UM MODELO DE MALHA IRREGULAR PARA O MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

MOACIR WEYNE FILHO

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

Aprovada por:

Humberto Lima Soriano
(Presidente)

Sergio Fernandes Villaça

Sydney M. G. dos Santos

Benjamin Ernani Diaz

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
FEVEREIRO DE 1979

WEYNE FILHO, MOACIR

Um Modelo de Malha Irregular para o Método das Diferenças Finitas [Rio de Janeiro] 1979.

x, 117 p. 29,7cm (COPPE-UFRJ, M.Sc. Engenharia Civil, 1979)

Tese - Univ. Fed. Rio de Janeiro. COPPE

1. Métodos Numéricos para resolução de estruturas. I. COPPE/UFRJ II. Título (série).

à minha esposa

Agradecimentos

Ao professor Humberto Lima Soriano pela ajuda na definição do tema deste trabalho e pela orientação ao longo de todo o seu desenvolvimento.

Ao professor Sergio Fernandes Villaça pelos ensinamentos que serviram de ajuda inestimável.

Ao colega e amigo Pedro de Alcantara Burlamaqui e a seus familiares por toda a ajuda prestada durante o período de elaboração deste trabalho.

À minha família e aos meus amigos pelo apoio sempre encontrado.

Sinopse

Neste trabalho, estuda-se um processo de utilização de malhas irregulares no Método das Diferenças Finitas, que possibilita a resolução de equações diferenciais parciais até segunda ordem.

Aplica-se, pois, o processo à resolução de placas simplesmente apoiadas e de chapas sob estado plano de tensões.

Inicialmente, faz-se um estudo teórico detalhado do método e, a seguir, uma série de aplicações numéricas. Para as aplicações foi elaborado um programa automático ao qual procurou-se dar certa eficiência, podendo ser ressaltada a utilização de uma técnica de esparsidade na montagem do sistema global de equações.

Abstract

This work deals with the study of a process of utilization of the irregular meshes in the Method of Finite Differences, which makes the solution of partial differential equations possible up to the second order.

The process is, thus, applied to the solution of simply supported plates and of plates under a plane stress state.

Preliminarly, we study the theory of the method in detail and, then, we show a series of numerical applications. An automatic program was conceived for the applications, to which we tried to provide a certain degree of efficiency, emphasizing the use of a sparse matrices technique in assembling the global system of equations.

Índice | Pág.

Pág.

Notação utilizada no desenvolvimento teórico:

u, v, w	- *deslocamentos de um ponto da placa respectivamente nas direções x, y e z*
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$	- *deformações em um ponto da placa*
$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$	- *tensões em um ponto da placa ou da chapa*
E -	- *módulo de elasticidade longitudinal*
ν	- *coeficiente de Poisson*
G	- *módulo de elasticidade transversal*
h	- *espessura da placa*
D	- *rigidez à flexão*
M_x, M_y	- *momentos fletores em um ponto da placa*
M_{xy}	- *momento de torção em um ponto da placa*
Q_x, Q_y	- *esforços cortantes em um ponto da placa*
q	- *carga por unidade de área da placa*
M	- *momento soma em um ponto da placa*
ρ_x, ρ_y	- *forças sobre um ponto do contorno da chapa segundo as direções x e y*
ℓ, m	- *cossenos diretores da normal a um ponto do contorno da chapa segundo as direções x e y*
∇	- *operador Laplaciano*
$\Phi(x, y)$	- *função de tensões ou função de Airy*

σ - *soma das tensões* σ_x *e* σ_y *em um ponto da chapa*

F_x, F_y - *forças de massa atuantes sobre a chapa segundo as direções* x *e* y

δ_x - *diferença entre a abcissa de um ponto de controle e a abcissa de seu ponto central*

δ_y - *diferença entre a ordenada de um ponto de controle e a ordenada de seu ponto central*

b_{iKj} - *elementos das inversas das matrizes de controle*

$c_{\ell K}$ - *coeficientes de derivadas*

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Dos problemas surgidos em cálculo estrutural, só os mais simples e os casos mais particulares têm suas soluções teóricas completas e totalmente dissecadas. Devido a esta dificuldade, é sempre válido tentarmos elaborar novos métodos numéricos, ou removermos obstáculos enfrentados pelos métodos já existentes, com o intuito de conseguirmos soluções aproximadas para certos problemas.

A curiosidade de sabermos as causas do lento progresso do Método das Diferenças Finitas e o objetivo de darmos uma modesta contribuição ao seu desenvolvimento, deram origem a este trabalho.

Segundo TIMOSHENKO[1], a primeira aplicação do Método das Diferenças Finitas, a problemas de elasticidade, foi realizada por C.Runge, em 1908, ao resolver problemas de torção. Daí em diante várias aplicações foram executadas, mas sempre bastante limitadas pela utilização de malhas regulares. Foi citado por ZIENKIEWICZ[3] que a diferença crítica entre os métodos dos Elementos Finitos e das Diferenças Finitas é a inabilidade deste último de tratar domínios irregulares.

Por volta de 1946, SOUTHWELL[4] publicou o que ele denominou de Método da Relaxação, podendo com ele tratar malhas triangulares e hexagonais.

Em 1959, SANTOS[5] apresentou nas jornadas Sul-Americanas, realizadas no Chile, o cálculo de placas com um contorno poligonal qualquer. Baseado no trabalho de Santos, BENETTI[6] solucionou chapas com contorno poligonal.

O cálculo de placas com esconsidade, foi realizado por SERAPHICO[7], trabalhando com os operadores de Diferenças Finitas em coordenadas oblíquas, e fazendo um confronto com o Método dos Elementos Finitos.

Mais recentemente, 1974, PERRONE e KAO[8] utilizaram uma malha irregular para apresentarem, pelo Método das Diferenças Finitas, a solução de uma equação diferencial de Poisson e de uma membrana submetida a grandes deformações.

No presente trabalho, utilizando o modelo de malha irregular exposto na referência (8), apresentamos a solução de placas simplesmente apoiadas e de chapas submetidas a um estado plano de tensões pelo Método das Diferenças Finitas. Limitamos o processo à resolução de equações diferenciais parciais até segunda ordem. Por este motivo tivemos que fazer redução de ordem nas equações de placas e chapas, resolvendo os problemas em dois passos de cálculo.

Acreditamos que a importância da pesquisa se deva ao emprego de malhas irregulares, propiciando o exame de peças com contornos diversos. Procuramos ressaltar uma formulação matricial e de fácil automatização com o intuito de incentivar novas aplicações nesta área.

Reservamos o Capítulo II para elaborar um pequeno resumo das equações de placas e chapas que necessitamos ao *longo do texto.*

No Capítulo III fazemos uma explanação detalhada do método e do modelo de malha a ser empregado.

Utilizamos o Capítulo IV para expor e justificar as principais idéias que foram postas em prática durante a programação. Dentre essas idéias podemos citar: o emprego de partição na inversão das matrizes de controle e o uso de uma técnica de esparsidade na montagem da matriz global.

Os resultados de alguns exemplos são apresentados no Capítulo V, seguidos de conclusões sempre que possível justificadas, e de algumas sugestões. Comprovamos que o método apresentou resultados com boa margem de precisão e se mostrou bem eficiente quanto ao tempo de processamento e economia de memória.

CAPÍTULO II

Relações Básicas das Teorias de Placas e Chapas

Neste capítulo estabelecemos de forma bem resumida as relações básicas da teoria das placas delgadas e das chapas sob estado plano de tensões que necessitamos utilizar ao longo dos capítulos seguintes.

1. Placas delgadas: Como ponto de partida consideremos uma pequena porção de uma placa, cujo plano médio esteja situado no plano xoy conforme ilustra a figura (II-1)

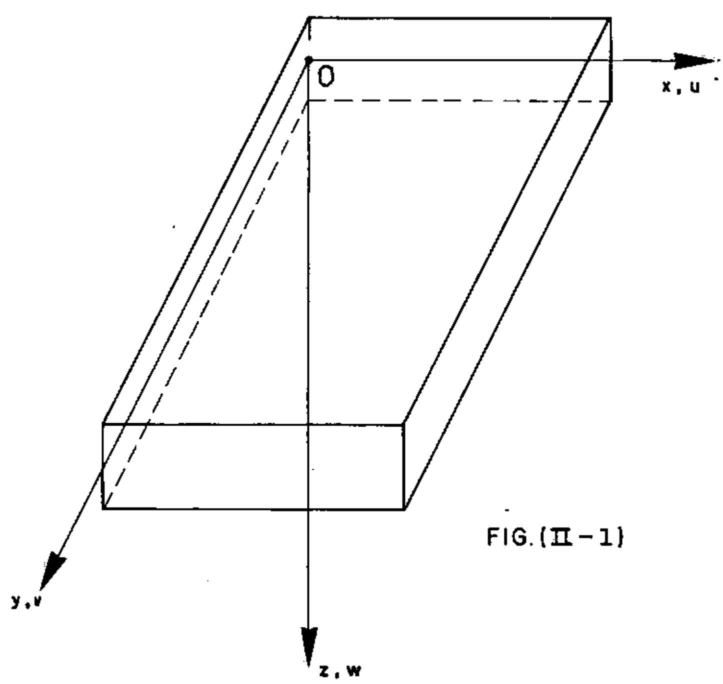


FIG. (II-1)

1.1. Relações entre deslocamentos, deformações e tensões:

Façamos um corte através de um plano xoz, e analisemos a porção da placa antes e depois de deformada, como mostra a figura (II-2).

Tendo em vista as hipóteses simplificadoras do estudo das placas delgadas, relacionemos os deslocamentos $\underline{\underline{u}}$ e $\underline{\underline{w}}$ de um ponto da placa.

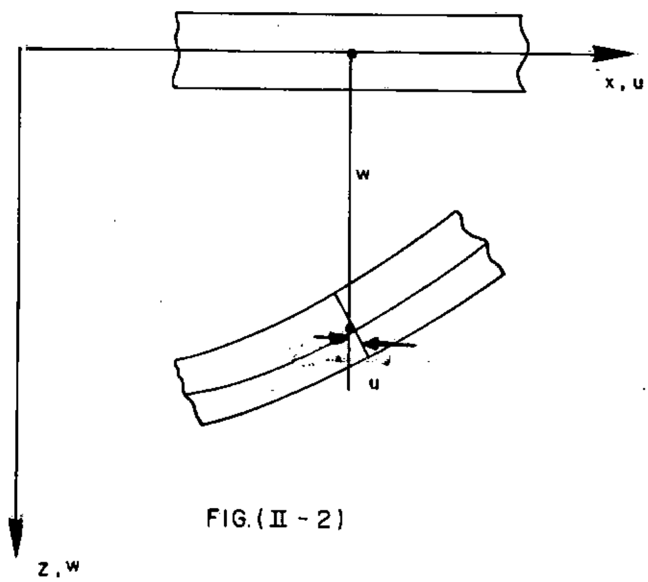


FIG.(II - 2)

Para isto, observemos a figura (II-3), que mostra a porção da placa depois de deformada, de uma maneira mais detalhada.

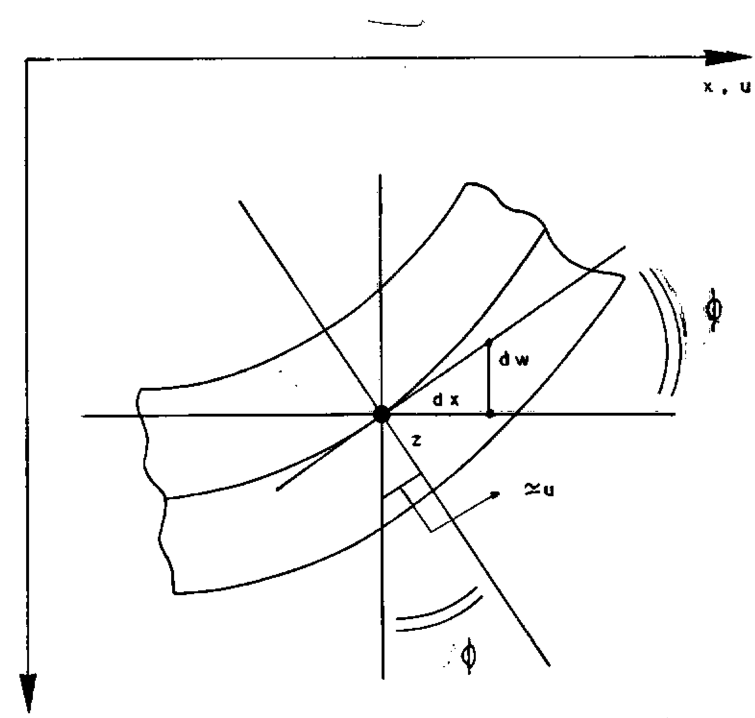


FIG.(II -3)

Escrevamos, então, baseados na referida figura:

$$tg\phi = \frac{u}{z} \quad e \quad tg\phi = -\frac{dw}{dx}$$

Igualemos as duas expressões de $tg\phi$, *para termos:*

$$\frac{u}{z} = -\frac{dw}{dx}$$

Ou, como $w = w(x, y)$:

$$\frac{u}{z} = -\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\boxed{u = -z \, . \, \frac{\partial w}{\partial x}} \quad \text{Eq. (II-1)}$$

A seguir, apenas citemos a relação entre os deslocamentos $\underline{\underline{v}}$ *e* $\underline{\underline{w}}$, *obtida de forma inteiramente análoga.*

$$\boxed{v = -z \, . \, \frac{\partial w}{\partial y}} \quad \text{Eq. (II-2)}$$

Consideremos, agora, as relações por demais conhecidas entre deformações e deslocamentos.

$$\boxed{\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}} \qquad \boxed{\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}} \qquad \boxed{\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}}$$

Eq. (II-3) *Eq. (II-4)* *Eq. (II-5)*

Substituamos as equações (II-1) e (II-2) nas equações (II-3), (II-4) e (II-5), para obtermos as relações entre as deformações e o deslocamento transversal w*.*

$$\boxed{\varepsilon_x = -z.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}$$
(Eq. (II-6)

$$\boxed{\varepsilon_y = -z.\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}}$$
(Eq. (II-7)

$$\boxed{\gamma_{xy} = -2.z.\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}}$$
(Eq. II-8)

A esta altura introduzamos a lei de Hooke, cujas expressões, explicitadas as tensões, são transcritas nas equações (II-9), (II-10) e (II-11)

$$\boxed{\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}.(\varepsilon_x + \nu.\varepsilon_y)} \quad \text{Eq. (II-9)}$$

$$\boxed{\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}.(\varepsilon_y + \nu.\varepsilon_x)} \quad \text{Eq. (II-10)}$$

$$\boxed{\tau_{xy} = G.\gamma_{xy}} \quad \text{Eq. (II-11)}$$

Substituamos as equações (II-6), (II-7) e (II-8) nas equações (II-9), (II-10) e (II-11), para obtermos finalmente as relações entre as tensões e o deslocamento transversal w*.*

$$\boxed{\sigma_x = -\frac{E.z}{1-\nu^2}.\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu.\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)} \quad \text{Eq. (II-12)}$$

$$\boxed{\sigma_y = -\frac{E.z}{1-\nu^2}.\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)} \quad \text{Eq, (II-13)}$$

$$\boxed{\gamma_{xy} = -\frac{E.z}{1-\nu^2}.\ (1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}} \quad \text{Eq. (II-14)}$$

Observemos na figura (II-4) o sentido positivo que será adotado para as tensões no decorrer deste trabalho.

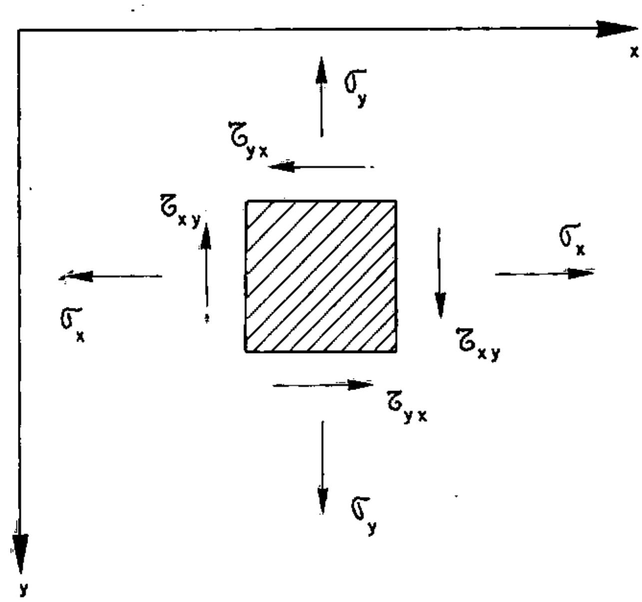


FIG. (II- 4)

1.2. Expressões dos momentos fletores e de torção por unidade de comprimento:

As expressões dos momentos fletores e de torção serão obtidas a partir da integração das tensões ao longo da *espessura* $\underline{\underline{h}}$ *da placa.*

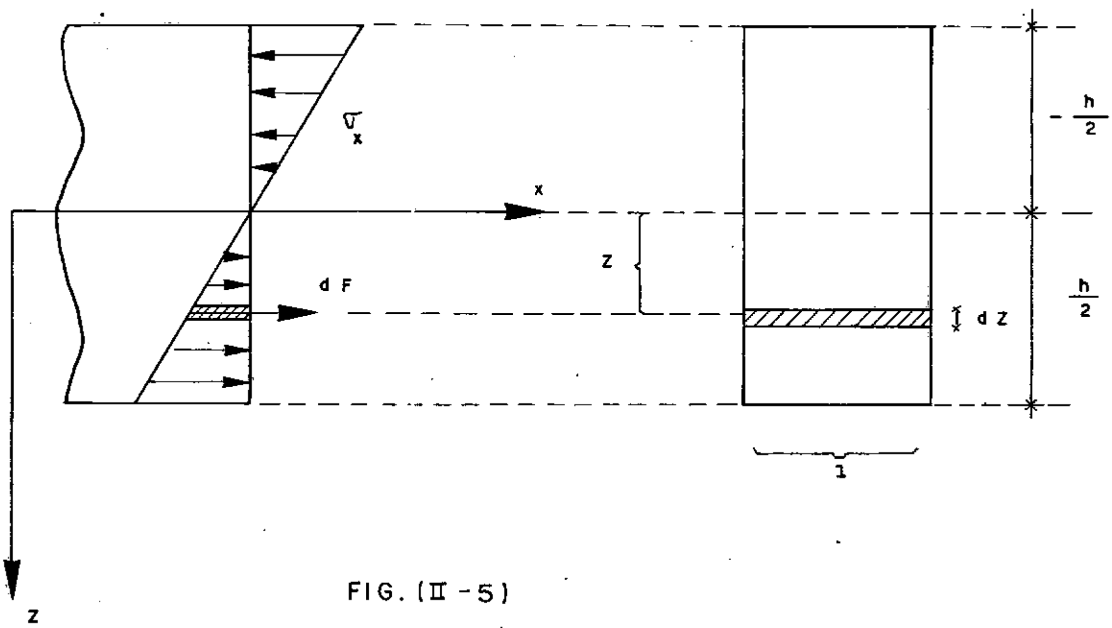


FIG. (II-5)

Observemos a figura (II-5), e escrevamos, para uma largura unitária:

$$dF = \sigma_x \cdot 1 \cdot dz = \sigma_x . \, dz$$

Teremos, então, o momento devido à força dF.

$$d\,M_x = dF \cdot z = \sigma_x \cdot z \cdot dz$$

Integremos esta expressão em z para obtermos M_x.

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x . \, z . \, dz$$

Substituamos σ_x *pela sua expressão dada na equação (II-12).*

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} - \frac{E.z}{1-\nu^2}.\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right).z.dz$$

$$M_x = -\frac{E}{1-\nu^2}.\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu.\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right).\int_{-h/2}^{h/2} z^2\, dz$$

$$M_x = -\frac{E.h^3}{12.(1-\nu^2)}.\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

Façamos $\frac{E.h^3}{12.(1-\nu^2)}$ = *D(rigidez à flexão)*

Finalmente anotemos:

$$\boxed{M_x = -D.\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu.\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)} \quad \text{Eq. (II-15)}$$

Através de deduções inteiramente semelhantes chegaríamos às expressões de M_y *e* M_{xy}.

$$\boxed{M_y = -D.\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)} \quad \text{Eq. (II-16)}$$

$$M_{xy} = D.\ (1 - \nu).\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \qquad \text{Eq. (II-17)}$$

1.3. *Equação diferencial das placas delgadas:*

A seguir, observando a figura (II-6) onde estão representados os esforços atuantes sobre um elemento de placa com seus sentidos positivos, escrevamos as equações de equilíbrio para este elemento.

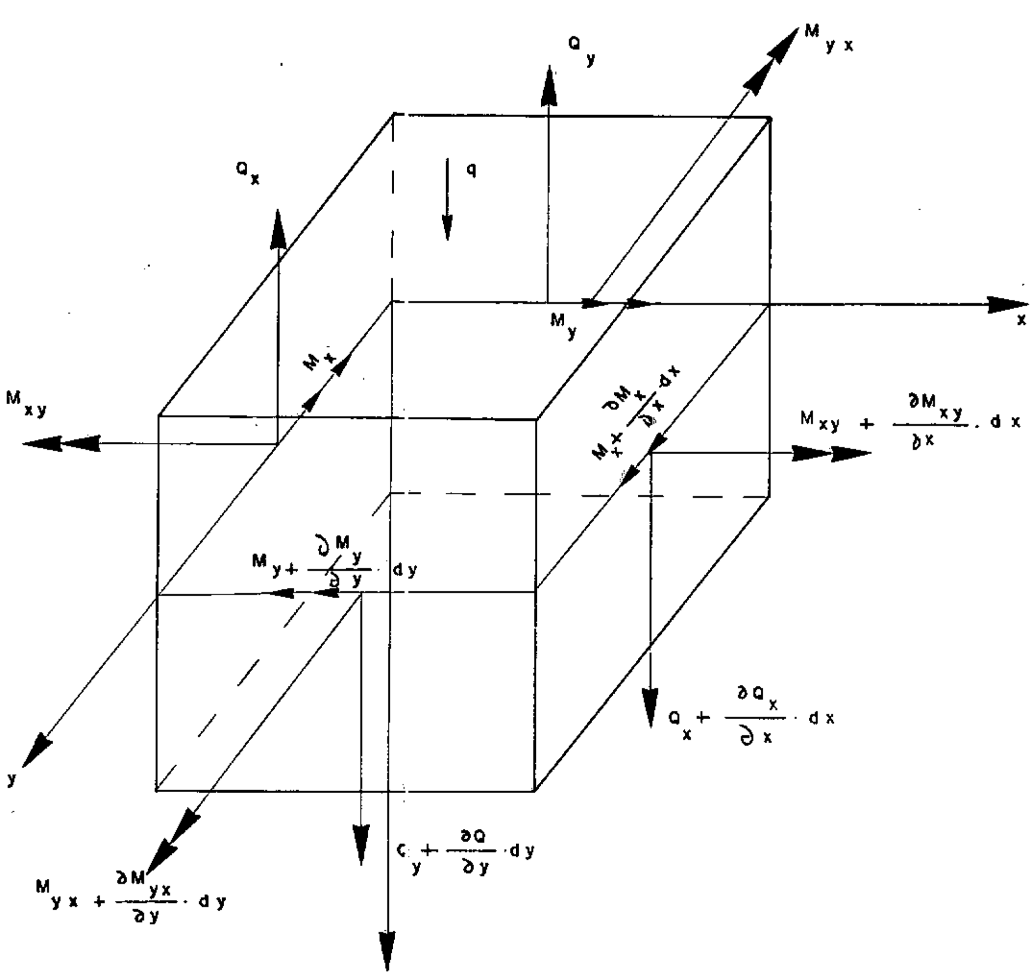


FIG. (II-6)

a) Equilíbrio de momentos em relação a x:

$$(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}.dx).dy - M_{xy}.dy + M_y.dx - (M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y}.dy).dx +$$

$$+ (Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y}.dy).dy.dx = 0$$

Simplifiquemos e desprezemos o infinitésimo de terceira ordem para termos:

$$\boxed{\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0} \quad \text{Eq. (II-18)}$$

b) Equilíbrio de momentos em relação a y:

$$(M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y}.dy).dx - M_{yx}.dx + (M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x}.dx).dy - M_x.dy -$$

$$- (Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x}.dx).dy.dx = 0$$

ou:

$$\boxed{\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x = 0} \quad \text{Eq. (II-19)}$$

c) Equilíbrio de forças na direção z:

$$\left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x}.dx\right).dy - Q_x.dy + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y}dy\right).dx - Q_y.dx + q.dx.dy = 0$$

ou

$$\boxed{\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0} \qquad \text{Eq. (II-20)}$$

Reunamos estas três equações de equilíbrio numa só equação. Para isso derivemos as equações (II-18) e (II-19) em relação a y e x, respectivamente.

ou:

$$\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0 \quad e \quad \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial y\ \partial x} - \frac{\partial Q_x}{\partial x} = 0$$

Ou, explicitando as derivadas dos cortantes:

$$\frac{\partial Q_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} \qquad e \qquad \frac{\partial Q_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial y \partial x}$$

Substituamos estas duas expressões na equação (II-20), para obtermos:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q = 0$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 . \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = - q$$

A esta altura, introduzamos as expressões de M_x, M_y *e* M_{xy} *em função do deslocamento transversal* w, *dadas pelas equações (II-15), (II-16) e (II-17).*

$$- D . \frac{\partial^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu . \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)}{\partial x^2} - 2 . D . (1-\nu) . \frac{\partial^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)}{\partial x \partial y} - D . \frac{\partial^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu . \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)}{\partial y^2} = - q$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu . \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 . (1-\nu) . \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \nu . \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{q}{D}$$

ou, finalmente:

$$\boxed{\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 . \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}} \quad \text{Eq. (II-21)}$$

Esta equação (II-21) é a equação diferencial das placas delgadas. Resolver uma placa é, portanto, resolver esta equação, respeitando as condições de contorno, determinando $w(x,y)$. *A partir de* w *todos os elementos necessários ao cálculo da placa podem ser encontrados.*

Escrevamos a equação (II-21) numa forma mais compacta.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) w = \frac{q}{D}$$

Ou seja:

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q}{D}$$

$$\boxed{\nabla^4 w = \frac{q}{D}} \quad \text{Eq. (II-22)}$$

1.4. Processo de redução de ordem de Marcus:

Utilizemos o processo de Marcus para transformarmos a equação diferencial das placas, que é de quarta ordem , em duas equações diferenciais de segunda ordem, já que limitamos nosso processo de resolução por Diferenças Finitas a equações de segunda ordem.

