

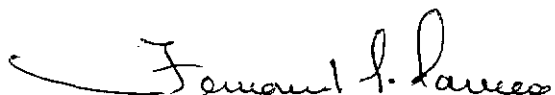
ANALISE NÃO-LINEAR DE ESTRUTURAS RETICULADAS ESPACIAIS DE CON-  
CRETO ARMADO


Paulo Chaves de Rezende Martins

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO  
DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA  
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO  
PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTEN-  
ÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M. Sc.)

Aprovada por:

  
Prof. Carlos Henrique Hölck  
Presidente

  
Prof. Fernando Luiz Lobo B. Carneiro

  
Prof. Benjamin Ernani Díaz

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL  
MARÇO DE 1979

MARTINS, Paulo Chaves de Rezende

Análise Não-Linear de Estruturas Reticuladas  
Espaciais de Concreto Armado |Rio de Janeiro| 1979

VII, 117 p. 29,7cm (COPPE-UFRJ, M.Sc.,  
Engenharia Civil, 1979)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro.  
Faculdade de Engenharia

1. Pórticos Espaciais de Concreto Armado

I. COPPE/UFRJ      II. Título (série)

*i*

*A minha esposa pelo carinho,  
apoio e incentivo dado durante  
este trabalho.*

AGRADECIMENTOS

A José Claudio de F. Telles pela amizade e orientação dada a este trabalho;

Aos Professores Carlos Henrique Hölck, Fernando Luiz Lobo B. Carneiro e Luiz Fernando Taborda Garcia pela orientação, críticas e sugestões apresentadas;

A L. Lima pela confecção das figuras;

A Maria de Lourdes pelo trabalho de datilografia.

R E S U M O

O presente trabalho objetiva apresentar um programa automático para a análise não-linear de estruturas reticuladas espaciais de concreto armado, compreendendo tanto a verificação de uma estrutura sob a ação de um carregamento definido, como a pesquisa de sua capacidade de carga para uma dada disposição de cargas.

Em sua elaboração foram levados em conta além da não-linearidade dos diagramas tensão-deformação dos materiais (não-linearidade física), os efeitos de segunda ordem decorrentes da interação axial flexão (não-linearidade geométrica).

No caso de estruturas solicitadas à torção, combinada ou não com outros esforços, são considerados os efeitos da torção de maneira aproximada, tendo por base o modelo da treliça espacial, adotado pelo C.E.B.

Em sua parte final o trabalho apresenta exemplos de aplicação do programa e comparações com outros métodos de análise e pesquisas experimentais. Estão incluídos, também, comentários sobre os resultados obtidos e sugestões para aprimoramento deste trabalho.

A B S T R A C T

This work intends to present an automatic program for non-linear analysis of spacial frames of reinforced concrete, including verification of structures under definite loading and research on its load-bearing capacity for a given disposition of loads.

On its development are considered both the non-linearity of the stress-strain diagrams of the materials (physical non-linearity) and the second order effects of the axial-flexural interaction (geometrical non-linearity).

In the case of structure loaded by torsion, combined or not with others efforts, the effects of torsion are considered on an approximative way, based on the spacial truss model, adopted by the C. E. B.

The final part presents some examples of application of the automatic program and some comparisons with others methods of analysis and experimental investigations. Some comments about the results obtained and suggestions for more advanced studies in the future are also included.

ÍNDICE

	pg.
INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO I - Conceitos Fundamentais	3
I.1 - Hipóteses Gerais	3
I.1.1 - Teoria das Pequenas Deformações	3
I.1.2 - Hipótese das Seções Planas	3
I.1.3 - Critérios de Segurança	4
I.1.4 - Materiais	5
I.2 - Esgotamento da Capacidade Resistente de uma seção	10
I.2.1 - Por esforços Normais (Momento Fletor e/ou Força Normal)	10
I.2.2 - Por esforços Tangenciais (torção com ou sem cortante), associados ou não a esforços normais	11
I.3 - Fissuração de um elemento	23
I.4 - Estado-Limite Último	24
I.4.1 - Esgotamento da Capacidade de uma ou mais seções transversais	25
I.4.2 - Instabilidade do Equilíbrio	25
I.5 - A Não-Linearidade Física	26
I.5.1 - Rigidez Secante à Flexão e à Deformação Axial	27
I.5.2 - Rigidez Secante à Torção	30
I.5.3 - A Rigidez de um Elemento	31
I.6 - A Não-Linearidade Geométrica (A Interação Axial-Flexão)	32

	pg.
CAPÍTULO II - O Método de Análise	34
II.1 - Generalidades	34
II.2 - A Matriz de Rigidez do Elemento	35
II.2.1 - A Não-Linearidade Geométrica	35
II.2.2 - A Não-Linearidade Física	58
II.3 - A Análise de uma Estrutura	86
II.3.1 - Verificação do Comportamento de uma Estrutura para um carregamento definido	86
II.3.2 - Pesquisa da Capacidade de Carga de uma Estrutura	86
CAPÍTULO III - O Programa ANALEC	89
III.1 - Campo de Aplicação do Programa	89
III.1.1 - Quanto ao tipo de Estrutura	89
III.1.2 - Quanto ao tipo de Carregamento	90
III.1.3 - Quanto do tipo de Análise	90
III.2 - Definição da Estrutura e do Carregamento	90
III.2.1 - Sistema de Referência Global: (SRG)	90
III.2.2 - Sistema de Referência Local (SRL)	91
III.3 - Diagrama de Blocos	91
III.4 - Sub-rotinas do Programa ANALEC	95
III.4.1 - Organograma das sub-rotinas	95
III.4.2 - Sub-rotina COORD	95
III.4.3 - Sub-rotina PROSR	96
III.4.4 - Sub-rotina SEVAZ	97



	Pg.
III.4.5 - Sub-rotina RITOR	97
III.4.6 - Sub-rotina FISSEC	97
III.4.7 - Sub-rotina VALINI	98
III.4.8 - Sub-rotina FORCOC e FORACO	99
III.4.9 - Sub-rotina RIGMB	99
III.4.10 - Sub-rotina ROTMB	100
III.4.11 - Sub-rotina TGAUSS e SGAUSS	100
III.4.12 - Sub-rotina CRAMER	100
III.4.13 - Sub-rotina ESFOR	101
III.4.14 - Sub-rotina SONERA	101
III.4.15 - Sub-rotina NEWRA	102
III.4.16 - Sub-rotina TORULT	103
III.5 - Alguns Comentários sobre Re- sultados Obtidos	104
III.5.1 - Rigidez à Deformação Axial (EA)	104
III.5.2 - A Discretização da Es- trutura	106
III.5.3 - A Discretização da Se- ção Transversal	107
CAPÍTULO IV - Exemplos	108
IV.1 - Exemplo 1	108
IV.2 - Exemplo 2	113
IV.3 - Exemplo 3	118
IV.4 - Exemplo 4	122
CAPÍTULO V - Conclusões e Sugestões	126
APÊNDICE A - Manual de Entrada de Dados do Pro- grama ANALEC	134
APÊNDICE B - Listagem do Programa ANALEC	142-
BIBLIOGRAFIA	175

## INTRODUÇÃO

Com o advento dos computadores eletrônicos de grande porte a análise de estruturas passou por um grande impulso. Os conhecidos métodos da rigidez e da flexibilidade, fundamentais na análise estrutural, foram inteiramente reorganizados sob forma matricial visando sua utilização no computador.

Paralelamente, a crescente sofisticação das técnicas de construção e o arrojo cada vez maior das estruturas projetadas estão a exigir que as mesmas sejam analisadas, não mais através da consideração de elementos isolados mas sim, como um todo no espaço.

Dentro desta linha é que se insere este trabalho, como uma tentativa mais aprofundada de analisar estruturas reticuladas espaciais de concreto armado através de um programa automático elaborado com base no método da rigidez - o programa ANALEC.

Em tal tipo de estruturas dois problemas básicos impõem-se como condições prévias a resolver, para sua análise:

a) tanto o concreto com o aço não obedecem à lei de Hooke (não-linearidade física);

b) os efeitos de segunda ordem decorrentes da interação axial-flexão devem ser considerados (não-linearidade geométrica).

Está-se, portanto, diante de um problema de natureza não-linear. Perde, assim, validade, pelo menos de uma forma imediata, a aplicação do princípio da superposição de efeitos uma vez que deixam de existir relações lineares entre ações e deslocamentos numa estrutura. No entanto é possível transformar o cálculo não-linear em uma sucessão de etapas lineares, com os parâmetros de que depende o problema sendo mantidos constantes ao longo de cada etapa. Pode-se, desse modo, aplicar o princípio da superposição de efeitos e, conseqüentemente, o método da rigidez em cada uma das etapas de análise.

No caso das estruturas solicitadas por esforços de torção um terceiro problema, além dos mencionados, surge: o mecanismo de resistência da estrutura para esta solicitação e sua interação com os outros esforços eventualmente existentes.

No campo da torção as pesquisas ainda se encontram em fase bastante primitiva em relação aos outros tipos de solicitação. No entanto, o modelo da treliça espacial proposto pelo C. E. B.<sup>1</sup> é capaz de fornecer resultados bastante satisfatórios e, é, por isto, adotado neste trabalho. Como as recomendações do C. E. B. prendem-se tão somente às estruturas submetidas à torção para ou combinada com flexão no plano, uma extrapolação pura os casos de solicitações no espaço foi elaborada a partir dos princípios aplicáveis ao caso de solicitações no plano.

## CAPÍTULO I

### CONCEITOS FUNDAMENTAIS

#### I.1. Hipóteses Gerais

##### I.1.1. Teoria das Pequenas deformações

Ainda que sejam considerados os efeitos da interação axial-flexão (efeitos de segunda ordem), admite-se como válida a teoria das pequenas deformações (pequenos deslocamentos comparados com o comprimento da peça). Para as estruturas usuais, principalmente as de concreto armado, objeto do presente estudo, tal hipótese se torna aceitável. Podemos, portanto, escrever a equação diferencial que define a elástica de uma peça:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

##### I.1.2. Hipótese das Seções Planas

Supõe-se que qualquer seção transversal de um elemento da estrutura permaneça plana e normal ao eixo do mesmo, mantendo sua forma original e com perfeita aderência entre o aço e o concreto.

Desprezam-se pois, as deformações devidas ao esforço cortante e ao empenamento de seção decorrente da torção, para

efeito do estudo da flexão.

### I.1.3. Critérios de Segurança

Toda análise aqui desenvolvida será baseada no critério de verificação do estado-limite último de ruína, adotando os princípios de segurança do C.E.B.<sup>1</sup>.

#### I.1.3.1. Quanto às cargas:

$$F_d = \gamma_f F_k \text{ onde } F_k - \text{valor característico das ações}$$

$$F_d - \text{valor de cálculo das ações;}$$

$$\gamma_f - \text{coeficiente de majoração das ações}$$

#### I.1.3.2. Quanto ao concreto:

$$f_{ccd} (f_{ctd}) = \frac{f_{cck} (f_{ctk})}{\gamma_c}$$

onde  $f_{cck} (f_{ctk})$  - valor característico da resistência à compressão (tração) do concreto.

$f_{ccd} (f_{ctd})$  - valor de cálculo da resistência à compressão (tração) do concreto.

$\gamma_c$  - coeficiente de minoração da resistência do concreto.

I.1.3.3. Quanto ao aço:

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_a}$$

onde  $f_{yk}$  - valor característico da resistência à compressão ou tração do aço.

$f_{yd}$  - valor de cálculo da resistência à compressão ou tração do aço.

$\gamma_a$  - coeficiente de minoração da resistência do aço.

A título informativo apresentamos a seguir alguns valores de coeficientes de segurança adotados por normas conhecidas:

1 N O R M A		Ações Per manentes $\gamma_g$	Ações A cidentais $\gamma_p$	Concreto $\gamma_c$	Aço $\gamma_s$
C.E.B. 1	máx	1,3	1,5	1,5	1,15
nº 125	min	1,0	0,0	1,1	1,0
C.E.B. nº 84		1,5	1,5	1,5	1,15
NB 1/77 <sup>2</sup>		1,4	1,4	1,4	1,15
NB. 1/60		1,65	2,0	1,0	1,0

I.1.4. Materiais

Apresentamos a seguir as relações tensão x deformação para o concreto e os aços utilizados neste trabalho. Note-se que os diagramas de carga e descarga dos materiais coincidem.

### I.1.4.1. Concreto

O diagrama de cálculo tensão de compressão x deformação adotado é o preconizado pelo C.E.B.<sup>1</sup> (Fig. 1)

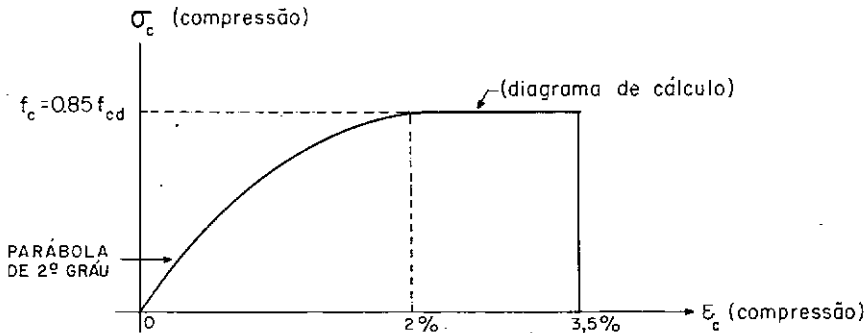


fig.1 - DIAGRAMA  $\sigma_c \times \epsilon_c$  DO CONCRETO

$$0 \leq \epsilon_c \leq 2\text{‰} \quad \sigma_c = f_c \cdot \left(2 - \frac{\epsilon_c}{2\text{‰}}\right) \cdot \frac{\epsilon_c}{2\text{‰}} \quad (\text{I.1a})$$

$$E_c = \frac{\partial \sigma_c}{\partial \epsilon_c} = 1000 \cdot f_c \cdot \left(1 - \frac{\epsilon_c}{2\text{‰}}\right) \quad (\text{I.1b})$$

$$2\text{‰} \leq \epsilon_c \leq 3,5\text{‰} \quad \sigma_c = f_c \quad (\text{I.1c})$$

$$E_c = 0 \quad (\text{I.1d})$$

onde  $E_c$  é o módulo de elasticidade tangente do concreto, utilizado na formulação de CHEN e SHORAKA<sup>15</sup> adotada na dedução das equações apresentadas no item II.2.2.1.1.

O coeficiente 0,85 que afeta  $f_{ccd}$  é introduzido para levar em conta o chamado efeito Rüsck (perda de resistência do concreto, ao longo do tempo).

Com vistas ao estudo que faremos da torção, definimos,

de acordo com o C.E.B.<sup>1</sup>, a resistência à tração do concreto, como abaixo:

$$f_{ctk} = 0,76 f_{cck}^{2/3} \quad (f_{ctk} \text{ e } f_{cck} \text{ em kgf/cm}^2)$$

Note-se que, como usualmente feito, desprezamos a resistência à tração do concreto no estudo da flexão de uma peça de concreto armado.

#### I.1.4.2. Aço

Adotamos, neste trabalho, dois tipos de aço:

##### a) Tipo A:

Aço laminado a quente, caracterizado pelo patamar de escoamento bem definido no diagrama tensão x deformação (Fig.2).

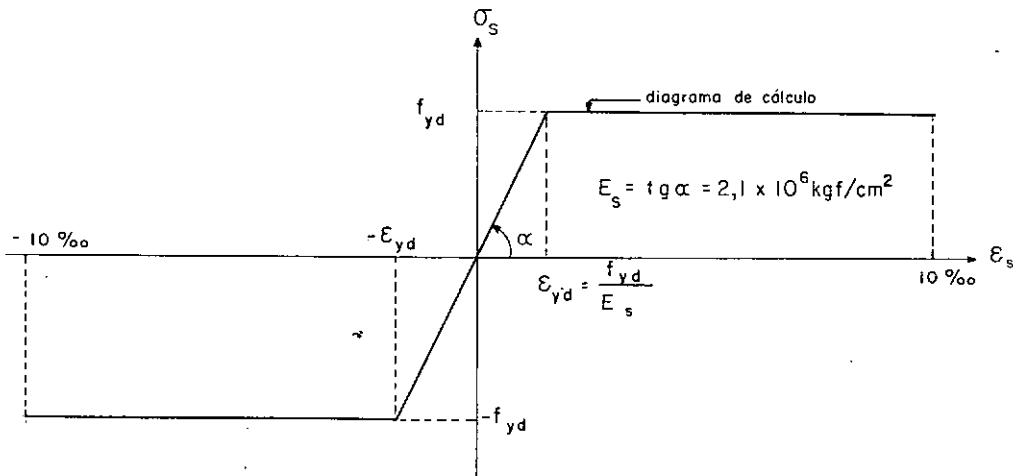


fig. 2 - DIAGRAMA  $\sigma_s \times \epsilon_s$  DO AÇO TIPO A

$$|\epsilon_s| \leq \epsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} \quad \sigma_s = \epsilon_s \cdot E_s \quad (I.2a)$$

$$E_s = \frac{\partial \sigma_s}{\partial \epsilon_s} \quad (I.2b)$$



$$|\epsilon_s| > \epsilon_{yd} \quad \sigma_s = f_{yd} \quad (\text{I.2c})$$

$$E_s = 0 \quad (\text{I.2d})$$

onde  $E_s$  é o módulo de elasticidade tangente do aço.

b) Tipo B:

Aço encruado a frio que, em consequência, não apresenta patamar de escoamento. Define-se, então, uma tensão convencional de escoamento, obtida por uma reta paralela à tangente ao gráfico  $\sigma_s \times \epsilon_s$  na origem, e que passa pela deformação de 2‰ (Fig. 3).

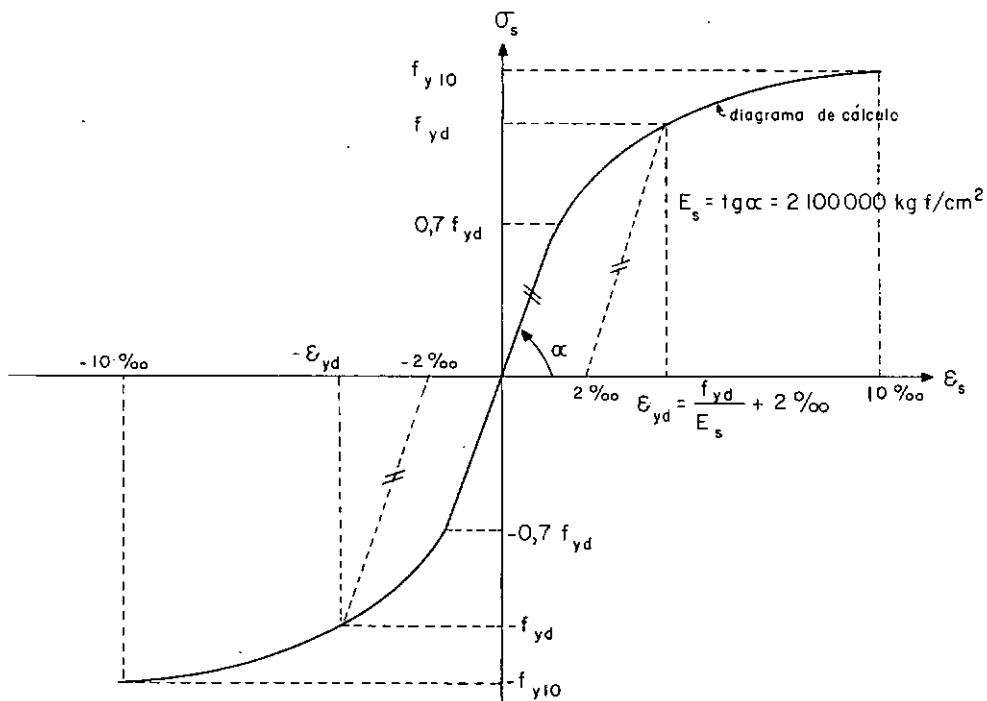
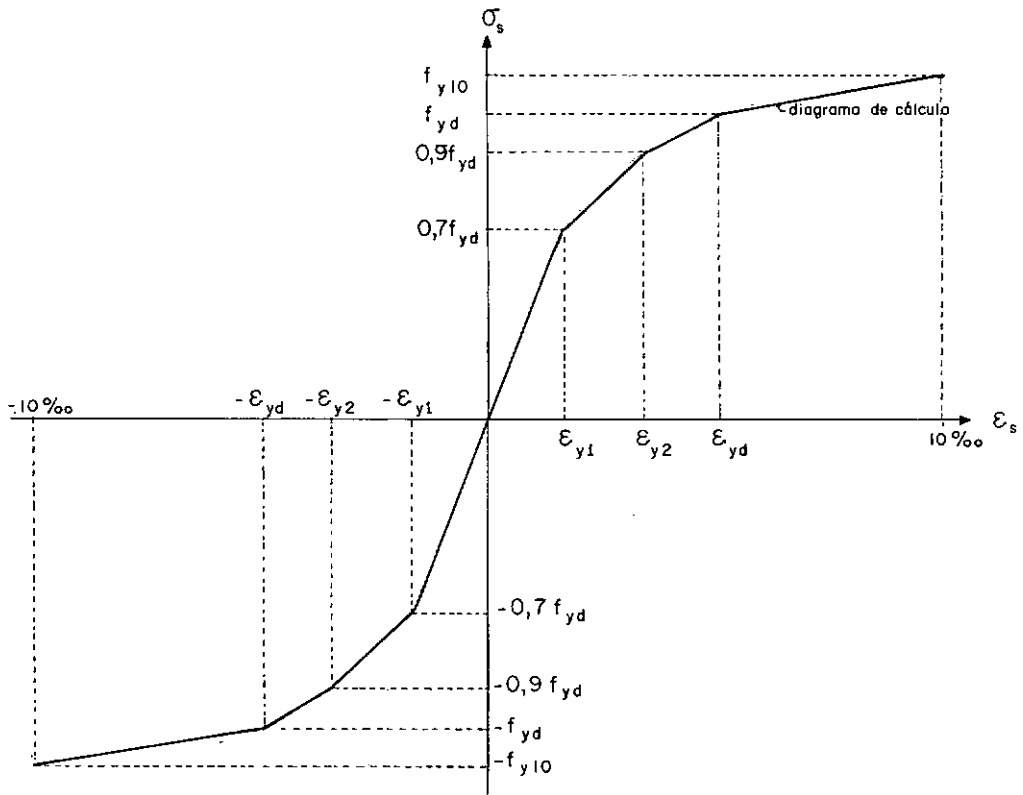


fig 3 - DIAGRAMA  $\sigma_s - \epsilon_s$  DO AÇO TIPO B

Como simplificação adotamos a substituição do trecho curvo por três retas, conforme a Figura 4 demonstra:

fig. 4 - DIAGRAMA  $\sigma_s \times \epsilon_s$  SIMPLIFICADO DO AÇO TIPO B

onde

$$\epsilon_{y1} = \frac{0,7f_{yd}}{E_s}$$

$$\epsilon_{y2} = \frac{0,9f_{yd}}{E_s} + 0,263\text{‰}$$

$$\epsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} + 2\text{‰}$$

$\sigma_{s10}$  - obtida por processo iterativo através da equação da curva da Figura 3.

$$|\epsilon_s| \leq \epsilon_{y1} \quad |\sigma_s| = |\epsilon_s| \cdot E_s \quad (\text{I.3a})$$

$$E_s = \frac{\partial \sigma_s}{\partial \epsilon_s} \quad (\text{I.3b})$$

$$\epsilon_{y1} < |\epsilon_s| \leq \epsilon_{y2} \quad |\sigma_s| = \frac{|\epsilon_s| - \epsilon_{y1}}{\epsilon_{y2} - \epsilon_{y1}} (0,2f_{yd}) + 0,7f_{yd} \quad (\text{I.3c})$$

$$E_s = \frac{0,2f_{yd}}{\epsilon_{y2} - \epsilon_{y1}} \quad (\text{I.3d})$$

$$\epsilon_{y2} < |\epsilon_s| \leq \epsilon_{yd} \quad |\sigma_s| = \frac{|\epsilon_s| - \epsilon_{y2}}{\epsilon_{yd} - \epsilon_{y1}} (0,1f_{yd}) + 0,9f_{yd} \quad (\text{I.3e})$$

$$E_s = \frac{0,1f_{yd}}{\epsilon_{yd} - \epsilon_{y2}} \quad (\text{I.3f})$$

$$\epsilon_{yd} < |\epsilon_s| \leq 10^0/00 \quad |\sigma_s| = \frac{|\epsilon_s| - \epsilon_{yd}}{10^0/00 - \epsilon_{yd}} (\sigma_s 10^{-f_{yd}}) + f_{yd} \quad (\text{I.3g})$$

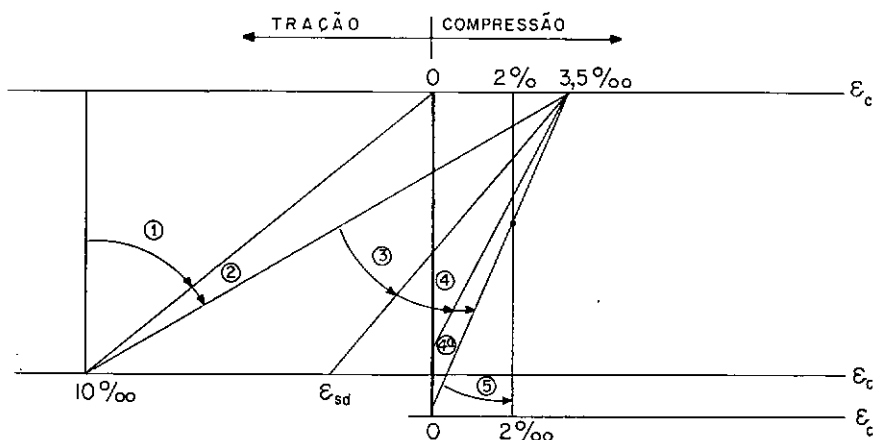
$$E_s = \frac{\sigma_s 10^{-f_{yd}}}{10^0/00 - \epsilon_{yd}} \quad (\text{I.3h})$$

onde  $E_s$  tem o mesmo significado do item anterior.

## I.2. Esgotamento da Capacidade Resistente de uma Seção

### I.2.1. Por Esforços Normais (Momento Fletor e/ou Força Normal):

O esgotamento da capacidade resistente de uma certa seção transversal de uma qualquer barra de uma estrutura é definido, para a combinação momento fletor-força normal, de acordo com o diagrama de deformações limites apresentado pelo C.E.B.<sup>1</sup>, e adotado pela NBl<sup>2</sup> (Fig. 5).



REGIÕES 1 e 2 - DEFORMAÇÃO EXCESSIVA DO AÇO

REGIÕES 3 e 5 - ESMAGAMENTO DO CONCRETO

fig 5- DIAGRAMAS DE DEFORMAÇÕES LIMITES

## I.2.2. Por Esforços Tangenciais (Torção com ou sem Cortante), associados ou não a Esforços Normais

### I.2.2.1. Generalidades

A torção é, ainda hoje, uma das solicitações que mais carecem de estudos dentre as que podem atuar numa estrutura de concreto armado. Existem inúmeros estudos para peças de concreto simples submetidas à torção pura<sup>5, 6, 8</sup>. No caso de elementos de concreto armado e, principalmente, os solicitados por torção combinada com outros esforços (momento fletor, força normal, cortante), persistem ainda inúmeras dúvidas a serem esclarecidas<sup>3, 5, 6, 7</sup>.

Os pesquisadores, no entanto, apresentam-se concordes quanto a valores últimos da resistência de estruturas de concreto armado à torção pura. Há, porém, uma certa lacuna quanto ao caso de torção combinada com outras solicitações. Como

exemplo, observamos que, na bibliografia pesquisada, nenhuma referência se faz à interação da torção com flexão no espaço ou com força normal. Pudemos obter dados satisfatoriamente consistentes apenas para a torção combinada com flexão segundo um plano de simetria da peça e, para combinação com esforço cortante. Todavia, uma observação parece unânime: a de que a capacidade última não depende do caminho percorrido no carregamento da estrutura quando solicitada simultaneamente por torção e flexão, isto é, a mesma não depende da história da relação  $T/M$  (momento torsor/momento fletor) na aplicação do carregamento (Fig. 6).

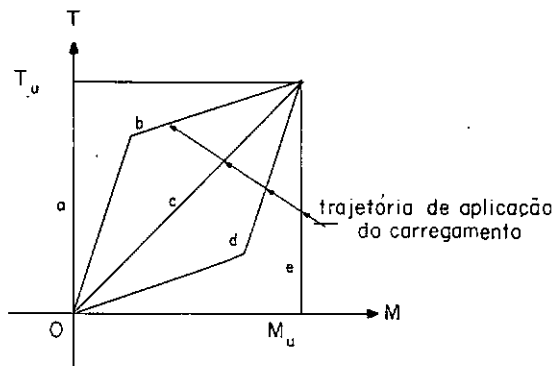


fig 6 - DIAGRAMA DE CARREGAMENTO T x M

Atualmente duas teorias se destacam como as de maior aceitação entre os estudiosos do assunto. Embora ambas conduzam a resultados bastante semelhantes, cumpre, no entanto, ressaltar que ambos os modelos não são gerais, pois, analisam a combinação de torção com flexão (pura ou simples) no plano.

A primeira dessas teorias foi lançada por LESSIG<sup>3,4,5</sup> (U.R.S.S.) em 1959, servindo de base para comparações com inúmeras pesquisas experimentais<sup>5</sup>, principalmente entre pesquisa-

dores americanos. A segunda, elaborada por LAMPERT e THÜRLIMANN<sup>1,3,6</sup> (1966), com sua formulação mais geral apresentada em 1970, é a consagrada pelo C.E.B.<sup>1,3</sup> e pela NBl<sup>2</sup>. FAUCHART<sup>7</sup>, em trabalho mais recente (1973), procura apresentar uma nova formulação tendo como base o modelo de Lampert e Thürlimann e, estabelecendo uma comparação de resultados entre este e o método de Lessig para peças retangulares submetidas à torção com flexão pura num plano de simetria.

Lessig parte de um mecanismo de rotura, dito de "flexão esconsa" ("flexion biaise"), segundo o qual uma peça submetida à torção rompe por "flexão" em torno de um eixo oblíquo em relação ao seu eixo longitudinal e paralelo a uma de suas faces (Fig. 7). Como hipóteses básicas admite o escoamento simultâneo de toda a armadura que atravessa a superfície de rotura, a não absorção de tensões pelo concreto, espaçamento constante dos estribos e relação T/M constante ao longo da zona de ruína. No entanto, uma rotura por esmagamento do concreto antes do escoamento da armadura não pode ser deduzida diretamente da teoria de Lessig. Para tanto ela recorre a expressões empíricas obtidas a partir dos ensaios realizados.

Ater-nos-emos aqui a estes comentários, observando que ZIA<sup>5</sup> apresentou em 1968 um interessante trabalho comparativo entre as diversas teorias existentes na época, onde tece comentários sobre a proposta de Lessig. Maiores detalhes sobre esta teoria poderão ser obtidos neste ou nos próprios textos da pesquisadora<sup>5</sup>.

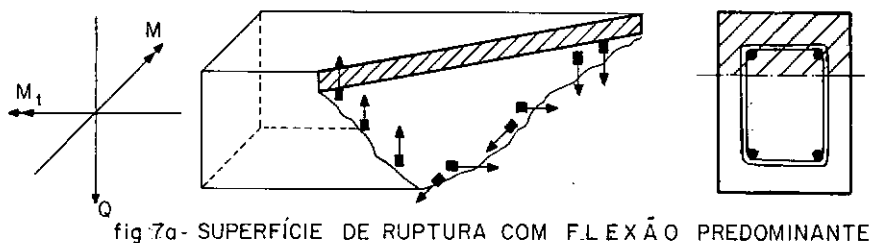


fig 7a- SUPERFÍCIE DE RUPTURA COM FLEXÃO PREDOMINANTE

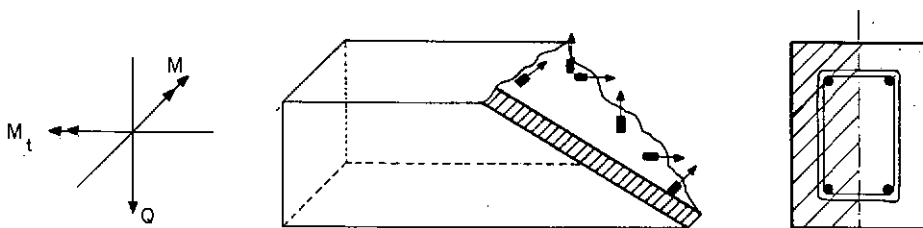


fig 7b- SUPERFÍCIE DE RUPTURA CORTANTE PREDOMINANTE

O modelo proposto por Lampert e Thürlimann supõe que o mecanismo de resistência de uma peça de concreto armado sujeita à torção (pura ou combinada com outros esforços), após iniciada a fissuração, até a rotura, é do tipo de uma treliça espacial onde seus elementos tracionados são constituídos pela sua armação (estribos e barras longitudinais) e os comprimidos pelo concreto entre fissuras. Esta é a teoria adotada pelo C.E.B.<sup>1,3</sup> e será a utilizada no presente trabalho, em face de sua maior simplicidade de aplicação em programas automáticos em relação à proposta por Lessig.

Passaremos, por conseguinte, de agora em diante, a tratar a torção sempre a partir do modelo de Lampert, salvo quando houver menção em contrário. No entanto, por força de ainda não ser possível uma completa generalização das teorias de torção<sup>3</sup>, principalmente quando combinada com outros tipos de solicitações, ater-nos-emos, neste trabalho, à análise de peça de eixo reto com seção retangular cheia ou vazada.

Convém ressaltar que o mesmo tratamento será dado a am bos os tipos de seção aqui utilizados. Isto torna-se possível em virtude do que demonstram os ensaios já efetuados, onde uma peça de seção retangular maciça apresenta, após fissurada, resistência equivalente à de uma seção vazada de mesma dimensões externas e armadura. A espessura das paredes de tal seção é ob tida de acordo com o critério apresentado na Figura 8.

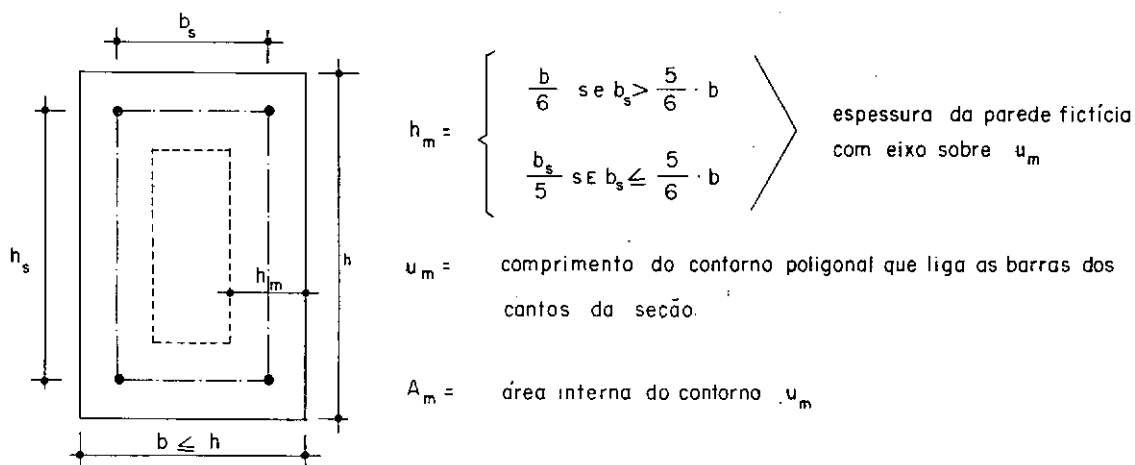


fig 8 - SEÇÃO RETANGULAR MACIÇA FISSURADA POR TORÇÃO

Em vista do exposto no parágrafo anterior, não faremos mais distinção entre seção retangular maciça e vazada no que diz respeito à torção de peças fissuradas.

Passamos, agora à dedução das expressões dos valores últimos do momento torsor de uma peça de concreto armado, seja para a solicitação pura ou combinada.



### I.2.2.2. Por torção pura

Seja um elemento estrutural de concreto armado, com seção retangular constante ao longo de seu eixo, suposto reto, fissurado e, submetido a um esforço de torção  $T$  (Fig. 9). Teremos, então, como sistema resistente a esta sollicitação, uma treliça, conforme descrita acima.

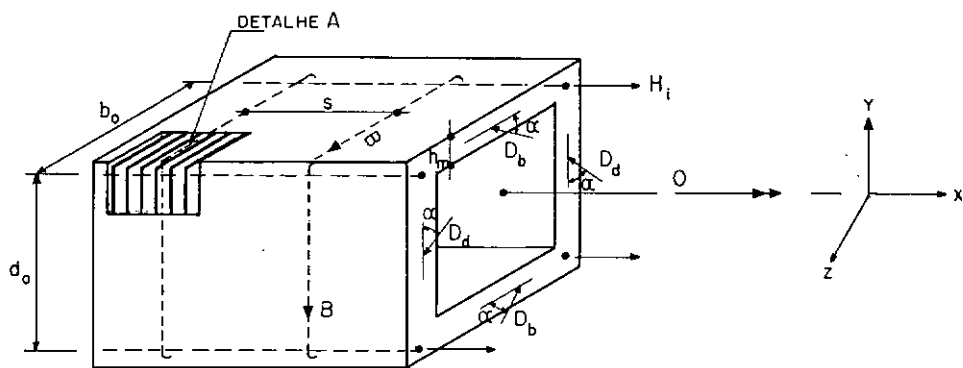


fig. 9A

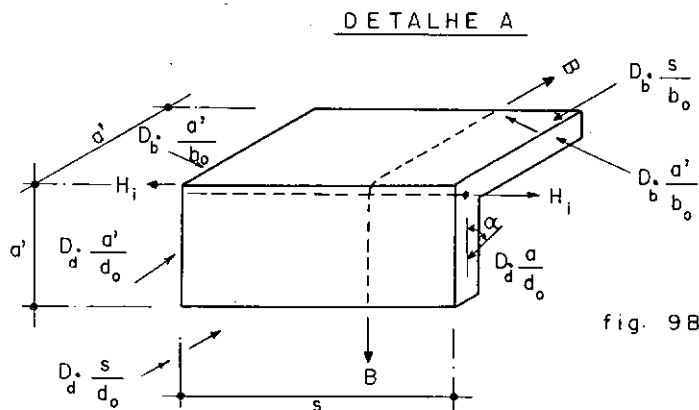


fig. 9B

Da figura acima podemos tirar:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{B}{c \cdot s} \quad (\text{I.4})$$

$$D_j = \frac{c \cdot a_j}{\operatorname{sena}} \quad (\text{I.5})$$

$$0 = \sum_i H_i - c^2 \cdot \sum_j \frac{a_j \cdot s}{B} \quad (\text{I.6})$$

$$T = C.d_o.b_o + Cb_o.d_o = C.2(b_o.d_o) = 2C.A_m \quad (I.7)$$

onde C - fluxo de cisalhamento, constante ao longo da seção.

$a_j$  - dimensão  $d_o$  ou  $b_o$

B -  $A_e.\sigma_s$ , força de tração num estribo

$D_j$  - força de compressão numa biela de concreto, em uma parede da peça

$H_i$  - força de tração numa barra longitudinal i da peça.

Evidentemente, por termos três tipos de elementos resistentes nesta treliça, isto é, estribos, barras longitudinais e concreto, três modos básicos de ruína poderão surgir, em função do esgotamento da capacidade resistente de cada um desses elementos:

a) Por escoamento dos estribos:

$$\text{De (I.7): } C = \frac{T}{2A_m} \quad (I.8)$$

Substituindo (I.8) em (I.4) temos:

$$\text{tg } \alpha = \frac{B}{\frac{T}{2A_m} \cdot s} \quad \therefore \quad T = 2A_m \cdot \frac{B}{s} \cdot \text{tg } \alpha \quad (I.9)$$

Sabendo que  $B = A_e.\sigma_s$  e fazendo  $\sigma_s = f_{ywd}$  (tensão de escoamento de cálculo do aço dos estribos) obtemos:

$$T_{rd2} = 2A_m \cdot \frac{A_e}{s} \cdot f_{ywd} \cdot \text{cotg } \alpha \quad (I.10)$$

A expressão acima fornece o limite de resistência de uma peça à torção pura para sua armação de estribos.

b) Por escoamento da armadura longitudinal:

De (I.6) temos:

$$\sum_i H_i = C^2 \cdot \sum_j \frac{a_j \cdot s}{B} \quad (\text{I.11})$$

Substituindo (I.4) em (I.11) temos:

$$\sum_i H_i = C \cdot \cotg \alpha \cdot \sum_j a_j \quad (\text{I.12})$$

Fazendo  $\sum_j a_j = u_m$  (perímetro delimitado pelas barras dos cantos da seção) temos:

$$\sum_i H_i = C \cdot \cotg \alpha \cdot u_m \quad (\text{I.13})$$

Sabemos que  $H_i = A_{sl} \cdot \sigma_{sl}$ , fazendo  $\sigma_{sl} = f_{yld}$  (tensão de escoamento de cálculo do aço da armadura longitudinal) e substituindo junto com (I.7) em (I.13) obtemos:

$$T_{rd3} = 2A_m \cdot \frac{\sum A_{sl}}{u_m} \cdot f_{yld} \cdot \cotg \alpha \quad (\text{I.14})$$

A equação acima fornece o limite de resistência de uma peça à torção pura quanto a sua armação longitudinal.

c) Por esmagamento de uma diagonal de concreto comprimido:

Substituindo (I.8) em (I.5) temos:

$$T = D \cdot 2A_m \cdot \frac{\text{sen} \alpha}{a_j} \quad (\text{I.15})$$

Da Figura (8a) tiramos:

$$D = \sigma_c \cdot a_j \cos \alpha \cdot h_m \quad (\text{I.16})$$

onde  $\sigma_c$  - tensão reinante no concreto.

