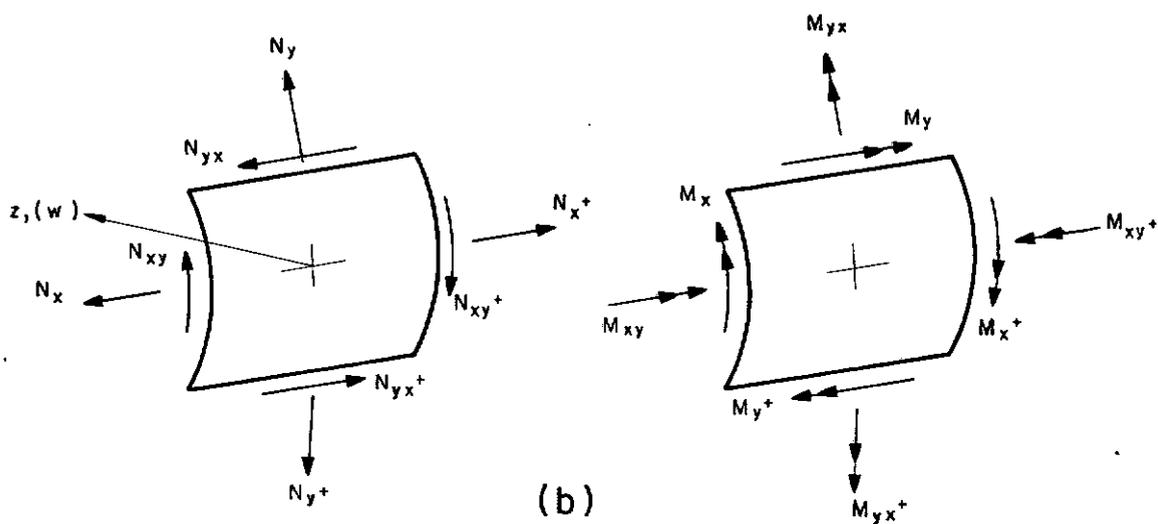
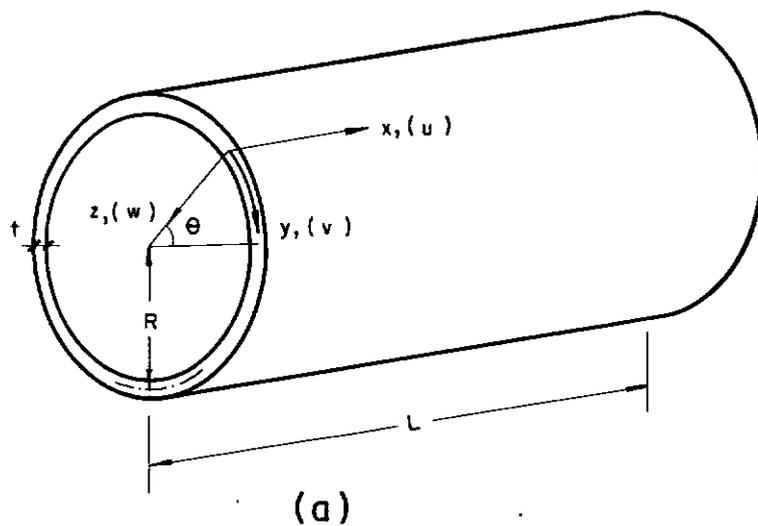


Figura:II.4 - NOTAÇÃO E CONVENÇÃO ADOTADAS PARA A GEOMETRIA E RESULTANTES INTERNAS DE MEMBRANA E DE FLEXÃO.

- a) as deformações são pequenas quando comparadas à unidade (embora os deslocamentos possam ser grandes em relação à espessura da casca);
- b) as componentes tangenciais de deslocamento, u e v , sejam pequenas comparadas ao deslocamento normal, w .

Com isso, as expressões das deformações da superfície média se reduzem a:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= u_{,x} + \frac{1}{2} w^2_{,x} \\ \varepsilon_y &= v_{,y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} w^2_{,y} \\ \gamma_{xy} &= v_{,x} + u_{,y} + w_{,x} w_{,y}\end{aligned}\tag{II.20}$$

e as mudanças de curvatura ficam:

$$\begin{aligned}\chi_x &= w_{,xx} \\ \chi_y &= w_{,yy} \\ \chi_{xy} &= w_{,xy}\end{aligned}\tag{II.21}$$

As expressões (II.20) e (II.21) são aquelas usadas na conhecida Teoria de Donnell - Mushtari - Vlasov para cascas e sbeltas.

II.2.2 - Energia potencial total

A energia potencial total é dada por:

$$V = U + \Omega,\tag{II.22}$$

onde U é a energia interna de deformação elástica e Ω é o potencial da carga externa.

Assumindo o estado plano de tensões paralelo à superfície média, a energia de deformação elástica para a casca cilíndrica é dada por:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} \int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_x \epsilon_x^* + \sigma_y \epsilon_y^* + \sigma_{xy} \gamma_{xy}^*) dx dy dz \quad (\text{II.23})$$

onde, $(\epsilon_x^*, \epsilon_y^*, \gamma_{xy}^*)$ são as deformações de um ponto qualquer da casca esbelta:

$$\begin{aligned} \epsilon_x^* &= \epsilon_x - z\chi_x \\ \epsilon_y^* &= \epsilon_y - z\chi_y \\ \gamma_{xy}^* &= \gamma_{xy} - 2z\chi_{xy} \end{aligned} \quad (\text{II.24})$$

Introduzindo as relações entre tensões e deformações para o estado plano de tensões:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x^* + \nu \epsilon_y^*) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y^* + \nu \epsilon_x^*) \\ \sigma_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}^* \end{aligned} \quad (\text{II.25})$$

e observando que os termos lineares em z se anulam quando (II.23) é integrada, podemos escrever (hipótese de Love):

$$U = U_M + U_F \quad (\text{II.26})$$

onde a energia de deformação de membrana é dada por:

$$\begin{aligned} U_M &= \frac{K}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} (\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + 2\nu \epsilon_x \epsilon_y + \frac{1-\nu}{2} \gamma_{xy}^2) dx dy = \\ &= \frac{K}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} (N_x \epsilon_x + N_y \epsilon_y + N_{xy} \gamma_{xy}) dx dy \end{aligned} \quad (\text{II.27})$$

e a energia de deformação por flexão:

$$U_F = \frac{D}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} \left[\chi_x^2 + \chi_y^2 + 2\nu \chi_{xy} + 2(1-\nu) \chi_{xy}^2 \right] dx dy$$

(II.28)

$$= \frac{D}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} (-M_x \chi_x - M_y \chi_y + 2M_{xy} \chi_{xy}) dx dy$$

sendo $K = \frac{Et}{1-\nu^2}$ (rigidez de membrana)

e $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ (rigidez de flexão)

As resultantes dos esforços internos de membrana são dadas por:

$$N_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dz$$

$$N_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y dz$$

(II.29)

$$N_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xy} dz$$

e as resultantes dos momentos internos por:

$$M_x = - \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz$$

$$M_y = - \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz$$

(II.30)

$$M_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xy} z dz$$

Supondo o cilindro submetido à tensão externa de compressão σ nos bordos $x=0$ e $x=L$,

$$\Omega = - (\sigma t) \int_0^{2\pi R} u \Big|_{x=0}^{x=L} dy = \sigma t \int_0^L \int_0^{2\pi R} u_{,x} dx dy$$

(II.31)

II.2.3 - Energia potencial total na forma incremental:

A Variação Total de Energia

Considerando que o campo de deslocamentos da estrutura deformada em uma configuração vizinha à fundamental é definido por $\underline{u}^F + \underline{v}$, as deformações específicas e as mudanças de curvatura correspondentes ficam:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \epsilon_x^F + \epsilon_x^I & \chi_x &= \chi_x^F + \chi_x^I \\ \epsilon_y &= \epsilon_y^F + \epsilon_y^I & \chi_y &= \chi_y^F + \chi_y^I \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^F + \gamma_{xy}^I & \chi_{xy} &= \chi_{xy}^F + \chi_{xy}^I \end{aligned} \quad (\text{II.32})$$

onde os super-índices F e I referem-se aos campos fundamental e incremental respectivamente.

Assumindo que o estado fundamental da casca comprimida axialmente seja um estado de membrana, o que constitui uma aproximação fisicamente válida¹⁸, tem-se que:

$$\chi_x^F = \chi_y^F = \chi_{xy}^F = 0 \quad (\text{a}) ; \quad m_x^F = m_y^F = m_{xy}^F = 0 \quad (\text{b}) \quad (\text{II.33})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_x^F = u_{,x} = -\frac{\sigma}{E} \\ \epsilon_y^F = -\frac{w}{R} = v \frac{\sigma}{E} \\ \gamma_{xy}^F = 0 \end{array} \right. \quad (\text{a}) ; \quad \left\{ \begin{array}{l} n_x^F = K(\epsilon_x^F + \nu \epsilon_y^F) = -\sigma t \\ n_y^F = K(\epsilon_y^F + \nu \epsilon_x^F) = 0 \\ n_{xy}^F = 0 \end{array} \right. \quad (\text{b}) \quad (\text{II.34})$$

Por conveniência de escrita abandona-se a seguir o super-índice I apresentado em (II.32) e as parcelas incrementais lineares (') e quadráticas (") de deformações específicas e mudanças de curvatura passam a ser identificadas como:

$$\begin{aligned} \epsilon'_x &= u_{,x} & \epsilon''_x &= \frac{1}{2} w^2_{,x} & \chi'_x &= w_{,xx} \\ \epsilon'_y &= v_{,y} - \frac{w}{R} & \epsilon''_y &= \frac{1}{2} w^2_{,y} & \chi'_y &= w_{,yy} \\ \gamma'_{xy} &= v_{,x} - \frac{w}{R} & \gamma''_{xy} &= w_{,x} w_{,y} & \chi'_{xy} &= w_{,xy} \end{aligned} \quad (\text{II.35})$$

e analogamente a (II.34) pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
 n'_x &= K(\epsilon'_x + \nu\epsilon'_y) & n''_x &= K(\epsilon''_x + \nu\epsilon''_y) \\
 n'_y &= K(\epsilon'_y + \nu\epsilon'_x) & n''_y &= K(\epsilon''_y + \nu\epsilon''_x) \\
 n'_{xy} &= K\left(\frac{1-\nu}{2}\right)\gamma'_{xy} & n''_{xy} &= K\left(\frac{1-\nu}{2}\right)\gamma''_{xy}
 \end{aligned} \tag{II.36}$$

e com (II.33),

$$\begin{aligned}
 M'_x &= m'_x = -D(\chi'_x + \nu\chi'_y) \\
 M'_y &= m'_y = -D(\chi'_y + \nu\chi'_x) \\
 M'_{xy} &= m'_{xy} = D(1-\nu)\chi'_{xy}
 \end{aligned} \tag{II.37}$$

Com a transformação $V(\underline{u}; \lambda) \rightarrow V(\underline{u}^F + \underline{v}; \lambda)$, a energia potencial total é dada por:

$$\begin{aligned}
 V(\underline{u}^F + \underline{v}) &= V^F(\underline{u}^F) + V_1(\underline{v}; \underline{u}^F) + V_2(\underline{v}; \underline{u}^F) \\
 &+ V_3(\underline{v}) + V_4(\underline{v})
 \end{aligned} \tag{II.38}$$

onde, $\underline{u}^F = \underline{u}^F(\lambda)$, $\underline{v} = \underline{v}(\lambda)$ e as contribuições para (II.38) são:

$$V^F = \int_0^L \int_0^{2\pi R} \left[\frac{1}{2} n_x^F \epsilon_x^F + \sigma t \epsilon_x^F \right] dx dy \tag{II.39a}$$

$$V_1 = \int_0^L \int_0^{2\pi R} \left[\frac{1}{2} (n'_x \epsilon_x^F + n'_y \epsilon_y^F + n_x^F \epsilon'_x) + \sigma t \epsilon'_x \right] dx dy \tag{II.39b}$$

$$\begin{aligned}
 V_2 &= \int_0^L \int_0^{2\pi R} \frac{1}{2} (n''_x \epsilon_x^F + n''_y \epsilon_y^F + n_x^F \epsilon''_x + n'_x \epsilon'_x + n'_y \epsilon'_y + n'_{xy} \gamma'_{xy} - \\
 &- m'_x \chi'_x - m'_y \chi'_y + 2m'_{xy} \chi'_{xy}) dx dy
 \end{aligned} \tag{II.39c}$$

$$V_3 = \int_0^L \int_0^{2\pi R} \frac{1}{2} (n''_x \varepsilon'_x + n''_y \varepsilon'_y + n''_{xy} \gamma'_{xy} + n'_x \varepsilon''_x + n'_y \varepsilon''_y + n'_{xy} \gamma''_{xy}) dx dy \quad (\text{II.39d})$$

$$V_4 = \int_0^L \int_0^{2\pi R} \frac{1}{2} (n''_x \varepsilon''_x + n''_y \varepsilon''_y + n''_{xy} \gamma''_{xy}) dx dy \quad (\text{II.39e})$$

II.3 - Estado de Equilíbrio Crítico

II.3.1 - Equações de equilíbrio crítico

O ponto de equilíbrio crítico é obtido através da solução do problema de autovalor (II.10), $\bar{\delta}(V_2) = 0$. Substituindo-se (II.34a) e (II.35) em (II.39c) e tomando-se a primeira variação de V_2 em relação aos deslocamentos obtém-se:

$$\delta V_2 = \int_0^L \int_0^{2\pi R} \left[n_x^F w_{,x} \delta w_{,x} + n_x^F \delta u_{,x} + n_y^F (\delta v_{,y} - \frac{\delta w}{R}) + n_{xy}^F (\delta u_{,y} + \delta v_{,x}) - \right. \\ \left. - m_x^F \delta w_{,xx} - m_y^F \delta w_{,yy} + 2m_{xy}^F \delta w_{,xy} \right] dx dy \quad (\text{II.40})$$

Aplicando o teorema da divergência para superfícies, obtém-se as equações de equilíbrio crítico:

$$n'_{x,x} + n'_{xy,y} = 0 \quad (\text{II.41a})$$

$$n'_{y,y} + n'_{xy,x} = 0 \quad (\text{II.41b})$$

$$n_x^F w_{,xx} + \frac{1}{R} n_y^F + m'_{x,xx} + m'_{y,yy} - 2m'_{xy,xy} = 0 \quad (\text{II.41c})$$

e as condições de contorno associadas aos bordos $x=0$ e $x=L$:

$$n'_x = 0 \quad \text{ou} \quad \delta u = 0 \quad (\text{II.42a})$$

$$n'_{xy} = 0 \quad \text{ou} \quad \delta v = 0 \quad (\text{II.42b})$$

$$m'_{x,x} - 2m'_{xy,y} = 0 \quad \text{ou} \quad \delta w = 0 \quad (\text{II.42c})$$

$$m'_x = 0 \quad \text{ou} \quad \delta w_{,x} = 0 \quad (\text{II.42d})$$

Introduzindo a função de tensões de Airy:

$$f'_{,xx} = n'_y, \quad f'_{,yy} = n'_x \quad \text{e} \quad f'_{,xy} = -n'_{xy}; \quad (\text{II.43})$$

as equações (II.41a) e (II.41b) são automaticamente satisfeitas, podendo-se escrever:

$$\begin{aligned} f'_{,yy} &= K(\epsilon'_x + \nu\epsilon'_y) \\ f'_{,xx} &= K(\epsilon'_y + \nu\epsilon'_x) \\ f'_{,xy} &= -K \left(\frac{1-\nu}{2} \right) \gamma'_{xy} \end{aligned} \quad (\text{II.44a})$$

logo:

$$\begin{aligned} \epsilon'_x &= \frac{1}{Et} (f'_{,yy} - \nu f'_{,xx}) \\ \epsilon'_y &= \frac{1}{Et} (f'_{,xx} - \nu f'_{,yy}) \\ \gamma'_{xy} &= - \frac{2(1-\nu)}{Et} f'_{,xy} \end{aligned} \quad (\text{II.44b})$$

Diferenciando-se convenientemente as equações (II.44b) e somando-as obtém-se

$$\epsilon'_{x,yy} + \epsilon'_{y,xx} - \gamma'_{xy,xy} = \frac{1}{Et} (f'_{,xxxx} + 2f'_{,xxyy} + f'_{,yyyy}) = \frac{1}{Et} \nabla^4 f' \quad (\text{II.45})$$

e de forma análoga, a partir das expressões (II.35):

$$\epsilon'_{x,yy} + \epsilon'_{y,xx} - \gamma'_{xy,xy} = - \frac{1}{R} w_{,xx} \quad (\text{II.46})$$

Igualando-se as expressões (II.45) e (II.46), tem-se:

$$\frac{1}{Et} \nabla^4 f' = - \frac{1}{R} w_{,xx} \quad (\text{II.47a})$$

(equação de compatibilidade)

Substituindo-se as expressões (II.35) para as mudanças lineares de curvatura em (II.37) e essas últimas na tercei-

ra equação de equilíbrio (II.41c), chega-se a:

$$D\nabla^4 w = \frac{1}{R} f'_{,xx} + \sigma t w_{,xx} \quad (\text{II.47b})$$

(equação de equilíbrio crítico)

As equações (II.47a) e (II.47b) constituem uma forma desacoplada das equações (II.41)

II.3.2 - Determinação da carga crítica e dos modos críticos.

Buscando uma solução das equações (II.47) na forma:

$$w = w_{i,j} = \xi t \cos Iy \sin Jx \quad (\text{II.48})$$

onde:
$$I = \frac{i}{R} \quad \text{e} \quad J = \frac{\pi}{L} j \quad (\text{II.49})$$

sendo i o número de ondas circunferenciais
e j o número de meia ondas longitudinais,

a equação (II.47a) fornece:

$$f' = \frac{Et^2 J^2}{R(I^2 + J^2)^2} \xi \cos Iy \sin Jx \quad (\text{II.50})$$

A condição de continuidade na direção y dada por:

$$\int_0^{2\pi R} \underline{u}_{,y} dy = 0$$

é satisfeita para i inteiro e as condições de apoio simples:

$$\left. \begin{array}{l} n'_x \equiv f'_{,yy} = 0 \\ w = 0 \\ v = 0 \\ m'_x = 0 \end{array} \right\} \text{em } x = 0, L$$

são satisfeitas por (II.48)

Substituindo-se (II.48) e (II.50) em (II.47b), obtem-se:

$$\begin{aligned} & \frac{Et^4}{12(1-\nu^2)} (I^2 + J^2)^2 \xi \cos Iy \sin Jx = \\ & = - \frac{Et^2 J^4}{R^2 (I^2 + J^2)^2} \xi \cos Iy \sin Jx + \sigma t^2 J^2 \xi \cos Iy \sin Jx \end{aligned} \quad (\text{II.51})$$

Introduzindo-se em (II.51) os parâmetros adimensionais:

$$\alpha^2 = \frac{Rt}{2c} J^2 \quad \text{e} \quad \beta^2 = \frac{Rt}{2c} I^2 \quad (\text{II.52})$$

onde $c = \sqrt{3(1-\nu^2)}$, (II.53)

e fazendo as possíveis simplificações, chega-se a:

$$\sigma = \frac{Et}{2cR} \left[\frac{(\alpha^2 + \beta^2)^2}{\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \right] \quad (\text{II.54})$$

A tensão σ é mínima em relação a α e β quando:

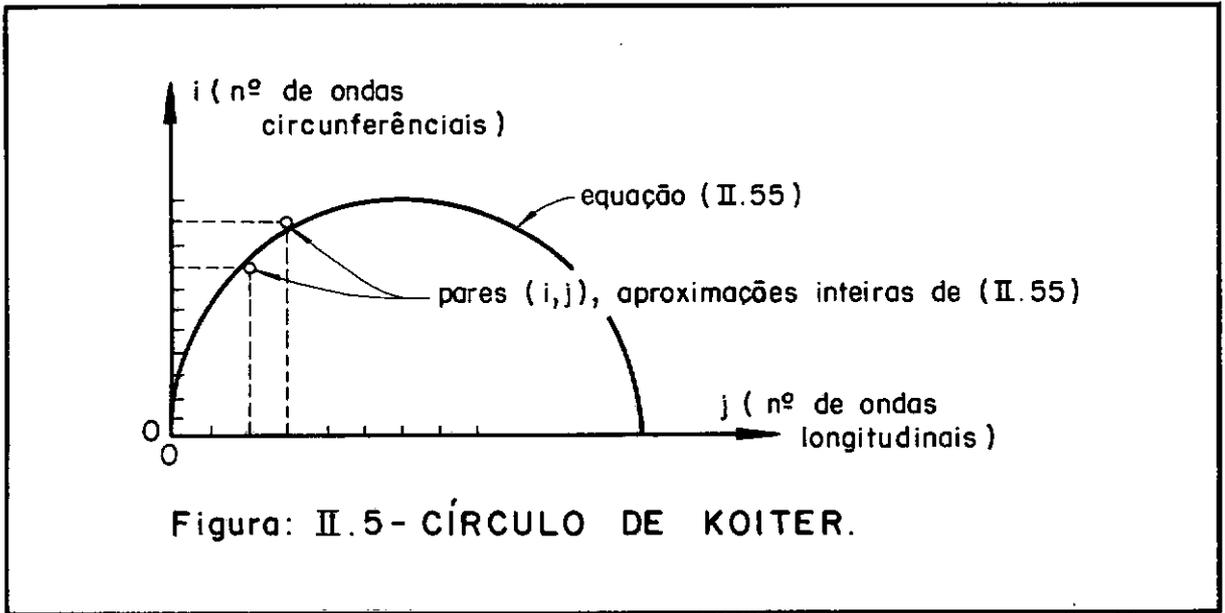
$$\alpha^2 + \beta^2 - \alpha = 0 \quad (\text{II.55})$$

e o valor mínimo de σ (tensão crítica teórica) é:

$$\sigma_{cr} = \frac{Et}{cR} \quad (\text{II.56})$$

Os pares (i, j) , solução de (II.55) determinam uma família de modos críticos associados a σ_{cr} . Esses pares de valores, quando marcados sobre um gráfico ix_j , fornecem o círculo de Koiter^{10, 17}, como mostra a figura (II.5). Deve-se observar aqui que a equação (II.55) fornece uma série de modos assimétricos, $w_{i, j}$, e um modo axissimétrico, $w_{0, j}$. Este modo axissimétrico isola-

$$w_{0, j} = \xi t \sin Jx$$



aparece em algumas publicações⁴, não tendo porém essa deformação elástica axissimétrica significado físico apesar de fornecer a mesma expressão para a carga crítica teórica.

Conforme será visto mais adiante, na seção (III.1), para se obter o comportamento pós-crítico instável, típico das cascas cilíndricas axialmente comprimidas é necessário o acoplamento de um modo axissimétrico (que geralmente não satisfaz (II.55)), $w_{0,2j} = \xi_2 t \cos 2Jx$, com duas vezes o número de ondas longitudinais do modo crítico considerado, $w_{i,j} = \xi_1 t \cos Iy \sin Jx$.

II.4 - Equações Diferenciais Não-Lineares de Equilíbrio para Cascas Imperfeitas.

As imperfeições geométricas são usualmente descritas por desvios normais $\bar{w}(x,y)$, da superfície média idealizada da casca perfeita, e são introduzidas no problema assumindo-se que o deslocamento radial total w_T é dado pela soma dos deslocamentos da casca sob a ação do carregamento e dessas imperfeições \bar{w} :

$$w_T = w + \bar{w} \quad (\text{II.57})$$

As deformações que ocorrem para a casca sob ação da carga serão dadas pela diferença entre aquelas associadas ao deslocamento total w_T menos as que seriam produzidas por supostos deslocamentos \bar{w} somente. Todos os termos lineares em w nas expressões (II.20) e (II.21) para deformações e mudanças de curvatura permanecem assim inalteradas, como por exemplo:

$$\chi_x = w_{T,xx} - \bar{w}_{,xx} = w_{,xx} + \cancel{\bar{w}_{,xx}} - \cancel{\bar{w}_{,xx}}$$

e os termos não-lineares em w ficam, por exemplo, como:

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_x &= \varepsilon_x^F + u_{,x} + \frac{1}{2} w_{T,x}^2 - \frac{1}{2} w^2_{,x} = \\ &= \varepsilon_x^F + u_{,x} + \frac{1}{2} (w^2_{,x} + 2\bar{w}_{,x} w_{,x} + \cancel{w^2_{,x}} - \cancel{\bar{w}^2_{,x}}) . \end{aligned}$$

onde observa-se que apenas os termos lineares em \bar{w} e suas derivadas foram retidos, implicando assim na suposição de pequenas imperfeições iniciais.

As relações deformação-deslocamento e as mudanças de curvatura correspondentes a pontos da superfície média dessas cascas cilíndricas imperfeitas são dadas então por:

$$\hat{\varepsilon}_x = \varepsilon_x^F + u_{,x} + \bar{w}_{,x} w_{,x} + \frac{1}{2} w^2_{,x} \quad (\text{II.58a})$$

$$\hat{\varepsilon}_y = \varepsilon_x^F + v_{,y} - \frac{w}{R} + \bar{w}_{,y} w_{,y} + \frac{1}{2} w^2_{,y} \quad (\text{II.58b})$$

$$\hat{\gamma}_{xy} = v_{,x} + u_{,y} + \bar{w}_{,x} w_{,x} + \bar{w}_{,y} w_{,x} + w_{,x} w_{,y} \quad (\text{II.58c})$$

$$\chi_x = w_{,xx} \quad (\text{II.58d})$$

$$\chi_y = w_{,yy} \quad (\text{II.58e})$$

$$\chi_{xy} = w_{,xy} \quad (\text{II.58f})$$

Observando-se (II.15), a energia potencial total pode, agora, ser escrita como:

$$\begin{aligned}
\hat{V} = & \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} \left[N_x (\epsilon_x^F + u_{,x} + \bar{w}_{,x} w_{,x} + \frac{1}{2} w^2_{,x}) + \right. & (II.59) \\
& + N_y (\epsilon_y^F + v_{,y} - \frac{w}{R} + \bar{w}_{,y} w_{,y} + \frac{1}{2} w^2_{,y}) + \\
& + N_{xy} (v_{,x} + u_{,y} + \bar{w}_{,x} w_{,y} + \bar{w}_{,y} w_{,x} + w_{,x} w_{,y}) - \\
& \left. - m'_x w_{,xx} - m'_y w_{,yy} + 2m'_{xy} w_{,xy} \right] dx dy + \\
& + \sigma t \int_0^L \int_0^{2\pi R} (\epsilon_x^F + u_{,x}) dx dy
\end{aligned}$$

Com \hat{V} dada por (II.59) e observando-se a equação variacional (II.17) ou (II.18), obtem-se, após a aplicação do teorema da divergência para superfícies, as equações não-lineares de equilíbrio:

$$N_{x,x} + N_{xy,y} = 0 \quad (II.60a)$$

$$N_{y,y} + N_{xy,x} = 0 \quad (II.60b)$$

$$\begin{aligned}
D\nabla^4 w = & N_x (w_{,xx} + \bar{w}_{,xx}) + N_y (w_{,yy} + \bar{w}_{,yy} + \frac{1}{R}) + \\
& + 2N_{xy} (w_{,xy} + \bar{w}_{,xy}) & (II.60c)
\end{aligned}$$

e as condições de contorno:

$$N_x = 0 \quad \text{ou} \quad \delta u = 0$$

$$N_{xy} = 0 \quad \text{ou} \quad \delta v = 0 \quad (II.61)$$

$$m'_x = 0 \quad \text{ou} \quad \delta w_{,x} = 0$$

$$N_x (w_{,x} + \bar{w}_{,x}) + N_{xy} (w_{,y} + \bar{w}_{,y}) + \text{ou} \quad \delta w = 0$$

$$+ m'_{x,x} - 2m'_{xy,y} = 0$$

Introduzindo a função de tensões de Airy, $F(x,y)$:

$$F_{,xx} = N_y, \quad F_{,yy} = N_x \quad \text{e} \quad F_{,xy} = -N_{xy}, \quad (\text{II.62})$$

as equações (II.60a) e (II.60b) são automaticamente satisfeitas. Através de procedimento análogo ao utilizado para a obtenção das equações (II.47), chega-se às equações de compatibilidade e de equilíbrio em termos de w e $F(x,y)$. Essas são as equações não-lineares do tipo von Kármán-Donnell para cascas cilíndricas imperfeitas:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Et} \nabla^4 f = & - \frac{1}{R} w_{,xx} - w_{,xx} w_{,yy} - \bar{w}_{,xx} w_{,yy} - \\ & - \bar{w}_{,yy} w_{,xx} + w^2_{,xy} + 2\bar{w}_{,xy} w_{,xy} \end{aligned} \quad (\text{II.63a})$$

(equação de compatibilidade)

$$\begin{aligned} D \nabla^4 w = & F_{,yy} (w_{,xx} + \bar{w}_{,xx}) + F_{,xx} (w_{,yy} + \bar{w}_{,yy} + \frac{1}{R}) - \\ & - 2F_{,xy} (w_{,xy} + \bar{w}_{,xy}) \end{aligned} \quad (\text{II.63b})$$

(equação de equilíbrio)

$$\text{onde:} \quad F = f^F + f \quad \text{e} \quad f^F = - \frac{1}{2} \sigma t y^2 \quad (\text{II.64})$$

Estas equações serão usadas para a análise tanto do comportamento de cascas cilíndricas imperfeitas bem como da resposta pós-crítica de cilindros perfeitos, fazendo-se neste último caso $\bar{w} = 0$.

CAPÍTULO III

DESENVOLVIMENTO ANALÍTICO PARA O ESTUDO
DO COMPORTAMENTO NÃO-LINEAR

III.1 - Interação entre Modos de Deformação

A solução do problema de autovalor (II.10), que caracteriza o estado crítico de equilíbrio fornece, através da solução das equações (II.47) associadas ao problema da casca cilíndrica, uma família de modos críticos na forma de (II.48) tendo número de ondas nas direções axial e circunferencial satisfazendo a equação (II.55). Substituindo-se apenas um desses modos críticos de cada vez nas equações não-lineares (II.63) obtém-se, para cascas perfeitas, respostas pós-críticas estáveis que não reproduzem observações experimentais, as quais revelam um comportamento altamente instável e reduções severas de carga em relação a carga crítica clássica (II.56). Essas reduções das cargas de flambagem são, como é sabido^{10, 19, 20}, devidas principalmente às imperfeições iniciais. Por outro lado, viu-se na seção (II.1) que a sensibilidade a imperfeições está associada a estruturas que tem o comportamento pós-crítico instável, conforme ilustrado nas figuras (II.2) e (II.3).

O fato de que o problema clássico linearizado fornece uma família de modos críticos, associados a uma única carga crítica, indica que a resposta pós-crítica é caracterizada pela interação não-linear entre esses modos. Observações experimentais^{17, 18} têm mostrado a ocorrência do acoplamento entre um número grande de modos de flambagem, na forma dos modos críticos e em outras formas.

Esse fenômeno da interação (ou acoplamento) entre modos de deformação é ilustrado na figura (III.1) tomando-se apenas dois modos (\tilde{v}_1 e \tilde{v}_2) que, da mesma forma que os modos críticos da casca cilíndrica sob carga axial uniforme, produzem indi

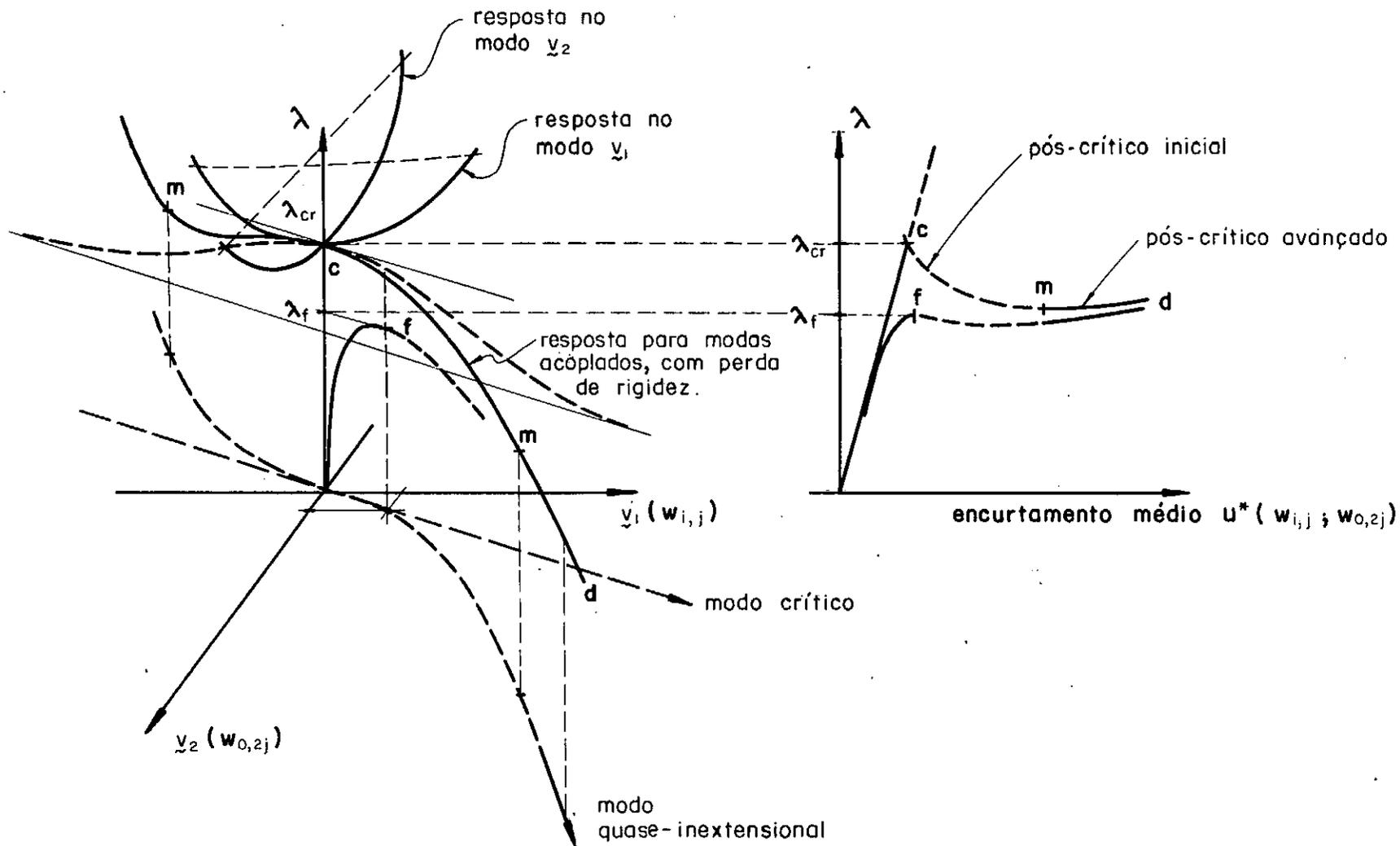


Figura: III.1 - COMPORTAMENTO NÃO-LINEAR E INTERAÇÃO ENTRE MODOS.

vidualmente um comportamento pós-crítico estável e estão associados a uma mesma carga crítica, λ_{cr} . Considerando o acoplamento entre os dois modos (\underline{v}_1 e \underline{v}_2) o resultado é, como ilustrado na figura, uma surpreendente resposta pós-crítica instável. Esse resultado está em conformidade com o critério de estabilidade da seção (II.1). A figura (III.2) mostra uma superfície gerada por incrementos de energia potencial total na vizinhança do ponto crítico, podendo-se notar que V tem variação negativa ao longo do caminho obtido com o acoplamento entre \underline{v}_1 e \underline{v}_2 .