Para isto, somemos as equações (II-15) e (II-16) para obtermos:

$$M_x + M_y = - D.\ (1 + \nu).\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{M_x + M_y}{1 + \nu} = - D.\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

Façamos $\dfrac{M_x + M_y}{1 + \nu} = M$ *(momento soma)*

Logo:

$$M = - D. \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = - \frac{M}{D}} \quad \text{Eq. (II-23)}$$

Tomemos novamente a equação das placas, agora na forma:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = \frac{q}{D}$$

Substituamos, nesta expressão, a equação (II-23).

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \left(- \frac{M}{D}\right) = \frac{q}{D}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = - q} \quad \text{Eq. (II-24)}$$

As duas equações de segunda ordem, (II-23) e (II-24), serão usadas em substituição à equação de quarta or-

dem (II-21).

1.6. Condições de contorno:

No caso de placas simplesmente apoiadas as condições de contorno a considerar são muito simples. Neste caso, teremos ao longo dos bordos os deslocamentos transversais e os momentos nulos.

Ou seja, no contorno, $w = 0$ *e* $M_n = 0$

2. Chapas: Estabeleçamos, agora, as relações que utilizaremos na solução de chapas.

2.1. Estado plano de tensões:

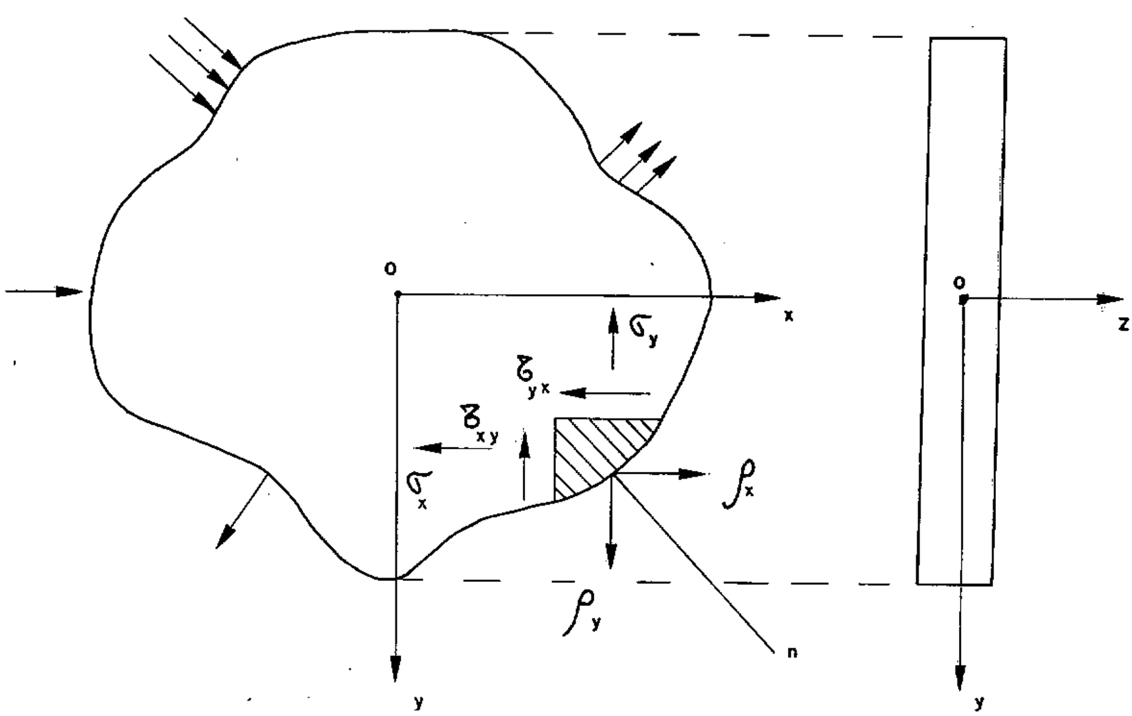


FIG.(II-7)

Baseemo-nos na figura (II-7) para transcrevermos as equações por demais conhecidas da elasticidade, consideran *do forças de massa nulas.*

Equações de equilíbrio
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Equação de compatibilidade
$$\begin{cases} \nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \end{cases}$$

Condições de contorno
$$\begin{cases} \rho_x = l.\ \sigma_x + m.\ \tau_{xy} \\[2ex] \rho_y = l.\ \tau_{xy} + m.\ \sigma_y \end{cases}$$

Resolver uma chapa é encontrar as tensões σ_x, σ_y *e* τ_{xy}, *de forma a atender simultaneamente às equações de equilíbrio, à equação de compatibilidade e às condições de contorno.*

2.2. Função de tensões ou função de Airy:

Uma forma engenhosa de resolver o problema proposto na secção anterior, ou seja, encontrar σ_x, σ_y *e* τ_{xy}, *é definir uma função* $\Phi(x,y)$, *denominada de função de tensões ou função de Airy. Definamos* $\Phi(x,y)$ *como sendo uma função que se relaciona com as tensões de acordo com as seguintes expressões:*

$$\boxed{\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}} \qquad \boxed{\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}} \qquad \boxed{\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}}$$

Eq. (II-25) *Eq. (II-26)* *Eq. (II-27)*

Substituamos as equações (II-25), (II-26) e (II-27) nas equações de equilíbrio.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}\right)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial y^2} = 0$$

e:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \left(-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}\right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)}{\partial y} = 0$$

$$-\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y \partial x^2} = 0$$

Logo, constatamos que a função Φ satisfaz automaticamente às equações de equilíbrio.

Substituamos, agora, as equações (II-25), (II-26) e (II-27) na equação de compatibilidade.

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0$$

Chegamos, finalmente, a uma equação diferencial parcial de quarta ordem, que denominamos de equação bi-harmônica.

$$\boxed{\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \, \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0} \quad \text{Eq. (II-28)}$$

Podemos concluir, que resolver uma chapa é encontrar uma $\Phi(x, y)$ que atenda à equação (II-28) e, naturalmente, satisfaça às condições de contorno. Com a função $\Phi(x,y)$ podemos calcular as tensões diretamente através das equações (II-25), (II-26) e (II-27).

2.3. Redução de ordem da equação bi-harmônica:

Façamos a redução de ordem da equação bi-harmônica, transformando-a num conjunto de duas equações diferenciais parciais de segunda ordem. Para isto, tomemos a equação bi-harmônica na seguinte forma:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right) = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

Façamos $\sigma_x + \sigma_y = \sigma$

Então: $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \sigma = 0$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} = 0} \quad \text{Eq. (II-29)}$$

Como $\sigma_x + \sigma_y = \sigma$ *, temos:*

$$\boxed{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \sigma} \quad \text{Eq. (II-30)}$$

Portanto, a equação bi-harmônica pode ser substituída pelas equações (II-29) e (II-30).

2.4. Consideração de forças de massa:

Vejamos o que acontece se acrescentarmos ao nosso problema forças de massa constantes F_x e F_y, respectivamente, segundo as direções x e y.

Podemos concluir, facilmente, que o problema pode continuar sendo tratado da mesma forma que o tratamos até aqui. A única diferença é que como F_x e F_y serão acrescentadas às equações equilíbrio, para que estas equações continuem sendo satisfeitas temos que redefinir a função $\Phi(x, y)$ como se segue:

$$\boxed{\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - F_x . x} \quad \text{Eq. (II-31)}$$

$$\boxed{\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - F_y . y} \quad \text{Eq. (II-32)}$$

$$\boxed{\tau_{xy} = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}} \quad \text{Eq. (II-33)}$$

O caso prático mais comum é termos $F_x = 0$ e F_y = peso próprio.

2.5. *Condições de contorno:*

Para a resolução das equações (II-29) e (II-30) temos que conhecer σ e Φ no contorno.

A figura (II-8) mostra um elemento infinitesimal do bordo de uma chapa. Através do equilíbrio deste elemento, escrevamos:

$$\begin{cases} \sigma_x . \ (- dy) + \tau_{xy} . \ dx = \rho_x . \ ds \\ \sigma_y . \ dx - \tau_{xy} . \ dy = \rho_y . \ ds \end{cases}$$

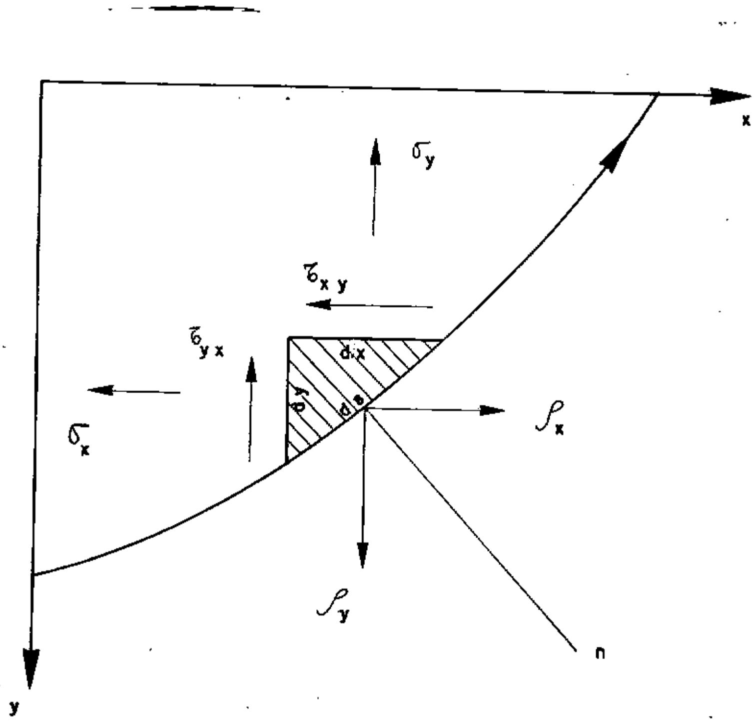


FIG. (II - 8)

Ou então:

$$\begin{cases} -\sigma_x \cdot \dfrac{dy}{ds} + \tau_{xy} \cdot \dfrac{dx}{ds} = \rho_x \\ \\ -\sigma_y \cdot \dfrac{dx}{ds} - \tau_{xy} \cdot \dfrac{dy}{ds} = \rho_y \end{cases}$$

Lembrando do cálculo diferencial que

$\dfrac{\partial}{\partial s} = \dfrac{\partial}{\partial x} \cdot \dfrac{dx}{ds} + \dfrac{\partial}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{ds}$ *, podemos escrever as duas equações anteriores da seguinte forma:*

$$\boxed{-\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) = \rho_x} \qquad \boxed{\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = \rho_y}$$

Eq. (II-34) *Eq. (II-35)*

Estas equações podem nos levar, em alguns casos particulares, a certos valores no contorno que nos interessam.

Exemplo:

Bordo paralelo a x

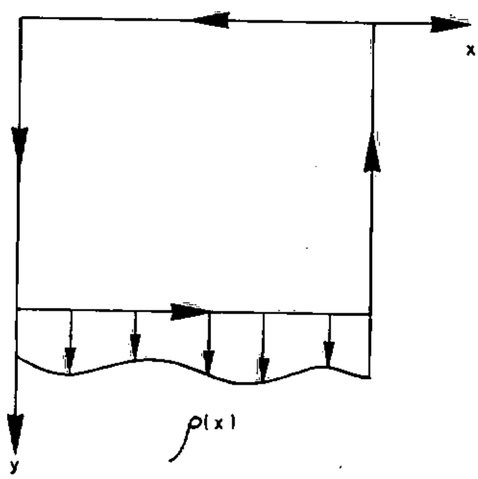


FIG.(II-9)

Neste caso:

$$\rho_y = \rho(x)$$

$$\rho_x = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial x}$$

Apliquemos a equação (II-35) para termos:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = \rho\ (x)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \rho\ (x)$$

$$\sigma_y = \rho\ (x)$$

Apliquemos a equação (II-34) para termos:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) = 0$$

$$-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\tau_{xy} = 0$$

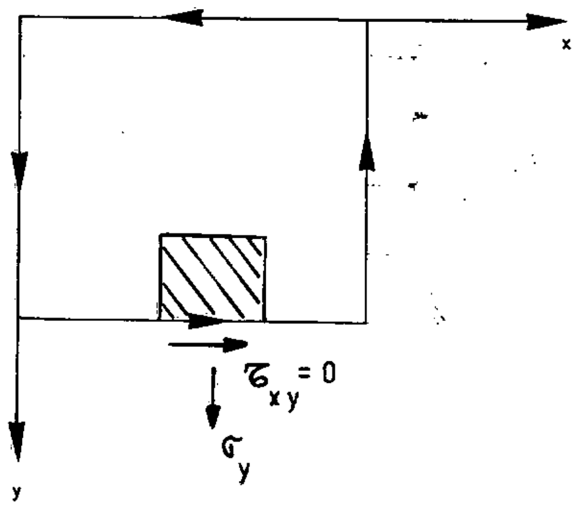


FIG. (II-10)

Estabeleçamos, agora, o valor de Φ no contorno.

Para isto, tomemos sobre o contorno um ponto genérico P e um ponto fixo Q que nos sirva de origem, de acordo com a figura (II-11).

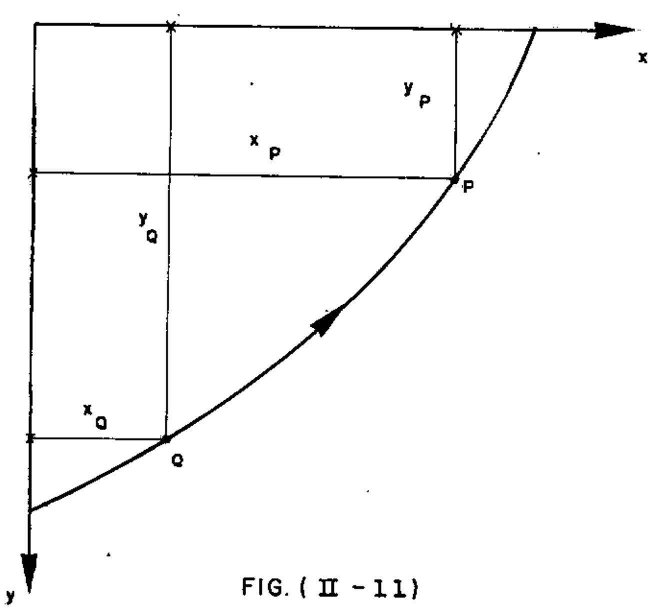


FIG. (II-11)

Baseados nas equações (II-34) e (II-35), escrevamos no ponto genérico P:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = \int_Q^P \rho_y .\ ds + K_x \qquad \text{Eq. (II-36)}$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) = -\int_Q^P \rho_x .\ ds + K_y \qquad \text{Eq. (II-37)}$$

Onde K_x *e* K_y *são constantes que expressam, respectivamente, os valores de* $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ *e* $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ *no ponto* Q, *ou seja:* $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_Q = K_x$ *e* $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_Q = K_y$.

Levemos também em conta que:

$\int_Q^P \rho_y .\ ds = R_y$ *(resultante das forças externas no contorno, na direção* y, *entre* Q *e* P*)*

$\int_Q^P \rho_x .\ ds = R_x$ *(resultante das forças externas no contorno, na direção* x, *entre* Q *e* P*)*

Sendo assim, reescrevamos as equações (II-36) e (II-37) como se segue:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_P = R_y + K_x$$

Eq. (II-38)

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_P = - R_x + K_y$$

Eq. (II-39)

Partamos, agora, da relação fornecida pelo cálculo diferencial

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} . \; dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} . \; dy$$

Integrando temos:

$$\int_Q^P d\Phi = \int_Q^P \frac{\partial \Phi}{\partial x} . \; dx + \int_Q^P \frac{\partial \Phi}{\partial y} . \; dy$$

Usemos as equações (II-38) e (II-39) para ficarmos com:

$$\Phi_p - \Phi_Q = \int_Q^P (R_y + K_x) . \; dx + \int_Q^P (- R_x + K_y) . \; dy$$

$$\Phi_P - \Phi_Q = \int_Q^P R_y . \; dx + \int_Q^P K_x . \; dx - \int_Q^P R_x . \; dy + \int_Q^P K_y . \; dy$$

$$\Phi_P - \Phi_Q = \int_Q^P R_y . \; dx - \int_Q^P R_x . \; dy + K_x . (x_P - x_Q) + K_y . (y_P - y_Q)$$

Resolvamos, então, as duas integrais restantes por partes, para ficarmos com nossa expressão na seguinte forma:

$$\Phi_P - \Phi_Q = R_y . x_P - \int_Q^P x . dR_y - R_x . y_P + \int_Q^P y . dR_x + K_x . (x_P - x_Q) + K_y . (y_P - y_Q)$$

Examinemos as figuras (II-12) e (II-13), para notarmos que $\int_Q^P x \, . \, dR_y$ *representa o momento total das forças de direção y em relação a origem dos eixos coordenados, podendo portanto ser escrita como* $R_y \, . \, x_R$*. E, analogamente,* $\int_Q^P y \, . \, dR_x = R_x \, . \, y_R$

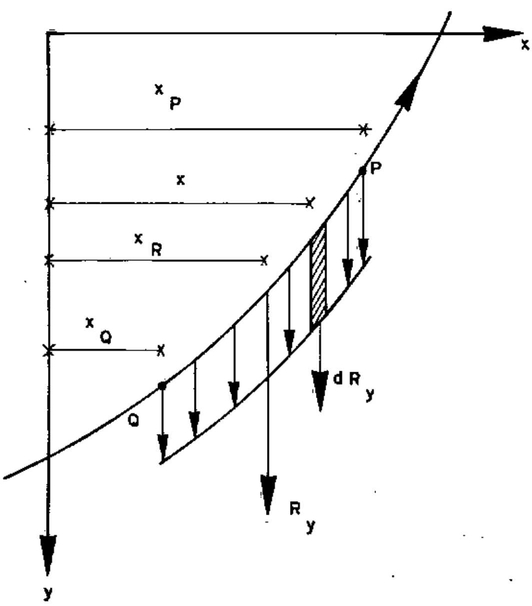


FIG.(II-12)

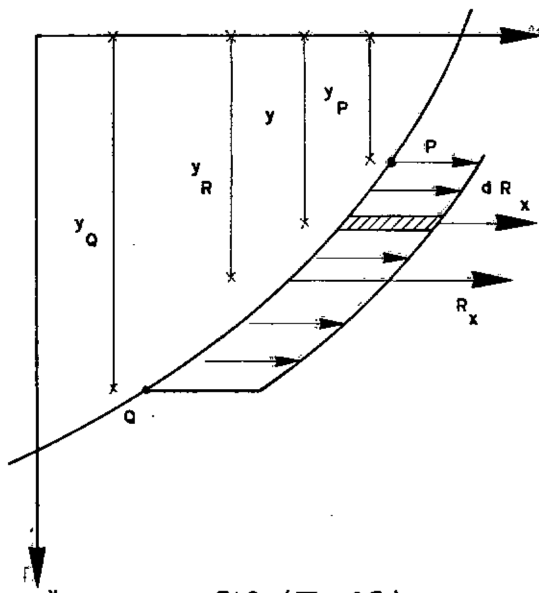


FIG. (II-13)

Com isto, ficamos com a seguinte expressão:

$$\Phi_P - \Phi_Q = R_y . x_P - R_y . x_R - R_x . y_P + R_x . y_R + K_x . (x_P - x_Q) + K_y . (y_P - y_Q)$$

$$\Phi_P - \Phi_Q = R_y . (x_P - x_R) + R_x . (y_R - y_P) + K_x . x_P + K_y . y_P - K_x . x_Q - K_y . y_Q$$

Observemos, mais uma vez, as figuras (II-12) e (II-13) para anotarmos:

$R_y.(x_P - x_R) = M_{yP}$ *(momento das forças de contorno de direção y, existentes no trecho PQ, em relação ao ponto P)*

$R_x.(y_R - y_P) = M_{xP}$ *(momento das forças de contorno de direção x, existentes no trecho PQ, em relação ao ponto P)*

Portanto:

$$\Phi_P - \Phi_Q = M_{yP} + M_{xP} + K_x.\ x_P + K_y.\ y_P - K_x.\ x_Q - K_y.\ y_Q$$

Ou ainda:

$$\Phi_P = M_P + K_x.\ x_P + K_y.\ y_P - K_x.\ x_Q - K_y.\ y_Q + \Phi_Q$$

Sendo M_P o momento de todas as forças de contorno, existentes no trecho PQ, em relação a P.

Façamos $- K_x.\ x_Q - K_y.\ y_Q + \Phi_Q = K$ *(constante)*

Então:

$$\Phi_P = M_P + K_x.\ x_P + K_y.\ y_P + K$$

A função linear $K_x.\ x_P + K_y.\ y_P + K$ não tem influência sobre o estado de tensões da peça, já que sabemos que as tensões são funções das derivadas segundas de Φ_P. Logo K_x, K_y e K podem ser tomadas arbitrariamente. Por simplicidade façamos $K_x = K_y = K = 0$.

Logo:

$$\boxed{\Phi_P = M_P} \qquad \text{Eq. (II-40)}$$

A equação (II-40) nos permite calcular os valores de Φ no contorno.

CAPÍTULO III

Formulação do Método das Diferenças Finitas para uma Malha Irregular

Neste Capítulo descrevemos um processo que utiliza um modelo de malha irregular em diferenças finitas, na resolução numérica de equações diferenciais parciais até segunda ordem.

1. Esquema com cinco pontos de controle:

Consideremos uma certa função $f(x,y)$ definida em um domínio do plano xoy. Escrevamos o desenvolvimento em série de Taylor, para esta função, no entorno do ponto do domínio (x_o, y_o), levando em conta uma aproximação que envolva derivadas de até segunda ordem.

Teremos:

$$\boxed{f = f_o + \delta_x . \frac{\partial f_o}{\partial x} + \delta_y . \frac{\partial f_o}{\partial y} + \frac{\delta^2 x}{2} . \frac{\partial^2 f_o}{\partial x^2} + \frac{\delta^2 y}{2} . \frac{\partial^2 f_o}{\partial y^2} + \delta_x \, \delta_y \, \frac{\partial^2 f_o}{\partial x \partial y}}$$

Eq. (III-1)

onde:

$$f = f(x,y) \qquad f_o = f(x_o,y_o) \qquad \delta_x = x - x_o \qquad \delta_y = y - yo$$

A equação (III-1) é uma expressão envolvendo os valores de cinco tipos de derivadas no ponto (x_o, y_o), que são: $\frac{\partial f_0}{\partial x}$, $\frac{\partial f_0}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2}$ e $\frac{\partial^2 f_0}{\partial x \partial y}$. Portanto, se quisermos calcular os valores destas derivadas, teremos que aplicar a equação (III-1) a cinco pontos próximos de (x_0, y_0), que denominaremos de pontos de controle.

Imaginemos então uma maneira de dispor estes pontos de controle em torno do ponto (x_0, y_0) considerado. Chamemos o ponto (x_0, y_0) de ponto 0, e em torno dele vamos distribuir os pontos de controle 1, 2, 3, 4 e 5.

Tendo o ponto 0 como centro dividamos o plano em octantes, conforme a figura (III-1). Distribuamos os pontos 1,2,3 e 4 nos octantes que contêm os eixos coordenadas, circulando no sentido anti-horário. Finalmente, localizemos o ponto 5 no octante que fica entre os pontos 1 e 2.

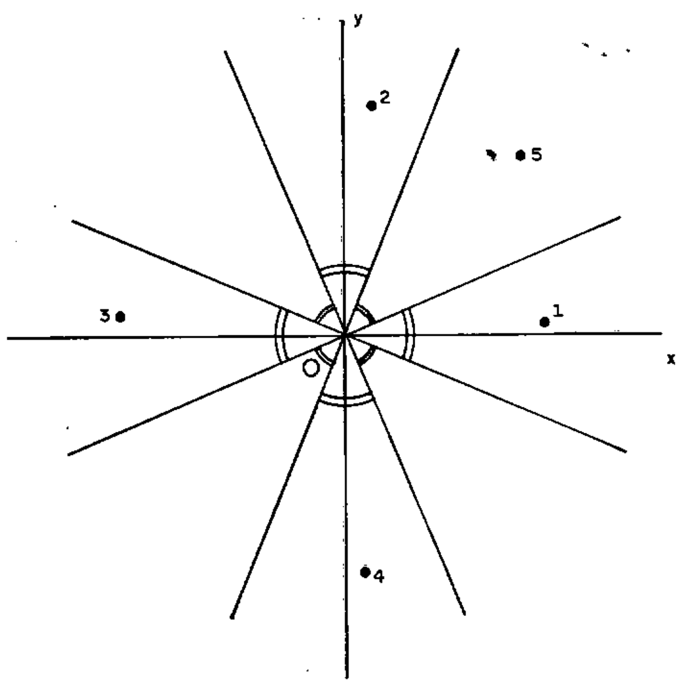


FIG.(III-1)

Apliquemos sucessivamente a equação (III-1) aos pontos 1, 2, 3, 4 e 5, formando com isso um sistema de cinco equações que pode ser escrito na seguinte forma matricial.

$$\begin{bmatrix} \delta_{x1} & \delta_{y1} & \frac{\delta^2_{x1}}{2} & \frac{\delta^2_{y1}}{2} & \delta_{x1}\cdot & \delta_{y1} \\ \delta_{x2} & \delta_{y2} & \frac{\delta^2_{x2}}{2} & \frac{\delta^2_{y2}}{2} & \delta_{x2}\cdot & \delta_{y2} \\ \delta_{x3} & \delta_{y3} & \frac{\delta^2_{x3}}{2} & \frac{\delta^2_{y3}}{2} & \delta_{x3}\cdot & \delta_{y3} \\ \delta_{x4} & \delta_{y4} & \frac{\delta^2_{x4}}{2} & \frac{\delta^2_{y4}}{2} & \delta_{x4}\cdot & \delta_{y4} \\ \delta_{x5} & \delta_{y5} & \frac{\delta^2_{x5}}{2} & \frac{\delta^2_{y5}}{2} & \delta_{x5}\cdot & \delta_{y5} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_o}{\partial x} \\ \frac{\partial f_o}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 f_o}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 f_o}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 f_o}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 - f_o \\ f_2 - f_o \\ f_3 - f_o \\ f_4 - f_o \\ f_5 - f_o \end{Bmatrix}$$

Eq. (III-2)

Examinemos, agora, a que resultados chegamos, se aplicarmos o processo à malha regular da figura (III-2).