Substituindo (I.16) em (I.15):

$$T = \frac{\sigma_c}{2} \cdot 2A_m \cdot h_m \cdot \text{sen}2\alpha \quad (\text{I.17})$$

Por causa do empenamento das paredes do elemento provocado pela torção<sup>5</sup> surgirão tensões adicionais no concreto não calculáveis pelo modelo da treliça. Como tais tensões poderão atingir valores elevados, a tensão limite de resistência do concreto para o modelo da treliça é fixada em  $0,5f_{ccd}$ . Reserva-se assim, a restante capacidade resistente do concreto para absorver as tensões de empenamento<sup>3</sup>.

Introduzindo em (I.17) a tensão acima fixada, obtemos o limite de resistência de uma peça de concreto armado submetida à torção pura, em relação as suas diagonais comprimidas:

$$T_{rd1} = 0,25f_{ccd} \cdot 2A_m \cdot h_m \cdot \text{sen}2\alpha \quad (\text{I.18})$$

As expressões obtidas nos itens a, b e c acima estão dadas em função do ângulo  $\alpha$  de inclinação das diagonais da treliça. Esta inclinação é, obviamente variável de acordo com a percentagem de armação de peça, bem como com o seu estado de solicitação. No entanto, como afirma LAMPERT<sup>5</sup> e, adota o C.E.B.,

se supusermos para  $\alpha$  um valor de  $45^\circ$ , as expressões (I.10), (I.14) e (I.17) fornecem resultados satisfatórios. Este será o procedimento adotado no presente estudo, ressalvando-se que, a qualquer tempo, é possível introduzir para  $\alpha$  valor diferente, desde que comprovada sua necessidade, em face de dados experimentais confiáveis.

Por fim, o torsor último,  $T_{rd}$ , de resistência de uma peça de concreto armado será dado pelo menor dos três valores acima obtidos.

#### I.2.2.3. Por Torção combinada com outros esforços

Como já frisamos no início deste tópico, pouco ou nenhum material se encontra disponível na literatura com respeito à interação da torção com outras solicitações. Embora seja possível obter-se resultados para a interação momento torsor com flexão pura ou simples, esta se restringe ao caso de solicitação segundo um plano de simetria da seção transversal da peça (solicitação plana). Nada há, todavia, com referência à interação com o esforço normal ou com momentos fletores no espaço (flexão fora dos eixos de simetria de seção). O próprio C.E.B<sup>1,3</sup> não faz nenhuma referência a este tipo de combinação, restringindo-se, apenas, à torção pura ou associada à flexão plana, sem esforço normal.

À falta, portanto, de dados disponíveis, e, visando estabelecer limitações para o torsor admissível de uma seção solicitada à torção combinada com flexão no espaço, fazemos uma ge-

neralização das expressões existentes na bibliografia adotada e consideradas válidas para a torção combinada com flexão no plano<sup>1,3,5,7</sup>. Assim, dependendo do caso, teremos:

a) Por torção com flexão, havendo esforço cortante:

O momento torsor  $T$  e o esforço cortante  $V$ , atuantes na seção, devem satisfazer à condição<sup>3</sup>:

$$\frac{T}{T_o} + \frac{V}{V_o} \leq 1$$

onde:

$T$  - momento torsor atuante;

$T_o = T_{rdl}$  (ver item I.2.2.2)

$V = \sqrt{V_y^2 + V_z^2}$  - esforço cortante atuante (sendo  $y$  e  $z$  os eixos principais de inércia centrais da seção);

$V_o = 0,3f_{ccd}A_c$  - esforço cortante próximo admissível ( $A_c$  representa a área da seção de concreto resistente ao esforço cortante, conforme explica a Fig. 10).

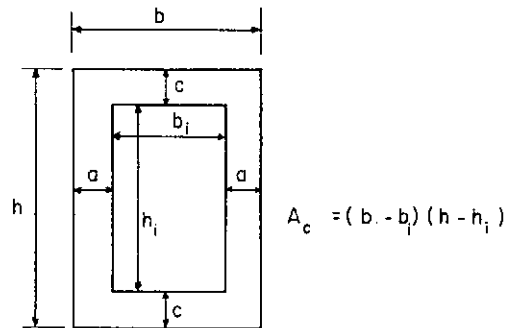
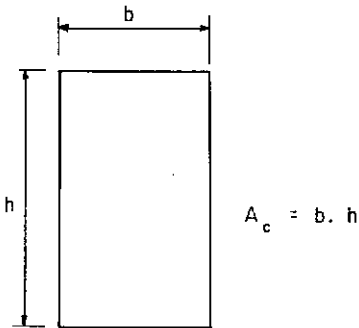


fig 10a - SEÇÃO RETANGULAR MACIÇA

fig 10b - SEÇÃO RETANGULAR VAZADA

Como afirma ROBINSON<sup>8</sup>, este diagrama de interação, proposto pelo C.E.B.<sup>3</sup>, demonstra ser algo conservador em presença dos resultados obtidos nos ensaios. No entanto, por uma questão de coerência entre os princípios adotados ao longo deste trabalho e, em virtude da generalização para o espaço efetuada, preferimos adotar tal curva, como garantia de não estarmos contra a segurança.

- b) Por torção com flexão, sem esforço cortante (esforço normal eventual).

LAMPERT<sup>5</sup> e posteriormente FAUCHART<sup>7</sup>, propõem para a interação momento torsor x momento fletor uma curva constituída por dois ramos de parábola do 2º grau (Fig. 11a). No caso de peças armadas simetricamente em sua seção transversal este diagrama se simplifica em um só ramo da parábola (Fig. 11b). Este segundo tipo de seção é o adotado no programa ANALEC (ver justificativa no item II.2.2.2.3).

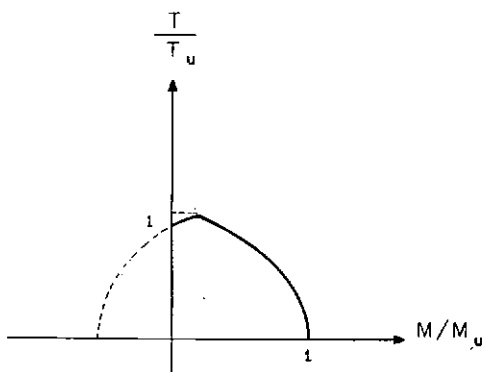


Fig.11a - DIAGRAMA T x M PARA SEÇÕES COM ARMADURA ASSIMÉTRICA.

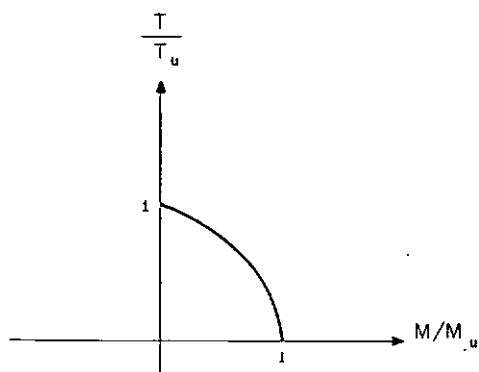


Fig 11b - DIAGRAMA T x M PARA SEÇÕES COM ARMADURA SIMÉTRICA.

Generalizando a curva para a interação com flexão no espaço, o momento torsor  $T$  e o fletor  $M$ , atuantes na seção, deverão satisfazer à condição:

$$\left(\frac{T}{T_0}\right)^2 + \frac{M}{M_0} < 1 \quad (\text{I.19})$$

onde:

$T$  - ver item I.2.2.3.a

$T_0 = T_{rd}$  - ver item I.2.2.2

$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$  - momento fletor atuante.

$M_0$  - momento fletor admissível na mesma direção e sentido de  $M$ , associado ao esforço normal  $N$ , atuante

Retirando-se da inequação (I.19) o valor de  $M_0$  temos:

$$M_0 \geq \frac{M \cdot T_0^2}{(T_0^2 - T^2)} = M_1 \quad (\text{I.20})$$

Obtivemos em (I.20) um momento fletor ( $M_1$ ) tal que, associado ao esforço normal,  $N$ , atuante, deverá ser menor, no máximo igual, a  $M_0$  para que a seção estudada seja estável para a combinação de esforços,  $T$ ,  $M$ ,  $N$ . Sendo assim, verifica-se se a seção é capaz de resistir ao par  $N$ ,  $M_1$ . Se não o for significa que o momento torsor  $T$  é tal que ultrapassa a capacidade resistente da seção analisada, para o dado valor de  $M$ .

### I.3. Fissuração de um Elemento

Supõe-se que um elemento apresentará fissuras, de qualquer que seja a origem, quando a tensão principal de tração (calculada pela resistência dos materiais), em um ou mais pon -



tos de qualquer de suas seções transversais, ultrapassar a tensão característica de resistência à tração do concreto, definida no item I.1.4.1.

A definição acima não se apresenta de todo exata para peças de concreto armado. No caso de solicitações de torção, o momento torsor de fissuração de uma peça de concreto armado é maior que o de uma peça de concreto simples de mesma característica geométrica e mecânica em face da presença da armação. HSU<sup>5</sup>, em seus ensaios, comprova este fenômeno.

No entanto, em virtude de o erro introduzido no cálculo das deformações neste estágio de solicitação não ser significativo e, diminuir à medida que esta se eleva, podemos assumir como válida, dentro destas limitações, a definição acima enunciada.

Observamos que este conceito será utilizado neste trabalho apenas no caso do estudo de peças sujeitas ao esforço de torção (ver itens I.2.2, I.5.2 e II.2.2.2).

#### I.4. Estado-Limite Último

Em relação ao estado-limite último, consideramos duas formas distintas de comportamento para as estruturas reticuladas de concreto armado, em função, principalmente, da geometria da estrutura e do tipo de carregamento aplicado, como se explica a seguir:

#### I.4.1. Esgotamento da Capacidade resistente de uma ou mais seções transversais

É o comportamento típico das estruturas pouco esbeltas, podendo ser visualizado através da curva carga-flecha da Fig. 12. Nesta, apresentamos a curva para a carga horizontal  $H$  e o deslocamento  $a$  que lhe é associado.

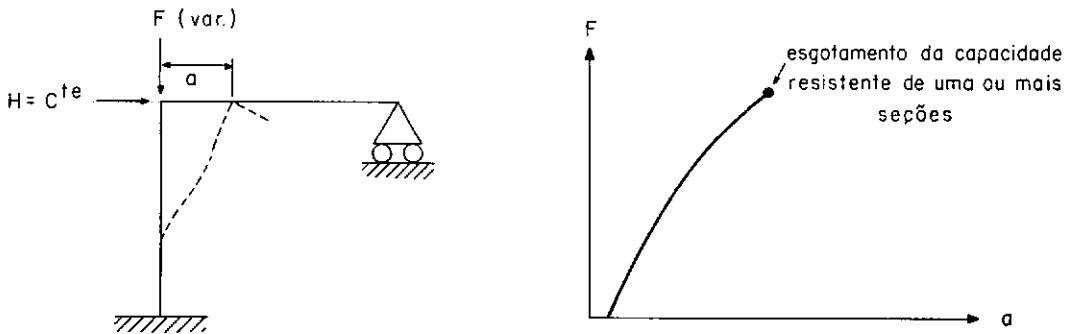


fig 12- ESTADO-LIMITE ÚLTIMO POR ESGOTAMENTO DA CAPACIDADE RESISTENTE DE UMA OU MAIS SEÇÕES.

O esgotamento da capacidade resistente de uma seção é definido pela ultrapassagem das deformações limites de sua fibra mais comprimida e/ou da mais tracionada.

#### I.4.2. Instabilidade do Equilíbrio

Este tipo de comportamento ocorre em estruturas de esbeltez elevada com elementos comprimidos. Neste caso, como se pode observar através da curva carga-flecha da Figura 13, as seções transversais não são solicitadas até seu limite máximo da resistência.

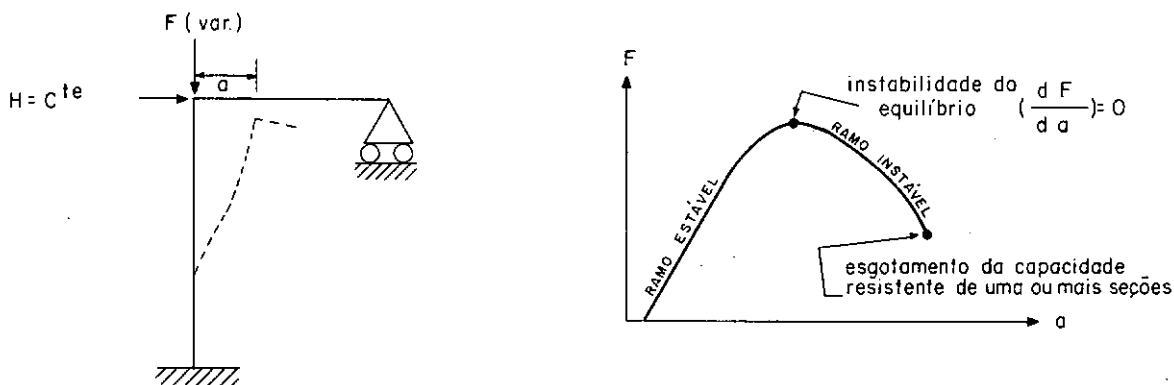


fig. 13 - ESTADO-LIMITE ÚLTIMO POR INSTABILIDADE DO EQUILÍBRIO

A estrutura da figura acima, apesar de semelhante à figura 12, apresenta um índice de esbeltez bem maior que esta. O gráfico carga-flecha apresenta, para a estrutura esbelta, um ramo descendente que é de equilíbrio instável, e que só pode ser obtido com uma redução da carga, a partir do ponto A.

### I.5. A Não-Linearidade Física

Pelo fato do concreto e do aço serem materiais de comportamento não-linear, isto acarreta que as relações entre o esforço normal e a deformação axial no centróide de uma seção, o momento fletor e a curvatura que lhe é associada e o momento torsor e a rotação relativa por unidade de comprimento deixam de ser lineares.

Com isto, os valores das rigidezes à flexão, à deformação axial e à torção de uma seção transversal de um elemento, passam a ser dependentes do estado de sollicitação da mesma. Como a rigidez de um elemento é definida a partir da rigidez de cada uma de suas seções transversais e, o estado de sollicitação

destas não é uniforme ao longo do elemento, não podemos definir um valor único para a rigidez do mesmo a partir de uma qualquer seção. Sendo assim, adotaremos como representativo de sua rigidez um valor médio obtido a partir da rigidez de diversas seções ao longo do elemento.

No presente trabalho faremos uso do conceito de rigidez secante a uma dada deformação de uma seção transversal para definir a rigidez secante a esta deformação do elemento em estudo, suposta constante ao longo do mesmo. De acordo, então, com este princípio, temos:

#### I.5.1. Rigidez Secante à Flexão e à Deformação Axial

Seja uma seção transversal qualquer de um dado elemento, com um sistema de eixos cartesianos com origem no seu centróide e solicitada por um conjunto de esforços  $M_y$ ,  $M_z$  e  $N$  (Fig. 14).

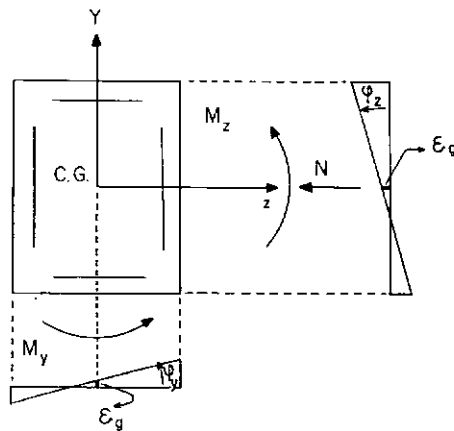


fig 14 - SOLICITAÇÕES E DEFORMAÇÕES NUMA SEÇÃO DE CONCRETO ARMADO

Associadas a estas solicitações a seção transversal mencionada apresentará as deformações: curvaturas  $\varphi_y$  e  $\varphi_z$  (nos planos xz e xy, respectivamente) e a deformação axial ao nível de seu centróide,  $\varepsilon_z$ . Função dessas deformações serão gerados esforços internos  $M_{ry}$ ,  $M_{rz}$  e  $N_r$  que equilibrarão os solicitantes. Desse modo teremos:

$$M_{ry}(\varphi_y, \varphi_z, \varepsilon_g) = M_y$$

$$M_{rz}(\varphi_y, \varphi_z, \varepsilon_g) = M_z$$

$$M_r(\varphi_y, \varphi_z, \varepsilon_g) = N$$

Fixando duas das solicitações acima e, fazendo variar a terceira, podemos obter gráficos que definem o comportamento da seção para este último esforço:

a) Diagrama Momento-curvatura

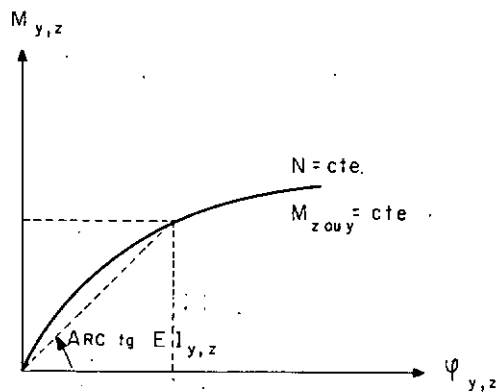


fig. 15

A partir, então, de um momento fletor  $M$  e da curvatura associada  $\psi$ , podemos definir uma rigidez secante à flexão dada por:

$$EI_Y = \frac{M_{rY}}{\psi_Y} = \frac{M_Y}{\psi_Y}$$

ou

$$EI_Z = \frac{M_{rZ}}{\psi_Z} = \frac{M_Z}{\psi_Z}$$

b) Diagrama Esforço Normal-Deformação  $\epsilon_g$ :

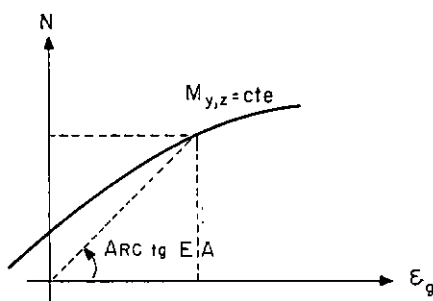


fig. 16

Do mesmo modo que no item a podemos definir uma rigidez secante à deformação axial dada por:

$$EA = \frac{N_{r}}{\epsilon_g} = \frac{N}{\epsilon_g}$$

### I.5.2. Rigidez Secante à Torção

Identicamente ao dito no item precedente podemos, a partir do diagrama  $T \times \frac{d\theta_x}{dx}$ , definir uma rigidez secante à torção.

Seja o diagrama  $T \times \frac{d\theta_x}{dx}$  da Figura 17, que é representativo da sua forma genérica<sup>5,6,8</sup>.

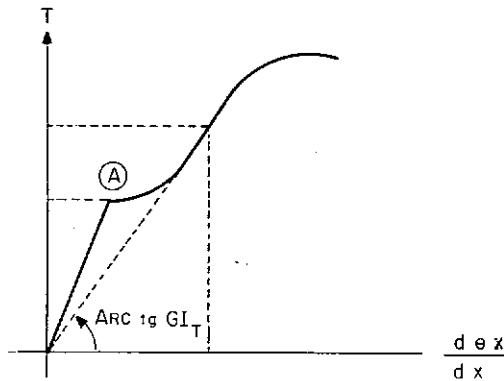


fig. 17 - DIAGRAMA TORSOR x ROTAÇÃO RELATIVA

Dizemos, então, que a rigidez secante à torção de uma dada seção de um elemento é a razão em qualquer instante, entre o momento torsor,  $T$ , aplicado e a rotação relativa,  $\frac{d\theta_x}{dx}$ , que lhe é correspondente:

$$GI_T = \frac{T}{\frac{d\theta_x}{dx}}$$

Observamos que se no caso da flexão e da deformação axial nos é possível obter as rigidezes respectivas para qualquer solicitação, uma vez que os diagramas  $M \times \varphi$  e  $N \times \epsilon_g$  podem ser obtidos a qualquer tempo, o mesmo não sucede com a tor-

ção. Para esta solicitação uma relação genérica entre  $T$  e  $d\theta_x/dx$  de modo a definir uma função  $GI_T$  não é ainda possível, a não ser através de ensaios<sup>5,6</sup>. Sendo assim, somos obrigados a nos restringir a determinados valores particulares de  $GI_T$ , conhecidos, como veremos no Capítulo II.

### I.5.3. A Rigidez de um Elemento

Por análise de cada uma das seções transversais podemos obter, por pontos, as funções  $EI_y$ ,  $EI_z$ ,  $EA$  e  $GI_T$  ao longo de um elemento de uma estrutura. Por integração numérica calculamos valores médios para cada um desses parâmetros, os quais serão adotados como representativos das rigidezes deste elemento.

Em face da impossibilidade de se analisar todas as seções de cada elemento de uma estrutura, escolhem-se, como suficientes, cinco destas (às duas extremas e três intermediárias). Para a integração aplica-se a fórmula de Newton-Coates para cinco pontos:

$$F = \int_0^1 f(\xi) d\xi$$

onde  $\xi = \frac{x}{L}$

$F = EI, EA$  ou  $GI_T$  para o elemento.

$$\int_0^1 f(\xi) d\xi = \frac{1}{90}(7f_1 + 32f_2 + 12f_3 + 32f_4 + 7f_5), \quad f_1 = \text{valores das funções}$$



EI, EA ou  $GI_T$  em cada uma das 5 seções escolhidas.

O erro introduzido na análise de uma estrutura com a suposição aqui adotada de que a rigidez de um elemento a uma determinada deformação é constante ao longo do mesmo é minimizado através da discretização destes elementos em outros, de acordo com os critérios apresentados no Capítulo III.

#### I.6. A Não-Linearidade Geométrica (A Interação Axial-Flexão)

É usual, no estudo das estruturas convencionais de concreto armado, a consideração do equilíbrio com base na configuração inicial (indeformada) da estrutura, mediante uma análise dita linear geometricamente. Se bem que seja um cálculo aproximado, podemos considerá-lo como válido para o caso de estruturas pouco esbeltas, ainda mais que para as estruturas usuais os deslocamentos não são muito significativos em relação a sua geometria indeformada.

No entanto, para as estruturas constituídas por elementos solicitados à flexão, com presença de forças axiais, principalmente para estruturas esbeltas, o fenômeno da interação axial-flexão pode assumir importância fundamental para o equilíbrio. Somos, então, levados a proceder a uma análise não mais baseada na configuração indeformada mas com equilíbrio na configuração deformada da estrutura. Isto se faz necessário já que, face à presença da força axial, a deflexão lateral de um elemento pode dar origem a momentos fletores adicionais bastante significativos (Fig. 18).

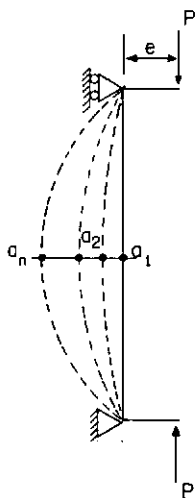


fig 18 - COLUNA ESBELTA CARREGADA EXCÊNTRICAMENTE

Esta interação entre o esforço axial e a flexão, gerando efeitos de 2ª. ordem, afeta a matriz de rigidez de um elemento de uma estrutura, introduzindo nela uma contribuição devida ao esforço axial. A este fenômeno chamamos não-linearidade geométrica.

## CAPÍTULO II

### O MÉTODO DE ANÁLISE

#### II.1. Generalidades

Conforme foi dito na introdução deste trabalho é possível proceder-se à análise não-linear de uma estrutura através de uma sucessão de etapas lineares de cálculo, com os parâmetros de que depende o problema sendo mantidos constantes ao longo de cada etapa. Com base nos resultados obtidos ao final de uma etapa tais parâmetros são corrigidos, para utilização na seguinte. O processo é dado por concluído quando, em duas etapas consecutivas os parâmetros apresentam os mesmos valores, a menos de uma determinada tolerância.

Para o caso de estruturas carregadas apenas nos nós, objeto deste estudo, os efeitos da não-linearidade afetam tão somente os coeficientes da matriz de rigidez do elemento. Assim, as correções acima mencionadas (associadas à não-linearidade física e à geométrica) devem ser efetuadas na referida matriz, permanecendo, no mais, inteiramente válido o esquema de cálculo usualmente empregado numa análise pelo método da Rigidez<sup>11</sup>.

No caso de uma barra de concreto armado as grandezas

afetadas pela não-linearidade física são as rigidezes axial ( $EA$ ), à flexão ( $EI_y$  e  $EI_z$ ) e à torção ( $GI_T$ ), as quais passam a dependentes do estado de sollicitação do elemento (ver item I.5). Acrescentando-se a este fato a necessidade de se levar em conta, principalmente nas estruturas esbeltas, os efeitos da segunda ordem, decorrentes da interação axial-flexão, tem-se ainda outro parâmetro a influir na matriz de rigidez: a força axial no elemento.

Basicamente, então, é a matriz de rigidez de elemento que é afetada pelo fenômeno da não-linearidade de uma estrutura. Passaremos, pois, a estudar esta matriz, apresentando a dedução de seus coeficientes e, o processo de correção da mesma ao longo de uma análise.

## II.2. A Matriz de Rigidez de Elemento:

Dividiremos o estudo dessa matriz em duas etapas, abordando, pela ordem, a influência das não-linearidades geométrica e física sobre a mesma.

### II.2.1. A Não-Linearidade Geométrica

#### II.2.1.1. A Matriz de Rigidez Transcendente

Pela teoria de 2a. ordem, tomando como base a equação diferencial da deformada do elemento, podemos obter, como veremos, uma forma "exata" da matriz de rigidez (a menos do valor das rigidezes, conforme item I.5).

Seja, então, o elemento de estrutura da Figura 19, com o comprimento total  $L$ , inicialmente reto, suposto deformado e em equilíbrio sob a ação dos esforços  $A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}$  e  $P$ , representado por suas projeções nos planos cartesianos  $XY$  e  $YZ$ .

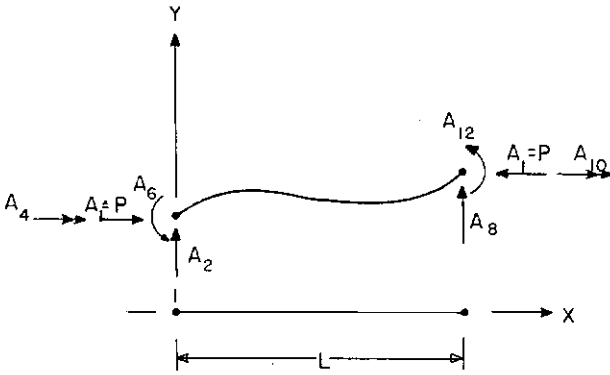


fig. 19a - PLANO XY

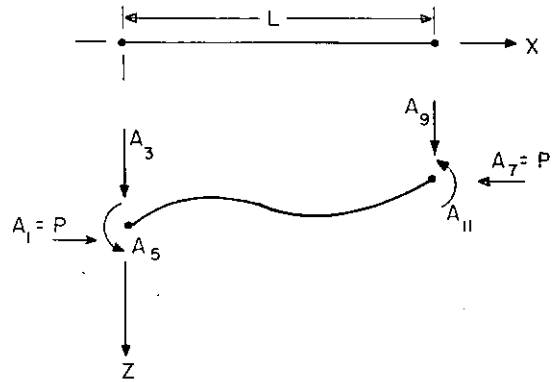


fig 19b - PLANO XZ

Chamemos, respectivamente de  $v(x)$  e  $w(x)$  as funções de deslocamentos segundo os eixos  $y$  e  $z$  (Fig. 20). Os deslocamentos  $d_2$  e  $d_8$  e as rotações  $d_6$  e  $d_{12}$  são condições de contorno de  $v(x)$ . Os deslocamentos  $d_3$  e  $d_9$  e as rotações  $d_5$  e  $d_{11}$  o são para  $w(x)$ .

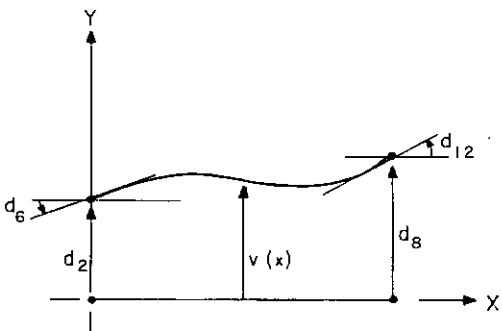


fig 20a - DESLOCAMENTOS PLANO XY

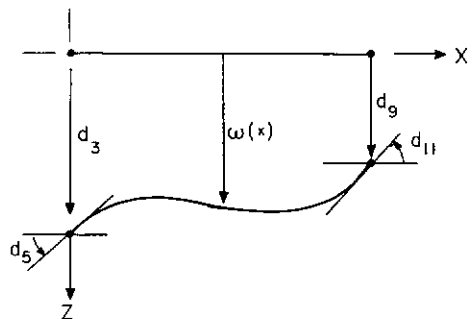


fig 20b - DESLOCAMENTO PLANO XZ

De acordo com o item I.1.1, podemos relacionar a função de deslocamento num plano com o momento fletor ao longo do elemento neste plano. Com isto podemos escrever:

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = \frac{M_z}{EI_z} \quad (\text{II.1})$$

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = \frac{M_y}{EI_y} \quad (\text{II.2})$$

onde:

$$M_z(x) = -A_6 + A_2x - P(v(x) - d_2) \quad (\text{II.3})$$

$$M_y(x) = A_5 + A_3x - P(w(x) - d_3) \quad (\text{II.4})$$

Substituindo (II.3) em (II.1) e (II.4) em (II.2), temos:

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} + \frac{P}{EI_z} \cdot v(x) = (A_2x - A_6 + P \cdot d_2) \cdot \frac{1}{EI_z} \quad (\text{II.5})$$

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} + \frac{P}{EI_y} \cdot w(x) = (A_3x + A_5 + P \cdot d_3) \cdot \frac{1}{EI_y} \quad (\text{II.6})$$

Desenvolveremos sucessivamente cada uma das equações acima, delas obtendo os coeficientes da matriz de rigidez.

A equação (II.5) tem como solução geral:

$$v(x) = v_h(x) + v_p(x) \quad (\text{II.7})$$

onde:

$$v_h(x) = c_1 \cos k_z \cdot x + c_2 \operatorname{sen} k_z \cdot x \quad (\text{solução da equação homogênea})$$

(II.7a)

$$v_p(x) = (A_2 x - A_6 + P \cdot d_2) \cdot \frac{1}{P} \quad (\text{solução particular})$$

(II.7b)

$$k_z = \sqrt{\frac{P}{EI_z}}$$

$c_1$  e  $c_2$  - constantes que dependem das condições de contorno.

Derivando (II.7), obtemos a expressão das rotações,  $\theta_z(x)$ , das seções ao longo do elemento.

$$\theta_z(x) = \frac{dv(x)}{dx} = k_z (c_2 \cos k_z \cdot x - c_1 \operatorname{sen} k_z \cdot x) + \frac{A_2}{P}$$

(II.8)

As condições de contorno de  $v(x)$  e  $\theta_z(x)$  nos fornecem os valores de  $c_1$  e  $c_2$ :

Para  $x = 0$  temos  $v(x) = d_2$

$$c_1 + d_2 - \frac{A_6}{P} = d_2 \quad \therefore \quad c_1 = \frac{A_6}{P}$$

(II.9)

Para  $x = 0$  temos  $\theta_z(x) = d_6$

$$k_z c_2 + \frac{A_2}{P} = d_6 \quad \therefore \quad c_2 = \frac{P d_6 - A_2}{k_z \cdot P}$$

(II.10)

Introduzindo (II.10) e (II.9) em (II.7) e (II.8) tiramos:

$$v(x) = \frac{A_6}{P} \cdot \text{cos}k_z \cdot x + \left( \frac{d_6 P - A_2}{k_z \cdot P} \right) \text{sen}k_z \cdot x +$$

$$+ \frac{1}{P} (A_2 x + P d_2 - A_6) \quad (\text{II.11})$$

$$\theta_z(x) = k_z \left[ \left( \frac{d_6 P - A_2}{k_z \cdot P} \right) \text{cos}k_z \cdot x - \frac{A_6}{P} \text{sen}k_z \cdot x \right] + \frac{A_2}{P}$$

$$(\text{II.12})$$

Com base na equação (II.1) e utilizando (II.11), podemos obter a expressão do momento fletor ao longo do elemento:

$$M_z(x) = \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \cdot EI_z = - (A_6 \text{cos}k_z \cdot x +$$

$$+ \left( \frac{d_6 \cdot P - A_2}{k_z} \right) \text{sen}k_z \cdot x) \quad (\text{II.13})$$

Podemos explicitar  $M_z(x)$  em função dos esforços nas extremidades do elemento. Para tanto apliquemos em (II.13) a condição de contorno  $M_z(x) = A_{12}$ , para  $x = L$ , obtendo:

$$d_6 = \frac{A_2}{P} - \frac{(A_{12} + A_6 \text{cos}k_z L)}{\text{sen}k_z L} \cdot \frac{k_z}{P}$$

Substituindo a expressão de  $d_6$  em (II.13) temos:

$$M_z(x) = \frac{(A_{12} + A_6 \text{cos}k_z L)}{\text{sen}k_z L} \cdot \text{sen}k_z x - A_6 \text{cos}k_z x$$

$$(\text{II.14})$$

Aplicando no plano X-Z, o raciocínio adotado para o plano X-Y, temos para a equação (II.6) a seguinte solução geral:



$$w(x) = w_h(x) + w_p(x)$$

onde

$$w_h(x) = c_3 \cos k_y x + c_4 \operatorname{sen} k_y x$$

$$w_p(x) = (A_3 x + A_5 + P \cdot d_3) \cdot \frac{1}{P}$$

$$k_y = \sqrt{\frac{P}{EI_y}}$$

$c_3$  e  $c_4$  - constantes dependentes das condições de contorno.

Derivando  $w(x)$  temos:

$$\theta_y(x) = \frac{dw(x)}{dx} = k_y (c_4 \cos k_y x - c_3 \operatorname{sen} k_y x) + \frac{A_3}{P}$$

Aplicando as condições de contorno:  $w(x) = d_3$  e

$\theta_y(x) = -d_5$  para  $x = 0$ , tiramos:

$$c_3 = -\frac{A_5}{P}$$

$$c_4 = \frac{-d_5 P - A_3}{k_y \cdot P}$$

Como resultado obtemos:

$$w(x) = -\frac{A_5}{P} \cdot \cos k_y x - \frac{(d_5 P + A_3)}{k_y \cdot P} \cdot \operatorname{sen} k_y x +$$

$$+ (A_3 x + A_5 + P \cdot d_3) \cdot \frac{1}{P} \quad (\text{II.15})$$

$$\theta_y(x) = k_y \left( -\frac{(d_5 P + A_3)}{k_y \cdot P} \cdot \cos k_y \cdot x + \frac{A_5}{P} \cdot \operatorname{sen} k_y \cdot x \right) + \frac{A_3}{P}$$

$$(\text{II.16})$$

A expressão do momento fletor  $M_Y(x)$  será:

$$M_Y(x) = \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \cdot EI_Y = A_5 \cos k_Y x + \left( \frac{d_5 P + A_3}{k_Y} \right) \cdot \text{sen} k_Y x \quad (\text{II.17})$$

Podemos, aqui também, explicitar  $M_Y(x)$  em função de  $A_5$  e  $A_{11}$ , fazendo  $M_Y(x) = A_{11}$ , obtendo  $d_5$  e substituindo em (II.17):

$$M_Y(x) = - \frac{(A_{11} + A_5 \cos k_Y L)}{\text{sen} k_Y L} \cdot \text{sen} k_Y \cdot x + A_5 \cos k_Y \cdot x \quad (\text{II.18})$$

Fazemos notar que as expressões (II.11) a (II.18) são válidas para valores positivos de  $P$  (forças axiais de compressão) e, diferentes de zero. Quando  $P$  assume valores negativos (tração), devemos modificar estas expressões.

$$\begin{aligned} \text{Sabendo que: } \text{sen}(ix) &= i \text{senh}(x) \quad , \quad \text{onde } i = \sqrt{-1} \\ \cos(ix) &= \cosh(x) \end{aligned}$$

Obtemos:

No Plano X-Y:

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{A_6}{P} \cosh k_z x + \left( \frac{d_6 P - A_2}{k_z \cdot P} \right) \cdot \text{sen} k_z x + \\ &+ \frac{1}{P} (A_2 x + P \cdot d_2 - A_6) \quad (\text{II.19}) \end{aligned}$$

$$\theta_z(x) = k_z \left[ \left( \frac{d_6 P - A_2}{k_z \cdot P} \right) \cosh k_z x - \frac{A_6}{P} \cdot \text{senh} k_z x \right] + \frac{A_2}{P} \quad (\text{II.20})$$

$$M_z(x) = - (A_6 \cosh k_z x + \left( \frac{d_6 P - A_2}{k_z} \right) \cdot \text{sen} k_z x) \quad (\text{II.21})$$

ou

$$M_z(x) = \frac{(A_{12} + A_6 \cosh k_z x)}{\sinh k_z x} \cdot \sinh k_z x - A_6 \cdot \cosh k_z x \quad (\text{II.22})$$

onde  $k_z = \sqrt{\frac{|P|}{EI_z}}$  , sendo  $P < 0$

No Plano X-Z:

$$w(x) = -\frac{A_5}{P} \cdot \cosh k_y x - \left( \frac{d_5 \cdot P + A_3}{k_y \cdot P} \right) \cdot \sinh k_y x + (A_3 x + A_5 + P \cdot d_3) \cdot \frac{1}{P} \quad (\text{II.23})$$

$$\theta_y(x) = k_y \left( -\left( \frac{d_5 P + A_3}{k_y \cdot P} \right) \cosh k_y x + \frac{A_5}{P} \cdot \sinh k_y x \right) + \frac{A_3}{P} \quad (\text{II.24})$$

$$M_y(x) = A_5 \cosh k_y x + \left( \frac{d_5 P + A_3}{k_y} \right) \sinh k_y x \quad (\text{II.25})$$

ou

$$M_y(x) = -\frac{(A_{11} + A_5 \cosh k_y L)}{\sinh k_y L} \cdot \sinh k_y x + A_5 \cosh k_y x \quad (\text{II.26})$$

onde  $k_y = \sqrt{\frac{|P|}{EI_y}}$  , sendo  $P < 0$ .

Conforme podemos observar nas expressões acima obtidas, o princípio da superposição de efeitos pode ser empregado, desde que o valor da força  $P$  seja mantido constante. Fundados neste fato é que deduziremos os coeficientes da matriz de rigidez de elemento a partir das expressões (II.11) a (II.18), introduzindo, para isto, os deslocamentos generalizados unitários.

Façamos, então, o deslocamento  $d_6 = 1$  (plano X-Y) e nulos todos os demais (Fig. 21):

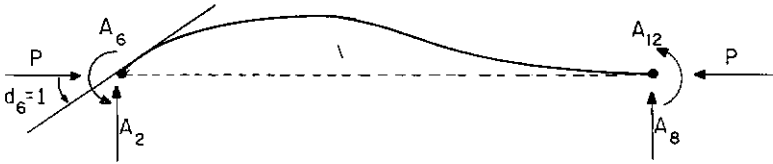


fig 21

Aplicando em (II.11) a condição  $v(x) = 0$  para  $x = L$ , temos:

$$A_2 = \frac{P \operatorname{sen} k_z L + A_6 \cdot k_z \cdot (\operatorname{coss} k_z L - 1)}{\operatorname{sen} k_z L - k_z L} \quad (\text{II.27})$$

Fazendo  $\theta_z(x) = 0$  para  $x = L$ , na expressão (II.12), temos:

$$A_2 = \frac{A_6 k_z \cdot \operatorname{sen} k_z L - P \operatorname{coss} k_z L}{1 - \operatorname{coss} k_z L} \quad (\text{II.28})$$

Igualando (II.27) e (II.28) obtemos:

$$A_6 = \frac{P}{k_z} \cdot \frac{\operatorname{sen} k_z L - k_z L \cdot \operatorname{coss} k_z L}{2 - 2 \operatorname{coss} k_z L - k_z L \cdot \operatorname{sen} k_z L} \quad (\text{II.29})$$

Substituindo (II.29) em (II.28):

$$A_2 = \frac{P(1 - \operatorname{coss} k_z L)}{2 - 2 \operatorname{coss} k_z L - k_z L \operatorname{sen} k_z L} \quad (\text{II.30})$$

Como os valores de  $A_6$  e  $A_2$ , acima obtidos, representam esforços por unidade de deslocamento, os mesmos são, consequentemente, coeficientes da matriz de rigidez de elemento, denominados  $SM(6,6)$  e  $SM(2,6)$ , respectivamente. Assim, para

a expressão (II.29) teremos, multiplicando e dividindo o termo à direita por  $4k_z L$ :

$$SM(6,6) = SM(12, 12) = \frac{4EI_z}{L} \cdot S_{3z}$$

onde

$$S_{3z} = \frac{k_z L (\text{sen} k_z L - k_z L \cdot \text{cos} k_z L)}{4\phi_z}$$

$$\phi_z = 2 - 2\text{cos} k_z L - k_z L \cdot \text{sen} k_z L.$$

Para (II.30), aplicando o fator  $6(k_z L)^2$  teremos:

$$\begin{aligned} SM(2,6) &= SM(6,2) = - SM(8,12) = - SM(12,8) = \\ &= \frac{6EI_z}{L^2} \cdot S_{2z} \end{aligned}$$

onde

$$S_{2z} = \frac{(k_z L)^2 (1 - \text{cos} k_z L)}{6\phi_z}$$

As condições de equilíbrio (Fig. 20) nos fornecem:

$$A_8 = - A_2 \quad (\text{II.31})$$

$$A_6 + A_{12} = A_2 L \quad (\text{II.32})$$

De (II.31) tiramos:

$$SM(8,6) = SM(6,8) = A_8 = - \frac{6EI_z}{L^2} \cdot S_{2z}$$

Introduzindo em (II.32) as expressões (II.29) e (II.30):

$$A_{12} = \frac{P}{k_z} \cdot \frac{k_z L - \text{sen} k_z L}{\phi_z}$$

Multiplicando e dividindo por  $2k_z L$  obtemos os valores de mais dois coeficientes da matriz de rigidez:

$$SM(6, 12) = SM(12,6) = \frac{2EI}{L} \cdot S_{4z}$$

onde

$$S_{4z} = \frac{k_z L (k_z L - \text{sen} k_z L)}{2\phi_z}$$

Para obtermos os restantes coeficientes da matriz de rigidez dependentes dos deslocamentos no plano X-Y, apliquemos, agora, um deslocamento unitário na direção y ( $d_2 = 1$ ), deixando nulos os demais (Fig. 22).