Vê-se, assim que uma boa aproximação teórica do comportamento não-linear pós-crítico dessas cascas cilíndricas depende da escolha adequada dos modos com os quais se fará a análise

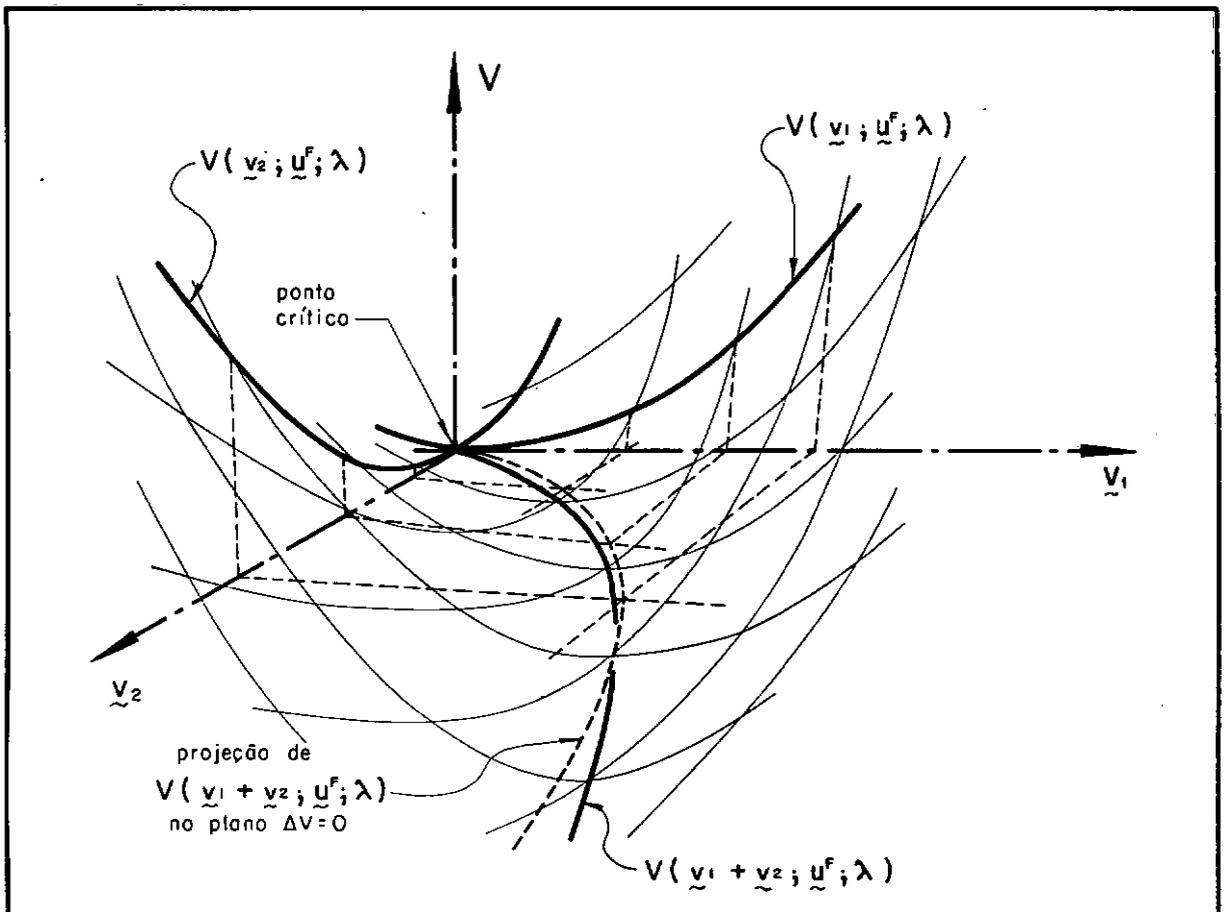


Figura: III.2 - SUPERFÍCIE DO INCREMENTO DE ENERGIA POTENCIAL TOTAL NA VIZINHANÇA DO PONTO CRÍTICO.

lise . Para que o desenvolvimento analítico seja o mais simples possível, torna-se fundamental a definição de um pequeno número de modos incrementais de deformação que sendo dominantes possam, quando acoplados, fornecer a resposta pós-crítica instável esperada.

O mecanismo pelo qual a rigidez, ou energia, é reduzida pela interação não-linear que ocorre durante a resposta pós-crítica inicial dessas cascas tem sido reestudado recentemente^{18,22}. Esses estudos têm levado à definição de alguns modos importantes que devem ser incorporados na análise teórica. Com o intuito de dar um caráter um pouco mais didático ao presente trabalho, apresenta-se a seguir um resumo dos argumentos⁶ usados nessas últimas referências para definir os modos dominantes nesse processo não-linear.

Em uma das primeiras análises teóricas pós-críticas de uma casca cilíndrica sob compressão axial, DONNELL⁶ observou que, com o progresso de uma deformação na forma do modo crítico assimétrico, $w_{i,j}$, haveria uma tendência de acoplamento com componentes axissimétricas de tal forma que a casca pudesse apresentar o comportamento instável, caracterizado por perda de rigidez global.

Considerando novamente a figura (III.1) (onde agora v_1 e v_2 passam a ser representados unicamente por $w_{i,j}$ e $w_{0,2j}$), esse comportamento foi descrito na referência 6 com o acoplamento entre o modo crítico $w_{i,j}$ e um modo axissimétrico, $w_{0,2j}$, com duas vezes o número de ondas longitudinais que o modo assimétrico $w_{i,j}$.

Escrevendo esse modo acoplado por,

$$\begin{aligned} w &= w_{i,j} + w_{0,2j} = \\ &= \xi_1 t \cos Iy \sin Jx + \xi_2 t \cos 2Jx, \end{aligned} \tag{III.1}$$

o mecanismo pelo qual a rigidez (ou energia) é reduzida, durante a interação não-linear pós-crítica pode ser descrito como se segue:

Com o crescimento de deformações no modo crítico $w_{i,j}$, mostrado na figura (III.3), as linhas circunferenciais aa de deslocamentos normais máximos aumentarão de comprimento em relação às linhas (nodais) indeformadas bb; as deformações circunferenciais não-lineares assim desenvolvidas é que produzem as tensões circunferenciais não lineares $n''_{yi,j}$. Para equilibrar essas faixas de tensões de tração $n''_{yi,j}$, desenvolvidas ao longo das linhas aa, a casca teria que sofrer uma contração radial uniforme $w_{0,0}$ de magnitude suficiente para que a compressão uniforme $n'_{y0,0}$ desenvolvida ao longo das linhas bb, tivesse magnitude aproximadamente igual à tensão média de tração (i.e. $n'_{y0,0} \sim 1/2 n''_{yi,j}$) ao longo das linhas aa. O resultado seriam faixas auto-equilibradas de tensões de tração e compressão dadas pela soma ($n''_{yi,j} + n'_{y0,0}$) das figuras (III.3a) e (III.3b). Entretanto, um modo axissimétrico $w_{0,2j}$, tendo a metade do comprimento de onda do modo crítico, poderia se desenvolver de forma a reduzir essas

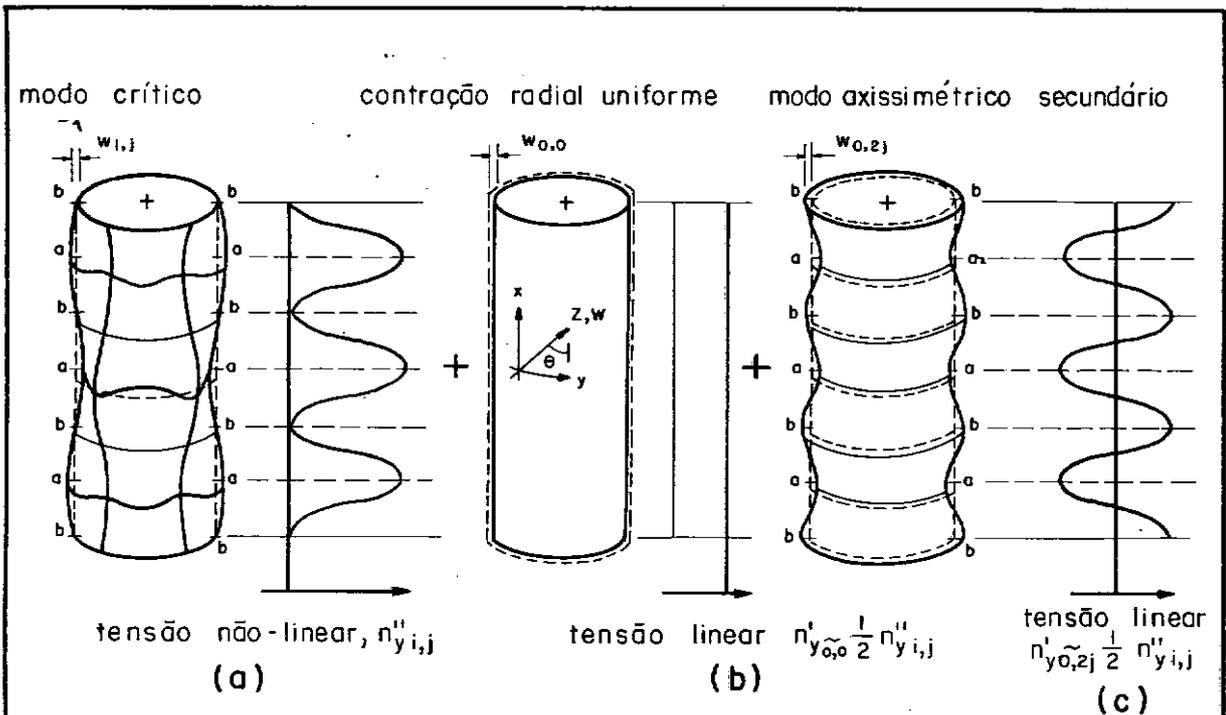


Figura: III.3-EROSÃO DA COMPONENTE NÃO-LINEAR, $n''_{yi,j}$, DA TENSÃO CIRCUNFERENCIAL DE MEMBRANA ASSOCIADA AO MODO CRÍTICO, $w_{i,j}$.

faixas alternadas de tensões circunferenciais. Como mostrado na figura (III.3c), este modo poderia ao mesmo tempo permitir o cumprimento das condições de contorno para w e desenvolver tensões circunferenciais lineares $n'_{y0,2j}$ que contrabalançassem as tensões periódicas $(n''_{yi,j} - n'_{y0,0})$ das figuras (III.3a) e (III.3b). Sendo, como indicado nas figuras (III.1) e (III.2), as requeridas deformações $w_{0,2j}$ inicialmente bastante menores do que aquelas do modo crítico $w_{i,j}$, a redução de $n''_{yi,j}$ seria alcançada para estados pós-críticos iniciais com a adição de muito pouca energia (ou rigidez).

Deve-se notar ainda que a contração radial uniforme $w_{0,0}$, a qual tem sido observada experimentalmente^{18,22}, é naturalmente eliminada em uma análise não-linear teórica, não sendo por isso incluída na expressão (III.1).

Buscando uma melhor aproximação do comportamento pós-crítico, introduzem mais dois modos sugeridos por BATISTA e CROLL^{18,22,23}, com base nos argumentos de Donnell, mas visando agora uma maior redução de rigidez (ou energia): a componente não-linear da tensão circunferencial de membrana gerada pelo modo crítico deve ser aliviada ao máximo pelas componentes lineares geradas por modos secundários que a ele (crítico) se acoplam.

As tensões circunferenciais não-lineares de membrana, associadas a amplitudes crescentes no modo crítico, $w_{i,j}$, são proporcionais a

$$n''_{yi,j} :: \frac{Et}{2(1-\nu^2)} (w^2_{,y} + \nu w^2_{,x}) + \dots \quad (\text{III.2})$$

onde $w_{,x} \equiv \frac{\partial w_{i,j}}{\partial x}$, etc.,

e que juntamente com a expressão de $w_{i,j}$ dada por (II.48) pode ser reescrita na forma

$$n''_{yi,j} :: a + b \cdot \cos 2Jx + c \cdot \cos 2Iy + d \cdot \cos 2Iy \cos 2Jx \quad (\text{III.3})$$

Seguindo os argumentos de DONNELL⁶, torna-se necessário definir modos secundários que desenvolvam tensões circunferenciais lineares, n'_{y} , que tenham forma exatamente oposta àquela de $n''_{yi,j}$. Tais modos secundários tomariam a forma^{18,22}:

$$\begin{aligned} w_s &= w_{0,0} + w_{0,2j} + w_{2i,0} + w_{2i,2j} = \\ &= \xi_0 + \xi_2 t \cos 2Jx + \xi_3 t \cos 2Iy + \xi_4 t \cos 2Iy \cos 2Jx \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

e teriam tensões circunferenciais lineares de membrana proporcionais a

$$n'_{ys} :: \frac{Et}{(1-\nu^2)} \left(-\frac{1}{R} w_s \right) + \dots \quad (\text{III.5})$$

que com (III.4) podem ser reescritas na forma:

$$n'_{ys} :: e + f \cdot \cos 2Jx + g \cdot \cos 2Iy + h \cdot \cos 2Iy \cos 2Jx \quad (\text{III.6})$$

Assim, como $n''_{yi,j}$ e n'_{ys} tem a mesma forma, é possível que com o acoplamento de $w_{i,j}$ com w_s , dado pela expressão:

$$w = w_{i,j} + w_{0,2} + w_{2,0} + w_{2i,2j} = \quad (\text{III.7})$$

$$= \xi_1 t \cos Iy \sin Jx + \xi_2 t \cos 2Jx + \xi_3 t \cos 2Iy + \xi_4 t \cos 2Iy \cos 2Jx.,$$

as tensões circunferenciais de membrana resultantes sejam substancialmente reduzidas, isto é,

$$a + e \rightarrow 0 ; \quad b + f \rightarrow 0 ; \quad c + g \rightarrow 0 ; \quad d + h \rightarrow 0$$

O deslocamento radial incremental dado por (III.7) é aquele com o qual se fará o desenvolvimento da análise não-linear. Deve-se enfatizar aqui que a escolha desses modos combinados, propostos nas referências 18 e 22 contém os dois modos clássicos ($w_{i,j}$ e $w_{0,2j}$) que têm sido necessariamente incluídos em análises não-lineares⁶⁻²¹ para reproduzir o comportamento pós-crítico instável dessas cascas cilíndricas.

III.2 - Equações Algébricas Não-Lineares de Equilíbrio

Representando as imperfeições geométricas \bar{w} na forma dos modos em (III.7) por:

$$\bar{w} = \bar{\xi}_1 t \cos Iy \operatorname{sen} Jx + \bar{\xi}_2 t \cos 2Jx + \bar{\xi}_3 t \cos 2Iy + \bar{\xi}_4 t \cos 2Iy \cos 2Jx \quad (\text{III.8})$$

as soluções aproximadas das equações de von Kármán-Donnell podem ser obtidas substituindo-se (III.7) e (III.8) em (II.63).

As condições de contorno serão omitidas nessas soluções, pois tem sido mostrado na literatura^{19,20} que, pelo menos em situações práticas, a influência dessas condições nas cargas crítica teórica e de flambagem e no comportamento de cascas cilíndricas axialmente comprimidas é desprezível. Por outro lado, as imperfeições iniciais têm influência dominante no comportamento não linear dessas cascas. A referência 20 apresenta resultados de análises de uma casca imperfeita para diferentes condições de apoio, que mostram que as respostas assim obtidas são quase coincidentes com aquela obtida quando esses efeitos são omitidos.

Inicialmente, através da solução exata da equação de compatibilidade (II.63a), chega-se à expressão que fornece a parte incremental f da função de tensões F . Esta solução exata garante que um campo de deslocamentos cinematicamente admissível estará associado à solução da equação de equilíbrio. A parcela f^F , referente ao estado fundamental é obtida pela aplicação direta das relações (II.62).

$$\begin{aligned} f'_{,xx}{}^F &= n^F_y = 0 \\ f'_{,yy}{}^F &= n^F_x = -\sigma t \\ f'_{,xy}{}^F &= -n^F_{xy} = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

Assim, as parcelas que contribuem para a função de tensões, $F = f^F + f$, ficam definidas por:

$$f^F = -\frac{1}{2} \sigma t y^2 \quad (\text{III.10})$$

$$f = f_1 \cos Iy \sin Jx + f_2 \cos 2Jx + f_3 \cos 2Iy + \quad (\text{III.11})$$

$$+ f_4 \cos 2Iy \sin 2Jx + f_5 \cos 3Iy \sin Jx + f_6 \cos Iy \sin 3Jx +$$

$$+ f_7 \cos 4Jx + f_8 \cos 4Iy + f_9 \cos 4Iy \cos 2Jx + f_{10} \cos 2Iy \cos 4Jx.$$

onde os coeficientes f_i são dados por:

$$f_1 = \frac{Et}{(I^2+J^2)^2} \left[8P(\Psi_{12} - \Psi_{13}) + Q\xi_1 \right]$$

$$f_2 = \frac{Et}{16J^4} \left[2P(\Psi_{11} - 16\Psi_{34}) + 4Q\xi_2 \right]$$

$$f_3 = \frac{Et}{16I^4} \left[-2P(\Psi_{11} - 16\Psi_{24}) \right]$$

$$f_4 = \frac{Et}{16(I^2+J^2)^2} \left[-64P\Psi_{23} + 4Q\xi_4 \right]$$

$$f_5 = \frac{Et}{(J^2+9I^2)^2} \left[-8P(\Psi_{13} - 2\Psi_{14}) \right] \quad (\text{III.12})$$

$$f_6 = \frac{Et}{(I^2+9J^2)^2} \left[-8P(\Psi_{12} + 2\Psi_{14}) \right]$$

$$f_7 = \frac{Et}{16J^4} \left[-P\Psi_{44} \right]$$

$$f_8 = \frac{Et}{16I^4} \left[-P\Psi_{44} \right]$$

$$f_9 = \frac{Et}{(J^2+4I^2)^2} \left[-2P\Psi_{34} \right]$$

$$f_{10} = \frac{Et}{(I^2+4J^2)^2} \left[-2P\Psi_{24} \right]$$

$$\text{e onde } P = \frac{I^2 J^2 t^2}{4}, \quad Q = \frac{I^2 t}{R} \quad (\text{III.13})$$

$$\Psi_{ij} = (\xi_i \xi_j + \bar{\xi}_i \xi_j + \bar{\xi}_j \xi_i) \quad (\text{III.14})$$

Substituindo-se (III.7), (III.8), (III.10) e (III.11) em (II,63b), pode-se agora resolver aproximadamente esta equação de equilíbrio. Aplicando-se o método direto de Galerkin, obtem-se o seguinte sistema de equações algébricas não-lineares, cujas incógnitas são as amplitudes dos modos de deformação.

$$\begin{aligned} & C_{11} \xi_1 - \lambda \delta_1 + \frac{1}{2} C_{51} \delta_1 \xi_2 + 2C_6 \left[(\delta_2 - \delta_3) \xi_1 + \Psi_{12} - \Psi_{13} \right] + \\ & + \frac{1}{8} C_7 (\Psi_{11} + 16\Psi_{24}) \delta_1 + \frac{1}{8} C_8 (\Psi_{11} - 16\Psi_{34}) \delta_1 + 8C_9 (\Psi_{12} - \Psi_{13}) (\delta_2 - \delta_3) + \\ & + 8C_{12} (\Psi_{13} - 2\Psi_{14}) (\delta_3 - 2\delta_4) + 8C_{13} (\Psi_{12} + 2\Psi_{14}) (\delta_2 + 2\delta_4) = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.15a})$$

$$\begin{aligned} & C_2 \xi_2 - \lambda \delta_2 + \frac{1}{32} C_5 (\Psi_{11} - 16\Psi_{34}) + \frac{1}{4} C_6 (\delta_1 \xi_1 - 2\delta_3 \xi_4) + \\ & + \frac{1}{8} C_7 (\Psi_{11} + 16\Psi_{24}) \delta_4 + C_9 \left[(\Psi_{12} - \Psi_{13}) \delta_1 + 4\Psi_{23} \delta_3 \right] + \\ & + C_{11} \Psi_{24} \delta_4 + C_{13} (\Psi_{12} + 2\Psi_{14}) \delta_1 = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.15b})$$

$$\begin{aligned} & C_3 \xi_3 - \frac{1}{2} C_5 \delta_4 \xi_2 - \frac{1}{4} C_6 (\delta_1 \xi_1 + 2\delta_2 \xi_4) - \\ & - \frac{1}{8} C_8 (\Psi_{11} - 16\Psi_{34}) \delta_4 + C_9 \left[(\Psi_{13} - \Psi_{12}) \delta_1 + 4\Psi_{23} \delta_2 \right] + \\ & + C_{10} \Psi_{34} \delta_4 + C_{12} (\Psi_{13} - 2\Psi_{14}) \delta_1 = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.15c})$$

$$\begin{aligned} & C_4 \xi_4 - \lambda \delta_4 - C_5 \delta_3 \xi_2 - C_6 \Psi_{23} + \frac{1}{4} C_7 \left[\Psi_{44} \delta_4 + (\Psi_{11} + 16\Psi_{24}) \delta_2 \right] + \\ & + \frac{1}{4} C_8 \left[\Psi_{44} \delta_4 - (\Psi_{11} - 16\Psi_{34}) \delta_3 \right] + 2C_{10} \Psi_{34} \delta_3 + 2C_{11} \Psi_{24} \delta_2 - \\ & - 4C_{12} (\Psi_{13} - 2\Psi_{14}) \delta_1 + 4C_{13} (\Psi_{12} + 2\Psi_{14}) \delta_1 = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.15d})$$

$$\text{onde } \Psi_{ij} = (\xi_i \xi_j + \bar{\xi}_i \xi_j + \bar{\xi}_j \xi_i) , \quad \delta_i = (\xi_i + \bar{\xi}_i) , \quad (\text{III.16})$$

$$\lambda = \frac{cR}{Et} \sigma \quad , \quad c = \sqrt{3(1-\nu^2)}$$

Os coeficientes C_i são dados por:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2} \left[\frac{(\alpha^2 + \beta^2)^2}{\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \right] & C_7 &= c^2 \alpha^2 \\ C_2 &= \frac{1}{2} \left[4\alpha^2 + \frac{1}{4\alpha^2} \right] & C_8 &= c^2 \frac{\beta^4}{\alpha^2} \\ C_3 &= 2 \cdot \frac{\beta^4}{\alpha^2} & C_9 &= c^2 \frac{\alpha^2 \beta^4}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \\ C_4 &= \frac{1}{2} \left[\frac{4(\alpha^2 + \beta^2)^2}{\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{4(\alpha^2 + \beta^2)^2} \right] & C_{10} &= c^2 \frac{\alpha^2 \beta^4}{(\alpha^2 + 4\beta^2)^2} \\ C_5 &= c \frac{\beta^2}{\alpha^2} & C_{11} &= c^2 \frac{\alpha^2 \beta^4}{(4\alpha^2 + \beta^2)^2} \\ C_6 &= c \frac{\alpha^2 \beta^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} & C_{12} &= c^2 \frac{\alpha^2 \beta^4}{(\alpha^2 + 9\beta^2)^2} \\ & & C_{13} &= c^2 \frac{\alpha^2 \beta^4}{(9\alpha^2 + \beta^2)^2} \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

$$\text{onde } \alpha^2 = \frac{Rt}{2c} J^2 \quad \text{e} \quad \beta^2 = \frac{Rt}{2c} I^2 \quad (\text{III.18})$$

As soluções do sistema de equações (III.15) fornece os pontos de equilíbrio definidos por $\underline{\xi}(\lambda, \bar{\xi})$ e conseqüentemente os caminhos de flambagem de cascas imperfeitas. Fornecem também a resposta pós-crítica de cascas perfeitas quando $\bar{\xi} = 0$.

Para uma melhor interpretação física do comportamento não-linear dessas cascas, é conveniente definir-se também os caminhos de equilíbrio através de $\lambda x u^*(\underline{\xi}(\lambda, \bar{\xi}))$, onde u^* é o encurtamento médio não-dimensionalizado em relação ao encurtamento no estado crítico, deduzido a seguir:

$$u_{,x}^F + u_{,x} = -\frac{\sigma}{E} + \varepsilon_x - \frac{1}{2} w_{,x}^2 - \bar{w}_{,x} w_{,x}$$

$$u_{\text{m\u00e9dio}}|_{x=L} = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \int_0^L \left(-\frac{\sigma}{E} + \epsilon_x - \frac{1}{2} w^2_{,x} - \bar{w}_{,x} w_{,x} \right) dx dy$$

$$u_{\text{m\u00e9dio}}|_{x=L} = -\frac{\sigma L}{E} - \frac{J^2 t^2 L}{8} (\psi_{11} + 8\psi_{22} + 4\psi_{44})$$

N\u00e3o dimensionalizando em rela\u00e7\u00e3o ao encurtamento cr\u00edtico,

$$u_{\text{cr}}|_{x=L} = \frac{\sigma_{\text{cr}} L}{E} = \frac{tL}{cR}$$

tem-se:

$$u^* = -\frac{t}{cR} \left[\frac{\sigma}{E} + \frac{J^2 t^2}{8} (\psi_{11} + 8\psi_{22} + 4\psi_{44}) \right] \quad (\text{III.19})$$

III.3 - Express\u00f5es das Parcelas de Energia

Tem sido recentemente mostrado^{18, 22} que uma an\u00e1lise mais completa da influ\u00eancia de imperfei\u00e7\u00f5es geom\u00e9tricas e intera\u00e7\u00e3o entre modos de deforma\u00e7\u00e3o na resposta n\u00e3o-linear da estrutura, pode ser feita atrav\u00e9s da investiga\u00e7\u00e3o de como se distribuem as diversas parcelas que contribuem para a energia potencial total.

No cap\u00edtulo (II), encontram-se os desenvolvimentos e conceitos que permitem escrever:

$$\begin{aligned} \hat{V}(u^F + v) &\equiv \hat{U}_M(u^F + \bar{v}) + U_F(v) + \hat{\Omega}(u^F + \bar{v}) \equiv \\ &\equiv \hat{V}_1 + \hat{V}_2 + \hat{V}_3 + \hat{V}_4 \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

e considerando-se que no estado fundamental da casca perfeita os deslocamentos s\u00e3o linearmente relacionados a λ , pode-se, para o presente problema, reescrever (III.20) na forma:

$$\begin{aligned} v &\equiv v^F + \lambda \hat{V}'_1 + \hat{V}^0_2 + \lambda \hat{V}'_2 + \hat{V}^0_3 + \hat{V}^0_4 \equiv \\ &\equiv v^F + \lambda \hat{V}'_1 + \hat{U}_2 + \lambda \hat{V}'_2 + \hat{U}_3 + \hat{U}_4 \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

que permite uma melhor visualiza\u00e7\u00e3o de como o incremento de energia potencial total se relaciona com o par\u00e2metro de carga e com

as componentes do campo de deslocamentos incremental. Os sub-índices 1,2,3, e 4 indicam termos lineares, quadráticos, cúbicos e quárticos em relação ao campo de deslocamentos incremental, e o super-índice F refere-se ao estado fundamental e portanto indica parcelas constantes para cada nível de carga. Os termos $\lambda \hat{V}_1^x$ e $\lambda \hat{V}_2^y$ são lineares em λ (e respectivamente linear e quadrático em \tilde{v}) enquanto \hat{V}_2^0 , \hat{V}_3^0 e \hat{V}_4^0 independem de λ .

Desmembrando \hat{U}_M , U_F e $\hat{\Omega}$ em suas parcelas tem-se:

$$V^F = U_M^{xF} + \Omega^F \quad (\text{III.22a})$$

$$\hat{V}_1 = \lambda \hat{V}_{M_1}^x + \lambda \hat{V}_{M_2}^y + \hat{\Omega}_1 \quad (\text{III.22b})$$

$$\hat{V}_2 = \hat{U}_{M_2}^x + \hat{U}_{M_2}^y + \hat{U}_{M_2}^{xy} + \hat{U}_F^x + \hat{U}_F^y + \hat{U}_F^{xy} + \lambda \hat{V}_{M_2}^x + \lambda \hat{V}_{M_2}^y \quad (\text{III.22c})$$

$$\hat{V}_3 = \hat{U}_{M_3}^x + \hat{U}_{M_3}^y + \hat{U}_{M_3}^{xy} \quad (\text{III.22d})$$

$$\hat{V}_4 = \hat{U}_{M_4}^x + \hat{U}_{M_4}^y + \hat{U}_{M_4}^{xy} \quad (\text{III.22e})$$

Os termos que possuem os sub-índices M e F são originários da energia de membrana e flexão respectivamente. Os super-índices x,y e xy indicam componentes axiais, componentes circunferenciais e componentes cisalhantes ou de torção.

Lembrando que os termos lineares são representados por (') e os quadráticos por ("), conforme descrito na seção (II.2.3), e observando-se a notação utilizada na seção (II.4) para as deformações específicas (II.58) incluindo imperfeições iniciais, pode-se escrever:

$$U_M^{xF} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} n_x^F \epsilon_x^F dx dy \quad (\text{III.23a})$$

(energia fundamental de membrana)

$$\begin{aligned}
\hat{U}_{M_2}^x &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} n'_x \hat{\epsilon}'_x dx dy \\
\hat{U}_{M_2}^y &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} n'_y \hat{\epsilon}'_y dx dy \\
\hat{U}_{M_2}^{xy} &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} n'_{xy} \hat{\gamma}'_{xy} dx dy \\
\hat{U}_{M_3}^x &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} (n''_x \hat{\epsilon}'_x + n'_x \hat{\epsilon}''_x) dx dy \\
\hat{U}_{M_3}^y &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} (n''_y \hat{\epsilon}'_y + n'_y \hat{\epsilon}''_y) dx dy \\
\hat{U}_{M_3}^{xy} &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} (n''_{xy} \hat{\gamma}'_{xy} + n'_{xy} \hat{\gamma}''_{xy}) dx dy \\
\hat{U}_{M_4}^x &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} n''_x \hat{\epsilon}''_x dx dy \\
\hat{U}_{M_4}^y &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} n''_y \hat{\epsilon}''_y dx dy \\
\hat{U}_{M_4}^{xy} &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} n''_{xy} \hat{\gamma}''_{xy} dx dy
\end{aligned} \tag{III.23b}$$

(segunda, terceira e quarta variações da energia incremental de membrana axial, circunferencial e cisalhante)

$$\begin{aligned}
\lambda \hat{V}_{M_1}^x &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} (n'_x \epsilon_x^F + n_x^F \hat{\epsilon}'_x) dx dy \\
\lambda \hat{V}_{M_1}^y &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} n'_y \epsilon_y^F dx dy \\
\lambda \hat{V}_{M_2}^x &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} (n''_x \epsilon_x^F + n_x^F \hat{\epsilon}''_x) dx dy \\
\lambda \hat{V}_{M_2}^y &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} n''_y \epsilon_y^F dx dy
\end{aligned} \tag{III.23c}$$

(primeira e segunda variações da energia potencial de membrana axial e circunferencial)

$$U_F^X = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} (-m'_x \chi_x) dx dy$$

$$U_F^Y = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} (-m'_y \chi_y) dx dy \quad (\text{III.23d})$$

$$U_F^{XY} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} 2 m'_{xy} \chi_{xy} dx dy$$

(energias de flexão axial, circunferencial e de torção)

$$\Omega^F = - \int_0^L \int_0^{2\pi R} n_x^F u'_{,x} dx dy \quad (\text{III.23e})$$

$$\hat{\Omega}_1 = - \int_0^L \int_0^{2\pi R} n_x^F u_{,x} dx dy$$

(energia potencial externa: fundamental e incremental)

O uso da função de tensões de Airy (II.62) permite a obtenção dos caminhos de equilíbrio em função apenas de w ; porém os deslocamentos u e v e suas derivadas não ficam definidos explicitamente. Então, o cálculo das parcelas lineares das deformações é feito usando-se o seguinte artifício:

$$\hat{\epsilon}'_x = (u_{,x} + \bar{w}_{,x} w'_{,x}) = \hat{\epsilon}_x - \frac{1}{2} w'^2_{,x} \quad , \quad \hat{\epsilon}_x = \frac{1}{Et} (f_{,yy} - \nu f_{,xx})$$

$$\hat{\epsilon}'_y = (v_{,y} - \frac{w}{R} + \bar{w}_{,y} w'_{,y}) = \hat{\epsilon}_y - \frac{1}{2} w'^2_{,y} \quad , \quad \hat{\epsilon}_y = \frac{1}{Et} (f_{,xx} - \nu f_{,yy})$$

$$\hat{\gamma}'_{xy} = (v_{,x} + u_{,y} + \bar{w}_{,x} w'_{,y} + \bar{w}_{,y} w'_{,x}) = \hat{\gamma}_{xy} - w'_{,x} w'_{,y} \quad , \quad \hat{\gamma}_{xy} = - \frac{2(1+\nu)}{Et} f_{,xy}$$

Desta forma, também as parcelas de energia são funções apenas de w e suas derivadas.

Chega-se às expressões das parcelas de energia em função das amplitudes ξ e $\bar{\xi}$ substituindo-se (III.7) e (III.8) nas expressões das deformações e mudanças de curvatura (II.58) e resultantes de esforços internos (II.36) e (II.37) e estas nas expressões (III.23).