Neste caso, sendo λ o espaçamento da malha, o sistema de equações (III-2) assumirá a seguinte forma.

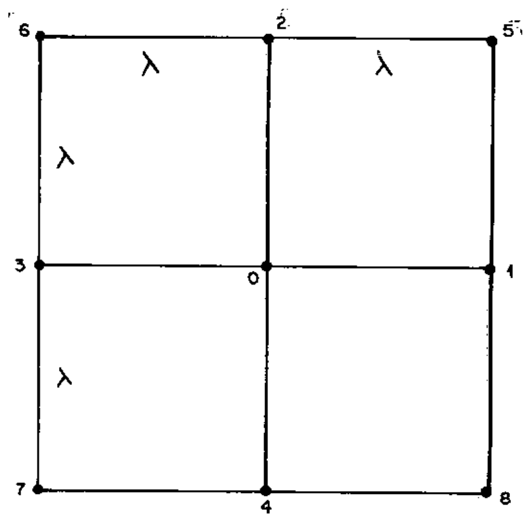


FIG. (III - 2)

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & \frac{\lambda^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \frac{\lambda^2}{2} & 0 \\ -\lambda & 0 & \frac{\lambda^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & \frac{\lambda^2}{2} & 0 \\ \lambda & \lambda & \frac{\lambda^2}{2} & \frac{\lambda^2}{2} & \lambda^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_o}{\partial x} \\ \frac{\partial f_o}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 f_o}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 f_o}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 f_o}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 - f_o \\ f_2 - f_o \\ f_3 - f_o \\ f_4 - f_o \\ f_5 - f_o \end{Bmatrix}$$

Resolvamos o sistema para calcularmos os valores das derivadas.

Utilizando a primeira e a terceira equações do sistema, temos:

$$\begin{cases} \lambda . \dfrac{\partial f_o}{\partial x} + \dfrac{\lambda^2}{2} . \dfrac{\partial^2 f_o}{\partial x^2} = f_1 - f_o \\ \\ -\lambda . \dfrac{\partial f_o}{\partial x} + \dfrac{\lambda^2}{2} . \dfrac{\partial^2 f_o}{\partial x^2} = f_3 - f_o \end{cases}$$

Subtraindo uma da outra, ficamos com:

$$2 . \lambda . \frac{\partial f_o}{\partial x} = f_1 - f_3$$

$$\boxed{\frac{\partial f_o}{\partial x} = \frac{f_1 - f_3}{2.\lambda}}$$

Adicionando uma com a outra ficamos com:

$$\lambda^2 . \frac{\partial^2 f_o}{\partial x^2} = f_1 + f_3 - 2. f_o$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f_o}{\partial x^2} = \frac{f_1 + f_3 - 2. f_o}{\lambda^2}}$$

Utilizando a segunda e a quarta equações do sistema, temos

$$\begin{cases} \lambda . \dfrac{\partial f_o}{\partial y} + \dfrac{\lambda^2}{2} . \dfrac{\partial^2 f_o}{\partial y^2} = f_2 - f_o \\ \\ - \lambda . \dfrac{\partial f_o}{\partial y} + \dfrac{\lambda^2}{2} . \dfrac{\partial^2 f_o}{\partial y^2} = f_4 - f_o \end{cases}$$

Subtraindo uma da outra, ficamos com:

$$2. \lambda . \frac{\partial f_o}{\partial y} = f_2 - f_4$$

$$\boxed{\frac{\partial f_o}{\partial y} = \frac{f_2 - f_4}{2.\ \lambda}}$$

Adicionando uma com a outra, ficamos com:

$$\lambda^2.\ \frac{\partial^2 f_o}{\partial y^2} = f_2 + f_4 - 2.\ f_o$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f_o}{\partial y^2} = \frac{f_2 + f_4 - 2.\ f_o}{\lambda^2}}$$

Finalmente, a quinta equação do sistema nos fornece:

$$\lambda.\ \frac{\partial f_o}{\partial x} + \lambda.\ \frac{\partial f_o}{\partial y} + \frac{\lambda^2}{2}.\ \frac{\partial^2 f_o}{\partial x^2} + \frac{\lambda^2}{2}.\ \frac{\partial^2 f_o}{\partial y^2} + \lambda^2.\ \frac{\partial^2 f_o}{\partial x \partial y} = f_5 - f_o$$

Introduzindo as expressões das derivadas já obtidas, temos:

$$\lambda.(\frac{f_1 - f_3}{2\lambda}) + \lambda.(\frac{f_2 - f_4}{2\lambda}) + \frac{\lambda^2}{2}.(\frac{f_1 + f_3 - 2.f_o}{\lambda^2}) + \frac{\lambda^2}{2}.(\frac{f_2 + f_4 - 2f_o}{\lambda^2}) + \lambda^2.\frac{\partial^2 f_o}{\partial x \partial y} = f_5 - f_o$$

ou:

$$2.\ \lambda^2.\ \frac{\partial^2 f_o}{\partial x \partial y} = 2.\ f_5 + 2.\ f_o - 2.\ f_1 - 2.\ f_2$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f_o}{\partial x \partial y} = \frac{f_5 + f_o - f_1 - f_2}{\lambda^2}}$$

Logo, a aplicação do esquema de cinco pontos de controle a uma malha regular, nos levou aos seguintes resultados para os valores das derivadas.

$$\text{Eq. (III-3)} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial f_o}{\partial x} &= \frac{f_1 - f_3}{2\lambda} \\ \frac{\partial f_o}{\partial y} &= \frac{f_2 - f_4}{2\lambda} \\ \frac{\partial^2 f_o}{\partial x^2} &= \frac{f_1 + f_3 - 2.f_o}{\lambda^2} \\ \frac{\partial^2 f_o}{\partial y^2} &= \frac{f_2 + f_4 - 2.f_o}{\lambda^2} \\ \frac{\partial^2 f_o}{\partial x \partial y} &= \frac{f_5 + f_o - f_1 - f_2}{\lambda^2} \end{aligned} \right.$$

Se agora aplicarmos à mesma malha as fórmulas usuais de diferenças finitas centrais, obteremos:

$$\text{Eq. (III-4)} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial f_o}{\partial x} &= \frac{f_1 - f_3}{2\lambda} \\ \frac{\partial f_o}{\partial y} &= \frac{f_2 - f_4}{2\lambda} \end{aligned} \right.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f_o}{\partial x^2} = \dfrac{f_1 + f_3 - 2.f_o}{\lambda^2} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f_o}{\partial y^2} = \dfrac{f_2 + f_4 - 2.f_o}{\lambda^2} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f_o}{\partial x \partial y} = \dfrac{f_5 + f_7 - f_6 - f_8}{4.\ \lambda^2} \end{cases}$$

Comparemos os conjuntos de equações (III-3) e (III-4). Vemos uma concordância perfeita nas expressões das quatro primeiras derivadas, porém o processo não fornece a derivada cruzada. Vemos, também, que nosso processo, até aqui de cinco pontos de controle, só poderá reproduzir a expressão da derivada cruzada, se for ampliado para oito pontos de controle, com a introdução dos pontos 6, 7 e 8.

2. *Esquema com oito pontos de controle:*

Continuemos com o sistema de octantes, proposto na secção 1, acrescentando os pontos 6,7 e 8, também distribuídos no sentido anti-horário dentro dos octantes ainda não ocupados, conforme a figura (III-3), sendo que agora ao invés de formarmos um sistema de cinco equações, formaremos quatro sistemas de cinco equações. Esses sistemas são formados, respectivamente, a partir dos conjuntos de pontos: 1,2,3,4 e 5; 1,2,3,4 e 6; 1,2,3,4 e 7; 1,2,3,4 e 8. Os resultados finais para as expressões das derivadas serão obtidos a partir

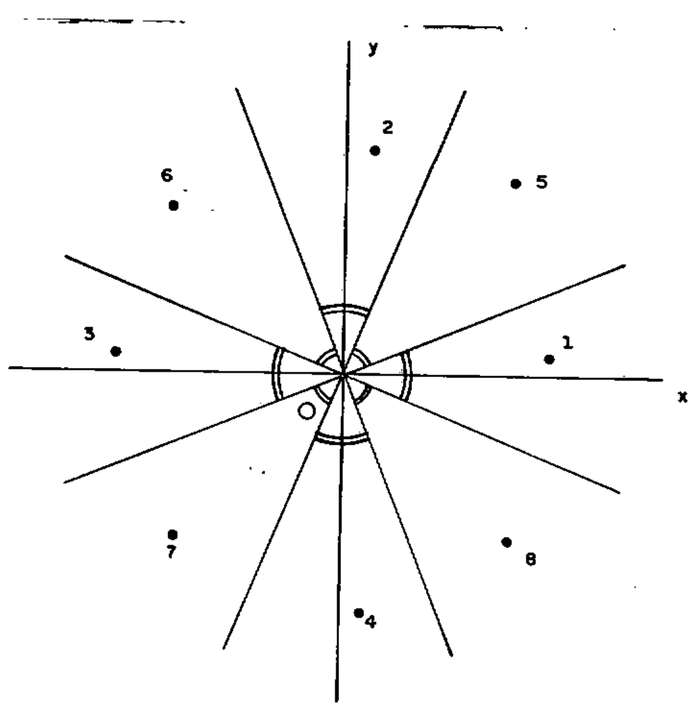


FIG. (III - 3)

das médias aritméticas das soluções desses quatro sistemas.

Escrevamos esses quatro sistemas numa única expressão matricial, como se segue:

$$\left\{\begin{matrix} \delta_{x1} & \delta_{y1} & \frac{\delta_{x1}^2}{2} & \frac{\delta_{y1}^2}{2} & \delta_{x1}\cdot & \delta_{y1} \\ \delta_{x2} & \delta_{y2} & \frac{\delta_{x2}^2}{2} & \frac{\delta_{y2}^2}{2} & \delta_{x2}\cdot & \delta_{y2} \\ \delta_{x3} & \delta_{y3} & \frac{\delta_{x3}^2}{2} & \frac{\delta_{y3}^2}{2} & \delta_{x3}\cdot & \delta_{y3} \\ \delta_{x4} & \delta_{y4} & \frac{\delta_{x4}^2}{2} & \frac{\delta_{y4}^2}{2} & \delta_{x4}\cdot & \delta_{y4} \\ \delta_{xj} & \delta_{yj} & \frac{\delta_{xj}^2}{2} & \frac{\delta_{yj}^2}{2} & \delta_{xj}\cdot & \delta_{yj} \end{matrix}\right\} \times \left\{\begin{matrix} \frac{\partial f_o}{\partial x} \\ \frac{\partial f_o}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 f_o}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 f_o}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 f_o}{\partial x \partial y} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} f_1 - f_o \\ f_2 - f_o \\ f_3 - f_o \\ f_4 - f_o \\ f_j - f_o \end{matrix}\right\} \quad \text{Eq.(III-5)}$$

com $j = 5, 6, 7, 8$

Denominemos as quatro matrizes (5 × 5), dos sistemas de equações dados na equação (III-5), de matrizes de controle do ponto 0.

Da mesma forma que fizemos na secção anterior, apliquemos este esquema de oito pontos de controle à malha regular da figura (III-2). Para isto, montemos e solucionemos, para a malha regular, os quatro sistemas dados na equação (III-5). Os quatro conjuntos de soluções estão expressos numa forma compacta, como se segue:

Soluções dos quatro sistemas de equações, com $j = 5, 6, 7$ e 8

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial f_o}{\partial x} &= \frac{f_1 - f_3}{2.\lambda} \\[2ex]
\frac{\partial f_o}{\partial y} &= \frac{f_2 - f_4}{2.\lambda} \\[2ex]
\frac{\partial^2 f_o}{\partial x^2} &= \frac{f_1 + f_3 - 2.f_o}{\lambda^2} \\[2ex]
\frac{\partial^2 f_o}{\partial y^2} &= \frac{f_2 + f_4 - 2.f_o}{\lambda^2} \\[2ex]
\frac{\partial^2 f_o}{\partial x \partial y} &= (-1)^j . \left(\frac{f_1 + f_2 - f_o - f_j}{\lambda^2}\right)
\end{aligned}
\right.
$$

Nossa solução final será dada pela média aritmética das soluções dos quatro sistemas.

Solução final

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial f_o}{\partial x} &= \frac{f_1 - f_3}{2.\lambda} \\[2ex]
\frac{\partial f_o}{\partial y} &= \frac{f_2 - f_4}{2.\lambda} \\[2ex]
\frac{\partial^2 f_o}{\partial x^2} &= \frac{f_1 + f_3 - 2.f_o}{\lambda^2} \\[2ex]
\frac{\partial^2 f_o}{\partial y^2} &= \frac{f_1 + f_4 - 2.f_o}{\lambda^2} \\[2ex]
\frac{\partial^2 f_o}{\partial x \partial y} &= \frac{f_5 + f_7 - f_6 - f_8}{4.\lambda^2}
\end{aligned}
\right.
\qquad \text{Eq. (III-6)}
$$

Comparemos, agora, este conjunto de equações (III-6) com as equações (III-4), obtidas por diferenças finitas centrais usuais. Vemos uma concordância perfeita em todos os resultados.

Dispomos, então, de um processo para obtenção de derivadas até segunda ordem, sendo a diferença finita central usual, com malha regular, um caso particular desse processo.

Automatizemos, portanto, o processo, porque com ele podemos resolver equações diferenciais parciais até segunda ordem, utilizando malhas irregulares.

3. *Cuidados para evitar singularidade das matrizes de controle:*

Devido a distribuição dos pontos de controle em octantes, a possibilidade de singularidade das matrizes de controle do ponto 0, dadas na equação (III-5), é a dependência linear entre os elementos da primeira e da quinta colunas, ou entre os elementos da segunda e da quinta colunas.

Ou seja:

$$\boxed{\frac{\delta_{x1}}{\delta_{x1}\cdot\delta_{y1}} = \frac{\delta_{x2}}{\delta_{x2}\cdot\delta_{y2}} = \frac{\delta_{x3}}{\delta_{x3}\cdot\delta_{y3}} = \frac{\delta_{x4}}{\delta_{x4}\cdot\delta_{y4}} = \frac{\delta_{xj}}{\delta_{xj}\cdot\delta_{yj}} = constante}$$

Eq. (III-7)

$$\boxed{\frac{\delta_{y1}}{\delta_{x1}\cdot\,\delta_{y1}} = \frac{\delta_{y2}}{\delta_{x2}\cdot\,\delta_{y2}} = \frac{\delta_{y3}}{\delta_{x3}\cdot\,\delta_{y3}} = \frac{\delta_{y4}}{\delta_{x4}\cdot\,\delta_{y4}} = \frac{\delta_{yj}}{\delta_{xj}\cdot\,\delta_{yj}} = \quad constante}$$

com $j = 5,6,7,8$ Eq. (III-8)

De acordo com a figura (III-3), como δ_{y2} e δ_{y4} não podem ter o mesmo sinal, a equação (III-7) só é possivel se uma das seguintes condições for atendida:

a) $\delta_{x2} = \delta_{x4} = 0$, e os outros três pontos de controle estiverem alinhados horizontalmente em relação aos eixos xy. Desta forma, se estiverem alinhados os pontos 1, 3 e 5, será singular a primeira das matrizes de controle. Se estiverem alinhados os pontos 1, 3 e 6, será singular a segunda. Se estiverem alinhados os pontos 1, 3 e 7 ou 1, 3 e 8, serão, respectivamente, singulares a terceira e a quarta matrizes de controle..

b) $\delta_{x2} = 0$, e os outros quatro pontos de controle estiverem alinhados horizontalmente em relação aos eixos xy. Neste caso poderemos ter alinhados os pontos 1, 3, 4 e 7, quando será singular a terceira matriz de controle; e os pontos 1, 3, 4 e 8, quando será singular a quarta matriz de controle.

c) $\delta_{x4} = 0$, *e os outros quatro pontos de controle estiverem alinhados horizontalmente em relação aos eixos xy. Neste caso poderemos ter alinhados os pontos 1, 2, 3 e 5, quando será singular a primeira matriz de controle; e os pontos 1, 2, 3 e 6, quando será singular a segunda matriz de controle.*

Novamente de acordo com a figura (III-3), como δ_{x1} *e* δ_{x3} *não podem ter o mesmo sinal, a equação (III-8) só é atendida se tivermos uma das seguintes condições:*

a) $\delta_{y1} = \delta_{y3} = 0$, *e os outros três pontos de controle estiverem alinhados verticalmente em relação aos eixos xy. Desta forma, se estiverem alinhados os pontos 2, 4 e 5, será singular a primeira das matrizes de controle. Se estiverem alinhados os pontos 2, 4 e 6, será singular a segunda. Se estiverem alinhados os pontos 2, 4 e 7 ou 2, 4 e 8, serão respectivamente, singulares a terceira e a quarta matrizes de controle.*

b) $\delta_{y1} = 0$, *e os outros quatro pontos de controle estiverem alinhados verticalmente em relação aos eixos xy. Neste caso poderemos ter alinhados os pontos 2, 3, 4 e 7, quando será singular a terceira matriz de controle; e os pontos 2, 3, 4 e 6, quando será singular a segunda matriz de controle.*

c) $\delta_{y3} = 0$, e os outros quatro pontos de controle estiverem alinhados verticalmente em relação aos eixos xy. Neste caso poderemos ter alinhados os pontos 1, 2, 4 e 5, quando será singular a primeira matriz de controle; e os pontos 1, 2, 4 e 8, quando será singular a quarta matriz de controle.

Embora tenhamos pormenorizado as possibilidades de singularidade das matrizes de controle, essas possibilidades não são comuns, e são facilmente evitadas com um simples teste na programação. Este teste deve ser de forma a impedir os alinhamentos verticais ou horizontais citados na discussão anterior, e o expressaremos matematicamente da seguinte maneira:

$$| \delta_{yj} - \delta_{y1} | > \varepsilon$$

$$| \delta_{yj} - \delta_{y3} | > \varepsilon$$

$$| \delta_{xj} - \delta_{x2} | > \varepsilon$$

$$| \delta_{xj} - \delta_{x4} | > \varepsilon$$

com $j = 5,6,7,8$ e ε um número positivo estipulado de acordo com o tipo de malha e o sistema de unidades empregado

Essas condições impostas podem evitar singularidade e mau condicionamento das matrizes de controle.

4. *Coeficientes de derivadas:*

Comecemos por escrever as expressões dos cinco tipos de derivadas no ponto 0, como uma combinação linear dos valores da função f(x,y) no ponto 0 e nos seus oito pontos de controle.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_o}{\partial x} = c_{01}.f_o + c_{11}.f_1 + c_{21}.f_2 + \ldots + c_{81}.f_8 \\ \dfrac{\partial f_o}{\partial y} = c_{02}.f_o + c_{12}.f_1 + c_{22}.f_2 + \ldots + c_{82}.f_8 \\ \dfrac{\partial^2 f_o}{\partial x^2} = c_{03}.f_o + c_{13}.f_1 + c_{23}.f_2 + \ldots + c_{83}.f_8 \\ \dfrac{\partial^2 f_o}{\partial y^2} = c_{04}.f_o + c_{14}.f_1 + c_{24}.f_2 + \ldots + c_{84}.f_8 \\ \dfrac{\partial^2 f_o}{\partial x \partial y} = c_{05}.f_o + c_{15}.f_1 + c_{25}.f_2 + \ldots + c_{85}.f_8 \end{cases}$$

Eq. (III-9)

Encontremos, pois, as fórmulas genéricas dos coeficientes $c_{\ell K}$ *que denominaremos de coeficientes de derivadas.*

Para isto tomemos, novamente, os quatro sistemas de equações expressos na equação (III-5). A inversão das matrizes de controle nos permite reescrever esses sistemas explicitando o vetor que contém os valores das derivadas, como se segue:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial f_o}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial f_o}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial^2 f_o}{\partial x^2} \\ \\ \dfrac{\partial^2 f_o}{\partial y^2} \\ \\ \dfrac{\partial^2 f_o}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{iKj} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} f_1 - f_o \\ \\ f_2 - f_o \\ \\ f_3 - f_o \\ \\ f_4 - f_o \\ \\ f_{j+4} - f_o \end{Bmatrix} \qquad \text{Eq. (III-10)}$$

com $j=1,2,3,4$

Onde $\begin{bmatrix} b_{iKj} \end{bmatrix}$ = *inversas das matrizes de controle*

$i = 1, 5$ *indica a linha da matriz inversa*

$K = 1, 5$ *indica a coluna da matriz inversa*

$j = 1, 4$ *indica o sistema*

Exemplo: com $j=1$ formemos o primeiro sistema de equações, que é composto pelos pontos de controle 1, 2, 3, 4 e 5, com o vetor de derivadas explicitado.

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial f_o}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f_o}{\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f_o}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 f_o}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial^2 f_o}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_{111} & b_{121} & b_{131} & b_{141} & b_{151} \\ b_{211} & b_{221} & b_{231} & b_{241} & b_{251} \\ b_{311} & b_{321} & b_{331} & b_{341} & b_{351} \\ b_{411} & b_{421} & b_{431} & b_{441} & b_{451} \\ b_{511} & b_{521} & b_{531} & b_{541} & b_{551} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 - f_o \\ f_2 - f_o \\ f_3 - f_o \\ f_4 - f_o \\ f_5 - f_o \end{Bmatrix}$$

De cada um dos quatro sistemas, expressos na equação (III-10), extraímos as expressões das derivadas, sendo que, naturalmente, as expressões finais da derivadas obtemos a partir das médias aritméticas das soluções dos quatro sistemas.

Façamos, a título de exemplo, o cálculo da derivada $\dfrac{\partial f_o}{\partial x}$.