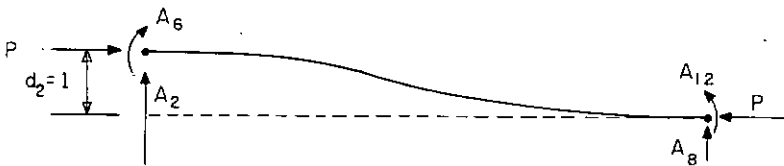


fig 22

Levando-se em conta que o valor de  $A_6$  é conhecido (igual a  $SM(6,2)$ , pelo teorema da reciprocidade dos esforços) e fazendo  $v(x) = 0$ , para  $x = L$ , podemos obter de (II.11) o valor de  $A_2$ :

$$A_2 = P \cdot \frac{k_z \cdot \text{sen} k_z L}{\phi_z}$$

Aplicando ao numerador e ao denominador o fator  $12(k_z \cdot L)^3$  temos:

$$SM(2,2) = SM(8, 8) = \frac{12EI_z}{L^3} \cdot S_{1z}$$

onde

$$S_{1z} = \frac{12(k_z L)^3 \cdot \text{sen} k_z L}{\phi_z}$$

Pelas condições de equilíbrio (Fig. 21):

$$A_8 = - A_2 \quad (II.33)$$

$$A_6 + A_{12} = A_2 \cdot L + 1 \cdot P \quad (II.34)$$

De (II.33) temos:

$$SM(8, 2) = SM(2, 8) = A_8 = - \frac{12EI_z}{L^3} \cdot S_{1z}$$

Substituindo em (II.34) as expressões conhecidas de  $A_2$  e  $A_6$  temos:

$$SM(2, 12) = SM(12, 2) = \frac{6EI_z}{L^2} \cdot S_{2z}$$

Passamos, agora, à dedução dos coeficientes devidos a deslocamentos no plano X-Z, adotando idêntico procedimento ao visto acima.

Fazendo  $d_5 = 1$  e nulos os demais deslocamentos, obtemos a configuração da Figura 23.

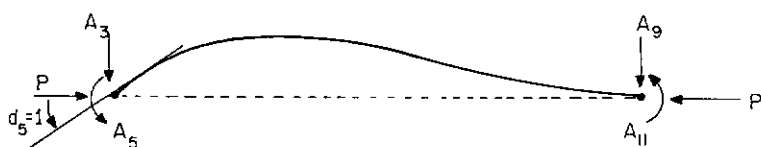


fig. 23

Com a condição  $w(x) = 0$ , para  $x = L$ , tiramos de (II.15):

$$A_3 = \frac{-P \operatorname{sen} k_y L - A_5 k_y (\operatorname{coss} k_y L - 1)}{\operatorname{sen} k_y L - k_y L} \quad (\text{II.35})$$

Com  $\theta_y(x) = 0$ , para  $x = L$ , tiramos de (II.16):

$$A_3 = \frac{P \operatorname{coss} k_y L - A_5 \operatorname{sen} k_y L}{1 - \operatorname{coss} k_y L} \quad (\text{II.36})$$

Igualando (II.35) e (II.36), temos:

$$A_5 = \frac{P}{k_y} \cdot \frac{\operatorname{sen} k_y L - k_y L \operatorname{coss} k_y L}{2 - 2 \operatorname{coss} k_y L - k_y L \operatorname{sen} k_y L} \quad (\text{II.37})$$

Multiplicando e dividindo (II.37) por  $4k_y L$  e, sabendo que  $A_5$  é um esforço por unidade de deslocamento, temos:

$$SM(5,5) = SM(11, 11) = A_5 = \frac{4EI_y}{L} \cdot S_{3y}$$

onde:

$$S_{3y} = \frac{k_y L (\operatorname{sen} k_y L - k_y L \operatorname{coss} k_y L)}{4\phi_y}$$

$$\phi_y = 2 - 2 \operatorname{coss} k_y L - k_y L \operatorname{sen} k_y L$$



Substituindo (II.37) em (II.36) obtemos:

$$A_3 = - \frac{P(1 - \cos k_y L)}{\phi_y} \quad (\text{II.38})$$

Aplicando em (II.38) o fator  $6(k_y L)^2$  tiramos:

$$\begin{aligned} SM(3,5) &= SM(5,3) = - SM(9,11) = - SM(11,9) = \\ &= - \frac{6EI_y}{L^2} \cdot S_{2y} \end{aligned}$$

onde

$$S_{2y} = \frac{(k_y L)^2 (1 - \cos k_y L)}{6\phi_y}$$

Utilizando as condições de equilíbrio temos (Fig. 22)

$$A_9 = - A_3 \quad (\text{II.39})$$

$$A_5 + A_{11} = - A_3 L \quad (\text{II.40})$$

De (II.39):

$$SM(9,5) = SM(5,9) = A_9 = \frac{6EI_y}{L^2} \cdot S_{2y}$$

Levando (II.37) e (II.38) em (II.40):

$$A_{11} = \frac{P}{k_y} \cdot \frac{k_y L - \text{sen} k_y L}{\phi_y}$$

Aplicando em  $A_{11}$  o fator  $2k_y L$ , temos:

$$SM(5,11) = SM(11,5) = \frac{2EI_y}{L} \cdot S_{4y}$$

onde:

$$S_{4y} = \frac{k_y L (k_y L - \text{sen} k_y L)}{2\phi_y}$$

Os demais coeficientes da matriz de rigidez no plano X-Z, obtemo-los dando ao elemento um deslocamento unitário na direção z ( $d_3 = 1$ ), conforme a Figura 24.

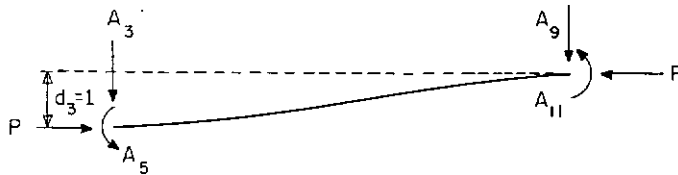


fig. 24

Como o esforço  $A_5$  é conhecido e igual a  $SM(3,5)$ , teremos, aplicando na expressão (II.15) a condição  $w(x) = 0$ , para  $x = L$ :

$$A_3 = P \cdot \frac{k_y \cdot \text{sen} k_y L}{\phi_y}$$

Introduzindo o fator  $12(k_y L)^3$  na expressão acima, obtemos os coeficientes:

$$SM(3,3) = SM(9,9) = \frac{12EI}{L^3} \cdot S_{1y}$$

onde:

$$S_{1y} = \frac{(k_y L)^3 \cdot \text{sen} k_y L}{\phi_y}$$

Pelas condições de equilíbrio (Fig. 23):

$$A_9 = - A_3 \quad (II.41)$$

$$A_5 + A_{11} = -A_3L - 1 \cdot P \quad (\text{II.42})$$

De (II.41) tiramos:

$$SM(3, 9) = SM(9, 3) = A_9 = -\frac{12EI}{L^3} Y \cdot S_{1y}$$

Levando em (II.42) as expressões de  $A_3$  e  $A_5$  obtemos:

$$A_{11} = -\frac{P(1 - \cos k_y L)}{\phi_y}$$

Aplicando ao numerador e denominador o fator  $6(k_y L)^2$

temos:

$$SM(3, 11) = SM(11, 3) = -\frac{6EI}{L^2} Y \cdot S_{2y}$$

onde

$$S_{2y} = \frac{(k_y L)^2 (1 - \cos k_y L)}{6\phi_y}$$

Resta-nos, agora, obter os coeficientes oriundos de deslocamentos ao longo do eixo X e rotações em torno deste mesmo eixo. Os primeiros, equivalentes a forças axiais por unidade de deslocamento, podem ser adotados como iguais aos da análise linear<sup>11</sup> (a menos do valor da rigidez EA), já que são afetados por efeitos de 3a. ordem<sup>10</sup>. Assim sendo, temos:

$$SM(1,1) = SM(7,7) = -SM(1,7) = -SM(7,1) = \frac{EA}{L}$$

Os termos correspondentes a momentos de torção por unidade de rotação em torno do eixo X, serão representados aqui

por sua forma genérica  $GI_T/L$ , igual à da análise linear (a menos do valor da rigidez  $GI_T$ ). Assim, escrevemos:

$$SM(4,4) = SM(10,10) = -SM(4,10) = -SM(10,4) = GI_T/L$$

No item II.2.2.2 deste Capítulo apresentamos a dedução da rigidez  $GI_T$ , regida apenas pela não-linearidade física da estrutura.

Uma vez definidos os termos não nulos da matriz de rigidez de elemento de uma estrutura reticulada espacial, podemos escrevê-la como abaixo:

$$\left[ SM \right] = \begin{bmatrix}
 \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{12EI_z}{L^3} S_{1z} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} S_{2z} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} S_{1z} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} S_{2z} \\
 \frac{12EI_y}{L^3} S_{1y} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} S_{2y} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} S_{1y} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} S_{2y} & 0 & 0 \\
 & \frac{GI_T}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_T}{L} & 0 & 0 \\
 & & \frac{4EI_y}{L} S_{3y} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} S_{2y} & 0 & \frac{2EI_y}{L} S_{4y} & 0 & 0 \\
 & & & \frac{4EI_z}{L} S_{3z} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} S_{2z} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} S_{4z} & 0 \\
 & & & & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & \frac{12EI_z}{L^3} S_{1z} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} S_{2z} & 0 \\
 & & & & & & \frac{12EI_y}{L^3} S_{1y} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} S_{2y} & 0 & 0 \\
 & & & & & & & \frac{GI_T}{L} & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & \frac{4EI_y}{L} S_{3y} & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & \frac{4EI_z}{L} S_{3z} & 0
 \end{bmatrix}$$

SIMÉTRICA

Como podemos ver na expressão (II.43), obtivemos uma matriz de rigidez de forma idêntica à da matriz numa análise linear, onde alguns dos termos aparecem afetados pelos coeficientes S. Estes foram designados por Livesley como coeficientes de estabilidade e, caracterizam os efeitos de 2a. ordem, decorrentes da interação axial-flexão, sobre a matriz de rigidez.

Com sua forma acima, os coeficientes de estabilidade foram obtidos a partir de uma força axial de compressão. No caso de uma força P de tração, adotando o mesmo processo de dedução já usado, encontraremos tais coeficientes expressos em termos de funções hiperbólicas, mantendo-se a matriz de rigidez com a forma de (II.43). Assim, teremos:

$$S_{1y,z} = \frac{(k_{y,z} L)^3 \operatorname{senh} k_{y,z} L}{12 \phi'_{y,z}}$$

$$S_{2y,z} = \frac{(k_{y,z} L)^2 (\operatorname{cosh} k_{y,z} L - 1)}{6 \phi'_{y,z}}$$

$$S_{3y,z} = \frac{k_{y,z} L (k_{y,z} L \operatorname{cosh} k_{y,z} L - \operatorname{senh} k_{y,z} L)}{4 \phi'_{y,z}}$$

$$S_{4y,z} = \frac{k_{y,z} L (\operatorname{senh} k_{y,z} L - k_{y,z} L)}{2 \phi'_{y,z}}$$

onde

$$\phi'_{y,z} = 2 - 2 \operatorname{cosh} k_{y,z} L + k_{y,z} L \operatorname{senh} k_{y,z} L$$

$$k_{y,z} = \sqrt{\frac{|P|}{EI_{y,z}}}$$

Como já dissemos anteriormente, o presente trabalho visa obter dados para a elaboração de um programa automático para análise de estruturas reticuladas espaciais. Desse modo, apesar de apresentarmos os coeficientes de estabilidade em forma fechada, em termos de funções trigonométricas naturais e hiperbólicas, sua determinação por meio de computadores digitais se faz através da expansão dos mesmos em séries limitadas. Podemos, assim, expandí-los em série, de acordo com a conveniente forma a seguir:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= 1 - \frac{(kL)^2}{10} - \frac{(kL)^4}{8400} - \frac{(kL)^6}{756000} - \dots \\
 S_2 &= 1 - \frac{(kL)^2}{60} - \frac{(kL)^4}{8400} - \frac{(kL)^6}{756000} - \dots \\
 S_3 &= 1 - \frac{(kL)^2}{30} - \frac{11(kL)^4}{25200} - \frac{7(kL)^6}{756000} - \dots \\
 S_4 &= 1 + \frac{(kL)^2}{60} + \frac{13(kL)^4}{25200} + \frac{11(kL)^6}{756000} + \dots
 \end{aligned}
 \tag{II.44}$$

Como vemos pelas expressões acima, quando a força  $P$  se anula, os coeficientes  $S$  tomam valores unitários, desaparecendo, como é óbvio, os efeitos de 2a. ordem. Todavia, em face do tipo de solução numérica usada nos computadores digitais, quando os valores do parâmetro  $kL$  se avizinham de zero, surgem problemas de truncamento. Como TELLES<sup>10</sup>, neste trabalho também foi constatado que em computadores BURROUGHS-B6700, trabalhando-se em precisão simples, perturbações nos resultados começam a surgir para valores de  $kL$  menores que  $10^{-1}$ . Este fato, aliado à impossibilidade de obter-se numericamente os limites dos coeficientes  $S$  quando  $P$  tende a zero, obrigou-nos a

substituir

utilizar, nesses casos, estes coeficientes em sua forma expandida em séries, das quais adotou-se os dois primeiros termos. Tal procedimento mostrou-se correto pois a matriz de rigidez obtida apresenta a mesma forma da adotada no Método dos Elementos Finitos (M.E.F.), de uso consagrado na análise de estruturas, como mostramos a seguir.

#### II.2.1.2. A Matriz de Rigidez pelo M.E.F.

Como observam GARCIA<sup>12</sup> e TELLES<sup>10</sup>, para o caso de estruturas planas, também no caso mais geral de estruturas espaciais, a matriz de rigidez usualmente utilizada no M.E.F., é apresentada como a soma de duas sub-matrizes. Uma, a matriz convencional, usada nas análises lineares de estruturas e outra, normalmente designada como matriz geométrica, função da força axial P no elemento. Assim:

$$[SM] = [SM_E] + [SM_G]$$

onde:

$[SM_E]$  - matriz elástica

$[SM_G]$  - matriz geométrica,

dadas por:

$[SM_E] =$

$\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	0	0	$-\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	0
	$\frac{12EI_z}{L^3}$	0	0	0	$\frac{6EI_z}{L^2}$	0	$-\frac{12EI_z}{L^3}$	0	0	0	0	$\frac{6EI_z}{L^2}$
		$\frac{12EI_y}{L^3}$	0	$-\frac{6EI_y}{L^2}$	0	0	0	$-\frac{12EI_y}{L^3}$	0	$-\frac{6EI_y}{L^2}$	0	0
			$\frac{6I_T}{L}$	0	0	0	0	0	0	$-\frac{6I_T}{L}$	0	0
				$\frac{4EI_y}{L}$	0	0	0	$\frac{6EI_y}{L^2}$	0	$\frac{2EI_y}{L}$	0	0
					$\frac{4EI_z}{L}$	0	$-\frac{6EI_z}{L^2}$	0	0	0	0	$\frac{2EI_z}{L}$
						$\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	0	0
							$\frac{12EI_z}{L^3}$	0	0	0	0	$-\frac{6EI_z}{L^2}$
								$\frac{12EI_y}{L^3}$	0	$\frac{6EI_y}{L^2}$	0	0
									$\frac{6I_T}{L}$	0	0	0
										$\frac{4EI_y}{L}$	0	0
											$\frac{4EI_z}{L}$	0

SIMETRICA

$[SM_G] =$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$-\frac{6}{5} \cdot \frac{P}{L}$	0	0	0	$-\frac{P}{10}$	0	$\frac{6}{5} \cdot \frac{P}{L}$	0	0	0	0	$-\frac{P}{10}$
		$-\frac{6}{5} \cdot \frac{P}{L}$	0	$\frac{P}{10}$	0	0	0	$\frac{6}{5} \cdot \frac{P}{L}$	0	$\frac{P}{10}$	0	0
			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
				$-\frac{2}{15} PL$	0	0	0	$-\frac{P}{10}$	0	$\frac{PL}{30}$	0	0
					$\frac{2}{15} PL$	0	$\frac{P}{10}$	0	0	0	0	$\frac{PL}{30}$
						0	0	0	0	0	0	0
							$-\frac{6}{5} \cdot \frac{P}{L}$	0	0	0	0	$\frac{P}{10}$
								$-\frac{6}{5} \cdot \frac{P}{L}$	0	$-\frac{P}{10}$	0	0
									0	0	0	0
										$-\frac{2}{15} PL$	0	0
											$-\frac{2}{15} PL$	0

SIMETRICA



Se reunirmos as duas matrizes em uma só, podemos apresentar a matriz de rigidez sob aspecto idêntico ao obtido em (II.43), onde os coeficientes de estabilidade seriam dados por:

$$S_{1y,z} = 1 - \frac{P \cdot L^2}{10EI_{y,z}}$$

$$S_{2y,z} = 1 - \frac{P \cdot L^2}{60EI_{y,z}} \quad (\text{II.45})$$

$$S_{3y,z} = 1 - \frac{P \cdot L^2}{30EI_{y,z}}$$

$$S_{4y,z} = 1 + \frac{P \cdot L^2}{60EI_{y,z}}$$

É interessante ressaltar que, como demonstrado por TELLES<sup>10</sup> para o caso de elemento de pórtico plano, também a matriz de rigidez de elemento de pórtico espacial obtida pelo M. E.F. pode ser encarada como resultante da matriz de rigidez transcendente, onde os coeficientes de estabilidade foram expandidos em série, das quais foram tomados apenas os dois primeiros termos. Tal fato pode ser constatado por simples inspeção das expressões (II.44) e (II.45) se nessas últimas introduzimos o parâmetro  $k_{y,z} = \sqrt{\frac{|P|}{EI_{y,z}}}$

Ao adotarmos a formulação do M.E.F. para evitar erros de truncamento na matriz de rigidez, o mesmo procedimento deve ser adotado para as expressões do momento fletor ao longo do elemento. Para tanto, partimos do princípio pelo qual se obteve a matriz de rigidez no M.E.F., qual seja, que a função de inter

polação que define os deslocamentos ao longo do elemento é uma parábola cúbica<sup>10,12</sup> (função de Hermite). Sabendo-se que o momento fletor é proporcional à derivada segunda desta função (ver expressão do item I.1.1), concluímos que a função de momento ao longo do elemento será linear tanto no plano X-Y como no plano X-Z (Figura 25).

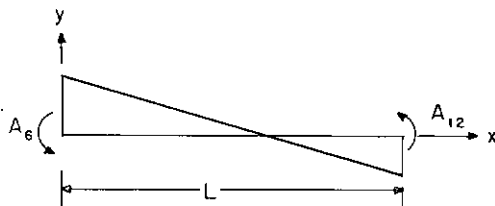


fig 25 a - MOMENTOS  
FLETORES NO PLANO X - Y

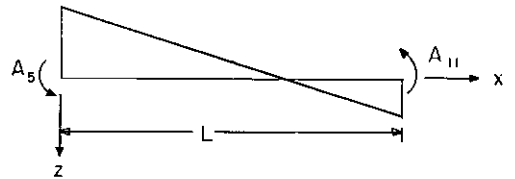


fig 25 b - MOMENTOS  
FLETORES NO PLANO X - Z

Da figura 25a tiramos:

$$M_z(x) = \frac{(A_{12} + A_5)x}{L} - A_6$$

Da figura 24b tiramos:

$$M_y(x) = \frac{-(A_{11} + A_5)x}{L} + A_5$$

Observamos que foram aqui omitidas as deduções relativas à obtenção da matriz de rigidez pelo M.E.F., uma vez que não fazem parte do objetivo principal deste trabalho e podem ser obtidas na bibliografia sobre o assunto<sup>13</sup>.

Como conclusão do estudo da não-linearidade geométrica apresentamos, a seguir, um quadro resumo das expressões ob-

tidas para os coeficientes de estabilidade e momentos fletores ao longo do elemento. Ressaltamos que, como normalmente as forças axiais nos elementos não são conhecidas ao início de uma análise, estas são adotadas como nulas na primeira iteração, para todos os elementos.

$P > 0$ (compressão) $K_{y,z} \gg 10^{-1}$	$P > 0$ ou $P < 0$ (compressão ou tração) $K_{y,z} \ll 10^{-1}$	$P < 0$ (tração) $K_{y,z} \gg 10^{-1}$
$S_{1y,z} = \frac{(k_{y,z} L)^3 \text{sen } k_{y,z} L}{12 \varnothing_{y,z}}$	$S_{1y,z} = 1 - \frac{PL^2}{10EI_{y,z}}$	$S_{1y,z} = \frac{(k_{y,z} L)^3 \text{sen } h k_{y,z} L}{12 \varnothing'_{y,z}}$
$S_{2y,z} = \frac{(k_{y,z} L)^2 (1 - \cos k_{y,z} L)}{6 \varnothing_{y,z}}$	$S_{2y,z} = 1 - \frac{PL^2}{60EI_{y,z}}$	$S_{2y,z} = \frac{(k_{y,z} L)^2 (\cos h k_{y,z} L - 1)}{6 \varnothing'_{y,z}}$
$S_{3y,z} = \frac{k_{y,z} L (\text{sen } k_{y,z} L - k_{y,z} L \cdot \cos k_{y,z} L)}{4 \varnothing_{y,z}}$	$S_{3y,z} = 1 - \frac{PL^2}{30EI_{y,z}}$	$S_{3y,z} = \frac{k_{y,z} L (k_{y,z} L \cdot \cos h k_{y,z} L - \text{sen } h k_{y,z} L)}{4 \varnothing'_{y,z}}$
$S_{4y,z} = \frac{k_{y,z} L (k_{y,z} L - \text{sen } k_{y,z} L)}{2 \varnothing_{y,z}}$	$S_{4y,z} = 1 + \frac{PL^2}{60EI_{y,z}}$	$S_{4y,z} = \frac{k_{y,z} L (\text{sen } h k_{y,z} L - k_{y,z} L)}{2 \varnothing'_{y,z}}$
$\varnothing_{y,z} = 2 - 2 \cdot \cos k_{y,z} L - k_{y,z} L \cdot \text{sen } k_{y,z} L$	<p style="text-align: center;">—————</p>	$\varnothing'_{y,z} = 2 - 2 \cos h k_{y,z} L + k_{y,z} L \cdot \text{sen } h k_{y,z} L$
$M_y = \frac{-(AM_{11} + AM_5 \cdot \cos k_y L)}{\text{sen } k_y L} X$ $X \cdot \text{sen } k_y x + AM_5 \cos k_y x$	$M_y = \frac{-(AM_{11} + AM_5) x}{L} + AM_5$	$M_y = \frac{-(AM_{11} + AM_5 \cdot \cos h k_y L)}{\text{sen } h k_y L} X$ $X \text{sen } h k_y x + AM_5 \cos h k_y x$
$M_z = \frac{(AM_{12} + AM_6 \cdot \cos k_z L)}{\text{sen } k_z L} X$ $X \text{sen } k_z x - AM_6 \cdot \cos k_z x$	$M_z = \frac{(AM_{12} + AM_6)}{L} \cdot x - AM_6$	$M_z = \frac{(AM_{12} + AM_6 \cdot \cos h k_z L)}{\text{sen } h k_z L} X$ $X \text{sen } h k_z x - AM_6 \cdot \cos h k_z x$
$k_{y,z} = \sqrt{\frac{P}{EI_{y,z}}}$	<p style="text-align: center;">—————</p>	$k_{y,z} = \sqrt{\frac{ P }{EI_{y,z}}}$

### II.2.2. A Não-Linearidade Física:

Como já exposto na introdução deste capítulo os efeitos da não-linearidade dos materiais (não-linearidade física) sobre a matriz de rigidez consistem na variação dos valores das rigidezes  $EA$ ,  $EI_y$ ,  $EI_z$  e  $GI_T$  de cada elemento em função do seu estado de sollicitação. Temos, portanto, um problema iterativo, onde para obter as sollicitações necessitamos calcular as

rigidezes (para a matriz de rigidez) e, para ter estas devemos saber qual o valor das primeiras. Este problema será resolvido pela execução da análise através de etapas de cálculo em que ao final de cada uma corrigimos os valores das rigidezes para usá-las na etapa seguinte. Consistindo cada uma dessas etapas na resolução de um ciclo completo do método da rigidez, obtemos como um de seus resultados as ações nas extremidades de cada elemento da estrutura. Com base nessas ações podemos obter os esforços solicitantes em qualquer seção do elemento (suposto sem cargas aplicadas entre seus extremos). Assim, de acordo com as convenções da Figura 19, para uma seção a uma distância  $x$  do nó:

$$\begin{aligned} N(x) &= A_1 \\ V_y(x) &= A_2 \\ V_z(x) &= A_3 \\ T(x) &= -A_4 \end{aligned} \tag{II.46}$$

$M_y(x)$  e  $M_z(x)$  de acordo com as expressões do quadro I.

A partir de (II.46) podemos corrigir o valor das rigidezes do elemento, com base nas rigidezes obtidas para as seções transversais. Como obter estas últimas é que passamos a explicar.

### II.2.2.1. Rigidezes à Deformação Axial e à Flexão

Obtido, pelas expressões (II.46), o terno de solicitações momentos fletores,  $M_Y$  e  $M_Z$ , e esforço normal,  $N$ , podemos calcular, através de considerações de equilíbrio na seção, os valores de  $\epsilon_g$  (deformação axial no centróide da seção) e  $\psi_Y$  e  $\psi_Z$  (curvaturas nos planos X-Z e X-Y, respectivamente), associados aos referidos esforços. De posse do termo  $(\psi_Y, \psi_Z, \epsilon_g)$ , definimos novos valores para as rigidezes à flexão e à deformação axial da seção considerada por meio de:

$$EI_Y = \frac{M_Y}{\psi_Y} ; \quad EI_Z = \frac{M_Z}{\psi_Z} ; \quad EA = \frac{N}{\epsilon_g}$$

Repetindo-se o mesmo procedimento para diversas seções transversais, podemos definir por pontos as funções  $EI_Y(x)$ ,  $EI_Z(x)$  e  $EA(x)$  ao longo do elemento. Definidas estas três funções, calculamos os valores médios representativos das rigidezes secantes do elemento em questão, através do processo visto no item I.5.3.

Do exposto, depreende-se que a única dificuldade é encontrar o termo  $(\psi_Y, \psi_Z, \epsilon_g)$  gerador dos esforços resistentes  $M_{ry}$ ,  $M_{rz}$  e  $N_r$  que equilibram os solicitantes em uma dada seção transversal. Na realidade, sua obtenção é possível pela solução de um sistema de três equações não-lineares em função de  $\psi_Y$ ,  $\psi_Z$  e  $\epsilon_g$  e que representam o equilíbrio da seção transversal. De acordo com as notações da Figura 26, temos:

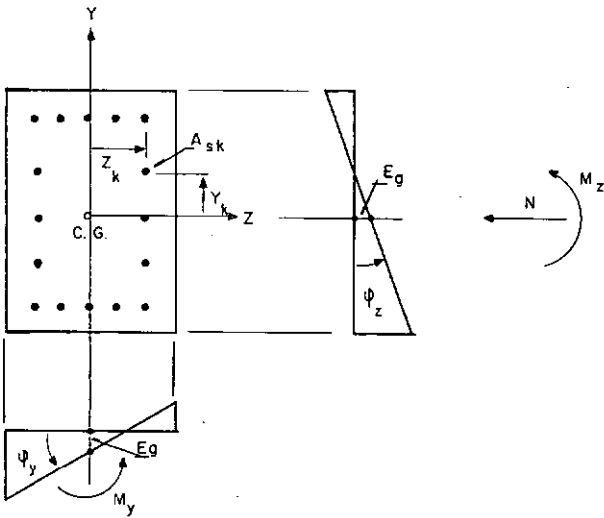


fig. 26

$$M_{ry}(\varphi_y, \varphi_z, \epsilon_g) = \int_{A_c} \sigma_c(\epsilon_c) \cdot z dA_c + \sum_{k=1}^n \sigma_s(\epsilon_k) z_k A_{sk} = M_y$$

$$M_{rz}(\varphi_y, \varphi_z, \epsilon_g) = \int_{A_c} \sigma_c(\epsilon_c) \cdot y dA_c + \sum_{k=1}^n \sigma_s(\epsilon_k) y_k A_{sk} = M_z$$

$$N_r(\varphi_y, \varphi_z, \epsilon_g) = \int_{A_c} \sigma_c(\epsilon_c) \cdot dA_c + \sum_{k=1}^n \sigma_s(\epsilon_k) A_{sk} = N$$

(II.47)

onde:  $\epsilon = \epsilon_g + \varphi_z \cdot y + \varphi_y \cdot z$

$\sigma_c(\epsilon_c)$  → tensão no concreto para a deformação  $\epsilon_c$

$\sigma_s(\epsilon_k)$  → tensão numa barra, k, de aço para a deformação  $\epsilon_k$

$A_c$  → área da seção real de concreto

$A_{sk}$  → área de uma barra, k, de aço

n → número total de barras de aço na seção transversal.

Para resolver este sistema optou-se pelo método numé-

rico de Newton-Raphson em virtude de sua já comprovada eficiência na resolução de sistemas desse tipo. Passamos, a seguir, a discutir este método e as operações auxiliares necessárias a sua utilização.

Como ponto de partida desenvolvemos as funções  $M_{ry}$ ,  $M_{rz}$  e  $N_r$  em séries de Taylor em torno de um ponto convenientemente escolhido,  $(\bar{\varphi}_y, \bar{\varphi}_z, \bar{\varepsilon}_g)$ . Desprezando os termos de ordem superior, obtemos o sistema de equações lineares:

$$M_{ry}(\bar{\varphi}_y, \bar{\varphi}_z, \bar{\varepsilon}_g) + \frac{\partial M_{ry}(\bar{\varphi}_y, \bar{\varphi}_z, \bar{\varepsilon}_g)}{\partial \varphi_y} \delta \varphi_y + \frac{\partial M_{ry}(\bar{\varphi}_y, \bar{\varphi}_z, \bar{\varepsilon}_g)}{\partial \varphi_z} \delta \varphi_z + \frac{\partial M_{ry}(\bar{\varphi}_y, \bar{\varphi}_z, \bar{\varepsilon}_g)}{\partial \varepsilon_g} \delta \varepsilon_g = M_y$$

$$M_{rz}(\bar{\varphi}_y, \bar{\varphi}_z, \bar{\varepsilon}_g) + \frac{\partial M_{rz}(\bar{\varphi}_y, \bar{\varphi}_z, \bar{\varepsilon}_g)}{\partial \varphi_y} \delta \varphi_y + \frac{\partial M_{rz}(\bar{\varphi}_y, \bar{\varphi}_z, \bar{\varepsilon}_g)}{\partial \varphi_z} \delta \varphi_z + \frac{\partial M_{rz}(\bar{\varphi}_y, \bar{\varphi}_z, \bar{\varepsilon}_g)}{\partial \varepsilon_g} \delta \varepsilon_g = M_z$$

$$N_r(\bar{\varphi}_y, \bar{\varphi}_z, \bar{\varepsilon}_g) + \frac{\partial N_r(\bar{\varphi}_y, \bar{\varphi}_z, \bar{\varepsilon}_g)}{\partial \varphi_y} \delta \varphi_y + \frac{\partial N_r(\bar{\varphi}_y, \bar{\varphi}_z, \bar{\varepsilon}_g)}{\partial \varphi_z} \delta \varphi_z + \frac{\partial N_r(\bar{\varphi}_y, \bar{\varphi}_z, \bar{\varepsilon}_g)}{\partial \varepsilon_g} \delta \varepsilon_g = N$$

(II.48)

Com intuito de simplificar a notação e, adequar o sistema (II.48) a uma linguagem própria para programas automáticos, escrevê-lo-emos sob forma matricial, como segue:

$$\{\delta F\} = [Q] \cdot \{\delta D\}$$

onde:

$$\{\delta F\} = \begin{Bmatrix} \delta M_Y \\ \delta M_Z \\ \delta N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_Y - M_{rY} \\ M_Z - M_{rZ} \\ N - N_r \end{Bmatrix} \quad \{\delta D\} = \begin{Bmatrix} \delta \varphi_Y \\ \delta \varphi_Z \\ \delta \varepsilon_g \end{Bmatrix}$$

$[Q]$  - matriz (3x3) em que seus elementos,  $Q_{ij}$ , são as derivadas parciais dos esforços  $M_{rY}$ ,  $M_{rZ}$  e  $N_r$  em relação a  $\varphi_Y$ ,  $\varphi_Z$  e  $\varepsilon_g$ .

As derivadas parciais indicadas no sistema (II.48) serão obtidas das expressões (II.47), conforme técnica explicada em II.2.2.1.1. A mesma técnica é utilizada no cálculo dos esforços resistentes,  $M_{rY}$ ,  $M_{rZ}$  e  $N_r$ , associados ao terno  $(\bar{\varphi}_Y, \bar{\varphi}_Z, \bar{\varepsilon}_g)$ .

Observamos que, por ser o método de Newton-Raphson muito sensível quanto à escolha do ponto inicial,  $(\bar{\varphi}_Y, \bar{\varphi}_Z, \bar{\varepsilon}_g)$ , devemos arbitrá-lo de modo a que seja suficientemente próximo da solução do sistema para garantir a convergência do método. Desse modo o ponto inicial será fixado dentro do seguinte critério:

$$\bar{\varphi}_Y = \frac{M_Y^j}{EI_Y^{j-1}} \quad \bar{\varphi}_Z = \frac{M_Z^j}{EI_Z^{j-1}} \quad \bar{\varepsilon}_g = \frac{N^j}{EA^{j-1}}$$

onde  $j$  - etapa de cálculo em execução

$M_Y^j$ ,  $M_Z^j$ ,  $N^j$  - esforços solicitantes da seção transversal na etapa de cálculo  $j$ .



$EI_Y^{j-1}$ ,  $EI_Z^{j-1}$ ,  $EA^{j-1}$  - rigidezes à flexão e deformação axial do membro a que pertence a seção transversal em estudo na etapa de cálculo anterior (j-1).

Obtidos, então, os valores das derivadas parciais e dos esforços, podemos resolver o sistema de equações (II.48) em função de suas incógnitas,  $\delta\varphi_Y$ ,  $\delta\varphi_Z$  e  $\delta\varepsilon_g$ . Estas representam pequenos incrementos a serem dados aos valores  $\bar{\varphi}_Y$ ,  $\bar{\varphi}_Z$  e  $\bar{\varepsilon}_g$  das variáveis  $\varphi_Y$ ,  $\varphi_Z$  e  $\varepsilon_g$  no sentido de obter o valor destas que satisfaçam o sistema (II.47).

Resolvido (II.48), repete-se o procedimento acima desenvolvendo as funções  $M_{ry}$ ,  $M_{rz}$  e  $N_r$  em série, agora em torno de um novo ponto definido por:

$$\bar{\varphi}_Y = \bar{\varphi}_Y + \delta\varphi_Y ; \quad \bar{\varphi}_Z = \bar{\varphi}_Z + \delta\varphi_Z ; \quad \bar{\varepsilon}_g = \bar{\varepsilon}_g + \delta\varepsilon_g$$

Dessa maneira repete-se, sucessivamente, o processo até que o ponto ( $\bar{\varphi}_Y$ ,  $\bar{\varphi}_Z$ ,  $\bar{\varepsilon}_g$ ) determinado seja aquele que, a menos de um erro admissível, satisfaça ao sistema (II.47). Isto significa repeti-lo até que os valores de  $\delta\varphi_Y$ ,  $\delta\varphi_Z$  e  $\delta\varepsilon_g$ , solução de (II.48), se avizinhem de zero.

### II.2.2.1.1. Cálculo das Matrizes $\{\delta F\}$ e $[Q]$ :

Para a resolução do sistema (II.48) é preciso calcular os esforços resistentes  $M_{ry}$ ,  $M_{rz}$  e  $N_r$  de uma determinada seção transversal sujeita às deformações  $\psi_y$ ,  $\psi_z$  e  $\epsilon_g$ . Para tanto procedemos como segue:

Seja uma seção transversal de um elemento de concreto armado, de forma retangular e com armadura uniformemente distribuída ao longo de seu perímetro, dividida em  $m \times n$  elementos de área,  $\Delta A_c$ , paralelamente aos seus lados (Figura 27). Suponhamos existirem  $p$  barras de aço, cada uma de área  $\Delta A_s$ .