As parcelas referentes à rigidez de membrana são da
das agora por:

$$U_M^{xF} = \frac{\pi RL}{Et} (\sigma t)^2$$

$$\lambda \hat{V}_{M_1}^X = - \lambda \hat{V}_{M_2}^X$$

$$\lambda \hat{V}_{M_1}^Y = - \lambda \hat{V}_{M_2}^Y$$

$$\lambda \hat{V}_{M_2}^X = \frac{\sigma}{E} \left[(2 - \nu^2) Z_2^X + \nu Z_2^Y \right]$$

$$\lambda \hat{V}_{M_2}^Y = \frac{\sigma}{E} \left[-\nu^2 Z_2^X - \nu Z_2^Y \right]$$

$$\hat{U}_{M_2}^X = \Delta \hat{U}_M^X - \hat{U}_{M_3}^X - \hat{U}_{M_4}^X$$

(III.24)

$$\hat{U}_{M_2}^Y = \Delta \hat{U}_M^Y - \hat{U}_{M_3}^Y - \hat{U}_{M_4}^Y$$

$$\hat{U}_{M_2}^{XY} = \Delta \hat{U}_M^{XY} - \hat{U}_{M_3}^{XY} - \hat{U}_{M_4}^{XY}$$

$$\hat{U}_{M_3}^X = Z_3^X + \nu Z_3^{XY} - 2 \hat{U}_{M_4}^X$$

$$\hat{U}_{M_3}^Y = Z_3^Y + \nu Z_3^{XY} - 2 \hat{U}_{M_4}^Y$$

$$\hat{U}_{M_3}^{XY} = G - 2 \hat{U}_{M_4}^{XY}$$

$$\hat{U}_{M_4}^X = Z_4^X + \nu Z_4^{XY}$$

$$\hat{U}_{M_4}^Y = Z_4^Y + \nu Z_4^{XY}$$

$$\hat{U}_{M_4}^{XY} = \frac{1 - \nu}{2} Z_4^{XY}$$

onde:

$$\Delta \hat{U}_M^X = \frac{K}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} (\hat{\epsilon}_x^2 + \nu \hat{\epsilon}_x \hat{\epsilon}_y) dx dy \quad (\text{III.25a})$$

$$\Delta \hat{U}_M^Y = \frac{K}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} (\hat{\epsilon}_y^2 + \nu \hat{\epsilon}_x \hat{\epsilon}_y) dx dy \quad (\text{III.25b})$$

sendo:

$$\begin{aligned} & \frac{K}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} \hat{\epsilon}_x^2 dx dy = \\ & = \frac{\pi RL}{4Et} \cdot \frac{1}{(1-\nu^2)} \left[(I^2 - \nu J^2)^2 (f_1^2 + 16f_4^2) + (9I^2 - \nu J^2)^2 f_5^2 + (I^2 - 9\nu J^2)^2 f_6^2 + \right. \\ & \quad + 16(4I^2 - \nu J^2)^2 f_9^2 + 16(I^2 - 4\nu J^2)^2 f_{10}^2 + \\ & \quad \left. + 32I^4 (f_3^2 + 16f_8^2) + 32\nu^2 J^4 (f_3^2 + 16f_7^2) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{K}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} \hat{\epsilon}_y^2 dx dy = \\ & = \frac{\sigma RL}{4Et} \cdot \frac{1}{(1-\nu^2)} \left[(J^2 - \nu I^2)^2 (f_1^2 + 16f_4^2) + (9J^2 - \nu I^2)^2 f_6^2 + (J^2 - 9\nu I^2)^2 f_5^2 + \right. \\ & \quad + 16(4J^2 - \nu I^2)^2 f_{10}^2 + 16(J^2 - 4\nu I^2)^2 f_9^2 + \\ & \quad \left. + 32J^4 (f_2^2 + 16f_7^2) + 32\nu^2 I^4 (f_3^2 + 16f_8^2) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{K}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} \hat{\epsilon}_x \hat{\epsilon}_y dx dy = \\ & = \frac{\sigma RL}{4Et} \cdot \frac{1}{(1-\nu^2)} \left[(I^2 - \nu J^2)(J^2 - \nu I^2)(f_1^2 + 16f_4^2) + (9I^2 - \nu J^2)(J^2 - 9\nu I^2)f_5^2 + \right. \\ & \quad + (I^2 - 9\nu J^2)(9J^2 - \nu I^2)f_6^2 + 16(4I^2 - \nu J^2)(J^2 - 4\nu I^2)f_9^2 + \\ & \quad \left. + 16(I^2 - 4\nu J^2)(4J^2 - \nu I^2)f_{10}^2 - 32\nu I^4 (f_3^2 + 16f_8^2) - 32\nu J^4 (f_3^2 + 16f_7^2) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \hat{U}_M^{XY} & = \frac{K}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} \left(\frac{1-\nu}{2}\right) \hat{\gamma}_{xy}^2 dx dy = \quad (\text{III.25c}) \\ & = \frac{\pi RL}{2Et} (1+\nu) I^2 J^2 \left[f_1^2 + 16f_4^2 + 9f_5^2 + 9f_6^2 + 64f_9^2 + 64f_{10}^2 \right] \end{aligned}$$

$$Z_2^X = \frac{K}{4} \int_0^L \int_0^{2\pi R} w_{,X}^2 dx dy = \frac{\pi RL}{8} KJ^2 t^2 (\xi_1^2 + 8 \xi_2^2 + 4 \xi_4^2)$$

$$\begin{aligned} Z_3^X &= \frac{K}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} \hat{\varepsilon}_X w_{,X}^2 dx dy = \\ &= \frac{\pi RL}{4Et} KJ^2 t^2 \left[(I^2 - \nu J^2) f_1 (2\xi_1 \xi_2 + \xi_1 \xi_4) - (I^2 - \nu J^2) f_4 \xi_1^2 + \right. \\ &\quad + (9I^2 - \nu J^2) f_5 \xi_1 \xi_4 + (I^2 - 9\nu J^2) f_6 (2\xi_1 \xi_2 + \xi_1 \xi_4) + \\ &\quad + 16(I^2 - 4\nu J^2) f_{10} \xi_2 \xi_4 - 2I^2 f_3 (\xi_1 + 16\xi_2 \xi_4) - \\ &\quad \left. - 32I^2 f_8 \xi_4^2 + 2\nu J^2 f_2 \xi_1^2 - 32\nu J^2 f_7 (2\xi_2^2 + \xi_4^2) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_4^X &= \frac{K}{8} \int_0^L \int_0^{2\pi R} w_{,X}^4 dx dy = \\ &= \frac{\pi RL}{4} KJ^4 t^4 \left[\frac{9}{16} \xi_1^4 + 24 \xi_2^4 + 9\xi_4^4 + 12 \xi_1^2 \xi_2^2 + 6 \xi_1^2 \xi_4^2 + \right. \\ &\quad \left. + 72 \xi_2^2 \xi_4^2 + 12 \xi_1^2 \xi_2 \xi_4 \right] \end{aligned}$$

$$Z_2^Y = \frac{K}{4} \int_0^L \int_0^{2\pi R} w_{,Y}^2 dx dy = \frac{\pi RL}{8} KI^2 t^2 (\xi_1^2 + 8 \xi_3^2 + 4 \xi_4^2)$$

$$\begin{aligned} Z_3^Y &= \frac{K}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} \hat{\varepsilon}_Y w_{,Y}^2 dx dy = \\ &= \frac{\pi RL}{4Et} KI^2 t^2 \left[- (J^2 - \nu I^2) f_1 (2\xi_1 \xi_3 - \xi_1 \xi_4) - (J^2 - \nu I^2) f_4 \xi_1^2 - \right. \\ &\quad - (9J^2 - \nu I^2) f_6 \xi_1 \xi_4 + (J^2 - 9\nu I^2) f_5 (2\xi_1 \xi_3 - \xi_1 \xi_4) + \\ &\quad + 16(J^2 - 4\nu I^2) f_9 \xi_3 \xi_4 + 2J^2 f_2 (\xi_1^2 - 16\xi_3 \xi_4) - \\ &\quad \left. - 32J^2 f_7 \xi_4^2 - 2\nu I^2 f_3 \xi_1^2 - 32\nu I^2 f_8 (2\xi_3^2 + \xi_4^2) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_4^Y &= \frac{K}{8} \int_0^L \int_0^{2\pi R} w_{,Y}^4 dx dy = \\ &= \frac{\pi RL}{4} KI^4 t^4 \left[\frac{9}{16} \xi_1^4 + 24 \xi_3^4 + 9 \xi_4^4 + 12 \xi_1^2 \xi_3^2 + 6 \xi_1^2 \xi_4^2 + \right. \\ &\quad \left. + 72 \xi_2^2 \xi_4^2 - 12 \xi_1^2 \xi_3 \xi_4 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_3^{XY} &= \frac{K}{4} \int_0^L \int_0^{2\pi R} (\hat{\epsilon}_x w_{,y}^2 + \hat{\epsilon}_y w_{,x}^2) dx dy = \\
&= \frac{\pi RL}{8Et} Kt^2 \left\{ I^2 \left[-(I^2 - \omega J^2) f_1 (2 \xi_1 \xi_3 - \xi_1 \xi_4) - (I^2 - \omega J^2) f_4 \xi_1^2 + \right. \right. \\
&\quad + (9I^2 - \omega J^2) f_5 (2 \xi_1 \xi_3 - \xi_1 \xi_4) - (I^2 - 9\omega J^2) f_6 \xi_1 \xi_4 + \\
&\quad + 16(4I^2 - \omega J^2) f_9 \xi_3 \xi_4 + 2I^2 f_3 \xi_1^2 + 32I^2 f_8 (2 \xi_3^2 + \xi_4^2) - \\
&\quad \left. - 2\omega J^2 f_2 (\xi_1^2 - 16 \xi_3 \xi_4) + 32 \omega J^2 f_7 \xi_4^2 \right] + \\
&\quad + J^2 \left[(J^2 - \nu I^2) f_1 (2 \xi_1 \xi_3 + \xi_1 \xi_4) - (J^2 - \nu I^2) f_4 \xi_1^2 - \right. \\
&\quad - (9J^2 - \nu I^2) f_6 (2 \xi_1 \xi_3 + \xi_1 \xi_4) + (J^2 - 9\nu I^2) f_5 \xi_1 \xi_4 + \\
&\quad + 16(4J^2 - \nu I^2) f_{10} \xi_2 \xi_4 - 2J^2 f_2 \xi_1^2 + 32J^2 f_7 (2 \xi_2^2 + \xi_4^2) + \\
&\quad \left. + 2\nu I^2 f_3 (\xi_1^2 + 16 \xi_2 \xi_4) + 32\nu I^2 f_8 \xi_4^2 \right] \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_4^{XY} &= \frac{K}{8} \int_0^L \int_0^{2\pi R} w_{,x}^2 w_{,y}^2 dx dy = \\
&= \frac{\pi RL}{4} KI^2 J^2 t^4 \left[\frac{1}{16} \xi_1^4 + \xi_4^4 + 2 \xi_1^2 \xi_2^2 + 2 \xi_1^2 \xi_3^2 + 2 \xi_1^2 \xi_4^2 + \right. \\
&\quad \left. + 16 \xi_2^2 \xi_3^2 + 4 \xi_2^2 \xi_4^2 - 4 \xi_1^2 \xi_2 \xi_3 - 2 \xi_1^2 \xi_2 \xi_4 + 2 \xi_1^2 \xi_3 \xi_4 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G &= \frac{K}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} (1 - \nu) \gamma_{xy} w_{,x} w_{,y} dx dy \\
&= \frac{\pi RL}{2} KI^2 J^2 t (1 - \nu^2) \left[f_1 \xi_1 (\xi_3 + \xi_4 - \xi_2) - f_4 (\xi_1^2 - 16 \xi_2 \xi_3) + 3 f_5 \xi_1 \xi_3 + \right. \\
&\quad \left. + 3 f_6 \xi_1 \xi_2 + 16 f_9 \xi_3 \xi_4 + 16 f_{10} \xi_2 \xi_4 \right]
\end{aligned}$$

As parcelas de energia de flexão ficam:

$$\begin{aligned}
U_F^X &= \frac{\pi RL}{4} DJ^2 t^2 \left[32J^2 \xi_2^2 + (J^2 + \nu I^2) (\xi_1^2 + 16 \xi_4^2) \right] \\
U_F^Y &= \frac{\pi RL}{4} DI^2 t^2 \left[32I^2 \xi_3^2 + (I^2 + \nu J^2) (\xi_1^2 + 16 \xi_4^2) \right] \quad (\text{III.26}) \\
U_F^{XY} &= \frac{\pi RL}{4} DI^2 J^2 t^2 (1 - \nu) (\xi_1^2 + 16 \xi_4^2)
\end{aligned}$$

e as parcelas da energia potencial externa são dadas por:

$$\Omega^F = - \frac{2\pi RL}{Et} (\sigma t)^2 \quad (\text{III.27})$$

$$\hat{\Omega}_1 = - \frac{\pi RL}{4} I^2 t^2 (\Psi_{11} + 8\Psi_{22} + 4\Psi_{44}) (\sigma t)$$

Observa-se que para o cilindro perfeito tem-se $\Psi_{ii} = \xi_i^2$. Nesse caso $V_1 \equiv 0$ (conforme a equação (II.5)) pois a solução trivial $\xi = 0$ traduz o estado fundamental de equilíbrio. Quando se introduzem as imperfeições geométricas, a estacionariedade de $\hat{V}(\underline{u}^F + \underline{v})$ ocorre em estados de equilíbrio definidos por $\xi(\lambda, \bar{\xi}) \neq 0$; por isso $\hat{V}_1(\underline{v}; \underline{u}^F)$ é não nulo, já que os incrementos de energia são calculados a partir do estado fundamental da estrutura perfeita. A figura (III.4) mostra os perfis de energia potencial para os dois casos.

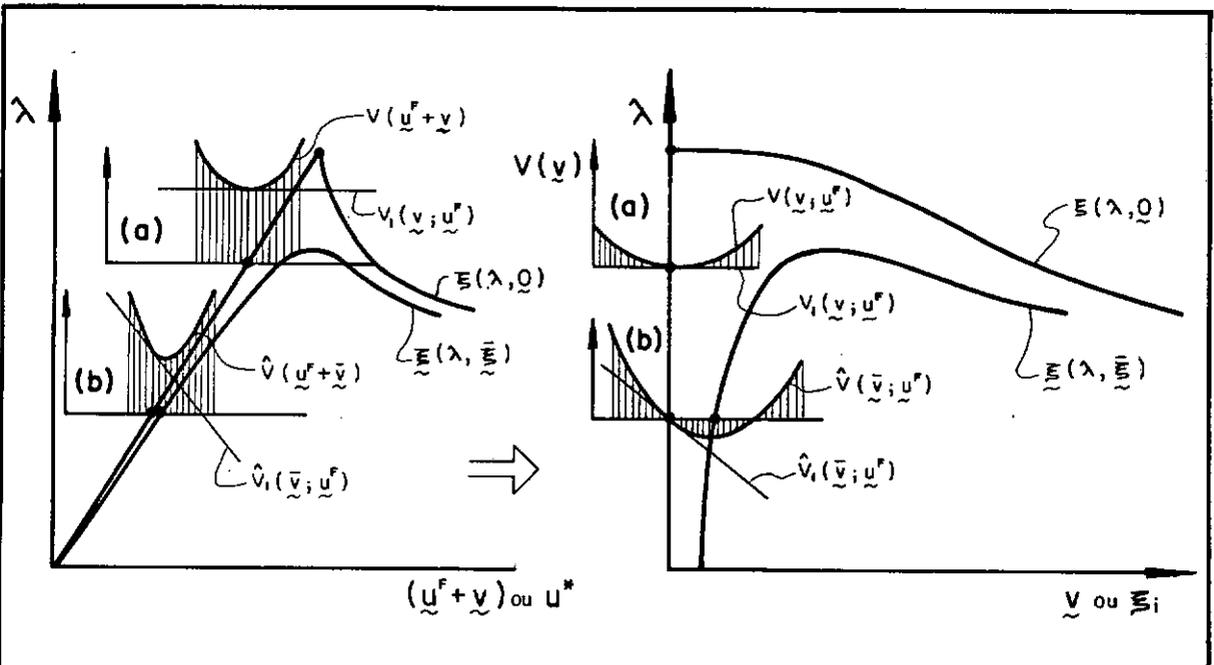


Figura: III.4— PERFIS DE ENERGIA.

- $V_1 \equiv 0$ somente para a casca perfeita
- (a) casca perfeita
- (b) casca imperfeita

CAPÍTULO IV

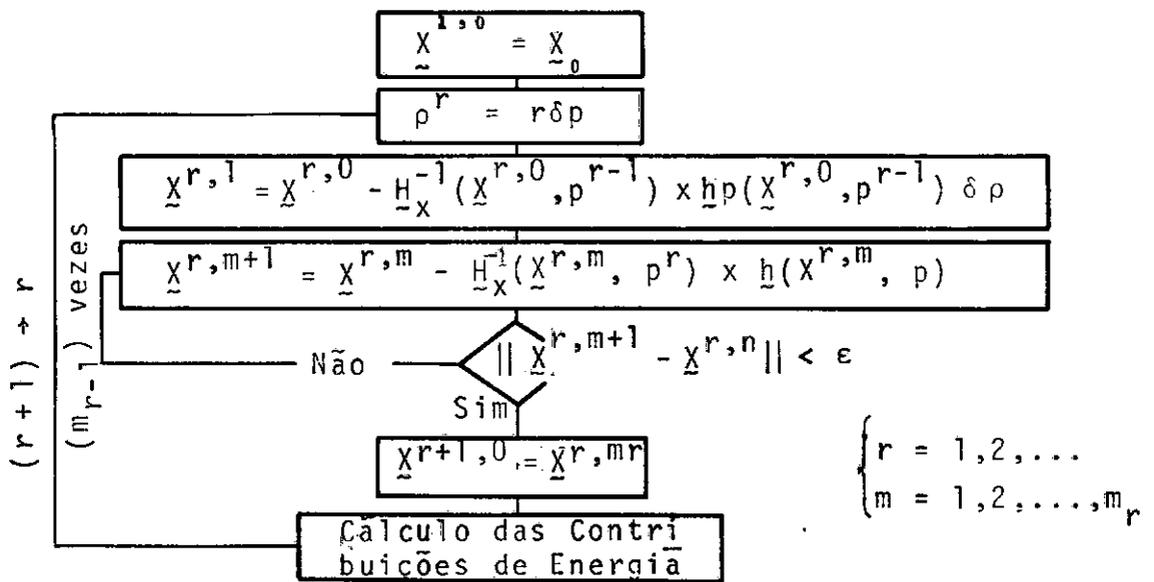
RESULTADOS TEÓRICOS

IV.1 - Procedimento Numérico de Cálculo

Os resultados teóricos apresentados nas próximas seções foram obtidos com o auxílio do computador Burroughs 6700 da UFRJ. Um programa foi elaborado para fornecer os caminhos não-lineares de equilíbrio e a distribuição das contribuições de energia em estados de deformação ao longo desses caminhos.

Para cada caso distinto de geometria e/ou amplitudes de modos de imperfeição da casca, soluções do sistema de equações não lineares (III.15) foram obtidas numericamente através de um método incremental-iterativo. Utilizou-se o algoritmo descrito na figura (IV.1) que a cada incremento da variável de controle aproxima a solução com interações do tipo Newton-Raphson.

A figura (IV.2) ilustra a estratégia de solução empregada, visando maior eficiência no processo numérico. No caso de cascas imperfeitas, inicialmente o parâmetro de controle é λ . A cada incremento de λ , obtém-se, após iterações, a solução $\xi(\lambda, \bar{\xi})$ e calcula-se as parcelas de energia e também σ e u^* , cujas expressões são dadas nas seções anteriores. Este procedimento é feito até que $\partial\lambda/\partial\xi_1 \rightarrow 0$, ou seja $\lambda \rightarrow \lambda_f$, onde o caminho de equilíbrio passa por um máximo em relação a ξ . A seguir, o parâmetro de controle passa a ser ξ_1 , amplitude de modo dominante. Efetuando-se convenientemente a troca de atribuições entre λ e ξ_1 , a mesma rotina de cálculo pode ser utilizada. Quando se analisa o cilindro perfeito, tem-se que a solução é a trivial até que $\lambda = \lambda_{cr}$; portanto inicia-se a análise fazendo $\lambda = 1$ e utilizando, diretamente, ξ_1 como parâmetro de controle, obtendo-se assim o caminho pós-crítico $\lambda(\xi_1; \bar{\xi}) = \lambda(\xi_1; 0)$.



onde: $\underline{h}(\underline{X}, p) = 0$ é o sistema de equações algébricas não lineares (vetor das equações)

\underline{X} é o vetor de incógnitas

p é o parâmetro de controle (λ ou ξ_1)

$\underline{X}_0 = \underline{h}(\underline{X}, 0)$ é a posição indeformada.

$$H_X(i, j) = \frac{\partial h(i)}{\partial x(j)} \quad \text{e} \quad h_p(i) = \frac{\partial h(i)}{\partial p}$$

Figura: IV.1 - ALGORÍTMO DE SOLUÇÃO.

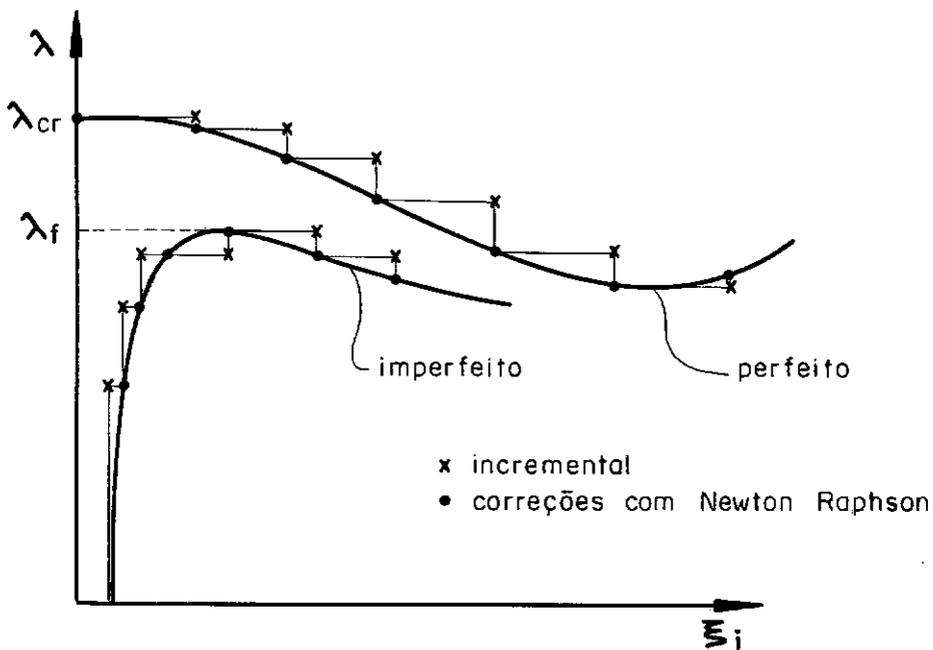


Figura: IV.2 - ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO.

IV.2 - A Influência da Interação entre Modos e Imperfeições Geométricas

O estudo da influência da interação não-linear entre modos de deformação e amplitudes de imperfeição crescentes nesses modos sobre as respostas pós-crítica e de flambagem é feito adotando-se a combinação de modos definida na seção (III.1), da pela expressão (III.7):

$$w = w_{i,j} + w_{0,2j} + w_{2i,0} + w_{2i,2j} =$$

$$= \xi_1 t \cos Iy \cos Jx + \xi_2 t \cos 2Jx + \xi_3 t \cos 2Iy + \xi_4 t \cos 2Iy \cos 2Jx$$

$$\text{onde } I = \frac{1}{R} j \quad \text{e} \quad J = \frac{\pi}{L} i$$

para descrever o deslocamento radial incremental e a expressão (III.8):

$$\bar{w} = \bar{w}_{i,j} + \bar{w}_{0,2j} + \bar{w}_{2i,0} + \bar{w}_{2i,2j} =$$

$$= \bar{\xi}_1 t \cos Iy \cos Jx + \bar{\xi}_2 t \cos 2Jx + \bar{\xi}_3 t \cos 2Iy + \bar{\xi}_4 t \cos 2Iy \cos 2Jx,$$

na mesma forma de (III.7), definindo as imperfeições geométricas.

Esse estudo é feito, inicialmente, para uma casca com geometria fixada, correspondente a modelos experimentais¹⁷ que permitiram se observar, pela primeira vez, que: na iminência da flambagem, o processo não linear é dominado por modos de ondas longas na direção axial, sendo o mais importante aquele que contém uma única meia onda longitudinal. Um programa experimental recentemente conduzido¹⁸, veio a confirmar estas observações através de testes de uma série de modelos com geometrias distintas. É importante esclarecer aqui que, nessas experiências mais recentes^{17,18} a observação do comportamento na iminência de flambagem foi possibilitada pela utilização de transdutores de deslocamento de grande sensibilidade para mapear a superfície deformada a cada nível de carga. Na grande maioria das experiências realizadas no passado foi somente observada a configuração deformada em estágios avançados pós-flambagem, conheci-

da na literatura clássica como "forma de diamante". Esta última configuração deformada, caracterizada por modos de ondas curtas longitudinais, foi adotada como representativa da deformação na flambagem em todas as análises pós-críticas anteriores⁶⁻¹⁵ sendo, por isso, seus resultados inadequados para a interpretação do comportamento de flambagem de cascas imperfeitas.

Nas seções (IV.2.1) e (IV.2.2) a seguir, são adotados então modos de ondas longas longitudinais para as análises das respostas não lineares e das distribuições de energia para uma casca com geometria fixada. Mais adiante, na seção (IV.3), será mostrado que o comportamento dessa casca é típico de outras cascas cilíndricas com diferentes geometrias.

Os primeiros resultados, apresentados nas figuras (IV.3) a (IV.11), referem-se a uma casca com a geometria definida por $R/t = 1000$ e $L/R = 1$. O modo assimétrico, $w_{i,j}$, usado na análise é descrito pelo par de ondas $(i,j) \equiv (13, 1)$ que, para esta geometria, satisfaz a equação (II.55); este modo assimétrico crítico foi observado experimentalmente¹⁷ dominar o processo de flambagem de cascas com esses mesmos valores nominais dos parâmetros geométricos R/t e L/R . Nessas figuras são apresentados resultados para os seguintes casos:

Curvas 1: Cilindro perfeito, considerando-se que o deslocamento incremental é dado apenas pelo modo crítico $w_{i,j}$

Curvas 2: Cilindro perfeito, considerando-se o acoplamento dos 4 modos dados por (III.7).

Curvas 3: Cilindro imperfeito, 4 modos combinados.

$$\bar{\xi}_1 = 0,05 \quad , \quad \bar{\xi}_2 = -0,05 \quad , \quad \bar{\xi}_3 = \bar{\xi}_4 = 0$$

Curvas 4: Cilindro imperfeito, 4 modos combinados.

$$\bar{\xi}_1 = 0,05 \quad , \quad \bar{\xi}_2 = -0,5 \quad , \quad \bar{\xi}_3 = \bar{\xi}_4 = 0$$

(este caso também foi analisado na referência 17, onde foram considerados apenas $w_{i,j}$ e $w_{0,2j}$)

Curvas 5: Cilindro imperfeito, 4 modos combinados.

$$\bar{\xi}_1 = 0,5 \quad , \quad \bar{\xi}_2 = -0,5 \quad , \quad \bar{\xi}_3 = \bar{\xi}_4 = 0$$

Curvas 6: Cilindro imperfeito, 4 modos combinados.

$$\bar{\xi}_1 = 0,5 \quad , \quad \bar{\xi}_2 = -1,0 \quad , \quad \bar{\xi}_3 = \bar{\xi}_4 = 0$$

Curvas 7: Cilindro imperfeito, 4 modos combinados.

$$\bar{\xi}_1 = 0,1 \quad , \quad \bar{\xi}_2 = -0,1 \quad , \quad \bar{\xi}_3 = \bar{\xi}_4 = 0$$

Curvas 8: Cilindro imperfeito, 4 modos combinados.

$$\bar{\xi}_1 = 0,1 \quad , \quad \bar{\xi}_2 = -0,1 \quad , \quad \bar{\xi}_3 = 0,1 \quad , \quad \bar{\xi}_4 = 0$$

Curvas 9: Cilindro imperfeito, 4 modos combinados.

$$\bar{\xi}_1 = 0,1 \quad , \quad \bar{\xi}_2 = -0,1 \quad , \quad \bar{\xi}_3 = 0,2 \quad , \quad \bar{\xi}_4 = 0$$

Curvas 10: Cilindro imperfeito, 4 modos combinados.

$$\bar{\xi}_1 = 1,0 \quad , \quad \bar{\xi}_2 = \bar{\xi}_3 = \bar{\xi}_4 = 0$$

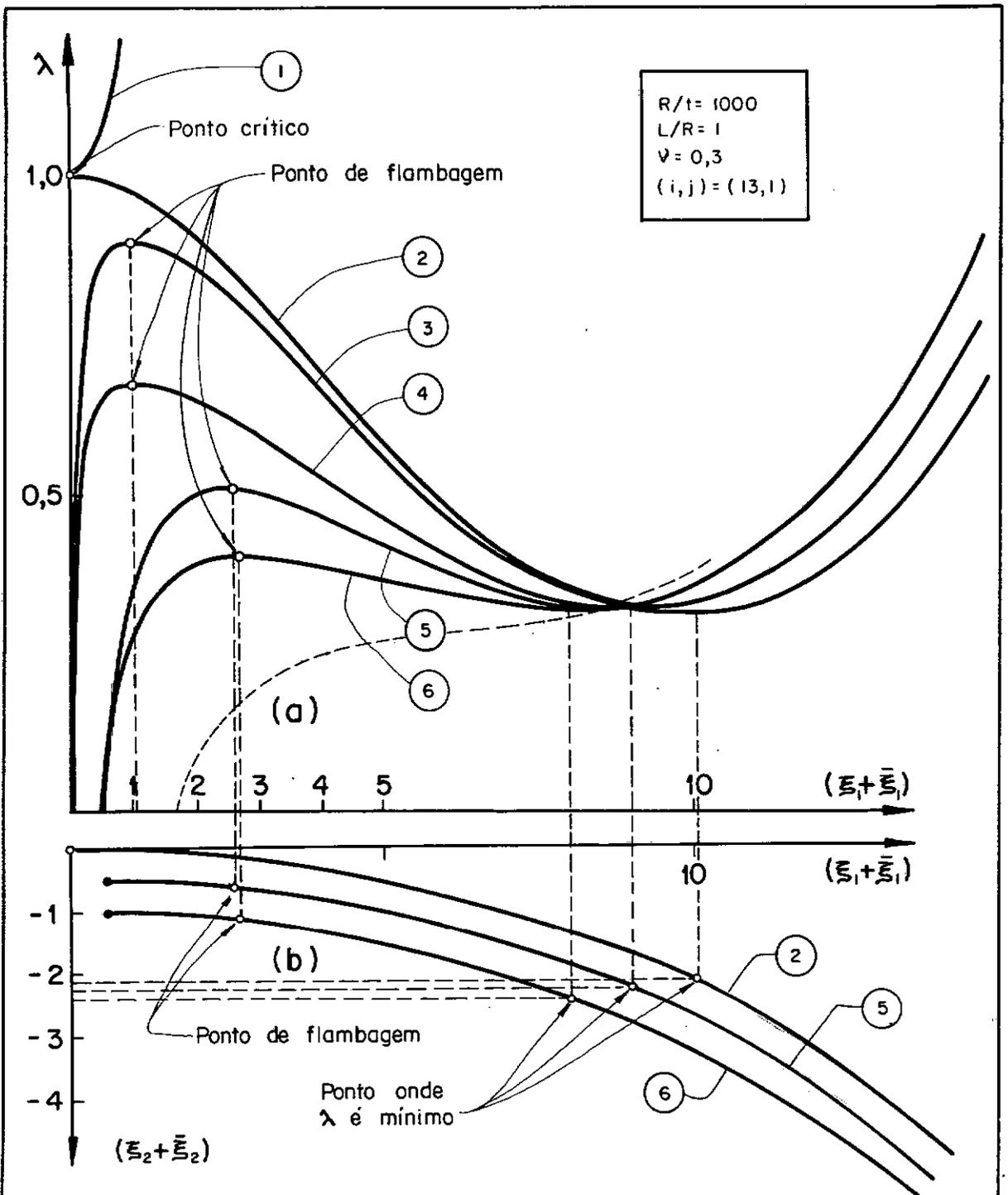
IV.2.1 - Análise da resposta não-linear

As figuras (IV.3), (IV.4) e (IV.5) mostram a influência da interação entre os modos de deformação e das imperfeições geométricas nas respostas pós-crítica de cascas perfeitas e de flambagem de cascas imperfeitas.

A figura (IV.3) mostra projeções dos caminhos de equilíbrio sobre o plano $\lambda \times u^*(\bar{\xi}_1; \bar{\xi}_2; \lambda)$ onde u^* , dado por (III.19), representa o encurtamento médio não-dimensionalizado em relação ao encurtamento no ponto crítico.

Nas figuras (IV.4a), (IV.4b) são mostradas as projeções dos caminhos de equilíbrio nos planos $\lambda \times (\xi_1 + \bar{\xi}_1)$ e $(\xi_1 + \bar{\xi}_1) \times (\xi_2 + \bar{\xi}_2)$ respectivamente. Nos estados vizinhos à carga de flambagem, $|\xi_1| > |\xi_2| > |\xi_3| > |\xi_4|$, sendo portanto o processo de flambagem significativamente dominado pelo modo $w_{i,j}$; a medida ξ_1 é conseqüentemente representativa da configuração deformada de flambagem e será utilizada mais adiante para avaliar as variações de energia com acréscimos de imperfeições.

Observa-se nas figuras (IV.3) e (IV.4a) que a adoção



Caso 1 : 1 modo assimétrico, $\bar{\xi}_1 = 0$

Caso 2 : 4 modos combinados, $\bar{\xi}_1 = \bar{\xi}_2 = \bar{\xi}_3 = \bar{\xi}_4 = 0$

Caso 3 : 4 modos combinados, $\bar{\xi}_1 = 0,05, \bar{\xi}_2 = -0,05, \bar{\xi}_3 = \bar{\xi}_4 = 0$

Caso 4 : 4 modos combinados, $\bar{\xi}_1 = 0,05, \bar{\xi}_2 = -0,5, \bar{\xi}_3 = \bar{\xi}_4 = 0$

Caso 5 : 4 modos combinados, $\bar{\xi}_1 = 0,5, \bar{\xi}_2 = -0,5, \bar{\xi}_3 = \bar{\xi}_4 = 0$

Caso 6 : 4 modos combinados, $\bar{\xi}_1 = 0,5, \bar{\xi}_2 = -1,0, \bar{\xi}_3 = \bar{\xi}_4 = 0$

Figura:IV.4 - CAMINHOS DE EQUILÍBRIO.

$$w = w_{ij} + w_{o,2j} + w_{2i,0} + w_{2i,2j}$$

(a) - projeção sobre o plano $\lambda - (\xi_1 + \bar{\xi}_1) / t$

(b) - projeção sobre o plano $(\xi_1 + \bar{\xi}_1) - (\xi_2 + \bar{\xi}_2) / t$

um valor aproximadamente igual ao dobro da espessura da casca. Para grandes imperfeições, a casca se deforma continuamente, como ilustra a curva tracejada nas figuras (IV.3) e (IV.4a), sem apresentar o fenômeno da flambagem.

Através da figura (IV.5) pode-se observar o efeito dos modos de imperfeição $\bar{w}_{2i,0}$ e $\bar{w}_{2i,2j}$ na variação da rigidez global da estrutura (variação de λ_f) e compará-lo com a influência dos modos $\bar{w}_{i,j}$ e $\bar{w}_{0,2j}$. Nota-se que atribuindo para as amplitudes de imperfeição $\bar{\xi}_3$ e $\bar{\xi}_4$ valores iguais ou maiores que aqueles

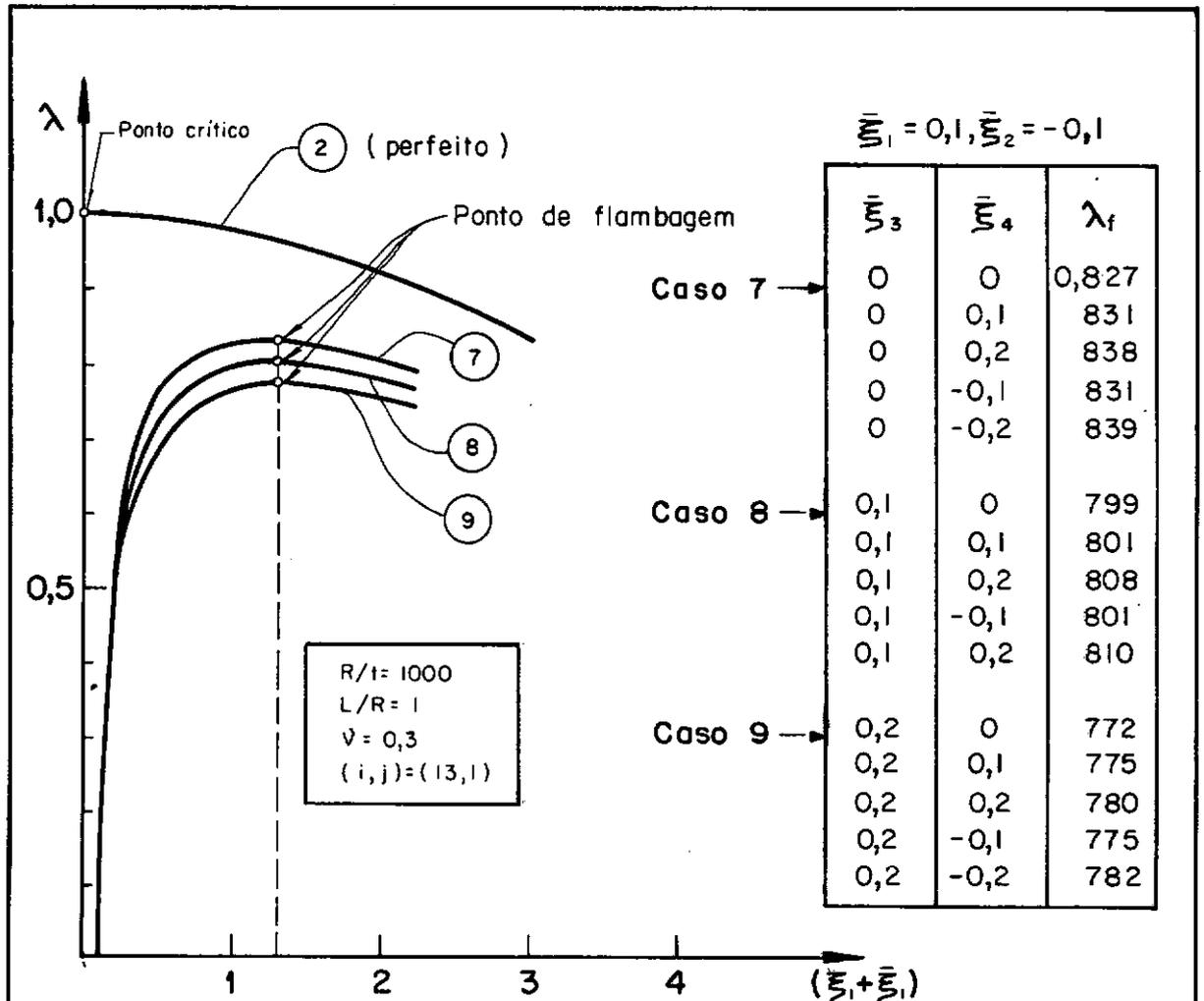


Figura:IV.5 - CAMINHOS DE EQUILÍBRIO.

- Influência de imperfeições nos modos $(2j,0)$ e $(2j,2i)$.