Os valores de $\dfrac{\partial f_o}{\partial x}$ *nos quatro sistemas são:*

$$\frac{\partial f_o}{\partial x} = b_{11j}.(f_1 - f_o) + b_{12j}.(f_2 - f_o) + b_{13j}.(f_3 - f_o) + b_{14j}.(f_4 - f_o) +$$

$$+ b_{15j}.(f_{j+4} - f_o)$$

com $j = 1, 2, 3, 4$

Ou:

$$\frac{\partial f_o}{\partial x} = -\sum_{m=1}^{5} (b_{1mj} \cdot f_o) + b_{11j} \cdot f_1 + b_{12j} \cdot f_2 + b_{13j} \cdot f_3 + b_{14j} \cdot f_4 +$$

$$+ b_{15j} \cdot f_{j+4}$$

com $j = 1, 2, 3, 4$

Finalmente, a expressão de $\frac{\partial f_o}{\partial x}$ *é a média aritmética dos quatro valores anteriores.*

$$\frac{\partial f_o}{\partial x} = - \sum_{m=1}^{5} \left[\left(\frac{b_{1m1}+b_{1m2}+b_{1m3}+b_{1m4}}{4}\right) . f_o \right] + \left(\frac{b_{111}+b_{112}+b_{113}+b_{114}}{4}\right) . f_1 + \left(\frac{b_{121}+b_{122}+b_{123}+b_{124}}{4}\right) . f_2 + \left(\frac{b_{131}+b_{132}+b_{133}+b_{134}}{4}\right) . f_3 + \left(\frac{b_{141}+b_{142}+b_{143}+b_{144}}{4}\right) . f_4 + \frac{b_{151}}{4} . f_5 + \frac{b_{152}}{4} . f_6 + \frac{b_{153}}{4} . f_7 + \frac{b_{154}}{4} . f_8$$

Ou ainda:

$$\frac{\partial f_o}{\partial x} = \left(-\frac{1}{4}.\sum_{n=1}^{4}\sum_{m=1}^{5} b_{1mn}\right).f_o + \frac{1}{4}.\left(\sum_{n=1}^{4} b_{11n}\right).f_1 + \frac{1}{4}.\left(\sum_{n=1}^{4} b_{12n}\right).f_2 + \frac{1}{4}.\left(\sum_{n=1}^{4} b_{13n}\right).f_3 + \frac{1}{4}.\left(\sum_{n=1}^{4} b_{14n}\right).f_4 + \frac{b_{151}}{4}.f_5 + \frac{b_{152}}{4}.f_6 + \frac{b_{153}}{4}.f_7 + \frac{b_{154}}{4}.f_8 \qquad \text{Eq. (III-11)}$$

Os valores das outras derivadas, obtidos de maneira inteiramente análoga, são apenas transcritos a seguir.

$$\frac{\partial f_o}{\partial y} = \left(-\frac{1}{4}.\sum_{n=1}^{4}\sum_{m=1}^{5} b_{2mn}\right).f_o + \frac{1}{4}.\left(\sum_{n=1}^{4} b_{21n}\right).f_1 + \frac{1}{4}.\left(\sum_{n=1}^{4} b_{22n}\right).f_2 + \frac{1}{4}.\left(\sum_{n=1}^{4} b_{23n}\right).f_3 + \frac{1}{4}.\left(\sum_{n=1}^{4} b_{24n}\right).f_4 + \frac{b_{251}}{4}.f_5 + \frac{b_{252}}{4}.f_6 + \frac{b_{253}}{4}.f_7 + \frac{b_{254}}{4}.f_8 \qquad \text{Eq. (III-12)}$$

$$\frac{\partial^2 f_o}{\partial x^2} \doteq \left(-\frac{1}{4}.\sum_{n=1}^{4}\sum_{m=1}^{5} b_{3mn}\right).f_o + \frac{1}{4}.\left(\sum_{n=1}^{4} b_{31n}\right).f_1 + \frac{1}{4}.\left(\sum_{n=1}^{4} b_{32n}\right).f_2 + \frac{1}{4}.\left(\sum_{n=1}^{4} b_{33n}\right).f_3 + \frac{1}{4}.\left(\sum_{n=1}^{4} b_{34n}\right).f_4 + \frac{b_{351}}{4}.f_5 + \frac{b_{352}}{4}.f_6 + \frac{b_{353}}{4}.f_7 + \frac{b_{354}}{4}.f_8 \qquad \text{Eq. (III-13)}$$

$$\frac{\partial^2 f_o}{\partial y^2} = \left(-\frac{1}{4}\cdot\sum_{n=1}^{4}\sum_{m=1}^{5} b_{4mn}\right)\cdot f_o + \frac{1}{4}\cdot\left(\sum_{n=1}^{4} b_{41n}\right)\cdot f_1 + \frac{1}{4}\cdot\left(\sum_{n=1}^{4} b_{42n}\right)\cdot f_2 +$$

$$+ \frac{1}{4}\cdot\left(\sum_{n=1}^{4} b_{43n}\right)\cdot f_3 + \frac{1}{4}\cdot\left(\sum_{n=1}^{4} b_{44n}\right)\cdot f_4 + \frac{b_{451}}{4}\cdot f_5 + \frac{b_{452}}{4}\cdot f_6 +$$

$$+ \frac{b_{453}}{4}\cdot f_7 + \frac{b_{454}}{4}\cdot f_8 \qquad \text{Eq. (III-14)}$$

$$\frac{\partial^2 f_o}{\partial x \partial y} = \left(-\frac{1}{4}\cdot\sum_{n=1}^{4}\sum_{m=1}^{5} b_{5mn}\right)\cdot f_o + \frac{1}{4}\cdot\left(\sum_{n=1}^{4} b_{51n}\right)\cdot f_1 + \frac{1}{4}\cdot\left(\sum_{n=1}^{4} b_{52n}\right)\cdot f_2 +$$

$$+ \frac{1}{4}\cdot\left(\sum_{n=1}^{4} b_{53n}\right)\cdot f_3 + \frac{1}{4}\cdot\left(\sum_{n=1}^{4} b_{54n}\right)\cdot f_4 + \frac{b_{551}}{4}\cdot f_5 + \frac{b_{552}}{4}\cdot f_6 + \frac{b_{553}}{4}\cdot f_7 +$$

$$+ \frac{b_{554}}{4}\cdot f_8 \qquad \text{Eq. (III-15)}$$

Da observação do conjunto de equações (III-9) em comparação com os valores das derivadas dados pelas equações (III-11), (III-12), (III-13), (III-14) e (III-15), concluimos os valores dos coeficientes de derivadas $c_{\ell K}$, e os escrevemos de uma forma compacta como se segue:

$$\text{para } K=1,2,3,4,5 \quad \left\{ \begin{array}{l} c_{oK} = -\frac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^{4} \sum_{m=1}^{5} b_{K,m,n} \\[2ex] c_{\ell K} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{4} b_{K,\ell,n} \quad \text{para} \quad \ell = 1,2,3,4 \\[2ex] c_{\ell K} = \frac{1}{4} \cdot b_{K,5,\ell-4} \quad \text{para } \ell = 5,6,7,8 \end{array} \right.$$

Eq. (III-16)

5. *Solução numérica de equações diferenciais parciais até segunda ordem:*

Tomemos como exemplo a equação (III-17), já que esta será a equação que encontraremos nas nossas aplicações de cálculo estrutural.

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = g(x,y)} \qquad \text{Eq. (III-17)}$$

Com os conceitos estabelecidos até aqui, adotemos uma sequência para a resolução numérica desta equação.

Esta sequência será:

a) *lançar uma malha com* p *pontos no interior do domínio e* q *pontos no contorno;*

b) *para cada um dos* p *pontos do domínio escolher os oito pontos de controle;*

c) *calcular os coeficientes de derivadas* $c_{\ell K}$ *para cada um dos* p *pontos do domínio;*

d) *conhecer os valores da função f para cada um dos q pontos do contorno (condições de contorno);*

e) *para cada um dos p pontos do domínio, substituir na equação (III-17) as derivadas por suas correspondentes expressões em diferenças finitas dadas nas equações (III-9).*

Com isto, cada ponto nos fornecerá uma equação de um sistema global que poderá ser colocada na seguinte forma matricial:

$$\boxed{\left[A\right] \times \{f\} = \{g\}} \quad \text{Eq. (III-18)}$$

Onde:

$[A]$ *é uma matriz quadrada, $(p \times p)$, formada pelos coeficientes $c_{\ell K}$*

$\{f\}$ *é um vetor formado pelos valores da função f nos p pontos do domínio, ou seja, nosso vetor de incógnitas*

$\{g\}$ *é um vetor formado pelos valores da função g no p pontos do domínio, ou seja, nosso vetor de termos independentes;*

f) *resolver o sistema dado na equação (III-18), para obter o vetor de incógnitas $\{f\}$.*

6. *Aplicação do processo a placas simplesmente apoiadas:*

O método que propusemos até aqui resolve numericamente equações diferenciais até segunda ordem, logo podemos aplicá-lo na solução de placas simplesmente apoiadas, desde que adotemos dois passos de cálculo. Desta forma, ao invés de solucionarmos diretamente a equação $\nabla^4 w = \frac{q}{D}$, solucionemos as equações $\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = -q$ e $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{M}{D}$. Ou seja, através do processo descrito, solucionemos primeiro o sistema $[A] \times \{M\} = \{-q\}$, para de posse de $\{M\}$ resolvermos $[A] \times \{w\} = \{-\frac{M}{D}\}$

7. Aplicação do processo a chapas:

O método exposto presta-se também para a solução de chapas sob estado plano de tensões. Para isto orientemos a solução também em dois passos de cálculo. Resolvamos as equações $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} = 0$ e $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \sigma$, ao invés de resolvermos diretamente a equação $\nabla^4 \Phi = 0$.

Sendo assim, solucionemos primeiro o sistema $[A] \times \{\sigma\} = \{0\}$, para de posse de $\{\sigma\}$ solucionarmos $[A] \times \{\Phi\} = \{\sigma\}$.

CAPÍTULO IV

Aspectos Principais da Programação do Processo

Nosso objetivo neste Capítulo não é naturalmente detalhar a lógica utilizada na programação, mas sim comentar e esclarecer alguns aspectos principais como a montagem da matriz global, a utilização de uma técnica de esparsidade ou o uso de partição na inversão das matrizes de controle.

Comecemos por citar a notação utilizada na programação e neste Capítulo para facilitar o uso das subrotinas constantes no anexo.

Subrotinas que constituem o programa:

SUBROTINA LER: lê os dados necessários relativos à estrutura, à malha, ao carregamento, às condições de contorno e à solução do sistema global;

SUBROTINA GERA: gera automaticamente a malha, no trecho em que esta possa ser regular;

SUBROTINA CATAR: escolhe os oito pontos de controle de cada um dos pontos internos da malha;

SUBROTINA CARGA: monta o vetor de cargas;

SUBROTINA MACON: monta as quatro matrizes de controle (5 × 5) de cada um dos pontos internos da malha;

SUBROTINA INV.: inverte as quatro matrizes de controle de cada um dos pontos internos da malha, utilizando técnica de partição;

SUBROTINA CODEV: monta a matriz dos coeficientes de derivadas

(5 × 9) de cada um dos pontos internos da malha;

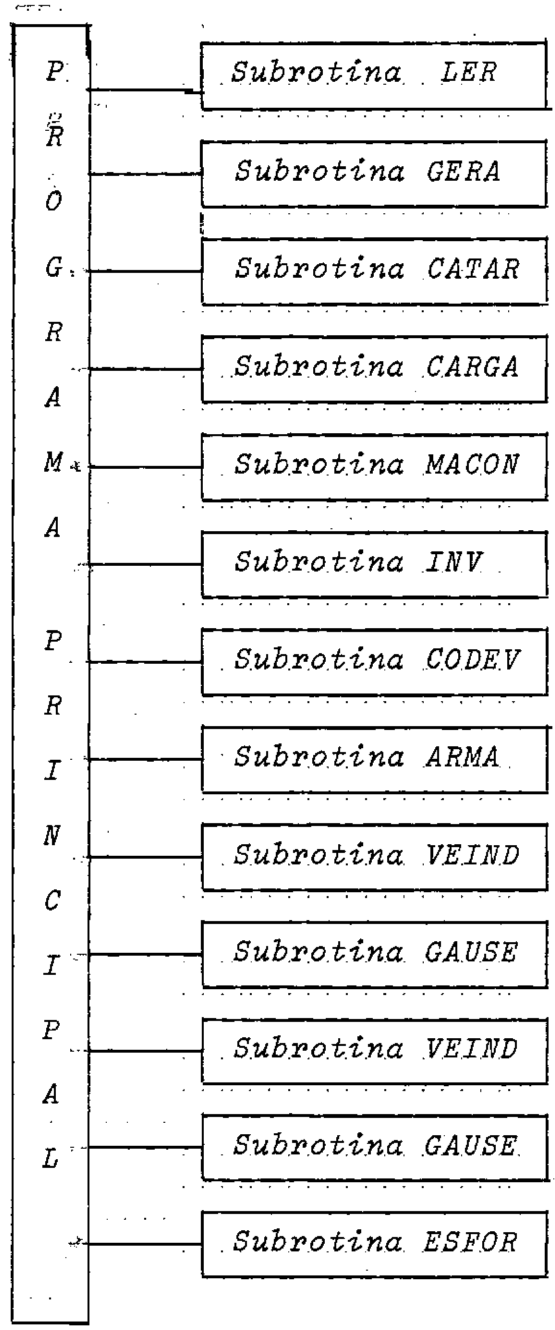
SUBROTINA ARMA: monta simultaneamente a matriz global do sistema e uma matriz de apontadores usando uma técnica de esparsidade;

SUBROTINA VEIND: monta o vetor de termos independentes;

SUBROTINA GAUSE: resolve o sistema global por iteração utilizando o método de Gauss-Seidel;

SUBROTINA ESFOR: calcula os esforços no caso de placas e as tensões no caso de chapas.

As subrotinas são chamadas por um programa principal obedecendo ao seguinte organograma:



Notação utilizada nas subrotinas:

ID - *índice de decisão ($\neq 0$ placas, $= 0$ chapas)*

CP - *coeficiente de Poisson*

E - *módulo de elasticidade longitudinal*

S - *espessura da placa*

RF - *rigidez à flexão*

N - *número total de pontos da malha*

NPI - *número de pontos internos da malha*

NPC - *número de pontos do contorno da malha*

NPS - *índice de decisão sobre aproveitamento ou não de simetria da estrutura ($\neq 0$ existe aproveitamento de simetria, $= 0$ não existe aproveitamento de simetria)*

N1 - *numeração do primeiro ponto da malha a ser gerado automaticamente*

NG - *numeração do último ponto da malha a ser gerado automaticamente*

NESP - *número de espaçamentos na direção x, no trecho em que a malha é gerada automaticamente*

ESP - *valor do espaçamento no trecho em que a malha é gerada automaticamente*

Q - *valor do carregamento no caso de placas ou da força de massa no caso de chapas*

X e Y - *coordenadas dos pontos da malha*

XP e YP - *coordenadas dos pontos de controle*

NA - *numeração original dos pontos de controle*

PART 1 - *valor de partida para o primeiro passo de cálculo*

PART 2 - *valor de partida para o segundo passo de cálculo*

TOLER 1- *valor da tolerância para a solução do primeiro passo de cálculo*

TOLER 2- *valor da tolerância para a solução do segundo passo de cálculo*

CC1 - *condições de contorno do primeiro passo de cálculo*

CC2 - *condições de contorno do segundo passo de cálculo*

DIST - *vetor de distâncias*

DORD - *vetor de distâncias ordenado*

B - *vetor de termos independentes*

$A_1, A_2, A_3 . A_4$ - *matrizes de controle*

B_1, B_2, B_3, B_4 - *matrizes de controle invertidas*

C - *matrizes dos coeficientes de derivadas*

VT - *vetor de trabalho onde é montada cada linha do sistema global*

D - *matriz global*

DA - *matriz de apontadores*

XM - *momento fletor em* x *ou tensão* σ_x

YM - *momento fletor em* y *ou tensão* σ_y

XYM - *momento de torção ou tensão* τ_{xy}

SOL 1 - *solução do primeiro passo de cálculo*

SOL 2 - *solução do segundo passo de cálculo*

1. *Escolha dos pontos de controle:*

Lançada uma certa malha, o primeiro obstáculo com que nos deparamos e que exige certo esforço de programação, é a escolha dos pontos de controle de cada um dos NPI pontos internos dessa malha. A figura (IV-1) nos mostra um ponto interno genérico I de uma malha, com seus pontos de controle assinalados dentro de pequenos círculos.

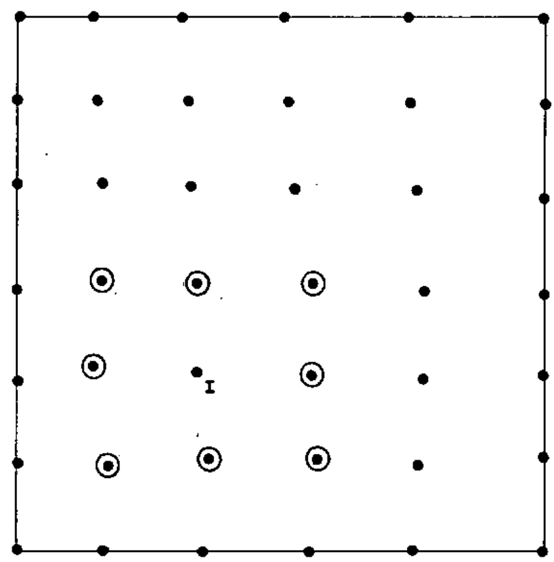


FIG (IV - 1)

A escolha dos oito pontos de controle obedece ao esquema de octantes proposto no Capítulo anterior. Assim sendo, selecionamos, dentro de cada octante, o ponto que estiver mais próximo do ponto I. Para evitar maior esforço de computação, quando fazemos a escolha de cada ponto de controle do ponto I, ao invés de calcularmos as distâncias do ponto I a todos os outros pontos da malha, calculamos apenas as distâncias aos pontos que estão dentro dos octantes correspondentes, sendo que a menor destas distâncias identifica o ponto de controle desejado.

Damos aos pontos de controle uma numeração em relação aos seus pontos centrais. A forma como é feita esta nu-

meração está ilustrada na figura (IV-2). Desta maneira, o ponto 1 da malha (I=1) tem seus pontos de controle numerados como 1,2,3,4,5,6,7,8; o ponto 2 (I=2) tem seus pontos de controle numerados como 9,10,11,12,13,14,15,16, e assim sucessivamente.

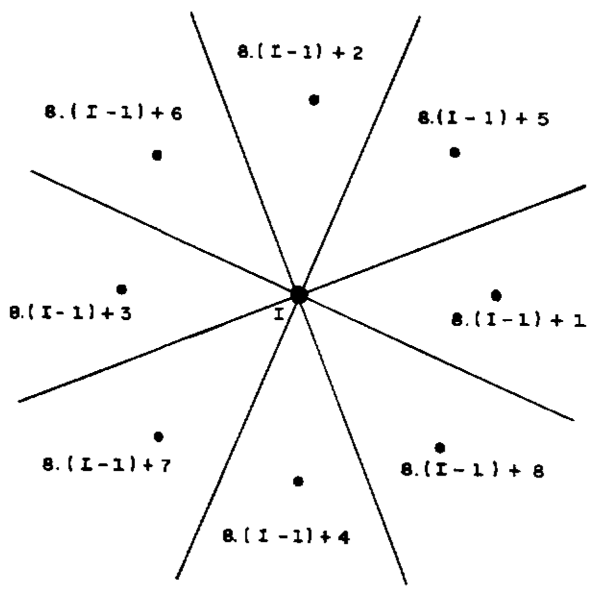


FIG.(IV-2)

Ao fazermos a escolha dos pontos de controle, colhemos de cada um deles três dados importantes, dados estes que armazenamos nos vetores XP, YP e NA, cada um deles dispondo, naturalmente, de 8. NPI posições. Em XP e YP armazenamos, respectivamente, as abcissas e ordenadas dos pontos de controle, e em NA a numeração original dos pontos de controle. É importante observar que esta numeração não é a que eles têm em relação ao ponto central, e sim a numeração original que lhes foi dada quando do lançamento da malha.

Podemos escrever isto da seguinte forma:

XP(KK) = abcissa do ponto de controle

YP(KK) = ordenada do ponto de controle

NA(KK) = numeração original do ponto de controle

Sendo KK = 8.(I-1)+K, com K variando de 1 a 8 para cada valor de I, e com I variando de 1 a NPI.

Todo o processo de determinação dos pontos de controle é executado no programa pela subrotina CATAR.

Um outro aspecto importante, que deve ser ressaltado, é a solução dada ao problema de selecionamento dos pontos de controle, quando temos peças que admitem eixos de simetria e desejamos tirar proveito dessa simetria. O programa está preparado para lidar com peças com um eixo de simetria,ou com dois eixos de simetria perpendiculares entre si.

No caso de termos simetria não há necessidade de fornecermos ao programa os pontos simétricos externos à malha. Ao selecionarmos os pontos de controle de pontos situados sobre eixos de simetria, os pontos de controle externos à malha têm suas coordenadas geradas automaticamente a partir das coordenadas de seus correspondentes simétricos internos, e recebem como numeração original NA a mesma de seus simétricos internos.

A figura (IV-3) ilustra uma malha com simetria em relação aos eixos x e y, onde destacamos três pontos sobre os eixos de simetria para exemplificação. O sexto, terceiro e o sétimo pontos de controle do ponto I_1 *são gerados automaticamente, quando da determinação dos seus quinto, primeiro e oitavo pontos de controle. O sétimo, quarto e oitavo pontos de controle do ponto* I_2 *são gerados quando da determinação dos seus sexto, segundo e quinto pontos de controle. O ponto* I_3 *está sobre os dois eixos de simetria, neste caso, quando da determinação dos seus primeiro, quinto e segundo pontos de*

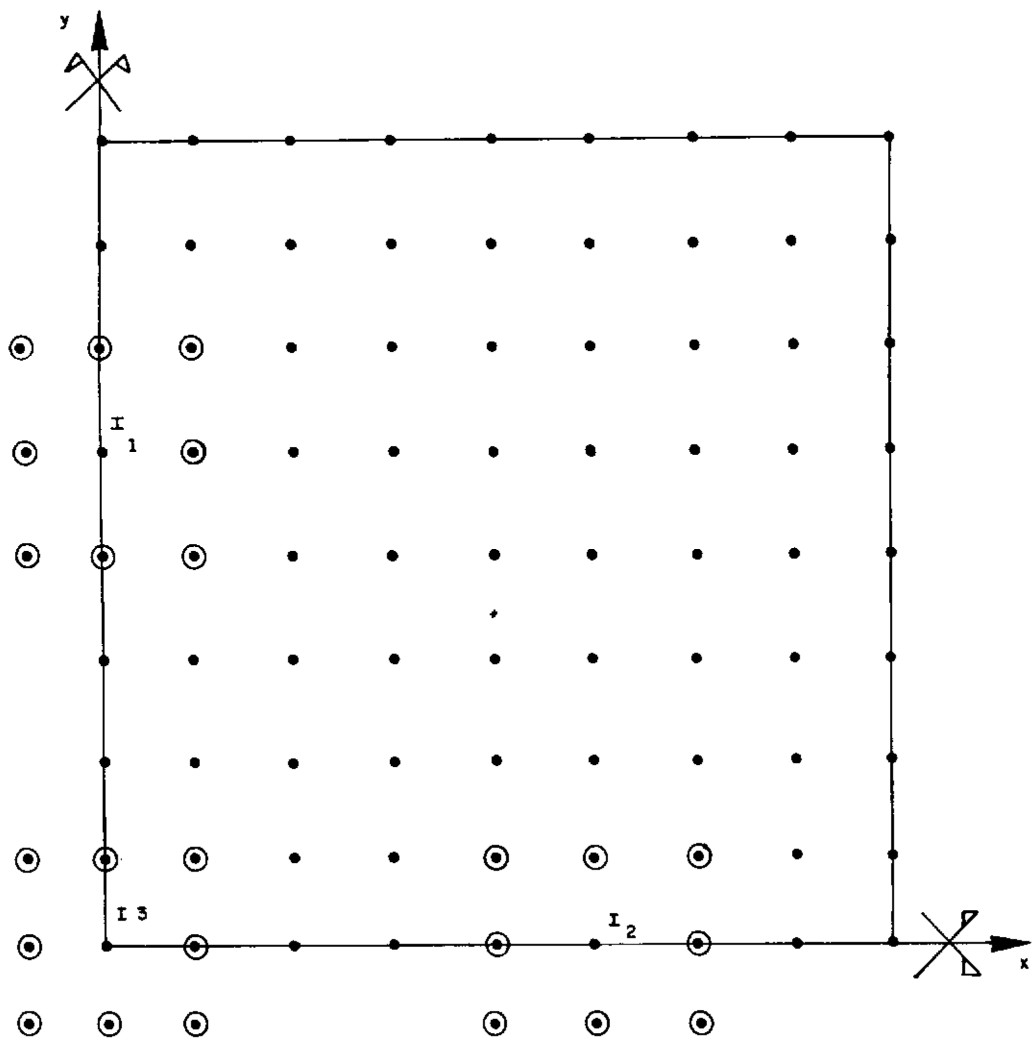


FIG. (IV - 3)

controle, são gerados automaticamente os sexto, terceiro, sétimo, quarto e oitavo pontos.

2. Cálculo dos coeficientes de derivadas:

Nossa segunda etapa natural de programação é o cálculo dos coeficientes de derivadas de cada um dos NPI pontos internos da malha.

Esta etapa é cumprida em três partes distintas, que são: montagem das matrizes de controle, inversão das matrizes *de controle e montagem das matrizes dos coeficientes de derivadas. A execução dessas três partes, é realizada no programa, respectivamente, pelas subrotinas MACON, INV e CODEV.*

2.1 Montagem das matrizes de controle:

Para cada um dos NPI pontos internos da malha, montamos quatro matrizes de controle (5 × 5). Essas matrizes foram apresentadas através da equação matricial (III-5) do Capítulo anterior.

A montagem é simples, já que a primeira coluna das matrizes de controle é obtida a partir das diferenças entre as abcissas do ponto e de seus pontos de controle. A segunda coluna é obtida a partir das diferenças entre as ordenadas do ponto e de seus pontos de controle, e as três últimas colunas são obtidas a partir das duas primeiras.

As quatro matrizes de controle de cada ponto são denominadas de A_1, A_2, A_3 *e* A_4, *e armazenadas com três índices. O primeiro índice indica linha, o segundo coluna, e o terceiro indica o ponto da malha ao qual pertence a matriz.*

Uma observação importante, que pode ser notada através do exame da equação (III-5), é que as quatro matrizes de controle de cada ponto têm as quatro primeiras linhas comuns, diferindo portanto apenas na última linha. Este fato será levado em conta quando formos inverter as matrizes de controle.

2.2 Inversão das matrizes de controle:

Montadas as matrizes de controle, temos que invertê-las, já que os coeficientes de derivadas são calculados a *partir dos elementos de suas inversas.*

Denominamos as inversas das matrizes de controle de cada ponto de B_1, B_2, B_3 e B_4. Armazenamos estas matrizes também com três índices, e sobre a mesma área reservada para A_1, A_2, A_3 e A_4.

A técnica que utilizamos para a inversão foi a de partição, porque com ela podemos aproveitar o fato de que as matrizes de controle de cada ponto têm as quatro primeiras linhas comuns. Preparamos, então, a subrotina INV, baseada na técnica de partição, com a capacidade de inverter a submatriz (4 × 4) comum às quatro matrizes de controle, e a seguir apenas complementar a inversão destas matrizes.

2.3 Montagem das matrizes dos coeficientes de derivadas:

Limitamos nosso processo de resolução de equações diferenciais parciais a equações de até segunda ordem. Sendo assim, temos possibilidades de lidar com os seguintes tipos de derivadas: $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ *e* $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$.

No Capítulo anterior, escrevemos os valores dessas derivadas de uma certa função num ponto, como combinações lineares dos valores dessa função no ponto e nos seus pontos de controle. Isto pode ser revisto no conjunto de equações (III-9).

Os coeficientes dessas combinações lineares foram denominados de coeficientes de derivadas, e podem ser facilmente calculados através do conjunto de equações (III-16).

Podemos concluir, facilmente, que cada um dos NPI *pontos internos da malha dispõe de quarenta e cinco coeficientes de derivadas. Montamos, então, para cada ponto uma matriz com cinco linhas e nove colunas, onde guardamos esses coeficientes. Essas matrizes são denominadas de Matrizes dos Coeficientes de Derivadas, designadas por C e armazenadas no programa com três índices, onde o primeiro identifica linha, o segundo coluna e o terceiro o ponto ao qual pertence a matriz.*

Nessas matrizes cada linha associa-se com um tipo de derivada, e cada coluna com o ponto e seus pontos de controle, o que escrevemos esquematicamente a seguir

$$C(\ell,K,I) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccccc} \text{ponto interno genérico I da malha} & \text{1º ponto de controle do ponto I} & \text{2º ponto de controle do ponto I} & \text{3º ponto de controle do ponto I} & \text{4º ponto de controle do ponto I} & \text{5º ponto de controle do ponto I} & \text{6º ponto de controle do ponto I} & \text{7º ponto de controle do ponto I} & \text{8º ponto de controle do ponto I} \end{array} & \\ \left\{ \begin{array}{ccccccccc} \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \end{array} \right\} & \begin{array}{l} \leftarrow \frac{\partial}{\partial x} \\ \leftarrow \frac{\partial}{\partial y} \\ \leftarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \leftarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \leftarrow \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{array} \end{array}$$

As matrizes dos coeficientes de derivadas serão utilizadas na montagem do sistema global de equações e no cálculo dos esforços ou tensões.