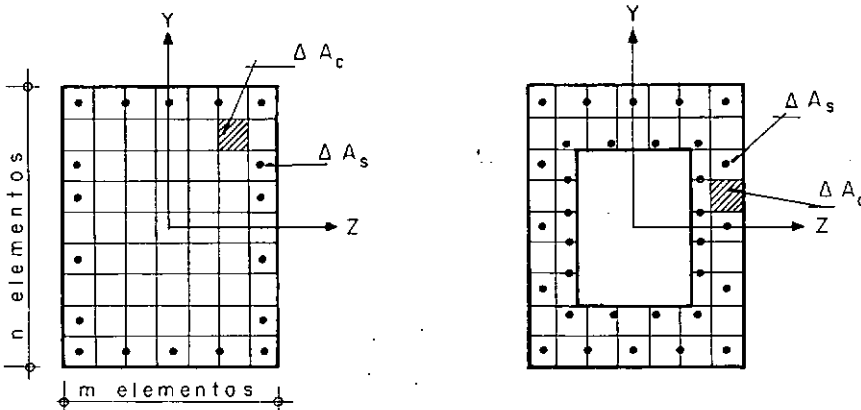


fig. 27 - DISCRETIZAÇÃO DE UMA SEÇÃO TRANSVERSAL

Discretizada, dessa forma, a seção, podemos substituir as integrais do sistema (II.47):

$$M_{ry} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sigma_c(\epsilon_{cij}) z_j \Delta A_c + \sum_{k=1}^p (\sigma_s(\epsilon_{sk}) - \sigma_c(\epsilon_{sk})) z_k \Delta A_s$$

$$M_{rz} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sigma_c(\epsilon_{cij}) y_i \Delta A_c + \sum_{k=1}^p (\sigma_s(\epsilon_{sk}) - \sigma_c(\epsilon_{sk})) y_k \Delta A_s$$

$$N_r = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sigma_c(\epsilon_{cij}) \Delta A_c + \sum_{k=1}^p (\sigma_s(\epsilon_{sk}) - \sigma_c(\epsilon_{sk})) \Delta A_s$$

(II.49)

onde  $\sigma_c$  e  $\sigma_s$  são obtidos a partir dos diagramas  $\sigma \times \epsilon$  e dados no item I.1.4, para a deformação  $\epsilon$  correspondente calculada no centro de cada elemento  $\Delta A_c$  ou  $\Delta A_s$ , a partir de  $\varphi_y$ ,  $\varphi_z$  e  $\epsilon_g$  (Figura 26) pela expressão:

$$\epsilon = \epsilon_g + \varphi_y \cdot z + \varphi_z \cdot y \quad (\text{II.50})$$

A matriz  $[Q]$  será obtida por derivação das expressões (II.49). Derivando em relação a  $\varphi_y$  obtemos:

$$Q_{11} = \frac{\partial M_{ry}}{\partial \varphi_y} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial \sigma_c(\epsilon_{cij})}{\partial \varphi_y} z_j \cdot \Delta A_s + \sum_{k=1}^p \left( \frac{\partial \sigma_s(\epsilon_{sk})}{\partial \varphi_y} - \frac{\partial \sigma_c(\epsilon_{sk})}{\partial \varphi_y} \right) z_k \cdot \Delta A_s$$

$$Q_{21} = \frac{\partial M_{rz}}{\partial \varphi_y} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial \sigma_c(\epsilon_{cij})}{\partial \varphi_y} y_i \cdot \Delta A_c + \sum_{k=1}^p \left( \frac{\partial \sigma_s(\epsilon_{sk})}{\partial \varphi_y} - \frac{\partial \sigma_c(\epsilon_{sk})}{\partial \varphi_y} \right) y_k \cdot \Delta A_s$$

$$Q_{31} = \frac{\partial N_r}{\partial \varphi_y} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial \sigma_c(\epsilon_{cij})}{\partial \varphi_y} \Delta A_c + \sum_{k=1}^p \left( \frac{\partial \sigma_s(\epsilon_{sk})}{\partial \varphi_y} - \frac{\partial \sigma_c(\epsilon_{sk})}{\partial \varphi_y} \right) \Delta A_s$$

(II.51)

onde:

$$\frac{\partial \sigma_c}{\partial \varphi_y} = E_c \cdot z, \text{ com } E_c \text{ segundo o item I.1.4.1.}$$

$$\frac{\partial \sigma_s}{\partial \varphi_y} = E_s \cdot z, \text{ com } E_s \text{ segundo o item I.1.4.2 para os aços tipo A e B.}$$

Derivando (II.49) em relação a  $\varphi_z$  temos:

$$Q_{12} = \frac{\partial M_{ry}}{\partial \varphi_z} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial \sigma_c(\epsilon_{cij})}{\partial \varphi_z} z_j \cdot \Delta A_c + \sum_{k=1}^p \left( \frac{\partial \sigma_s(\epsilon_{sk})}{\partial \varphi_z} - \frac{\partial \sigma_c(\epsilon_{sk})}{\partial \varphi_z} \right) z_k \cdot \Delta A_s$$

$$Q_{22} = \frac{\partial M_{rz}}{\partial \varphi_z} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial \sigma_c(\epsilon_{cij})}{\partial \varphi_z} y_i \cdot \Delta A_c + \sum_{k=1}^p \left( \frac{\partial \sigma_s(\epsilon_{sk})}{\partial \varphi_z} - \frac{\partial \sigma_c(\epsilon_{sk})}{\partial \varphi_z} \right) y_k \cdot \Delta A_s$$

$$Q_{32} = \frac{\partial N_r}{\partial \varphi_z} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial \sigma_c(\epsilon_{cij})}{\partial \varphi_z} \Delta A_c + \sum_{k=1}^p \left( \frac{\partial \sigma_s(\epsilon_{sk})}{\partial \varphi_z} - \frac{\partial \sigma_c(\epsilon_{sk})}{\partial \varphi_z} \right) \Delta A_s$$

(II.52)

onde:

$$\frac{\partial \sigma_c}{\partial \varphi_z} = E_c \cdot y, \text{ com } E_c \text{ dado no item I.1.4.1}$$

$$\frac{\partial \sigma_s}{\partial \varphi_z} = E_s \cdot y, \text{ com } E_s \text{ dado no item I.1.4.2 para os aços tipo A e B.}$$

Derivando (II.49) em relação a  $\epsilon_g$  tiramos:

$$Q_{13} = \frac{\partial M_{ry}}{\partial \epsilon_g} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial \sigma_c(\epsilon_{cij})}{\partial \epsilon_g} z_j \cdot \Delta A_c +$$

$$+ \sum_{k=1}^p \left( \frac{\partial \sigma_s(\epsilon_{sk})}{\partial \epsilon_g} - \frac{\partial \sigma_c(\epsilon_{sk})}{\partial \epsilon_g} \right) z_k \cdot \Delta A_s$$

$$Q_{23} = \frac{\partial M_{rz}}{\partial \epsilon_g} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial \sigma_c(\epsilon_{cij})}{\partial \epsilon_g} y_i \cdot \Delta A_c +$$

$$+ \sum_{k=1}^p \left( \frac{\partial \sigma_s(\epsilon_{sk})}{\partial \epsilon_g} - \frac{\partial \sigma_c(\epsilon_{sk})}{\partial \epsilon_g} \right) y_k \cdot \Delta A_s$$

$$Q_{33} = \frac{\partial N_r}{\partial \epsilon_g} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial \sigma_c(\epsilon_{cij})}{\partial \epsilon_g} \cdot \Delta A_c +$$

$$+ \sum_{k=1}^p \left( \frac{\partial \sigma_s(\epsilon_{sk})}{\partial \epsilon_g} - \frac{\partial \sigma_c(\epsilon_{sk})}{\partial \epsilon_g} \right) \Delta A_s$$

(II.53)

onde:

$$\frac{\partial \sigma_c}{\partial \epsilon_g} = E_c, \text{ com } E_c \text{ dado no item I.1.4.1.}$$

$$\frac{\partial \sigma_s}{\partial \epsilon_g} = E_s, \text{ com } E_s \text{ dado no item I.1.4.2 para os aços } \underline{t_i}$$

po A e B.

#### II.2.2.2. Rigidez à Torção

Neste item desenvolveremos as expressões para a rigidez à torção de uma peça de concreto armado de seção retangular cheia ou vazada. Restringir-nos-emos a estes dois tipos de seção pois, como afirma LAMPERT<sup>6</sup>, apesar de uma formulação

teórica mais geral, objetivando investigar outros tipos de seção, ser possível, não parece ser apropriada. Isto se deve a que no modelo da treliça espacial restrições à deformação da peça, presentes em qualquer pórtico, não são consideradas de forma acurada. Sendo assim, uma sofisticação teórica visando generalizar o tipo de seção e que não levasse em conta tais restrições não teria sentido. Baseados nesta afirmação e no fato de que a bibliografia atualmente disponível praticamente não apresenta estudos para outros tipos de seções, é que o presente trabalho se restringe à investigação de seções retangulares. Mantendo-nos dentro desses limites, apesar de acarretar uma particularização do tipo de estrutura possível de ser analisada, podemos ter segurança dos resultados obtidos, fundados em bases teóricas cuja concordância com os ensaios se mostra satisfatória.

Mostramos na Figura 17 um típico diagrama  $T \times d\theta_x/dx$  para uma peça de concreto armado. O ponto A representa o início da fissuração, dividindo o gráfico em dois trechos bem distintos: o primeiro, entre a origem e o ponto A, reproduz o comportamento da peça ainda não fissurada; o segundo, do ponto A até a ruptura, retrata a peça após a fissuração. Estes dois estados do elemento são representados por dois modelos completamente diferentes. Enquanto no primeiro podemos tratar a peça como homogêna com a conseqüente aplicação dos conceitos da resistência dos materiais, no segundo a armação desempenha papel decisivo no equilíbrio interno da peça. Este segundo estado é, então, analisado pelo modelo da treliça espacial (ver item I.2.2.).

Em face do exposto no item I.2.2. do capítulo I, onde dissemos não ser possível estabelecer uma lei genérica que nos forneça o diagrama  $T \times d\theta_x/dx$  para qualquer peça de concreto armado, seremos obrigados a nos ater a alguns valores particulares da rigidez à torção ( $GI_T$ ) que nos permitam reproduzir de forma aproximada os diagramas obtidos por ensaios. Sendo assim, definiremos, no que segue, valores da rigidez à torção representativos de cada um dos dois estados (antes e após a fissuração) que uma peça de concreto armado apresenta quando solicitada por um momento torsor, combinado ou não com outros esforços.

#### II.2.2.2.1. Rigidez Secante à Torção antes da Fissuração

Usaremos aqui os já bem conhecidos conceitos da resistência dos materiais. Assim, de acordo com TIMOSHENKO<sup>9</sup> e, obedecendo à nomenclatura indicada na Figura 28, temos:

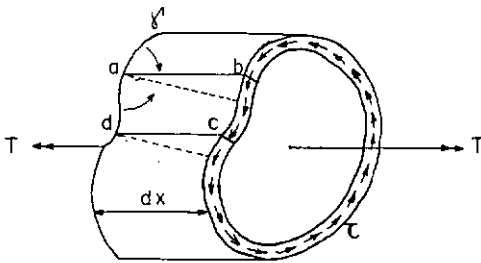


fig. 28A

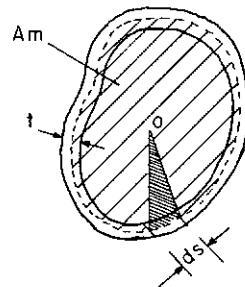


fig. 28B

$$\frac{d\theta}{dx} x = \frac{1}{2A_m} \int \gamma ds \quad (\text{II.54})$$

onde:

$\frac{d\theta}{dx} x$  - rotação relativa por unidade de comprimento da peça

$\gamma = \frac{\tau}{G}$ , deformação de cisalhamento provocada pelo tor-sor T.

$\tau t = \frac{T}{2A_m}$ , fluxo de cisalhamento ao longo da seção

G - módulo de elasticidade transversal do material da peça.

Substituindo em (II.54):

$$\frac{d\theta}{dx} x = \frac{T}{4A_m^2 G} \int \frac{ds}{t} \quad (\text{II.55})$$

Utilizando a expressão da rigidez à torção definida em I.5.2, obtemos:

$$GI_T = \frac{T}{\frac{d\theta}{dx} x} = G \cdot \frac{4A_m^2}{\int \frac{ds}{t}} \quad (\text{II.56})$$

onde:

$$I_T = \frac{4A_m^2}{\int \frac{ds}{t}} \text{ é chamado de momento de inércia à torção} \quad (\text{II.57})$$

$G = 0,3E_c$  (no caso de peças de concreto)

$E_c$  - módulo de elasticidade longitudinal do concreto tangente na origem.

Apresentamos a seguir a forma que a expressão (II.57)



adquire para os dois tipos de seção transversal adotados neste trabalho:

a) Seção Retangular Maciça<sup>14</sup> (Figura 29a)

$$I_T = A.C^3 \left( 0.33 - 0.21 \times \frac{C}{A} \times \left( 1 - \frac{C^4}{12A^4} \right) \right)$$

b) Seção Retangular Vazada<sup>14</sup> (Figura 29b)

$$I_T = \frac{2e_b e_h \cdot (B - e_b)^2 (H - e_h)^2}{B \cdot e_b + H \cdot e_h - e_b^2 - e_h^2}$$

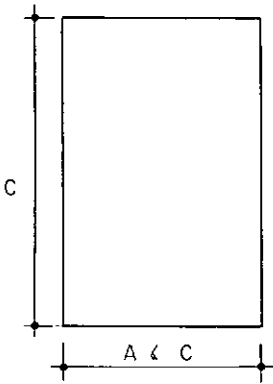


fig. 29A - SEÇÃO RETANGULAR MACIÇA

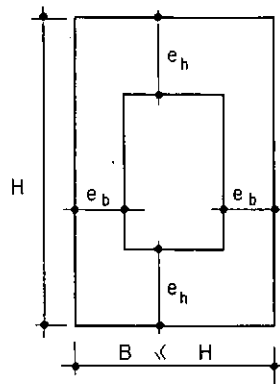


fig. 29B - SEÇÃO RETANGULAR VAZADA

#### II.2.2.2.2. Rigidez Secante à Torção após a Fissuração

Como podemos observar na Figura 30, enquanto a solici\_ tação da peça não provoca sua fissuração (ponto A) o diagrama se apresenta praticamente retilíneo. Após a fissuração, o grá\_ fico passa a apresentar uma curvatura cada vez mais acentuada à medida que nos aproximamos das solici\_ tões últimas de resis\_ tência da peça. Em face disto se, para baixas solici\_ tações po\_ demos, sem errar, definir uma rigidez à torção bem caracteriza\_ da (ver item II.2.2.2.1), quando atingimos o estado fissurado

da peça, a rigidez se torna variável, passando a dependente da solicitação da peça. Ao mesmo tempo, a impossibilidade de estabelecer uma lei genérica que nos permita reproduzir o gráfico da Figura 30, nos impede de obter a rigidez à torção ponto a ponto.

Podemos, no entanto, a partir do modelo da treliça espacial obter um ponto característico deste diagrama. Este é o que chamamos de início do escoamento, ou seja, o t<sub>orsor</sub> para o qual se inicia o processo de escoamento da armadura mais solicitada (longitudinal ou transversal). Para este ponto ( $\bar{T}$ , na Figura 30) definimos, então, uma rigidez secante à torção,  $GI_T$ , dada por:

$$GI_T = \frac{\bar{T}}{\frac{d\bar{\theta}_x}{dx}} \quad (\text{II.58})$$

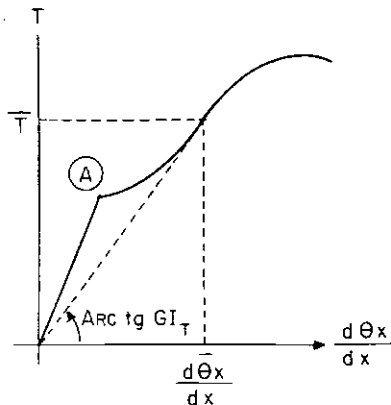


fig. 30 - DIAGRAMA  $T \times \frac{d\theta_x}{dx}$

Calculando dessa maneira a rigidez, conseguimos descrever o diagrama da Figura 29 de maneira aproximada entre A e  $\bar{T}$ .

Como o gráfico entre estes dois pontos não apresenta uma curvatura muito acentuada, o erro que cometemos, mantendo uma rigidez constante, não é muito grande e decresce à medida que nos aproximamos de  $\bar{T}$ . Observamos que as deformações obtidas por este método serão maiores que as reais e que, em face de estarmos limitados por  $\bar{T}$ , não nos é possível traçar o diagrama para valores de torsor maiores que este. Como, porém, para efeitos práticos, considera-se inutilizada uma peça cuja armadura entrou em processo de escoamento, a parcela do diagrama  $T \times d\theta_x/dx$  obtida pelo processo acima descrito atende a todas as necessidades normais de projeto e de análise.

Para estabelecer o valor de  $GI_T$  na equação (II.58) precisamos obter inicialmente o valor de  $d\bar{\theta}_x/dx$ . Usando, então, o conceito da equação (II.54), sabemos que a rotação relativa por unidade de comprimento pode ser expressa em função da deformação de cisalhamento,  $\gamma$ . Esta, por sua vez, é função das deformações do aço e do concreto sob a ação da torção. Podemos, como mostrado na Figura 31, representar os deslocamentos sofridos por uma parede de uma peça de seção retangular vazada (representativa de uma maciça, conforme o item I.2.2.1) submetida a um momento torsor.

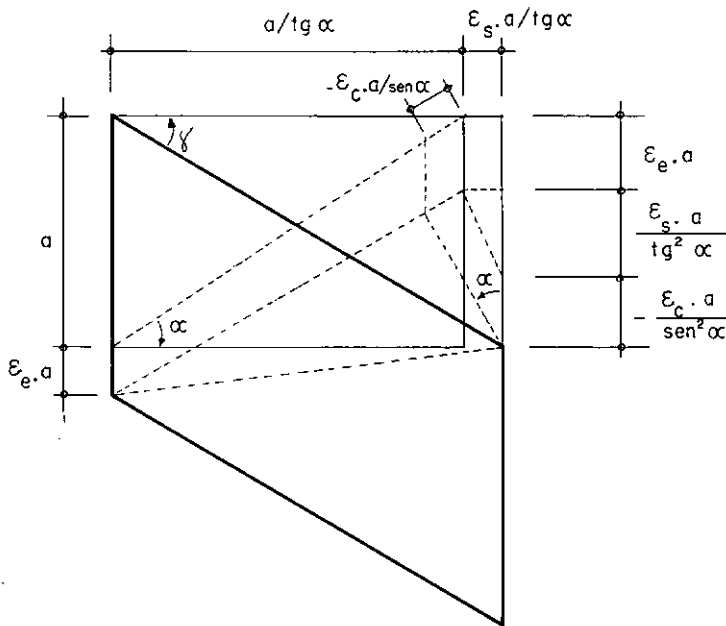


fig. 31

Através dos diagramas de deslocamentos acima, podemos obter o valor de  $\gamma$ :

$$\gamma = \varepsilon_e \cdot \operatorname{tg} \alpha + \frac{\varepsilon_s}{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{\varepsilon_c}{\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{coss} \alpha} \quad (\text{II.59})$$

onde:

$\varepsilon_e$  - deformação dos estribos

$\varepsilon_s$  - deformação média das armações longitudinais  
 ( =  $\frac{\varepsilon_{ss} + \varepsilon_{si}}{2}$  )

$\varepsilon_c$  - deformação do concreto.

Adotando para a inclinação da diagonal comprimida da treliça (modelo de LAMPERT<sup>6</sup> para torção),  $\alpha = 45^\circ$ , a expressão (II.59) transforma-se em:

$$\gamma = \epsilon_e + \epsilon_s - 2\epsilon_c \quad (\text{II.60})$$

Introduzindo (II.60) em (II.54) e, substituindo  $A_m$  por  $b_o \cdot d_o$  (ver Figura 8) temos:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma_i + \gamma_s}{d_o} + \frac{\gamma_e + \gamma_d}{b_o} \right) \quad (\text{II.61})$$

onde:

$\gamma_i, \gamma_s, \gamma_e$  e  $\gamma_d$  - deformações por cisalhamento da parede inferior, superior, esquerda e direita, respectivamente, da peça considerada.

Como simplificação de (II.61), admitiremos que a soma das deformações do aço nas paredes inferior e superior seja igual à soma das deformações nas paredes laterais esquerda e direita<sup>6</sup>. Uma vez que as deformações dos estribos e do concreto são constantes nas quatro paredes (ver equações (I.4) e (I.5)), obtemos, a partir da equação (II.60):

$$\gamma_i + \gamma_s = \gamma_e + \gamma_d \quad (\text{II.62})$$

Assim, a equação (II.61) torna-se:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{2} (\gamma_i + \gamma_s) \frac{b_o + d_o}{b_o d_o} = (\gamma_i + \gamma_s) \cdot \frac{u_m}{4b_o d_o} \quad (\text{II.63})$$

Introduzindo (II.60) em (II.63) temos:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{u_m}{2b_o d_o} (\epsilon_e + \epsilon_s - 2\epsilon_c) \quad (\text{II.64})$$

Para obter as deformações que aparecem em (II.64) faremos uso das expressões (I.9), (I.7), (I.13) e (I.17).

De (I.9) obtemos:

$$B = \frac{T \cdot s}{2b_o d_o}$$

Fazendo  $B = A_e \sigma_s$  e supondo o aço elástico linear, temos:

$$A_e \cdot \epsilon_e \cdot E_s = \frac{T \cdot s}{2b_o d_o} \quad \therefore \quad \epsilon_e = \frac{T \cdot s}{2b_o d_o \cdot A_e E_s} \quad (\text{II.65})$$

Associando (I.7) e (I.13) obtemos:

$$\sum H_i = \frac{T \cdot u_m}{2b_o d_o} \quad (\text{II.66})$$

Fazendo:

$$\sum H_i = A_i (2\sigma_{si} + 2\sigma_{ss}) = 4A_i \left( \frac{\sigma_{si} + \sigma_{ss}}{2} \right) = 4A_i \left( \frac{\epsilon_{si} + \epsilon_{ss}}{2} \right) \cdot E_s$$

$$\therefore \sum H_i = A_s \cdot \epsilon_s \cdot E_s \quad (\text{II.67})$$

onde  $A_s$  - total da armadura longitudinal na seção.

Igualando (II.66) e (II.67):

$$\epsilon_s = \frac{T \cdot u_m}{4b_o d_o \cdot E_s} \cdot \frac{1}{A_s} \quad (\text{II.68})$$

Da expressão (I.17) tiramos:

$$\sigma_c = - \frac{T}{A_m \cdot h_m} = \epsilon_c \cdot E_c \quad \therefore \quad \epsilon_c = - \frac{T}{A_m \cdot h_m \cdot E_c} \cdot \lambda$$

(II.69)

O fator  $\lambda$ , introduzido em (II.69), considera a alteração das deformações do concreto devida ao empenamento das paredes (item I.2.2.2), fazendo-as variar ao longo destas. Além disto, leva também em conta o fato do concreto não obedecer a uma lei  $\sigma \times \epsilon$  linear, como adotado, e, por isto, seu módulo de elasticidade  $E_c$  diminuir com a elevação das tensões (não-linearidade do material).

Introduzindo (II.65), (II.68) e (II.69) em (II.64) temos:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{T \cdot u_m}{4E_s (b_o d_o)^2} \left( \frac{s}{A_e} + \frac{u_m}{A_s} + 4\eta \cdot \frac{\lambda}{h_m} \right) \quad (II.70)$$

onde:

$$\eta = \frac{E_s}{E_c}$$

Observamos que na expressão (II.70), os dois primeiros termos entre parêntesis representam a contribuição dos estribos e da armação longitudinal e, o terceiro, a das diagonais de concreto.

Substituindo, então, a expressão acima em (II.58), obtemos a rigidez à torção:

$$GI_T = \frac{4 \cdot E_s \cdot A_m^2}{u_m \left( \frac{s}{A_e} + \frac{u_m}{A_s} \right) + 4\eta \cdot \lambda \cdot \frac{u_m}{h_m}} \quad (II.71)$$

Definindo percentagens de estribos e armação longitudinal:

$$p_e = \frac{A_e \cdot u_m}{b_o d_o \cdot s} \quad p_s = \frac{A_s}{b_o d_o}$$

E as igualando, obtemos:

$$\frac{s}{A_e} = \frac{u_m}{A_s} \quad (II.72)$$

Aplicando (II.72) em (II.71), temos:

$$GI_T = \frac{E_s \cdot A_m^2}{u_m \cdot \frac{s}{2A_e} + \lambda \cdot \frac{E_s}{E_c} \cdot \frac{u_m}{h_m}} \quad (II.73)$$

Ressaltamos que a expressão acima obtida para a rigidez à torção é a preconizada pelo C.E.B.<sup>1</sup>, se supusermos para  $\lambda$  o valor 1,5. No entanto, LAMPERT<sup>6</sup> assinala que para seções retangulares conseguiu obter excelente concordância entre a expressão (II.71), com  $\lambda = 3$ , e os resultados de ensaios em laboratório.

No presente trabalho adotaremos para representar a rigidez à torção de uma peça de concreto armado fissurada, a expressão (II.71), com  $\lambda = 1,5$ , coerentemente com os demais princípios do C.E.B. aqui utilizados.



### II.2.2.2.3. A Rigidez à Torção na Interação Torção-Flexão:

Numa peça de concreto armado não fissurada a curvatura devida à flexão, e a rotação devida à torção são independentes uma da outra<sup>6</sup>. Em consequência as rigidezes serão também independentes, isto é, não são afetadas pela simultaneidade de atuação das duas solicitações. Permanecem, então, válidas as expressões obtidas para as rigidezes à flexão e à torção obtidas em II.2.2.1 e II.2.2.2.1.

No entretanto, o mesmo não acontece com a peça após iniciada a fissuração. Nesse estado as deformações se tornam interdependentes, afetando, portanto, as rigidezes. Torna-se, porém, possível, através de restrições convenientes, separar os efeitos das solicitações de modo a trabalhá-las uma independente da outra.

Na Figura 32 apresentamos um diagrama  $T \times M$  para uma seção retangular com armadura assimétrica. Este está dividido em duas regiões: a primeira, a que chamaremos de domínio I, onde a torção é a solicitação preponderante, e a segunda (domínio II), onde a flexão prepondera. A fronteira entre os dois domínios é dada pelo ponto em que a armadura menos tracionada tem deformação nula.

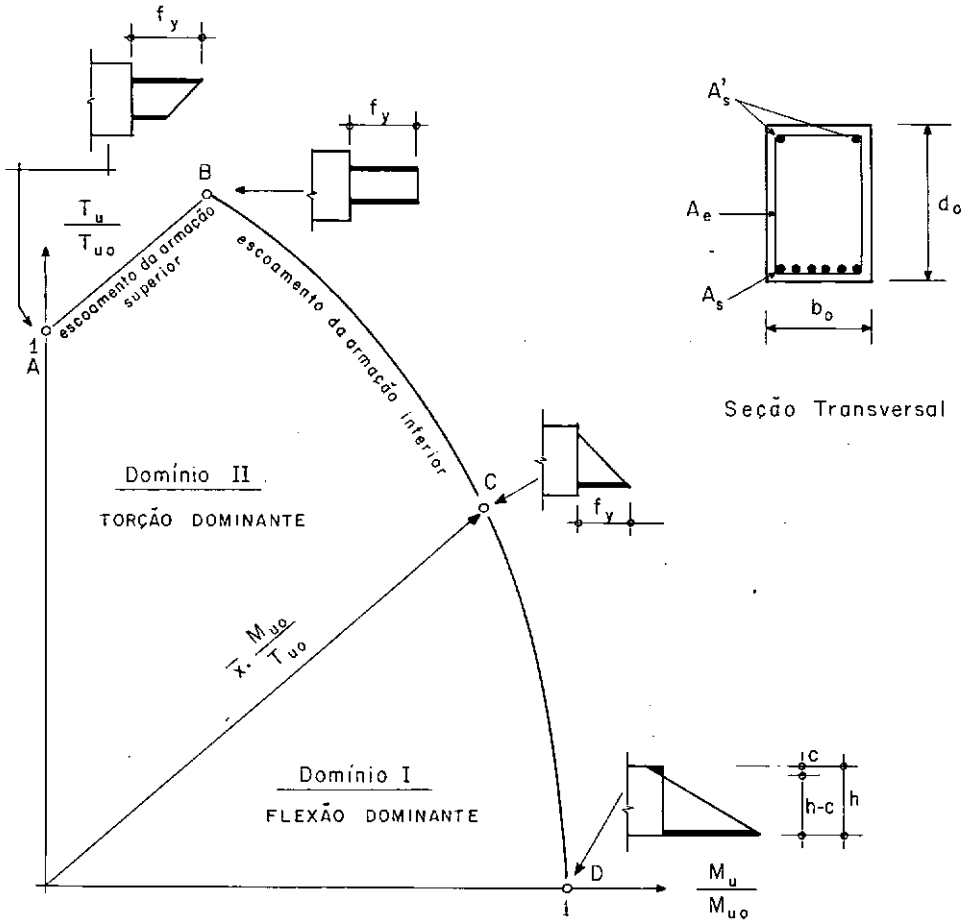


fig. 32 - DIAGRAMA DE INTERAÇÃO T x M

Analisaremos em separado cada domínio:

a) Domínio II (Torção Dominante):

Neste caso o modelo da treliça se aplica sem restrições<sup>6</sup>. Adicionemos às equações (I.4) a (I.7) a equação relativa ao momento fletor:

$$\sum M_y = M = (Z_i - Z_s) h_s \quad (\text{II.74})$$

onde  $Z_i$  e  $Z_s$  são as forças nas armaduras inferior e superior, respectivamente, de acordo com a Figura 32.

Com as relações acima podemos tirar, através de procedimento i dêntico ao usado no caso da torção pura, o valor das deforma - ções nas armaduras:

$$\epsilon_{si} = \frac{T \cdot u_m}{4b_o d_o A_{ss} E_s} + \frac{M}{d_o A_{ss} E_s} \quad (\text{II.75})$$

$$\epsilon_{ss} = \frac{T \cdot u_m}{4b_o d_o A_{si} E_s} - \frac{M}{d_o A_{si} E_s} \quad (\text{II.76})$$

Para as deformações nos estribos e no concreto valem as expres - sões (II.65) e (II.69), respectivamente.

Sabendo que  $\frac{d\theta}{dx}$  é dada por (II.64), que

$$\psi = \frac{\epsilon_{si} - \epsilon_{ss}}{d_o} \quad (\text{II.77}),$$

e que

$$\epsilon_s = \frac{\epsilon_{si} + \epsilon_{ss}}{2},$$

introduzimos as expressões das deformações em (II.64) e (II.77), obtendo como resultado as expressões da rotação e curvatura, as quais apresentamos abaixo de forma compacta:

$$\psi = \frac{M}{S_{MM}} + \frac{T}{S_{MT}} \quad (\text{II.78})$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{T}{S_{TT}} + \frac{M}{S_{TM}} \quad (\text{II.79})$$

onde:

$S_{MM}$  - rigidez à flexão da seção transversal ( $EI$ ), suposta sem torção.

$S_{TT}$  - rigidez à torção pura da seção transversal ( $GI_T$ )

$$S_{MT} = S_{TM} = \frac{4b_o d_o^2 \cdot E_s}{u_m \left( \frac{1}{A_{si}} - \frac{1}{A_{ss}} \right)} \quad (\text{II.80})$$

Por simples inspeção de (II.80) podemos ver que se tivermos numa peça armaduras simétricas,  $S_{MT}$  e  $S_{TM}$  tenderão ao infinito, fazendo com que nas expressões (II.78) e (II.79) os termos deles dependentes se anulem. Com isto, conseguimos tornar a curvatura da seção independente da torção e, por sua vez, a rotação relativa independente da flexão. Desse modo, podemos adotar como representativo da rigidez à flexão e à torção as expressões obtidas em II.2.2.1 e II.2.2.2.1.

#### b) Domínio I ( Flexão Dominante)

Neste domínio haverá uma região da seção transversal comprimida por efeito da flexão. Conseqüentemente, o modelo da treliça, até agora utilizado, não poderá sê-lo de forma direta. LAMPERT<sup>6</sup>, então, adota uma aproximação tal que seja garantida uma transição contínua entre os domínios I e II.

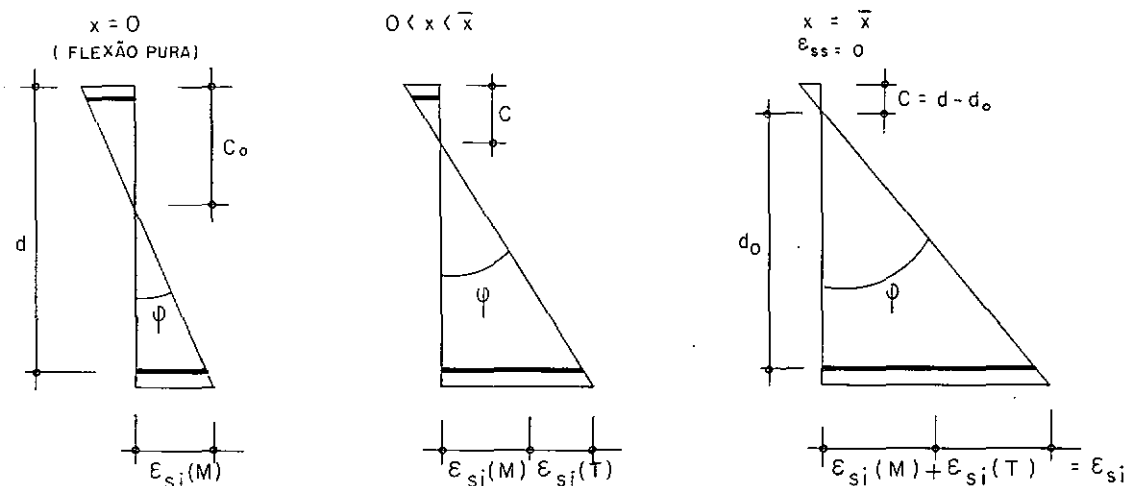


fig. 33 - CURVATURA NO DOMÍNIO I

De acordo com a Figura 33 temos:

$$\varphi = \frac{\epsilon_{si}(M) + \epsilon_{si}(T)}{h - c} = \frac{\epsilon_{si}}{h - c}$$

Utilizando para  $\epsilon_{si}$  a expressão (II.75), obtemos um valor aproximado da rigidez à flexão<sup>6</sup>:

$$EI = \frac{M}{\varphi} = \frac{EI}{L + \frac{k}{\bar{EI}} \left( \frac{EI}{EI} - 1 \right)} \quad (\text{II.81})$$

onde

$$k = \frac{T}{M}$$

$\bar{EI}$  - rigidez à flexão aproximada para  $k = \bar{k}$

A expressão (II.81) indica que a rigidez à flexão de uma peça submetida à torção é menor que a mesma sob flexão pura. No entanto, LAMPERT<sup>6</sup> afirma ser possível utilizar neste domínio I a rigidez à flexão independente da influência da torção, desde que a maior parte da peça esteja solicitada neste domínio.

Como em geral a solicitação de flexão em um elemento de concreto armado é preponderante a hipótese de Lampert nos parece a adequada aos nossos estudos. Além disso quando a torção é predominante, o é ao longo de todo o elemento, principalmente nas estruturas carregadas apenas nos nós, como é o caso das que são objeto deste trabalho. Sendo assim, a rigidez à flexão de uma barra de concreto armado será a obtida sem levar em consideração a existência de torção.

No caso da rigidez à torção, torna-se extremamente difícil estabelecer um mecanismo adequado para determiná-la no domínio I<sup>6</sup>. Isto se deve a duas razões principais: em primeiro lugar porque a contribuição da zona comprimida do concreto é desconhecida e, em segundo o modelo da treliça espacial não se mostra adequado para a obtenção da rotação relativa da peça à medida que nos aproximamos do estado de solicitação por flexão pura. Como os ensaios analisados por LAMPERT<sup>6</sup> não demonstram influência sistemática do momento fletor sobre as deformações de torção, adotou, ele, o valor da rigidez à torção obtido para a torção pura. Com isto simplifica-se extremamente a análise uma vez que a rigidez permanece constante em todo o domínio de interação torsor-fletor.

Na falta absoluta de dados relativos à interação torção com flexão no espaço, consideraremos como válidas para este caso, as conclusões acima obtidas para a torção com flexão no plano.

No caso de haver esforço cortante seguiremos a orien-

tação dada por LAMPERT<sup>6</sup>, que afirma não terem os poucos ensaios existentes neste campo apresentado influência do cortante sobre a rigidez à torção da peça.

### II.3. A Análise de uma Estrutura

Distinguimos, neste trabalho, dois tipos de análise.

#### II.3.1. Verificação do Comportamento de uma Estrutura para um Carregamento Definido

Neste caso, procuramos verificar se uma estrutura é estável sob a ação de um dado sistema de cargas.

Como se frisou neste capítulo, utilizamos um processo iterativo em que os valores dos parâmetros  $EI_y$ ,  $EI_z$ ,  $EA$ ,  $GI_T$  e  $P$  são corrigidos, em todos os elementos, ao final de cada etapa de cálculo. A título ilustrativo mostramos na Figura 34 o funcionamento do processo de análise, considerando uma estrutura simples. Observamos que  $K$  tem significado análogo ao da matriz de rigidez da estrutura sendo igualmente função dos valores da rigidez e da força axial de cada elemento.

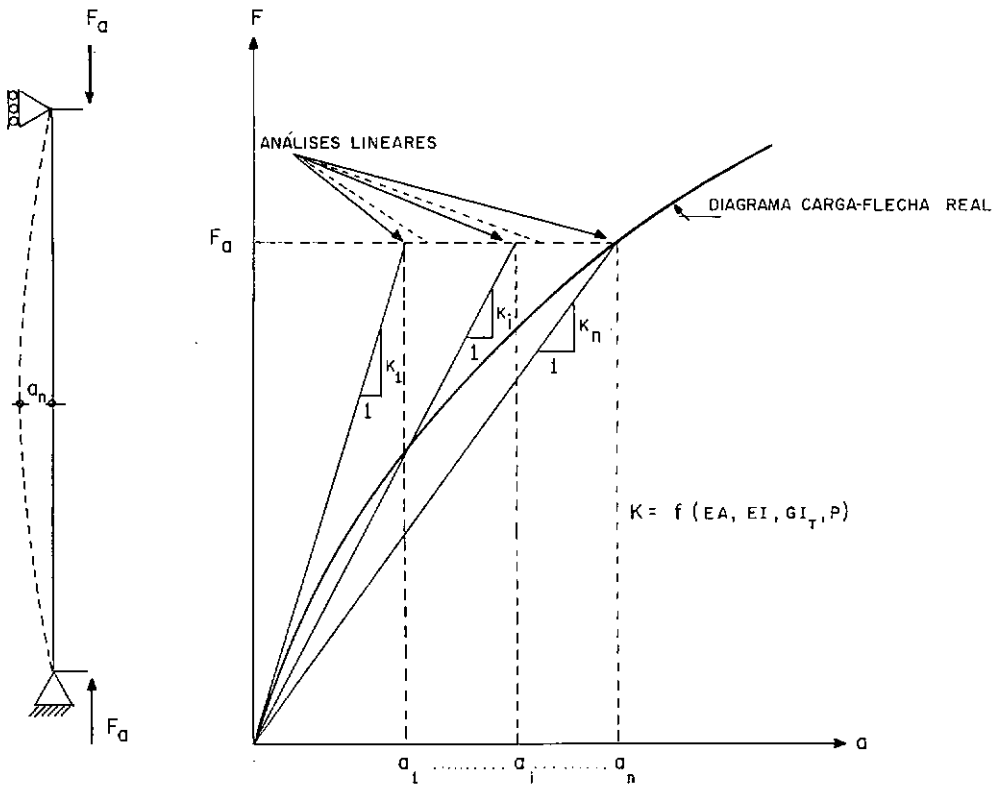


fig 34

### II.3.2. Pesquisa da Capacidade de Carga de uma Estrutura

Buscamos obter o valor máximo que as cargas solicitantes de uma determinada estrutura podem atingir sem provocar a ruína da mesma. As cargas pesquisadas poderão ser apenas uma parte das solicitantes ou todas elas, desde que sua variação seja de proporção idêntica para todas.

Este tipo de estudo consiste, essencialmente, em uma sucessão de análises efetuadas segundo o esquema indicado em II.3.1. Tal seqüência é regulada por um fator multiplicador de cargas,  $\lambda$ , que altera o valor das que foram escolhidas como variáveis. A Figura 35 ilustra o processo.



Observamos que a matriz de rigidez utilizada para iniciar as iterações, em cada nova etapa do processo de pesquisa da capacidade de carga, é a obtida quando da convergência para o valor de  $\lambda$  imediatamente anterior.

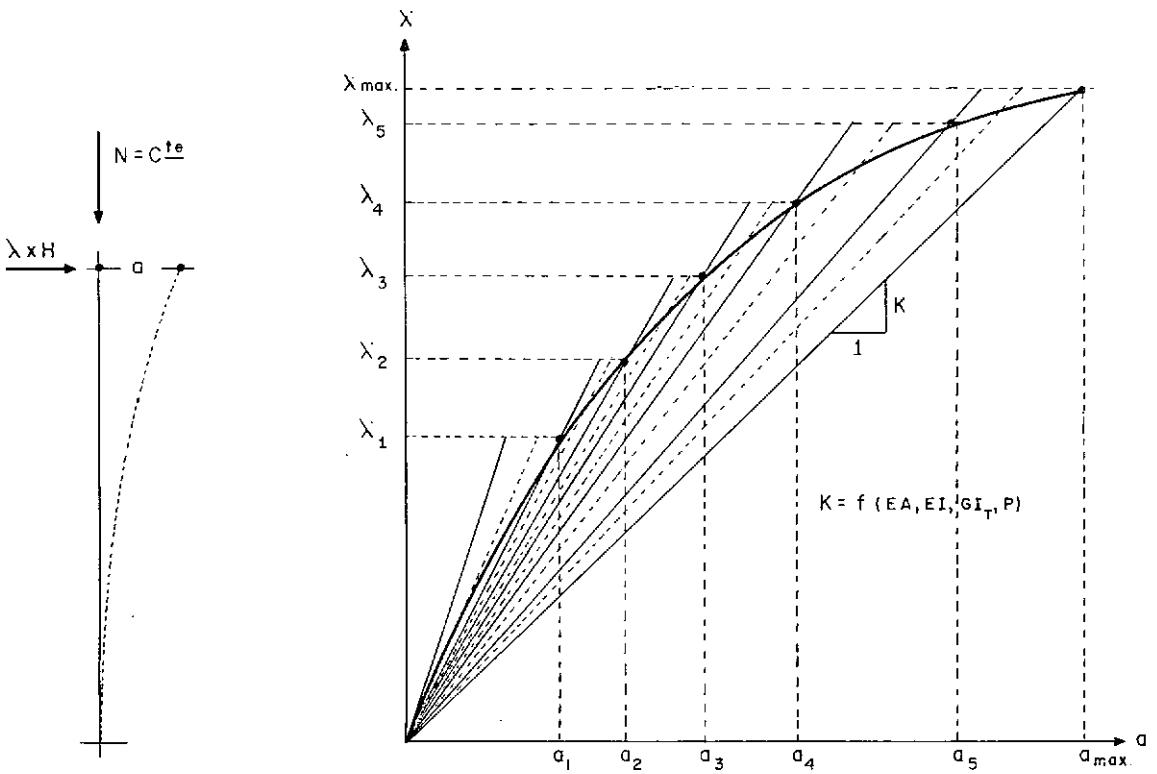


fig. 35

### CAPÍTULO III

#### O PROGRAMA ANALEC

Baseados na teoria exposta nos capítulos precedentes, apresentamos um programa automático em linguagem FORTRAN para análise de estruturas reticuladas espaciais de concreto armado.

#### III.1. Campo de Aplicação do Programa

##### III.1.1. Quanto ao Tipo de Estrutura

Podem ser analisadas estruturas dentro das seguintes características:

- a) Elementos de eixo reto com seção transversal retangular maciça ou vazada, simétrica em relação aos dois eixos principais de inércia centroidais;
- b) Armação (quantidade e distribuição) e seção de concreto constantes ao longo de cada elemento;
- c) Apoios rígidos ou elásticos lineares;
- d) Nós da estrutura com ligações rígidas ou liberações para qualquer tipo de deslocamento generalizado.

### III.1.2. Quanto ao Tipo de Carregamento

Admitimos apenas a existência de cargas nodais (forças ou momentos), estáticas, conservativas e de curta duração.

### III.1.3. Quanto ao Tipo de Análise

De acordo com o item II.3 do capítulo precedente, dois tipos de análise são possíveis:

- a) Verificação do comportamento de uma estrutura para um carregamento definido;
- b) Pesquisa da capacidade de carga de uma estrutura.

## III.2. Definição da Estrutura e do Carregamento

Na definição da estrutura e de seu carregamento, dois tipos de sistemas de referência são utilizados:

### III.2.1. Sistema de Referência Global: (SRG)

Constituído por um sistema de eixos cartesianos ortogonais ao qual são referidas as coordenadas e cargas nodais e as restrições de apoio. A este sistema são também referidos os deslocamentos nodais e reações de apoio, obtidos com resposta do programa.