- $w = w_{i,j} + w_{0,2j} + w_{2i,0} + w_{2i,2j}$

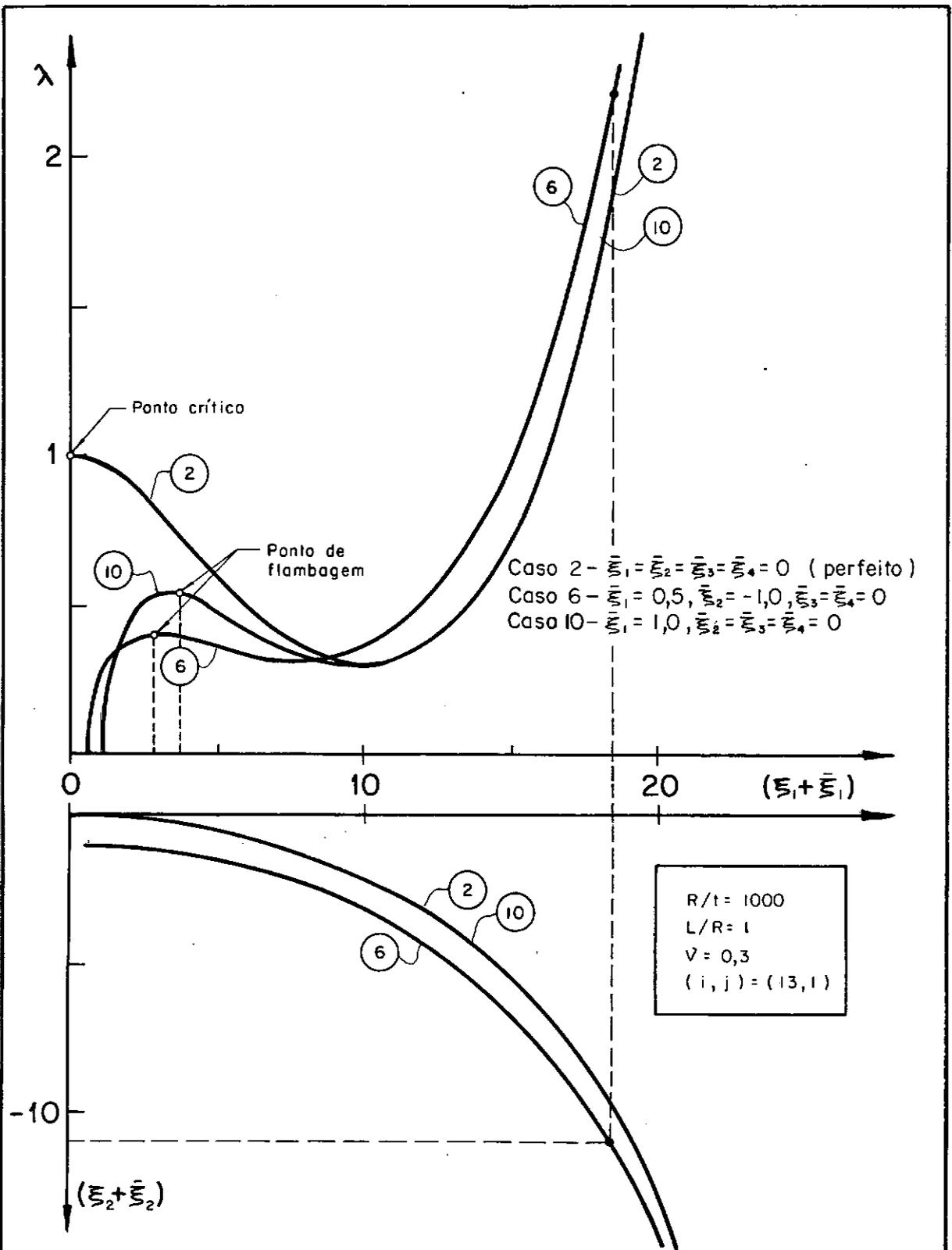


Figura: IV.6 - TENDÊNCIA ASSINTÓTICA DO CAMINHO DE EQUILÍBRIO DA ESTRUTURA IMPERFEITA AO CAMINHO PÓS-CRÍTICO EM ESTADOS PÓS-FLAMBAGEM AVANÇADOS.

$$- w = w_{i,j} + w_{o,2j} + w_{2i,0} + w_{2i,2j}$$

fixados para $\bar{\xi}_1 t$ e $\bar{\xi}_2 t$, as variações da carga de flambagem foram muito pequenas se comparadas com a redução de rigidez da casca ($\lambda_{cr} - \lambda_f$) provocada apenas por $\bar{w}_{i,j}$ e $\bar{w}_{0,2j}$. Portanto pode-se considerar a influência de $\bar{w}_{2i,0}$ e $\bar{w}_{2i,2j}$ como secundária.

Deve-se notar ainda na figura (IV.4) que as curvas 4, 5 e 6 (casca imperfeita) não se mostram assintóticas à curva 2 (casca perfeita), conforme os resultados anteriores⁶. Este fato é devido à presença de $\bar{\xi}_2$, que afasta inicialmente estas curvas, como se pode notar na figura (IV.4b). No entanto, em estados pós-flambagem mais avançados, a tendência assintótica ocorre, e é ilustrada na figura (IV.6). Nesta mesma figura, é mostrado também que quando se tem imperfeições apenas no modo crítico, a solução é de fato quase coincidente com aquela para a casca perfeita a partir do ponto de mínimo pós-crítico.

IV.2.2 - Análise das distribuições de energia

As figuras (IV.7) a (IV.10) mostram como as parcelas incrementais da energia potencial total, dadas na seção (III.3) tomando-se como referência o estado fundamental de membrana, variam com o acréscimo da amplitude do modo crítico de deformação.

O estudo das distribuições de energia inicia-se com a identificação de parcelas que contribuam para a estabilização ou que induzam a perda de rigidez da estrutura¹⁸. Conforme o critério de Lagrange, a estrutura será estável se:

$$\Delta V = V(\underline{u} + \delta \underline{u}) - V(\underline{u}) > 0$$

e portanto as parcelas que representam uma contribuição positiva à ΔV são estabilizadoras e as contribuições negativas são destabilizadoras. Agrupando as contribuições positivas em $V^{(+)}$ e as negativas em $V^{(-)}$, pode-se escrever:

$$\Delta V = V^{(+)} + V^{(-)} \quad (IV.1)$$

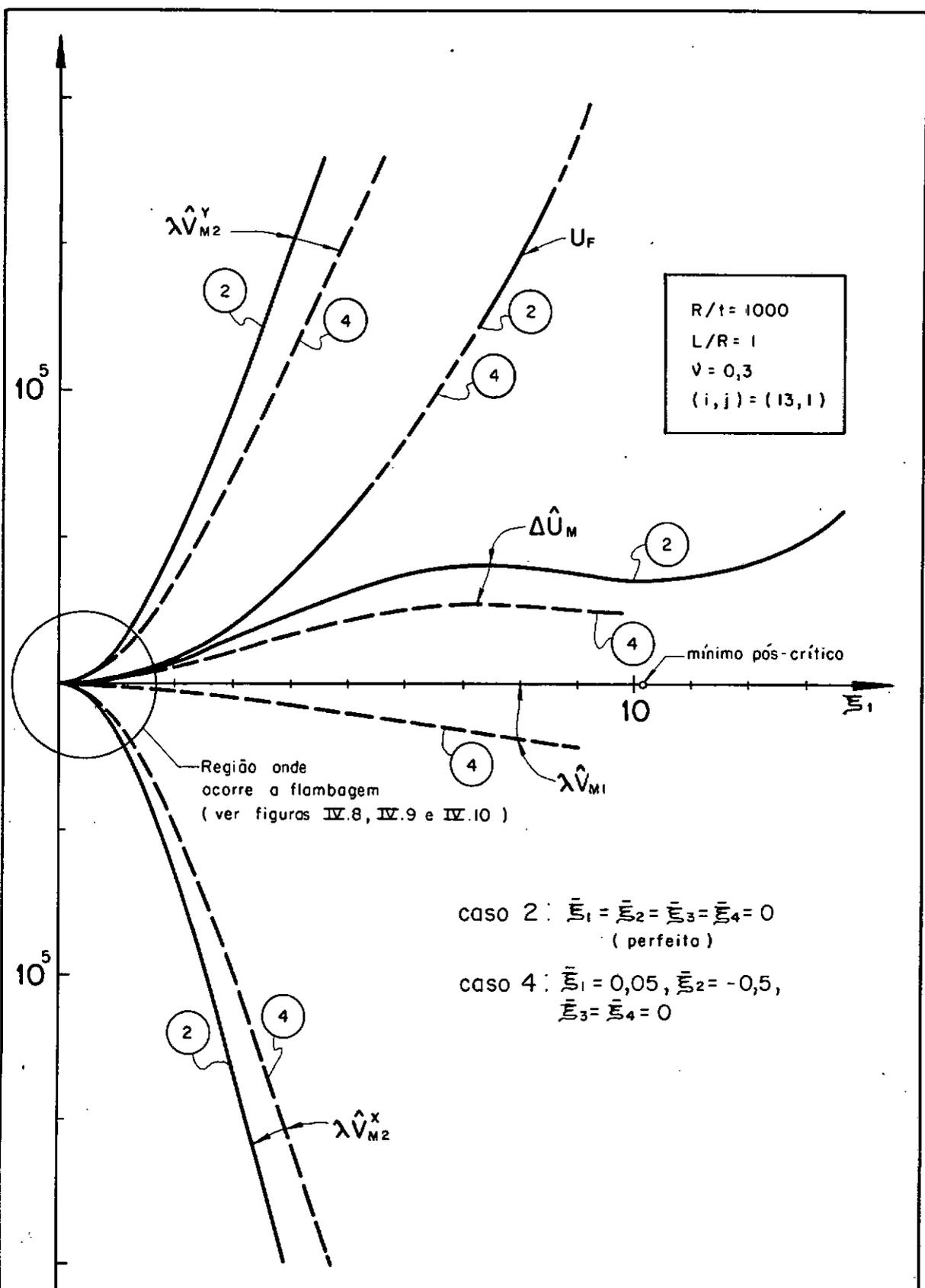


Figura: IV.7 - PARCELAS DA ENERGIA POTENCIAL INCREMENTAL.

$$- w = w_{i,j} + w_{0,2j} + w_{2i,0} + w_{2i,2j}$$

e através da figura (IV.7) identifica-se:

$$\hat{V}^{(+)} = \Delta\hat{U}_M + U_F + \lambda\hat{V}_{M_2}^Y \quad (\text{IV.2a})$$

$$\hat{V}^{(-)} = \lambda\hat{V}_{M_2}^X + \lambda\hat{V}_{M_1} \quad (\text{IV.2b})$$

Esta figura mostra ainda como as imperfeições geométricas contribuem para a perda da estabilidade durante o processo não-linear minando as contribuições estabilizadoras $\Delta\hat{U}_M$ e $\lambda\hat{V}_{M_2}^Y$, provenientes da energia de membrana. Deve-se chamar a atenção para o fato de que a redução da contribuição desestabilizadora $\lambda\hat{V}_{M_2}^X$ somente ocorre em consequência direta da perda de rigidez circunferencial associada a reduções de $\lambda V_{M_2}^Y$ e ΔU_M , conforme argumentado na seção (III.1). A parcela $\lambda\hat{V}_{M_1}$, que é nula para cascas perfeitas (veja comentários no final da seção (III.3)), tem valor pequeno em relação à redução de $\lambda\hat{V}_{M_2}^X$. Assim, a análise se concentrará na investigação do comportamento das parcelas estabilizadoras.

A figura (IV.7) apresenta a variação das contribuições de energia durante todo o processo não-linear, incluindo estados de deformação avançados; a investigação do comportamento nesses estados será feita adiante na seção (V.3). Nota-se que a principal contribuição estabilizadora é dada por $\lambda\hat{V}_{M_2}^Y$ e que $\Delta\hat{U}_M$ tem um patamar na vizinhança do ponto de mínimo pós-crítico (ou pós-flambagem). Mas o objetivo principal nesta seção é investigar a influência de imperfeições e interação entre modos na redução da carga de flambagem que ocorre na região inicial, indicada por um círculo na figura.

As figuras (IV.8) a (IV.10) mostram então as variações das contribuições estabilizadoras, nesses estados vizinhos à flambagem. Nelas, observa-se que:

- a) Tanto a interação entre os modos de deformação quanto as imperfeições geométricas reduzem significativamente as contribuições estabilizadoras com exceção de U_F (figura (IV.8)) que praticamente não se altera.
- b) A energia potencial de membrana circunferencial, $\lambda\hat{V}_{M_2}^Y$, é a principal componente estabilizadora. Esta parcela tam-

bém é a que sofre as maiores reduções. (figura (IV.9)).

- c) Na parcela $\Delta\hat{U}_M$, a influência do acoplamento entre os modos de deformação se manifesta principalmente anulando a componente circunferencial $\Delta\hat{U}_M^Y$, enquanto as imperfeições geométricas afetam em maior grau $\Delta\hat{U}_M^X$. (figura (IV.10)).

Quanto maiores as amplitudes dos modos de imperfeição, maiores serão as reduções das contribuições estabilizadoras, em particular a da componente $\lambda\hat{V}_{M_2}^Y$, e conseqüentemente, maior será a diferença $(\lambda_{cr} - \lambda_f)$, entre a carga crítica teórica e a carga de flambagem. Esta ligação entre a redução das parcelas estabilizadoras e a perda de rigidez da estrutura representada por $(\lambda_{cr} - \lambda_f)$ é melhor ilustrada na figura (IV.11). Nessa figura, os pontos marcados indicam a redução, em relação ao caso perfeito, dessas contribuições na flambagem, isto é, para amplitudes ξ_1 associadas às cargas de flambagem, conforme indicado pelas verticais tracejadas nas figuras (IV.4), (IV.5), (IV.8), (IV.9) e (IV.10).

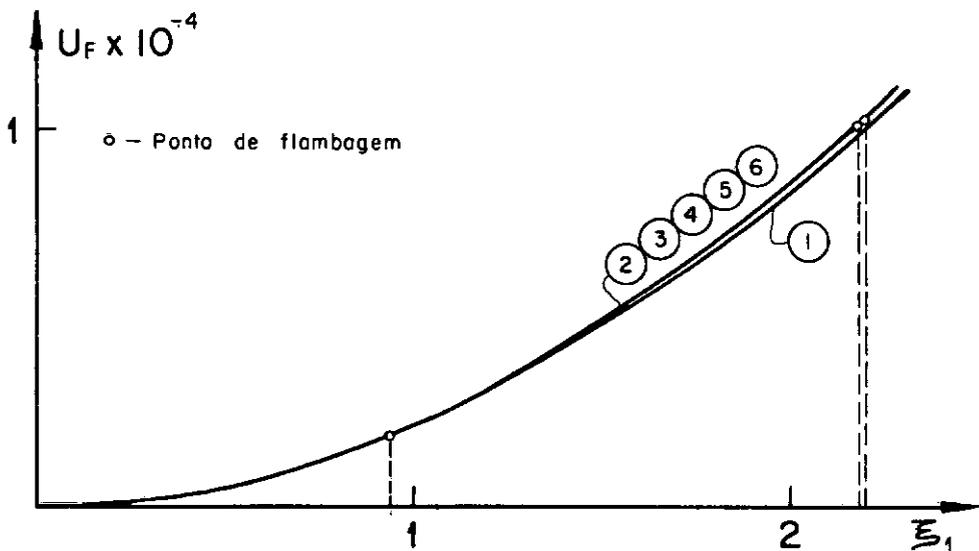


Figura: IV.8 - CONTRIBUIÇÕES DA ENERGIA DE FLEXÃO.

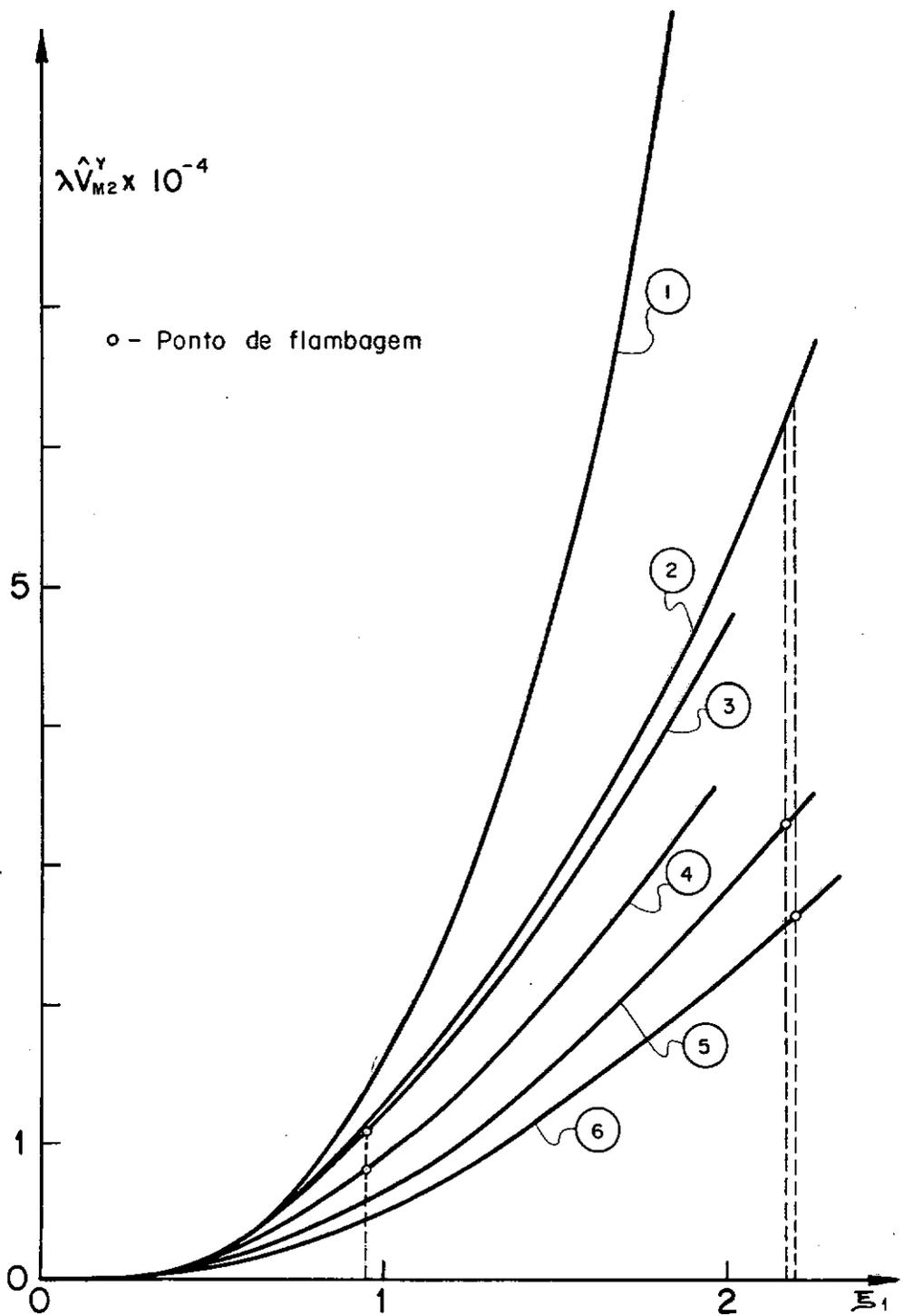


Figura: IV.9 - CONTRIBUIÇÕES DA COMPONENTE CIRCUNFERENCIAL DA ENERGIA POTENCIAL DE MEMBRANA.

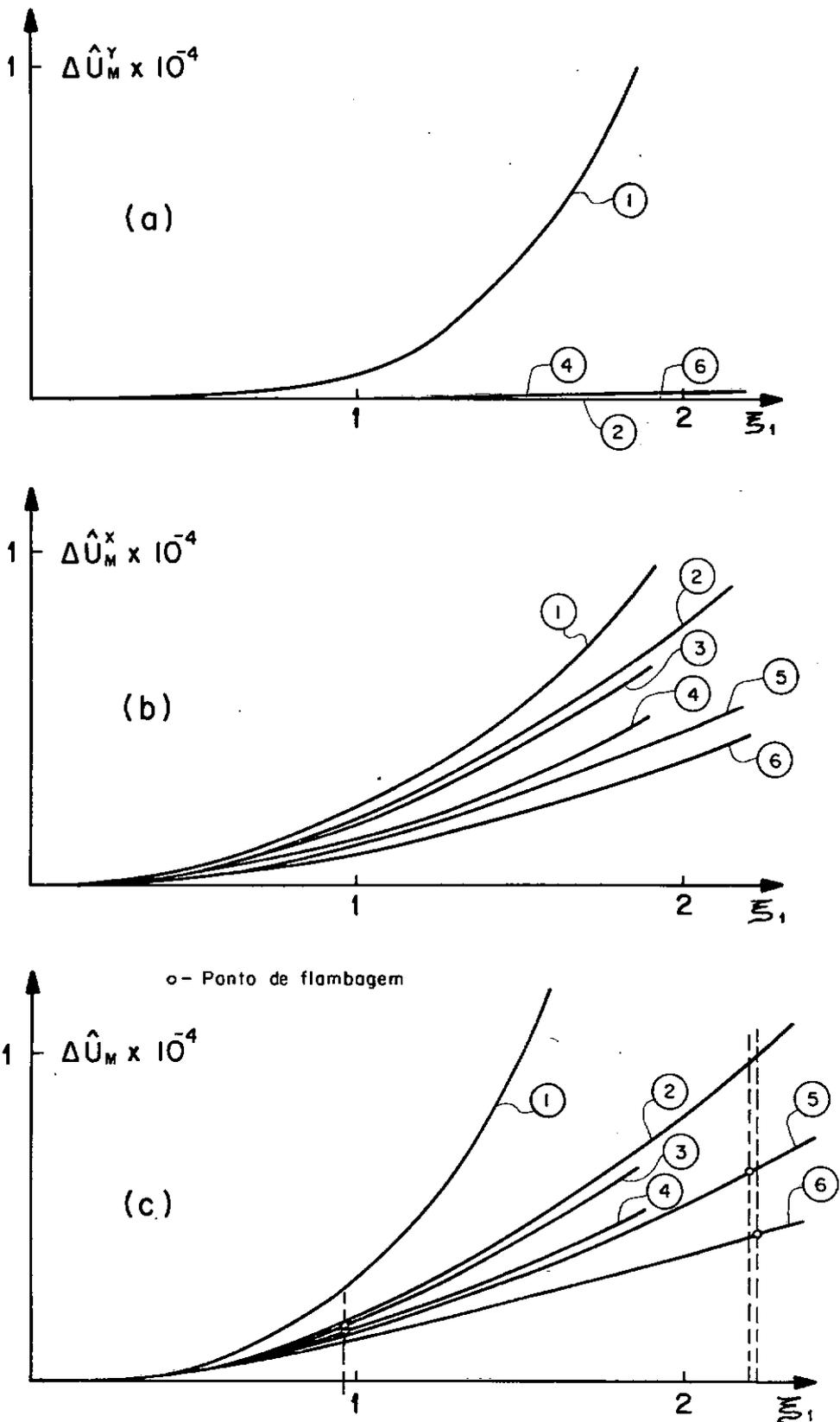


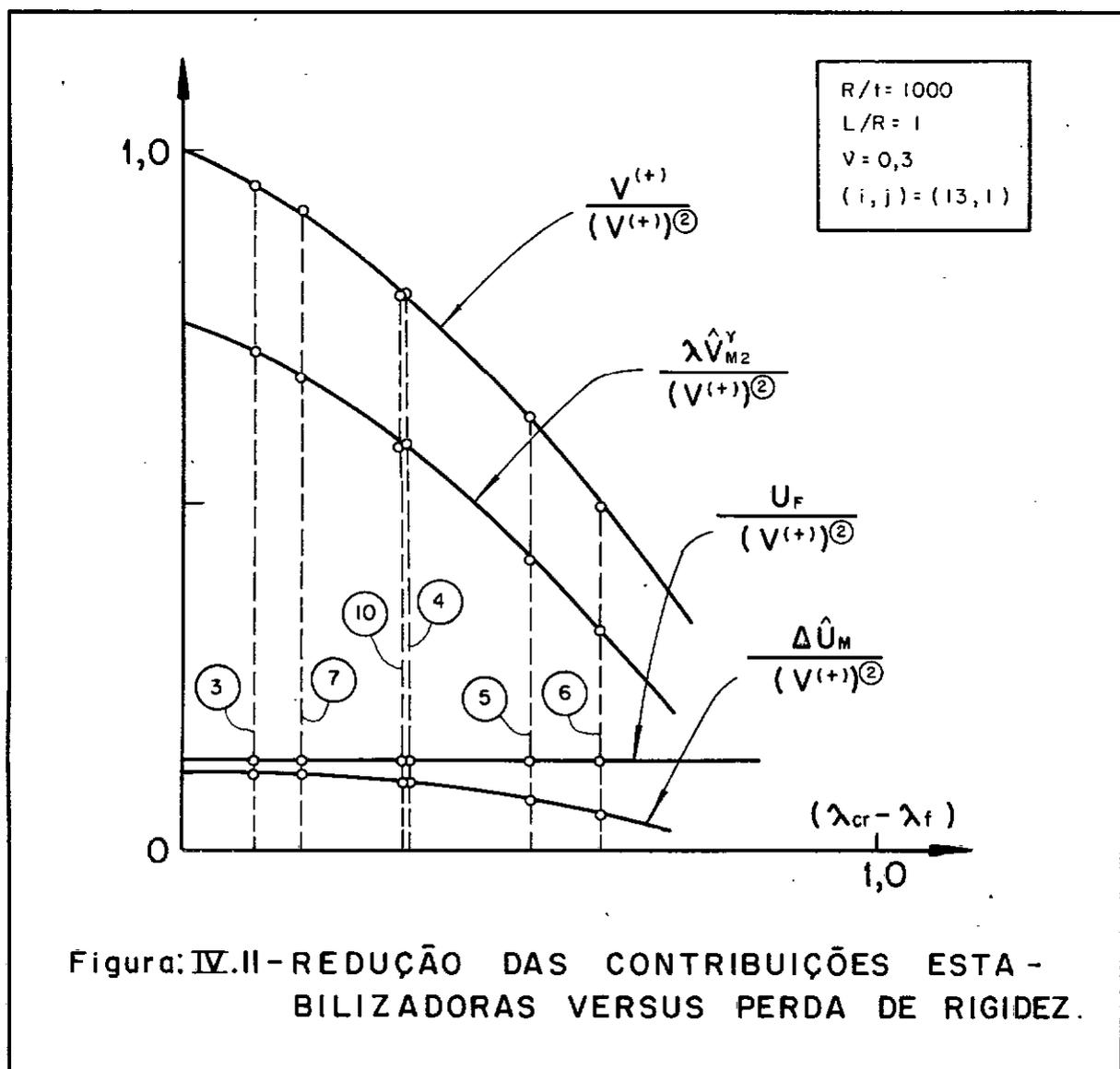
Figura: IV.10 - CONTRIBUIÇÕES DA ENERGIA INCREMENTAL DE MEMBRANA.

(a) componente circunferencial

(b) componente axial

(c) soma das comp. circunferencial, axial e cisalhante.

O que fica claro é que a maior contribuição estabilizadora, $\lambda \hat{V}_{M_2}^Y$ é também a mais severamente reduzida pela ação conjunta da interação não-linear entre os modos de deformação e imperfeições geométricas iniciais. Este fato veio comprovar os argumentos usados nas referências 18, 22 e 23 para a proposição do problema simplificado com energia reduzida, o qual será analisado na seção (V.2).



IV.3 - A Influência da Variação dos Parâmetros Geométricos

A influência dos parâmetros geométricos na resposta pós-crítica de cascas cilíndricas é analisada com o auxílio das figuras (IV.12) a (IV.17). Para essa análise w é ainda descrito pela combinação de modos de deformação (III.7), sendo o modo crítico assimétrico $w_{i,j}$ definido por pares $(i,j) \equiv (i_{cr}, 1)$, onde i_{cr} é o valor inteiro que satisfaz aproximadamente a equação (II.55) quando $j = 1$ e depende dos parâmetros R/t e L/R . De acordo com os argumentos introduzidos na seção (IV.2), toma-se $j = 1$ pois o modo crítico dominante na iminência da flambagem possui uma meia onda longitudinal.

A figura (IV.12) mostra as respostas pós-críticas de cascas cilíndricas axialmente comprimidas com geometrias diversas. Deve ser observado que cada conjunto de curvas referentes a um mesmo R/t são não-dimensionalizadas em relação à carga crítica teórica correspondente e por isso todas as curvas mostradas nessa figura tem início em $\lambda = 1$. Pode-se notar ainda que

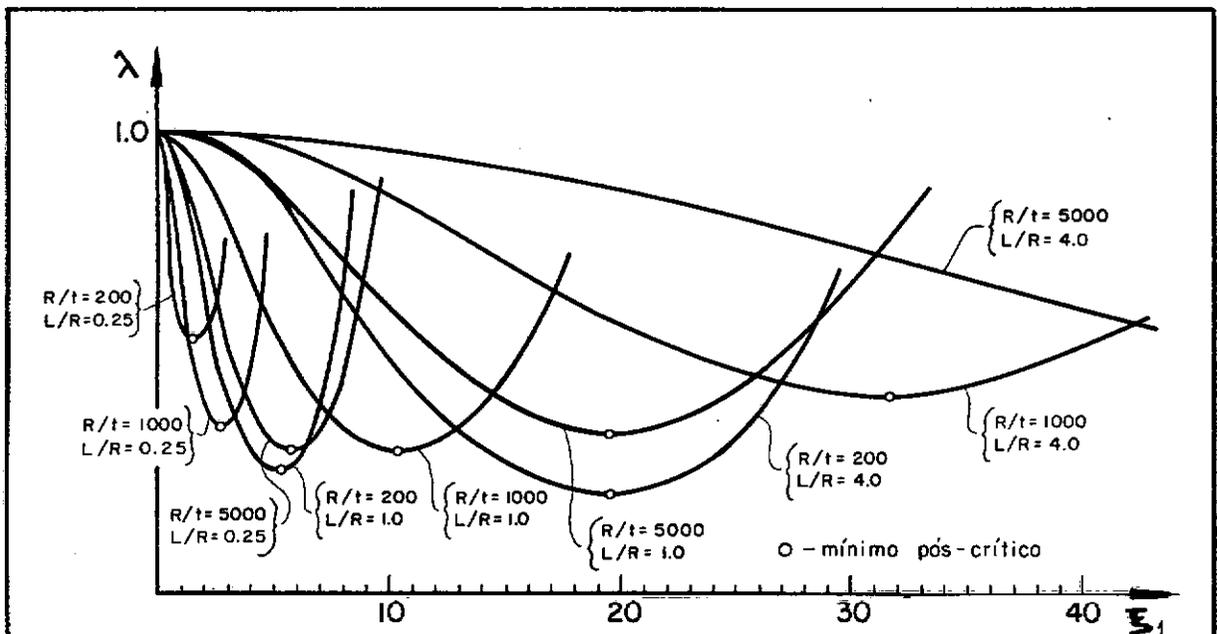


Figura: IV.12 - CAMINHOS DE EQUILÍBRIO.

- variação dos parâmetros geométricos
- cilindro perfeito
- $w = w_{i,j} + w_{0,2j} + w_{2i,0} + w_{2i,2j}$

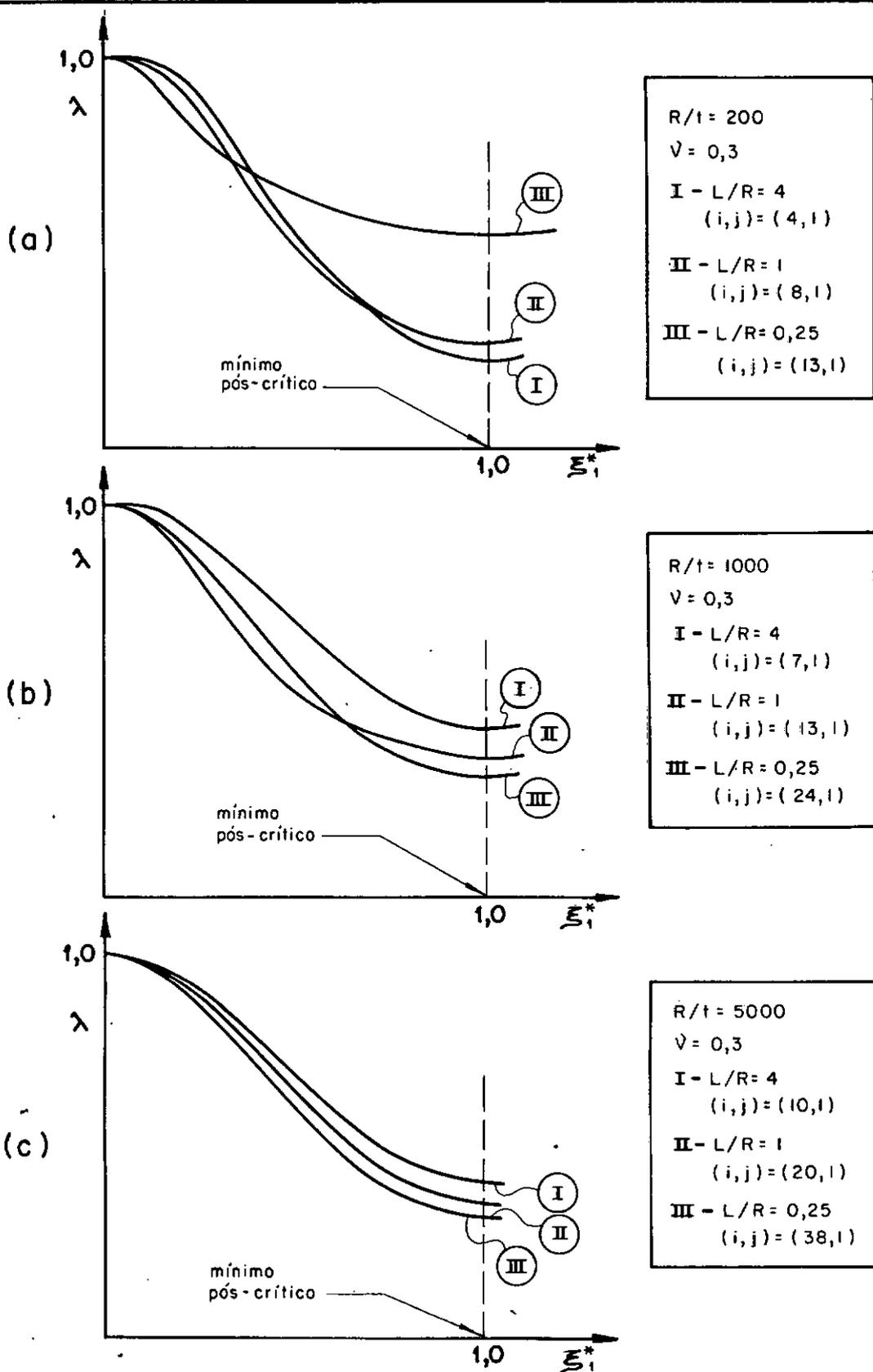


Figura: IV.13 - CAMINHOS DE EQUILÍBRIO

- variação de L/R com R/t fixo

- $w = w_{i,j} + w_{o,2j} + w_{2i,0} + w_{2i,2j}$

(a) - $R/t = 200$

(b) - $R/t = 1000$

(c) - $R/t = 5000$

a variação das amplitudes com o parâmetro de carga depende da curvatura (R/t) e do comprimento (L/R) do cilindro. A fim de permitir a comparação dos diversos casos, torna-se conveniente a apresentação conjunta das variações das distribuições de energia. Para isto, introduz-se o parâmetro adimensional:

$$\xi_1^* = \frac{\xi_1}{\xi_{1,m}}$$

onde $\xi_{1,m}$ representa o valor de ξ_1 no ponto de mínimo pós-crítico.

As figuras (IV.13 a, b, c) mostram as projeções dos caminhos de equilíbrio sobre o plano $\lambda - \xi_1^*$ para valores discretos de R/t fixados respectivamente em 200, 1000 e 5000, assumindo L/R em cada um desses três casos os valores 4,0 (curvas I), 1,0 (curvas II) e 0,25 (curvas III), representando assim cilindros longos, médios e curtos. O que pode ser notado nessas figuras é que o aspecto da resposta pós-crítica independe da geometria da casca, isto é, todas apresentam estados pós-críticos iniciais instáveis. Contudo, o grau de instabilidade ou ainda a potencialidade para reduções de estabilidade face aos efeitos de imperfeições geométricas não são aparentes nesses gráficos. Um entendimento melhor de seus comportamentos pode ser conseguido através das distribuições de energia.