3. Montagem do sistema global de equações:

Nosso programa foi elaborado com o intuito de resolver placas simplesmente apoiadas e chapas sob estado plano de tensões. Conforme foi esclarecido no Capítulo anterior, estes problemas serão resolvidos em dois passos de cálculo. Portanto o tipo de equação diferencial que teremos que resolver é:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = g$$

Para isto, lançamos, sobre o domínio, uma malha com NPI pontos internos e NPC pontos no contorno. A numeração dos pontos da malha obedece à seguinte sequência: numeramos, inicialmente, de 1 a NPI, os pontos internos, e a seguir numeramos os pontos do contorno de NPI+1 a NPI+NPC.

Os valores de f nos pontos do contorno são conhecidos (condições de contorno), temos portanto NPI incógnitas que são os valores de f nos NPI pontos internos da malha. Para a determinação destas incógnitas, montamos um sistema global com NPI equações.

Aplicando a equação $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = g$ sobre cada ponto interno da malha, obtemos um sistema com NPI equações, conforme é expresso compactamente na equação (IV-1)

$$\boxed{\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2 f_I}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f_I}{\partial y^2} = g_I \\[2ex] \text{com } I=1 \text{ a } NPI\end{array}} \qquad Eq.\ (IV\text{-}1)$$

onde: $\dfrac{\partial^2 f_I}{\partial x^2}$ *e* $\dfrac{\partial^2 f_I}{\partial y^2}$ *representam os valores das derivadas segundas de* f *no I- ésimo ponto interno da malha, e* g_I *o valor da função* g *neste mesmo ponto.*

Substituindo os valores das derivadas por suas respectivas combinações lineares dadas no conjunto de equações (III-9), nosso sistema passa a envolver os valores da função f *e não os valores de suas derivadas, e pode ser escrito como se segue:*

$$\left[C(3,1,I) + C(4,1,I)\right]\cdot f_I + \left[C(3,2,I) + C(4,2,I)\right]\cdot f_{NA(8.(I-1)+1)} +$$

$$+ \left[C(3,3,I) + C(4,3,I)\right]\cdot f_{NA(8.(I-1)+2)} + \ldots\ldots + \left[C(3,9,I) +\right.$$

$$\left. + C(4,9,I)\right]\cdot f_{NA(8.(I-1)+8)} = g_I$$

Ou na seguinte forma compacta :

$$\boxed{\begin{array}{l}\left[C(3,1,I) + C(4,1,I)\right]\cdot f_I + \displaystyle\sum_{K=1}^{8} \left[C(3,K+1,I) + C(4,K+1,I)\right]\cdot f_{NA(8.(I-1)+} \\[2ex] \quad {}_{+K)} = g_I \qquad\qquad \text{com } I=1 \text{ a } NPI\end{array}}$$

Eq. (IV-2)

onde:

$NA(8.(I-1) + K)$ = numeração original na malha do K-ésimo ponto de controle do ponto I.

$f_{NA(8.(I-1) + K)}$ = valor da função f no ponto da malha que funciona como K-ésimo ponto de controle do ponto I.

Temos, então, que escrever o sistema dado na equação (IV-2) em forma matricial, como se segue:

$$\left[D\right] \times \begin{matrix}\text{vetor}\\ \text{de}\\ \text{incógnitas}\end{matrix} = \begin{matrix}\text{vetor de}\\ \text{termos}\\ \text{independentes}\end{matrix}$$

Para isto, temos que realizar a montagem da matriz global do sistema $\left[D\right]$, e do vetor de termos independentes.

A montagem é feita por linha, sendo assim, o ponto genérico interno I da malha, origina a I-ésima linha do sistema.

O coeficiente $C(3,1,I) + C(4,1,I)$, que multiplica o valor da função f no ponto I, é montado na coluna de ordem I, e constitui-se elemento da diagonal principal.

Os coeficientes $C(3,K+1,I) + C(4,K+1,I)$, que multiplicam os valores da função f nos pontos de controle do ponto I, vão sendo montados, a medida que fazemos o K variar de 1 a 8, da seguinte maneira:

a) se $NA(8.(I-1) + K) \leqslant NPI$, significa que o ponto de controle é um ponto interno da malha, logo montamos $C(3,K+1,I) + C(4,K+1,I)$ na matriz global do sistema, na posição correspondente à coluna de ordem igual a

$NA(8.(I-1) + K)$;

b) Se $NA(8.(I-1 + K) > NPI$, significa que o ponto de controle é um ponto do contorno, e, portanto, $f_{NA(8.(I-1) + K)}$ é um valor conhecido. Sendo assim, o valor $[C(3,K+1,I) + C(4,K+1,I)] . f_{NA(8.(I-1) + K)}$ passa a ser montado, juntamente com g_I, no vetor de termos independentes.

A montagem do vetor de termos independentes e da matriz global do sistema, é realizada no programa pelas subrotinas VEIND e ARMA.

4. Utilização de uma técnica de esparsidade:

Verificamos que a matriz global do sistema é não simétrica e possue um altíssimo grau de esparsidade.

Sendo cada linha do nosso sistema constituída a partir da soma dos valores da função f num ponto e nos seus oito pontos de controle, é fácil concluir que cada linha da nossa matriz global tem no máximo nove elementos não nulos. Sendo assim, passamos a fazer o armazenamento da matriz global $[D]$, não numa área de (NPI × NPI) posições, mas sim numa área de (NPI × 9).

A subrotina ARMA foi preparada de forma a selecionar apenas os elementos não nulos da matriz global $[D]$ e compactá-los à esquerda. O armazenamento dos elementos não nulos na área (NPI × 9) é feito da seguinte forma: os elementos pertencentes à diagonal principal são guardados na primeira co luna, e os demais elementos não nulos de cada linha são armazenados em sequência nas oito outras colunas. Todos os elementos nulos são ignorados.

Simultâneamente com a montagem da matriz [D], formamos uma matriz de apontadores [DA] também com (NPI × 9) posições. Preenchemos a primeira coluna desta matriz [DA] com um valor qualquer diferente de zero, que serve apenas para indicar, durante a resolução do sistema, que os elementos da diagonal principal não são nulos. As demais colunas de [DA] são preenchidas com apontadores inteiros que indicam, na mesma linha, a numeração real da coluna em que estaria cada elemento não nulo da matriz [D] se esta estivesse armazenada em forma expandida.

Definamos neste trabalho, de acordo com a referência (9), "Índice de Esparsidade" como sendo a porcentagem de coeficientes nulos dentro da matriz, e que servirá nos exemplos numéricos para medir a eficiência da forma de armazenamento empregada.

5. Resolução do sistema global:

O método escolhido para a resolução do sistema global foi o Método Iterativo de Gauss-Seidel.

Não tivemos um motivo especial na escolha do método, mesmo porque acreditamos que isto não está entre os objetivos principais do nosso trabalho. Entretanto podemos citar um fator que influenciou nossa escolha. É que com este método podemos manter as matrizes [D] e [DA] inalteradas, conservando *a esparsidade, durante o processo de resolução, o que é importante para nós, já que os nossos problemas são resolvidos em dois passos de cálculo.*

Dentro do programa, a subrotina resolvedora do sistema global é denominada de GAUSE, e trata-se de uma adaptação da subrotina constante em ZIENKIEWICS[10].

Iniciamos o processo de resolução adotando um vetor de partida como solução. Introduzindo este vetor de partida no sistema obtemos uma solução melhorada. Assim, cada nova solução obtida vai sendo reintroduzida no sistema e fornecendo soluções cada vez melhores. Antes de cada solução ser reintroduzida no sistema, é multiplicada por um fator de relaxação . No nosso trabalho o valor utilizado para este fator, e que se prestou bastante bem para o processo foi 1,8. As iterações cessam, ou seja, a solução é considerada definitiva, quando comparada com a solução anterior apresenta uma diferença menor que uma tolerância previamente fixada.

6. Cálculo dos esforços ou tensões:

6.1. Placas:

Quando a estrutura que estamos analisando é uma placa, após os dois passos de cálculo dispomos dos deslocamentos transversais w *em todos os pontos da malha. Podemos, então, através da subrotina ESFOR calcular, nos mesmos pontos, os seguintes esforços: momentos fletores em* x *e em* y *e momento de torção.*

Os momentos fletores podem ser obtidos como fun-

ções das derivadas segundas de w*, conforme as equações (II-15) e (II-16). As derivadas segundas* $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ *e* $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ *são calculadas, em cada ponto, como os produtos, respectivamente, da terceira e da quarta linhas da matriz dos coeficientes de derivadas do ponto, pelos valores de* w *neste ponto e nos seus pontos de controle.*

Ou seja:

$$\boxed{\frac{\partial^2 w_I}{\partial x^2} = C(3,1,I) \times w_I + \sum_{K=1}^{8} C(3,K+1,I) \times w_{NA(8.(I-1)+K)} \qquad \text{com} \quad I=1,NPI}$$

Eq. (IV-3)

$$\boxed{\frac{\partial^2 w_I}{\partial y^2} = C(4,1,I) \times w_I + \sum_{K=1}^{8} C(4,K+1,I) \times w_{NA(8.(I-1)+K)} \qquad \text{com} \quad I=1,NPI}$$

Eq. (IV-4)

Os momentos de torção, de acordo com a equação (II-17), são calculados em função das derivadas cruzadas de w*. O valor de* $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ *, em cada ponto, é obtido como o produto da quinta linha da matriz dos coeficientes de derivadas do ponto, pelos valores de* w *neste ponto e nos seus pontos de controle.*

Ou seja:

$$\frac{\partial^2 w_I}{\partial x \partial y} = C(5,1,I) \times w_I + \sum_{K=1}^{8} C(5,K+1,I)\ w_{NA(8.(I-1)+K)}$$

com $I=1,NPI$

Eq. (IV-5)

6.2. Chapas:

Na análise de chapas, após os dois passos de cálculo, obtemos os valores da função de tensões Φ em todos os pontos da malha. A partir das equações (II-25), (II-26) e (II-27) podemos obter as tensões σ_x, σ_y e τ_{xy}. Para isto, calculamos as derivadas segundas e cruzada de Φ como se segue:

$$\frac{\partial^2 \Phi_I}{\partial x^2} = C(3,1,I) \times \Phi_I + \sum_{K=1}^{8} C(3,K+1,I) \times \Phi_{NA(8.(I-1)+K)}$$

com $I=1,NPI$

Eq. (IV-6)

$$\frac{\partial^2 \Phi_I}{\partial y^2} = C(4,1,I) \times \Phi_I + \sum_{K=1}^{8} C(4,K+1,I) \times \Phi_{NA(8.(I-1)+K)}$$

com $I=1,NPI$

Eq. (IV-7)

$$\frac{\partial^2 \Phi_I}{\partial x \partial y} = C(5,1,I) \times \Phi_I + \sum_{K=1}^{8} C(5,K+1,I) \times \Phi_{NA(8.(I-1)+K)}$$

com $I=1,NPI$

Eq. (IV-8)

CAPÍTULO V

"Resultados, conclusões e sugestões"

Neste Capítulo apresentamos alguns exemplos ilustrativos do método, sempre que possível seguidos de conclusões, e sugerimos algumas idéias que nos ocorreram ao longo da pesquisa.

1. Resultados e conclusões:

EXEMPLO 1:

Inicialmente resolvemos uma placa utilizando diversas malhas regulares com o intuito de obter algumas informações importantes como a forma de convergência, o tempo de processamento e o índice de esparsidade.

Características da placa analisada: placa quadrada de 4m × 4m simplesmente apoiada nos quatro bordos.

Módulo de Elasticidade	$= 2\times10^5 kgf/cm^2$
Coeficiente de Poisson	$= 0,3$
Espessura da Placa	$= 5cm$
Carga uniformemente distribuída	$= 800kgf/m^2$

Características das malhas empregadas: devido a dupla simetria resolvemos apenas um quarto da placa, lançando sobre este quarto cinco tipos de malhas com diferentes espaçamentos .

A tabela (V-1) nos fornece as informações relativas aessas malhas

	Malha A	*Malha B*	*Malha C*	*Malha D*	*Malha E*
Nº total de pontos	9	25	36	81	121
Nº de pontos internos	4	16	25	64	100
Nº de pontos do contorno	5	9	11	17	21
Espaçamento (cm)	100	50	40	25	20

Tab (V-1)

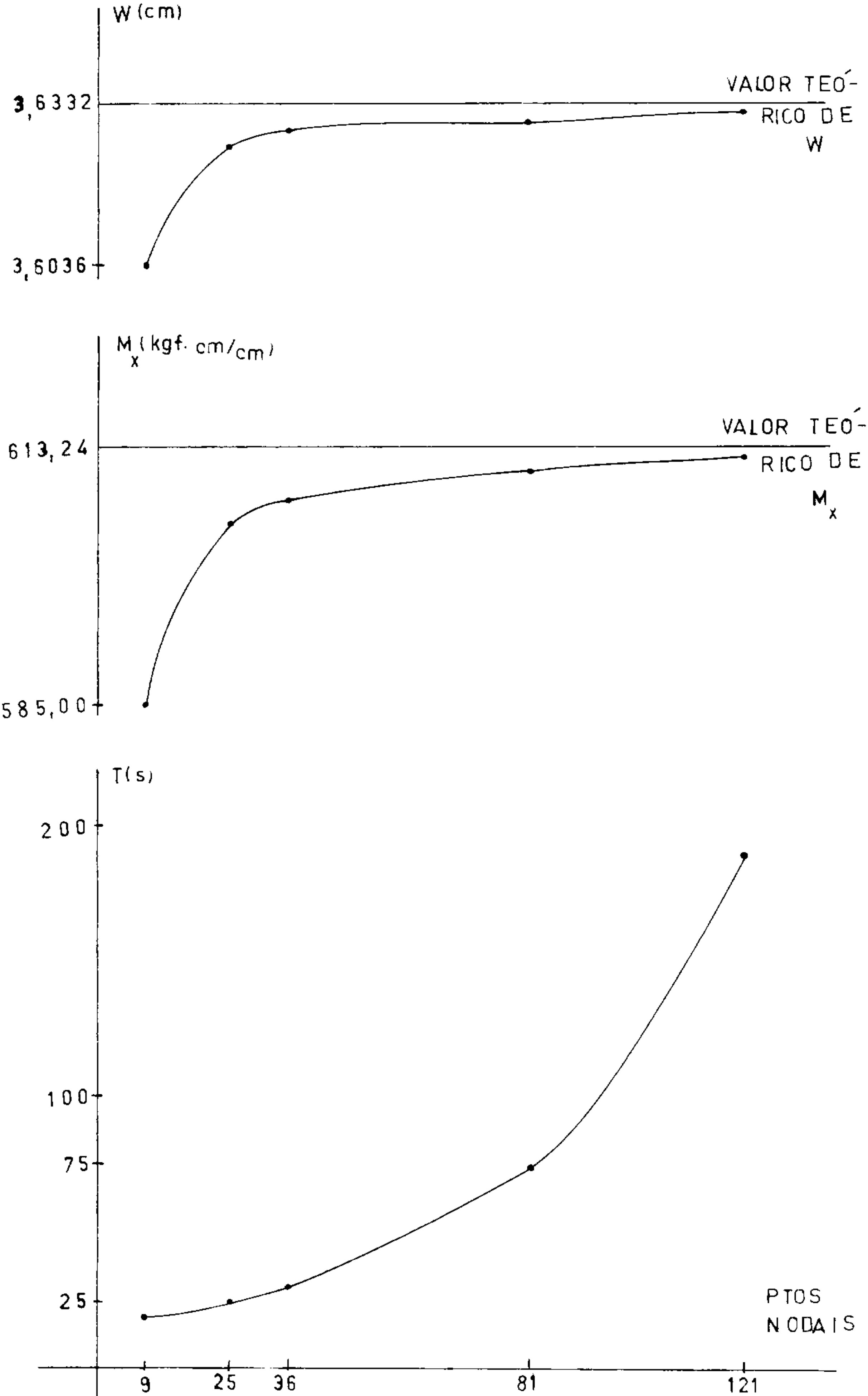
Na tabela (V-2) apresentamos os valores obtidos para o deslocamento transversal w *e o momento fletor* M_x *no centro da placa, bem como o tempo de processamento e o índice de esparsidade para cada tipo de malha.*

	Malha A	Malha B	Malha C	Malha D	Malha E
w (cm)	3,6036	3,6272	3,6298	3,6325	3,6331
$M_x(\frac{kgf.\ cm}{cm})$	585,0052	605,4913	608,2432	611,2739	613,2327
Tempo de processamento (S)	20	25	29	75	190
Índice de esparsidade (%)	25,00	75,00	83,20	92,97	95,40
Valores Teóricos dados na referência(2) $w=3,6332$ cm $M=613,2400$ $\frac{kgf.\ cm}{cm}$					

Tab. (V-2)

Os gráficos da figura (V-1) ilustram as convergências de w e M_x e o crescimento do tempo de processamento com o número de pontos da malha.

Do exame dos gráficos e das tabelas podemos notar que os valores de w e M_x convergem de forma monotônica, tendendo para o valor teórico a medida que refinamos a malha. Uma observação feita durante a pesquisa é que o erro obtido no cálculo do deslocamento transversal w propaga-se bastante quando se realiza o cálculo dos esforços. Portanto para obtermos valores precisos dos esforços, temos que ter boa precisão em w. No presente exemplo, no processo iterativo para o cálculo de w impusemos uma precisão da ordem de 10^{-6}.



W (cm)
3,6332
3,6036
VALOR TEÓRICO DE W
Mx (kgf. cm/cm)
613,24
585,00
VALOR TEÓRICO DE Mx
T(s)
200
100
75
25
PTOS NODAIS
9
25
36
81
121

FIG (V-1)

A observação dos tempos de processamento mostra que o método é eficiente neste sentido.

Os valores dos índices de esparsidade demonstram que a medida que vamos tomando malhas com maior número de pontos vamos conseguindo uma enorme economia de memória. Tomemos como exemplo a malha E que apresenta um índice de esparsidade de 95,40%, isto significa que estamos armazenando a matriz global do sistema numa área de 4,60% da área que gastaríamos se a guardassemos de forma expandida. Tendo em vista, porém, que juntamente com a matriz global montamos uma matriz de apontadores de igual ordem, concluímos que ocupamos 9,20% da área de memória que gastaríamos sem o uso de uma técnica de esparsidade, o que representa uma economia de 90,8% no armazenamento da matriz global do sistema.

EXEMPLO 2:

Neste exemplo procuramos estabelecer uma comparação entre o presente método e métodos já estabelecidos, no que se refere ao grau de precisão e à forma de convergência. Para isto, aproveitamos estudos realizados por Seráphico na referência (7), onde é feita comparação entre os Métodos dos Elementos Finitos e das Diferenças Finitas. Seráphico obteve resultados numéricos em elementos finitos, utilizando elementos triangulares não conformes, através dos programas do professor Alcebíades Vasconcelos e Strudl, e em diferenças finitas através de programa por ele elaborado baseado nos operadores de diferenças finitas centrais transformados para coordenadas oblíquas.

A seguir analisamos uma placa pelo presente método e fazemos uma comparação com os resultados obtidos por Seráphico.

Características da placa analisada: placa quadrada de $12m \times 12m$ simplesmente apoiada nos quatro bordos.

Módulo de Elasticidade	$= 2,1 \times 10^6\ tf/m^2$
Coeficiente de Poisson	$= 0,3$
Espessura da placa	$= 0,10m$
Carga uniformemente distribuída	$= 3\ tf/m^2$

Os valores do deslocamento transversal w, do momento fletor M_x e do momento de torção M_{xy} no centro da placa, para diversas malhas, estão dados nas tabelas (V-3), (V-4) e (V-5) e a seguir são ilustrados pelos gráficos das figuras (V-2) (V-3).

MALHA	Nº de NÓS	VALORES DE W EM m			
		PROF. ALCEBÍADES	STRUDL	SERAPHICO	PRESENTE ESTUDO
2 × 2	9	0,11247	0,12452	0,12636	0,12636
4 × 4	25	0,12907	0,12998	0,13030	0,13031
6 × 6	49	0,13050	0,13094	0,13095	0,13095
8 × 8	81	0,13092	0,13119	0,13116	0,13116
10 ×10	121	0,13010	0,13137	0,13125	0,13126
12 ×12	169	0,13119	0,13147	0,13129	0,13130
Valor teórico dado na referência (2) $w = 0,13130$					

Tab. (V-3)

MALHA	Nº de NÓS	VALORES DE M_x EM $\frac{tf.m}{m}$			
		PROF ALCEBÍADES	STRUDL	SERÁPHICO	PRESENTE ESTUDO
2 × 2	9	0,67003	2,44173	1,75500	1,75500
4 × 4	25	0,70075	2,10544	1,97435	1,97442
6 × 6	49	1,90402	2,08471	2,02494	2,02498
8 × 8	81	1,97579	2,07753	2,04375	2,04355
10 × 10	121	2,00885	2,07609	2,05264	2,05342
12 × 12	169	2,02728	2,07609	2,05717	2,05748
Valor teórico dado na referência (2) $M_x = 2,06928$					

Tab. (V-4)

MALHA	Nº DE NÓS	VALORES DE M_{xy} EM $\frac{tf.m}{m}$			
		PROF: ALCEBÍADES	STRUDL	SERÁPHICO	PRESENTE ESTUDO
2 × 2	9	-0,18037	0,00000	0,00000	0,00000
4 × 4	25	-0,07083	0,03851	0,00000	-0,00012
6 × 6	49	-0,03106	0,01524	0,00000	-0,00009
8 × 8	81	-0,01721	0,00918	0,00000	-0,00000
10 × 10	121	-0,01095	0,00604	0,00001	-0,00008
12 × 12	169	-0,00757	0,00425	0,00000	0,00000
Valor teórico dado na referência (2) $M_{xy} = 0,00000$					

Tab. (V-5)

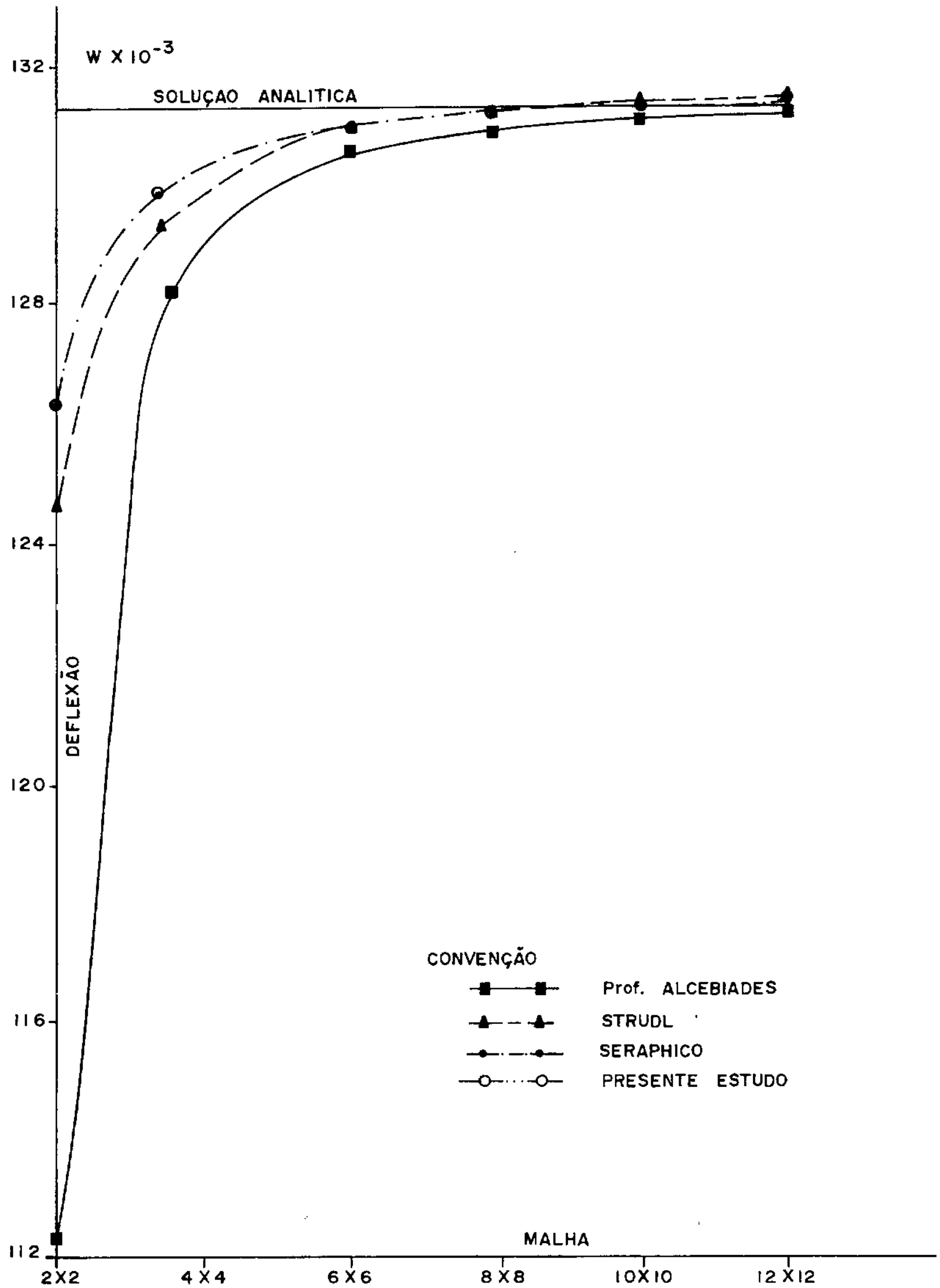
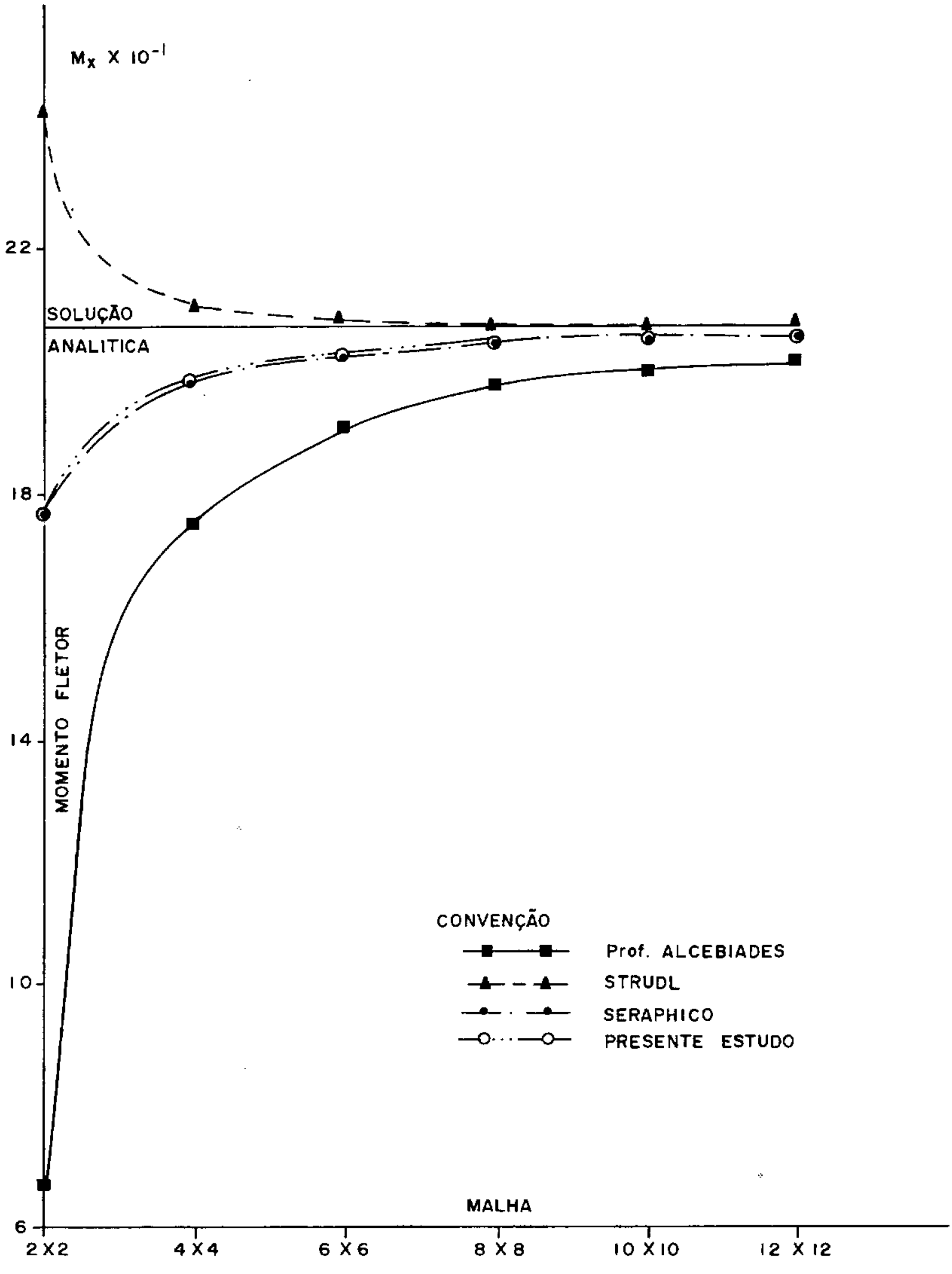