### III.2.2. Sistema de Referência Local (SRL)

É utilizado na definição de liberações de vínculos dos elementos e das ações em suas extremidades, de acordo com as convenções da Figura 19. A matriz de rigidez dos elementos da estrutura é montada referida a este sistema e posteriormente transferida para o SRG.

O SRL é fixo em relação a cada membro, conforme a Figura 36. O sentido do eixo  $x$  é determinado pela incidência do elemento, sendo positivo do nó  $j$  para o nó  $k$ , obrigatoriamente  $k > j$ . O eixo  $z$  (um dos eixos principais de inércia centrodais da seção transversal) foi adotado como paralelo ao plano XZ do SRG e positivo se voltado para o observador. O eixo  $y$  é obtido a partir dos eixos  $x$  e  $z$  pela regra do triedro direto.

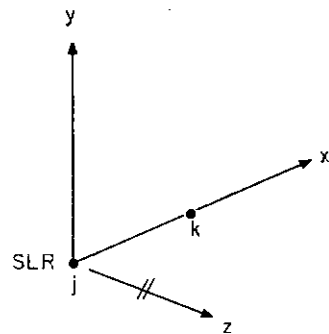
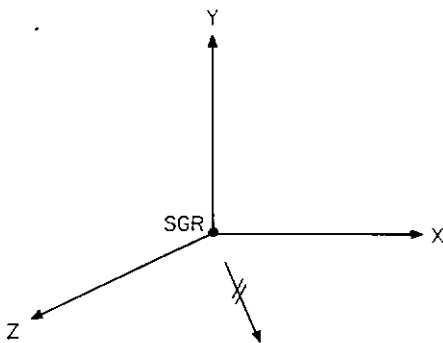
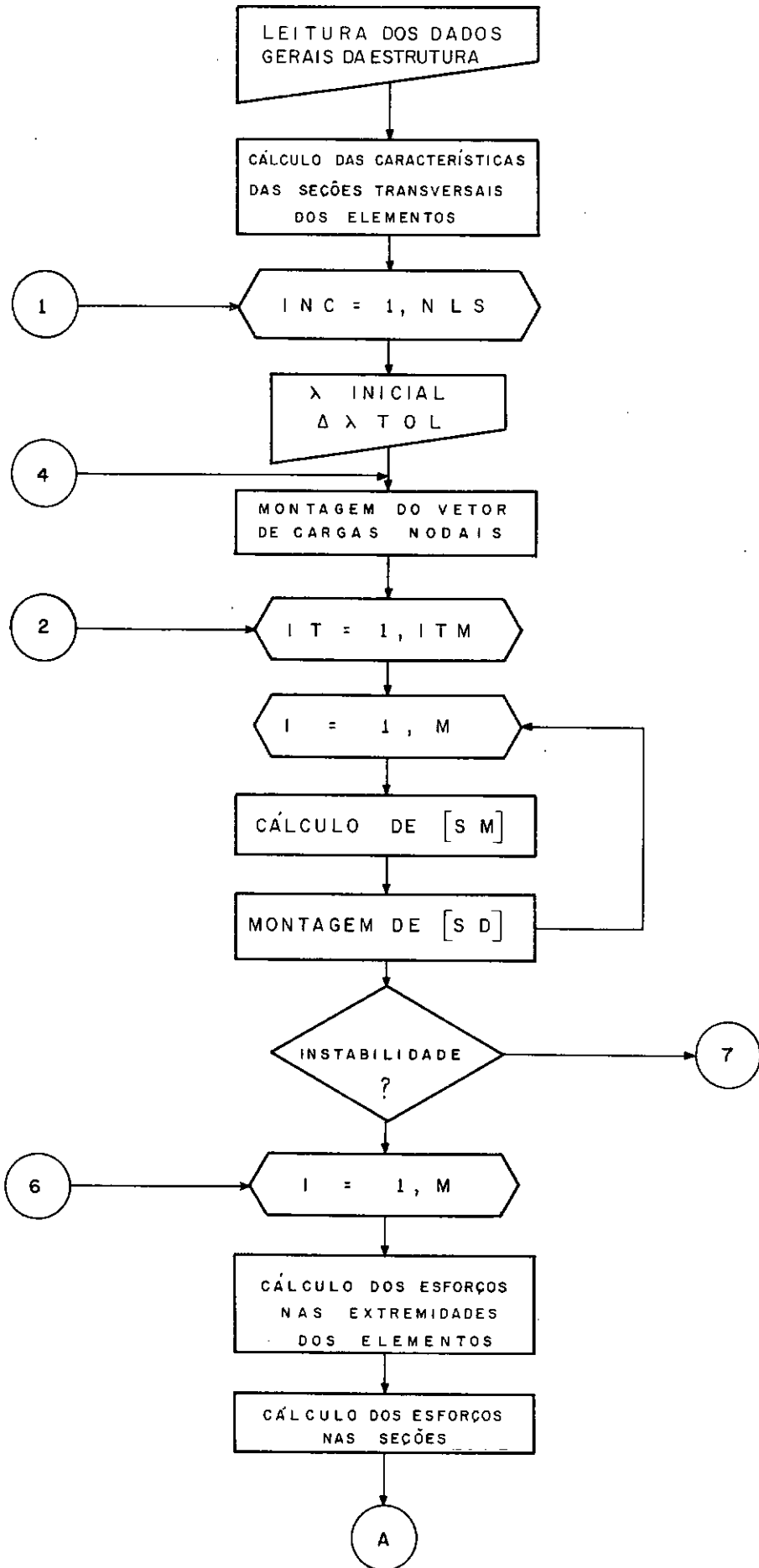


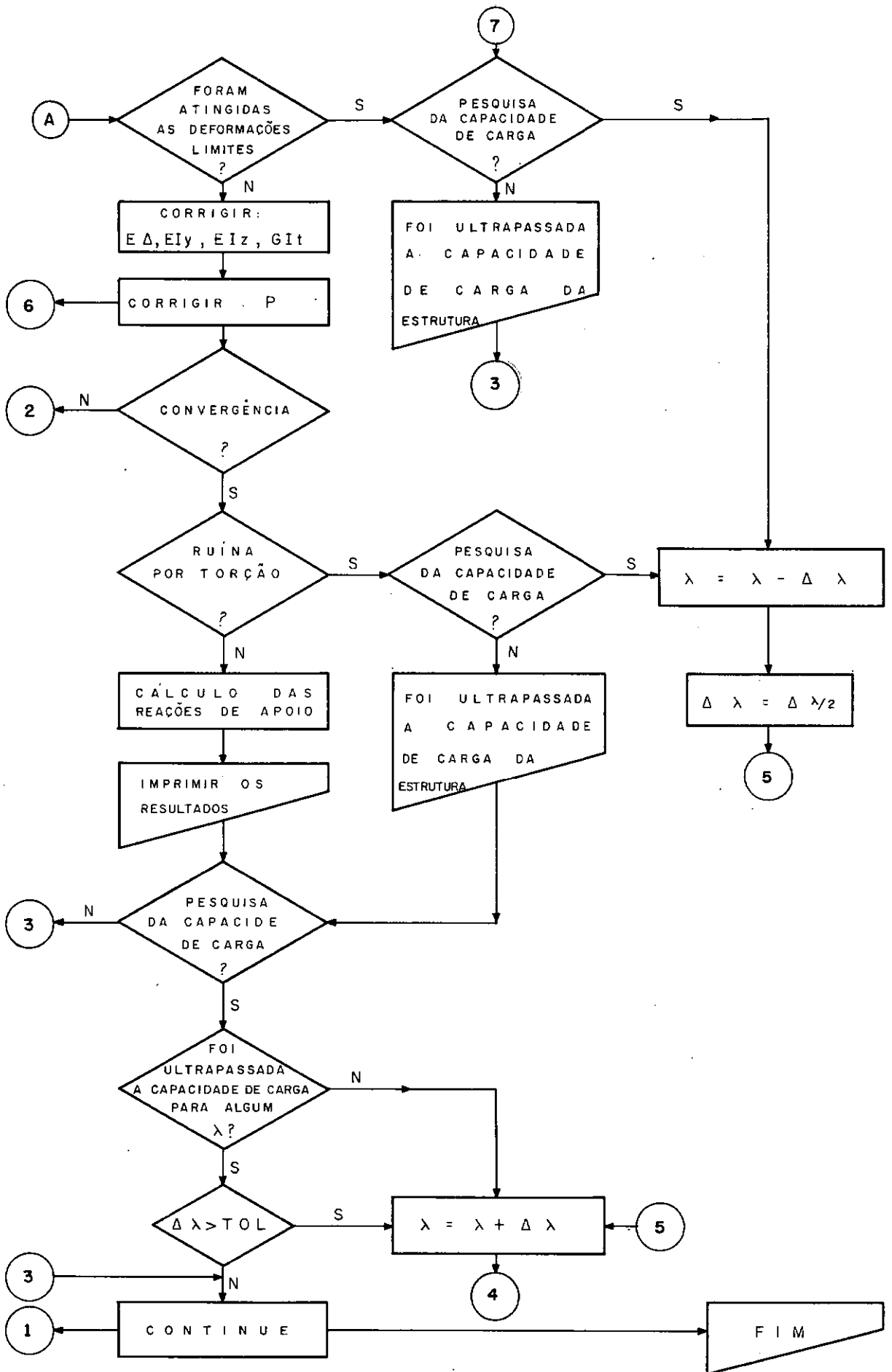
fig. 36

### III.3. Diagrama de Blocos

Apresentamos a seguir um fluxograma resumido do programa ANALEC onde são utilizados os seguintes símbolos:

- NLS número de análises a serem realizadas para uma dada estrutura;
- ITM número máximo admissível de iterações (se o número de iterações superar 25 considera-se ultrapassada a capacidade de carga da estrutura);
- M número de elementos que compõem a estrutura;
- [SM] matriz de rigidez de cada elemento da estrutura em no S.R.L.;
- [SD] matriz de rigidez da estrutura;
- $\lambda$  fator multiplicador das cargas supostas variáveis;
- $\Delta\lambda$  incremento no valor de  $\lambda$ ;
- TOL tolerância no valor de  $\lambda_{\max}$ .





### III.4. Sub-rotinas do Programa ANALEC

Neste item apresentaremos uma descrição das sub-rotinas utilizadas no programa ANALEC e que desenvolvem as tarefas indicadas no diagrama de blocos do item anterior.

#### III.4.1. Organograma das Sub-rotinas

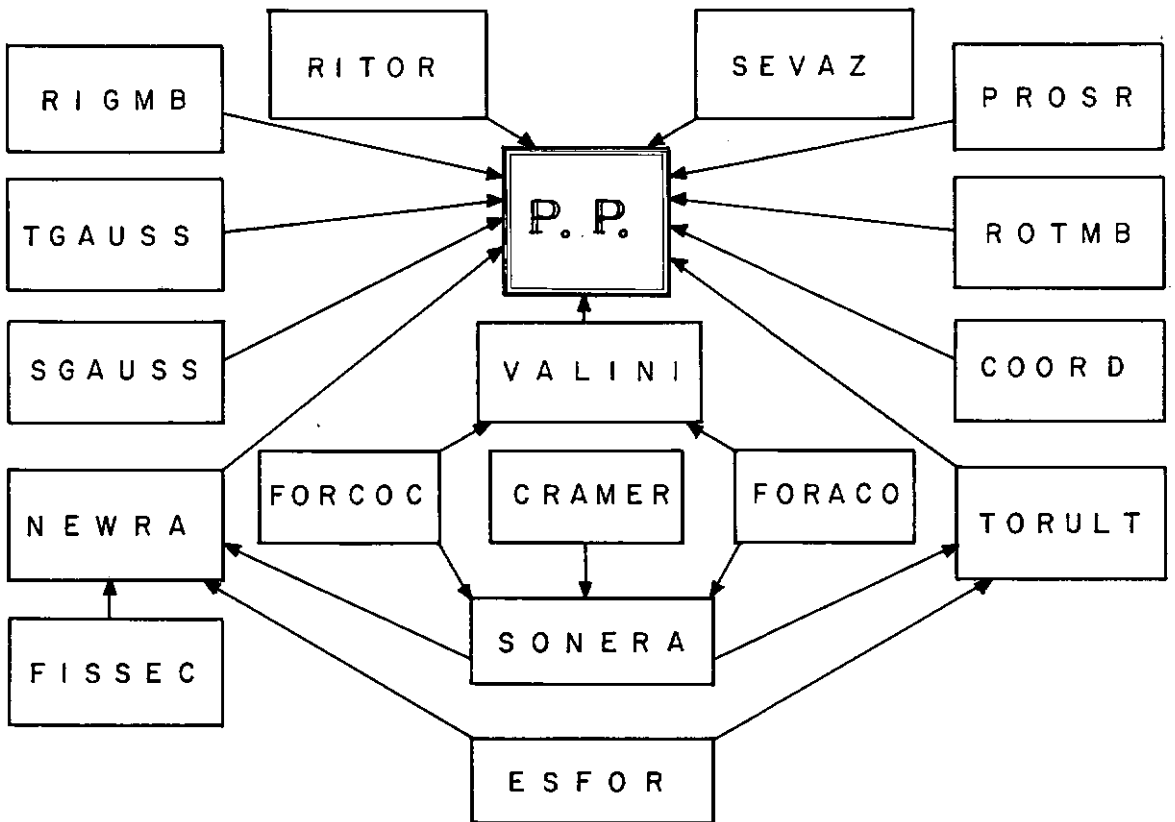


fig. 37

#### III.4.2. Sub-rotina COORD

Calcula os comprimentos e cossenos diretores (em relação ao SRG) dos elementos da estrutura.



### III.4.3. Sub-rotina PROSR

Esta sub-rotina é utilizada para gerar os dados da seção transversal de elemento da estrutura quando ela for maciça.

Como foi explicado em II.2.2.1.1, para a verificação da estabilidade de uma seção transversal necessitamos discretizá-la em pequenos elementos de área. São as coordenadas desses elementos, referidas ao SRL, que esta sub-rotina gera.

Como dados são fornecidos pelo usuário o número de elementos em que a seção deve ser discretizada e, o número de barras de aço existentes, junto com sua distribuição ao longo dos lados da seção. Conhecidas as dimensões da seção e o recobrimento das barras, a sub-rotina gera os pares de coordenadas  $(y_i, z_i)$  de cada elemento de área e de cada barra de aço, além de calcular o valor da área geométrica da seção transversal, seus momentos resistentes em relação aos eixos  $y$  e  $z$  e, o número total de barras de aço existentes na seção (Figura 27).

Para comodidade do usuário, a discretização da seção transversal poderá ser omitida na entrada de dados, assumindo o programa, automaticamente uma discretização da seção transversal em 100 elementos.

#### III.4.4. Sub-rotina SEVAZ

Funciona dentro do mesmo esquema da sub-rotina PROSR, porém para o caso de seções vazadas. Como dados adicionais de vemos fornecer as dimensões da abertura interna da seção, obrigatoriamente simétrica em relação aos eixos y e z do SRL. O número de barras existentes ao longo de cada face interna também deverá ser fornecido. (Figura 27).

Como no caso da sub-rotina PROSR se a discretização da seção for omitida a mesma será particionada, automaticamente, em 120 elementos.

#### III.4.5. Sub-rotina RITOR

Calcula a rigidez à torção das seções transversais dos elementos da estrutura antes e após a fissuração do mesmo. Fornece, ainda, o valor do momento torsor último de resistência de tais seções para torção pura.

#### III.4.6. Sub-rotina FISSEC

Partindo dos valores dos esforços solicitantes de uma determinada seção transversal, pesquisa o valor da tensão principal de tração máxima nesta seção a fim de verificar se a mesma está fissurada ou não. Como pontos prováveis de ocorrência da máxima tensão principal de tração escolhemos para pesquisar os pontos médios dos lados externos da seção transversal. Se bem que não possamos afirmar que tal tensão ocorrerá necessa -

riamente num desses pontos, estaremos obtendo um valor bem próximo do procurado. Para fins de verificação da fissuração o critério acima se mostra suficiente já que para pequenas solicitações em relação à carga última de uma peça de concreto armado a mesma fissura. Assim, mesmo que pelo critério adotado a carga de fissuração obtida não seja exata, seu erro em relação à real não será de ordem a afetar os resultados fornecidos pelo programa. Aliando a este fato o exposto no Capítulo I para a limitação da tensão máxima de fissuração, mais baixa do que a observada em laboratório, acreditamos poder aceitar como válido o critério aqui exposto.

#### III.4.7. Sub-rotina VALINI

Para dar início ao processo iterativo adotado no programa ANALEC e, portanto, montar a matriz de rigidez inicial da estrutura, necessitamos fixar valores para as rigidezes EA, EI<sub>y</sub> e EI<sub>z</sub> de cada elemento. Esta sub-rotina, chamando as sub-rotinas FORCOC e FORACO, encarrega-se de calcular tais rigidezes, a partir do critério abaixo:

$$EA_i = \frac{N_{ri}(0, 0, \epsilon_g)}{\epsilon_g} ; \quad \epsilon_g = 10^{-10}$$

$$EI_{yi} = \frac{M_{ryi}(\psi_z, 0, \epsilon_g)}{\psi_y} ; \quad \psi_y = 10^{-10} / \text{metade do lado da seção paralelo ao plano de atuação de } M_{ry}.$$

$$EI_{zi} = \frac{M_{rzi}(0, \psi_z, \epsilon_g)}{\psi_z} ; \quad \psi_z = 10^{-10} / \text{metade do lado da seção paralelo ao plano de atuação de } M_{rz}$$

$i = 1$ , nº de elementos da estrutura.

#### III.4.8. Sub-rotinas FORCOC e FORACO

Estas sub-rotinas são chamadas para calcular os esforços resistentes de uma dada seção transversal de um elemento para o terno de deformações  $(\psi_y, \psi_z, \epsilon_g)$ . Calculam, também, a partir deste terno de deformações, o valor dos coeficientes da matriz  $[Q]$  para a solução do sistema (II.48).

A sub-rotina FORCOC fornece a contribuição do concreto para os esforços resistentes  $M_{ry}$ ,  $M_{rz}$  e  $N_r$  e coeficientes de  $[Q]$ . A sub-rotina FORACO gera a contribuição do aço e calcula o valor final das grandezas citadas.

Ambas as sub-rotinas estão equipadas com indicadores de esgotamento da capacidade resistente da seção se, em qualquer tempo, as deformações limites dos materiais forem ultrapassadas.

#### III.4.9. Sub-rotina RIGMB

É chamada pelo programa principal para calcular os coeficientes da matriz de rigidez de cada elemento da estrutura. A cada alteração dos valores dos parâmetros  $EA$ ,  $EI_y$ ,  $EI_z$ ,  $GI_T$  e  $P$ , ela é chamada para gerar a nova matriz de rigidez do elemento.

Esta sub-rotina introduz na matriz as alterações de-

correntes de liberação de vínculos nas extremidades do elemento, quando houverem.

#### III.4.10. Sub-rotina ROTMB

Com vistas à montagem da matriz de rigidez global da estrutura, calcula a matriz de rotação que efetuará a transposição da matriz de rigidez de cada elemento (calculadas por RIGMB) do sistema local de referência para o sistema global.

#### III.4.11. Sub-rotina TGAUSS e SGAUSS

São chamadas para resolver o sistema de equações que fornece os deslocamentos nodais da estrutura.

O método de resolução do sistema é o de Gauss, adaptado para a armazenagem em forma retangular dos termos da semi-banda superior da matriz de rigidez.

A sub-rotina TGAUSS efetua a triangularização da matriz e SGAUSS calcula os deslocamentos nodais, incógnitas do sistema.

#### III.4.12. Sub-rotina CRAMER

É utilizada para resolver o sistema (II.48) para o desenvolvimento do método de Newton-Raphson. Como tal sistema é de três equações a três incógnitas, optamos por resolvê-lo pela regra de Cramer para sistemas 3x3.

### III.4.13. Sub-rotina ESFOR

A partir dos esforços nas extremidades dos elementos, fornecidos pelo programa principal, esta sub-rotina calcula os esforços solicitantes  $M_y$ ,  $M_z$  e  $N$  de uma seção qualquer ao longo do elemento.

Tendo em vista a análise de estruturas, verificamos serem suficientes o estudo de 5 seções ao longo de cada elemento para que os resultados obtidos apresentem precisão adequada. Desse modo, foram escolhidas além das seções das extremidades, três outras intermediárias (nos quartos de vão).

### III.4.14. Sub-rotina SONERA

É chamada pela sub-rotina NEWRA para efetuar a verificação da estabilidade das seções transversais dos elementos para as solicitações  $M_y$ ,  $M_z$  e  $N$ , utilizando o método de Newton-Raphson, conforme explicado em II.2.2.1.

Devido à rápida convergência do método verificamos que, normalmente, três a quatro iterações são suficientes para obtermos um erro inferior a  $10^{-5}$  entre os esforços solicitantes e os resistentes na pesquisa de configuração de equilíbrio da seção. Assim, fixamos como critério de convergência para o método o seguinte:

$$|M_Y - M_{rY}(\bar{\varphi}_Y, \bar{\varphi}_Z, \bar{\varepsilon}_g)| \leq |10^{-5} \times M_Y|$$

$$|M_Z - M_{rZ}(\bar{\varphi}_Y, \bar{\varphi}_Z, \bar{\varepsilon}_g)| \leq |10^{-5} \times M_Z|$$

$$|N - N_r(\bar{\varphi}_Y, \bar{\varphi}_Z, \bar{\varepsilon}_g)| \leq |10^{-5} \times N|$$

Como resultado desta sub-rotina, obtemos o terno de deformações  $(\bar{\varphi}_Y, \bar{\varphi}_Z, \bar{\varepsilon}_g)$  que representa a configuração de equilíbrio da seção.

#### III.4.15. Sub-rotina NEWRA

É chamada pelo programa principal para proceder à correção dos valores das rigidezes  $EI_Y$ ,  $EI_Z$ ,  $EA$  e  $GI_T$  de cada elemento, bem como, através da sub-rotina SONERA, verificar se a capacidade de carga de algum deles foi ultrapassada.

Como dissemos no Capítulo II, a análise de uma estrutura pelo programa ANALEC se faz através de um processo iterativo cuja convergência é dada quando os parâmetros não-lineares de que depende o problema (rigidezes  $EA$ ,  $EI_Y$ ,  $EI_Z$ ,  $GI_T$  e força axial  $P$ ) apresentam uma variação considerada desprezível entre duas etapas sucessivas de cálculo. Assim, fixamos o seguinte critério de convergência utilizado nesta sub-rotina:

$$|EA_i^j - EA_i^{j-1}| \leq |EA_i^{j-1} \times \text{tol}|$$

$$|EI_{Y,zi}^j - EI_{Y,zi}^{j-1}| \leq |EI_{Y,zi}^{j-1} \times \text{tol}|$$

$$|GI_{Ti}^j - GI_{Ti}^{j-1}| \leq |GI_{Ti}^{j-1} \times \text{tol}|$$

onde:

$i$  = nº do elemento em questão ( $i = 1, \dots, n$  de elementos)

$j$  = nº da iteração (ou etapa de cálculo) em questão

tol = erro admissível na convergência.

Não há necessidade de se testar a convergência da força axial  $P_i$  de cada elemento, uma vez que está implícita na verificação acima. Isto acontece porque, atuando na matriz de rigidez do elemento a força  $P_i$  interfere nos esforços atuantes no elemento, fazendo com que os valores das rigidezes se modifiquem. Uma vez verificado que as rigidezes não mais variam, isto significa que, os esforços nos elementos alcançaram seus valores finais, inclusive a força  $P_i$ .

Assinalamos que o processo é dado por concluído quando a convergência é obtida para todos os elementos da estrutura, sem exceção. Aconselhamos adotar como tolerância na convergência das rigidezes o valor  $TOL = 0,005$ , por este ter se mostrado conveniente nos casos estudados.

#### III.4.16. Sub-rotina TORULT

É chamada pelo programa principal para verificar a estabilidade de uma seção transversal de um elemento quando este é solicitado por momento torsor, combinado ou não com outros esforços.



### III.5. Alguns Comentários sobre Resultados Obtidos

#### III.5.1. Rigidez à Deformação Axial (EA)

Ao longo dos exemplos testados verificamos que a rigidez EA pode assumir valores negativos, sem que necessariamente isto signifique instabilidade da estrutura. Isto se deve a que, a partir do critério adotado para o cálculo da rigidez EA de uma seção transversal, tal parâmetro não será necessariamente positivo para as estruturas de concreto armado que são não-lineares fisicamente. Podemos visualizar tal comportamento através do diagrama  $N \times \epsilon_g$  da Figura 38.

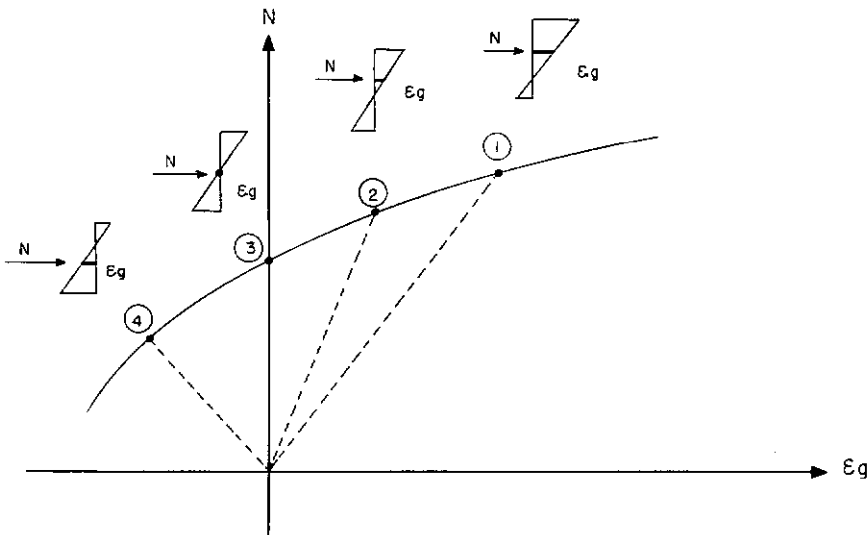


fig. 38 - DIAGRAMA  $N \times \epsilon_g$  TÍPICO DE UMA SEÇÃO DE CONCRETO ARMADO

Sabemos que a rigidez EA é dada por  $N/\epsilon_g$  (ver item I.5.1). Observando, então, a figura acima, podemos constatar:

- No ponto 1: a rigidez EA será positiva pois  $N$  e  $\epsilon_g$  o são.
- No ponto 2: também o será, mas seu valor está tendendo a mais infinito à medida que se aproxima do ponto 3.

- c) No ponto 3: não tem definição uma vez que  $\epsilon_g$  é nula.
- d) No ponto 4: será negativa já que  $N$  é positiva e  $\epsilon_g$  negativa e, tenderá a menos infinito à medida que se aproximar do ponto 3.

Com base neste comportamento da rigidez  $EA$  de uma seção transversal, podemos chegar ao que acontece com ela ao longo de todo um elemento. Assim,  $EA$  poderá apresentar alguns tipos bem característicos de comportamento, como assinalamos na Figura 39.

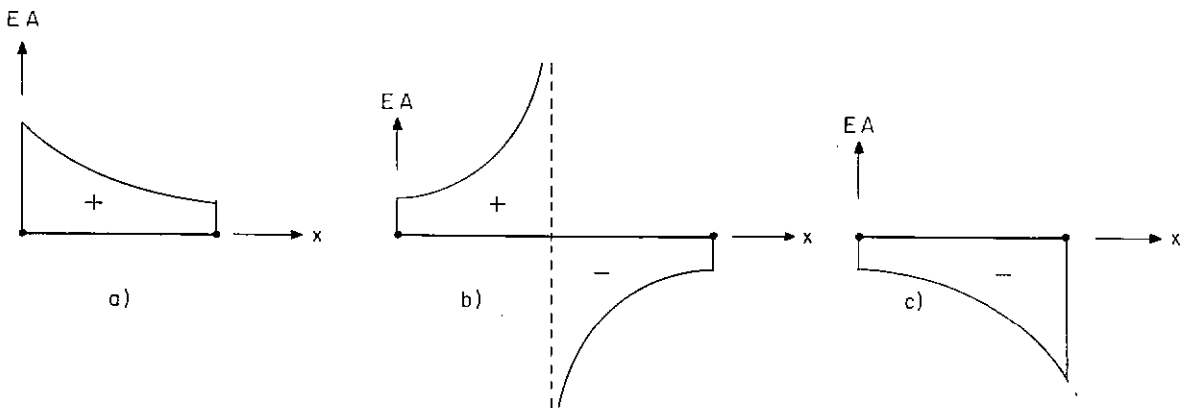


fig.39 - RIGIDEZ  $EA$  AO LONGO DE UM ELEMENTO

O caso a representa a situação mais normal, não merecendo assim nenhum comentário. O caso c, apesar de representar uma rigidez negativa para o elemento, acarreta apenas que a matriz de rigidez do elemento deixa de ser positiva definida. No entretanto nenhum problema de convergência foi constatado aliado a isto. Como ressalva queremos frisar que o fato da rigidez  $EA$  tornar-se negativa e, portanto, a matriz de rigidez deixar de ser positiva definida, não significa obrigatoriamente que a estrutura tornou-se instável, podendo ser tão somente uma decorrência do critério de cálculo da rigidez.

Para o caso b da Figura 39, um problema numérica surge em face da discontinuidade da curva: a integração de EA ao longo do elemento para a obtenção de seu valor médio representativo de todo o elemento.

Em nossos testes, confirmados pelos resultados de TELLES<sup>10</sup>, verificamos que a influência da variação da rigidez EA no comportamento da estrutura é significativamente menor que a das rigidezes à flexão e torção. Sendo assim, quando há inversão do sinal de EA ao longo do elemento, caracterizando um diagrama do tipo b, optamos por manter como valor da rigidez o obtido na iteração anterior. Com este artifício evitamos o problema da integração de uma função descontínua sem provocar qualquer prejuízo na qualidade dos resultados fornecidos pelo programa ANALEC.

Comportamento semelhante ao observado na rigidez EA pode ocorrer com as rigidezes à flexão  $EI_y$  e  $EI_z$  para o caso mais geral de seções assimétricas de concreto armado. No entanto, no caso particular das estruturas estudadas neste trabalho tal não acontece, uma vez que apenas seções simétricas são consideradas.

### III.5.2. A Discretização da Estrutura

Nos exemplos testados pelo programa ANALEC, constatamos que o número de elementos em que os membros de uma estrutura são discretizados tem influência significativa na qualidade dos resultados obtidos, principalmente à medida que cres

cem de importância os efeitos de 2a. ordem nos mesmos. Em face disto, aconselhamos discretizar tais tipos de membros em um número mínimo de 3 elementos. Não vemos necessidade de uma discretização mais refinada (superior a 5 elementos) pois a melhoria na qualidade dos resultados permanece na faixa de 1%. Com este procedimento obtém-se melhor qualidade na reprodução dos efeitos de segunda ordem e minimiza-se o erro da consideração das rigidezes constantes ao longo de cada elemento (ver item I.5.3, Cap. I).

### III.5.3. A Discretização da Seção Transversal

Recomendamos que nos casos práticos usuais seja adotada a discretização interna do programa ANALEC (ver itens III.4.3 e III.4.4), já que, conforme observam CHEN e SHORAKA<sup>15</sup>, o incremento na precisão dos resultados para malhas mais refinadas não chega a ser significativo (menos de 0,5%).

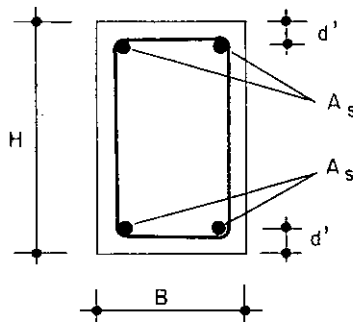
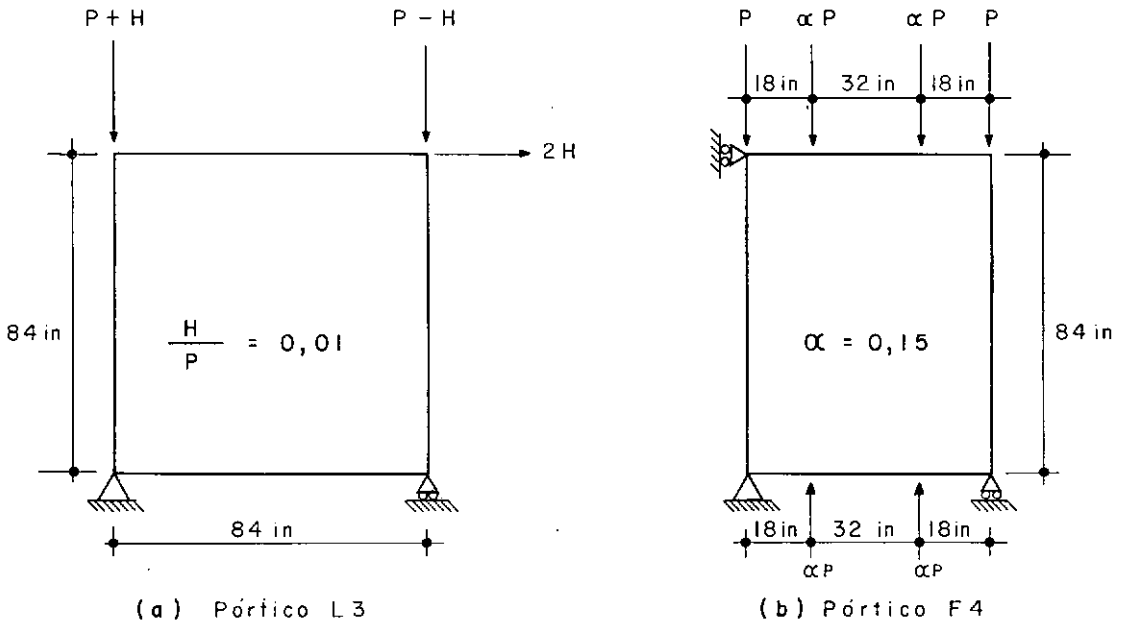
CAPÍTULO IVEXEMPLOS

Apresentamos neste capítulo uma série de exemplos onde procuramos mostrar as potencialidades do programa ANALEC e tecemos alguns comentários comparativos com resultados de outras pesquisas.

IV.1. Exemplo 1

Comparamos os resultados fornecidos pelo programa ANALEC com os obtidos em laboratório para estruturas planas. Confrontamos, também com os resultados obtidos por GUNNIN e outros<sup>16</sup> através de um programa de computador na análise das mesmas estruturas.

Com este objetivo estudamos dois pórticos planos apresentados por GUNNIN<sup>16</sup> e ensaiados na Universidade do Texas em Austin, U.S.A. A Figura 40 mostra as características geométricas e mecânicas das duas estruturas e respectivos carregamentos.



(c) Seção transversal típica

PROPRIEDADES	PÓRTICO L 3		PÓRTICO F 4	
	COLUNAS	VIGAS	COLUNAS	VIGAS
B (in)	6,059	6,081	6,0	6,0
H (in)	4,046	3,183	4,0	4,0
$d' / H$	0,1792	0,2618	0,2	0,2
PERCENTAGEM DE ARMACÃO - Pt	0,0192	0,0800	0,0183	0,0667
fck (psi)	3200	3200	3240	3240
fyk (ksi)	56,4	58,5	54,0	54,0
$E_s (10^3 \text{ ksi})$	29,3	29,3	28,5	28,5

FIG. 40

Em ambos os pórticos as cargas aplicadas são incrementadas até o limite de resistência dos quadros. No pórtico L3 o incremento é dado mantendo-se fixa a relação entre P e H, conforme indica a Figura 40. Para o pórtico F4 o valor de  $\alpha$  (Figura 40) é mantido constante ao longo de toda a análise. Adotamos como valores iniciais do carregamento: para o quadro L3:  $P = 4$  kips e  $H = 40$  lb; para o quadro F4:  $P = 10$  kips.

Sem que Gunnin tivesse dado qualquer referência quanto ao tipo de discretização adotada em seu programa, optamos no estudo através do programa ANALEC pela seguinte: para o pórtico L3 subdividimos cada um de seus membros em 3 elementos de igual comprimento; já o pórtico F4 teve suas colunas divididas em dois elementos iguais e as vigas em três.

Apresentamos na Figura 41 um gráfico carga x flecha contendo as curvas-resultado das três análises experimental, de Gunnin e de ANALEC.

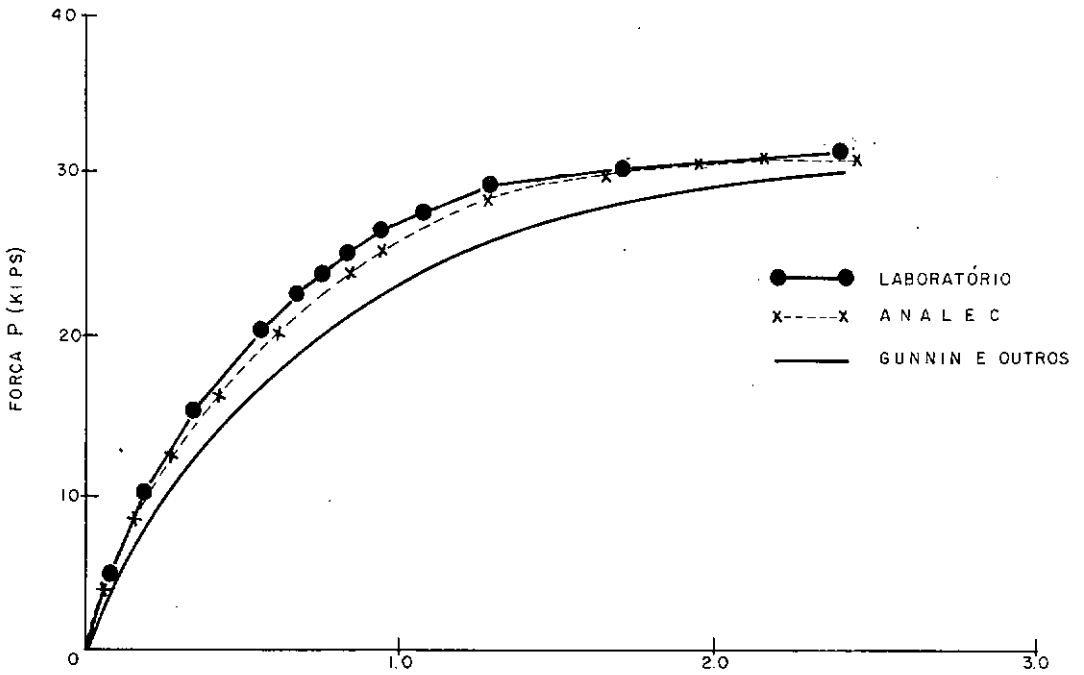


fig. 41a-DESLOCAMENTO HORIZONTAL NO TOPO DAS COLUNAS (in.)

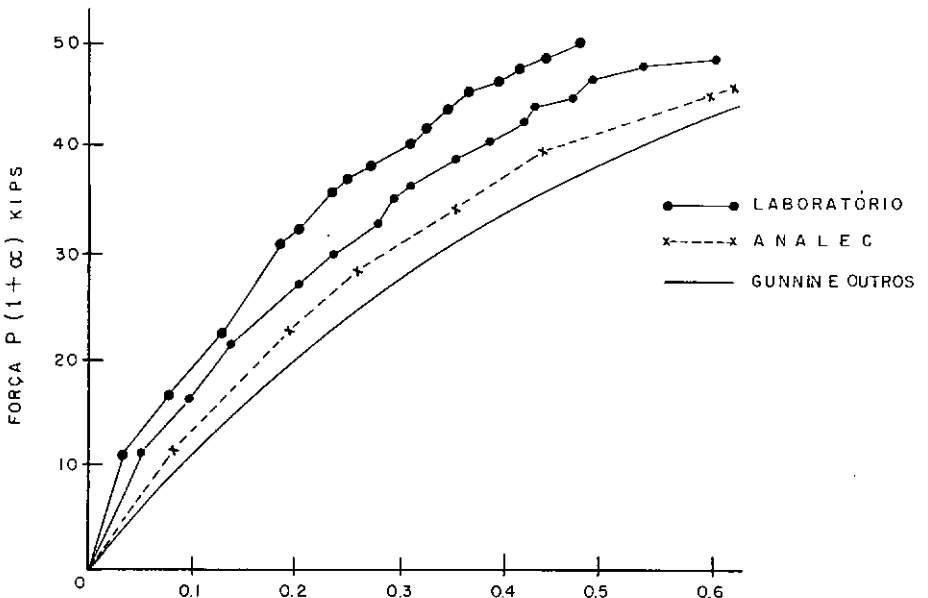


fig. 41a - DESLOCAMENTO HORIZONTAL DO MEIO DA COLUNA (in)



É interessante ressaltar que, no caso do pórtico F4, os resultados de laboratório mostraram comportamentos distintos para as colunas. No entanto, tanto Gunnin como o programa ANALEC indicaram comportamentos idênticos para ambas. (no caso de ANALEC houve uma pequena diferença, menor que 0,1%, que podemos atribuir aos processos numéricos envolvidos no programa). Este tipo de diferença, detetada em laboratório e não verificada na análise computacional, cremos poder justificar através da quase impossibilidade de se executar um modelo experimental perfeitamente simétrico, ao passo que tal é possível numa análise teórica.

O quadro abaixo mostra um resumo dos valores máximos de carga e flecha obtidos pelas três análises aqui citadas. Além disto, tomando por base os valores de laboratório indica as variações porcentuais apresentadas pelas análises de Gunnin e de ANALEC para a carga máxima.