As figuras (IV.14), (IV.15) e (IV.16) apresentam as variações com respeito a ξ_1^* , das contribuições não-dimensionais de energia ($\text{ENERGIA}/\sigma_{cr} \cdot A \cdot t$) para as mesmas geometrias das figuras (IV.13a), (IV.13b) e (IV.13c) respectivamente. Observa-se pelos eixos de ordenadas nessas figuras, que os valores das contribuições de energia crescem quando R/t decresce, pois a carga crítica clássica, dada pela expressão (II.56), é inversamente proporcional a R/t e conseqüentemente o valor do funcional de energia (associado à rigidez) é menor para cascas mais abatidas, isto é, de curvatura mais fraca. Deve ser lembrado também, antes de dar prosseguimento à investigação das distribuições de energia, que a perda de rigidez acarretada por imperfeições geométricas iniciais e interação entre modos é um reflexo das reduções sofridas pelas contribuições estabilizadoras oriundas da ener-

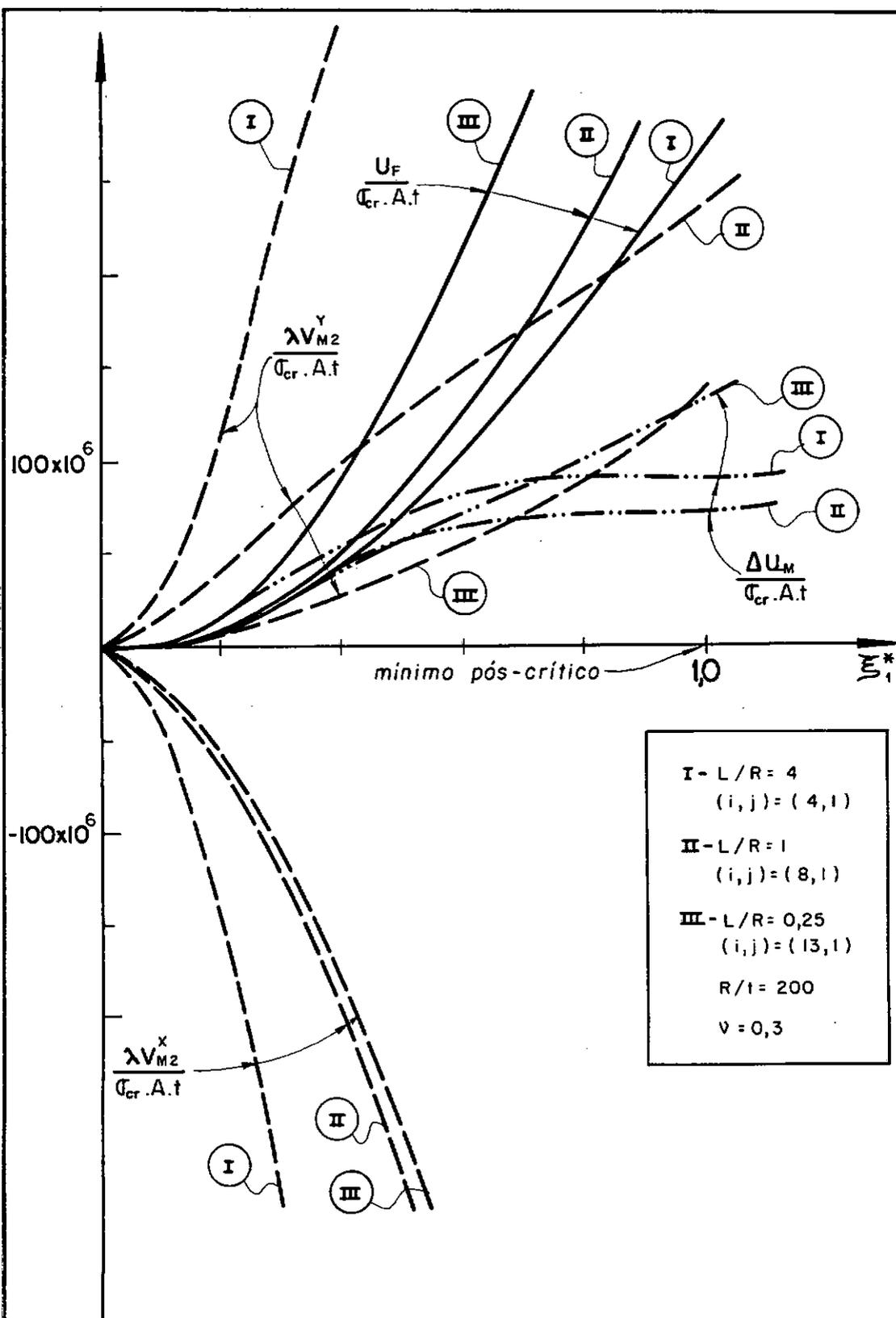


Figura: IV.14 - PARCELAS DA ENERGIA POTENCIAL INCREMENTAL.

- variação de L/R com R/t fixo
- cilindro perfeito
- $w = w_{i,j} + w_{o,2j} + w_{2i,0} + w_{2i,2j}$

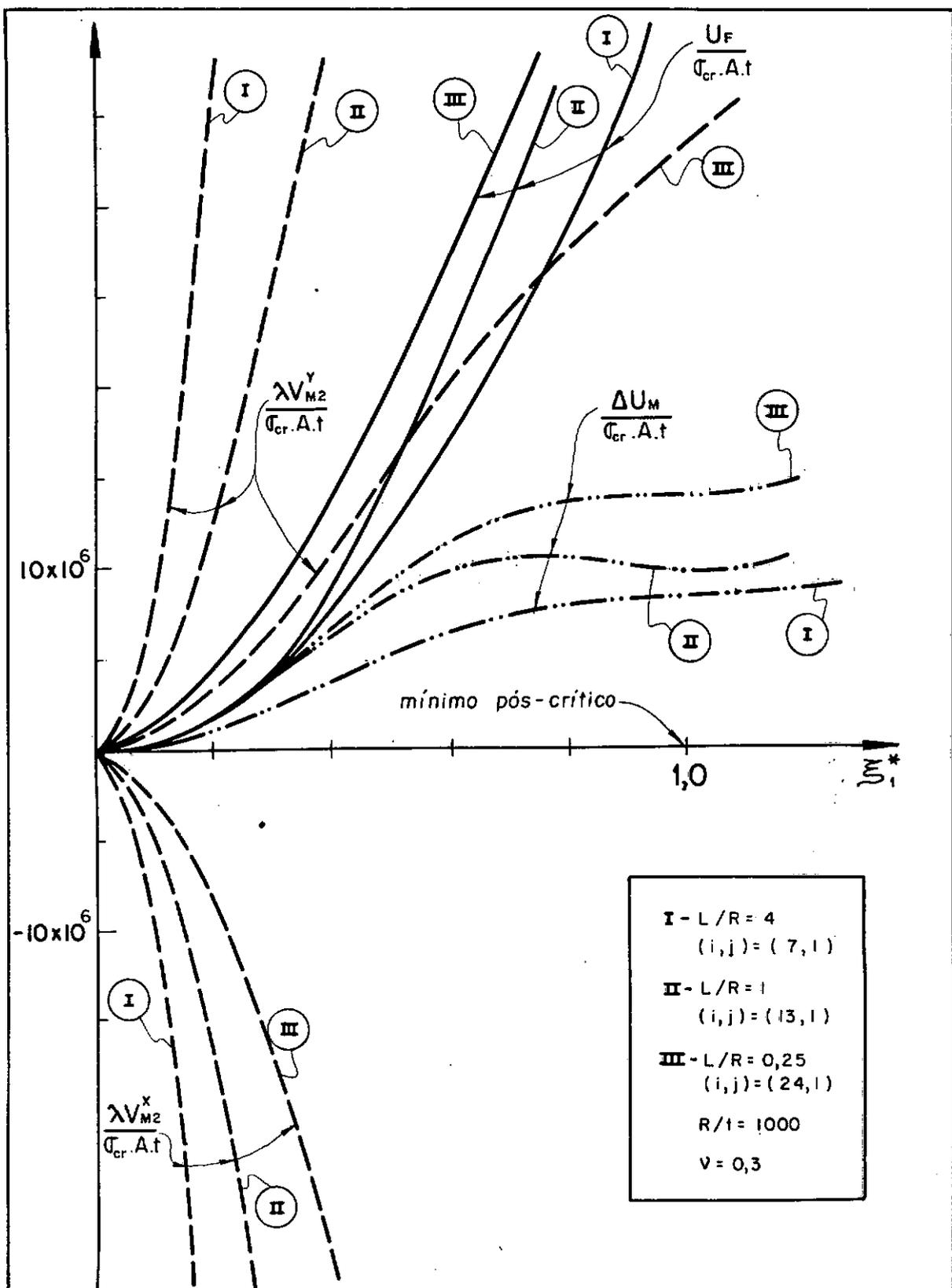


Figura: IV.15 - PARCELAS DA ENERGIA POTENCIAL INCREMENTAL.

- variação de L/R com R/t fixo
- cilindro perfeito
- $w = w_{i,j} + w_{0,2j} + w_{2i,0} + w_{2i,2j}$

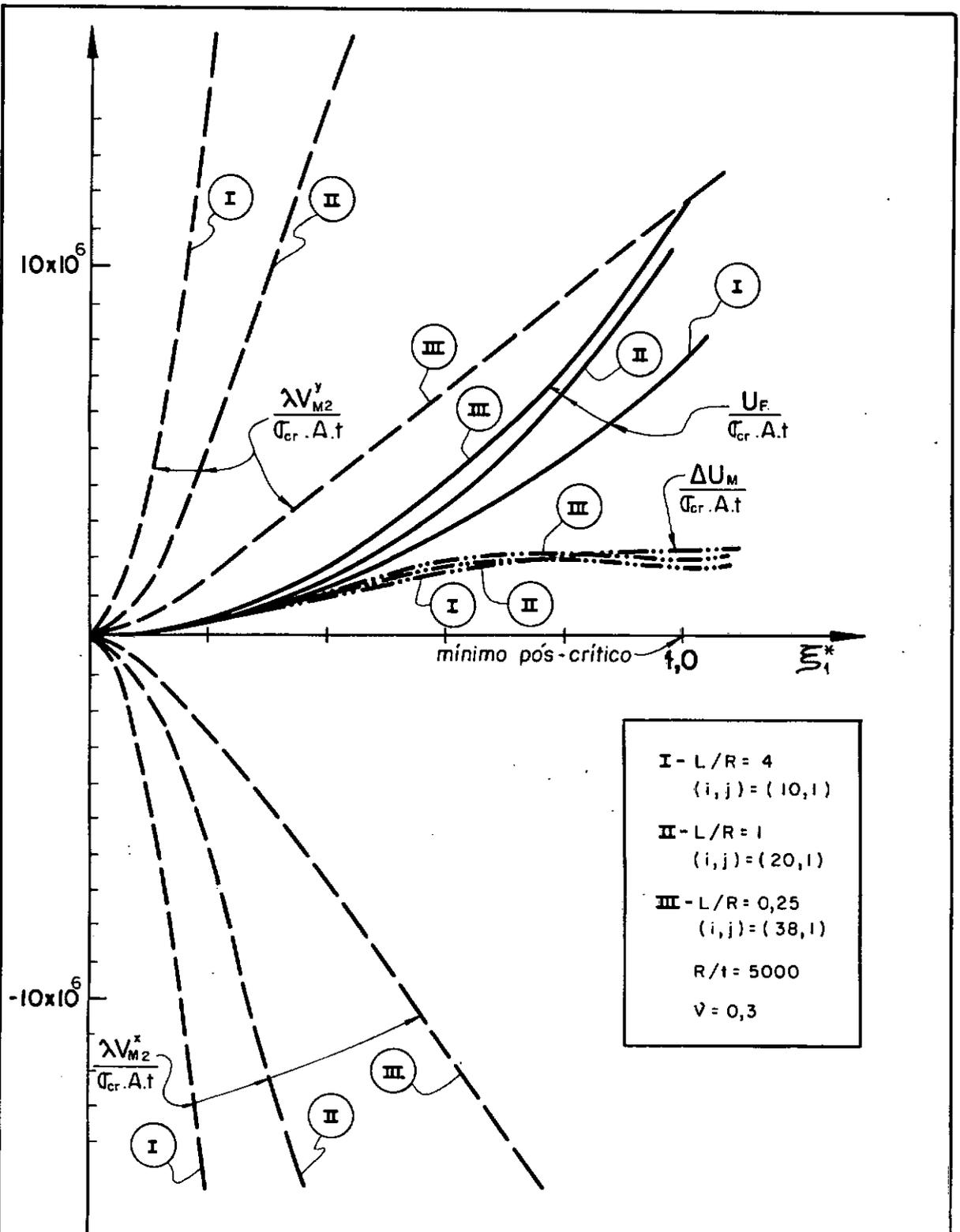


Figura: IV.16 - PARCELAS DA ENERGIA POTENCIAL INCREMENTAL.

- variação L/R com R/t fixo.
- cilindro perfeito.
- $w = w_{1,j} + w_{0,2j} + w_{2i,0} + w_{2i,2j}$.

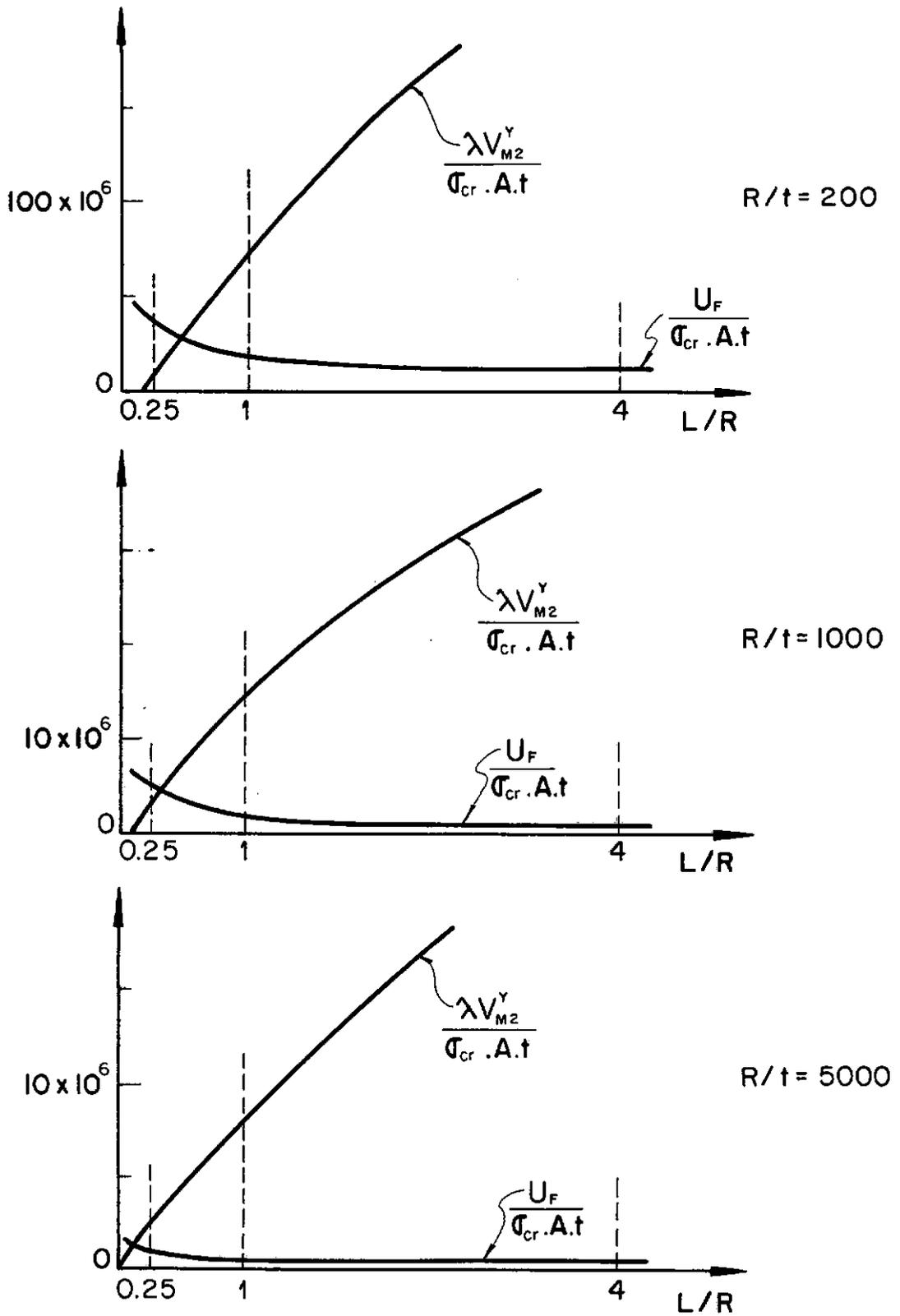


Figura: IV.17 - CONTRIBUIÇÕES DAS PARCELAS λV_{M2}^Y e U_F
 QUANDO $\xi_i^* = 0.2$
 - cilindro perfeito

gia de membrana; isto foi demonstrado na seção (IV.2)

A segunda observação importante, que pode ser feita com as figuras (IV.14) a (IV.16) é que a contribuição estabilizadora da casca cedida pela componente circunferencial da energia potencial de membrana, $\lambda \hat{V}_{M_2}^Y$, decresce quando L/R também decresce e a diminuição relativa dessa contribuição estabilizadora é mais significativa para cascas com valores menores de R/t. Por outro lado, nesses casos, é a componente de energia de flexão, U_F , que tem um papel de importância crescente na estabilização da casca, não sendo contudo afetada nem por imperfeições geométricas nem pela interação entre modos de deformação. Essas observações são esclarecidas pelas figuras (IV.17 a, b, c), onde as contribuições de energia para $\xi^* = 0,2$ (representativo da flambagem), e valores fixos de R/t, são marcadas em gráficos como funções de L/R.

O que se pode concluir dessas observações é que cascas cilíndricas curtas (L/R pequeno) e pouco abatidas (R/t pequeno) oferecem, como era esperado, uma maior resistência à flambagem nesses modos de ondas longas axiais. Mas, além disso, a resistência à flambagem de cascas com o mesmo valor de R/t cresce à medida em que seu comprimento (ou L/R) decresce. Esse acréscimo de resistência com o decréscimo de L/R torna-se menos acentuado para valores crescentes de R/t. Essa última afirmação que contraria os resultados teóricos clássicos, vem corroborar observações experimentais^{1,8} e resultados teóricos recentes^{18, 22, 23} que indicam que as cargas de flambagem de cascas tendo um mesmo R/t podem ser menores para aquelas mais longas. Em outras palavras, as cargas de flambagem dependem também do parâmetro L/R, embora esse grau de dependência seja menor do que aquele para R/t.

CAPÍTULO V

MODELOS SIMPLIFICADOS PARA A ESTIMATIVA
DA CARGA DE FLAMBAGEM

V.1 - Introdução

Os trabalhos pioneiros de DONNELL^{6,9}, VON KÁRMÁN⁸ e KOITER¹⁰ mostraram que as imperfeições geométricas iniciais e a interação não-linear entre modos são os fatores de maior influência sobre o comportamento e cargas de flambagem de cascas cilíndricas sob compressão axial. Entretanto, devido a grande complexidade desse processo de flambagem a maioria dos modelos propostos para representar o fenômeno físico contém sempre um alto grau de simplificações que por vezes são baseadas em hipóteses iniciais questionáveis, tornando-os assim inadequados para estimar as cargas de flambagem. Essa complexidade do processo não-linear de flambagem é devida principalmente ao grande número de modos (modos críticos resultantes do problema clássico) que se acoplam e conseqüentemente ao largo espectro de imperfeições que podem influenciar o comportamento estrutural e as cargas de flambagem.

Para estimar tanto qualitativamente quanto quantitativamente a flambagem dessas cascas, um modelo teórico deveria levar em conta a interação não-linear que ocorre entre a família de modos críticos (incluindo assim modos de ondas curtas e longas) e outros modos que a estes se acoplam e, ainda, as imperfeições em todos esses modos. Isto seria, porém, uma tarefa muito difícil de ser realizada, mesmo com o auxílio de computador e técnicas numéricas refinadas.

Uma análise multimodos²¹ desenvolvida recentemente, que considera a interação entre mais de 10 modos de deformação e imperfeições, tem alcançado resultados de relativo sucesso quando comparados às cargas de flambagem obtidas de modelos ex-

perimentais. Como comentado na introdução ao presente trabalho, o sucesso da referida análise multimodos é considerado relativo pois necessita-se, para a sua aplicação, um conhecimento prévio das amplitudes e formas de todos esses modos de imperfeições iniciais. Além de outras dificuldades mencionadas anteriormente no capítulo (I), essa análise multimodos pode tornar-se bastante complicada e onerosa, tendo validade de aplicação somente no estágio de verificações da resistência à flambagem de protótipos.

Para contornar os problemas inerentes dessas últimas análises não-lineares, foi proposto recentemente¹⁸ um modelo linearizado que, levando em conta somente os resultados que os efeitos combinados de imperfeições e interação entre modos teriam sobre as cargas de flambagem, tem fornecido cargas críticas reduzidas que se comparam favoravelmente a resultados experimentais. Este modelo teórico simples fornece limites inferiores das cargas de flambagem e, por isso, teria aplicação em fases de pré-projeto e na idealização de modelos experimentais para pesquisas futuras. A investigação das simplificações introduzidas nesse modelo constitui o objetivo principal do presente trabalho. Isso é feito na seção (V.2) através dos resultados obtidos nos capítulos anteriores para as distribuições de energia em regiões vizinhas à flambagem.

Com essa investigação das distribuições de energia durante a resposta não-linear, foi possível identificar também a influência que a interação entre modos e imperfeições tem sobre o comportamento pós-flambagem avançado. Esse estudo permitiu generalizações que levaram a proposição de um novo modelo não-linear que, ao contrário daquele descrito na referência 21, é de aplicação simples e racional. Isto é mostrado na seção (V.3) onde são também discutidas suas limitações e a sua aplicabilidade na fase de verificação teórica de resistência a flambagem de protótipos.

V.2 - Estimativas de Limites Inferiores para Cargas de Flambagem

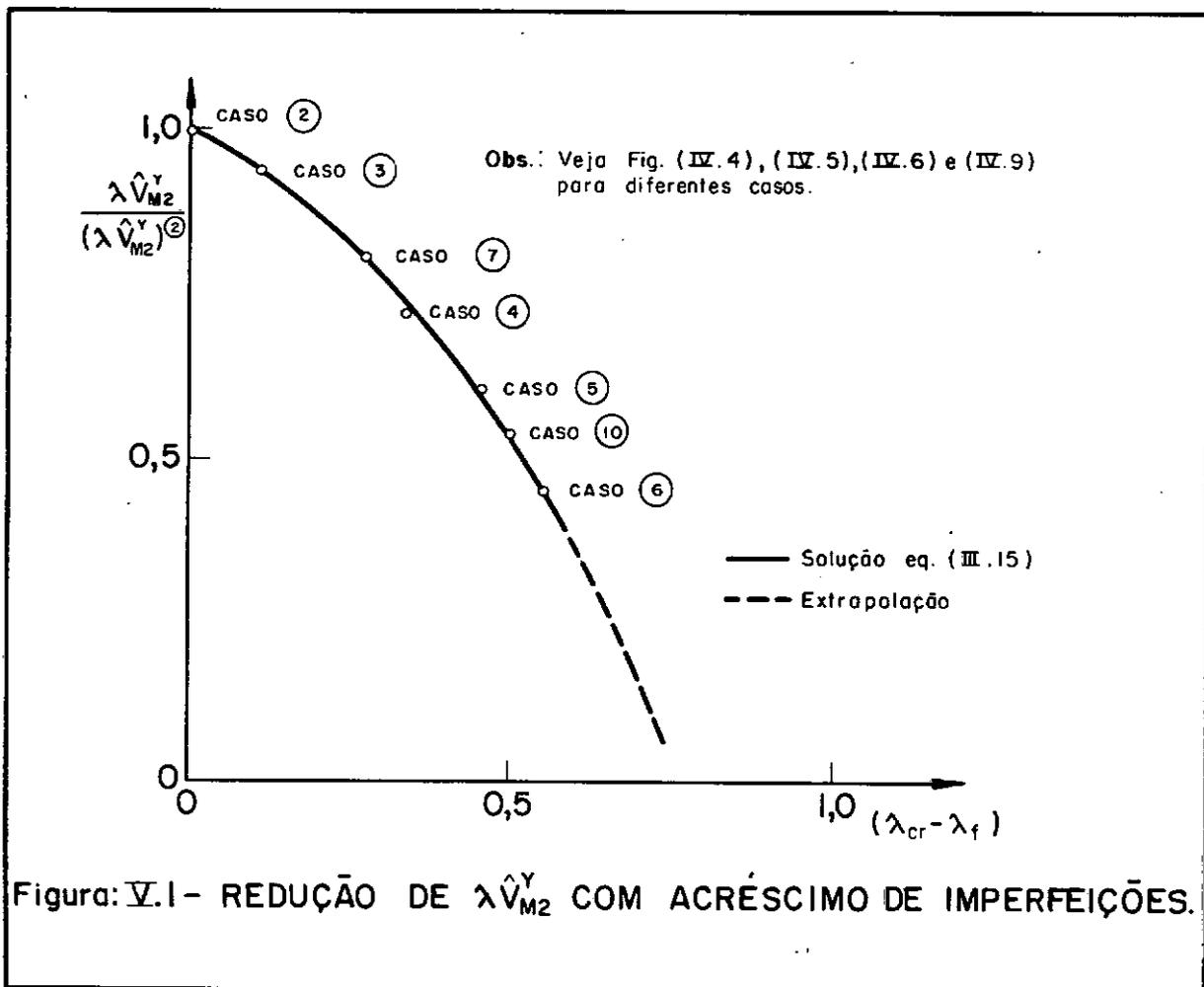
V.2.1 - O problema linearizado com energia reduzida

A análise da variação das distribuições de energia durante a resposta não-linear nos modos dominantes de ondas longas longitudinais permitiu que no capítulo (IV) se verificasse que:

- a) a contribuição mais importante de energia (ou rigidez) para a estabilidade da casca é dada pela componente circumferencial, $\lambda \hat{V}_{M_2}^Y$, da energia potencial de membrana;
- b) por outro lado, essa componente, que é proporcional a n_y'' , é a mais severamente reduzida pelos efeitos combinados da interação não-linear entre modos e imperfeições iniciais nesses modos.

Essas reduções da contribuição estabilizadora de membrana $\lambda \hat{V}_{M_2}^Y$, com o acréscimo de amplitudes de imperfeições, são melhor ilustradas pela figura (V.1). Nessa figura os pontos marcados indicam a redução, em relação ao caso perfeito (veja a figura (IV.9)), dessa contribuição na flambagem, isto é, para deformações ξ_1 associadas às cargas de flambagem da casca analisada nas figuras (IV.3) a (IV.6). Deve ser lembrado que as cargas de flambagem calculadas ocorreram para deformações ξ_1 entre uma e duas vezes a espessura da casca, podendo assim essas deformações dominantes serem consideradas pequenas. Essa situação indica que a flambagem ocorreu para estados de deformação ainda vizinhos do estado crítico, muito embora as cargas calculadas de flambagem fossem bastante inferiores à carga crítica clássica. O que a figura (V.1) pretende também sugerir com o trecho de curva tracejada é que se essas reduções tivessem sido analisadas com o modelo não-linear multimodos (mais do que os 4 modos usados), elas se mostrariam ainda mais severas.

Os resultados apresentados no capítulo (IV) obtidos com uma análise não-linear conferem, então, validade teórica-númerica ao modelo simplificado proposto recentemente¹⁸, o qual é



baseado essencialmente na investigação das contribuições de energia associados a cada um dos modos críticos isolados; isto é, na investigação de distribuições de energia para estados de deformação vizinhos ao estado crítico para o sistema perfeito. Considerando os argumentos descritos na seção (III.1) para a interação não-linear entre modos e extrapolando os efeitos que teriam as imperfeições iniciais, nesse modelo a componente estabilizadora $\lambda \hat{V}_{M_2}^Y$ é, para uma condição limite, eliminada do problema clássico de auto-valor, resultando no problema não-clássico de energia reduzida, V^* ,

$$\delta V_2^* \equiv \bar{\delta} (U_F + U_{M_2} + \lambda_{cr}^* V_{M_2}^X) = 0 \quad (V.1)$$

onde, o sub-índice 2 refere-se às componentes quadráticas de energia (a energia de flexão somente possui termos quadráticos). Deve-se ressaltar aqui que a componente quadrática de energia de deformação de membrana é pouco influenciada pelo acréscimo de

imperfeições quando ξ_1 é ainda pequeno ($\xi_1 \leq 1$). Pode-se notar na figura (IV.10) que as maiores reduções de $\Delta \hat{U}_M$ estão associadas a grandes deslocamentos ($\xi_1 \gg 2$), tendo porém $\Delta \hat{U}_M$ nesses casos contribuições significativas de suas componentes cúbicas e quárticas; isso será investigado mais adiante na seção (V.3).

Este modelo simplificado, que fornece o limite inferior da carga de flambagem, é ilustrado pela figura (V.2).

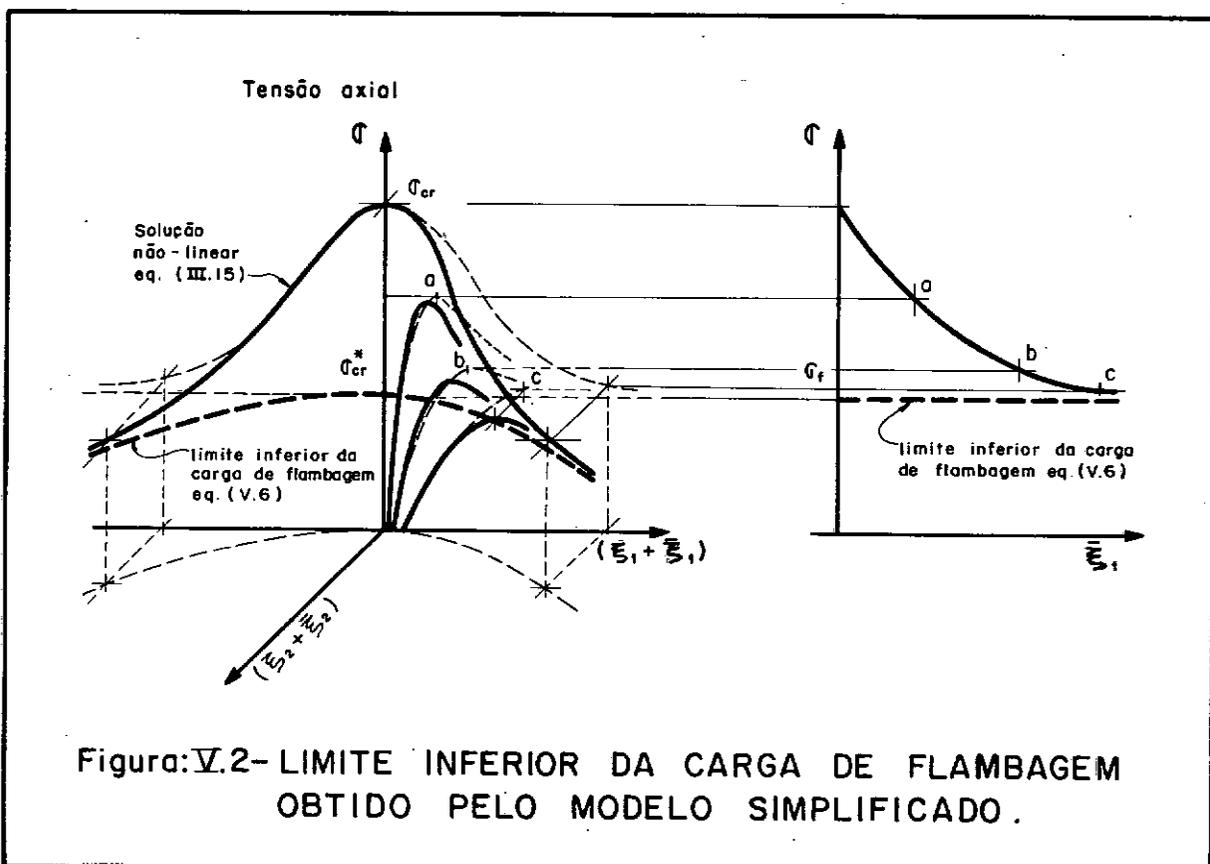
Partindo-se da equação variacional (V.1) e utilizando do procedimento análogo ao da seção (II.3.1), chega-se ao sistema de equações diferenciais:

$$\frac{1}{Et} \nabla^4 f' = - \frac{1}{R} w',_{xx} \quad (V.2)$$

(equação de compatibilidade)

$$DV^4 w = \frac{1}{R} n'_y + \frac{1}{2} \sigma^* t \left[w',_{xx} + \frac{1}{(1 - \nu^2)} (w',_{xx} + \nu w',_{yy}) \right]$$

(equação não-clássica de equilíbrio)



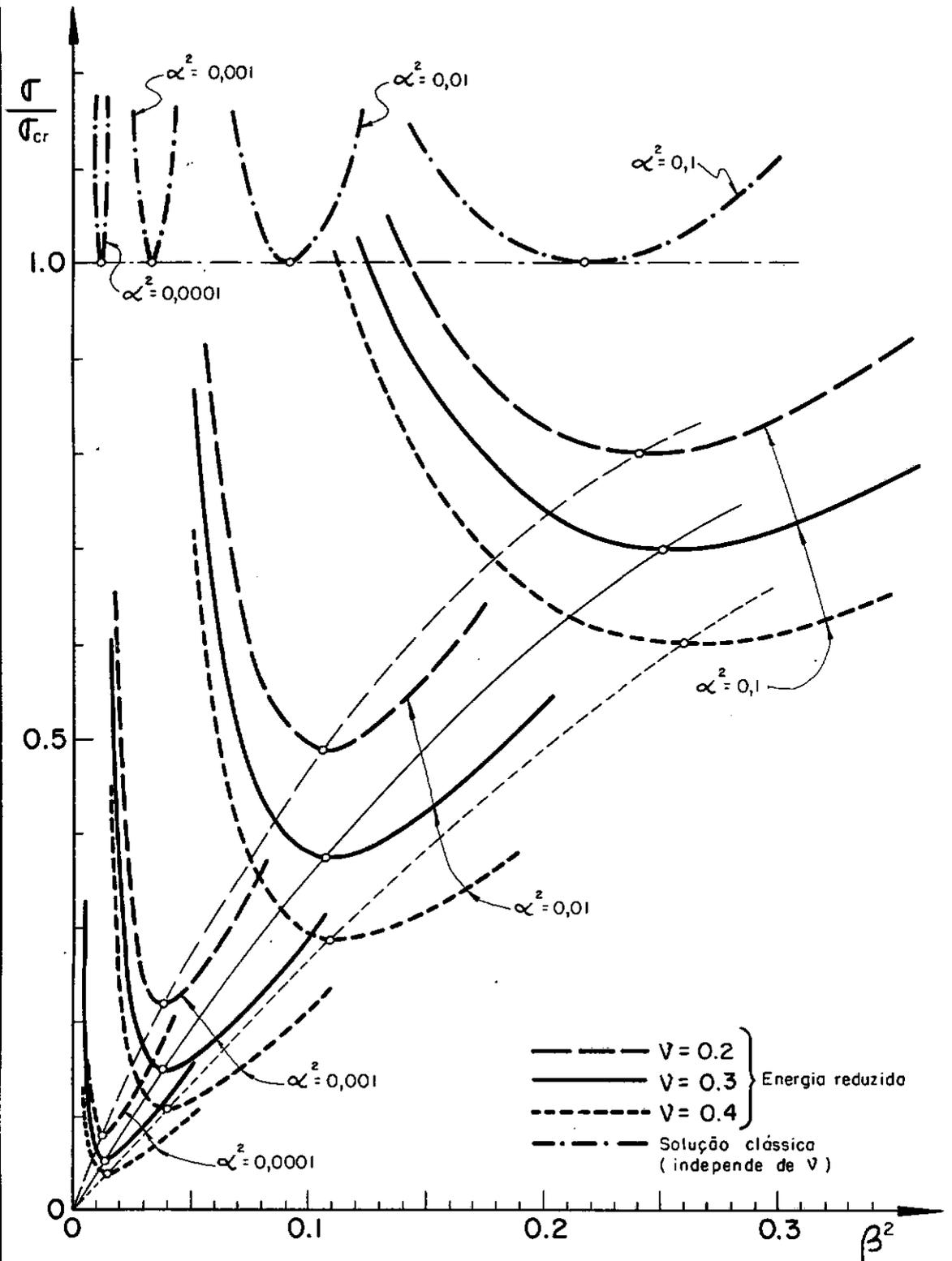


Figura: V.3—VALORES DE σ/σ_{cr} EM FUNÇÃO DOS PARÂMETROS ADIMENSIONAIS α^2 e β^2 .

que, após a introdução do modo crítico na forma de (II.48) e dos parâmetros adimensionais α^2 e β^2 dados por (II.52) fornece:

$$\frac{\sigma^*}{\sigma_{cr}} = \frac{\left[\frac{(\alpha^2 + \beta^2)^2}{\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \right]}{\left[1 - \frac{(1 - \nu \frac{\beta^2}{\alpha^2})}{(1 - \nu^2)} \right]} \quad (V.3)$$

onde σ_{cr} é dado por (II.56). Os valores de σ^*/σ_{cr} , em função dos parâmetros α^2 , β^2 e ν são apresentados na figura (V.3), onde pode ser feita a comparação com a solução do problema clássico de autovalor. Nota-se que o valor mínimo de σ^*/σ_{cr} está relacionado ao modo crítico com 1/2 onda longitudinal (menor valor para α^2), que o número de ondas circunferenciais do modo crítico (relacionado a β^2) difere daquele fornecido pela teoria clássica e que, ao contrário da solução clássica, σ^*/σ_{cr} também depende de L/R e ν . Expressões para σ^*/σ_{cr} (valor mínimo de σ^*/σ_{cr}) e para i_{cr}^* (número de ondas circunferenciais) seriam obtidas fazendo-se $\partial\sigma^*/\partial\beta = 0$, porém este procedimento acarretaria equações cuja solução exata é impossível.