W X 10^-3
132
128
124
120
116
112
SOLUÇAO ANALITICA
DEFLEXÃO
CONVENÇÃO
Prof. ALCEBIADES
STRUDL
SERAPHICO
PRESENTE ESTUDO
MALHA
2X2
4X4
6X6
8X8
10X10
12X12

FIG. (V - 2)



$M_x \times 10^{-1}$
22
18
14
10
6
SOLUÇÃO
ANALITICA
MOMENTO FLETOR
CONVENÇÃO
Prof. ALCEBIADES
STRUDL
SERAPHICO
PRESENTE ESTUDO
MALHA
2X2
4X4
6X6
8X8
10X10
12X12

FIG. (V-3)

A observação das tabelas e gráficos apresentados nos leva a afirmar que o método nos ofereceu resultados de excelente precisão.

A seguir mostramos na Tabela (V-6) os tempos de processamento gastos para os diferentes tipos de malhas.

MALHA	NÓS	TEMPO DE PROCESSAMENTO EM min.			
		PROF. ALCEBÍADES	STRUDL	SERAPHICO	PRESENTE ESTUDO
2 × 2	9	0,30	2,00	0,15	0,28
4 × 4	25	1,00	4,30	0,17	0,36
6 × 6	49	2,80	11,50	0,25	0,51
8 × 8	81	4,80	21,00	0,50	1,13
10 × 10	121	9,00	37,00	0,83	2,33
12 × 12	169	14,30	61,50	1,50	5,60

Os tempos por nós conseguidos não devem ser comparados com os obtidos por Seráphico devido terem sido usados computadores distintos. Entretanto servem para traçarmos curvas que mostram a forma de crescimento do tempo de processamento com o número de pontos nodais. Estas curvas estão na figura (V-4) e nos mostram que o tempo cresceu com menor intensidade nos programas de diferenças finitas, sendo que o programa baseado no presente modelo teve maior crescimento de tempo de processamento do que o elaborado por Seráphico, devido à sua maior generalidade.

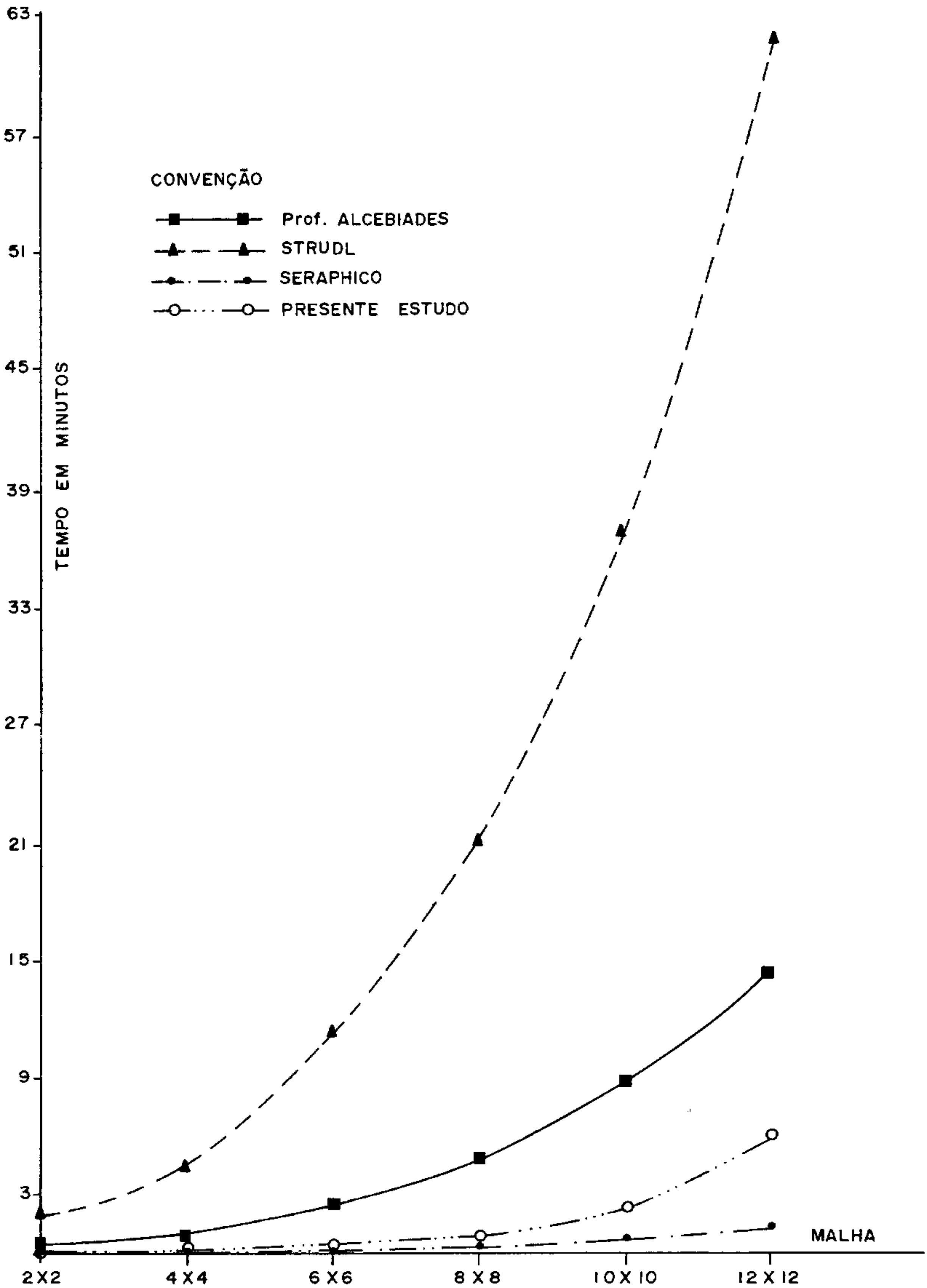
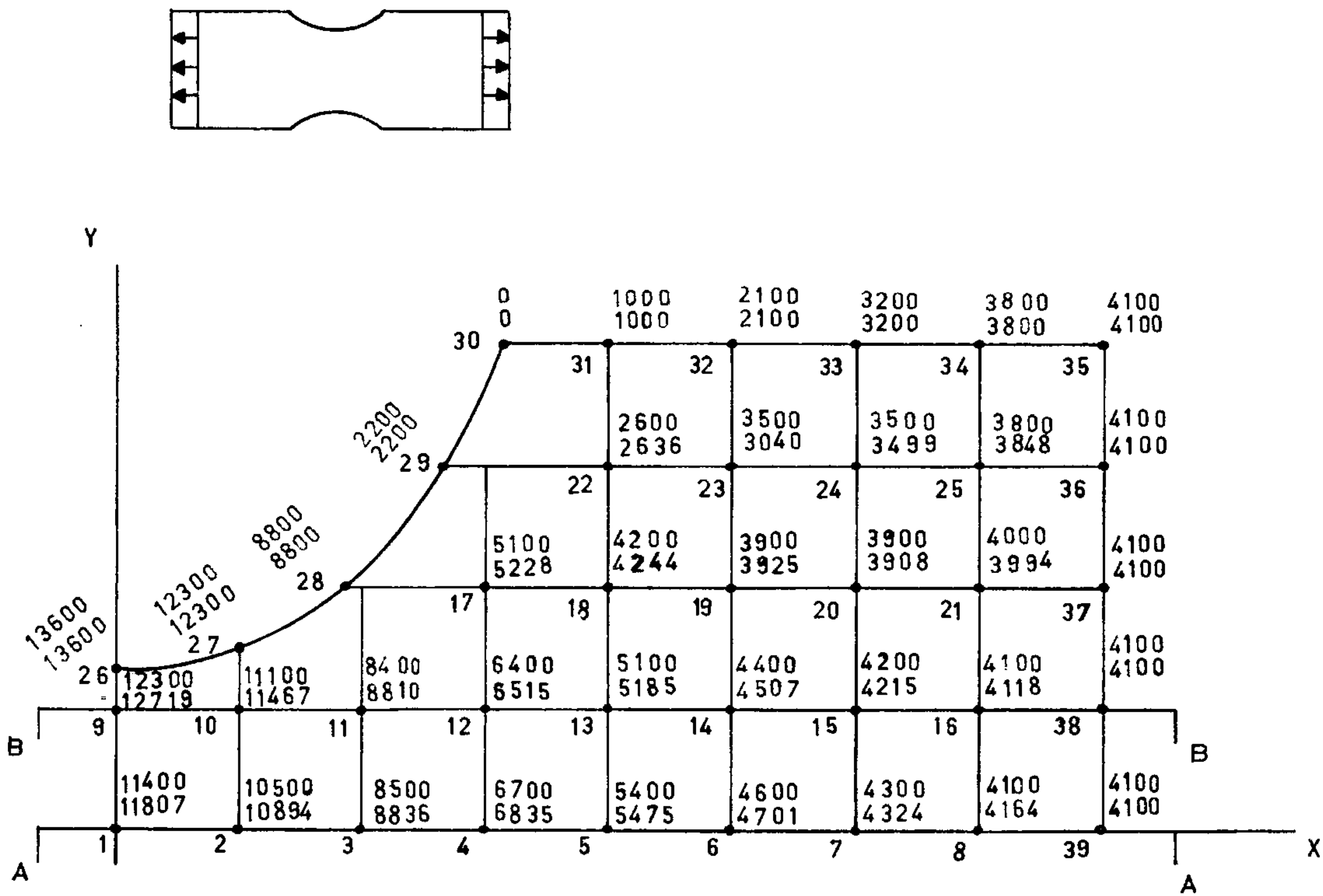

63
57
51
45
39
33
27
21
15
9
3
TEMPO EM MINUTOS
CONVENÇÃO
Prof. ALCEBIADES
STRUDL
SERAPHICO
PRESENTE ESTUDO
MALHA
2X2
4X4
6X6
8X8
10X10
12X12

FIG. (V-4)

EXEMPLO 3:

Como terceiro exemplo apresentamos uma chapa submetida a tração e sujeita a concentração de tensões, conforme mostra a figura (V-5). Este problema é abordado por Timoshenko na referência (1), onde ele determina os valores de σ em diversos pontos da chapa utilizando diferenças finitas centrais. Resolvemos o problema com o presente modelo para comparação de resultados. Tais resultados, tratados de forma admensional, encontram-se na figura (V-5), onde ao lado de cada ponto estão dados dois valores, o valor superior é dado por Timoshenko e o inferior obtido pelo presente estudo.

Neste problema anotamos um tempo de processamento de 29 segundos e um índice de esparsidade de 82,88%. A maior diferença de resultados foi cerca de 13%, detectada no ponto 23.



Y
X
A
A
B
B
0
0
30
1000
1000
2100
2100
3200
3200
3800
3800
4100
4100
31
32
33
34
35
2200
2200
29
2600
2636
3500
3040
3500
3499
3800
3848
4100
4100
22
23
24
25
36
8800
8800
28
5100
5228
4200
4244
3900
3925
3900
3908
4000
3994
4100
4100
12300
12300
27
17
18
19
20
21
37
13600
13600
26
12300
12719
11100
11467
8400
8810
6400
6515
5100
5185
4400
4507
4200
4215
4100
4118
4100
4100
9
10
11
12
13
14
15
16
38
11400
11807
10500
10894
8500
8836
6700
6835
5400
5475
4600
4701
4300
4324
4100
4164
4100
4100
1
2
3
4
5
6
7
8
39

FIG(V-5)

EXEMPLO 4:

Como quarta aplicação solucionamos uma placa triangular para comparação com os resultados teóricos dados na referência (2)

Características da placa analisada: placa em forma de triângulo equilátero de 4,5m de lado simplesmente apoiada nos três bordos.

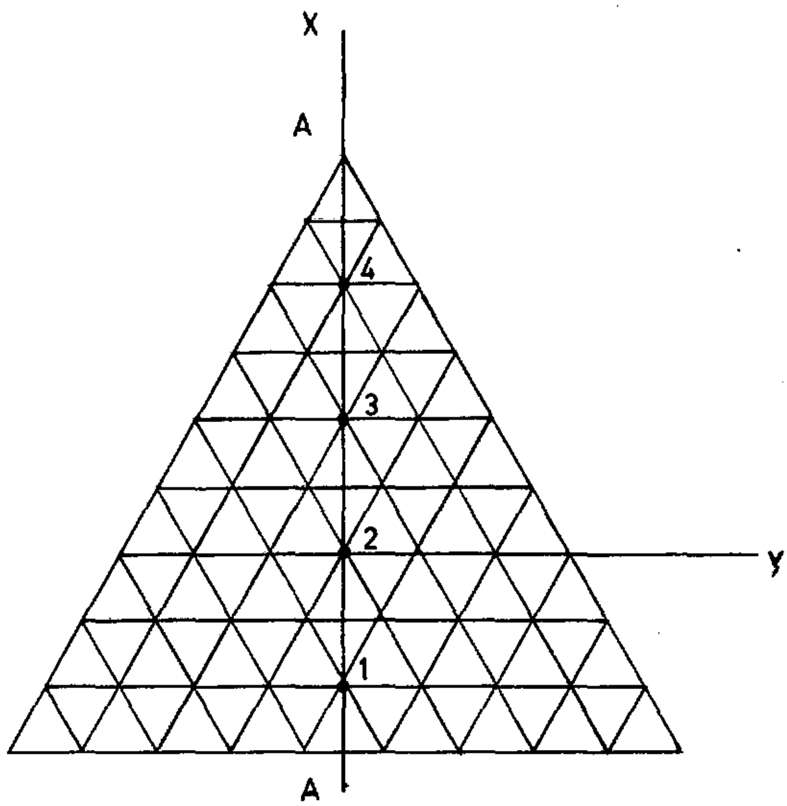
Módulo de elasticidade = $2 \times 10^5 kgf/cm^2$

Coeficiente de Poisson = 0,3

Espessura da placa = 5cm

Carga uniformemente distribuida = $800 kgf/m^2$

Para a resolução lançamos uma malha triangular com 0,5m de espaçamento conforme ilustra a figura (V-6) o que nos forneceu um tempo de processamento de 31 segundos e um índice de esparsidade de 87,24%.



FIG(V-6)

Os resultados obtidos para o deslocamento lateral w e os momentos fletores M_x e M_y, ao longo da mediatriz AA, estão transcritos nas tabelas (V-7), (V-8) e (V-9).

	VALORES DE W EM cm		
Ponto	Presente Estudo	Valor Teórico	Erro Percentual
1	0,450	0,436	3,2%
2	0,881	0,829	6,2%
3	0,570	0,546	4,3%
4	0,120	0,119	0,9%

Tabela (V-7)

	VALORES DE M_x EM $\frac{kgf.\ cm}{cm}$		
Ponto	Presente Estudo	Valor Teórico	Erro Percentual
1	138,249	138,332	0,06%
2	295,032	292,499	0,86%
3	303,062	304,166	0,36%
4	190,071	198,333	4,16%

Tabela (V-8)

	VALORES DE M_y em $\frac{kgf.\ cm}{cm}$		
Ponto	Presente Estudo	Valor Teórico	Erro Percentual
1	215,829	208,330	3,59%
2	295,032	292,499	0,86%
3	129,536	129,167	0,28%
4	-34,599	-46,666	25,90%

Tabela (V-9)

Do exame das tabelas, podemos observar um mau comportamento da solução próximo aos vértices da placa.

2. Sugestões:

Da forma como o presente modelo foi formulado ele pode ter aplicação a outros fenômenos de interesse, desde que estes fenômenos possam ser expressos em forma de equações diferenciais até segunda ordem, e haja viabilidade na determinação das condições de contorno. A única modificação básica a ser feita na programação reside na montagem da matriz global do sistema que é feita de acordo com a forma da equação em questão, já que depende dos tipos de derivadas envolvidos. No campo do cálculo estrutural seria interessante a utilização do método a problemas de torção.

Uma idéia surgida durante a pesquisa foi a criação de pontos fictícios nas malhas, que permitissem a essas malhas uma maior flexibilidade e facilidade de refinamento em áreas localizadas da peça. Tal idéia foi por nós parcialmente desenvolvida, não sendo levada adiante devido a modificação total que provocaria na estrutura da programação já elaborada, mas algumas subrotinas chegaram a ser adaptadas a ela e forneceram resultados satisfatórios. A criação de pontos fictícios consistiu em podermos lançar malhas em que alguns pontos de controle estivessem muito distantes dos seus pontos centrais, ou mesmo deixassem de existir. Neste caso o programa adotaria, em substituição a eles, pontos de controle fictícios cujas coordenadas seriam as médias aritméticas das coordenadas dos seus dois pontos de controle vizinhos, e daria a esses pontos uma numeração na malha igual a zero. Daí em diante, sempre que ao longo da resolução fosse encontrado um ponto de controle de numeração na malha igual a zero, o programa o trataria como um ponto fictício, tomando todos os valores e contribuições referentes a ele como médias aritméticas dos valores e contribuições correspondentes aos dois pontos de controle vizinhos.

Uma extensão importante do processo aqui apresentado, seria ampliar a sua capacidade no sentido de resolver equações diferenciais de ordem superior a dois. Durante a pesquisa analisamos a perspectiva de ampliação até quarta ordem e constatamos que neste caso seriam necessários esquemas com quatorze pontos de controle, o que traria um aumento de esfor ço computacional. Uma alternativa seria a elaboração de um funcional de energia combinado com o Método das Diferenças Finitas. Passaríamos, então, a resolver o problema não ao nível de sua equação diferencial e sim ao nível de seu funcional correspondente. Como na expressão do funcional a ordem máxima das derivadas é a metade da ordem encontrada na equação diferencial, poderíamos continuar utilizando o nosso esquema limitado até segunda ordem.

Aplicações do Método das Diferenças Finitas combinado com energia foram realizadas por BUSHNELL[11] na resolução de cascas e por FORSYTHE e WASON[12] para resolver equações de difusão utilizando malhas retangulares. Segundo PERRONE e KAO[8], na combinação de uma formulação de energia com o Método das Diferenças Finitas utilizando malhas irregulares, uma das dificuldades reside em como definir precisamente a integral que compõe a expressão do funcional. Achamos que pesquisas neste sentido poderão abrir novos caminhos para maiores aplicações do Método das Diferenças Finitas.