Quadro	Autor	Universidade do Texas	Gunnin e outros	ANALEC
L3	H (kips)	31,7	30,5	31,4
	Variação (%)	-	-3,8%	-0,9%
	a (in)	2,40*	2,32*	2,17
F4	P(1+ $\alpha$ ) (kips)	52,5	44,9	46,6
	Variação (%)	-	-14,5%	-11,2%
	a (in)	0,60*	0,59*	0,62

\* Valores obtidos graficamente

Do quadro acima depreende-se que tanto o método de Gunnin quanto o programa ANALEC obtiveram melhores resultados para o pórtico L3 que para o F4. Ressalte-se que ANALEC forneceu maior concordância com a análise experimental que Gunnin. Observamos também que ANALEC obteve, no caso do pórtico L3, para a carga máxima menor flecha, resultando numa estrutura mais rígida que a observada. O inverso se deu para o pórtico F4.

Em face de não haver maiores detalhes quanto aos ensaios não nos foi possível determinar o porque de uma diferença de acuidade de resultados entre os estudos dos pórticos L3 e F4 na comparação teórico-experimental.

#### IV.2. Exemplo 2

A partir do dimensionamento de uma coluna de seção retangular por um método aproximado preconizado pelo C.E.B.<sup>17</sup>, fazemos uma verificação de sua estabilidade através do programa ANALEC. Tal verificação teve por finalidade estabelecer uma comparação entre o método do C.E.B. e o deste estudo, averiguando a precisão do método aproximado.

A coluna estudada é apresentada na Figura 42. A verificação se fez através da pesquisa de sua capacidade de carga, para um carregamento composto por uma carga axial de compressão de 8000kN em seu topo e de dois momentos fletores,  $M_{Oy}$  e  $M_{Oz}$ , incrementados a partir de 2500kNm e 1000kNm, respectivamente, até o limite de ruptura da coluna.

Assim sendo, admitindo para  $M_{oy}$  e  $M_{oz}$  valores de 5000kNm e 2000kNm, respectivamente, dimensionamos a armadura longitudinal da peça de acordo com o método aproximado do C. E. B.<sup>17</sup>, obtendo  $A_s = 420\text{cm}^2$ .

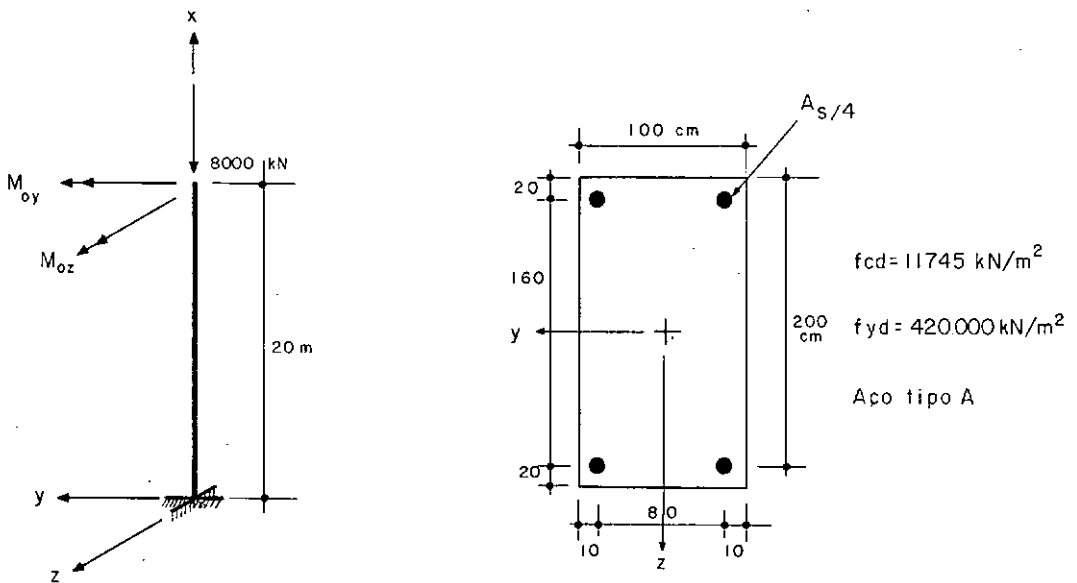


fig 42 - COLUNA SOB FLEZO-COMPRESSÃO OBLÍQUA

Uma vez obtida a armação, suposta, de acordo com o método, concentrada junto aos vértices da seção transversal da peça, submetemo-la a uma pesquisa de capacidade de carga com o uso do programa ANALEC. Para tanto fixamos a discretização da coluna em 5 elementos de igual comprimento e a da seção transversal em 225 elementos (15 faixas paralelas a cada lado).

Com os resultados do computador pudemos traçar o gráfico da Figura 43 que mostra a relação entre os momentos  $M_{oy}$  e  $M_{oz}$  e os respectivos deslocamentos ao longo do eixo z e do eixo y.

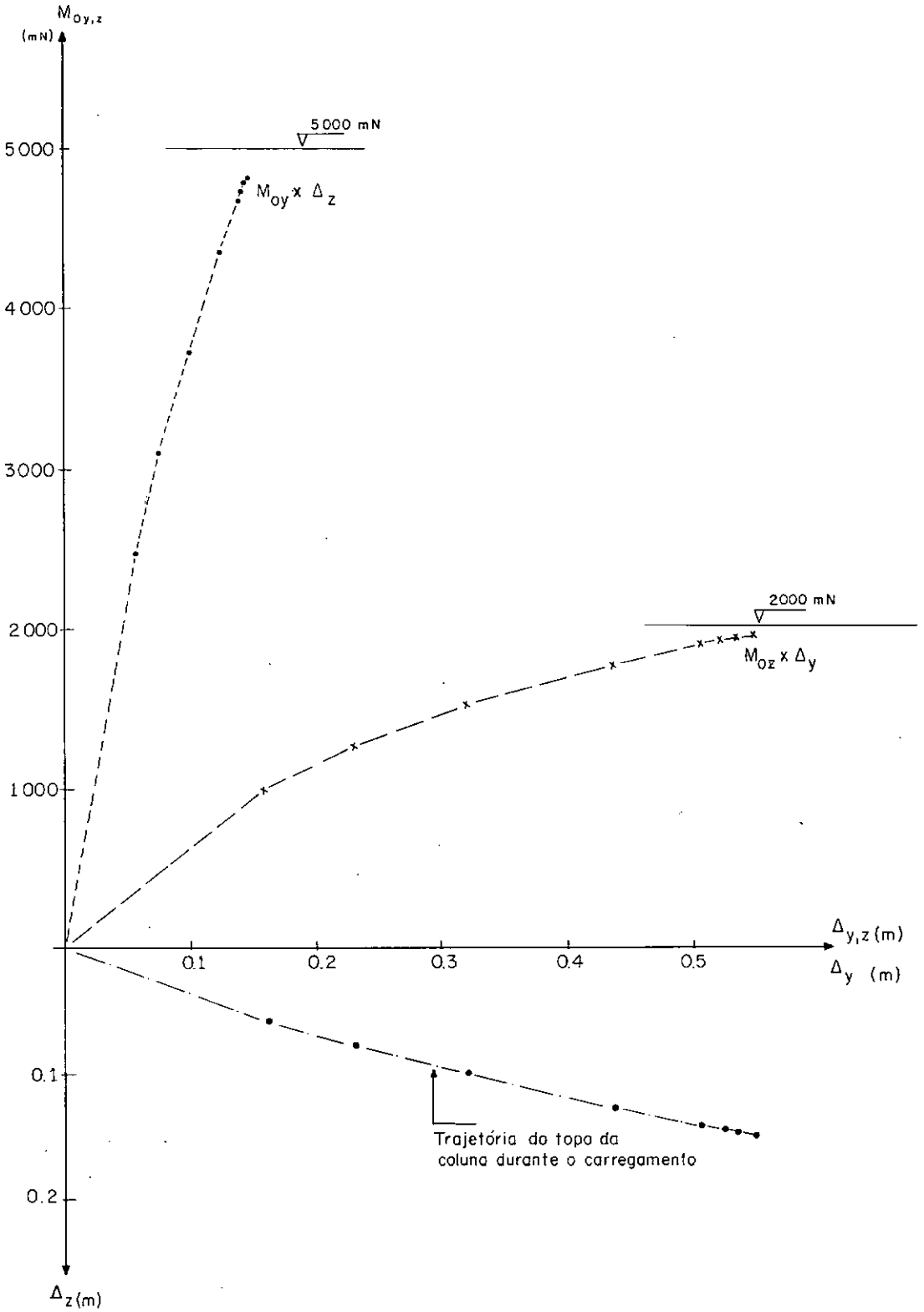


fig. 43

Como vemos o programa ANALEC acusou momentos máximos  $M_{oy} = 4850\text{kNm}$  e  $M_{oz} = 1940\text{kNm}$ , enquanto que os momentos de dimensionamento foram  $5000\text{kNm}$  e  $2000\text{kNm}$ , respectivamente. Desse resultados podemos depreender que o método aproximado do C. E. B. conduziu a resultados ligeiramente contra a segurança. No entanto, como o coeficiente de segurança global de uma estrutura (incluindo o das cargas e o dos materiais) gira em torno de um mínimo de 1,6, o erro do método do C.E.B. (3%) não chega a comprometer seus resultados. As considerações acima feitas, não são, evidentemente gerais, carecendo de uma pesquisa mais ampla para que tal possa ser dito.

Com o intuito de obtermos um retrato do comportamento da coluna ao longo do processo de carga, investigamos o comportamento da linha neutra para duas situações: a primeira, com determinação da sua posição a cada seção ao longo da coluna para o estado de equilíbrio de um dado estágio de carregamento; a segunda, sua posição ao longo do processo de carregamento para uma da seção. Desse modo traçamos o gráfico da Figura 44.

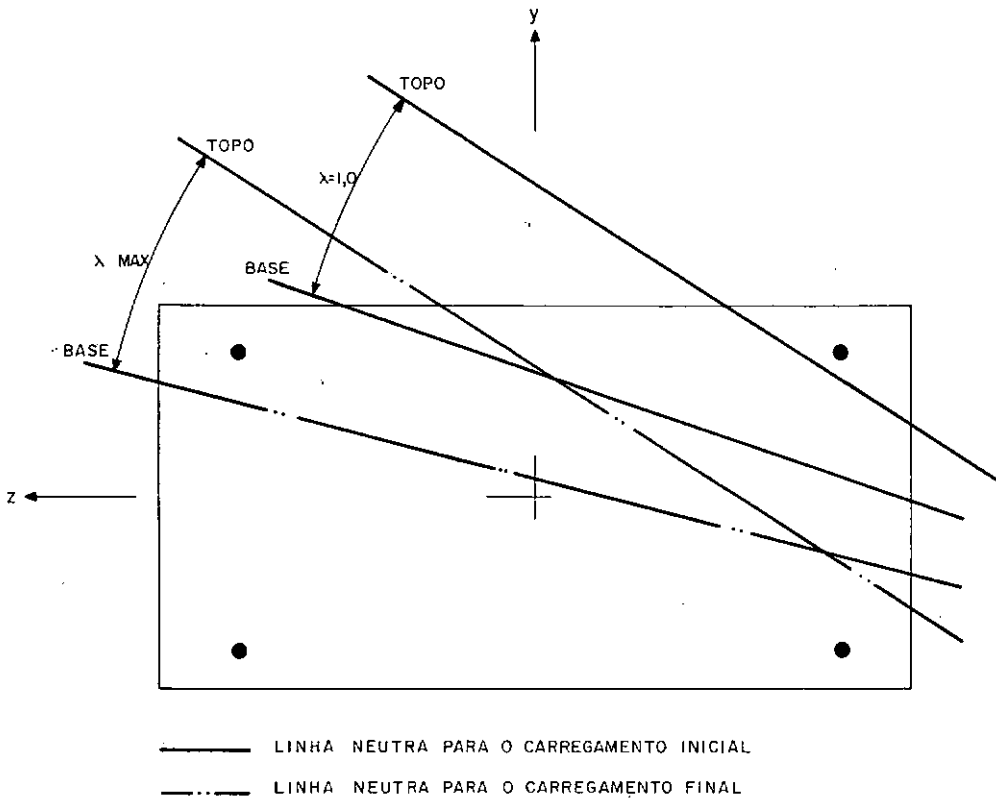


fig. 44

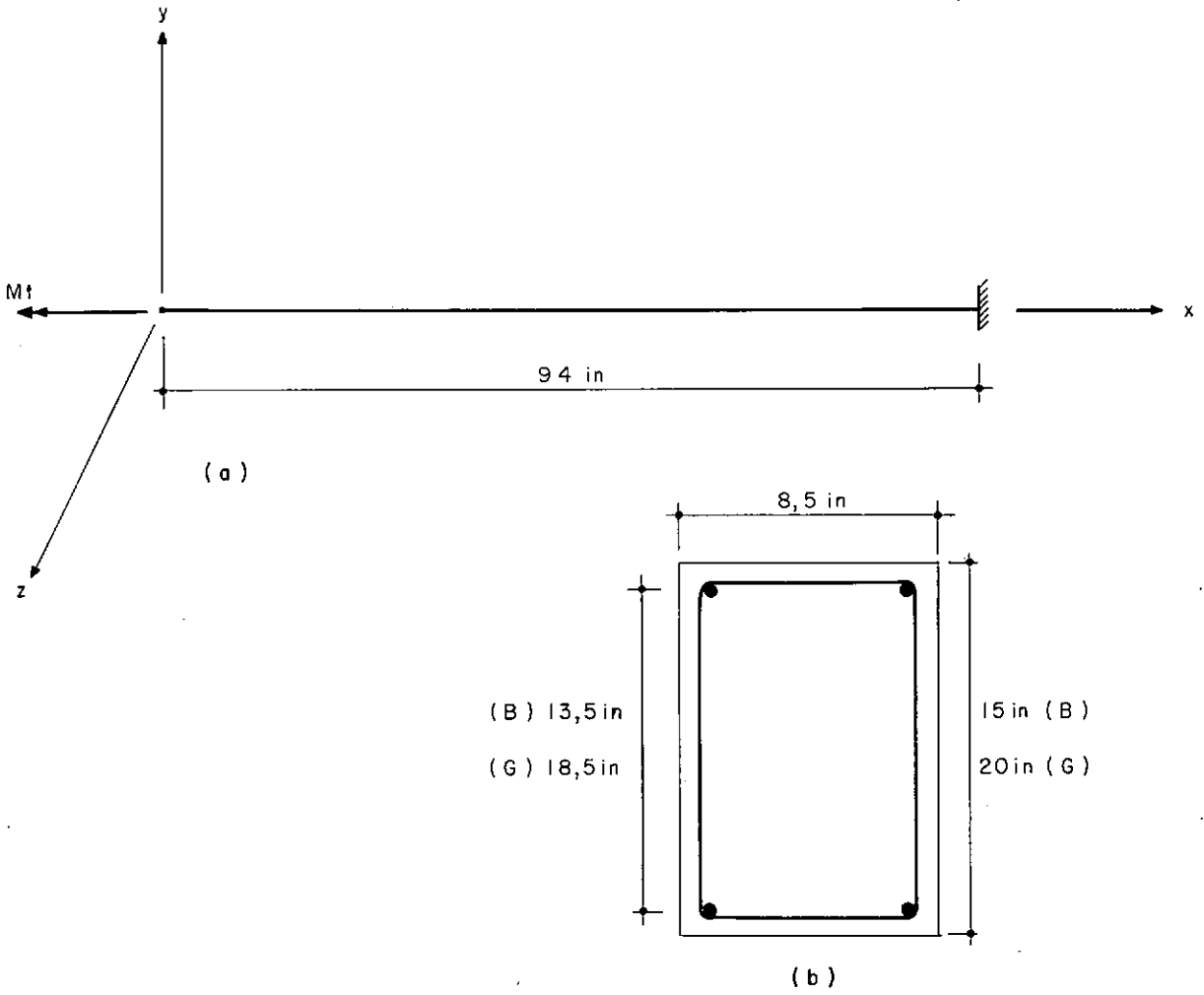
É interessante observar que o processo de deformação da coluna não se desenvolve dentro de um único plano (inclinado em relação aos eixos principais de inércia). Com isto, como se depreende da Figura 44, a posição de L.N. varia ao longo da coluna para um dado carregamento e, entre dois estágios de carga quaisquer. Tal fato deve-se à diferença de carga em cada eixo e à diferença de rigidez que a peça apresenta para cada uma das direções ( $y$  e  $z$ ) consideradas, entre qualquer seção ou fase de carga. Desse modo, a deformada da coluna é uma linha reversa, que varia de forma a cada passo de carga.

IV.3. Exemplo 3

Trataremos neste exemplo de peças de concreto armado solicitadas por torção pura, através da comparação de resultados de laboratório com os do programa ANALEC. Das séries de peças ensaiadas por THOMAS L. C. HSU<sup>5</sup> no laboratório da Universidade do Texas em Austin, E. U. A., escolhemos para apresentar neste trabalho as de nome  $B_1$ ,  $B_2$  e  $B_3$  (série B) e  $G_1$  e  $G_2$  (série G). A Figura 45 e o quadro que a acompanha indicam as características das peças estudadas.

Na análise através do programa ANALEC procuramos reproduzir as condições adotadas nos ensaios de HSU<sup>5</sup>. Assim, o momento torsor é aplicado numa das extremidades da peça, cuja rotação associada à torção (em torno do eixo longitudinal da peça) é liberada. Todos os demais deslocamentos generalizados das extremidades são considerados impedidos. Não foram considerados os efeitos do peso próprio da barra, em face de seu pequeno valor comparado com os momentos torçores solicitantes.

Com o uso de ANALEC pesquisamos a capacidade de carga de cada uma das peças indicadas na Figura 45, partindo-se de um momento torsor aplicado inicial de 40 in-kips.



$$p_s = \frac{A_s}{A_c} ; \quad p_e = \frac{A_e \cdot u_m}{S \cdot A_c} ; \quad m = \frac{p_s}{p_e} ; \quad p_t = p_s + p_e$$

PEÇA	f <sub>ck</sub> (psi)	f <sub>ctk</sub> (psi)	f <sub>yk</sub>		A <sub>s</sub>		A <sub>e</sub>		m	p <sub>t</sub> (%)
			Long.	Estribo	∅	p <sub>s</sub> (%)	∅	p <sub>e</sub> (%)		
B <sub>1</sub>	4 000	368*	45,5	49,5	4 # 4	0,534	# 3 c. 6"	0,537	1,0	1,07
B <sub>2</sub>	4 150	381	45,9	46,4	4 # 5	0,827	# 4 c. 7 1/8"	0,823	1,0	1,65
B <sub>3</sub>	4 070	374*	47,5	46,4	4 # 6	1,17	# 4 c. 5	1,17	1,0	2,34
G <sub>1</sub>	4 320	366	46,7	49,2	4 # 4	0,4	# 3 c. 7 3/8"	0,402	1,0	0,802
G <sub>2</sub>	4 480	406	46,8	48,4	4 # 5	0,62	# 3 c. 4 3/4"	0,626	0,99	1,25

(\*) CALCULADA PELA EXPRESSÃO DO ÍTEM 1.1.4.1 DO CAPÍTULO 1

FIG. 45



Com os resultados das análises em computador, traçamos os gráficos  $T \times d\theta_x/dx$ . Na Figura 46 apresentamos junto a esses gráficos os obtidos por Hsu em seus ensaios. Algumas observações importantes podem ser tiradas da Figura 46. Em primeiro lugar notamos a excelente concordância entre os valores dos momentos torsores últimos de ruptura teóricos (ANALEC) e experimentais (Hsu). No entretanto, o momento torsor de fissuração teórica mostra-se sempre inferior ao obtido por Hsu. Isto se deve, conforme o estabelecido na formulação teórica de ANALEC (item I.3, Capítulo I), a supormos que a fissuração da peça ocorra quando a máxima tensão principal de tração atinge a resistência à tração do concreto, enquanto que na realidade a presença da armação provoca um aumento do valor do momento torsor em que a fissuração ocorre. Após ocorrida a fissuração do concreto, o gráfico gerado por ANALEC apresenta-se retilíneo até a ruptura, enquanto que o obtido em laboratório após um trecho praticamente linear torna-se acentuadamente não-linear até o torsor último. Esta diferença de comportamento deve-se a termos, de acordo com LAMPERT<sup>6</sup>, adotado uma rigidez à torção constante após a fissuração (item II.2.2.2, Capítulo II), já que não nos é possível estabelecer uma lei de variação da rigidez genérica para qualquer peça.

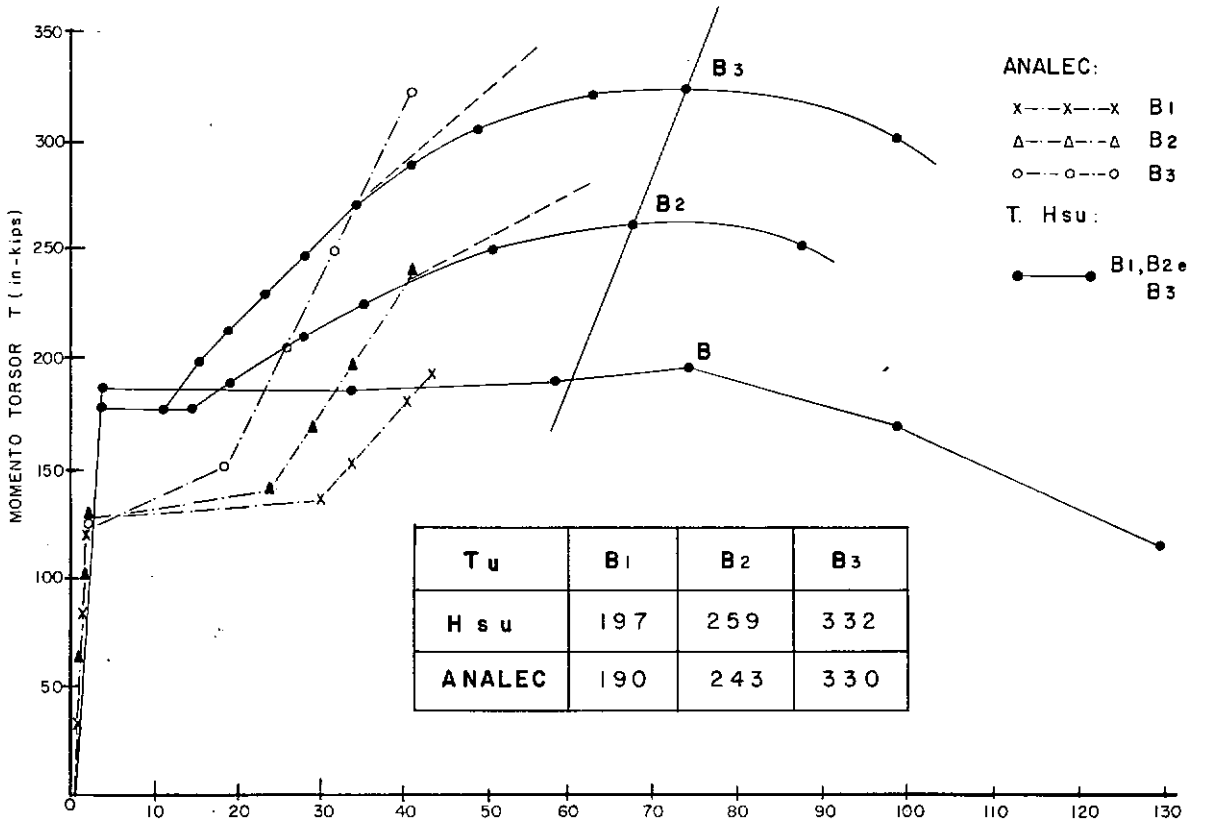


fig 46a - SÉRIE B

$\frac{d\theta_x}{dx} (10^{-3} \text{graus/in})$

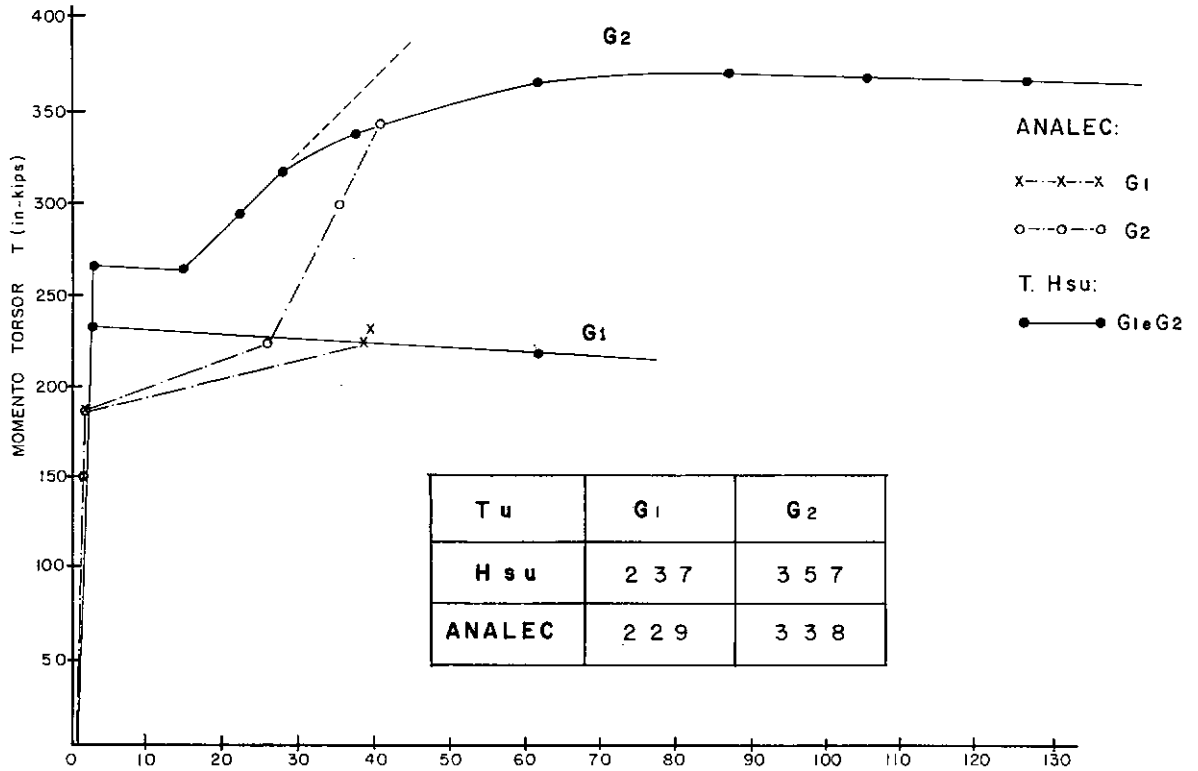


fig. 46b - SÉRIE G

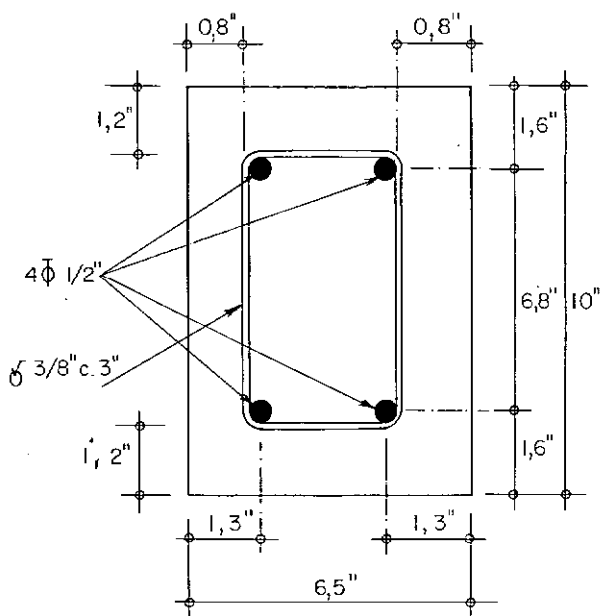
$\frac{d\theta_x}{dx} (10^{-3} \text{graus/in})$

Do exposto acima, podemos concluir que o programa ANALEC está apto a fornecer, com precisão satisfatória, o valor do torsor último de ruptura de uma peça de concreto armado solicitada por torção pura. No entanto em termos de rotação relativa  $d\theta_x/dx$ , apenas no trecho antes da fissuração seus valores concordam com os de laboratório. Após a fissuração, principalmente para solicitações próximas da de ruptura a rotação  $d\theta_x/dx$  estimada por ANALEC é bastante inferior à real, em virtude da rigidez constante adotada.

#### IV.4. Exemplo 4

Analisamos neste exemplo a eficiência do programa ANALEC no tratamento de estruturas de concreto armado submetidas a solicitações de torção combinadas com flexão.

Das peças ensaiadas por COLLINS e outros<sup>5</sup> na Universidade de New South Wales, Sidney, Austrália, escolhemos as de nome RE1 e RE2 (série RE) para efeito de verificação dos resultados fornecidos por ANALEC. Na Figura 47 fornecemos as características das peças e o carregamento a que estão submetidas.



$$f_{ylk} = 44,5 \text{ ksi}$$

$$f_{ysk} = 49,0 \text{ ksi}$$

$$f_{c28} = 4600 \text{ psi}$$

fig. 47 a

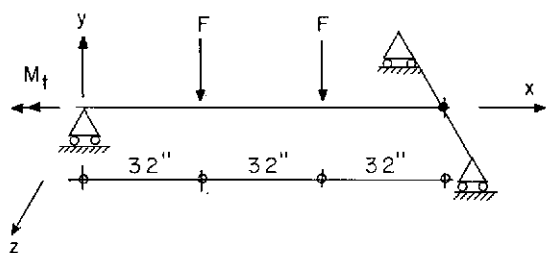


fig. 47 b

PEÇA	To (kips-in)	Fo (lb)
RE 1	40,7	98
RE 2	41,7	500

A Figura 47b mostra as restrições de apoio impostas à peça em laboratório e repetidas em ANALEC, isto é, apenas as rotações  $\theta_z$  do nó 1 e  $\theta_x$  e  $\theta_z$  do nó 4 são livres.

O fato do momento fletor solicitante ser gerado pela aplicação de duas cargas concentradas de igual intensidade a cada terço da peça obrigou a discretização da peça em três elementos com a criação de dois nós nos pontos de aplicação das forças, uma vez que o programa ANALEC só admite solicitações no-

dais nas estruturas analisadas. O momento torsor solicitante é aplicado no nó 4 (Figura 47b).

Obedecendo ao mesmo critério de carregamento das peças adotado por Collins, arbitramos valores de T e F (Figura 47b) tais que ao longo do processo de análise a relação  $T/M$ , onde M é o momento fletor máximo, seja mantida constante. Assim é que a partir das solicitações do quadro da Figura 47, T e F foram incrementados até serem atingidos seus valores que provocaram a ruptura da peça.

Collins apresenta em seu trabalho apenas os valores últimos das solicitações, não fazendo comentários quer sobre a fissuração quer sobre os deslocamentos sofridos pelas peças. Desse modo, no quadro abaixo, indicamos os momentos torsores de ruptura obtidos por ANALEC e por Collins. Apresentamos, também, o erro dos valores teóricos (ANALEC) em relação aos de laboratório.

Collins desenvolve em seu trabalho uma formulação teórica para estabelecer expressões que forneçam os torsores últimos baseada nas hipóteses de LESSIG<sup>5</sup>. Os valores fornecidos por esta teoria e seu erro em relação aos resultados experimentais também estão indicados no quadro abaixo, nas duas últimas colunas.

Peça	ANALEC		EXPERIMENTAL		$T_{ANALEC}$	COLLINS	$T_{COLLINS}$	T/M
	$T_u$	$M_u$	$T_u$	$M_u$	$T_{exp}$	$T_u$	$T_{exp}$	
RE1	79.2	6.1	81.4	6.3	0.97	94.0	0.87	12.9
RE2	77.7	29.8	83.4	32.0	0.93	87.8	0.95	2.61

$T_u \rightarrow$  kips-in;       $M_u \rightarrow$  kips-in

Da observação do quadro acima vemos que ANALEC fornece resultados bastante satisfatórios em relação aos de laboratório. Note-se que quanto às rotações por torção nada foi fornecido por Collins mas, baseados nos resultados obtidos na análise de peças submetidas à torção pura cremos que o mesmo tipo de comportamento deve ser concluído. Assim, os deslocamentos fornecidos por ANALEC para os valores últimos das solicitações devem ser encarados com reservas por serem bastante conservadores.

CAPÍTULOCAPÍTULO VCONCLUSÕES E SUGESTÕES

De acordo com o exposto neste trabalho podemos dividir as estruturas analisáveis pelo programa ANALEC em dois grupos: as que não são solicitadas por torção e as que o são.

Para as do primeiro grupo cremos poder concluir, tendo em vista os testes efetuados, que ANALEC está apto a analisar estruturas reticuladas planas ou espaciais de concreto armado que não apresentem solicitações de torção. Nestes casos o programa é capaz de fornecer resultados bastante próximos dos verificados nas estruturas reais como demonstram os exemplos 1 e 2 do Capítulo IV. Convém, no entanto, frisar que, como exposto no item III.5 do Capítulo III, o método de análise adotado em ANALEC sofre considerável influência da forma de discretizar tanto os elementos da estrutura como suas respectivas seções transversais. Assim sendo, especial atenção deve ser dada a este item na elaboração do modelo estrutural a ser submetido a ANALEC. Isto é importante na medida em que uma má discretização pode provocar prejuízo na qualidade dos resultados ou exigir tempo excessivo de processamento sem melhoria de precisão que o justifique.

Em todos os exemplos testados não foi encontrada nenhuma situação que restrinja a aplicabilidade do programa ANALEC, dentro dos tipos de estruturas e carregamentos para os quais ele foi elaborado.

Com relação às estruturas do segundo grupo, isto é, as solicitadas por esforços de torção, alguns comentários devem ser feitos quanto aos resultados obtidos.

De acordo com os capítulos I e II deste trabalho, as estruturas submetidas a torção são tratadas, por esta solicitação, segundo o modelo da treliça espacial. Este modelo admite o esgotamento da capacidade resistente de uma peça de concreto armado sob torção de três maneiras básicas distintas: por esmagamento de uma biela comprimida de concreto, por escoamento da armadura longitudinal ou da transversal (estribos). Contudo, para os exemplos testados ao longo da pesquisa pudemos verificar que se os limites impostos pelas armaduras da peça apresentaram-se coerentes com os resultados experimentais, o mesmo não aconteceu no caso de ruptura por esmagamento do concreto. Para as peças com baixa densidade de armação ( $p_s^*$  e  $p_e^* < 1\%$ ) submetidas quer à torção pura quer combinada com flexão os limites impostos pelo modelo da treliça mostraram-se aceitáveis e coerentes com a prática (erro na faixa de 1,0 a 10,0%). Passando a analisar elementos em que pelo menos uma das armaduras tinha densidade maior que 1% ( $p_s$  ou  $p_e$ ), verificamos que os resultados começaram a apresentar distorção em relação aos de laboratório

---

\* de acordo com convenção do item II.2.2.2.2.



rio.

Em primeiro lugar o ângulo  $\alpha$  de inclinação das bielas de concreto; assumido como  $45^\circ$  (ver Capítulo I), tornou-se não aconselhável. Em segundo lugar, o momento torsor último por esmagamento do concreto começou a perder precisão, tornando-se sistematicamente pessimista com o aumento de  $p_s$  e/ou  $p_e$ .

No que diz respeito ao ângulo  $\alpha$ , diversos testes com o programa ANALEC foram feitos para pesquisar quais os valores que forneciam a melhor concordância de resultados com os obtidos por HSU<sup>5</sup> em seus ensaios. Desses testes pudemos extrair o seguinte critério para a fixação do ângulo  $\alpha$  a ser adotado:

- Quando apenas uma entre  $p_s$  e  $p_e$  é menor que 1%:

$$35^\circ < \alpha < 45^\circ$$

- Quando ambas são menores que 1%:

$$\alpha = 45^\circ$$

- Quando ambas são maiores que 1%:

$$45^\circ < \alpha < 60^\circ$$

A conclusão acima vem confirmar a faixa de variação de  $\alpha$  proposta pelo C.E.B.<sup>1</sup> ( $0,5 < \cotg \alpha < 2$ ) se bem que o mesmo não forneça nenhuma orientação quanto à forma de escolha do valor mais apropriado. Desse modo, pensamos que o critério aqui proposto pode servir como ponto de referência em análises de peças sob torção.

Quanto ao momento torsor último por esmagamento do con

creto (denominado no Capítulo I -  $T_{rd1}$ ) se o mesmo não chega a afetar os resultados das peças fracamente armadas ( $p_s$  e  $p_e < 1\%$ ) pois a ruptura se dá por escoamento das armaduras e para valores de solicitação bem baixos, o mesmo não ocorre em peças mais densamente armadas. Nestes casos  $T_{rd1}$  mostrou-se uma limitação excessivamente conservadora, conduzindo a uma subestimação da capacidade de carga do elemento, às vezes exagerada. Em diversos testes dentre os efetuados por ANALEC o erro, para menos, chegou aos 40%, isto é, o momento torsor último fornecido pelo programa foi tão somente 60% do encontrado em laboratório. Além disto a ruptura da peça acusada por ANALEC foi sistematicamente por esmagamento do concreto enquanto que na análise experimental quase sempre não o era. Mesmo nos casos em que tanto laboratório como ANALEC acusaram ruína pelo concreto este último, apresentou um erro no valor do momento torsor último de pelo menos 20%.

Tendo em vista as constatações acima feitas, para que fosse possível reproduzir através de ANALEC os ensaios de HSU utilizados no exemplo 3 e nos outros testes efetuados, o ângulo  $\alpha$  foi alterado dentro do critério acima exposto e a limitação por esmagamento do concreto foi eliminada nos casos em que a ruína da peça se dava por escoamento das armaduras. Com isto nos foi possível obter resultados que concordassem com os fornecidos pelos ensaios.

Ao longo dos exemplos estudados verificamos, também, que se utilizássemos para a tensão admissível no concreto, na expressão (I.17), o valor  $0,8f_{ccd}$  e não  $0,5f_{ccd}$ , como feito, ob

teríamos melhor concordância com os ensaios. Podemos concluir assim que as tensões secundárias que surgem no concreto e que o modelo da treliça não fornece diretamente, assumiram, para os testes efetuados, valores bem inferiores aos estimados para a fixação do limite de  $0.5f_{ccd}$  para a tensão do concreto. Não podemos, no entanto, generalizar a conclusão acima afirmando que o limite sugerido pelo C.E.B. seja pessimista para todo o tipo de peça. Constatamos tão somente que no caso dos ensaios analisados tal fato ocorreu. Desse modo optamos por conservar no programa ANALEC a limitação da capacidade resistente de uma peça de concreto armado por esmagamento de uma biela de concreto tal qual apresentada no Capítulo I. Assim, se bem que fornecendo resultados conservadores para determinados casos, garantimos que ANALEC estará sempre a favor da segurança principalmente se levarmos em conta a incerteza sobre o valor das tensões secundárias no concreto.

Ressaltamos, ainda, que no caso de estruturas solicitadas por uma combinação de torção com esforços no espaço (fora dos eixos principais de inércia de uma qualquer seção transversal) os resultados de ANALEC carecem de comprovação experimental devido à total ausência de ensaios neste campo. Cumpramos fazer notar que a formulação teórica adotada para estes casos mostra-se consistente com a desenvolvida para os casos de solicitações no plano, conforme apresentado no Capítulo I.

De um modo geral cremos que uma pesquisa mais aprofundada e abrangente deva ser feita no sentido de generalizar as conclusões acima formuladas quanto ao problema da torção.

Em face das limitações impostas ao campo de aplicação de ANALEC, principalmente devido a ainda restrita generalidade dos resultados das pesquisas no campo da torção, encaramos este trabalho como uma primeira tentativa de tratamento de estruturas reticuladas espaciais de concreto armado considerando a não-linearidade geométrica da estrutura e física dos materiais. Muito há, ainda, para ser feito no sentido de ampliar o campo de utilização do programa ANALEC. Nesse sentido apresentamos algumas sugestões para o aprimoramento deste trabalho:

a) Estudo do comportamento da estrutura sob cargas de longa duração:

O programa ANALEC restringe-se apenas à análise de estruturas sob carregamentos de curta duração. Pode-se, portanto, estudar tais estruturas em face do comportamento reológico do concreto sob cargas de longa duração.

b) Análise da torção combinada ou não com outros esforços:

No campo da torção é onde nos parece haver a maior lacuna nas pesquisas até agora desenvolvidas. Mesmo os modelos de maior aceitação entre os estudiosos do assunto mostram-se ainda bastante restritivos. Dentro deste tema, diversas áreas de pesquisa apresentam-se para estudo:

b.1) Aperfeiçoamento do processo de análise adotado em ANALEC no sentido de apurar sua precisão e capacidade de reprodução do comportamento real da peça. Isto, em face, principalmente, da incapacidade da formulação adotada em ANALEC de fornecer as deformações devidas à torção, de obter o valor do

momento torsor de fissuração da peça e de fazer variar a rigidez à torção após a fissuração, conforme já demonstraram os ensaios.

b.2) Generalização do modelo adotado a fim de estendê-lo a formas de seção transversal mais gerais.

Note-se que no caso de seções assimétricas, caso o carregamento não coincida com o centro de cisalhamento das mesmas, um efeito de torção no elemento surgirá e deverá ser considerado na análise da estabilidade do mesmo.

b.3) Desenvolvimento de uma pesquisa teórico-experimental para investigação de peças submetidas à torção combinadas com flexão e esforço normal no espaço. Esta é a área de estudo mais carente em face da tendência natural de todos os pesquisadores e projetistas de buscarem analisar estruturas contidas e solicitadas em um plano. Em nossa pesquisa não nos foi possível encontrar uma única referência bibliográfica a respeito de tal assunto.

b.4) Estudo de interação torção-flexão quanto aos seus efeitos nas respectivas rigidezes.