A referência 22 apresenta as expressões abaixo, obtidas a partir das mesmas aproximações de Donnell para cascas cilíndricas usadas no presente trabalho e assumindo w na forma de (II.48). O número de ondas circunferenciais do modo crítico é dado por:

$$i_{cr}^* = \left[\frac{12 \nu (1 - \nu)}{(2 - \nu)} \right]^{1/6} \cdot \left[\frac{R^2}{t} \cdot J \right]^{1/3} \quad (V.4)$$

onde, substituindo-se $j = 1$ tem-se:

$$i_{cr}^* = 2.216 \left[\frac{\nu (1 - \nu)}{(2 - \nu)} \right]^{1/6} \cdot \left[\frac{(R/t)^2}{L/R} \right]^{1/3} \quad (V.5)$$

O valor mínimo de σ^*/σ_{cr} , para $(i, j) = (i_{cr}^*, 1)$ é:

$$\frac{\sigma_{cr}^*}{\sigma_{cr}} = \frac{1,418 C_1 \left[(1 + C_2 Z^{-2/3})^2 + 1/2(1 - C_3 Z^{-2/3})^{-1} \right]}{Z^{1/3} (1 - C_4 Z^{-2/3})} \quad (V.6)$$

onde Z é o conhecido parâmetro de Batdorf definido por:

$$Z = \left(\frac{L}{R}\right)^2 \cdot \frac{R}{t} \cdot (1 - \nu^2)^{1/2} \quad (V.7)$$

e os coeficientes C_i abaixo são funções apenas de ν :

$$C_1 = \left[\frac{(1-\nu)(1-\nu^2)^2}{\nu^2(2-\nu)} \right]^{1/3} \quad C_3 = \left[\frac{2\pi^4}{3} \cdot \frac{(1-\nu)^2(1-\nu^2)}{\nu^4(2-\nu)^2} \right]^{1/3} \quad (V.8)$$

$$C_2 = \left[\frac{\pi^4}{12} \cdot \frac{(1-\nu^2)(2-\nu)}{\nu(1-\nu)} \right]^{1/3} \quad C_4 = \left[\frac{\pi^4}{12} \cdot \frac{(2-\nu^2)^3(1-\nu^2)(2-\nu)}{\nu^4(1-\nu)} \right]^{1/3}$$

Visando um procedimento mais simples para o cálculo do limite inferior da carga de flambagem, a expressão (V.6) foi aproximada numericamente:

$$\frac{\sigma_{cr}^*}{\sigma_{cr}} = C_5 Z^{-C_6} \quad (V.9)$$

onde os coeficientes C_5 e C_6 são dados pela tabela (V.1)

ν	$10^2 < Z < 10^4$		$Z > 10^4$	
	C_5	C_6	C_5	C_6
0,1	2,796	-0,246	7,641	-0,333
0,2	2,345	-0,275	4,617	-0,333
0,3	1,993	-0,289	3,714	-0,333
0,4	1,637	-0,296	2,514	-0,333

Tabela (V.1)

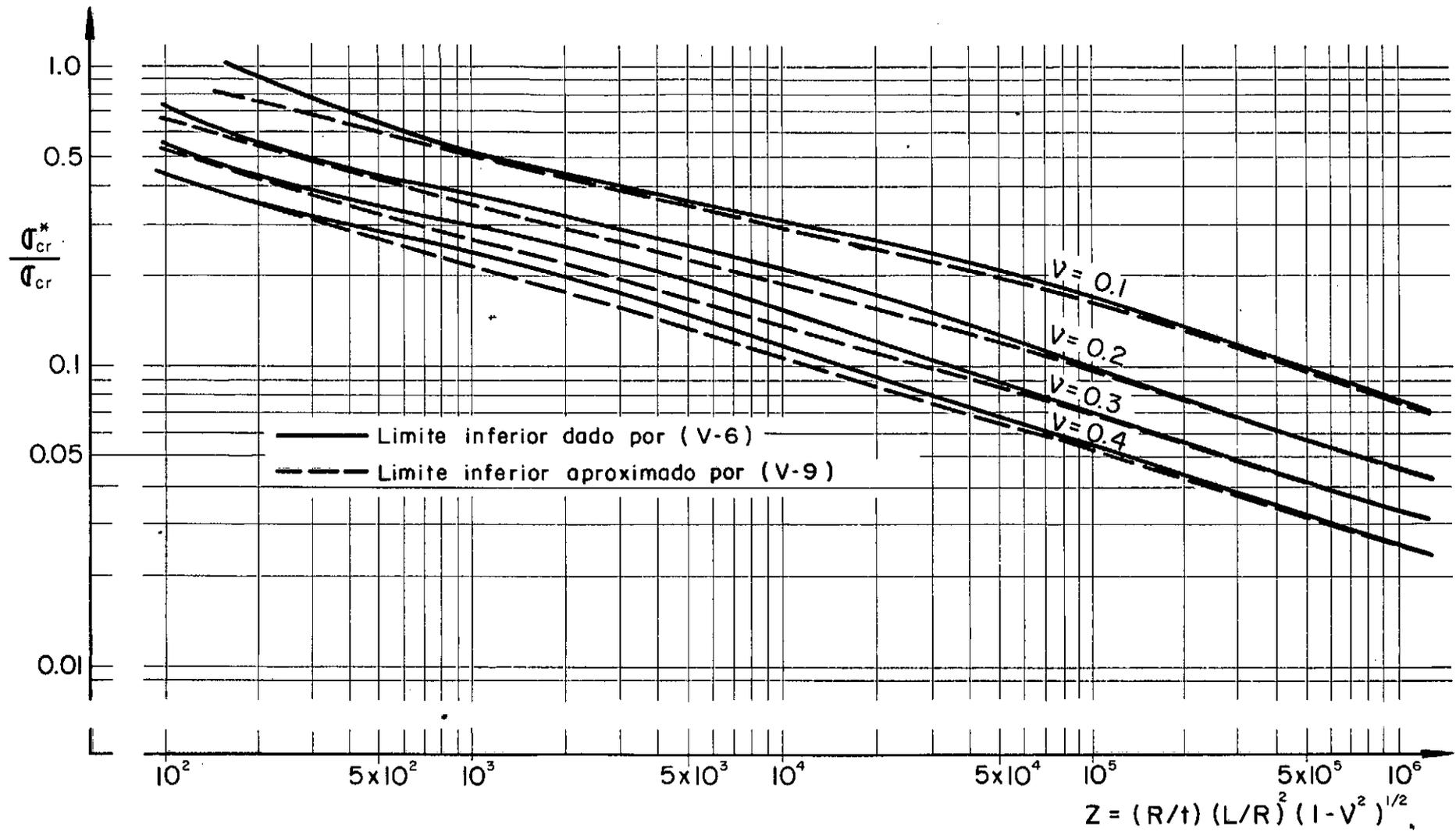


Figura: V.4 - LIMITE INFERIOR DA CARGA DE FLAMBAGEM.

A figura (V.4) mostra os valores de $\sigma_{cr}^*/\sigma_{cr}$ em função do parâmetro de Batdorf, obtidos através das equações (V.6) e (V.9); observa-se que (V.9) fornece uma boa aproximação e a favor da segurança.

V.2.2 - Correlações teórico-experimentais.

A figura (V.5) apresenta uma correlação entre os resultados dos problemas linearizados decorrentes da teoria clássica, dada pela equação (II.54), da teoria simplificada^{18,22} da

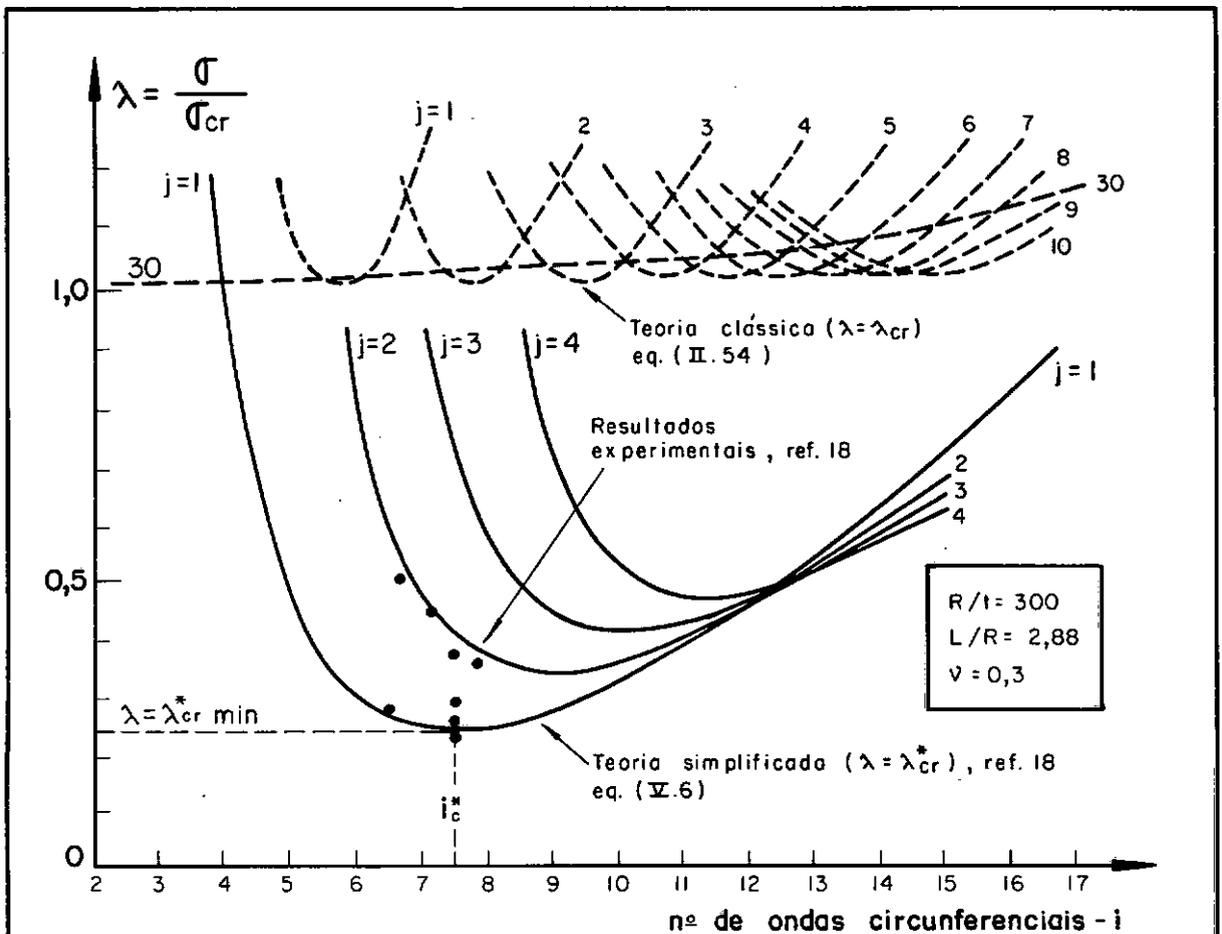


Figura V.5 - CORRELAÇÃO ENTRE AS TEÓRIAS CLÁSSICA, SIMPLIFICADA E RESULTADOS EXPERIMENTAIS.

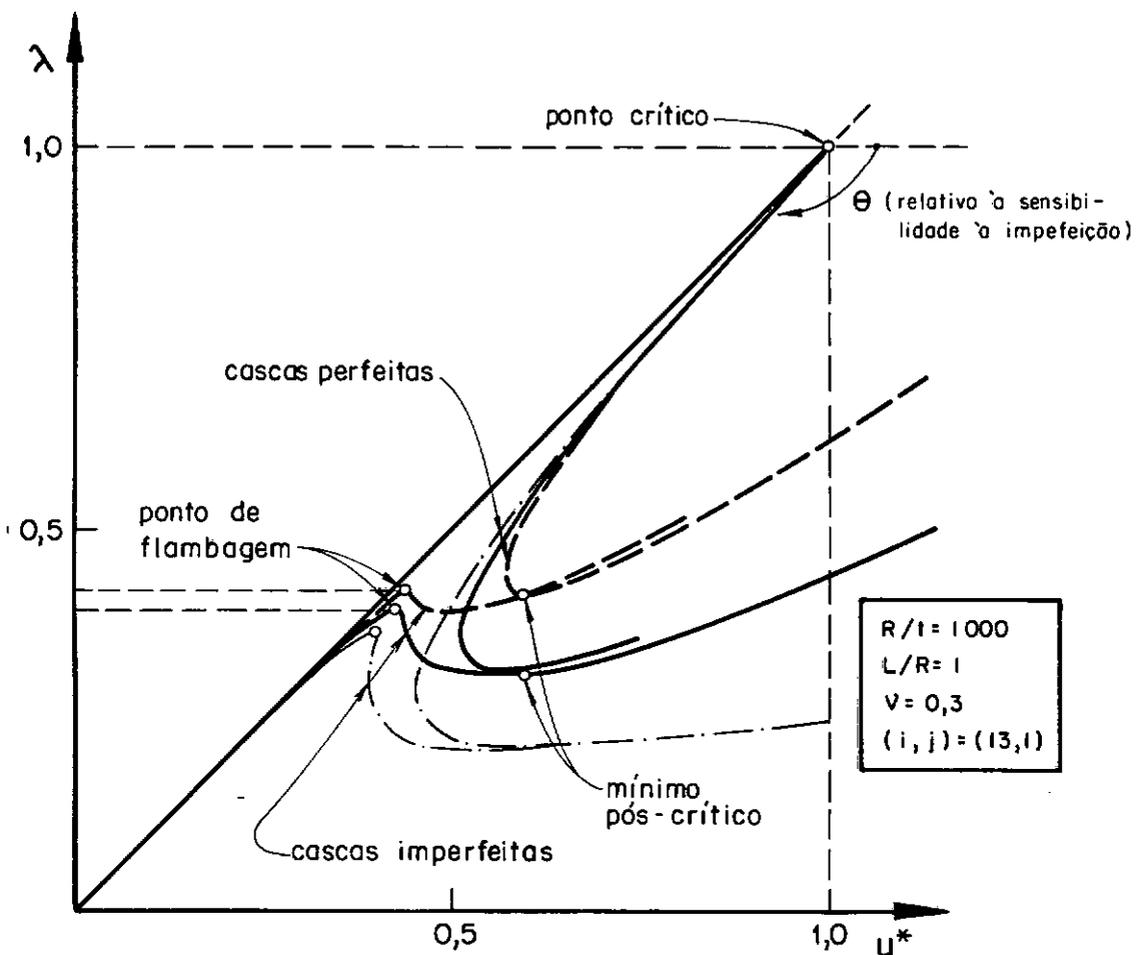
da pela equação (V.6) e resultados experimentais¹⁸ de modelos de cascas metálicas com propriedades indicadas na figura. Essa correlação mostra que:

- a) ao contrário da teoria clássica, equação (II.54), a teoria simplificada, equação (V.6), fornece uma carga crítica mínima bem definida, associada a um único modo crítico;
- b) esse modo crítico tem apenas uma meia onda axial ($j = 1$) e um certo número de ondas circunferenciais, i_{cr}^* , (ou mais precisamente um comprimento crítico de onda) o qual depende da geometria da casca; o par $(i_{cr}^*, 1)$ define um modo crítico aproximadamente igual ao modo dominante de flambagem observado experimentalmente¹⁸;
- c) a carga crítica reduzida, $\lambda_{cr}^* = \sigma_{cr}^* / \sigma_{cr}$, obtida com o modelo simplificado fornece um limite inferior para cargas de flambagem dessas cascas sensíveis a imperfeições; isso tem sido confirmado¹⁸ através de correlações com inúmeros resultados experimentais.

V.3 - Estimativa das Cargas de Flambagem

V.3.1 - O comportamento não-linear em estados pós-críticos avançados

Sabe-se da Teoria da Estabilidade^{10, 25} que o grau de sensibilidade a imperfeições iniciais de uma estrutura é indicado, em primeira aproximação, pelo ângulo θ que a tangente ao caminho pós-crítico, no ponto de bifurcação, faz com a direção associada com a condição neutra. Na seção (III.1) discutiu-se a necessidade da consideração do acoplamento de um modo axisimétrico, $w_{0, 2j}$, ao modo crítico assimétrico, $w_{i, j}$, para reproduzir a resposta pós-crítica inicial instável de cascas cilíndricas sob compressão axial. Essas situações são indicadas na figura (V.6), onde pode-se também notar que a adição de mais dois modos, acoplados aos dois primeiros, não modifica de forma considerável a instabilidade da resposta pós-crítica inicial e, conseqüentemente, o grau de sensibilidade a imperfeições. Estes



- 2 modos acoplados ($w = w_{i,j} + w_{0,2j}$)
- 4 modos acoplados ($w = w_{i,j} + w_{0,2j} + w_{2i,0} + w_{2i,2j}$)
- - - - - extrapolação para o acoplamento de mais de 4 modos

imperfeições: 2 modos: $\bar{w}_1 = 0,5, \bar{w}_2 = -1,0$

4 modos: $\bar{w}_1 = 0,5, \bar{w}_2 = -1,0, \bar{w}_3 = \bar{w}_4 = 0$

extrapolado: $\bar{w}_1 = 0,5, \bar{w}_2 = -1,0, \bar{w}_3 = \bar{w}_4 = \dots = 0$

Figura: V.6 - EFEITOS DO ACOPLAMENTO DE UM NÚMERO CRESCENTE DE MODOS DE DEFORMAÇÃO COM ONDAS LONGAS NA RESPOSTA NÃO-LINEAR DE CILINDROS AXIALMENTE COMPRIMIDOS.

últimos resultados foram mostrados no capítulo (IV), onde se salientou ainda as severas reduções sofridas, com o acréscimo de imperfeições nos dois modos dominantes, pela mais importante componente estabilizadora de energia, durante a resposta não-linear até a flambagem, e a relevância dessas reduções de energia para a carga de flambagem.

A análise feita em capítulos anteriores focalizou, então, o comportamento pós-crítico ou de flambagem inicial e culminou, na seção (V.2), com a verificação de um modelo teórico linearizado¹⁸. Alternativamente, o objetivo da presente seção é o de examinar o comportamento não-linear em estados pós-críticos avançados, já que o grau de estabilidade desses estados pode ter influência considerável sobre as cargas de flambagem.

A figura (V.6) apresenta as projeções sobre o plano $\lambda - u^*$ dos caminhos de equilíbrio de cascas perfeitas e imperfeitas, com propriedades indicadas na figura, considerando o acoplamento entre 2 modos ($w = w_{i,j} + w_{0,2j}$) e entre 4 modos ($w = w_{i,j} + w_{0,2j} + w_{2i,0} + w_{2i,2j}$) de ondas longas longitudinais. Observa-se que no estágio pós-crítico inicial existe uma quase coincidência entre as curvas relativas a 2 modos e a 4 modos e, existem indicações¹³, pelo menos para modos de ondas curtas, que esta coincidência deve permanecer para um número maior de modos acoplados; a validade desse argumento é garantida pela observação de que nesta região o modo crítico $w_{i,j}$ é dominante. Em estados pós-críticos mais avançados, onde as amplitudes dos modos secundários já são consideráveis, estas respostas pós-críticas são divergentes. Nota-se a tendência de diminuição da carga mínima pós-crítica (ou ponto de mínimo pós-crítico) à medida que o número de modos acoplados é aumentado; o caso multimodos é sugerido na figura (V.6) pela curva traço-ponto, a qual tende a estados neutros de equilíbrio após o trecho instável inicial. As respostas não-lineares de estruturas imperfeitas, sendo assintóticas aos caminhos pós-críticos, sofrem então a mesma influência da interação não-linear entre os modos, para estados avançados de deformação, e isto tem por sua vez um reflexo direto sobre o comportamento de estados vizinhos à flambagem. Em outras palavras, o comportamento na flambagem (que ocorre para peque-

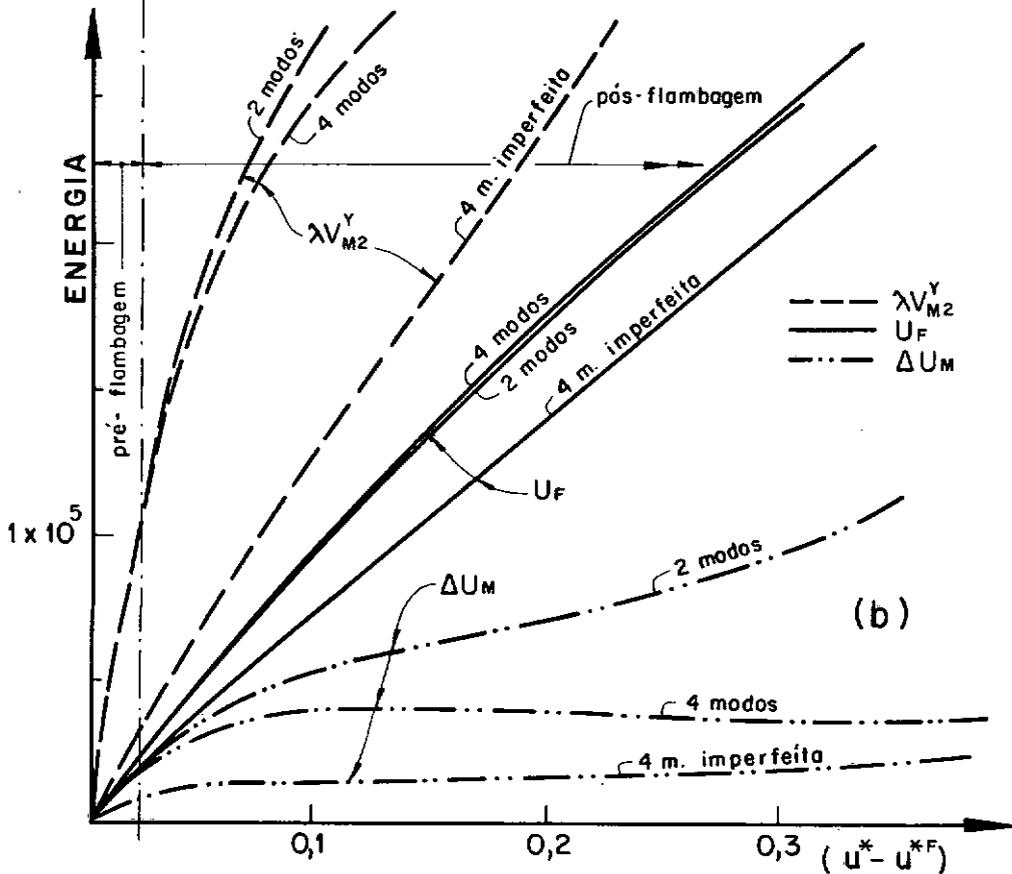
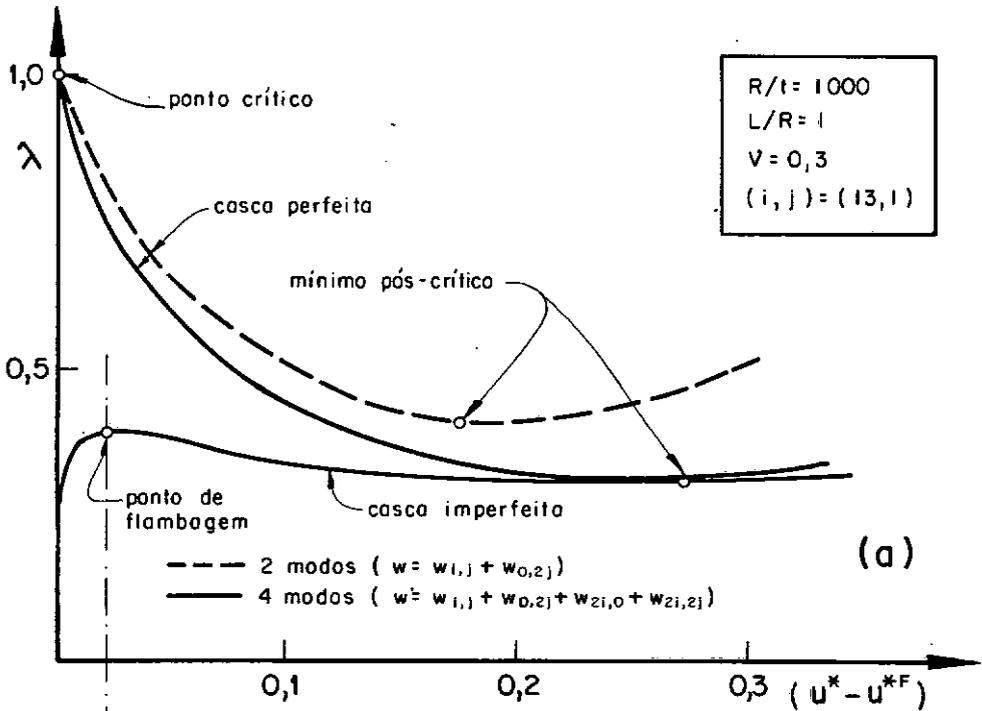


Figura: V.7 - COMPORTAMENTO EM ESTADOS PÓS-CRÍTICOS EM FUNÇÃO DA DEFORMAÇÃO INCREMENTAL EM MODOS DE ONDAS LONGAS.

(a) Resposta não-linear

(b) Distribuição das parcelas estabilizadoras

nas e médias deformações incrementais) e, conseqüentemente, a própria carga de flambagem dependem, além do comportamento pós-crítico inicial, também do comportamento da casca em estados avançados pós-críticos.

O que se pretende portanto nesta seção, recorrendo agora ao estudo das distribuições de energia em estados pós-críticos avançados, é a obtenção de informações que permitam simular, com um modelo matemático simples, o efeito do acoplamento de vários modos de deformação sobre a resposta não-linear de cascas cilíndricas imperfeitas e as reduções adicionais da carga de flambagem (indicada para o caso de 4 modos na figura (V.6)) decorrentes desse efeito.

Como, em estados pós-críticos avançados, as amplitudes dos modos secundários apresentam valores significativos, a deformação incremental da casca é melhor representada por $(u^* - u^{*F})$. A figura (V.7a) mostra, para 3 dos casos da figura (V.6), as projeções das respostas não-lineares sobre o plano $\lambda - (u^* - u^{*F})$ e na figura (V.7b) são apresentadas as correspondentes distribuições das parcelas estabilizadoras de energia em função da deformação incremental em modos de ondas longas axiais. Conforme descrito anteriormente nas seções (IV.2) e (V.2), observa-se que, para estados de deformação vizinhos à flambagem, imperfeições geométricas são o principal fator na redução da rigidez (ou energia estabilizadora) da casca, afetando principalmente a componente circunferencial da energia potencial de membrana, $\lambda V_{M_2}^Y$. Para grandes deformações incrementais, contudo, é a energia incremental de membrana, ΔU_M , que sofre as mais severas variações (reduções) com o acréscimo do número de modos acoplados.

No estudo do comportamento não-linear em estados pós-críticos avançados, é importante se levar em conta o comportamento dessas cascas deformando-se em modos de ondas curtas longitudinais pois, observações experimentais revelam que estes modos apresentam-se de forma dominante nestes estados. A influência do comprimento de onda axial do modo crítico na resposta não-linear da casca e nas distribuições de energia podem ser observadas com o auxílio das figuras (V.8) a (V.10).

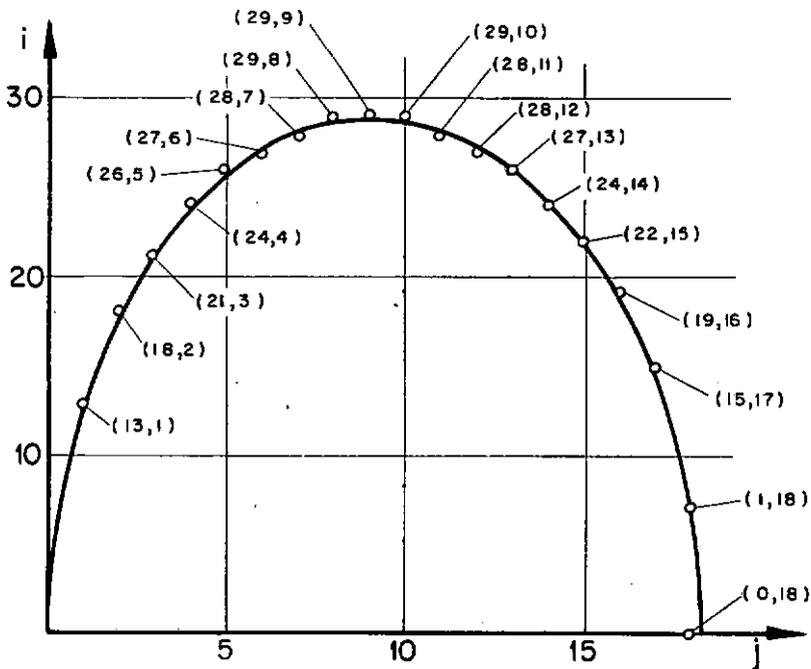


Figura: V.8 - CÍRCULO DE KOITER PARA $R/t=1000$, $L/R=1$, $V=0,3$.

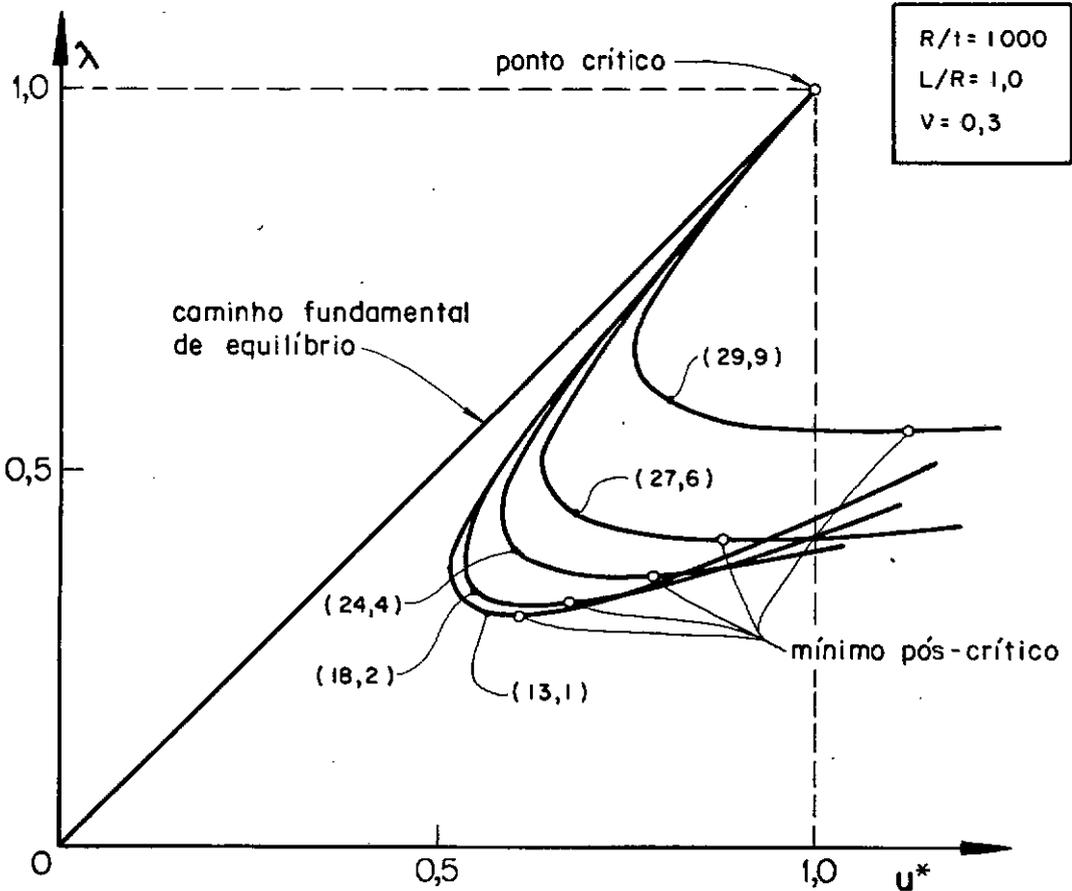
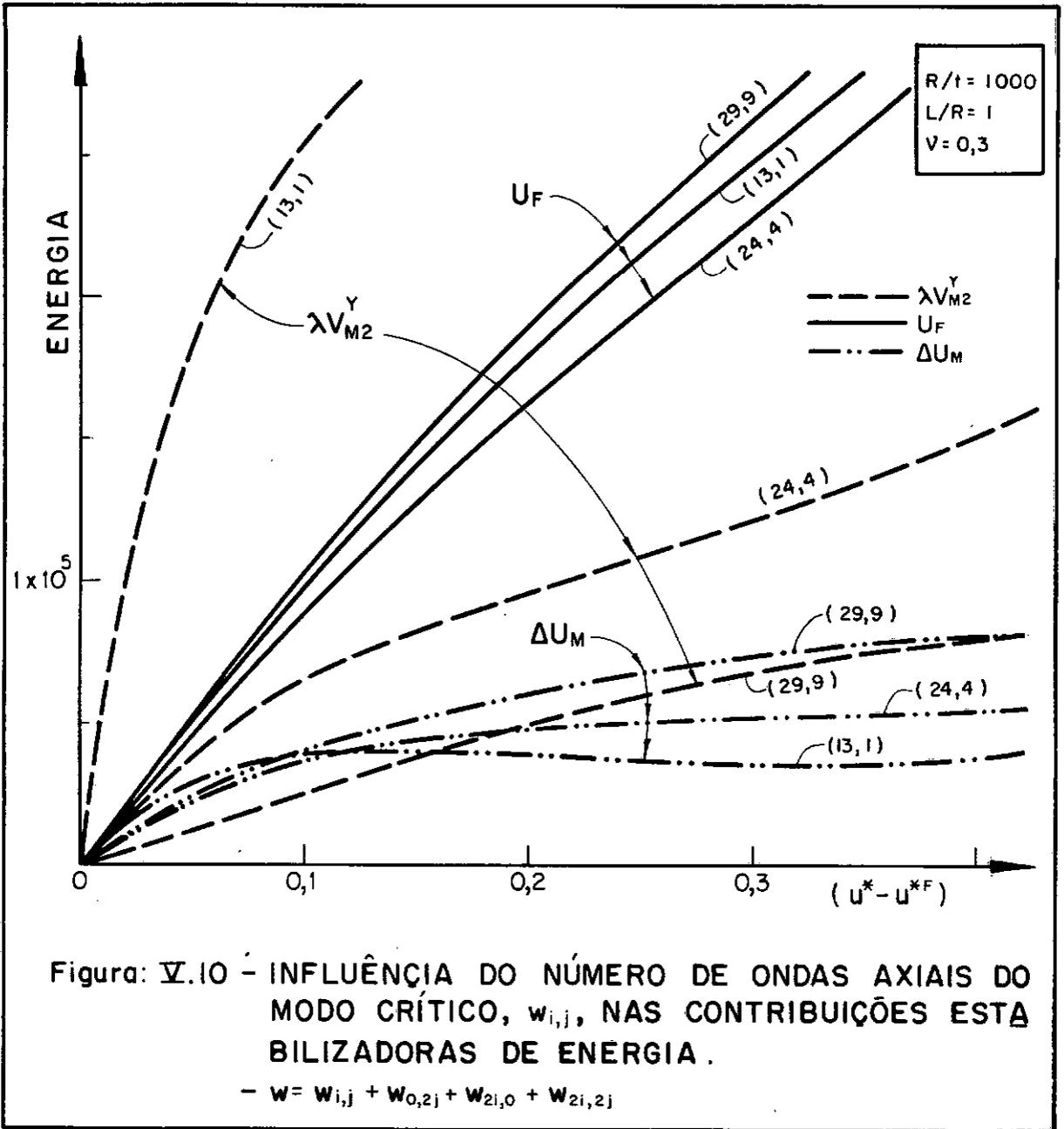


Figura: V.9 - INFLUÊNCIA DO NÚMERO DE ONDAS DO MODO CRÍTICO, $w_{i,j}$, NA RESPOSTA PÓS-CRÍTICA DE CILINDROS COMPRIMIDOS.

$$- w = w_{i,j} + w_{0,2j} + w_{2i,0} + w_{2i,2j}$$



Apresenta-se na figura (V.8), o círculo de Koiter para cilindros com $R/t = 1000$ e $L/R = 1$. A curva cheia representa a equação (II.55) e os pares (i,j) , representados por pequenos círculos, são aproximações para valores inteiros de pares de ondas, definindo uma família de modos críticos $w_{i,j}$ associados a $\lambda_{cr} = 1$.