A P Ê N D I C E

Apresentamos a seguir as listagens de todas as subrotinas componentes do programa por nós elaborado para a obtenção de resultados numéricos.

```
FILE  2=CARTOES,UNIT=READER
FILE  5=IMPRESS,UNIT=PRINTER
C     ***************************************************************
C
C     SUBROTINA QUE LE OS DADOS REFERENTES A ESTRUTURA,A MALHA,AO
C     CARREGAMENTO, AS CONDICOES DE CONTORNO E AOS VALORES DE PAR
C     TIDA E TOLERANCIAS DAS SOLUCOES POR ITERACAO.
C
C     ***************************************************************
      SUBROUTINE LER(ID,CP,RF,N,NPI,NPC,NPS,N1,NG,NESP,ESP,X,Y,Q,
     *CC1,CC2,PART1,PART2,TOLER1,TOLER2,NEST,TIT)
      DIMENSION X(500),Y(500),CC1(200),CC2(200),TIT(20)
      COMMON NL,NI
      READ(NL,1) NEST
    1 FORMAT(I5)
      IF(NEST.NE.0) GO TO 2
      STOP
    2 WRITE(NI,3)
    3 FORMAT(ö1ö,/,25X,62(ö*ö),/,25X,ö*ö,60X,ö*ö,/,25X,ö*ö,1X,
     *öCOPPE/UFRJ-PROGRAMA DE ENGENHARIA CIVIL-AREA DE ESTRUTURASö
     *,öSö,1X,ö*ö,/,25X,ö*ö,60X,ö*ö,/,25X,ö*ö,1X,öTITULO: ANALISö
     *,öE DE PLACAS SIMPLESMENTE APOIADAS E DE CHA-ö,2X,ö*ö,/,
     *25X,ö*ö,60X,ö*ö,/,25X,ö*ö,9X,öPAS SOB ESTADO PLANO DE TENSö
     *,öOES, PELO METODO DASö,3X,ö*ö,/,25X,ö*ö,60X,ö*ö,/,25X,ö*ö,
     *9X,öDIFERENCAS FINITASö,33X,ö*ö,/,25X,ö*ö,60X,ö*ö,/,25X,ö*ö
     *,1X,öAUTOR:  MOACIR HEYNE FILHOö,33X,ö*ö,/,25X,ö*ö,60X,ö*ö,
     */,25X,62(ö*ö),//)
      WRITE(NI,4) NEST
    4 FORMAT(5X,öESTRUTURAö,1X,I2)
      DO 5 IV=1,3
      READ(NL,6) TIT
    6 FORMAT(20A4)
      WRITE(NI,7) TIT
    7 FORMAT(2X,20A4)
    5 CONTINUE
      WRITE(NI,12)
   12 FORMAT(2X,90(ö=ö),//)
C     LEITURA DOS DADOS REFERENTES A ESTRUTURA
C     INDICE DE DECISAO
      READ(NL,8) ID
    8 FORMAT(I5)
      IF(ID.EQ.0) GO TO 9
      READ(NL,10) E,CP,S
   10 FORMAT(3F15.4)
C     CALCULO DA RIGIDEZ A FLEXAO
      RF=(E*S**3.)/(12.*(1.-CP**2.))
      WRITE(NI,11) E,CP,S,RF
   11 FORMAT(2X,öMODULO DE ELASTICIDADE =ö,F15.4,/,2X,öCOEFICIENö
     *öTE  DE POISSON =ö,F15.4,/,2X,öESPESSURA DA PECA =ö,F15.4,/
     *,2X,öRIGIDEZ A FLEXAO =ö,F15.4)
    9 CONTINUE
C     LEITURA DOS DADOS REFERENTES A MALHA.
      READ(NL,13) N,NPI,NPC,NPS
   13 FORMAT(4I5)
```

```
      WRITE(NI,14) N,NPI,NPC
   14 FORMAT(//,2X,ōNUMERO TOTAL DE PONTOS DA MALHA =ō,I5,/,2X,
     *ōNUMERO DE PONTOS INTERNOS DA MALHA =ō,I5,/,2X,ōNUMERO DE ō
     *ōPONTOS DO CONTORNO =ō,I5,//)
      IF(NPS) 15,16,15
   15 WRITE(NI,17)
   17 FORMAT(12X,ōEXISTE APROVEITAMENTO DE SIMETRIA DA PECAō,//)
      GO TO 19
   16 WRITE(NI,18)
   18 FORMAT(12X,ōNAO EXISTE APROVEITAMENTO DE SIMETRIA DA PECAō
     *,//)
   19 CONTINUE
C     DADOS REFERENTES A GERACAO AUTOMATICA DA MALHA NO TRECHO EM
C     QUE ESTA POSSA SER REGULAR
      READ(NL,20) N1,NG,NESP,ESP
   20 FORMAT(3I5,F15.7)
      IF(NG.EQ.0) GO TO 21
      READ(NL,22) X(N1),Y(N1)
   22 FORMAT(2F15.7)
   21 CONTINUE
C     LEITURA DAS COORDENADAS DOS PONTOS DA MALHA NO TRECHO IRRE
C     GULAR E NO CONTORNO
      DO 23 IC=NG+1,N
   23 READ(NL,24) J,X(J),Y(J)
   24 FORMAT(I5,2F15.7)
C     LEITURA DO CARREGAMENTO OU FORCA DE MASSA
      READ(NL,25) Q
   25 FORMAT(F15.4)
      IF(ID) 26,27,26
   26 WRITE(NI,28) Q
   28 FORMAT(2X,ōCARREGAMENTO =ō,F10.4)
      GO TO 30
   27 WRITE(NI,29) Q
   29 FORMAT(2X,ōFORCA DE MASSA =ō,F10.4)
   30 CONTINUE
C     LEITURA DAS CONDICOES DE CONTORNO
      IF(ID) 31,32,31
   31 DO 33 I=1,NPC
      CC1(I)=0.
   33 CC2(I)=0.
      GO TO 35
   32 READ(NL,34)(J,CC1(J),CC2(J),J=1,NPC)
   34 FORMAT(I5,2F15.4)
   35 CONTINUE
C     LEITURA DOS VALORES DE PARTIDA E DAS TOLERANCIAS PARA AS
C     SOLUCOES POR ITERACAO.
      READ(NL,36) PART1,PART2,TOLER1,TOLER2
   36 FORMAT(4F15.7)
      RETURN
      END
C     ***************************************************************
C
C     SUBROTINA QUE GERA AUTOMATICAMENTE AS COORDENADAS DOS PON
C     TOS DA MALHA NO TRECHO EM QUE ESTA MALHA POSSA SER REGULAR.
```

```
C
C     ***********************************************************
      SUBROUTINE GERA(N1,NG,NESP,ESP,X,Y)
      DIMENSION X(500),Y(500)
      COMMON NL,NI
      IF(NG.EQ.0) GO TO 702
  701 CONTINUE
      DO 700 I=N1,N1+NESP-1
      X(I+1)=X(I)+ESP
  700 Y(I+1)=Y(I)
      N1=N1+NESP+1
      IF(N1.GT.NG-NESP) GO TO 702
      X(N1)=X(N1-NESP-1)
      Y(N1)=Y(N1-NESP-1)+ESP
      GO TO 701
  702 CONTINUE
      RETURN
      END
C     ***********************************************************
C
C     SUBROTINA QUE ESCOLHE OS OITO PONTOS DE CONTROLE DE CADA
C     UM DOS PONTOS INTERNOS DA MALHA.
C
C     ***********************************************************
      SUBROUTINE CATAR(N,NPI,NPS,X,Y,XP,YP,NA,DIST,DORD)
      DIMENSION X(500),Y(500),XP(4000),YP(4000),NA(4000),DIST(
     *500),DORD(500)
      COMMON NL,NI
C     ESCOLHA DO 1 PONTO PROXIMO DE CADA PONTO DA MALHA
C     MONTAGEM DO VETOR DE DISTANCIAS POSSIVEIS
      DO 400 I=1,NPI
      DO 401 J=1,N
      DIST(J)=0.
      DORD(J)=0.
      IF(J.EQ.I) GO TO 401
      CONTINUE
      IF(X(J).LE.X(I)) GO TO 401
      CONTINUE
      CA=0.
      CA=(Y(J)-Y(I))/(X(J)-X(I))
      IF(CA.LE.-0.4142) GO TO 401
      CONTINUE
      IF(CA.GE.0.4142) GO TO 401
      CONTINUE
      DIST(J)=SQRT((X(J)-X(I))**2.+(Y(J)-Y(I))**2.)
      DORD(J)=DIST(J)
  401 CONTINUE
C     ORDENACAO CRESCENTE DO VETOR DORD(J)
  402 II=0
      JJ=0
  403 JJ=JJ+1
      IF(DORD(JJ).LE.DORD(JJ+1)) GO TO 404
      TEMP1=DORD(JJ)
      DORD(JJ)=DORD(JJ+1)
```

```
      DORD(JJ+1)=TEMP1
      II=1
  404 IF(JJ.LT.N-1) GO TO 403
      IF(II.NE.0) GO TO 402
C     ESCOLHA DA DISTANCIA MINIMA NAO NULA
      DO 405 IK=1,N
      IF(DORD(IK))406,405,406
  405 CONTINUE
  406 DMIN1=DORD(IK)
C     COMPARACAO ENTRE DIST(J) E DMIN1
      DO 407 KI=1,N
      IF(DMIN1-DIST(KI))407,408,407
  407 CONTINUE
  408 CONTINUE
      XP(8*(I-1)+1)=X(KI)
      YP(8*(I-1)+1)=Y(KI)
      NA(8*(I-1)+1)=KI
      IF(NPS) 500,400,500
  500 IF(X(I)) 409,409,400
  409 CONTINUE
      XP(8*(I-1)+3)=-X(KI)
      YP(8*(I-1)+3)=Y(KI)
      NA(8*(I-1)+3)=KI
  400 CONTINUE
C     ESCOLHA DO 2 PONTO PTOXIMO DE CADA PONTO DA MALHA
C     MONTAGEM DO VETOR DE DISTANCIAS POSSIVEIS
      DO 410 I=1,NPI
      DO 411 J=1,N
      DIST(J)=0.
      DORD(J)=0.
      IF(J.EQ.I) GO TO 411
      CONTINUE
      IF(Y(J).LE.Y(I)) GO TO 411
      CONTINUE
      CUIDADO PARA EVITAR DIVISAO POR ZERO NO CALCULO DO COE-
      FICIENTE ANGULAR.
      CA=0.
      IF(ABS(X(J)-X(I)).GT.0.1*(Y(J)-Y(I))) GO TO 412
      CA=10.
      GO TO 413
  412 CA=(Y(J)-Y(I))/(X(J)-X(1))
      GO TO 413
  413 CONTINUE
      IF(CA.LE.2.4142) GO TO 414
      CONTINUE
      GO TO 415
  414 CONTINUE
      IF(CA.GT.-2.4142) GO TO 411
      GO TO 415
  415 CONTINUE
      DIST(J)=SQRT((X(J)-X(I))**2.+(Y(J)-Y(I))**2.)
      DORD(J)=DIST(J)
  411 CONTINUE
      ORDENACAO CRESCENTE DO VETOR DORD(J)
```

```
  416 II=0
      JJ=0
  417 JJ=JJ+1
      IF(DORD(JJ).LE.DORD(JJ+1)) GO TO 418
      TEMP2=DORD(JJ)
      DORD(JJ)=DORD(JJ+1)
      DORD(JJ+1)=TEMP2
      II=1
  418 IF(JJ.LT.N-1) GO TO 417
      IF(II.NE.0) GO TO 416
C     ESCOLHA DA DISTANCIA MININA NAO NULA
      DO 419 IK=1,N
      IF(DORD(IK)) 420,419,420
  419 CONTINUE
  420 DMIN2=DORD(IK)
C     COMPARACAO ENTRE DIST(J) E DMIN2
      DO 421 KI=1,N
      IF(DMIN2-DIST(KI)) 421,422,421
  421 CONTINUE
  422 CONTINUE
      XP(8*(I-1)+2)=X(KI)
      YP(8*(I-1)+2)=Y(KI)
      NA(8*(I-1)+2)=KI
      IF(NPS) 501,410,501
  501 IF(Y(I)) 410,423,410
  423 CONTINUE
      XP(8*(I-1)+4)=X(KI)
      YP(8*(I-1)+4)=-Y(KI)
      NA(8*(I-1)+4)=KI
  410 CONTINUE
C     ESCOLHA DO 3 PONTO PROXIMO DE CADA PONTO DA MALHA
C     MONTAGEM DO VETOR DE DISTANCIAS POSSIVEIS
      DO 424 I=1,NPI
      IF(NPS) 425,426,425
  425 IF(X(I)) 426,424,426
  426 CONTINUE
      DO 427 J=1,N
      DIST(J)=0.
      DORD(J)=0.
      IF(J.EQ.I) GO TO 427
      CONTINUE
      IF(X(J).GE.X(I)) GO TO 427
      CONTINUE
      CA=0.
      CA=(Y(J)-Y(I))/(X(J)-X(I))
      IF(CA.LT.-0.4142) GO TO 427
      CONTINUE
      IF(CA.GT.0.4142) GO TO 427
      CONTINUE
      DIST(J)=SQRT((X(J)-X(I))**2.+(Y(J)-Y(I))**2.)
      DORD(J)=DIST(J)
  427 CONTINUE
C     ORDENACAO CRESCENTE DO VETOR DORD(J)
  428 II=0
```

```
      JJ=0
  429 JJ=JJ+1
      IF(DORD(JJ).LE.DORD(JJ+1)) GO TO 430
      TEMP3=DORD(JJ)
      DORD(JJ)=DORD(JJ+1)
      DORD(JJ+1)=TEMP3
      II=1
  430 IF(JJ.LT.N-1) GO TO 429
      IF(II.NE.0) GO TO 428
C     ESCOLHA DA DISTANCIA MINIMA NAO NULA
      DO 431 IK=1,N
      IF(DORD(IK)) 432,431,432
  431 CONTINUE
  432 DMIN3=DORD(IK)
C     COMPARACAO ENTRE DIST(J) E DMIN3
      DO 433 KI=1,N
      IF(DMIN3-DIST(KI)) 433,434,433
  433 CONTINUE
  434 CONTINUE
      XP(8*(I-1)+3)=X(KI)
      YP(8*(I-1)+3)=Y(KI)
      NA(8*(I-1)+3)=KI
  424 CONTINUE
C     ESCOLHA DO 4 PONTO PROXIMO DE CADA PONTO DA MALHA
C     MONTAGEM DO VETOR DE DISTANCIAS POSSIVEIS
      DO 435 I=1,NFI
      IF(NPS) 436,437,436
  436 IF(Y(I)) 437,435,437
  437 CONTINUE
      DO 438 J=1,N
      DIST(J)=0.
      DORD(J)=0.
      IF(J.EQ.I) GO TO 438
      CONTINUE
      IF(Y(J).GE.Y(I)) GO TO 438
      CONTINUE
C     CUIDADO PARA EVITAR DIVISAO POR ZERO NO CALCULO DO COE-
C     FICIENTE ANGULAR.
      CA=0.
      IF(ABS(X(J)-X(I)).GT.0.1*ABS(Y(J)-Y(I))) GO TO 439
      CA=10.
      GO TO 440
  439 CA=(Y(J)-Y(I))/(X(J)-X(I))
      GO TO 440
  440 CONTINUE
      IF(CA.LE.2.4142) GO TO 441
      CONTINUE
      GO TO 442
  441 CONTINUE
      IF(CA.GT.-2.4142) GO TO 438
      GO TO 442
  442 CONTINUE
      DIST(J)=SQRT((X(J)-X(I))**2.+(Y(J)-Y(I))**2.)
      DORD(J)=DIST(J)
```

```
  438 CONTINUE
C     ORDENACAO CRESCENTE DO VETOR DORD(J)
  443 II=0
      JJ=0
  444 JJ=JJ+1
      IF(DORD(JJ).LE.DORD(JJ+1)) GO TO 445
      TEMP4=DORD(JJ)
      DORD(JJ)=DORD(JJ+1)
      DORD(JJ+1)=TEMP4
      II=1
  445 IF(JJ.LT.N-1) GO TO 444
      IF(II.NE.0) GO TO 443
C     ESCOLHA DA DISTANCIA MINIMA NAO NULA
      DO 446 IK=1,N
      IF(DORD(IK)) 447,446,447
  446 CONTINUE
  447 DMIN4=DORD(IK)
C     COMPARACAO ENTRE DIST(J) E DMIN4
      DO 448 KI=1,N
      IF(DMIN4-DIST(KI)) 448,449,448
  448 CONTINUE
  449 CONTINUE
      XP(8*(I-1)+4)=X(KI)
      YP(8*(I-1)+4)=Y(KI)
      NA(8*(I-1)+4)=KI
  435 CONTINUE
C     ESCOLHA DO 5 PONTO PROXIMO DE CADA PONTO DA MALHA
C     MONTAGEM DO VETOR DE DISTANCIAS POSSIVEIS
      DO 450 I=1,NPI
      DO 451 J=1,N
      DIST(J)=0.
      DORD(J)=0.
      IF(J.EQ.I) GO TO 451
      CONTINUE
      IF(X(J).LE.X(I)) GO TO 451
      CONTINUE
      IF(Y(J).LE.Y(I)) GO TO 451
      CONTINUE
      CA=0.
      CA=(Y(J)-Y(I))/(X(J)-X(I))
      IF(CA.LT.0.4142) GO TO 451
      CONTINUE
      IF(CA.GT.2.4142) GO TO 451
      CONTINUE
      DIST(J)=SQRT((X(J)-X(I))**2.+(Y(J)-Y(I))**2.)
      DORD(J)=DIST(J)
  451 CONTINUE
C     ORDENACAO CRESCENTE DO VETOR DORD(J)
  452 II=0
      JJ=0
  453 JJ=JJ+1
      IF(DORD(JJ).LE.DORD(JJ+1)) GO TO 454
      TEMP5=DORD(JJ)
      DORD(JJ)=DORD(JJ+1)
```

```
      DORD(JJ+1)=TEMP5
      II=1
  454 IF(JJ.LT.N-1) GO TO 453
      IF(II.NE.0) GO TO 452
C     ESCOLHA DA DISTANCIA MINIMA NAO NULA
      DO 455 IK=1,N
      IF(DORD(IK)) 456,455,456
  455 CONTINUE
  456 DMIN5=DORD(IK)
C     COMPARACAO ENTRE DIST(J) E DMIN5
      DO 457 KI=1,N
      IF(DMIN5-DIST(KI)) 457,458,457
  457 CONTINUE
  458 CONTINUE
      XP(8*(I-1)+5)=X(KI)
      YP(8*(I-1)+5)=Y(KI)
      NA(8*(I-1)+5)=KI
      IF(NPS) 502,450,502
  502 IF(Y(I).NE.0) GO TO 459
      XP(8*(I-1)+8)=X(KI)
      YP(8*(I-1)+8)=-Y(KI)
      NA(8*(I-1)+8)=KI
      IF(X(I).NE.0) GO TO 459
      XP(8*(I-1)+7)=-X(KI)
      YP(8*(I-1)+7)=-Y(KI)
      NA(8*(I-1)+7)=KI
      GO TO 459
  459 CONTINUE
      IF(X(I).NE.0) GO TO 450
      XP(8*(I-1)+6)=-X(KI)
      YP(8*(I-1)+6)=Y(KI)
      NA(8*(I-1)+6)=KI
      GO TO 450
  450 CONTINUE
C     ESCOLHA DO 6 PONTO PROXIMO DE CADA PONTO DA MALHA
C     MONTAGEM DO VETOR DE DISTANCIAS POSSIVEIS
      DO 460 I=1,NPI
      IF(NPS) 461,462,461
  461 IF(X(I)) 462,460,462
  462 CONTINUE
      DO 463 J=1,N
      DIST(J)=0.
      DORD(J)=0.
      IF(J.EQ.I) GO TO 463
      CONTINUE
      IF(X(J).GE.X(I)) GO TO 463
      CONTINUE
      IF(Y(J).LE.Y(I)) GO TO 463
      CONTINUE
      CA=0.
      CA=(Y(J)-Y(I))/(X(J)-X(I))
      IF(CA.GT.-0.4142) GO TO 463
      CONTINUE
      IF(CA.LT.-2.4142) GO TO 463
```

```
      CONTINUE
      DIST(J)=SQRT((X(J)-X(I))**2.+(Y(J)-Y(I))**2.)
      DORD(J)=DIST(J)
  463 CONTINUE
C     ORDENACAO CRESCENTE DO VETOR DORD(J)
  464 II=0
      JJ=0
  465 JJ=JJ+1
      IF(DORD(JJ).LE.DORD(JJ+1)) GO TO 466
      TEMP6=DORD(JJ)
      DORD(JJ)=DORD(JJ+1)
      DORD(JJ+1)=TEMP6
      II=1
  466 IF(JJ.LT.N-1) GO TO 465
      IF(II.NE.0) GO TO 464
C     ESCOLHA DA DISTANCIA MINIMA NAO NULA
      DO 467 IK=1,N
      IF(DORD(IK)) 468,467,468
  467 CONTINUE
  468 DMIN6=DORD(IK)
C     COMPARACAO ENTRE DIST(J) E DMIN6
      DO 469 KI=1,N
      IF(DMIN6-DIST(KI)) 469,470,469
  469 CONTINUE
  470 CONTINUE
      XP(8*(I-1)+6)=X(KI)
      YP(8*(I-1)+6)=Y(KI)
      NA(8*(I-1)+6)=KI
      IF(NPS) 503,460,503
  503 IF(Y(I).NE.0) GO TO 460
      IF(X(I).EQ.0) GO TO 460
      XP(8*(I-1)+7)=X(KI)
      YP(8*(I-1)+7)=-Y(KI)
      NA(8*(I-1)+7)=KI
      GO TO 460
  460 CONTINUE
C     ESCOLHA DO 7 PONTO PROXIMO DE CADA PONTO DA MALHA
C     MONTAGEM DO VETOR DE DISTANCIAS POSSIVEIS
      DO 471 I=1,NPI
      IF(NPS) 472,473,472
  472 IF(X(I)) 474,471,474
  474 IF(Y(I)) 473,471,473
  473 CONTINUE
      DO 475 J=1,N
      DIST(J)=0.
      DORD(J)=0.
      IF(J.EQ.I) GO TO 475
      CONTINUE
      IF(X(J).GE.X(I)) GO TO 475
      CONTINUE
      IF(Y(J).GE.Y(I)) GO TO 475
      CONTINUE
      CA=0.
      CA=(Y(J)-Y(I))/(X(J)-X(I))
```

```
      IF(CA.LT.0.4142) GO TO 475
      CONTINUE
      IF(CA.GT.2.4142) GO TO 475
      CONTINUE
      DIST(J)=SQRT((X(J)-X(I))**2.+(Y(J)-Y(I))**2.)
      DORD(J)=DIST(J)
  475 CONTINUE
C     ORDENACAO CRESCENTE DO VETOR DORD(J)
  476 II=0
      JJ=0
  477 JJ=JJ+1
      IF(DORD(JJ).LE.DORD(JJ+1)) GO TO 478
      TEMP7=DORD(JJ)
      DORD(JJ)=DORD(JJ+1)
      DORD(JJ+1)=TEMP7
      II=1
  478 IF(JJ.LT.N-1) GO TO 477
      IF(II.NE.0) GO TO 476
C     ESCOLHA DA DISTANCIA MINIMA NAO NULA
      DO 479 IK=1,N
      IF(DORD(IK)) 480,479,480
  479 CONTINUE
  480 DMIN7=DORD(IK)
C     COMPARACAO ENTRE DIST(J) E DMIN7
      DO 481 KI=1,N
      IF(DMIN7-DIST(KI)) 481,482,481
  481 CONTINUE
  482 CONTINUE
      XP(8*(I-1)+7)=X(KI)
      YP(8*(I-1)+7)=Y(KI)
      NA(8*(I-1)+7)=KI
  471 CONTINUE
C     ESCOLHA DO 8 PONTO PROXIMO DE CADA PONTO DA MALHA
C     MONTAGEM DO VETOR DE DISTANCIAS POSSIVEIS
      DO 483 I=1,NPI
      IF(NPS) 484,485,484
  484 IF(Y(I)) 485,483,485
  485 CONTINUE
      DO 486 J=1,N
      DIST(J)=0.
      DORD(J)=0.
      IF(J.EQ.I) GO TO 486
      CONTINUE
      IF(X(J).LE.X(I)) GO TO 486
      CONTINUE
      IF(Y(J).GE.Y(I)) GO TO 486
      CONTINUE
      CA=0.
      CA=(Y(J)-Y(I))/(X(J)-X(I))
      IF(CA.GT.-0.4142) GO TO 486
      CONTINUE
      IF(CA.LT.-2.4142) GO TO 486
      CONTINUE
      DIST(J)=SQRT((X(J)-X(I))**2.+(Y(J)-Y(I))**2.)
```

```
      DORD(J)=DIST(J)
  486 CONTINUE
C     ORDENACAO CRESCENTE DO VETOR DORD(J)
  487 II=0
      JJ=0
  488 JJ=JJ+1
      IF(DORD(JJ).LE.DORD(JJ+1)) GO TO 489
      TEMP8=DORD(JJ)
      DORD(JJ)=DORD(JJ+1)
      DORD(JJ+1)=TEMP8
      II=1
  489 IF(JJ.LT.N-1) GO TO 488
      IF(II.NE.0) GO TO 487
C     ESCOLHA DA DISTANCIA MINIMA NAO NULA
      DO 490 IK=1,N
      IF(DORD(IK)) 491,490,491
  490 CONTINUE
  491 DMIN8=DORD(IK)
C     COMPARACAO ENTRE DIST(J) E DMIN8
      DO 492 KI=1,N
      IF(DMIN8-DIST(KI)) 492,493,492
  492 CONTINUE
  493 CONTINUE
      XP(8*(I-1)+8)=X(KI)
      YP(8*(I-1)+8)=Y(KI)
      NA(8*(I-1)+8)=KI
      IF(NPS) 504,483,504
  504 IF(X(I).NE.0) GO TO 483
      IF(Y(I).EQ.0) GO TO 483
      XP(8*(I-1)+7)=-X(KI)
      YP(8*(I-1)+7)=Y(KI)
      NA(8*(I-1)+7)=KI
      GO TO 483
  483 CONTINUE
      RETURN
      END
C     ************************************************************
C
C     SUBROTINA QUE MONTA O VETOR DE CARGAS SOBRE CADA PONTO DA
C     MALHA.
C
C     ************************************************************
      SUBROUTINE CARGA(NPI,B,Q,ID)
      DIMENSION B(500)
      COMMON NL,NI
C     ZERAGEM DO VETOR DE CARGAS
      DO 600 I=1,NPI
  600 B(I)=0.
      IF(ID) 602,603,602
  602 CONTINUE
      DO 606 I=1,NPI
  606 B(I)=Q
      GO TO 603
  603 CONTINUE
```

```
      RETURN
      END
C     ****************************************************************
C
C     SUBROTINA QUE MONTA AS MATRIZES DE CONTROLE A1,A2,A3,A4 PA
C     RA CADA UM DOS PONTOS INTERNOS DA MALHA
C
C     ****************************************************************
      SUBROUTINE MACON(NPI,X,Y,XP,YP,A1,A2,A3,A4)
      DIMENSION X(500),Y(500),XP(4000),YP(4000),A1(5,5,500),A2(5,
     *5,500),A3(5,5,500),A4(5,5,500)
      COMMON NL,NI
C     ZERAGEM DAS MATRIZES A1,A2,A3,A4
      DO 60 II=1,5
      DO 60 KK=1,5
      DO 60 JJ=1,500
      A1(II,KK,JJ)=0.
      A2(II,KK,JJ)=0.
      A3(II,KK,JJ)=0.
   60 A4(II,KK,JJ)=0.
C     MONTAGEM DAS MATRIZES A1
      DO 61 JJ=1,NPI
      A1(1,1,JJ)=XP(8*JJ-7)-X(JJ)
      A1(2,1,JJ)=XP(8*JJ-6)-X(JJ)
      A1(3,1,JJ)=XP(8*JJ-5)-X(JJ)
      A1(4,1,JJ)=XP(8*JJ-4)-X(JJ)
      A1(5,1,JJ)=XP(8*JJ-3)-X(JJ)
      A1(1,2,JJ)=YP(8*JJ-7)-Y(JJ)
      A1(2,2,JJ)=YP(8*JJ-6)-Y(JJ)
      A1(3,2,JJ)=YP(8*JJ-5)-Y(JJ)
      A1(4,2,JJ)=YP(8*JJ-4)-Y(JJ)
      A1(5,2,JJ)=YP(8*JJ-3)-Y(JJ)
      A1(1,3,JJ)=A1(1,1,JJ)*A1(1,1,JJ)/2.
      A1(2,3,JJ)=A1(2,1,JJ)*A1(2,1,JJ)/2.
      A1(3,3,JJ)=A1(3,1,JJ)*A1(3,1,JJ)/2.
      A1(4,3,JJ)=A1(4,1,JJ)*A1(4,1,JJ)/2.
      A1(5,3,JJ)=A1(5,1,JJ)*A1(5,1,JJ)/2.
      A1(1,4,JJ)=A1(1,2,JJ)*A1(1,2,JJ)/2.
      A1(2,4,JJ)=A1(2,2,JJ)*A1(2,2,JJ)/2.
      A1(3,4,JJ)=A1(3,2,JJ)*A1(3,2,JJ)/2.
      A1(4,4,JJ)=A1(4,2,JJ)*A1(4,2,JJ)/2.
      A1(5,4,JJ)=A1(5,2,JJ)*A1(5,2,JJ)/2.
      A1(1,5,JJ)=A1(1,1,JJ)*A1(1,2,JJ)
      A1(2,5,JJ)=A1(2,1,JJ)*A1(2,2,JJ)
      A1(3,5,JJ)=A1(3,1,JJ)*A1(3,2,JJ)
      A1(4,5,JJ)=A1(4,1,JJ)*A1(4,2,JJ)
   61 A1(5,5,JJ)=A1(5,1,JJ)*A1(5,2,JJ)
C     MONTAGEM DAS QUATRO PRIMEIRAS LINHAS DAS MATRIZES A2,A3,A4
      DO 62 JJ=1,NPI
      DO 62 KK=1,5
      DO 62 II=1,4
      A2(II,KK,JJ)=A1(II,KK,JJ)
      A3(II,KK,JJ)=A1(II,KK,JJ)
   62 A4(II,KK,JJ)=A1(II,KK,JJ)
```

```
C     MONTAGEM DA QUINTA LINHA DAS MATRIZES A2,A3,A4
      DO 63 JJ=1,NPI
      A2(5,1,JJ)=XP(8*JJ-2)-X(JJ)
      A2(5,2,JJ)=YP(8*JJ-2)-Y(JJ)
      A2(5,3,JJ)=A2(5,1,JJ)*A2(5,1,JJ)/2.
      A2(5,4,JJ)=A2(5,2,JJ)*A2(5,2,JJ)/2.
      A2(5,5,JJ)=A2(5,1,JJ)*A2(5,2,JJ)
      A3(5,1,JJ)=XP(8*JJ-1)-X(JJ)
      A3(5,2,JJ)=YP(8*JJ-1)-Y(JJ)
      A3(5,3,JJ)=A3(5,1,JJ)*A3(5,1,JJ)/2.
      A3(5,4,JJ)=A3(5,2,JJ)*A3(5,2,JJ)/2.
      A3(5,5,JJ)=A3(5,1,JJ)*A3(5,2,JJ)
      A4(5,1,JJ)=XP(8*JJ)-X(JJ)
      A4(5,2,JJ)=YP(8*JJ)-Y(JJ)
      A4(5,3,JJ)=A4(5,1,JJ)*A4(5,1,JJ)/2.
      A4(5,4,JJ)=A4(5,2,JJ)*A4(5,2,JJ)/2.
   63 A4(5,5,JJ)=A4(5,1,JJ)*A4(5,2,JJ)
      RETURN
      END
C     ************************************************************
C
C     SUBROTINA QUE INVERTE AS MATRIZES DE CONTROLE DE CADA PONTO
C     INTERNO DA MALHA,ARMAZENANDO AS INVERSAS NAS MESMAS AREAS
C     DAS ORIGINAIS. E UTILIZADA A TECNICA DE PARTICAO APROVEITAN
C     DO O FATO DE SEREM IGUAIS AS QUATRO PRIMEIRAS LINHAS DAS
C     MATRIZES DE CONTROLE DE CADA PONTO.
C
C     ************************************************************
      SUBROUTINE INV(NPI,A1,A2,A3,A4)
      DIMENSION A1(5,5,500),A2(5,5,500),A3(5,5,500),A4(5,5,500),
     *G(5),H(5)
      COMMON NL,NI
C     INVERSAO DAS SUBMATRIZES (4X4)  COMUNS AS QUATRO MATRIZES
C     DE CONTROLE DE CADA PONTO.
      N1=4
      DO 79 J1=1,NPI
      NN=N1-1
      A1(1,1,J1)=1./A1(1,1,J1)
      DO 80 M=1,NN
      K=M+1
      DO 81 I=1,M
      G(I)=0.
      DO 81 J=1,M
   81 G(I)=G(I)+A1(I,J,J1)*A1(J,K,J1)
      D=0.
      DO 82 I=1,M
   82 D=D+A1(K,I,J1)*G(I)
      E=A1(K,K,J1)-D
      A1(K,K,J1)=1./E
      DO 83 I=1,M
   83 A1(I,K,J1)=-G(I)*A1(K,K,J1)
      DO 84 J=1,M
      H(J)=0.
      DO 84 I=1,M
```

```
   84 H(J)=H(J)+A1(K,I,J1)*A1(I,J,J1)
      DO 86 J=1,M
   86 A1(K,J,J1)=-H(J)*A1(K,K,J1)
      DO 80 I=1,M
      DO 80 J=1,M
   80 A1(I,J,J1)=A1(I,J,J1)-G(I)*A1(K,J,J1)
C     APROVEITAMENTO DA PARTE COMUM ENTRE AS MATRIZES DE CONTROLE
C     DE CADA PONTO INTERNO DA MALHA
      DO 68 I=1,4
      DO 68 J=1,4
      A2(I,J,J1)=A1(I,J,J1)
      A3(I,J,J1)=A1(I,J,J1)
   68 A4(I,J,J1)=A1(I,J,J1)
C     COMPLEMENTACAO DA INVERSAO DAS MATRIZES DE CONTROLE
      DO 85 I=1,4
      G(I)=0.
      DO 85 J=1,4
   85 G(I)=G(I)+A1(I,J,J1)*A1(J,5,J1)
      D=0.
      DO 87 I=1,4
   87 D=D+A1(5,I,J1)*G(I)
      E=A1(5,5,J1)-D
      A1(5,5,J1)=1./E
      DO 88 I=1,4
   88 A1(I,5,J1)=-G(I)*A1(5,5,J1)
      DO 89 J=1,4
      H(J)=0.
      DO 89 I=1,4
   89 H(J)=H(J)+A1(5,I,J1)*A1(I,J,J1)
      DO 90 J=1,4
   90 A1(5,J,J1)=-H(J)*A1(5,5,J1)
      DO 91 I=1,4
      DO 91 J=1,4
   91 A1(I,J,J1)=A1(I,J,J1)-G(I)*A1(5,J,J1)
      DO 92 I=1,4
      G(I)=0.
      DO 92 J=1,4
   92 G(I)=G(I)+A2(I,J,J1)*A2(J,5,J1)
      D=0.
      DO 93 I=1,4
   93 D=D+A2(5,I,J1)*G(I)
      E=A2(5,5,J1)-D
      A2(5,5,J1)=1./E
      DO 94 I=1,4
   94 A2(I,5,J1)=-G(I)*A2(5,5,J1)
      DO 95 J=1,4
      H(J)=0.
      DO 95 I=1,4
   95 H(J)=H(J)+A2(5,I,J1)*A2(I,J,J1)
      DO 96 J=1,4
   96 A2(5,J,J1)=-H(J)*A2(5,5,J1)
      DO 97 I=1,4
      DO 97 J=1,4
   97 A2(I,J,J1)=A2(I,J,J1)-G(I)*A2(5,J,J1)
```

```
      DO 98 I=1,4
      G(I)=0.
      DO 98 J=1,4
   98 G(I)=G(I)+A3(I,J,J1)*A3(J,5,J1)
      D=0.
      DO 99 I=1,4
   99 D=D+A3(5,I,J1)*G(I)
      E=A3(5,5,J1)-D
      A3(5,5,J1)=1./E
      DO 71 I=1,4
   71 A3(I,5,J1)=-G(I)*A3(5,5,J1)
      DO 72 J=1,4
      H(J)=0.
      DO 72 I=1,4
   72 H(J)=H(J)+A3(5,I,J1)*A3(I,J,J1)
      DO 73 J=1,4
   73 A3(5,J,J1)=-H(J)*A3(5,5,J1)
      DO 74 I=1,4
      DO 74 J=1,4
   74 A3(I,J,J1)=A3(I,J,J1)-G(I)*A3(5,J,J1)
      DO 69 I=1,4
      G(I)=0.
      DO 69 J=1,4
   69 G(I)=G(I)+A4(I,J,J1)*A4(J,5,J1)
      D=0.
      DO 70 I=1,4
   70 D=D+A4(5,I,J1)*G(I)
      E=A4(5,5,J1)-D
      A4(5,5,J1)=1./E
      DO 75 I=1,4
   75 A4(I,5,J1)=-G(I)*A4(5,5,J1)
      DO 76 J=1,4
      H(J)=0.
      DO 76 I=1,4
   76 H(J)=H(J)+A4(5,I,J1)*A4(I,J,J1)
      DO 77 J=1,4
   77 A4(5,J,J1)=-H(J)*A4(5,5,J1)
      DO 78 I=1,4
      DO 78 J=1,4
   78 A4(I,J,J1)=A4(I,J,J1)-G(I)*A4(5,J,J1)
   79 CONTINUE
      RETURN
      END
C     ***********************************************************
C
C     SUBROTINA QUE MONTA AS MATRIZES DOS COEFICIENTES DE DERIVA
C     DAS PARA CADA UM DOS PSNTOS INTERNOS DA MALHA, A PARTIR DAS
C     INVERSAS DAS MATRIZES DE CONTROLE
C
C     ***********************************************************
      SUBROUTINE CODEV(NPI,B1,B2,B3,B4,C)
      DIMENSION B1(5,5,500),B2(5,5,500),B3(5,5,500),B4(5,5,500),
     *C(5,9,500)
      COMMON NL,NI
```

```
C     ZERAGEM DAS MATRIZES C
      DO 100 J1=1,500
      DO 100 I1=1,5
      DO 100 K1=1,9
  100 C(I1,K1,J1)=0.
C     MONTAGEM DA PRIMEIRA COLUNA DAS MATRIZES C
      DO 101 J1=1,NPI
      DO 101 I1=1,5
  101 C(I1,1,J1)=(B1(I1,1,J1)+B1(I1,2,J1)+B1(I1,3,J1)+B1(I1,4,J1
     *)+B1(I1,5,J1)+B2(I1,1,J1)+B2(I1,2,J1)+B2(I1,3,J1)+B2(I1,4,
     *J1)+B2(I1,5,J1)+B3(I1,1,J1)+B3(I1,2,J1)+B3(I1,3,J1)+B3(I1,
     *4,J1)+B3(I1,5,J1)+B4(I1,1,J1)+B4(I1,2,J1)+B4(I1,3,J1)+B4(I1
     *,4,J1)+B4(I1,5,J1))/(-4.)
C     MONTAGEM DA SEGUNDA A QUINTA COLUNAS DA MATRIZ C
      DO 102 J1=1,NPI
      DO 102 K1=2,5
      DO 102 I1=1,5
  102 C(I1,K1,J1)=(B1(I1,K1-1,J1)+B2(I1,K1-1,J1)+B3(I1,K1-1,J1)+B
     *4(I1,K1-1,J1))/4.
C     MONTAGEM DA SEXTA A NONA COLUNAS DA MATRIZ C
      DO 103 J1=1,NPI
      DO 103 I1=1,5
      C(I1,6,J1)=B1(I1,5,J1)/4.
      C(I1,7,J1)=B2(I1,5,J1)/4.
      C(I1,8,J1)=B3(I1,5,J1)/4.
  103 C(I1,9,J1)=B4(I1,5,J1)/4.
      RETURN
      END
C     ****************************************************************
C
C     SUBROTINA QUE MONTA A MATRIZ GLOBAL E UMA  MATRIZ DE  APON
C     TADORES UTILIZANDO TECNICA DE ESPARSIDADE
C
C     ****************************************************************
      SUBROUTINE ARMA(NPI,NA,C,VT,D,DA)
      DIMENSION NA(4000),C(5,9,500),VT(500),D(500,9)
      INTEGER DA(500,9)
      COMMON NL,NI
C     ZERAGEM DAS MATRIZES E DO VETOR DE TRABALHO
      DO 120 I=1,500
      VT(I)=0.
      DO 120 J=1,9
      D(I,J)=0.
  120 DA(I,J)=0
C     MONTAGEM DA DIAGONAL PRINCIPAL NA PRIMEIRA COLUNA DE D(I,J)
      DO 128 I=1,NPI
      D(I,1)=C(3,1,I)+C(4,1,I)
  128 DA(I,1)=1
      NESPAR=0
C     MONTAGEM DOS TERMOS CORRESPONDENTES AOS PONTOS DE CONTROLE
C     DE CADA LINHA DO SISTEMA GLOBAL NO VETOR DE TRABALHO. O VE
C     TOR VT E ARMAZENADO NA MESMA AREA RESERVADA AO VETOR DIST
C     UTILIZADO NA SUBROTINA CATAR
      DO 121 I=1,NPI
```

```
      DO 122 K=1,8
      KK=8*(I-1)+K
      J=NA(KK)
      IF(J-NPI) 123,123,122
  123 VT(J)=VT(J)+C(3,K+1,I)+C(4,K+1,I)
      GO TO 122
  122 CONTINUE
C     TRANSFERENCIA DO VETOR DE TRABALHO PARA A LINHA CORRESPON
C     DENTE DA MATRIZ GLOBAL ,CONDENSANDO OS VALORES NAO NULOS A
C     ESQUERDA ,A PARTIR DA SEGUNDA COLUNA. MONTAGEM SIMULTANEA
C     DA MATRIZ DE APONTADORES.
      JJ=1
      DO 124 M=1,NPI
      IF(VT(M)) 125,124,125
  125 CONTINUE
      JJ=JJ+1
      D(I,JJ)=VT(M)
      DA(I,JJ)=M
      VT(M)=0.
      NESPAR=NESPAR+1
  124 CONTINUE
  121 CONTINUE
C     CALCULO E IMPRESSAO DO GRAU DE ESPARSIDADE
      GE=(FLOAT((NPI**2-NESPAR-NPI)*100))/(NPI**2)
      WRITE(NI,129) GE
  129 FORMAT(//,2X,90(ö=ö),//,2X,öGRAU DE ESPARSIDADE =ö,F6.2,
     * 1X,öPOR CENTOö,//)
C     PREPARACAO DAS MATRIZES D(I,J) E DA(I,J) PARA RESOLUCAO PE
C     LO METODO DE GAUSS-SEIDEL, LEVANDO EM CONTA ESPARSIDADE
      DO 130 N=1,NPI
      DO 131 M=1,9
      IF(DA(N,M).NE.0) GO TO 131
      DA(N,1)=M-1
      GO TO 132
  131 CONTINUE
  132 CONTINUE
      IF(D(N,1).NE.0) D(N,1)=1./D(N,1)
  130 CONTINUE
      RETURN
      END
C     ****************************************************************
C
C     SUBROTINA QUE MONTA O VETOR DE TERMOS INDEPENDENTES DO SIS
C     TEMA GLOBAL A PARTIR DO VETOR DE CARGAS OU DA SOLUCAO DO
C     PRIMEIRO PASSO DE CALCULO E DAS CONDICOES DE CONTORNO
C
C     ****************************************************************
      SUBROUTINE VEIND(B,NA,NPI,CC,C)
      DIMENSION B(500),NA(4000),CC(200),C(5,9,500)
      COMMON NL,NI
      DO 142 I=1,NPI
      DO 142 K=1,8
      KK=8*(I-1)+K
      J=NA(KK)
```

```
      IF(J-NPI)142,142,144
  144 B(I)=B(I)-C(3,K+1,I)*CC(J-NPI)-C(4,K+1,I)*CC(J-NPI)
  142 CONTINUE
      RETURN
      END
C     ****************************************************************
C
C     SUBROTINA QUE RESOLVE, PELO METODO ITERATIVO DE GAUSS-SEI
C     DEL, SISTEMAS DE EQUACOES ARMAZENADOS COM TECNICA DE ESPAR
C     SIDADE
C
C     ****************************************************************
      SUBROUTINE GAUSE(NPI,D,DA,TOLER,R,SOL,PART)
      DIMENSION D(500,9),R(500),SOL(500)
      INTEGER DA(500,9)
      COMMON NL,NI
      RELAX=1.8
      NCYC=NPI/2
      IF(NCYC.LT.50)  NCYC=50
      IF(NPI.EQ.1) GO TO 166
      DO 160 N=1,NPI
  160 SOL(N)=PART
      DO 161 NC=1,NCYC
      SUM=0.
      SUMD=0.
      DO 162 N=1,NPI
      FX=R(N)
      NUM=DA(N,1)
      DO 163 M=2,NUM
      L=DA(N,M)
  163 FX=FX-D(N,M)*SOL(L)
      DX=D(N,1)*FX-SOL(N)
      SOL(N)=SOL(N)+RELAX*DX
      SUM=SUM+ABS(DX)
      SUMD=SUMD+ABS(SOL(N))
  162 CONTINUE
      ND=NC
      IF(SUM.LT.SUMD*TOLER) GO TO 164
  161 CONTINUE
  164 CONTINUE
      WRITE(NI,165) ND,SUM,SUMD
  165 FORMAT(//,4X,ŌTESTE DE CONVERGENCIAŌ,//,2X,I5,2F15.4,//)
      GO TO 167
  166 SOL(1)=D(1,1)*R(1)
  167 CONTINUE
      RETURN
      END
C     ****************************************************************
C
C     SUBROTINA QUE CALCULA OS ESFORCOS NOS PONTOS DA MALHA NO CA
C     SO DE PLACAS OU AS TENSOES NO CASO DE CHAPAS.
C
C     ****************************************************************
      SUBROUTINE ESFOR(NPI,G1,G2,G3,RF,CP,ID,WP,SOL2,CC2,XM,YM,
```

```
     *XYM,NA,C,X,Y,Q)
      DIMENSION G1(500),G2(500),G3(500),WP(4000),SOL2(500),CC2(
     *200),XM(500),YM(500),XYM(500),NA(4000),C(5,9,500),X(500),
     *Y(500)
      COMMON NL,NI
C     ZERAGEM DOS VETORES QUE COMPOEM AS PARCELAS DOS ESFORCOS OU
C     TENSOES E DOS VETORES DE ESFORCOS OU TENSOES.
      DO 200 I=1,500
      G1(I)=0.
      G2(I)=0.
      G3(I)=0.
      XM(I)=0.
      YM(I)=0.
  200 XYM(I)=0.
C     ZERAGEM DO VETOR AUXILIAR QUE CONTEM A SOLUCAO 2 E AS CON
C     DICOES DE CONTORNO.
      DO 201 I=1,4000
  201 WP(I)=0.
C     MONTAGEM DO VETOR AUXILIAR
      DO 203 I=1,NPI
      DO 203 K=1,8
      KK=8*(I-1)+K
      J=NA(KK)
      IF(J-NPI)204,204,205
  204 WP(KK)=SOL2(J)
      GO TO 203
  205 WP(KK)=CC2(J-NPI)
      GO TO 203
  203 CONTINUE
C     MONTAGEM DOS VETORES PARCELAS.
      DO 202 I=1,NPI
      G1(I)=C(3,1,I)*SOL2(I)
      G2(I)=C(4,1,I)*SOL2(I)
  202 G3(I)=C(5,1,I)*SOL2(I)
      DO 206 I=1,NPI
      DO 206 K=1,8
      KK=8*(I-1)+K
      G1(I)=G1(I)+C(3,K+1,I)*WP(KK)
      G2(I)=G2(I)+C(4,K+1,I)*WP(KK)
  206 G3(I)=G3(I)+C(5,K+1,I)*WP(KK)
C     CALCULO E IMPRESSAO DOS ESFORCOS OU TENSOES.
      IF(ID) 207,212,207
  207 CONTINUE
      DO 208 I=1,NPI
      XM(I)=(-RF)*(G1(I)+CP*G2(I))
      YM(I)=(-RF)*(G2(I)+CP*G1(I))
  208 XYM(I)=RF*(1.-CP)*G3(I)
      WRITE(NI,209)
  209 FORMAT(//,5X,ōPTOō,6X,ōXō,9X,ōYō,12X,ōWō,14X,ōMXō,13X,
     *ōMYō,12X,ōMXYō,//)
      GO TO 220
  212 CONTINUE
      DO 213 I=1,NPI
      XM(I)=G2(I)
```

```
      XYM(I)=-G3(I)
      IF(Q) 214,215,214
  215 YM(I)=G1(I)
      GO TO 213
  214 YM(I)=G1(I)-Q*Y(I)
  213 CONTINUE
      WRITE(NI,216)
  216 FORMAT(//,5X,ðPTOð,6X,ðXð,9X,ðYð,12X,ðFTð,14X,ðTXð,13X,
     *ðTYð,12X,ðTXYð,//)
  220 CONTINUE
      DO 210 IC=1,NPI
  210 WRITE(NI,211) IC,X(IC),Y(IC),SOL2(IC),XM(IC),YM(IC),XYM(IC)
  211 FORMAT(1H0,I5,2F10.3,4F15.7)
      RETURN
      END
C     * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
C
C
C     PROGRAMA PRINCIPAL
C     UM MODELO DE MALHA IRREGULAR NO METODO DAS DIFFERENCAS FINI
C     TAS-TESE DE MESTRADO-MOACIR WEYNE FILHO
C
C
C     * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
      DIMENSION X(500),Y(500),CC1(200),CC2(200),XP(4000),YP(4000)
     *,NA(4000),DIST(500),DORD(500),A1(5,5,500),A2(5,5,500),A3(5,
     *5,500),A4(5,5,500),G(5),H(5),C(5,9,500),D(500,9),SOL1(500),
     *SOL2(500),G1(500),G2(500),G3(500),WP(4000),XM(500),YM(500),
     *XYM(500),TIT(20)
      INTEGER DA(500,9)
      COMMON NL,NI
      NL=2
      NI=5
C     CHAMADA DA SUBROTINA DE LEITURA
      CALL LER(ID,CP,RF,N,NPI,NPC,NPS,N1,NG,NESP,ESP,X,Y,Q,CC1,
     *CC2,PART1,PART2,TOLER1,TOLER2,NEST,TIT)
C     CHAMADA DA SUBROTINA QUE GERA AS COORDENADAS DOS PONTOS DA
C     MALHA NO TRECHO EM QUE ESTA POSSA SER REGULAR.
      CALL GERA(N1,NG,NESP,ESP,X,Y)
C     CHAMADA DA SUBROTINA QUE ESCOLHE OS PONTOS DE CONTROLE DE
C     CADA UM DOS PONTOS INTERNOS DA MALHA
      CALL CATAR(N,NPI,NPS,X,Y,XP,YP,NA,DIST,DORD)
C     CHAMADA DA SUBROTINA QUE MONTA O VETOR DE CARGAS
      CALL CARGA(NPI,DORD,Q,ID)
C     CHAMADA DA SUBROTINA QUE MONTA AS MATRIZES DE CONTROLE DE
C     CADA UM DOS PONTOS INTERNOS DA MALHA
      CALL MACON(NPI,X,Y,XP,YP,A1,A2,A3,A4)
C     CHAMADA DA SUBROTINA QUE INVERTE AS MATRIZES DE CONTRULE DE
C     CADA UM DOS PONTOS INTERNOS DA MALHA
      CALL INV(NPI,A1,A2,A3,A4)
C     CHAMADA DA SUBROTINA QUE MONTA AS MATRIZES DOS COEFICIENTES
C     DE DERIVADAS DE CADA UM DOS PONTOS INTERNOS DA MALHA
      CALL CODEV(NPI,A1,A2,A3,A4,C)
C     CHAMADA DA SUBROTINA QUE MONTA O SISTEMA GLOBAL COM ESPARSI
```

```
C     DADE E A MATRIZ DE APONTADORES
      CALL ARMA(NPI,NA,C,DIST,D,DA)
C     CHAMADA DA SUBROTINA QUE MONTA O VETOR DE TERMOS INDEPEN
C     DENTES DO PRIMEIRO PASSO DE CALCULO.
      CALL VEIND(DORD,NA,NPI,CC1,C)
C     CHAMADA DA SUBROTINA DE RESOLUCAO DO SISTEMA GLOBAL PARA O
C     PRIMEIRO PASSO DE CALCULO.
      CALL GAUSE(NPI,D,DA,TOLER1,DORD,SOL1,PART1)
C     CHAMADA DA SUBROTINA QUE MONTA O VETOR DE TERMOS INDEPEN
C     DENTES DO SEGUNDO PASSO DE CALCULO.
      IF(ID) 300,301,300
  300 DO 302 I=1,NPI
  302 SOL1(I)=SOL1(I)/(-RF)
  301 CONTINUE
      WRITE(NI,5000) (SOL1(I),I=1,NPI)
 5000 FORMAT(8F10.4)
      CALL VEIND(SOL1,NA,NPI,CC2,C)
C     CHAMADA DA SUBROTINA DE RESOLUCAO DO SISTEMA GLOBAL PARA O
C     SEGUNDO PASSO DE CALCULO.
      CALL GAUSE(NPI,D,DA,TOLER2,SOL1,SOL2,PART2)
C     CHAMADA DA SUBROTINA QUE CALCULA OS ESFORCOS OU TENSOES.
      CALL ESFOR(NPI,G1,G2,G3,RF,CP,ID,WP,SOL2,CC2,XM,YM,XYM,NA,
     *C,X,Y,Q)
      CONTINUE
      STOP
      END
```