Conforme comentamos no Capítulo II, para seções assimétricas haverá uma interação entre as rigidezes à torção e à flexão que deve ser considerada.

c) Dimensionamento de estruturas:

O programa ANALEC poderia ser adaptado para efetuar o dimensionamento de armaduras dos elementos da estrutura por um processo de tentativas.

Necessário seria fixar "a priori" as dimensões da seção transversal de cada elemento e a distribuição a ser adotada na armadura.

Atenção deverá ser dada quanto ao fator tempo de processamento numa adaptação desse tipo.

d) Elementos de eixo curvo e inércia variável:

Métodos numéricos de resolução de tais tipos de elementos poderiam ser implementados.

e) Concreto Protendido:

De acordo com sugestão apresentada por TELLES<sup>10</sup> em seu trabalho, cremos que o programa ANALEC poderia também ser estendido para a análise de estruturas de concreto protendido, mediante a consideração dos diagramas tensão deformação dos aços C.P. e do pré-alongamento fornecido como dado ao programa.

Note-se que os efeitos do esforço normal de protensão não constituem um campo conservativo de carregamento como os carregamentos externos.

f) Aperfeiçoamento do algoritmo utilizado em ANALEC:

Testes no sentido de verificar a melhoria de eficiência do programa ANALEC poderiam ser feitas com a utilização do método de Newton-Raphson modificado ou outros semelhantes.

APÊNDICE AMANUAL DE ENTRADA DE DADOS DO PROGRAMA ANALECA.1. Dados Gerais da Estrutura

- um cartão com: nº de elementos, nº de nós, nº de restrições de apoio, nº de nós com restrições, nº de elementos com liberações de vínculos, nº de apoios elásticos, índice de tipo de estrutura. (ITIPES)
- formato: 7I10
- convenção: ITIPES=0 - estrutura espacial  
ITIPES=1 - estrutura plana

A.2. Títulos Gerais da Estrutura

- 3 cartões com: títulos a critério do usuário
- formato: coluna 16a 72 inclusive

A.3. Coordenadas dos Nós

- nº de cartões igual ao nº de nós com: nº de nós, coordenada X, coordenada Y, coordenada Z.
- formato: I5, 3F10.0

#### A.4. Características dos Materiais da Estrutura

- um cartão com:  $f_{yk}$ , coeficiente de minoração do aço, ITIP, módulo de elasticidade do aço,  $f_{cck}$ , coeficiente de minoração do concreto,  $f_{ctk}$ , módulo de elasticidade do concreto.
- formato: 2F10.0, I10, 5F10.0
- convenção: ITIP=0 - aço tipo A  
ITIP=1 - aço tipo B
- Obs.: quando na estrutura não houver solicitações de torção, omitir as 2 últimas variáveis.

#### A.5. Incidências e propriedades dos elementos

- nº de conjunto de cartões igual ao nº de elementos da estrutura, cada conjunto com:

##### A.5.1. Incidência do Elemento e Tipo de Seção Transversal

- um cartão com: nº do elemento, nº do nó inicial, nº do nó final, índice do tipo de seção (ITS)

- formato: 4I5

- convenção: ITS=1 - seção retangular maciça  
ITS=2 - seção retangular vazada

##### A.5.2. Características da Seção Transversal

De acordo com o valor de ITS:

###### A.5.2.1. Seção Retangular Maciça:

- 1º cartão com: lado B da seção, lado H da seção, recobrimento das barras de aço do longo



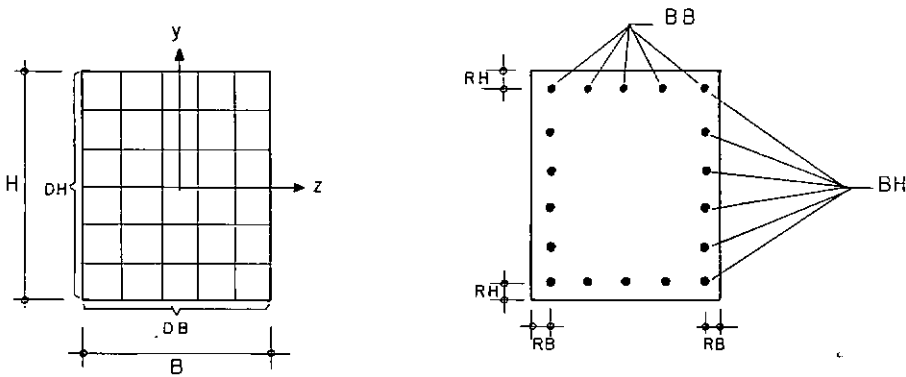
do lado H(RB), recobrimento ao longo de B(RH), nº de faixas da divisão da seção ao longo de B(DB), nº de faixas ao longo de H(DH)

- 2º cartão com: nº de barras de aço ao longo do lado B da seção (BB), nº de camadas de barras ao longo do lado H da seção (BH), valor da área de cada barra, densidade de estribos por unidade de comprimento (DEST), ângulo de inclinação da biela de concreto com o eixo longitudinal da peça (ALFA)

- formato: 1º cartão: 4F10.0, 2I5

2º cartão: 2I5, 3F10.0

- convenção:



$$DEST = \frac{A_e}{S} = \frac{\text{área da seção transversal de uma perna de estribo}}{\text{espaçamento entre estribos}}$$

- Obs.: quando no elemento não houver solicitações de torção, omitir o valor de DEST.

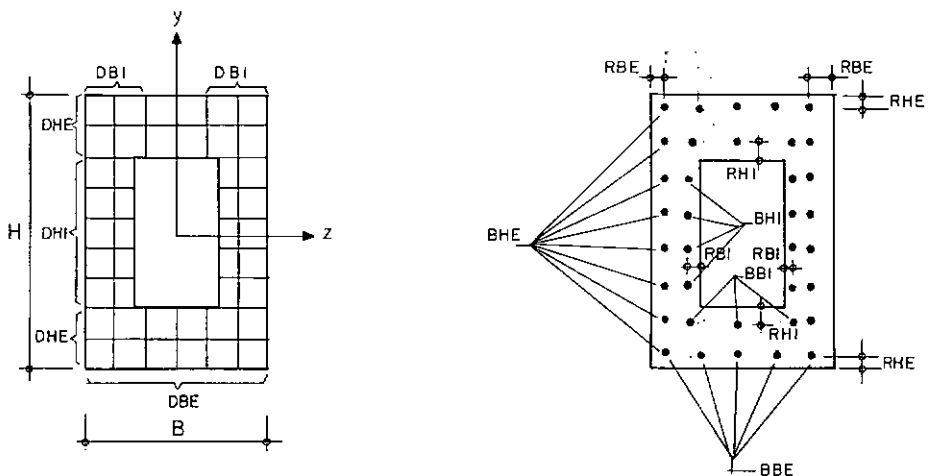
O ângulo ALFA deve ser fornecido em radianos quando diferente de  $45^\circ$  e apenas para os elementos solicitados por torção.

O 1º cartão poderá ser omitido quando se desejar usar

a discretização interna do programa.

#### A.5.2.2. Seção Retangular Vazada:

- 1º cartão com: lado B da seção, lado H da seção, dimensão interna BI, dimensão interna HI, recobrimento das barras de aço ao longo do lado H(RBE), recobrimento ao longo de B (RHE), recobrimento ao longo de HI(RBI), recobrimento ao longo de BI(RHI), nº de faixas de divisão ao longo de B(DBE), nº de faixas de divisão da parede de B(DHE), nº de faixas da parede de H(DBI), nº de faixas ao longo de HI(DHI).
- 2º cartão com: nº de barras de aço ao longo do lado B da seção (BBE), nº de camadas de barras ao longo do lado H(BHE), nº de barras ao longo de BI(BBI), nº de barras ao longo de HI(BHI), valor da área de cada barra, densidade de estribos por unidade de comprimento (DEST) ângulo de inclinação das bielas de concreto com o eixo longitudinal da peça (ALFA)
- formato: 1º cartão: 8F5.0, 4I5  
2º cartão: 4I5, 3F10.0
- convenção:



$$DEST = \frac{A}{S} e \quad (\text{ver item A.5.2.1})$$

Obs.: ver observações do item A.5.2.1.

#### A.6. Liberações de vínculos dos elementos

- nº de cartões igual ao nº de elementos com liberações, com: nº de elemento, índice de liberação de vínculo para cada uma das ligações possíveis (LIB(J))
- formato: 13I5
- convenção: LIB(J)=1 - vínculo liberado  
LIB(J)=0 - vínculo não liberado
- obs.: quando não existirem liberações este item deve ser omitido.

#### A.7. Restrições Rígidas de Apoio

- nº de cartões igual ao nº de nós com restrições com: nº de nó, índice de restrição de apoio para cada uma das direções possíveis (RL(J))

- formato: I5,6I10
- convenção: RL(J)=1 - restrição existente  
RL(J)=0 - restrição não existente  
J=1,6

#### A.8. Restrições Elásticas de Apoio

- nº de cartões igual ao nº de nós com restrições, com:  
nº de nó, valor da rigidez elástica a cada um dos  
seis deslocamentos possíveis do nó
- formato: I5,6F10.0

#### A.9. Análise de Carregamento

- um cartão com: nº de análises a serem feitas, tolerância na convergência
- formato: I10, F10.0

#### A.10. Título da Análise

- um cartão com: título a critério do usuário
- formato: colunas 16 a 72 inclusive.

#### A.11. Dados gerais do carregamento

- um cartão com: nº de nós carregados, coeficiente de majoração das cargas, nº de nós com cargas variáveis, erro admissível no valor da carga máxima, índice de for

ma de impressão dos resultados (IMP),  
 valor do incremento no valor de  $\lambda$ .  
 (DLAMB)

- formato: 3(I10, F10.0)
- convenção: IMP=0 - impressão apenas dos resultados finais de cada etapa  
 IMP=1 - impressão dos resultados de cada iteração dentro de cada etapa de cálculo.

- Obs.: no caso de análise de um carregamento constante, as 4 últimas variáveis devem ser omitidas, exceção feita a IMP, segundo o critério acima. Caso DLAMB não seja fornecido será suposto, por ANALEC, igual a 0,25.

#### A.12. Carregamento nodal

- nº de cartões igual ao número de nós carregados, com:  
 nº de nó, força X, força Y, força Z, momento X, momento Y, momento Z.
- formato: I5, 6F10.0
- Obs.: o sistema de referência deverá ser o global da

estrutura.

#### A.13. Definição das Cargas Variáveis

- nº de cartões igual ao nº de nós com cargas variáveis, com: nº de nó, índice da carga variável  
 (INV(J))
- formato: 7I5

- convenção:  $INV(J)=1$  - carga variável
- $INV(J)=0$  - carga constante
- $J=1,6$

#### A.14. Cartão FLAG

Como o programa ANALEC não restringe o número de estruturas possíveis de serem analisadas, basta, uma vez terminados os dados de uma, iniciar a definição de outra estrutura. Desse modo, para indicar que não há outra estrutura a analisar devemos colocar após a massa de dados um cartão em branco.

APÊNDICE B

LISTAGEM DO PROGRAMA ANALEC

```
      SUBROUTINE COORD(I)
C.....CALCULA AS COORDENADAS DOS NOS E OS COSSENOS DIRETORES DOS
MEMBROS
      REAL L
      COMMON /BLOCO 3/ X(60),Y(60),Z(60),L(60)
      COMMON /BLOCO 4/ JJ(60),JK(60),CX(60),CY(60),CZ(60),R(60,9)
      JJI=JJ(I)
      JKI=JK(I)
      XCL=X(JKI)-X(JJI)
      YCL=Y(JKI)-Y(JJI)
      ZCL=Z(JKI)-Z(JJI)
      L(I)=SQRT(XCL*XCL+YCL*YCL+ZCL*ZCL)
      CX(I)=XCL/L(I)
      CY(I)=YCL/L(I)
      CZ(I)=ZCL/L(I)
      RETURN
      END
```



```

SUBROUTINE PROSR(B,H,RB,RH,DB,DH,BB,BH,I)
C.....CALCULA AS PROPRIEDADES DA SECAO PRANSVERSAL DO ELEMENTO I
  INTEGER DB,DH,BB,BH,TDC
  COMMON /BLOC01/ ZC(60,300),YYC(60,300),ZZA(60,200),
  *YYA(60,200),Q(6),TDC(60)
  COMMON /BLOC02/ DAA(60),DAC(60,2),ZCG(60),YCG(60),
  *NB(60),MDAC
  COMMON /BLOC06/ WY(60),WZ(60),AREA(60)
  DZC=B/DB
  DYC=H/DH
  DO 1 IE=1,DH
  DO 1 JE=1,DB
  K=JE+(IE-1)*DB
  ZC(I,K)=(JE-1./2.)*DZC-B/2.
1 YYC(I,K)=(IE-1./2.)*DYC-H/2.
  WY(I)=H*B*B/6.
  WZ(I)=B*H*H/6.
  AREA(I)=B*H
  TDC(I)=DB*DH
  DAC(I,1)=AREA(I)/TDC(I)
  ZCG(I)=B/2.
  YCG(I)=H/2.
C.....COORDENADAS DAS BARRAS
  NB(I)=2*(BB+BH-2)
  DZA=(B-2.*RB)/(BB-1)
  DYA=(H-2.*RH)/(BH-1)
-----
11 DO 2 IE=1,BH
  IF(IE-1)3,3,4
  4 IF(IE-BH)5,3,3
  5 K=BB+2*IE-3
  ZZA(I,K)=RB-B/2.
  ZZA(I,K+1)=-ZZA(I,K)
  YYA(I,K)=(IE-1)*DYA+RH-H/2.
  YYA(I,K+1)=YYA(I,K)
  GO TO 2
  3 DO 6 JE=1,BB
  IF(IE-1)7,7,8
  7 K=JE
  GO TO 9
  8 K=JE+BB+2*(IE-2)
  9 ZZA(I,K)=(JE-1)*DZA+RB-B/2.
  YYA(I,K)=(IE-1)*DYA+RH-H/2.
  6 CONTINUE
  2 CONTINUE
  RETURN
  END

```

```

SUBROUTINE SEVAZ(B,H,BI,HI,RBE,RHE,RBI,RHI,DBE,DHE,DBI,DHI,
*BBE,BHE,BBI,BHI,I)
INTEGER DBI,DBE,DHI,DHE,BBI,BHE,BBE,BHI,TDC
COMMON /BLOC01/ ZZC(60,300),YYC(60,300),ZZA(60,200),
*YYA(60,200),Q(6),TDC(60)
COMMON /BLOC02/ DAA(60),DAC(60,2),ZCG(60),YCG(60),
*NB(60),MDAC
COMMON /BLOC06/ WY(60),WZ(60),AREA(60)
C.....CALCULA AS PROPRIEDADES GEOMETRICAS DA SECAO VAZADA
C.....DADOS DOS ELEMENTOS DE CONCRETO
DZC=B/DBE
DH=2.*DHE
DYC=(H-HI)/DH
DAC(I,1)=DZC*DYC
MDAC=DBE*DH
DO 1 IE=1,DH
DO 1 JE=1,DBE
K=JE+(IE-1)*DBE
ZZC(I,K)=(JE-1./2.)*DZC-B/2.
YYC(I,K)=(IE-1./2.)*DYC-H/2.
IF(K.GT.MDAC/2.) YYC(I,K)=YYC(I,K)+HI
1 CONTINUE
DB=2.*DBI
DZC=(B-BI)/DB
DYC=HI/DHI
DAC(I,2)=DZC*DYC
EH=(H-HI)/2.
DO 2 IE=1,DHI
DO 2 JE=1,DB
K=MDAC+JE+(IE-1)*DB
ZZC(I,K)=(JE-1./2.)*DZC-B/2.
YYC(I,K)=(IE-1./2.)*DYC-H/2.+EH
IF(JE.GT.DB) ZZC(I,K)=ZZC(I,K)+BI
2 CONTINUE
ZCG(I)=B/2.
YCG(I)=H/2.
TDC(I)=2*(DBE*DHE+DBI*DHI)
WY(I)=(H*(B**3)-HI*(BI**3))/(12.*ZCG(I))
WZ(I)=(B*(H**3)-BI*(HI**3))/(12.*YCG(I))
AREA(I)=B*H-BI*HI
C.....DADOS DOS ELEMENTOS DE ACO
DZA=(B-2.*RBE)/(BBE-1)
DYA=(H-2.*RHE)/(BHE-1)
DO 3 IE=1,BHE
IF(IE.LE.1) GO TO 4
IF(IE.GE.BHE) GO TO 4
K=BBE+2*IE-3
ZZA(I,K)=RBE-B/2.
ZZA(I,K+1)=-ZZA(I,K)
YYA(I,K)=(IE-1)*DYA+RHE-H/2.
YYA(I,K+1)=YYA(I,K)
GO TO 3
4 DO 5 JE=1,BBE

```

```

IF(IE-1) 6,6,7
6 K=JE
GO TO 8
7 K=JE+BBE+2*(IE-2)
8 ZZA(I,K)=(JE-1)*DZA+RBE-B/2.
YYA(I,K)=(IE-1)*DYA+RHE-H/2.
5 CONTINUE
3 CONTINUE
NBE=2*(BBE+BHE-2)
NB(I)=NBE+2*(BBI+BHI-2)
IF(BBI.EQ.0) GO TO 9
DZA=(BI+2.*RBI)/(BBI-1)
DYA=(HI+2.*RHI)/(BHI-1)
DO 10 IE=1,BHI
IF(IE.LE.1) GO TO 11
IF(IE.GE.BHI) GO TO 11
K=NBE+BBI+2*IE-3
ZZA(I,K)=-RBI-BI/2.
ZZA(I,K+1)=-ZZA(I,K)
YYA(I,K)=(IE-1)*DYA-RHI-HI/2.
YYA(I,K+1)=YYA(I,K)
GO TO 10
11 DO 12 JE=1,BBI
IF(IE-1) 13,13,14
13 K=NBE+JE
GO TO 15
14 K=NBE+JE+BBI+2*(IE-2)
15 ZZA(I,K)=(JE-1)*DZA-RBI-BI/2.
YYA(I,K)=(IE-1)*DYA-RHI-HI/2.
12 CONTINUE
10 CONTINUE
9 RETURN
END

```

```

SUBROUTINE RITOR (I,B,H,RBE,RHE,BI,HI,ITS,ECO,EAC,FYD,DEST)
C*****CALCULA OS PARAMETROS DA RIGIDEZ A TORCAO DOS ELEMENTOS
REAL IT
COMMON /BLOCO2/ DAA(60),DAC(60,2),ZCG(60),YCG(60),
*NB(60),MDAC
COMMON /BLOCO6/ WY(60),WZ(60),AREA(60)
COMMON /BLOCO7/ GIT(60,2),AM(60),TRD(60),CTY(60),CTZ(60),
*COY(60),COZ(60),GIP(60),TL(60)
COMMON /BLOCO8/ FCTK,GS,FCCD,ALFA
BS=B-2.*RBE
HS=H-2.*RHE
UM=2.*(BS+HS)
AM(I)=BS*HS
IF(ECO.EQ.0.) ECO=EAC/7.
IF(BS.LT.HS) GO TO 1
HM=HS/6.
GO TO 2
1 HM=BS/6.
2 GO TO (3,4), ITS
4 EB=(B-BI)/2.
EH=(H-HI)/2.
IF(EH.GT.EB) GO TO 5
IF(HM.GT.EH) HM=EH
GO TO 6
5 IF(HM.GT.EB) HM=EB
6 COY(I)=(B*H*H-BI*HI*HI)/(8.*WY(I)*B*EB)
COZ(I)=(H*B*B-HI*BI*BI)/(8.*WZ(I)*H*EH)
CTY(I)=1./(2.*EB*(H-EH)*(B-EB))
CTZ(I)=1./(2.*EH*(H-EH)*(B-EB))
IT=(2.*EB*EH*((B-EB)*(H-EH)**2))/(B*EB+H*EH-EB*EB-EH*EH)
GO TO 7
3 COY(I)=3./(2.*AREA(I))
COZ(I)=COY(I)
CTY(I)=(3.*H+1.8*B)/(B*B*H*H)
CTZ(I)=(3.*B+1.8*H)/(B*B*H*H)
IF(B-H) 8,8,9
8 A=H
C=B
GO TO 10
9 A=B
C=H
10 IT=A*C*C*C*(1./3.-.21*C*(1.-(C**4)/(12*(A**4))))/A)
7 GIT(I,1)=.3*ECO*IT
IF(FCTK.LE.0.) GO TO 11
DAL=UM/(NB(I)*DAA(I))
GIT(I,2)=(EAC*AM(I)*AM(I))/((UM*(1./DEST+DAL))/4.+(1.5*EAC*
*UM)/(ECO*HM))
TL(I)=.5*FCCD*AM(I)*HM*SIN(2.*ALFA)
TRD(I)=TL(I)
TK=2.*DEST*AM(I)*FYD/TAN(ALFA)
IF(TK.LT.TRD(I)) TRD(I)=TK
TK=2.*NB(I)*DAA(I)*AM(I)*FYD/(UM*TAN(ALFA))
IF(TK.LT.TRD(I)) TRD(I)=TK

```

148

11 RETURN  
END

```

SUBROUTINE FISSEC (I,NU,MYU,MZU,TU,QYU,QZU,RIGTOR)
C*****VERIFICA SE A SECAO ESTA FISSURADA E FORNECE A RIGIDEZ A
C*****TORCAO
  REAL N,MY,MZ,NU,MYU,MZU,KTOR
  COMMON /BLOCO2/ DAA(60),DAC(60,2),ZCG(60),YCG(60),
*NB(60),MDAC
  COMMON /BLOCO6/ WY(60),WZ(60),AREA(60)
  COMMON /BLOCO7/ GIT(60,2),AM(60),TRD(60),CTY(60),CTZ(60),
*COY(60),COZ(60),GIP(60),TL(60)
  COMMON /BLOCO8/ FCTK,GS,FCCD,ALFA
  DIMENSION SIGMA(4),TAU(4)
  N=NU/GS
  MY=MYU/GS
  MZ=MZU/GS
  T=TU/GS
  QY=QYU/GS
  QZ=QZU/GS
  SIGT=N/AREA(I)-ABS(MY)/WY(I)-ABS(MZ)/WZ(I)
  IF(SIGT) 1,2,2
1 IF(ABS(SIGT).GE.FCTK) GO TO 3
2 DO 7 IPONTO=1,4
  GO TO (5,5,6,6), IPONTO
5 SIGMA(IPONTO)=N/AREA(I)+((-1)**IPONTO)*MZ/WZ(I)
  TAU(IPONTO)=QZ*COZ(I)-((-1)**IPONTO)*T*CTZ(I)
  GO TO 7
6 SIGMA(IPONTO)=N/AREA(I)+((-1)**IPONTO)*MY/WY(I)
  TAU(IPONTO)=QY*COY(I)-((-1)**IPONTO)*T*CTY(I)
7 CONTINUE
  SIGMAI=0.
  DO 8 IPT=1,4
  SIGI=SIGMA(IPT)/2.-SQRT(SIGMA(IPT)*SIGMA(IPT)/4.+TAU(IPT)*
*TAU(IPT))
  IF(SIGI.LT.SIGMAI) SIGMAI=SIGI
8 CONTINUE
  IF(ABS(SIGMAI).GE.FCTK) GO TO 3
  RIGTOR=GIT(I,1)
  GO TO 9
3 RIGTOR=GIT(I,2)
9 RETURN
END

```

```

SUBROUTINE VALINI(I,FCD,EY1,EY2,EYD,ITIP,EAC,FYD,FY10)
C.....CALCULA OS VALORES INICIAIS DAS RIGEZAS
REAL NC,MYC,MZC,NO,MYO,MZO,L
INTEGER TDC
COMMON /BLOCO1/ ZZC(60,300),YYC(60,300),ZZA(60,200),
*YYA(60,200),Q(6),TDC(60)
COMMON /BLOCO2/ DAA(60),DAC(60,2),ZCG(60),YCG(60),
*NB(60),MDAC
COMMON /BLOCO 3/ X(60),Y(60),Z(60),L(60)
COMMON /BLOCO 5/ AMD(60,12),EA(60),EIY(60),EIZ(60),P(60)
IT=1
EG=1.E-10
CVZ=0.
CVY=0.
CALL FORCOC(FCD,EG,CVZ,CVY,MZC,MYC,NC,IT,RUT,I)
CALL FORACO(EY1,EY2,EYD,EG,CVZ,CVY,FCD,ITIP,EAC,FYD,FY10,
*MZO,MYO,NO,MZC,MYC,NC,RUT,IT,I)
EA(I)=NO/EG
CVZ=EG/YCG(I)
CALL FORCOC(FCD,EG,CVZ,CVY,MZC,MYC,NC,IT,RUT,I)
CALL FORACO(EY1,EY2,EYD,EG,CVZ,CVY,FCD,ITIP,EAC,FYD,FY10,
*MZO,MYO,NO,MZC,MYC,NC,RUT,IT,I)
EIZ(I)=MZO/CVZ
CVZ=0.
CVY=EG/ZCG(I)
CALL FORCOC(FCD,EG,CVZ,CVY,MZC,MYC,NC,IT,RUT,I)
CALL FORACO(EY1,EY2,EYD,EG,CVZ,CVY,FCD,ITIP,EAC,FYD,FY10,
*MZO,MYO,NO,MZC,MYC,NC,RUT,IT,I)
EIY(I)=MYO/CVY
EG=1.E-8
CVY=0.
CALL FORCOC(FCD,EG,CVZ,CVY,MZC,MYC,NC,IT,RUT,I)
CALL FORACO(EY1,EY2,EYD,EG,CVZ,CVY,FCD,ITIP,EAC,FYD,FY10,
*MZO,MYO,X(I),MZC,MYC,NC,RUT,IT,I)
EG=0.
CVZ=1.E-8/(2.*YCG(I))
CALL FORCOC(FCD,EG,CVZ,CVY,MZC,MYC,NC,IT,RUT,I)
CALL FORACO(EY1,EY2,EYD,EG,CVZ,CVY,FCD,ITIP,EAC,FYD,FY10,
*MZO,MYO,NO,MZC,MYC,NC,RUT,IT,I)
CVZ=0.
CVY=1.E-8/(2.*ZCG(I))
CALL FORCOC(FCD,EG,CVZ,CVY,MZC,MYC,NC,IT,RUT,I)
CALL FORACO(EY1,EY2,EYD,EG,CVZ,CVY,FCD,ITIP,EAC,FYD,FY10,
*MZO,Y(I),NO,MZC,MYC,NC,RUT,IT,I)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE FORCOC(FCD,EG, CVZ, CVY, MZC, MYC, NC, IT, RUT, I)
C.....CALCULA OS ESFORÇOS GERADOS NO CONCRETO PELA DEF. DA SECAO
REAL MZC, MYC, NC
INTEGER TDC
COMMON /BLOCO1/ ZZC(60,300), YYC(60,300), ZZA(60,200),
*YYA(60,200), Q(6), TDC(60)
COMMON /BLOCO2/ DAA(60), DAC(60,2), ZCG(60), YCG(60),
*NB(60), MDAC
RUT=0.
MZC=0.
MYC=0.
NC=0.
ECMAX=(EG+ZCG(I)*ABS(CVY)+YCG(I)*ABS(CVZ))*1000.
ECMIN=(EG-ZCG(I)*ABS(CVY)-YCG(I)*ABS(CVZ))*1000.
IF(ECMAX-3.5)10,10,11
11 RUT=1.
WRITE(2,18)
18 FORMAT(/,10X,8***ROTURA POR ESMAGAMENTO DO CONCRETO***8,/)
GO TO 12
10 IF(ECMIN)13,13,14
14 ECOMP=ECMAX-(ECMAX-2.)*3.5/1.5
IF(ECMIN.GT.ECOMP) GO TO 11
13 IF(IT-1)1,1,2
2 DO 3 KK=1,6
3 Q(KK)=0.
1 NTDC=TDC(I)
-----
DO 4 K=1,NTDC
EC=(EG+ZZC(I,K)*CVY+YYC(I,K)*CVZ)*1000.
IF(EC)4,5,5
5 IF(EC-2.)6,7,7
6 SIGC=FCD*(1.-(1.-EC/2.))**2)
GC=FCD*(2.-EC)*500.
GO TO 8
7 SIGC=FCD
GC=0.
8 IF(MDAC) 15,15,16
15 SIGAC=SIGC*DAC(I,1)
GAC=GC*DAC(I,1)
GO TO 17
16 IF(K.LE.MDAC) GO TO 15
SIGAC=SIGC*DAC(I,2)
GAC=GC*DAC(I,2)
17 MZC=MZC+YYC(I,K)*SIGAC
MYC=MYC+ZZC(I,K)*SIGAC
NC=NC+SIGAC
IF(IT-1)4,4,9
9 Q(1)=Q(1)+(ZZC(I,K)*ZZC(I,K))*GAC
Q(2)=Q(2)+ZZC(I,K)*YYC(I,K)*GAC
Q(3)=Q(3)+ZZC(I,K)*GAC
Q(4)=Q(4)+(YYC(I,K)*YYC(I,K))*GAC
Q(5)=Q(5)+YYC(I,K)*GAC
Q(6)=Q(6)+GAC
4 CONTINUE

```



152

12 RETURN  
END

```

SUBROUTINE FORACO(EY1,EY2,EYD,EG,CVZ,CVY,FCD,ITIP,EAC,FYD,
*FY10,MZR,MYR,NR,MZC,MYC,NC,RUT,IT,I)
REAL MZR,MYR,NR,MZC,MYC,NC,MZA,MYA,NA
COMMON /BLOC01/ ZZC(60,300),YYC(60,300),ZZA(60,200),
*YYA(60,200),Q(6),TDC(60)
COMMON /BLOC02/ DAA(60),DAC(60,2),ZCG(60),YCG(60),
*NB(60),MDAC
MZA=0.
MYA=0.
NA=0.
ESMAX=(EG+ZZA(I,1)*ABS(CVY)+YYA(I,1)*ABS(CVZ))*1000.
IF(ESMAX+10.)19,19,20
19 RUT=1.
WRITE(2,22)
22 FORMAT(/,10X,8***ROTURA POR ALONGAMENTO EXCESSIVO DO ACO 8
*,5TRACIONADO***8,/)
GO TO 21
20 NNB=NB(I)
DO 1 K=1,NNB
ES=(EG+ZZA(I,K)*CVY+YYA(I,K)*CVZ)*1000.
AES=ABS(ES)
IF(ITIP)2,2,3
2 IF(AES=EYD)4,5,5
4 SIGA=EAC*ES/1000.
GA=EAC/1000.
GO TO 6
5 SIGA=FYD*SIGN(1.,ES)
GA=0.
GO TO 6
3 IF(AES=EY1)7,7,8
7 SIGA=EAC*ES/1000.
GA=EAC/1000.
GO TO 6
8 IF(AES=EY2)9,9,10
9 GA=.2*FYD/(EY2-EY1)
SIGA=(GA*(AES-EY1)+.7*FYD)*SIGN(1.,ES)
GO TO 6
10 IF(AES=EYD)11,11,12
11 GA=.1*FYD/(EYD-EY2)
SIGA=(GA*(AES-EY2)+.9*FYD)*SIGN(1.,ES)
GO TO 6
12 GA=(FY10-FYD)/(10.-EYD)
SIGA=(GA*(AES-EYD)+FYD)*SIGN(1.,ES)
6 IF(ES)14,13,13
13 IF(AES=2.)16,15,15
15 SIGC=FCD
GC=0.
GO TO 17
16 SIGC=FCD*(1.-(1.-AES/2.))**2)
GC=FCD*(2.-AES)*500.
GO TO 17
14 SIGC=0.
GC=0.

```

```
17 SIGAC=(SIGA-SIGC)*DAA(I)
   MZA=MZA+YYA(I,K)*SIGAC
   MYA=MYA+ZZA(I,K)*SIGAC
   NA=NA+SIGAC
   GAC=(GA*1000.-GC)*DAA(I)
   IF(IT-1)1,1,18
18 Q(1)=Q(1)+(ZZA(I,K)+ZZA(I,K))*GAC
   Q(2)=Q(2)+ZZA(I,K)*YYA(I,K)*GAC
   Q(3)=Q(3)+ZZA(I,K)*GAC
   Q(4)=Q(4)+(YYA(I,K)*YYA(I,K)*GAC)
   Q(5)=Q(5)+YYA(I,K)*GAC
   Q(6)=Q(6)+GAC
   1 CONTINUE
   MZR=MZC+MZA
   MYR=MYC+MYA
   NR=NC+NA
21 RETURN
   END
```

```

SUBROUTINE RIGMB(I,GIP,SM,NML,LIB,IVIN)
C*****CALCULA A MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO NO SISTEMA LOCAL
REAL L,KY,KZ,KLY,KLZ
COMMON /BLOCO 3/ X(60),Y(60),Z(60),L(60)
COMMON /BLOCO 5/ AMD(60,12),EA(60),EIY(60),EIZ(60),P(60)
DIMENSION SM(12,12),LIB(60,12),GIP(60),SMA(12,12)
SENH(X)=(EXP(X)-EXP(-X))/2.
COSH(Y)=(EXP(Y)+EXP(-Y))/2.
DO 1 J=1,12
DO 1 K=1,12
1 SM(J,K)=0.
C.....FUNCOES DE ESTABILIDADE
KY=P(I)*(L(I)**2)/EIY(I)
KZ=P(I)*(L(I)**2)/EIZ(I)
KLY=SQRT(ABS(KY))
KLZ=SQRT(ABS(KZ))
IF(KLY=0.1)2,3,3
3 IF(KLZ=0.1)2,4,4
4 IF(KLY)5,2,5
5 IF(KLZ)6,2,6
6 IF(P(I))7,2,8
C.....FUNCOES APROXIMADAS
2 SY1=1.-KY/10.
SZ1=1.-KZ/10.
SY2=1.-KY/60.
SZ2=1.-KZ/60.
SY3=1.-KY/30.
SZ3=1.-KZ/30.
SY4=1.+KY/60.
SZ4=1.+KZ/60.
GO TO 9
C.....FUNCOES PARA TRACAO
7 FIY=2.-2.*COSH(KLY)+KLY*SENH(KLY)
FIZ=2.-2.*COSH(KLZ)+KLZ*SENH(KLZ)
SY1=(KLY**3)*SENH(KLY)/(12.*FIY)
SZ1=(KLZ**3)*SENH(KLZ)/(12.*FIZ)
SY2=(KLY**2)*(COSH(KLY)-1.)/(6.*FIY)
SZ2=(KLZ**2)*(COSH(KLZ)-1.)/(6.*FIZ)
SY3=KLY*(KLY*COSH(KLY)-SENH(KLY))/(4.*FIY)
SZ3=KLZ*(KLZ*COSH(KLZ)-SENH(KLZ))/(4.*FIZ)
SY4=KLY*(SENH(KLY)-KLY)/(2.*FIY)
SZ4=KLZ*(SENH(KLZ)-KLZ)/(2.*FIZ)
GO TO 9
C.....FUNCOES PARA COMPRESSAO
8 FIY=2.-2.*COS(KLY)-KLY*SIN(KLY)
FIZ=2.-2.*COS(KLZ)-KLZ*SIN(KLZ)
SY1=(KLY**3)*SIN(KLY)/(12.*FIY)
SZ1=(KLZ**3)*SIN(KLZ)/(12.*FIZ)
SY2=(KLY**2)*(1.-COS(KLY))/(6.*FIY)
SZ2=(KLZ**2)*(1.-COS(KLZ))/(6.*FIZ)
SY3=(KLY*(SIN(KLY)-KLY*COS(KLY)))/(4.*FIY)
SZ3=(KLZ*(SIN(KLZ)-KLZ*COS(KLZ)))/(4.*FIZ)
SY4=KLY*(KLY-SIN(KLY))/(2.*FIY)

```

```

      SZ4=KLZ*(KLZ-SIN(KLZ))/(2.*FIZ)
C.....*MATRIZ DE RIGIDEZ
  9 IF(IVIN) 19,19,20
 20 SM(1,1)=ABS(EA(I))/L(I)
      GO TO 21
 19 SM(1,1)=EA(I)/L(I)
 21 SM(2,2)=12.*EIZ(I)*SZ1/(L(I)**3)
      SM(3,3)=12.*EIY(I)*SY1/(L(I)**3)
      SM(4,4)=GIP(I)/L(I)
      SM(5,5)=4.*EIY(I)*SY3/L(I)
      SM(6,6)=4.*EIZ(I)*SZ3/L(I)
      DO 10 J=7,12
 10 SM(J,J)=SM(J-6,J-6)
      SM(5,3)=-6.*EIY(I)*SY2/(L(I)**2)
      SM(6,2)=6.*EIZ(I)*SZ2/(L(I)**2)
      SM(7,1)=-SM(1,1)
      SM(8,2)=-SM(2,2)
      SM(8,6)=-SM(6,2)
      SM(9,3)=-SM(3,3)
      SM(9,5)=-SM(5,3)
      SM(10,4)=-SM(4,4)
      SM(11,3)=SM(5,3)
      SM(11,5)=2.*EIY(I)*SY4/L(I)
      SM(11,9)=-SM(5,3)
      SM(12,2)=SM(6,2)
      SM(12,6)=2.*EIZ(I)*SZ4/L(I)
      SM(12,8)=-SM(6,2)
      DO 11 K=1,12
      DO 11 J=1,K
 11 SM(J,K)=SM(K,J)
      IF(NML)12,12,13
 13 LB=0
 15 LB=LB+1
      IF(LB=13)14,12,12
 14 IF(LIB(I, LB))15,15,16
 16 DO 17 J=1,12
      DO 17 K=1,12
 17 SMA(J,K)=SM(J,K)-SM(J, LB)*SM(LB, K)/SM(LB, LB)
      DO 18 J=1,12
      DO 18 K=1,12
 18 SM(J,K)=SMA(J,K)
      GO TO 15
 12 RETURN
      END

```

```

SUBROUTINE ROTMB(I)
C*****CALCULA A MATRIZ DE ROTACAO DO ELEMENTO DE BARRA
COMMON /BLOCO 4/ JJ(60),JK(60),CX(60),CY(60),CZ(60),R(60,9)
DO 1 K=1,9
  1 R(I,K)=0.
  IF(CX(I).EQ.0..AND.CZ(I).EQ.0.) GO TO 4
C.....MATRIZ PARA ELEMENTO INCLINADO
  CC=SQRT(CX(I)*CX(I)+CZ(I)*CZ(I))
  R(I,1)=CX(I)
  R(I,2)=CY(I)
  R(I,3)=CZ(I)
  R(I,4)=-CX(I)*CY(I)/CC
  R(I,5)=CC
  R(I,6)=-CY(I)*CZ(I)/CC
  R(I,7)=-CZ(I)/CC
  R(I,8)=CX(I)/CC
  GO TO 5
C.....MATRIZ PARA ELEMENTO VERTICAL
  4 R(I,2)=CY(I)
  R(I,4)=-CY(I)
  R(I,8)=1.
  5 RETURN
  END

```

```
SUBROUTINE TGAUSS(A, LB, KK)
DIMENSION A(360, 180)
DO 300 N=1, KK
  I=N
  DO 290 L=2, LB
    I=I+1
    IF(A(N, L)) 240, 290, 240
240  C=A(N, L)/A(N, 1)
    J=0
    DO 270 K=L, LB
      J=J+1
      IF(A(N, K)) 260, 270, 260
260  A(I, J)=A(I, J)-C*A(N, K)
270  CONTINUE
    A(N, L)=C
290  CONTINUE
300  CONTINUE
  RETURN
END
```

```
SUBROUTINE SGAUSS(A,D,LB,KK)
DIMENSION A(360,180),D(360)
DO 300 N=1,KK
  I=N
  DO 290 L=2,LB
    I=I+1
    IF(A(N,L)) 280,290,280
280  D(I)=D(I)-A(N,L)*D(N)
290  CONTINUE
300  D(N)=D(N)/A(N,1)
    N=KK
350  N=N-1
    IF(N) 500,500,360
360  L=N
    DO 400 K=2,LB
      L=L+1
      IF(A(N,K)) 370,400,370
370  D(N)=D(N)-A(N,K)*D(L)
400  CONTINUE
    GO TO 350
500  RETURN
END
```



```

SUBROUTINE CRAMER(Q,DD)
C*****CALCULA OS INCREMENTOS DE DEFORMACAO PARA O EQUILIBRIO DA
C*****SECAO TRANSVERSAL DO ELEMENTO
DIMENSION Q(6),DD(3)
DETQ=Q(1)*Q(4)*Q(6)+2.*Q(2)*Q(4)*Q(3)-Q(3)*Q(3)*Q(4)-Q(2)*
*Q(2)*Q(6)-Q(5)*Q(5)*Q(1)
DET1=DD(1)*(Q(4)*Q(6)-Q(5)*Q(5))+DD(2)*(Q(5)*Q(3)-Q(2)*Q(6)
*)+DD(3)*(Q(2)*Q(5)-Q(3)*Q(4))
DET2=DD(1)*(Q(5)*Q(3)-Q(2)*Q(6))+DD(2)*(Q(1)*Q(6)-Q(3)*Q(3)
*)+DD(3)*(Q(2)*Q(3)-Q(5)*Q(1))
DET3=DD(1)*(Q(2)*Q(5)-Q(4)*Q(3))+DD(2)*(Q(2)*Q(3)-Q(1)*Q(5)
*)+DD(3)*(Q(1)*Q(4)-Q(2)*Q(2))
DD(1)=DET1/DETQ
DD(2)=DET2/DETQ
DD(3)=DET3/DETQ
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE ESFOR (I,MY,MZ,XX,KL,KY,KZ,KLY,KLZ)
C*****CALCULA OS ESFORÇOS AO LONGO DO ELEMENTO
REAL MY,MZ,KL,KY,KZ,KLY,KLZ,KXY,KXZ,L
COMMON /BLOC03/ X(60),Y(60),Z(60),L(60)
COMMON /BLOC05/ AMD(60,12),EA(60),EIY(60),EIZ(60),P(60)
SENH(A)=(EXP(A)-EXP(-A))/2.
COSH(B)=(EXP(B)+EXP(-B))/2.
IF(KL=.1)5,6,6
6 IF(P(I))7,5,8
5 MZ=(AMD(I,12)+AMD(I,6))*XX/L(I)-AMD(I,6)
MY=(AMD(I,11)+AMD(I,5))*XX/L(I)-AMD(I,5)
GO TO 9
7 KXY=SQRT(ABS(KY))*XX
KXZ=SQRT(ABS(KZ))*XX
MZ=(AMD(I,12)+AMD(I,6)*COSH(KLZ))*SENH(KXZ)/SENH(KLZ)-
*AMD(I,6)*COSH(KXZ)
MY=AMD(I,5)*COSH(KXY)-(AMD(I,11)+AMD(I,5)*COSH(KLY))*
*SENH(KXY)/SENH(KLY)
GO TO 9
8 KXY=SQRT(ABS(KY))*XX
KXZ=SQRT(ABS(KZ))*XX
MZ=(AMD(I,12)+AMD(I,6)*COS(KLZ))*SIN(KXZ)/SIN(KLZ)-AMD(I,6)
**COS(KXZ)
MY=AMD(I,5)*COS(KXY)-(AMD(I,11)+AMD(I,5)*COS(KLY))*SIN(KXY)
*/SIN(KLY)
9 RETURN
END