A figura (V.9) mostra as projeções dos caminhos de equilíbrio sobre o plano $\lambda - u^*$ considerando-se a combinação de 4 modos dada por (III.7), sendo, em cada caso o modo crítico $w_{i,j}$ definido pelos pares $(13, 1)$, $(18, 2)$, $(24, 4)$, $(27, 6)$ e $(29, 9)$. Nota-se que à medida em que se diminui o comprimento de onda axial, a sensibilidade a imperfeições decresce e veri-

fica-se uma tendência a um equilíbrio quase neutro em torno do ponto de mínimo pós-crítico.

A variação das parcelas estabilizadoras com a deformação incremental ($u^* - u^{*F}$) e com o comprimento de onda axial do modo crítico é apresentada na figura (V.10). Observa-se que para modos de ondas curtas longitudinais, por exemplo $(i,j) \equiv (29, 9)$, a energia de flexão, U_F , torna-se a principal contribuição estabilizadora e a energia incremental de membrana, ΔU_M , também assume um papel de crescente importância em detrimento de $\lambda V_{M_2}^Y$, cuja contribuição decresce acentuadamente.

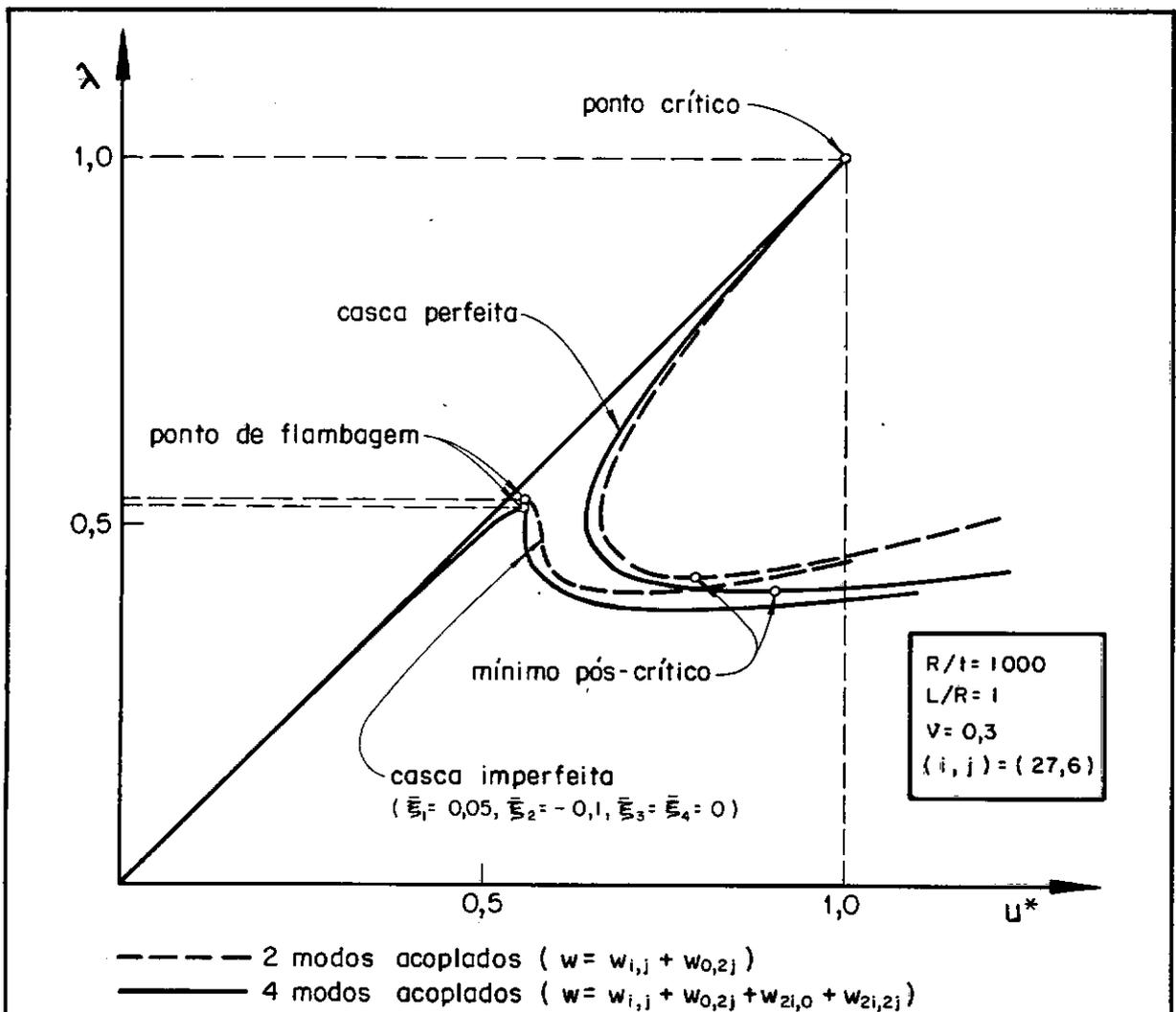


Figura: V.11 - EFEITOS DO ACOPLAMENTO DE UM NÚMERO CRESCENTE DE MODOS DE DEFORMAÇÃO COM ONDAS CURTAS NA RESPOSTA NÃO LINEAR DE CILINDROS AXIALMENTE COMPRIMIDOS.

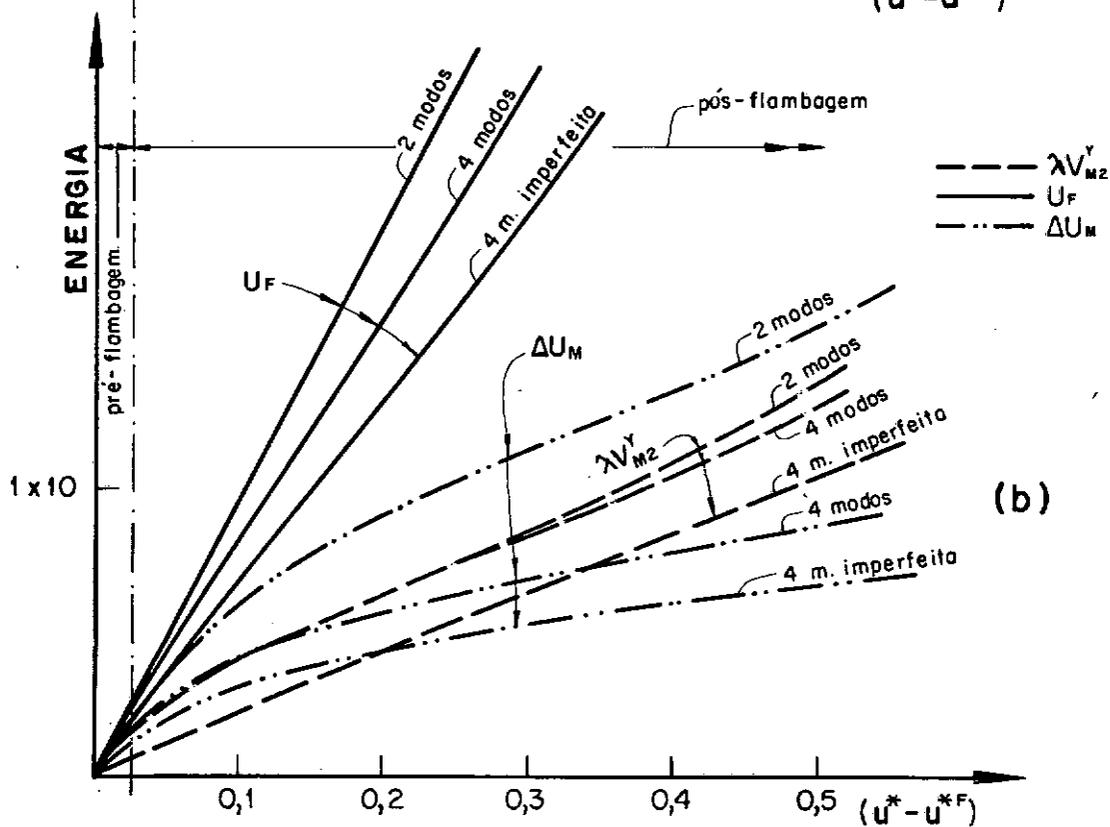
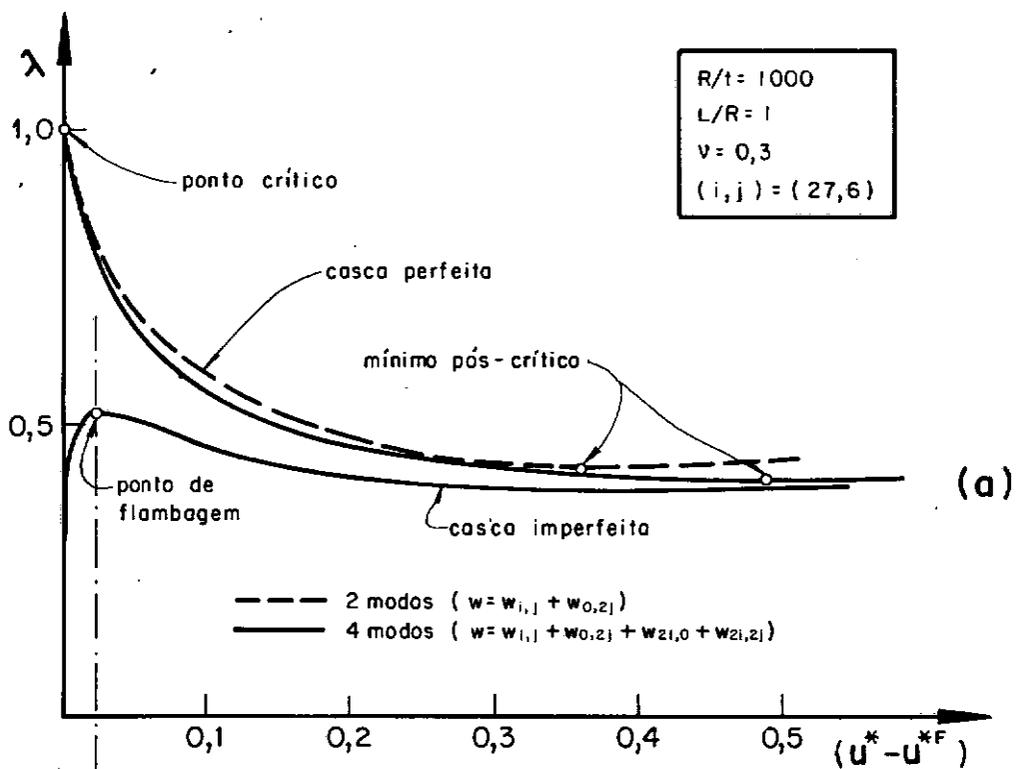


Figura: V.12 - COMPORTAMENTO EM ESTADOS PÓS-CRÍTICOS, MODOS DE ONDAS CURTAS.

(a) Reposta não-linear

(b) Distribuição das parcelas estabilizadoras

As figuras (V.11) e (V.12) são análogas às figuras (V.6) e (V.7) respectivamente, mas nelas, o modo crítico $w_{i,j}$ é definido pelo par (27,6). Assim, pode-se observar a influência do acoplamento de um número crescente de modos quando estes possuem um pequeno comprimento de onda axial. Através das distribuições de energia mostradas na figura (V.12b) torna-se mais evidente que o acoplamento de vários modos de deformação reduzem substancialmente a energia incremental de membrana, ΔU_M , em estados pós-críticos avançados. Verifica-se também que a redução de $\lambda V_{M_2}^Y$ devido a imperfeições geométricas é relativamente grande em estágios iniciais, mas permanece quase constante em estágios avançados; por outro lado, com o incremento de deformações as imperfeições provocam reduções crescentes em ΔU_M .

O que se pode concluir é que se fossem considerados um maior número de modos de deformação na análise, incluindo o acoplamento entre modos de ondas longas longitudinais, dominantes na iminência da flambagem, e modos de ondas curtas, dominantes em estados pós-flambagem avançados, as variações relativas mais importantes nas contribuições estabilizadoras para grandes deformações, seriam aquelas associadas à energia incremental de membrana, ΔU_M , a qual sofre reduções acentuadas. Essas reduções sugerem o cancelamento, no funcional de energia, de componentes positivas de ΔU_M , de maneira a simular os efeitos que seriam causados pelo acoplamento de mais modos de deformação na resposta de flambagem de cascas imperfeitas.

V.3.2 - O problema não-linear com energia reduzida

O objetivo deste modelo não-linear com energia reduzida é a obtenção de uma melhor estimativa da carga de flambagem, através de um procedimento simples. Considera-se então a deformação incremental nos modos de ondas longas axiais dominantes na pré-flambagem e, através de simplificações na energia incremental de membrana, simula-se o efeito do acoplamento de mais modos, inclusive os de ondas curtas longitudinais.

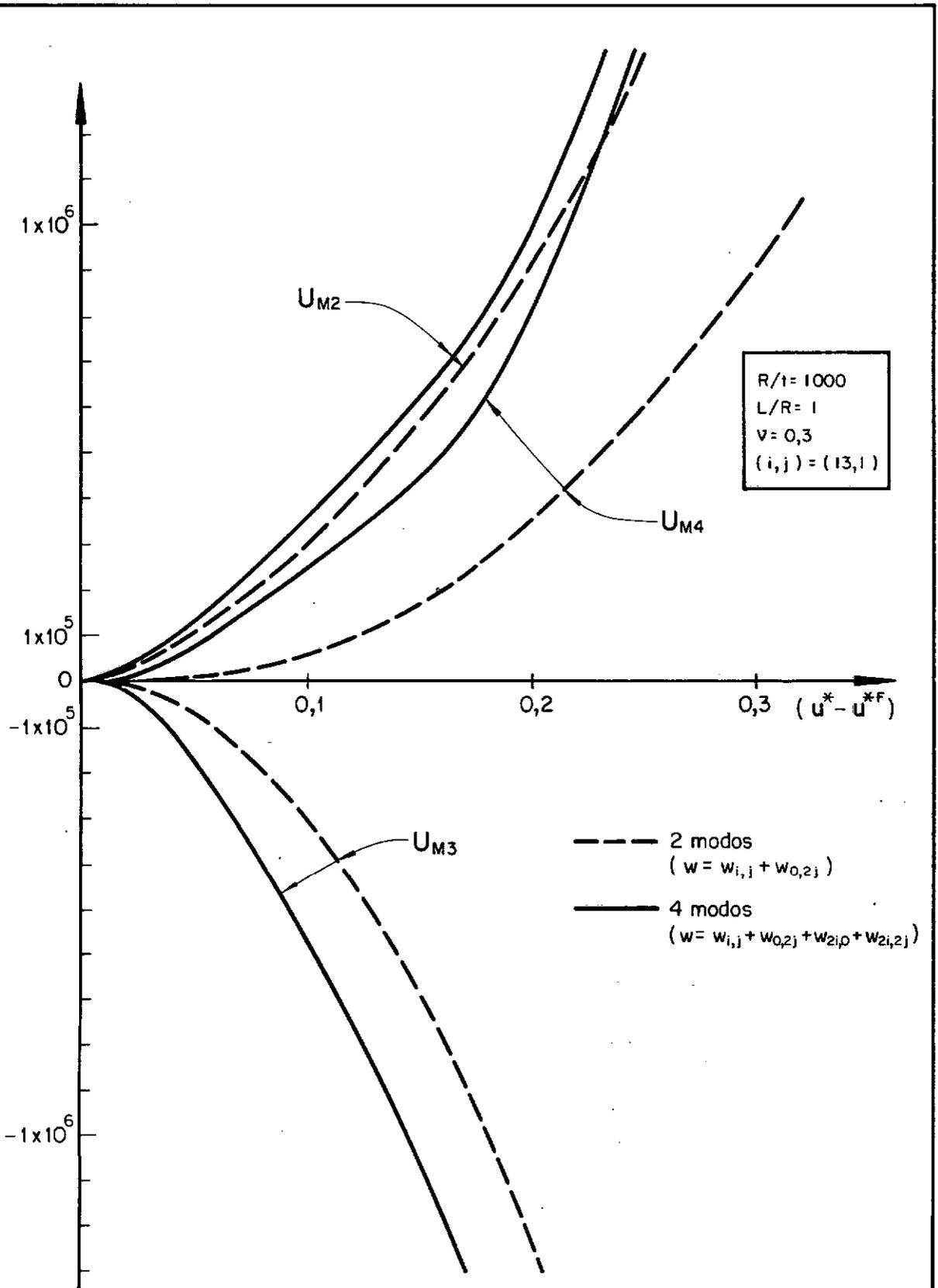


Figura: V.13 - VARIACÃO DAS COMPONENTES U_{M2} , U_{M3} e U_{M4} COM O AUMENTO DE MODOS ACOPLADOS.

A figura (V.13) mostra o comportamento das componentes quadrática (U_{M_2}), cúbica (U_{M_3}) e quártica (U_{M_4}) da energia incremental de membrana (ΔU_M) com o crescimento da deformação incremental ($u^* - u^{*F}$) em modos de ondas longas e considerando o acoplamento entre 2 ou 4 modos. Observa-se que U_{M_2} e U_{M_4} são estabilizadoras enquanto que U_{M_3} é desestabilizadora. Observa-se ainda que, crescendo o número de modos acoplados, tem-se variação relativamente pequena em U_{M_2} , mas a influência em U_{M_4} e U_{M_3} é considerável. Apesar do crescimento de cada uma, a soma das três parcelas tem, para grandes deformações, variação aproximadamente nula, principalmente com o aumento do número de modos acoplados, como mostram as curvas de ΔU_M da figura (V.7b); isto também é observado na figura (V.12b) para a deformação em modos de ondas curtas.

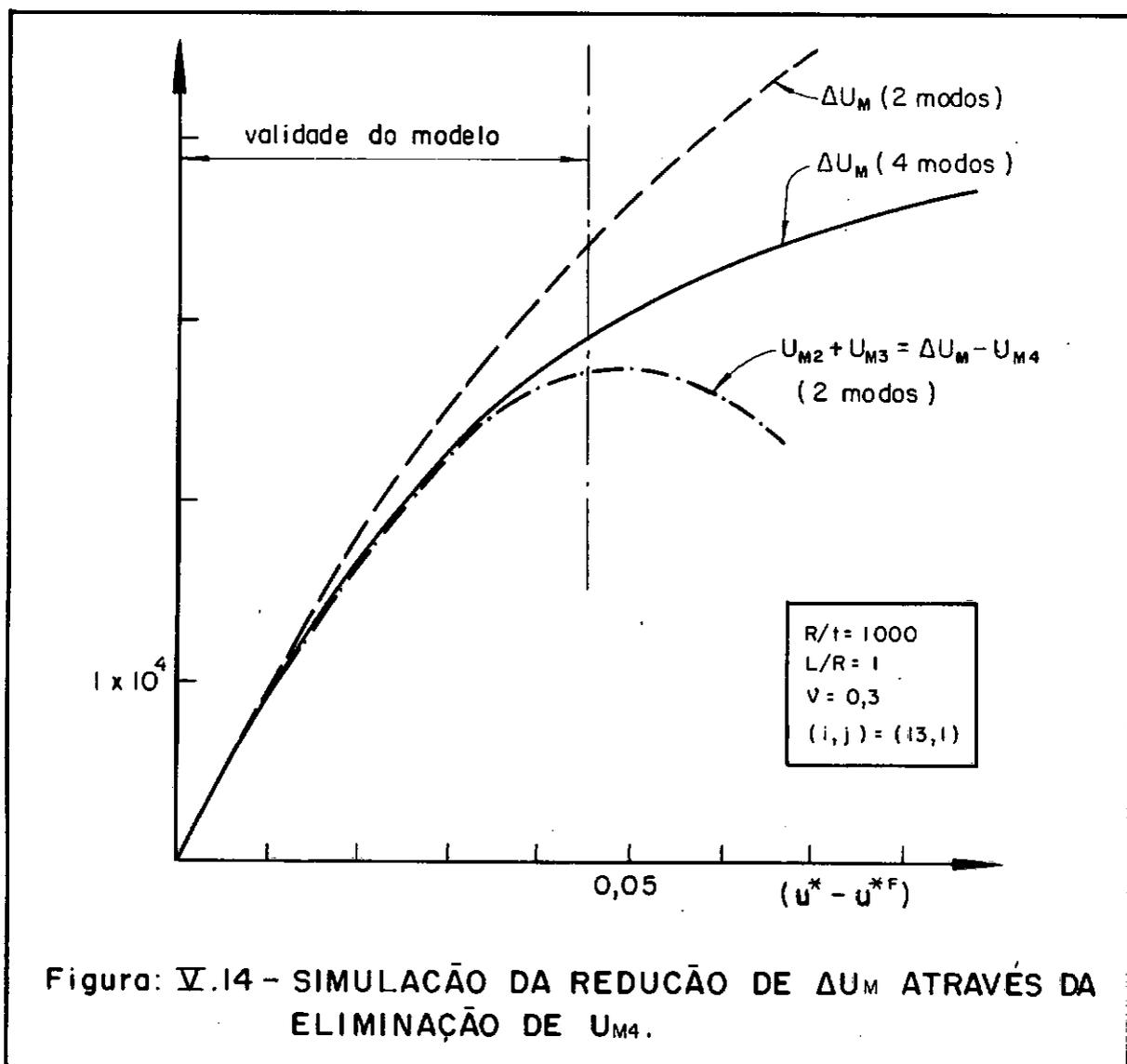


Figura: V.14 - SIMULAÇÃO DA REDUÇÃO DE ΔU_M ATRAVÉS DA ELIMINAÇÃO DE U_{M_4} .

Seguindo filosofia idêntica àquela empregada para o modelo simplificado da seção (V.2), elimina-se do funcional de energia a contribuição estabilizadora mais afetada, no caso U_{M_4} . O efeito dessa omissão de U_{M_4} em uma análise não-linear reproduz, para pequenas deformações, a redução de ΔU_M provocada pelo acoplamento de novos modos. A figura (V.14) ilustra o fato mostrando as curvas de ΔU_M para 2 e 4 modos e a curva de $(U_{M_2} + U_{M_3} = \Delta U_M - U_{M_4})$ para 2 modos. Esta figura também mostra que a validade do modelo é limitada a pequenas deformações incrementais.

Estas conclusões podem ser verificadas analiticamente pelo desenvolvimento a seguir:

A energia incremental de membrana é dada por:

$$\Delta U_M = \frac{K}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} (\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + 2\nu \epsilon_x \epsilon_y + \frac{1-\nu}{2} \gamma_{xy}^2) dx dy \quad (V.10)$$

Assumindo-se que o deslocamento radial incremental seja representado apenas pelo modo crítico:

$$w = \xi_1 t \cos Iy \operatorname{sen} Jx,$$

obtem-se, substituindo na equação de compatibilidade (II.63a), a função de tensões:

$$f = f_1 \cos Iy \operatorname{sen} Jx + f_2 \cos 2Jx + f_3 \cos 2Iy \quad (V.11)$$

onde

$$f_1 = \frac{Et}{(I^2 + J^2)^2} \left[\frac{J^2 t}{R} \xi_1 \right] \quad (V.12a)$$

$$f_2 = \frac{Et}{16J^4} \left[\frac{J^2 I^2 t^2}{2} \xi_1^2 \right] \quad (V.12b)$$

$$f_3 = \frac{Et}{16I^4} \left[-\frac{J^2 I^2 t^2}{2} \xi_1^2 \right] \quad (V.12c)$$

Substituindo-se (V.11) nas expressões das deformações em função da função de tensões (II.44b), e estas em (V.10), após a integração chega-se a:

$$\Delta U_M = \frac{\pi RL}{4Et} \left[(I^2 + J^2)^2 f_1^2 + 32 J^4 f_2^2 + 32 I^4 f_3^2 \right] \quad (V.13)$$

Nota-se que ΔU_M será reduzida se e só se os valores absolutos de f_1 , f_2 e f_3 forem reduzidos. Por outro lado, a introdução de novos termos na função de tensões, acarretados pela combinação de mais modos de deformação, provoca a acumulação de novos termos positivos em ΔU_M . Portanto, os modos a serem introduzidos na análise devem:

- a) Reduzir os valores absolutos dos coeficientes f_i dos termos já existentes na função de tensões.
- b) Caso introduzam novos termos em f , que sejam de pequena ordem.

Com a introdução do modo axissimétrico, $w_{0,2j}$, tem-se:

$$w = \xi_1 t \cos Iy \sin Jx + \xi_2 t \cos 2Jx$$

e

$$f = f_1 \cos Iy \sin Jx + f_2 \cos 2Jx + f_3 \cos 2Iy + f_5 \cos Iy \sin 3Jx \quad (V.14)$$

onde

$$f_1 = \frac{Et}{(I^2 + J^2)^2} \left[2I^2 J^2 t^2 \xi_1 \xi_2 + \frac{J^2 t}{R} \xi_1 \right] \quad (V.15a)$$

$$f_2 = \frac{Et}{16J^4} \left[\frac{I^2 J^2 t^2}{2} \xi_1^2 + \frac{4J^2 t}{R} \xi_2 \right] \quad (V.15b)$$

$$f_3 = \frac{Et}{16I^4} \left[-\frac{I^2 J^2 t^2}{2} \xi_1^2 \right] \quad (V.15c)$$

$$f_5 = \frac{Et}{(I^2 + 9J^2)^2} \left[-2I^2 J^2 t^2 \xi_1 \xi_2 \right] \quad (V.15d)$$

Com os valores de ξ_1 e ξ_2 fornecidos pela figura (IV.4b), verifica-se que $\xi_2 \rightarrow (-RtI^2/8)\xi_1^2$; então $f_2 \rightarrow 0$. Supondo que ξ_1 é pequeno, a redução em ΔU_M é notória pois a contribuição de f_5 , além de ser pequena (ordem de ξ_1^3) tende a ser anulada por uma redução de mesma ordem em f_1 .

Quando o deslocamento radial incremental é dado pela combinação de 4 modos, dados por (III.7), verifica-se pelas expressões da função de tensões (III.11) e (III.12) e de ΔU_M (III.25) que a redução de ΔU_M se faz através de mecanismo análogo.

Generalizando-se, pode-se dizer que a adição de novos modos de deformação na análise teria como consequência a introdução de contribuições lineares em ξ que reduzem os coeficientes f_i já existentes, os quais são funções quadráticas das amplitudes dos modos previamente adotados. Considerando que as amplitudes são pequenas, as contribuições quadráticas introduzidas nos f_i já existentes, bem como a introdução de novos coeficientes quadráticos em ξ , tem pouca importância. Identificando os termos lineares, quadráticos, cúbicos e quárticos em ξ por ('), (''), ('''') e ('''') respectivamente, tem-se;

$$\begin{aligned} \Delta U_M &= \Delta U_M'' + \Delta U_M''' + \Delta U_M'''' = \\ &= \sum_{i=1}^n a_i (f_i')^2 = \sum_{i=1}^n a_i (f_i' + f_i'')^2 \end{aligned} \quad (V.16)$$

e

$$\Delta U_M'' = \sum_{i=1}^n a_i (f_i')^2 \quad (V.17a)$$

$$\Delta U_M''' = \sum_{i=1}^n a_i (2f_i' f_i'') \quad (V.17b)$$

$$\Delta U_M'''' = \sum_{i=1}^n a_i (f_i'')^2 \quad (V.17c)$$

Assim, os coeficientes f_i'' , quadráticas em ξ , contribuem para $\Delta U_M''''$. O acoplamento com novos modos, introduzirá contribuições em $\Delta U_M''$ e $\Delta U_M'''$ que tendem a anular $\Delta U_M''''$. Em estágio

pós-crítico inicial, quando as amplitudes dos modos de deformação são pequenas, a interação não-linear entre muitos modos será reproduzida se eliminarmos $\Delta U_M''''$ do funcional de energia potencial total.

A eliminação de $\Delta U_M''''$ da análise tem como consequência o cancelamento dos termos cúbicos em ξ nas equações (III.15), deixando inalterados os termos lineares associados a U_F e a $\lambda \hat{V}_{M_2}^Y$.

Esta simplificação é válida para pequenas amplitudes de deformação, e portanto, o modelo se aplica para cascas que apresentem a flambagem com $\xi_1 \leq 1$; o que implica em que as amplitudes de imperfeições devem também ser relativamente pequenas. Assim termos nas formas $\bar{\xi}_i \xi_j \xi_k$ e $\bar{\xi}_i \bar{\xi}_j \xi_k$ também podem ser cancelados nas equações (III.15). Nesses estados de pequenas deformações incrementais, as amplitudes dos modos secundários são ainda muito pequenas, portanto, serão considerados apenas 2 modos ($w = w_{i,j} + w_{0,2j}$).

Dessa maneira, as equações algébricas de equilíbrio para o novo modelo não-linear ficam,

$$C_1 \xi_1 - \lambda \delta_1 + \frac{1}{2} C_5 \delta_{1,2} \xi_2 + 2C_6 (\delta_{2,1} \xi_1 + \Psi_{12}) = 0 \quad (V.18a)$$

$$C_2 \xi_2 - \lambda \delta_2 + \frac{1}{32} C_5 \Psi_{11} + \frac{1}{4} C_6 \delta_{1,1} \xi_1 = 0 \quad (V.18b)$$

onde

$$\delta_i = (\xi_i + \bar{\xi}_i) \quad \text{e} \quad \Psi_{i,j} = (\xi_i \xi_j + \bar{\xi}_i \xi_j + \bar{\xi}_j \xi_i)$$

$$C_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{(\alpha^2 + \beta^2)^2}{\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \right] \quad C_5 = c \frac{\beta^2}{\alpha^2} \quad (V.19)$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \left[4\alpha^2 + \frac{1}{4\alpha^2} \right] \quad C_6 = c \frac{\alpha^2 \beta^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2}$$

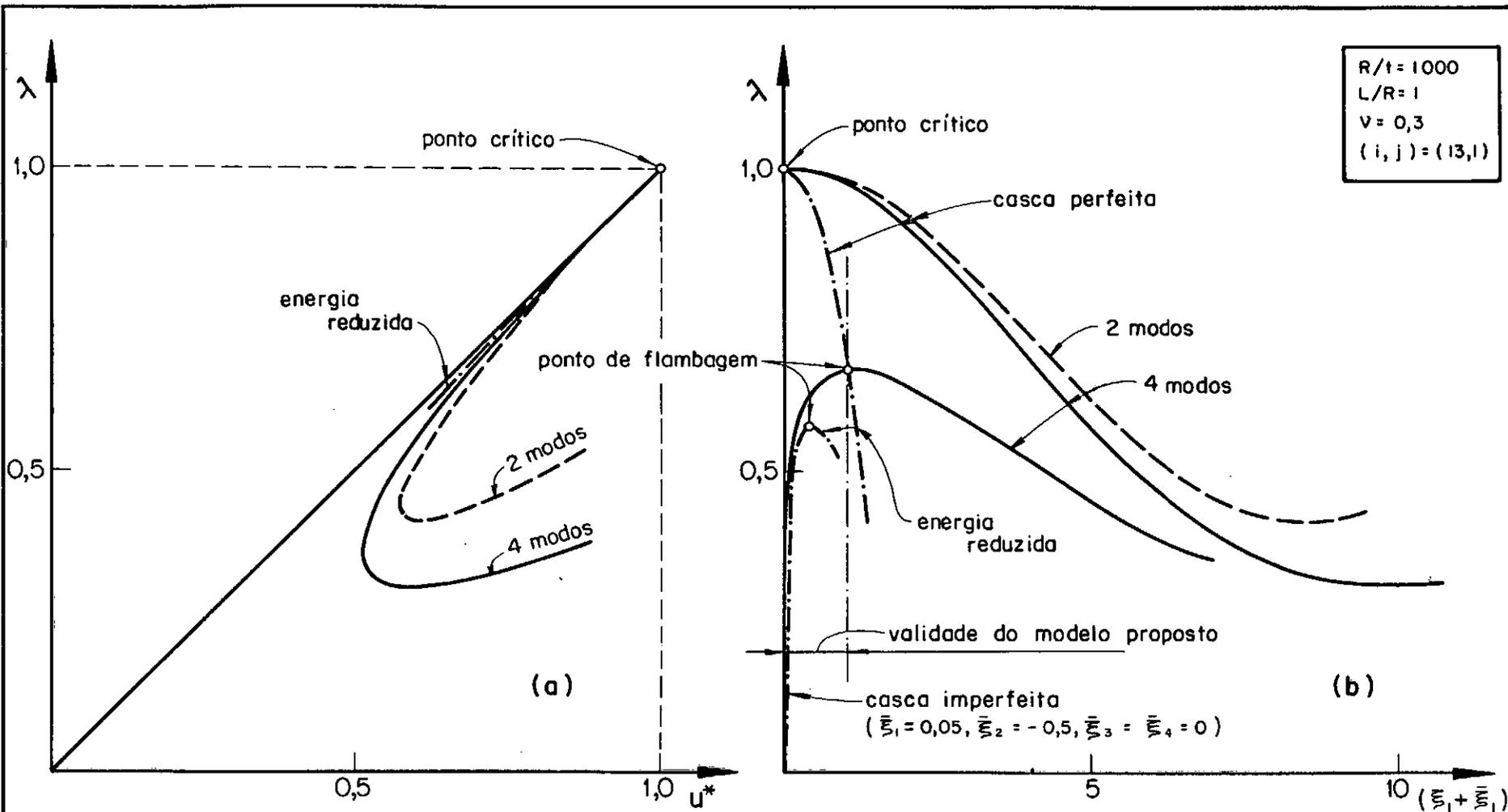


Figura: V.15 - RESPOSTA DO MODELO NÃO-LINEAR COM ENERGIA REDUZIDA.

(a) projeção sobre $\lambda \times u^*$

(b) projeção sobre $\lambda \times (\xi_1 + \xi_2)$

As equações (V.18) constituem então um modelo simplificado, que leva em conta o efeito do acoplamento de vários modos de deformação, para estimativas das cargas de flambagem. A figura (V.15) mostra o tipo de resposta obtida. Será mostrado no próximo capítulo que as cargas teóricas de flambagem λ_{ft} ($\max \lambda$) obtidas dessas equações, quando são conhecidas as imperfeições, são próximas daquelas observadas experimentalmente, oferecendo ainda a vantagem de poderem ser programadas em pequenas calculadoras.

CAPÍTULO VI

COMPARAÇÃO DE RESULTADOS

VI.1 - Comparações entre Resultados Teóricos Obtidos com o Modelo Linearizado da Seção (V.2) e Resultados Experimentais.

A primeira dificuldade encontrada na utilização de análises não-lineares para estimativas de flambagem de cascas cilíndricas é a previsão de formas e magnitudes das imperfeições geométricas iniciais e isto tem levado pesquisadores à busca de um limite inferior da carga de flambagem. Conforme discutido no capítulo (I), tem-se procurado adotar⁶⁻¹⁵ como estimativa desse limite inferior o valor da carga no ponto de mínimo pós-crítico. Mencionou-se, entretanto, que este procedimento para obtenção desse mínimo, além de ser conceitualmente duvidoso, resultaria em grandes dificuldades adicionais pois, como observado em capítulos anteriores, haveria a necessidade da consideração, em uma análise não-linear, de um número elevado de modos de deformação. A alternativa dada pelo modelo simplificado com energia reduzida¹⁸, apresentado na seção (V.2), contorna essas dificuldades fornecendo limites inferiores através de um procedimento simples e seguro.