```

```

SUBROUTINE SONERA (I,N,MY,MZ,RUT,FCD,EY1,EY2,EYD,ITIP,EAC,
*FYD,FY10,EGO,CVYO,CVZO,NS,MYS,MZS)
  INTEGER TDC
  REAL MZ,MY,N,MZR,MYR,NR,MZC,MYC,NC,MZS,MYS,NS,MZO,MYO,NO,L
  COMMON /BLOCO1/ ZC(60,300),YIC(60,300),ZZA(60,200),
*YYA(60,200),Q(6),TDC(60)
  COMMON /BLOCO2/ DAA(60),DAC(60,2),ZCG(60),YCG(60),
*NB(60),MDAC
  COMMON /BLOCO3/ X(60),Y(60),Z(60),L(60)
  COMMON /BLOCO5/ AMD(60,12),EA(60),EIY(60),EIZ(60),P(60)
  DIMENSION NO(60),MYO(60),MZO(60),DD(3)
  EQUIVALENCE (X,NO),(Y,MYO),(Z,MZO)
  IQ=30
C.....DEFORMACOES DE PARTIDA
  EGO=N/EA(I)
  CVYO=MY/EIY(I)
  CVZO=MZ/EIZ(I)
  INERA=0
25 INERA=INERA+1
  IF(INERA.LT.16) GO TO 16
  WRITE(2,26) IS,I
26 FORMAT(/,15X,8NAO FOI OBTIDA CONVERGENCIA NOS ESFORÇOS DAØ,
*Ø SECAØØ,12,Ø DO ELEMENTOØ,13)
  CALL EXIT
16 CALL FORCOC(FCD,EGO,CVZO,CVYO,MZC,MYC,NC,IQ,RUT,I)
  IF(RUT-1.) 10,15,15
10 CALL FORACO(EY1,EY2,EYD,EGO,CVZO,CVYO,FCD,ITIP,EAC,FYD,
*FY10,MZR,MYR,NR,MZC,MYC,NC,RUT,IQ,I)
  IF(RUT-1.) 11,15,15
11 DD(1)=MY-MYR
  DD(2)=MZ-MZR
  DD(3)=N-NR
  NS=N
  MYS=MY
  MZS=MZ
  IF(ABS(MY).LE.MYO(I)) MYS=MYO(I)
  IF(ABS(MZ).LE.MZO(I)) MZS=MZO(I)
  IF(ABS(N).LE.NO(I)) NS=NO(I)
  IF(ABS(DD(1))-ABS(.00001*MYS))12,12,13
12 IF(ABS(DD(2))-ABS(.00001*MZS))14,14,13
14 IF(ABS(DD(3))-ABS(.00001*NS))15,15,13
13 CALL CRAMER(Q,DD)
  CVYO=CVYO+DD(1)
  CVZO=CVZO+DD(2)
  EGO=EGO+DD(3)
  GO TO 25
15 RETURN
  END

```

```

SUBROUTINE NEWRA(I,RUT,ICON,TOL,FCD,IT,EY1,EY2,EYD,EAC,ITIP
*,FYD,FY10)
REAL KY,KZ,KLY,KLZ,KL,KXY,KXZ,L,MZ,MY,N,MZR,MYR,NR,MZC,MYC,
*NC,MZS,MYS,NS,MZO,MYO,NO
INTEGER TDC
COMMON /BLOCO1/ ZC(60,300),YC(60,300),ZZA(60,200),
*YYA(60,200),Q(6),TDC(60)
COMMON /BLOCO2/ DAA(60),DAC(60,2),ZCG(60),YCG(60),
*NB(60),MDAC
COMMON /BLOCO 3/ X(60),Y(60),Z(60),L(60)
COMMON /BLOCO 5/ AMD(60,12),EA(60),EIY(60),EIZ(60),P(60)
COMMON /BLOCO 6/ WY(60),WZ(60),AREA(60)
COMMON /BLOCO7/ GIT(60,2),AM(60),TRD(60),CTY(60),CTZ(60),
*CGY(60),CGZ(60),GIP(60),TL(60)
COMMON /BLOCO8/ FCTK,GS,FCCD,ALFA
DIMENSION EIPY(5),EIPZ(5),EAP(5),RIT(5)
DIMENSION NO(60),MYO(60),MZO(60),DD(3)
EQUIVALENCE (X,NO),(Y,MYO),(Z,MZO)
SENH(A)=(EXP(A)-EXP(-A))/2.
COSH(B)=(EXP(B)+EXP(-B))/2.
FUNME(C,D,E,F,G,H)=(7.*C+32.*D+12.*E+32.*F+7.*G)/90.
ISEA=0
N=AMD(I,1)
XX=0.
KY=P(I)/EIY(I)
KZ=P(I)/EIZ(I)
-----
KLY=SQRT(ABS(KY))*L(I)
KLZ=SQRT(ABS(KZ))*L(I)
DX=L(I)/4.
IF(EIZ(I)-EIY(I))1,1,2
1 KL=KLY
GO TO 3
2 KL=KLZ
3 DO 4 IS=1,5
CALL ESFOR(I,MY,MZ,XX,KL,KY,KZ,KLY,KLZ)
9 CALL SONERA(I,N,MY,MZ,RUT,FCD,EY1,EY2,EYD,ITIP,EAC,FYD,
*FY10,EGD,CVYO,CVZO,NS,MYS,MZS)
IF(RUT.EQ.1.) GO TO 100
IF(ABS(MY).GT.MYO(I)) GO TO 21
MYS=EIY(I)
CVYO=1.
21 IF(ABS(MZ).GT.MZO(I)) GO TO 22
MZS=EIZ(I)
CVZO=1.
22 IF(ABS(N).GT.NO(I)) GO TO 20
NS=NO(I)
GO TO 31
20 IF(ABS(EGD).GT.1.E-10) GO TO 23
NS=EA(I)
31 EGD=1.
23 EIPY(IS)=MYS/CVYO
EIPZ(IS)=MZS/CVZO
EAP(IS)=NS/EGD

```

```

IF(EAP(IS).LE.0.) ISEA=ISEA+1
IF(FCTK.LE.0.) GO TO 4
IF(ABS(AMD(I,4)).LE.TRD(I)) GO TO 32
32 CALL FISSEC(I,N,MY,MZ,AMD(I,4),AMD(I,2),AMD(I,3),RIT(IS))
4 XX=XX+DX
IF(FCTK.LE.0.) GO TO 33
GIPP=FUNME(RIT(1),RIT(2),RIT(3),RIT(4),RIT(5),DX)
33 EPY=FUNME(EIPY(1),EIPY(2),EIPY(3),EIPY(4),EIPY(5),DX)
EPZ=FUNME(EIPZ(1),EIPZ(2),EIPZ(3),EIPZ(4),EIPZ(5),DX)
IF(ISEA.EQ.0) GO TO 27
IF(ISEA.EQ.5) GO TO 27
EPA=EA(I)
GO TO 29
27 EPA=FUNME(EAP(1),EAP(2),EAP(3),EAP(4),EAP(5),DX)
29 IF(FCTK.LE.0.) GO TO 28
IF(ABS(GIP(I)-GIPP)-ABS(GIPP*TOL)) 28,28,24
28 IF(ABS(EIY(I)-EPY)-ABS(EPY*TOL))17,17,24
17 IF(ABS(EIZ(I)-EPZ)-ABS(EPZ*TOL))18,18,24
18 IF(ABS(EA(I)-EPA)-ABS(EPA*TOL))19,19,24
24 EIY(I)=EPY
EIZ(I)=EPZ
EA(I)=EPA
IF(FCTK.LE.0.) GO TO 100
GIP(I)=GIPP
GO TO 100
19 ICON=ICON-1
-----
100 RETURN
END

```

```

SUBROUTINE TORULT (I,RUTOR,FCD,EY1,EY2,EYD,ITIP,EAC,FYD,
*FY10)
  REAL N,M,KY,KZ,KLY,KLZ,KL,ML,MYL,MZL,L
  COMMON /BLOC01/ ZZC(60,300),YYC(60,300),ZZA(60,200),
*YYA(60,200),Q(6),TDC(60)
  COMMON /BLOC02/ DAA(60),DAC(60,2),ZCG(60),YCG(60),
*NB(60),MDAC
  COMMON /BLOC03/ X(60),Y(60),Z(60),L(60)
  COMMON /BLOC05/ AMD(60,12),EA(60),EIY(60),EIZ(60),P(60)
  COMMON /BLOC06/ WY(60),WZ(60),AREA(60)
  COMMON /BLOC07/ GIT(60,2),AM(60),TRD(60),CTY(60),CTZ(60),
*COY(60),COZ(60),GIP(60),TL(60)
  COMMON /BLOC08/ FCTK,GS,FCCD,ALFA
  RUTOR=0.
  IF (ABS(AMD(I,4)).GT.TRD(I)) GO TO 5
  V=SQRT(AMD(I,2)*AMD(I,2)+AMD(I,3)*AMD(I,3))
  IF (V.EQ.0.) GO TO 4
  VL=.3*FCCD*AREA(I)
  LTV=ABS(AMD(I,4))/TL(I)+V/VL
  IF (LTV.GT.1.) GO TO 5
4 DO 9 IAM=5,6
  IF (AMD(I,IAM).NE.0.) GO TO 10
9 IF (AMD(I,IAM+6).NE.0.) GO TO 10
  GO TO 7
10 N=AMD(I,1)
  XX=0.
-----
  KY=P(I)/EIY(I)
  KZ=P(I)/EIZ(I)
  KLY=SQRT(ABS(KY))*L(I)
  KLZ=SQRT(ABS(KZ))*L(I)
  DX=L(I)/4.
  IF (EIZ(I)-EIY(I)) 1,1,2
1 KL=KLY
  GO TO 3
2 KL=KLZ
3 DO 6 IS=1,5
  CALL ESFOR(I,MY,MZ,XX,KL,KY,KZ,KLY,KLZ)
  M=SQRT(MY*MY+MZ*MZ)
  IF (M.EQ.0.) GO TO 6
  ML=(TRD(I)*TRD(I)*M)/(TRD(I)*TRD(I)-AMD(I,4)*AMD(I,4))
  MZL=ML*MZ/M
  MYL=ML*MY/M
  CALL SONERA(I,N,MYL,MZL,RUT,FCD,EY1,EY2,EYD,ITIP,EAC,FYD,
*FY10,EGO,CVYO,CVZO,NS,MYS,MZS)
  IF (RUT.EQ.1.) GO TO 5
6 XX=XX+DX
  GO TO 7
5 RUTOR=1.
  WRITE(2,8) I,IS
8 FORMAT(/,15X,8**ROTURA POR TORCAO DO ELEMENTO8,I3,/,15X,8*8
*,8NA REGIAO DA SECAO8,I3,8**8)
7 RETURN
  END

```

```

FILE 1=CARTOES,UNIT=READER
FILE 2=IMPRESS,UNIT=PRINTER
FILE 21=XAVE2,UNIT=DISKPACK,AREA=60,RECORD=144
FILE 22=XAVE3,UNIT=DISKPACK,AREA=60,RECORD=12
REAL L,MZC,MYC,NC,MZR,MYR,NR,MZO,MYO,NO,LAMB
INTEGER DB,DH,BB,BH,DBE,DBI,DHE,DHI,BBE,BBI,BHE,BHI,
*RL(180),TDC
COMMON /BLOCO1/ ZYC(60,300),YYC(60,300),ZZA(60,200),
*YYA(60,200),Q(6),TDC(60)
COMMON /BLOCO2/ DAA(60),DAC(60,2),ZCG(60),YCG(60),
*NB(60),MDAC
COMMON /BLOCO 3/ X(60),Y(60),Z(60),L(60)
COMMON /BLOCO 4/ JJ(60),JK(60),CX(60),CY(60),CZ(60),R(60,9)
COMMON /BLOCO 5/ AMD(60,12),EA(60),EIIY(60),EIZ(60),P(60)
COMMON /BLOCO6/ WY(60),WZ(60),AREA(60)
COMMON /BLOCO7/ GIT(60,2),AM(60),TRD(60),CTY(60),CTZ(60),
*COY(60),COZ(60),GIP(60),TL(60)
COMMON /BLOCO8/ FCTK,GS,FCCD,ALFA
DIMENSION LIB(60,12),AR(360),INV(360),SM(12,12),SMD(12,12),
*SMR(12,12),S(360,180),JA(12),D(360),AC(360),RIG(360)
DIMENSION EAA(60),EIIY(60),EIIZ(60),GIIP(60),PP(60)
EQUIVALENCE (CX,EAA),(CY,EIIY),(CZ,EIIZ)
C.....LEITURA DOS DADOS GERAIS DA ESTRUTURA
3000 READ(1,1) M,NJ,NR,NRJ,NML,NAL,ITIPES
1 FORMAT(7I10)
IF(M)2000,2000,2
-----
2 WRITE(2,3)
3 FORMAT(1H1,////,10X,ØUNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIØ,
*ØRØØ,/,10X,ØCOPPE - PROGRAMA DE ENGENHARIA CIVILØ,/,10X,
*ØTESE DE MESTRADO DE PAULO CHAVES DE REZENDE MARTINS - Ø,
*Ø1979Ø,/,10X,ØPROGRAMA PARA A ANALISE NAO-LINEAR DE PORØ,
*ØTICOS ESPACIAIS DE CONCRETO ARMADOØ)
DO 4 IT=1,3
READ(1,5)
5 FORMAT(Ø
*
Ø)
WRITE(2,6)
6 FORMAT(/)
4 WRITE(2,5)
ND=6*NJ
N=ND-NR
WRITE(2,7)M,NJ,NR,NRJ,NML,N
7 FORMAT(////,16X,ØMØ,9X,ØNJØ,9X,ØNRØ,8X,ØNRJØ,9X,ØNMLØ,
*9X,ØNØ,/,12X,3(15,6X),15,7X,15,5X,15)
DO 8 I=1,NJ
8 READ(1,9)J,X(J),Y(J),Z(J)
9 FORMAT(15,3F10.0)
WRITE(2,10)
10 FORMAT(////,15X,ØNOØ,10X,ØXØ,13X,ØYØ,13X,ØZØ)
DO 33 J=1,NJ
33 WRITE(2,11)J,X(J),Y(J),Z(J)
11 FORMAT(/,12X,15,3(6X,F8.3))
C.....CARACTERISTICAS DOS MATERIAIS

```

```

READ(1,28)FYK,GA,ITIP,EAC,FCCK,GC,FCTK,ECO
28 FORMAT(2F10.0,I10,5F10.0)
WRITE(2,502) FCCK,FCTK,GC,ECO,FYK,GA,ITIP,EAC
502 FORMAT(/,15X,8CARACTERISTICAS DOS MATERIAIS,/,15X,8CONC5
*,8RETRO:8,8 FCCK=8,F8.2,4X,8FCTK=8,F8.2,4X,8GC=8,F6.2,4X,
*8EC=8,F12.2,/,15X,8ACO:8,7X,8FYK=8,F9.2,6X,8GA=8,F6.2,6X,
*8TIPO8,I3,6X,8EA=8,F12.2)
FCCD=FCCK/GC
FCD=.85*FCCD
FYD=FYK/GA
IF(ITIP)29,29,30
29 EYD=FYD*1000./EAC
GO TO 31
30 EYD=2.+FYD*1000./EAC
EY1=.7*FYD*1000./EAC
EY2=.263+.9*FYD*1000./EAC
FY10=1.15*FYD
43 ESP=FY10/FYD-.7
EST=FY10/EAC+.823*ESP**5
IF(ABS(.01-EST).LE.1.E-5) GO TO 31
DFY=1./EAC+(4.115*ESP**4)/FYD
FY10=FY10+(.01-EST)/DFY
GO TO 43
C.....INCIDENCIAS E PROPRIEDADES DOS ELEMENTOS
31 DO 12 IM=1,M
READ(1,13)I,JJ(I),JK(I),ITS
-----
13 FORMAT(4I5)
IF(JK(I)-JJ(I))14,14,15
14 WRITE(2,16)I,JJ(I),JK(I)
16 FORMAT(/,15X,8ERRO NA INCIDENCIA DO ELEMENTO8,1X,I3,2X,
*8NO INICIAL = 8,1X,I3,2X,8NO FINAL = 8,1X,I3,/,15X,8A NU8,
*8MERACAO DOS NOS DEVE SER INVERTIDA PARA O CORRETO PROCE8,
*8SSAMENTO8)
GO TO 2000
C.....GEOMETRIA DOS ELEMENTOS
15 CALL COORD(I)
WRITE(2,500)I,JJ(I),JK(I),L(I),CX(I),CY(I),CZ(I)
500 FORMAT(/,15X,8MEMBRO N.8,I3,/,15X,8JJ=8,I3,5X,8JK=8,I3,5X,
*8L=8,F7.3,5X,8CX=8,F7.3,5X,8CY=8,F7.3,5X,8CZ=8,F7.3)
C.....NUMERACAO DAS DIRECOES DOS DESLOCAMENTOS
DO 300 ID=1,6
IV=6-ID
JA(ID)=6*JJ(I)-IV
300 JA(ID+6)=6*JK(I)-IV
WRITE(2,20IM) JA
C.....MATRIZ DE ROTACAO
CALL ROTMB(I)
C.....PROPRIEDADES DA SECAO TRANSVERSAL
GO TO (18,19), ITS
18 READ(1,20)B,H,RBE,RHE,DB,DH
20 FORMAT(4F10.0,2I5)
IF(DB.NE.0) GO TO 17
IF(ITIPES.EQ.1) GO TO 34

```



```

DB=10
DH=10
GO TO 17
34 DB=2
DH=10
17 READ(1,32) BB,BH,DAA(I),DEST,ALFA
32 FORMAT(2I5,3F10.0)
IF(ALFA.EQ.0.) ALFA=3.141592/4.
WRITE(2,506) B,H,RBE,RHE,BB,BH,DAA(I),DEST,ALFA
506 FORMAT(15X,0SECAO RETANGULAR CHEIA0,/,15X,0DIMENSOES0,5X,
*0B=0,F8.3,4X,0H=0,F8.3,4X,0RB=0,F8.3,4X,0RH=0,F8.3,/,15X,
*0ARMACA00,7X,0BB=0,I3,8X,0BH=0,I3,8X,0DAA=0,F10.6,1X,
*0DEST=0,F8.5,4X,0ALFA=0,F8.5)
CALL PROSR(B,H,RBE,RHE,DB,DH,BB,BH,I)
GO TO 36
19 READ(1,21)B,H,BI,HI,RBE,RHE,RBI,RHI,DBE,DHE,DBI,DHI
21 FORMAT(8F5.0,4I5)
IF(DB.NE.0) GO TO 35
IF(ITIPES.EQ.1) GO TO 44
DBE=10
DHE=2
DBI=2
DHI=10
GO TO 35
44 DBE=2
DHE=2
DBI=1
DHI=10
35 READ(1,39) BBE,BHE,BBI,BHI,DAA(I),DEST,ALFA
39 FORMAT(4I5,3F10.0)
IF(ALFA.EQ.0.) ALFA=3.141592/4.
WRITE(2,505) B,H,BI,HI,RBE,RHE,RBI,RHI,BBE,BHE,BBI,BHI,
*DAA(I),DEST,ALFA
505 FORMAT(15X,0SECAO RETANGULAR VAZADA0,/,15X,0DIMENSOES0,5X,
*0B=0,F8.3,4X,0H=0,F8.3,4X,0BI=0,F8.3,4X,0HI=0,F8.3,4X,/,29X
*,0RBE=0,F6.3,4X,0RHE=0,F6.3,4X,0RBI=0,F7.3,4X,0RHI=0,F7.3,/,
*,15X,0ARMACA00,7X,0BBE=0,I3,7X,0BHE=0,I3,7X,0BBI=0,I3,7X,
*0BHI=0,I3,7X,0DAA=0,F10.6,1X,0DEST=0,F8.5,4X,0ALFA=0,F8.5)
CALL SEVAZ(B,H,BI,HI,RBE,RHE,RBI,RHI,DBE,DHE,DBI,DHI,BBE,
*BHE,BBI,BHI,I)
36 CALL RITOR(I,B,H,RBE,RHE,BI,HI,ITS,ECO,EAC,FYD,DEST)
IF(FCTK.NE.0.) WRITE(2,590) TL(I)
590 FORMAT(15X,0TORSOR ULTIMO (COMPRESSAO NO CONCRETO) =0,F9.2)
12 CONTINUE
C.....LIBERACOES NOS MEMBROS
DO 22 LM=1,M
DO 22 LN=1,12
22 LIB(LM,LN)=0
IF(NML)37,37,38
38 DO 23 LM=1,NML
READ(1,24)I,(LIB(I,LB),LB=1,12)
24 FORMAT(13I5)
23 CONTINUE

```

## C.....RESTRICOES DE APOIO

```

37 DO 25 I=1,ND
   D(I)=0.
25 RL(I)=0
   DO 26 J=1,NRJ
26 READ(1,27)K,RL(6*K-5),RL(6*K-4),RL(6*K-3),RL(6*K-2),
   *RL(6*K-1),RL(6*K)
27 FORMAT(I5,6I10)
   IF(NAL.LE.0) GO TO 40
   DO 41 IAL=1,NAL
   READ(1,42) J,(RIG(6*J-6+KK),KK=1,6)
42 FORMAT(I5,6F10.0)
   WRITE(2,588) J,(RIG(JL),JL=1,6)
588 FORMAT(10X,8APOIO ELASTICO NO NO 8,I3,8, NAS DIRECOES 8,
   *6F10.0)
41 CONTINUE

```

## C.....ANALISE DE CARREGAMENTOS

```

40 READ(1,100) NLS,TOL
100 FORMAT(I10,F10.0)
   DO 101 IL=1,NLS
   WRITE(2,115)IL
115 FORMAT(//,15X,8ANALISE NUMERO8,I5,///)
   READ(1,5)
   WRITE(2,5)
   READ(1,102) NLJ,GS,NNCV,ERRO,IMP,DLAMB
102 FORMAT(3(I10,F10.0))
   IF(NNCV)103,103,104
-----
104 WRITE(2,105)ERRO
105 FORMAT(///,15X,8PESQUISA DA CAPACIDADE DE CARGA DA ESTRU8,
   *8TURA8,//,15X,8ERRO ADMITIDO NO VALOR DA CARGA MAXIMA = 8,
   *F10.5)
   IF(DLAMB.EQ.0.) DLAMB=.25
103 DO 106 I=1,ND
   AR(I)=0.
   AC(I)=0.
106 INV(I)=0
   LAMB=1.

```

## C.....LEITURA DAS CARGAS NODAIS

```

WRITE(2,107)
107 FORMAT(///,15X,8CARREGAMENTO DOS NOS8,//,15X,8NO8,10X,8FX8,
   *13X,8FY8,13X,8FZ8,13X,8MX8,13X,8MY8,13X,8MZ8,/)
   DO 108 IC=1,NLJ
   READ(1,109)J,AC(6*J-5),AC(6*J-4),AC(6*J-3),AC(6*J-2),
   *AC(6*J-1),AC(6*J)
109 FORMAT(I5,6F10.0)
108 WRITE(2,110)J,AC(6*J-5),AC(6*J-4),AC(6*J-3),AC(6*J-2),
   *AC(6*J-1),AC(6*J)
110 FORMAT(12X,I5,6F15.2)
   IF(NNCV) 618,618,112
112 DO 113 IC=1,NNCV
113 READ(1,114)J,INV(6*J-5),INV(6*J-4),INV(6*J-3),INV(6*J-2),
   *INV(6*J-1),INV(6*J)
114 FORMAT(7I5)

```

```

      IULC=0
618  IVIN=0
      IF(NNCV.EQ.0) GO TO 643
      WRITE(2,585) LAMB
585  FORMAT(/,15X,8VALOR ATUAL DO FATOR DE CARGA =8,F13.10)
643  LB=0
C.....NO GRANDE DO ITERATIVO
      DO 200 IT=1,25
      ICON=M
C.....NO PROCESSO INCREMENTAL DAS CARGAS
      DO 620 IPC=1,ND
      IF(INV(IPC).EQ.1) GO TO 634
      D(IPC)=AC(IPC)*GS
      GO TO 620
634  D(IPC)=LAMB*AC(IPC)*GS
620  CONTINUE
603  DO 201 K=1,ND
      DO 201 J=1,180
201  S(K,J)=0.
      MEA=0
C.....NO GRANDE DO DA MATRIZ DE RIGIDEZ
      DO 1000 I=1,M
C.....CALCULO DE EA E EI NA ORIGEM
      IF(IVIN)604,604,302
604  IF(IT-1) 301,301,302
301  IF(LAMB.NE.1.) GO TO 302
-----
      CALL VALINI(I,FCD,EY1,EY2,EYD,ITIP,EAC,FYD,FY10)
      GIP(I)=GIT(I,1)
      P(I)=0.
C.....GERAÇÃO DA MATRIZ SM
302  CALL RIGMB(I,GIP,SM,NML,LIB,IVIN)
      IF(EA(I))303,303,304
303  MEA=MEA+1
C.....GERAÇÃO DA MATRIZ SMR=SM*R
304  DO 305 K=1,4
      DO 305 J=1,12
      SMR(J,3*K-2)=SM(J,3*K-2)*R(I,1)+SM(J,3*K-1)*R(I,4)+SM(J,
*3*K)*R(I,7)
      SMR(J,3*K-1)=SM(J,3*K-2)*R(I,2)+SM(J,3*K-1)*R(I,5)+SM(J,
*3*K)*R(I,8)
305  SMR(J,3*K)=SM(J,3*K-2)*R(I,3)+SM(J,3*K-1)*R(I,6)+SM(J,3*K)*
*R(I,9)
      IF(IVIN) 605,605,606
605  WRITE(210I) SMR
C.....GERAÇÃO DA MATRIZ SMD=RT*SMR
606  DO 306 J=1,4
      DO 306 K=1,12
      SMD(3*J-2,K)=R(I,1)*SMR(3*J-2,K)+R(I,4)*SMR(3*J-1,K)+
*R(I,7)*SMR(3*J,K)
      SMD(3*J-1,K)=R(I,2)*SMR(3*J-2,K)+R(I,5)*SMR(3*J-1,K)+
*R(I,8)*SMR(3*J,K)
306  SMD(3*J,K)=R(I,3)*SMR(3*J-2,K)+R(I,6)*SMR(3*J-1,K)+R(I,9)*
*SMR(3*J,K)

```

```

READ(2281) JA
C.....*INTRODUCAO DAS CONDICÕES DE CONTORNO EM S
DO 307 IC=1,12
JIA=JA(IC)
IF(RL(JIA))307,307,308
308 DO 309 IAN=1,12
SMD(IC,IAN)=0.
309 SMD(IAN,IC)=0.
307 CONTINUE
C.....*GERAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL
DO 310 IJ=1,12
JIA=JA(IJ)
DO 311 IK=1,12
JJA=JA(IK)-JIA+1
IF(JJA)311,311,312
312 IF(JJA-LB)313,313,314
314 LB=JJA
313 IF(LB-180) 315,315,316
316 WRITE(2,317)
317 FORMAT(////,15X,8A LARGURA MAXIMA DE BANDA DA MATRIZ DE  $\delta$ ,
* $\delta$ RIGIDEZ FOI ULTRAPASSADA $\delta$ ,/,15X,8A NUMERACAO INADEQUADA  $\delta$ ,
* $\delta$ DOS NOS $\delta$ )
GO TO 2000
315 S(JIA,JJA)=S(JIA,JJA)+SMD(IJ,IK)
311 CONTINUE
310 CONTINUE
1000 CONTINUE
DO 400 ID=1,ND
IF(RL(ID)) 428,428,401
401 S(ID,1)=1.
GO TO 400
428 IF(RIG(ID).NE.0.) S(ID,1)=S(ID,1)+RIG(ID)
400 CONTINUE
C.....*CALCULO DOS DESLOCAMENTOS
CALL TGAUSS(S,LB,ND)
IF(IVIN) 607,607,624
607 CALL SGAUSS(S,D,LB,ND)
C.....*VERIFICACAO DE INSTABILIDADE
624 INST=0
DO 600 ISN=1,ND
IF(S(ISN,1)) 601,601,600
601 INST=INST+1
600 CONTINUE
IF(IVIN) 609,609,610
609 IF(MEA) 610,610,623
623 IF(INST.LE.MEA) GO TO 602
IVIN=1
GO TO 603
610 IF(INST) 602,602,612
612 IF(NNCV) 613,613,614
613 WRITE(2,615)
615 FORMAT(/,10X,8A ESTRUTURA E INSTAVEL SOB O CARREGAMENTO DA $\delta$ 
* $\delta$ D $\delta$ ,/,10X,8A EQUILIBRIO NAO E POSSIVEL $\delta$ )

```

```

GO TO 101
614 IF(LAMB.NE.1.) GO TO 616
WRITE(2,617)
617 FORMAT(/,10X,50 CARREGAMENTO INICIAL SUPERA A CAPACIDADE DØ
*ØE CARGA DA ESTRUTURAØ,/,10X,ØREDUZI-LO E RECOMEÇARØ)
GO TO 101
616 DLAMB=DLAMB/2.
LAMB=LAMB-DLAMB
IULC=1
DO 627 IRG=1,M
EA(IRG)=EAA(IRG)
EIIY(IRG)=EIIY(IRG)
EIZ(IRG)=EIZ(IRG)
GIIP(IRG)=GIIP(IRG)
627 P(IRG)=PP(IRG)
GO TO 618
602 IF(IT.NE.1) GO TO 635
DO 628 IRG=1,M
EAA(IRG)=EA(IRG)
EIIY(IRG)=EIIY(IRG)
EIZ(IRG)=EIZ(IRG)
GIIP(IRG)=GIIP(IRG)
628 PP(IRG)=P(IRG)
C.....ØCALCULO DOS ESFORÇOS NOS NOS DOS ELEMENTOS
635 DO 402 I=1,M
READ(21ØI) SMR
READ(22ØI) JA
DO 403 J=1,12
AMD(I,J)=0.
DO 403 JI=1,12
JL=JA(JI)
403 AMD(I,J)=AMD(I,J)+SMR(J,JI)*D(JL)
C.....ØVERIFICACAO DAS SECÕES TRANSVERSAIS
C.....ØCORRECAO DAS RIGIDEZES DOS ELEMENTOS
CALL NEWRA(I,RUT,ICON,TOL,FCØ,IT,EY1,EY2,EYØ,EAC,ITIP,FYØ,
*FY1Ø)
IF(RUT-1.) 404,629,629
629 IF(NNCV) 426,426,614
426 WRITE(2,427) I
427 FORMAT(/,10X,ØULTRAPASSADA A CAPACIDADE DE CARGA DA ESTRUØ,
*ØTURAØ,/,10X,ØROTURA DO ELEMENTOØ,13)
GO TO 101
404 P(I)=AMD(I,1)
402 CONTINUE
C.....ØVERIFICACAO DA CONVERGENCIA
IF(ICON.EØ.Ø) GO TO 633
IF(IMP.EØ.Ø) GO TO 641
WRITE(2,57Ø) IT
57Ø FORMAT(/,15X,ØI T E R A C A Ø,13)
GO TO 642
633 WRITE(2,4Ø9) IT
4Ø9 FORMAT(/,15X,ØCONVERGENCIA ØBTIDA EM Ø,12,Ø ITERACOESØ)
C.....ØIMPRESSAO DOS ESFORÇOS NAS BARRAS

```

```

642 WRITE(2,410)
410 FORMAT(///,15X,8DESLOCAMENTOS DOS NOS8,/,15X,8NO8,11X,8DX8
*,14X,8DY8,14X,8DZ8,13X,8ROTX8,13X,8ROTY8,13X,8ROTZ8,/)
WRITE(2,411)(J,D(6*J-5),D(6*J-4),D(6*J-3),D(6*J-2),D(6*J-1)
*,D(6*J),J=1,NJ)
411 FORMAT(12X,15,6E16.3)
WRITE(2,412)
412 FORMAT(///,15X,8ESFORCOS NAS EXTREMIDADES DOS ELEMENTOS8,//
*,15X,8ELEM.8,5X,8NOS8,9X,8FX8,12X,8FY8,12X,8FZ8,12X,8MX8,
*12X,8MY8,12X,8MZ8,/)
DO 413 I=1,M
413 WRITE(2,414)I,JJ(I),(AMD(I,J),J=1,6),JK(I),(AMD(I,J),
*J=7,12)
414 FORMAT(/,13X,15,I9,1X,6F14.3,/,18X,19,1X,6F14.3,/)
641 IF(ICON) 405,405,405
406 IF(IT=25)200,407,407
407 WRITE(2,408)IT
408 FORMAT(////,15X,8NAO FOI OBTIDA CONVERGENCIA EM8,I3,8 ITE8,
*8RACOES8,/,15X,8CONSIDERA-SE ULTRAPASSADA A CAPACIDADE DE8,
*8 CARGA DA ESTRUTURA8)
GO TO 101
200 CONTINUE
405 CONTINUE
C.....VERIFICACAO DA ESTABILIDADE A TORCAO
IF(FCTK.LE.0.) GO TO 636
DO 637 IM=1,M
IF(ABS(AMD(IM,4)).EQ.0.) GO TO 637
CALL TORULT(IM,RUTOR,FCD,EY1,EY2,EYD,ITIP,EAC,FYD,FY10)
IF(RUTOR.NE.1.) GO TO 637
IF(NNCV.EQ.0) GO TO 101
IF(LAMB.NE.1.) GO TO 638
WRITE(2,639)
639 FORMAT(/,15X,8**0 CARREGAMENTO INICIAL SUPERA A CAPACIDADE8
*,8 DE CARGA DA ESTRUTURA**8)
GO TO 101
638 DLAMB=DLAMB/2.
LAMB=LAMB-DLAMB
IULC=1
DO 640 IRG=1,M
EA(IRG)=EAA(IRG)
EIY(IRG)=EIIY(IRG)
EIZ(IRG)=EIIZ(IRG)
640 P(IRG)=PP(IRG)
GO TO 618
637 CONTINUE
636 IF(NNCV) 621,621,631
631 IF(DLAMB=ERRO) 625,625,622
622 IF(IULC.NE.0) DLAMB=DLAMB/2.
LAMB=LAMB+DLAMB
GO TO 618
625 WRITE(2,632) LAMB
632 FORMAT(/,15X,8FATOR DE CARGA MAXIMA =8,F13.10)
C.....REACOES DE APOIO

```

```

621 WRITE(2,416)
416 FORMAT(////,15X,8REACOES DE APOIO8,/,15X,8NO8,10X,8RFX8,
*12X,8RFY8,12X,8RFZ8,12X,8RMX8,12X,8RMY8,12X,8RMZ8,/)
DO 415 I=1,M
  READ(228I) JA
  DO 415 ID=1,12
    JIA=JA(ID)
    IF(RL(JIA)) 429,429,417
429 IF(RIG(JIA).NE.0.) AR(JIA)=-RIG(JIA)*D(JIA)
    IF(RIG(JIA).NE.0.) WRITE(2,589) JIA,AR(JIA)
589 FORMAT(/,10X,8REACAO DE APOIO NA DIRECAO 8,I3,8 =8,F10.3)
    GO TO 415
417 GO TO (418,419,420,418,419,420,418,419,420),ID
418 AR(JIA)=AR(JIA)+AMD(I,ID)*R(I,1)+AMD(I,ID+1)*R(I,4)+
*AMD(I,ID+2)*R(I,7)
    GO TO 415
419 AR(JIA)=AR(JIA)+AMD(I,ID-1)*R(I,2)+AMD(I,ID)*R(I,5)+
*AMD(I,ID+1)*R(I,8)
    GO TO 415
420 AR(JIA)=AR(JIA)+AMD(I,ID-2)*R(I,3)+AMD(I,ID-1)*R(I,6)+
*AMD(I,ID)*R(I,9)
415 CONTINUE
  NAR=ND-5
  DO 421 KR=1,NAR,6
  DO 422 KKR=1,6
  IAR=KR+KKR-1
  IF(AR(IAR))423,422,423
422 CONTINUE
  GO TO 421
423 INR=(KR+5)/6
  WRITE(2,424)INR,(AR(KR+KKR-1),KKR=1,6)
424 FORMAT(/,12X,I5,6(3X,F12.3))
421 CONTINUE
101 CONTINUE
  GO TO 3000
2000 CONTINUE
  CALL EXIT
  END

```

BIBLIOGRAFIA

1. C. E. B. - Comité Euro-International du Béton - Boletim nº 124/125. Code Modèle pour les Structures en Béton. - Abril, 1978.
2. NB-1/77 - Norma Brasileira para o Cálculo de Estruturas de Concreto Armado - A.B.N.T. - Rio de Janeiro, 1977.
3. C.E.B. - Comité Euro-International du Béton - Boletim nº 92 - Manuel de Calcul "Effort Tranchant - Torsion" - Junho, 1973.
4. Guerra, J. Dourado - Resistência à Torção de Vigas de Concreto Armado Leve, sob a Ação de Cargas Combinadas - Tese de Mestrado, COPPE/UF RJ - Rio de Janeiro, Outubro, 1973.
5. A.C.I. - American Concrete Institute - Torsion of Structural Concrete, Publication SP.18 - U.S.A., 1973.
6. A.C.I. - American Concrete Institute - Analysis of Structural Systems for Torsion - Publication SP.35, U.S.A., 1973.
7. Fauchart, J. - Ruptures des Poutres de Sections Rectangulaires en Béton Armé ou Précontraint, par Torsion et Flexion Circulaire Combinées - Annales, I.T.B.T.P., nº 301 - França. Janeiro, 1973.
8. Robinson, Jacques - Ramsay - Éléments Constructifs Spéciaux de Béton Armé - Edition Eyrolles - France, 1975.
9. Timoshenko, S.P.; Gere, James M. - Mecanica de Materiales - Union Tipografica Editorial Hispano-Americana - México, 1974.



10. Telles, J.C. de Faria - Análise do Comportamento Não-linear Geométrico e Físico de Pórticos Planos de Concreto Armado - Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Fevereiro, 1976.
11. Gere, J.M.; Weaver Jr., William - Analisis de Estructuras Reticulares - Companhia Editorial Continental S.A. - México/España, Junho, 1970.
12. Garcia, L.F. Taborda - Análise Não-Linear de Pórticos Planos de Concreto Armado - Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Dezembro, 1974.
13. Moreira, Domício F. - Análise Matricial das Estruturas - Editora da Universidade de São Paulo, Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., Rio de Janeiro, 1977.
14. Roark, Raymond Y. - Formulas For Stress and Strain - McGraw Hill Kogakusha Ltd., Tokyo, 4a. edição.
15. Chen, W.F.; Shoraka, M.T. - Tangent Stiffness Method for Biaxial Bending of Reinforced Concrete Columns - Association Internationale des Ponts et Charpentiers - Mémoires 35-I - Zurich - Abril, 1975.
16. Gunnin, B.L.; Rad, F.N.; Furlong, R.W. - A General Nonlinear Analysis of Concrete Structures and Comparisons with Frame Tests - Computers and Structures, vol. 7, Pergamon Press - Great Britain, Abril, 1977.
17. C.E.B. - Boletim nº 103 - Manuel de Calcul "Flambement-Instabilité" - Outubro, 1974.
18. Aas-Jakobsen, Knut - Design of Slender Reinforced Concrete Frames - Institute für Baustatik, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich - Zürich, Novembro, 1973.

19. Coates, R.C.; Coutie, M.G.; Kong, F.K. - Structural Analysis - William Clowes e Sons, Ltd., Londres, 1972.
20. Viridi, K.S.; Dowling, P. J. - The Ultimate Strength of Biaxial Restrained Columns - Proceedings, Institute of Civil Engineers, Part 2, pag. 41 a 58, Março, 1976.
21. Chu, Knang-Han; Rampetsreiter, Robert H. - Large Deflection Buckling of Space Frames - Journal of the Structural Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers - Dezembro, 1972.
22. Tezcan, S. S.; Mahapatra, B.C. - Tangent Stiffness Matrix for Space Frame Members - Journal of the Structural Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers - Junho, 1969.