A figura (VI.1) mostra como se comparam os limites inferiores calculados pela equação (V.6) e os pontos de mínimo pós-crítico obtidos através das equações (III.15), onde é considerado a acoplamento de 4 modos de deformação. Deve-se observar que uma estimativa via análise não-linear requeria talvez, para certas geometrias, a consideração de um maior número de modos, principalmente para cilindros mais longos (maiores L/R) e de curvatura mais suave (maiores R/t)

A figura (V.5) da seção (V.2) mostrou, para uma dada geometria, uma boa correlação dos resultados fornecidos por este modelo simplificado com observações experimentais, tanto

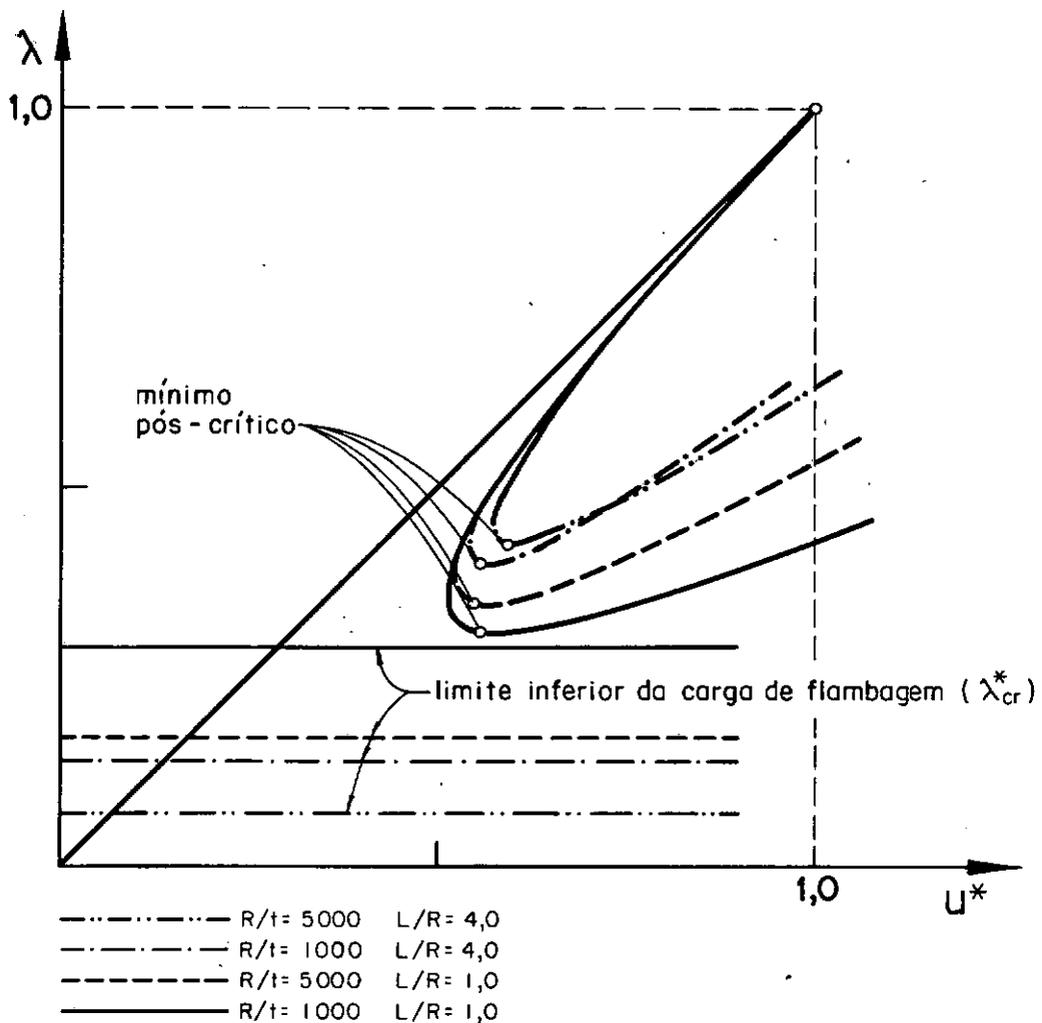


Figura: VI.1 - COMPARAÇÃO DO LIMITE INFERIOR DA CARGA DE FLAMBAGEM (V.6) COM O MÍNIMO PÓS-CRÍTICO (III.15).

para o valor do limite inferior da carga de flambagem quanto para a forma do modo crítico de deformação. Esta correlação favorável tem sido verificada para várias geometrias - conforme a apresentação feita nas referências 18, 22 e 23 - e aqui é ilustrada através da figura (VI.2). Nessa figura, observa-se ainda a dependência do limite inferior da carga de flambagem em relação aos parâmetros geométricos, R/t e L/R , e a confirmação experimental dessas previsões teóricas.

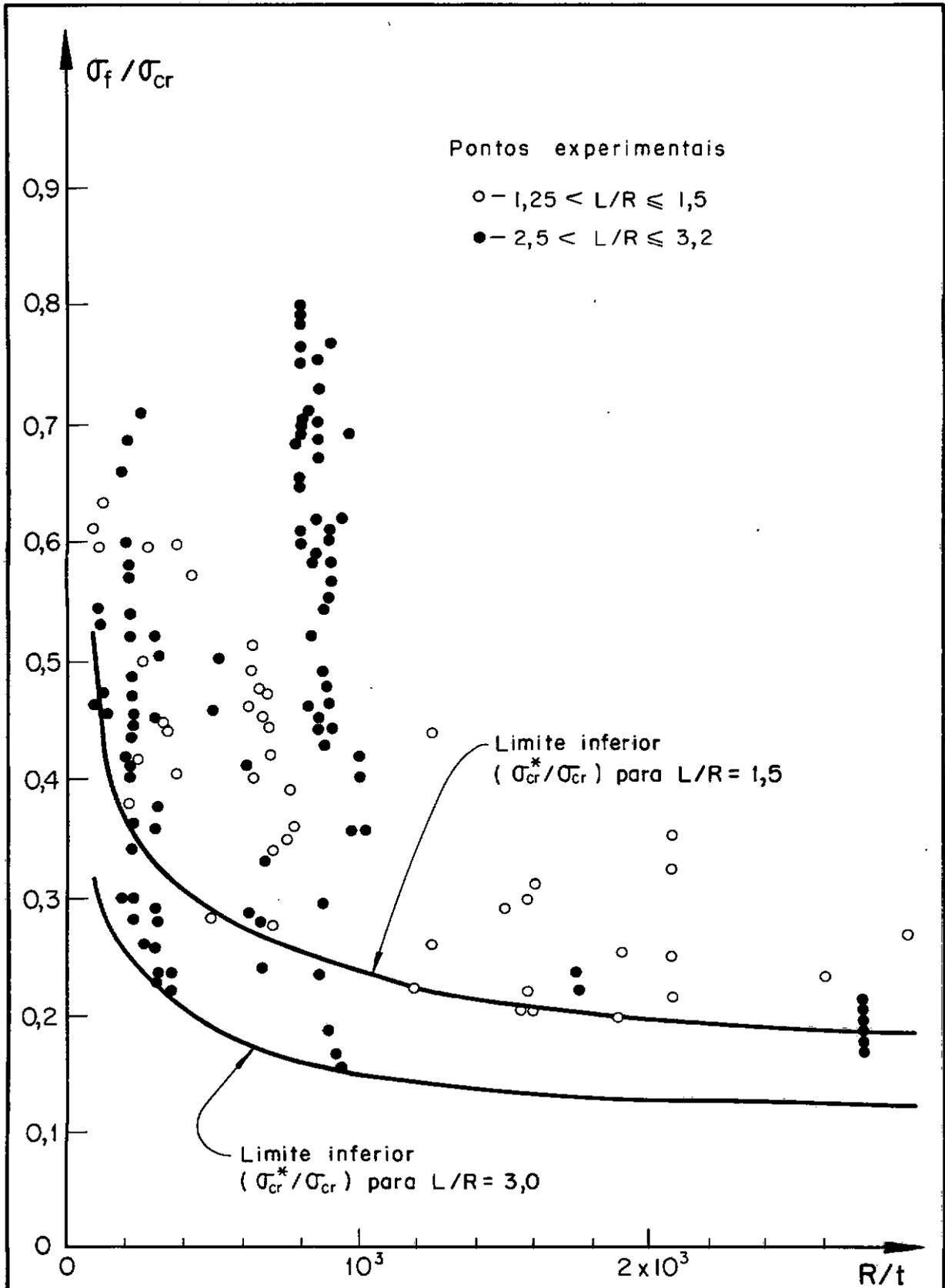
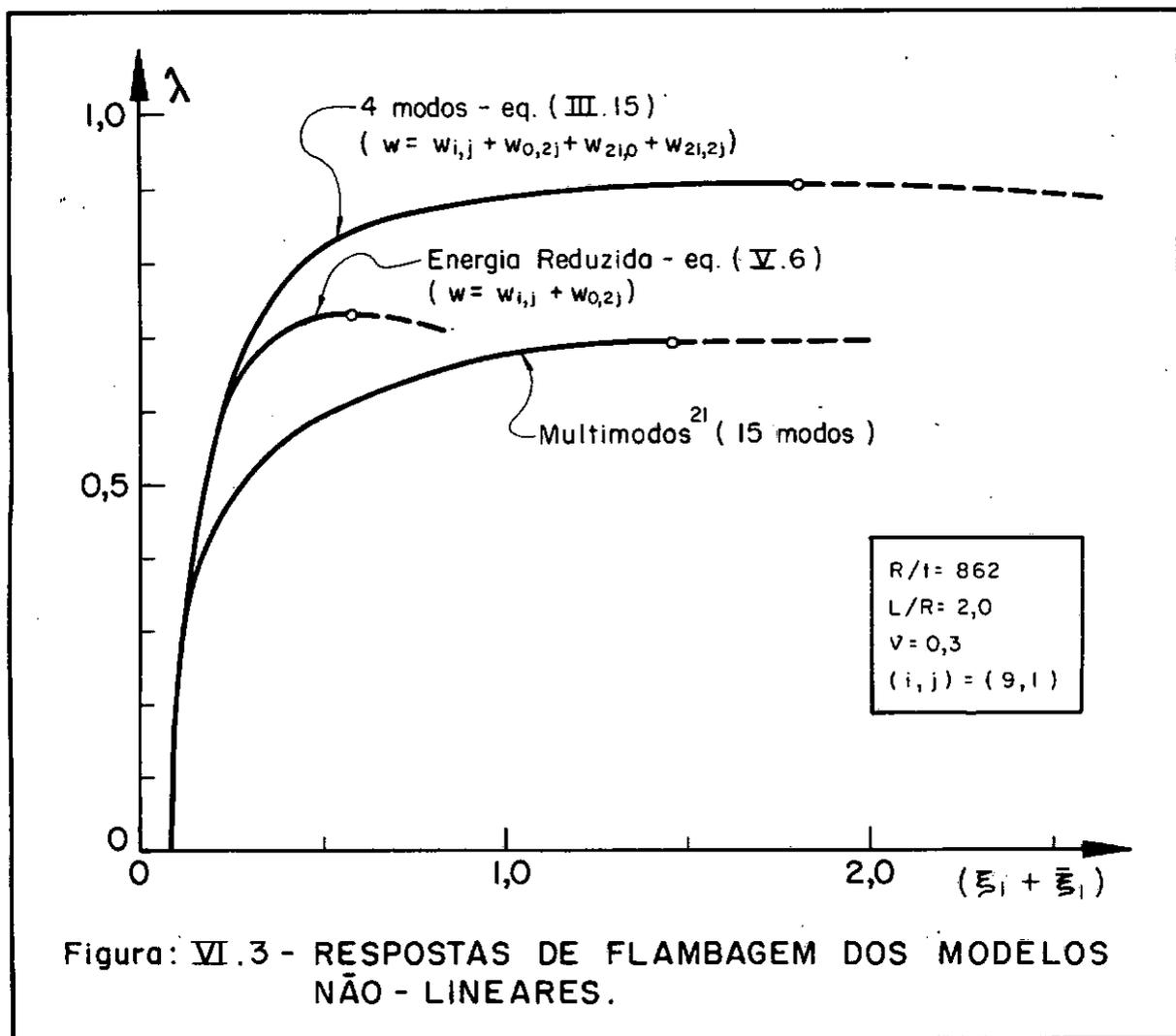


Figura: VI.2 - COMPARAÇÃO DO LIMITE INFERIOR DA CARGA DE FLAMBAGEM OBTIDO ATRAVÉS DA EQUAÇÃO (V.6) E RESULTADOS EXPERIMENTAIS.

VI.2 - Correlações entre Resultados Teóricos de Modelos Não-Lineares e Comparações com Resultados Experimentais.

Conhecendo-se a priori as amplitudes de imperfeições, pode-se estimar a carga de flambagem de cascas cilíndricas axialmente comprimidas, através de análise não-linear. Foi visto em capítulos anteriores que a precisão dessas estimativas dependeria da escolha adequada dos modos de deformação. Ótimos resultados tem sido obtidos através de uma análise Multimodos²¹, com a qual pode-se considerar o acoplamento entre um grande número de modos, incluindo aqueles de ondas longas bem como os de ondas curtas longitudinais. Trata-se no entanto de uma análise extremamente sofisticada e portanto bastante dispendiosa. Por outro lado, as cargas de flambagem obtidas através de análises que consideram um número reduzido de modos, como é o caso das



equações (III.15), não fornecem boas aproximações para as cargas experimentais de flambagem.

A figura (VI.3) apresenta as respostas não-lineares relativas aos procedimentos acima e ao apresentado na seção (V.3). Pode-se notar que a carga de flambagem obtida através das equações simplificadas (V.18) se aproxima bastante daquela fornecida pela análise multimodos²¹, essa aproximação se fará mais evidente com o auxílio da tabela (VI.2).

A flambagem de cascas cilíndricas tem sido objeto de intensas pesquisas experimentais. Contudo, comparações entre cargas teóricas de flambagem, obtidas com as equações (III.15) e (V.18), e resultados experimentais são escassas, pois na vasta bibliografia que trata do assunto, encontram-se pouquíssimos resultados acompanhados de dados sobre as imperfeições geométricas iniciais dos modelos testados.

A referência 21 apresenta a comparação da análise teórica multimodos com resultados experimentais para duas cascas, cujas características geométricas e de imperfeições são dadas na tabela (VI.1).

Modelo Experimental	R/t	L/R	ν	$\bar{\xi}_1$	$\bar{\xi}_2$	$\bar{\xi}_3$	$\bar{\xi}_4$
I	862	2	0,3	0,088	-0,056	-	0,017
II	496	1,94	0,3	0,083	-0,061	-	0,017

Tabela (VI.1)

Mostra-se na tabela (VI.2) uma correlação entre as cargas de flambagem teóricas, obtidas com as equações (III.15), com as equações (V.18) e com a análise multimodos²¹ e comparações com as cargas de flambagem observadas experimentalmente²¹.

Modelo Experimental		I	II	
Experimen tal	$\lambda_{f,exp}$	0,66	0,60	
Equações (III.15)	$\lambda_{f,t}$	0,91	0,88	
	$\lambda_{f,exp}/\lambda_{f,t}$	0,73	0,68	
Equações (V.18)	$\lambda_{f,t}$	0,73	0,70	
	$\lambda_{f,exp}/\lambda_{f,t}$	0,90	0,86	
Aná- lise	2 modos	$\lambda_{f,t}$	0,90	0,84
		$\lambda_{f,exp}/\lambda_{f,t}$	0,73	0,71
Mul- timo- dos	4 modos	$\lambda_{f,t}$	0,85	0,80
		$\lambda_{f,exp}/\lambda_{f,t}$	0,78	0,75
	15 modos	$\lambda_{f,t}$	0,69	0,66
		$\lambda_{f,exp}/\lambda_{f,t}$	0,96	0,91

Tabela (VI.2)

Pode-se observar a boa correlação entre os resultados obtidos através do modelo não-linear com energia reduzida, equações (V.18), os apresentados na referência 21, obtidos de uma análise com 15 modos e os resultados experimentais. Ve-se, então, que o modelo não-linear com energia reduzida, apresentado na seção (V.3) constitui uma alternativa bastante viável pois, simulando o efeito do acoplamento de vários modos, fornece bons resultados com pequeno esforço computacional.

A tabela (VI.3) mostra resultados retirados da referência 17, obtidos através da solução de equações quadráticas de equilíbrio semelhantes às equações (V.18). Nesta publicação, a simplificação dos termos cúbicos em ξ foi feita apenas para facilitar os cálculos numéricos, não sendo contudo baseada no me-

canismo de redução de energia apresentado na seção (V.3). Os valores constantes da tabela (VI.3) evidenciam, uma vez mais, os bons resultados obtidos com o modelo não-linear simplificado da do pelas equações (V.18).

Modelo Experimental	Geometria		Resultados		
	R/t	L/R	Experimental	equações (V.18)	
			$\lambda_{f,exp}$	$\lambda_{f,t}$	$\lambda_{f,exp}/\lambda_{f,t}$
III	1000	2	0,66	0,65	1,02
IV	1000	2	0,74	0,83	0,89
V	1000	2	0,67	0,74	0,91

Tabela (VI.3)

Deve-se acrescentar ainda, com relação aos resultados experimentais das referências 17 e 21, que as amplitudes $\bar{\xi}_i$ de imperfeições iniciais, na forma dos modos acoplados usados na análise teórica, foram obtidas através de uma análise harmônica de Fourier nas duas direções, x e y, das superfícies imperfeitas dos modelos. Os mapeamentos dessas superfícies imperfeitas foram obtidos com o auxílio de transdutores de deslocamentos radiais de grande sensibilidade. Nota-se na tabela (VI.1) que as amplitudes $\bar{\xi}_i$ são pequenas - inferiores a 0,1 da espessura da casca.

É importante observar que os modelos experimentais das referências 17 e 21 atingiram a flambagem com deslocamentos incrementais ainda pequenos, e isto ocorreu devido principalmente às pequenas imperfeições iniciais existentes - nota-se que as cargas de flambagem experimentais são mais elevadas ($\lambda_{f,t} > 0,6$) do que as geralmente encontradas na bibliografia. Portanto, estes modelos experimentais se enquadram dentro dos limites de validade das equações (V.18), proporcionando uma boa correlação teórica - experimental.

Para cascas com imperfeições mais acentuadas, as equações não-lineares com energia reduzida (V.18) não se aplicam com sucesso, como é o caso dos modelos experimentais com $R/t = 300$ e $L/R \approx 2,9$ da série final de testes da referência 18. Estes modelos não satisfazem a limitação de pequenas imperfeições e/ou pequenos deslocamentos na flambagem, discutida na seção (V.3). Os mapeamentos das superfícies imperfeitas e daquelas para a casca sujeita a 90% da carga eventual de flambagem revelaram amplitudes de imperfeições da ordem de 0,2 da espessura da casca e deslocamentos radiais na flambagem, associados aos modos dominantes, maiores que 2 vezes sua espessura. Nesses casos, a estimativa da carga de flambagem fornecida pelas equações (V.18), considerando-se amplitudes de imperfeição representativas ($\bar{\xi}_1 = 0,15$ e $\bar{\xi}_2 = -0,2$), é $\lambda_{f,t} = 0,55$, enquanto as cargas experimentais de flambagem observadas nos 8 modelos testados foram $\lambda_{f,exp} = 0,22; 0,25; 0,27; 0,27; 0,35; 0,36; 0,43; 0,48$.

CAPÍTULO VII

CONCLUSÕES

As cascas cilíndricas axialmente comprimidas são estruturas que possuem comportamento pós-crítico altamente instável, apresentando uma enorme sensibilidade a imperfeições geométricas iniciais, as quais são inevitáveis em qualquer processo de fabricação. A complexidade da resposta de flambagem dessas cascas, largamente influenciada pela interação não-linear que ocorre entre vários modos de deslocamento e por um amplo espectro de imperfeições nesses modos, faz com que o estudo de seu comportamento seja ainda, após quase 50 anos de intensas investigações teóricas e experimentais, um assunto atual de pesquisa, já que uma compreensão global do fenômeno físico não foi até hoje alcançada. O presente trabalho deve, por isso, ser tomado como mais uma contribuição nesse sentido.

Os desenvolvimentos analíticos aqui apresentados e as análises dos caminhos de equilíbrio e das variações das contribuições ao funcional de energia potencial total ao longo desses caminhos mostraram algumas características importantes de comportamento estrutural:

- a) a instabilidade em estágios pós-críticos iniciais ocorre devido ao alívio das tensões circunferenciais de membrana;
- b) as imperfeições geométricas iniciais provocam a perda precoce da estabilidade, nesses estágios iniciais, minando as contribuições estabilizadoras de energia; sendo a contribuição estabilizadora mais importante, dada pela componente circunferencial da energia potencial de membrana, aquela que sofre as reduções mais severas com o acréscimo de amplitudes de imperfeições nos modos dominantes;
- c) em estágios pós-críticos (pós-flambagem) avançados é a interação não-linear entre modos que exerce a maior influência

cia sobre as distribuições de energia e conseqüentemente sobre o comportamento da casca; as imperfeições geométricas iniciais têm efeito ainda considerável sobre essa resposta pós-flambagem avançada;

- d) nesses estágios avançados de deformação a contribuição estabilizadora mais importante, e a mais significativamente afetada pela interação entre modos e imperfeições, é dada pela componente incremental de energia de deformação de membrana.

Uma contribuição ao entendimento do comportamento dessas cascas é dada pela elucidação do fato de que as reduções das cargas de flambagem, em relação à carga crítica teórica clássica são devidas aos efeitos combinados da interação não-linear entre modos e imperfeições geométricas iniciais.

Além disso, algumas observações podem ser feitas sobre a aplicabilidade dos modelos simplificados com energia reduzida no projeto de cascas cilíndricas axialmente comprimidas.

Com uma análise da influência de imperfeições e da interação entre modos na flambagem dessas cascas, combinada com a investigação da variação das distribuições de energia durante a resposta não-linear, demonstrou-se a validade de uma teoria simplificada proposta recentemente na qual a casca é modelada de forma a ter a componente estabilizadora mais importante eliminada do problema clássico de auto-valor. Este problema modificado de auto-valor fornece limites inferiores teóricos confiáveis das cargas experimentais de flambagem relatadas na literatura e que têm sido utilizados^{18, 23} para demonstrar que as curvas empíricas de projeto fornecem resultados ou por demais anti-econômicos (muita segurança) ou francamente contra a segurança quanto a instabilidade.

Com a comprovação numérica, dada pelos resultados obtidos com a análise não-linear aqui apresentada, e com a evidência experimental, dada por trabalhos anteriores, o método para estimativas de limites inferiores de cargas de flambagem pro

posto nas referências 18, 22 e 23 e apresentado na seção (V.2) poderia vir a ser usado como um procedimento simples e seguro em fase de pré-projeto dessas cascas.

Por outro lado, as estimativas das cargas de flambagem em função das amplitudes de imperfeições geométricas iniciais aplicam-se na análise de protótipos cujas imperfeições geométricas iniciais possam ser medidas experimentalmente.

Estendendo a investigação das variações das contribuições de energia a estados pós-críticos (pós-flambagem) avançados, foi possível simular, com um modelo matemático simples, o efeito do acoplamento de muitos modos de deslocamento sobre o comportamento e carga de flambagem. Este modelo não-linear com energia reduzida, apresentado na seção (V.3) mostrou, para cascas com pequenas amplitudes de imperfeição, uma correlação favorável com outros resultados teóricos, inclusive de modelos bem mais sofisticados, e boas comparações com resultados experimentais. Porém, a sua utilização na prática da engenharia depende ainda de verificações teóricas e experimentais mais detalhadas, principalmente nos casos em que existam médias e grandes imperfeições e/ou que a flambagem ocorra para deslocamentos radiais já superiores à espessura da casca.

Alguns outros tópicos parecem ser de interesse dentro dessa linha de pesquisa. Um deles é a consideração de carregamentos combinados; na referência 18 encontra-se proposições, semelhantes à representada na seção (V.2), também para a estimativa de limites inferiores das cargas de flambagem de cascas cilíndricas submetidas a pressão radial e para a combinação de carregamento axial e lateral. A aplicação desses modelos depende ainda da verificação via análise não-linear, nos mesmos moldes da aqui apresentada para o carregamento axial; isto pode ser feito introduzindo-se pequenas modificações nas equações (III.15). Cilindros esbeltos submetidos a carregamentos axiais assimétricos e a interação entre modos de flambagem local e global de colunas cilíndricas longas ainda são tópicos pouco estudados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 - HUTCHINSON, J.W.; KOITER, W.T. - Postbuckling Theory, Appl. Mech. Reviews, 23, p. 1353-1366, 1970.
- 2 - TVERGAARD, V. - Buckling behaviour of plate and shell structure, in Theoretical and Applied Mechanics, W.T. Koiter, ed. North Holland Publishing Co., 1976.
- 3 - GRIGOLIUK, A.I.; KABANOV, V.V. - Stability of cylindrical shells, Series Mechanics, 8, Nauki, Moscow, 1969.
- 4 - TIMOSHENKO, S.P. - Z. Math. Physik, vol. 58, p. 378, 1910
- 5 - LORENZ, R. - Die Nichtachsensymmetrische Knickung dünnwandiger Hohlzylinder, Phys. Z., 13, p. 241-260, 1911
- 6 - DONNELL, L.H. - A new theory for the buckling of thin cylinder under axial compression and bending. Trans. ASME, 56, p. 795, 1934
- 7 - VON KÁRMÁN, T. - Festigkeitsprobleme im Maschinenbau. Encykl. Math. Wiss, vol. 4, n^o 4, p. 348, 1910.
- 8 - VON KÁRMÁN, T.; TSIEN, H.S. - The buckling of thin cylindrical shells under axial compression, J. Aero. Sci., 8, p. 303, 1941.
- 9 - DONNELL, L.H.; WAN, C.C. - Effect of imperfections on buckling of thin cylinders and columns under axial compression, J. of Appl. Mech., Trans ASME, 17, p. 73, 1950.
- 10 - KOITER, W.T. - Over de stabiliteit van het elastisch evenwicht, (on the stability of elastic equilibrium); Dissertation, Delft, H.J., Paris, Amsterdam, 1945. English translation, NASA

TT F-10, 833, 1967.

- 11 - KEMPNER, J. - Postbuckling behavior of axially compressed circular cylindrical shells, *J. Aeronaut. Sci.*, 21, p. 329-335, 1951.
- 12 - THIELEMANN, W.F. - New developments in the non-linear theories of the buckling of thin cylindrical shells, *Proceedings of the Durand Centennial Conference*, edited by N.J. Hoff and W.G. Vincenti, Pergamon Press, London, p. 76, 1960.
- 13 - ALMAROTH, B.O. - Postbuckling behaviour of axially compressed cylinders, *A.I.A.A. Journal*, 1, p. 630-633, 1963.
- 14 - HOFF, N.J.; SOONG, T.E. - Buckling of circular cylindrical shells in axial compression, *S.U.D.A.E.R.*, 204, Stanford, California, 1964.
- 15 - HOFF, N.J.; MADSEN, W.A.; MAYERS, J. - Postbuckling equilibrium of axially compressed circular cylindrical shells, *A.I.A.A. Journal*, 4, p. 126-133, 1966.
- 16 - ESSLINGER, M.; GEIER, B.; WOOD, J.G.M. - Some complements to the ECSS Design Code concerning isotropic cylinders, *Stability of Steel Struct.*, Prelim. Rep. E.C.C.S. 2nd Int. Coll. Liege, April, 1977.
- 17 - ARBOCZ, J.; BABCOCK, C.D. - The effect of general imperfection on the buckling of cylindrical shells, *J. of Appl. Mech.*, 36, p. 28-38, 1969.
- 18 - BATISTA, R.C. - Lower bound estimates for cylindrical shell buckling, Ph.D. Thesis, University College, London, June, 1979.
- 19 - ALMROTH, B.O. - Influence of edge conditions on the stability of axially compressed cylindrical shells, *NASA CR 161*, 1965.
- 20 - ARBOCZ, J.; SECHLER, E.E. - On the buckling of axially compressed imperfect cylindrical shell, *J. of*

Appl. Mech., Trans. AMSE, p. 737-742, September, 1974.

- 21 - ARBOCZ, J.; BABCOCK, C.D. - Prediction of buckling loads based on experimentally measured initial imperfections, I.U.T.A.N. Symp. on buckling of structures, Cambridge, Mass. 1974. B. Budiansky ed., Springer, 1976.
- 22 - BATISTA, R.C.; CROLL, J.G.A. - Explicit lower-bounds for the buckling of axially loaded cylinders. Int. J. Mech. Sci, vol. 23, n^o 6, p. 331-343, 1981.
- 23 - BATISTA, R.C.; CROLL, J.G.A. - A design approach for axially compressed unstiffened cylinders, Inst. of Physics Conf. - Stability Prob. in Eng. Structures and Components, Cardiff, Sep., 1978 (ed. Richards, T.H., Stanley, P.), Applied Science Publishers, 1979.
- 24 - TREFFTZ, E. - Über die Ableitung der Stabilitäts-Kriterien des elastischen Gleichgewichtes aus der Elastizitätstheorie endlicher Deformationen, Proc. of the 3rd Int. Congress for Appl. Mech., Vol. 3, p. 44-50, Stockholm, 1930.
- 25 - BUDIANSKY, B. - Theory of buckling and post-buckling behavior of elastic structures., Advances in Applied Mechanics, Chia-Shun Yih, vol. 14, 1974.
- 26 - LOVE, A.E.H. - Mathematical theory of elasticity, p. 528-531, Dover, 4th ed., 1944.

SIMBOLOGIA

Os principais símbolos utilizados neste trabalho são:

- C_j - Coeficientes das equações algébricas não-lineares de equilíbrio
- c - Constante relacionada com o coeficiente de Poisson = $\sqrt{3(1 - \nu^2)}$
- D - Constante de rigidez de flexão = $\frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)}$
- E - Módulo de Elasticidade de Young
- F - Função de tensões de Airy
- f^F - Parcela fundamental da função de tensões
- f - Parcela incremental da função de tensões
- f_i - Coeficientes dos termos da função de tensões
- G - Parcela auxiliar para o cálculo das contribuições de energia
- I - Parâmetro relacionado ao número de ondas circunferenciais = $\frac{1}{R} i$
- i - Número de ondas circunferenciais
- i_{cr} - Número de ondas circunferenciais dado pela teoria clássica
- i_{cr}^* - Número de ondas circunferenciais dado pela teoria não-clássica com energia reduzida

J - Parâmetro relacionado ao número de ondas longitudinais

$$= \frac{\pi}{L} j$$

j - Número de ondas longitudinais

K - Constante de rigidez de membrana = $\frac{Et}{(1 - \nu^2)}$

L - Comprimento do cilindro

M_x', M_y', M_{xy} - Momentos fletores e torçor - eq. (II.30)

m_x', m_y', m_{xy}' - Componentes lineares dos momentos

N_x', N_y', N_{xy} - Esforços internos de membrana - eq. (II.29)

n_x^F, n_y^F, n_{xy}^F - Componentes fundamentais dos esforços internos de membrana

n_x', n_y', n_{xy}' - Componentes lineares dos esforços internos de membrana

n_x'', n_y'', n_{xy}'' - Componentes quadráticas dos esforços internos de membrana

P, Q - Constantes auxiliares para o cálculo dos f_i

R - Raio do cilindro

t - Espessura da casca

U - Energia de deformação elástica interna

U_F^X, U_F^Y, U_F^{XY} - Componentes da energia de flexão

U_M^X, U_M^Y, U_M^{XY} - Componentes da energia de membrana

U_M^{XF} - Componente fundamental da energia de membrana

$U_{M_2}, U_{M_3}, U_{M_4}$ - Componentes quadrática, cúbica e quártica da energia de membrana

ΔU_M - Energia incremental de membrana = $U_{M_2} + U_{M_3} + U_{M_4}$

$\hat{U}, \hat{U}_M, \hat{U}_{M_1}, \hat{U}_{M_2}, \hat{U}_{M_3}, \hat{U}_{M_4}, \Delta \hat{U}_M$ - Referentes à estrutura imperfeita

u - Componente axial de deslocamento, componente axial u^I de deslocamento incremental

u^F - Componente axial do deslocamento fundamental

u^* - Encurtamento médio não-dimensionalizado em relação ao encurtamento no estado crítico

u^{*F} - Encurtamento médio fundamental não-dimensionalizado em relação ao encurtamento no estado crítico

\underline{u} - Campo de deslocamentos

\underline{u}^F - Campo fundamental de deslocamento

$\bar{\underline{u}}$ - Campo de imperfeições geométricas iniciais

V - Energia potencial total

V^F, V_1, V_2, V_3, V_4 - Componentes fundamental (constante), linear, quadrática, cúbica e quártica da energia potencial total

ΔV - Variação da energia potencial total = $V_1 + V_2 + V_3 + V_4$

V^* - Energia potencial total reduzida

$\lambda V_M^X, \lambda V_M^Y$ - Componentes da energia potencial de membrana

$\hat{V}, \hat{V}^F, \hat{V}_1, \hat{V}_2, \hat{V}_3, \hat{V}_4, \Delta \hat{V}, \lambda \hat{V}_M$ - Referentes à estrutura imperfeita

- v - Componente circunferencial de deslocamento
- \underline{v} - Campo de deslocamento incremental
- \bar{v} - Campo de deslocamento incremental da estrutura imperfeita
- $\underline{v}_c^{(i)}$ - Autovetor - modo crítico de deslocamento
- x - Coordenada axial
- y - Coordenada circunferencial
- w - Componente radial de deslocamento incremental
- w^F - Componente radial de deslocamento fundamental
- \bar{w} - Imperfeições geométricas radiais iniciais
- Z - Parâmetro de Batdorf = $(L^2/Rt) \cdot (1 - \nu^2)^{1/2}$
- $Z_2^X, Z_2^Y, Z_3^X, Z_3^Y, Z_3^{XY}, Z_4^X, Z_4^Y, Z_4^{XY}$ - Parcelas auxiliares para o cálculo das contribuições de energia
- z - Coordenada radial
- α - Parâmetro adimensional relacionado ao número de onda longitudinais - eq. (II.52)
- β - Parâmetro adimensional relacionado ao número de ondas circunferenciais - eq. (II.52)
- $\delta, \bar{\delta}$ - Símbolo de variação
- δ_i - Função das amplitudes dos modos de deslocamento e imperfeição = $(\xi_i + \bar{\xi}_i)$
- $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ - Componentes da deformação da superfície média, com componentes incrementais $\bar{\epsilon}_x^I, \bar{\epsilon}_y^I, \bar{\gamma}_{xy}^I$ da deformação da

superfície média

$\epsilon_X^F, \epsilon_Y^F$ - Componentes fundamentais da deformação da superfície média

$\epsilon_X^I, \epsilon_Y^I, \gamma_{xy}^I$ - Componentes lineares da deformação da superfície média

$\epsilon_X'', \epsilon_Y'', \gamma_{xy}''$ - Componentes quadráticas da deformação da superfície média

$\epsilon_X^*, \epsilon_Y^*, \gamma_{xy}^*$ - Componentes da deformação em um ponto qualquer da casca

λ - Parâmetro de carga = σ/σ_{cr}

$\lambda_c^{(i)}$ - Autovalor - parâmetro crítico de carga

λ_{cr} - Menor autovalor - parâmetro crítico de carga

λ_{cr}^* - Parâmetro de carga referente ao limite inferior da carga de flambagem

ν - Coeficiente de Poisson

ξ_i - Amplitudes dos modos de deslocamento

$\bar{\xi}_i$ - Amplitudes dos modos de imperfeição

ξ_1^* - Amplitude do modo crítico dominante não-dimensionalizada em relação a $\xi_{1,m}$

$\xi_{1,m}$ - Amplitude do modo crítico dominante no ponto de mínimo pós-crítico

σ - Tensão externa axial

$\sigma_X, \sigma_Y, \sigma_{xy}$ - Componentes de tensão internas

σ_{cr} - Tensão crítica

σ^* - Tensão axial obtida pelo modelo linearizado com energia reduzida

σ_{cr}^* - Limite inferior da carga de flambagem

$\chi_x, \chi_y, \chi_{xy}$ - Componentes da mudança de curvatura

$\chi'_x, \chi'_y, \chi'_{xy}$ - Componentes lineares da mudança de curvatura

ψ_{ij} - Função das amplitudes dos modos de deslocamento e imperfeição = $(\xi_i \xi_j + \bar{\xi}_i \xi_j + \bar{\xi}_j \xi_i)$

Ω - Potencial do carregamento externo

Ω^F - Componente fundamental do potencial do carregamento externo

Ω_1 - Componente linear do potencial do carregamento externo

∇^4 - Operador biarmônico = $(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4})$

Obs: Os subíndices precedidos de vírgula indicam derivadas parciais com respeito a estes subíndices: (p.e. $w_{,xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$)