Referências Bibliográficas

1 - *Timoshenko, S.P. e Goodier, J.N., "Theory of Elasticity", 3a. edição McGraw-Hill, New York, 1970.*

2 - *Timoshenko, S.P. e Woinowsky-Krieger, S., "Theory of plates and shells", 2a. edição. McGraw-Hill, New York.*

3 - *Zienkiewicz, O.C., "The Finite Element Method: from intuition to generality". Appl. Mech. Rev. 249-256 (March 1970.*

4 - *Southwell, R.V., "Relaxation Methods in Theoretical Physics". Clarendon, Oxford, 1946.*

5 - *Santos, Sydney M.G., "Cálculo numérico de placas e paredes delgadas de contorno poligonal qualquer". Memória apresentada nas Jornadas Sul-Americanas, realizadas em Santiago do Chile, em setembro de 1959.*

6 - *Benetti, Gilberto A., "Aplicação do Método das Diferenças Finitas a um problema de elasticidade". Tese apresentada na COPPE/UFRJ em novembro de 1971.*

7 - *Seráphico, Francisco F.N., "Estudo comparativo de análise numérica aplicada a placas esconsas". Tese apresentada na COPPE/UFRJ em setembro de 1972.*

8 - *Perrone, Nicholas e Kao, Robert, "A General Finite Difference Method for arbitrary meshes". Computers & Structures, vol. 5, pp 45-58, 1975.*

9 - *Soriano, H.L. e Prates, C.L.M., "Armazenamento computacional de matrizes em análise estrutural". Publicação COPPE/UFRJ.*

10 - Zienkiewicz, O.C., "The Finite Element Method in Engineering Science". McGraw-Hill, 1971.

11 - Bushnell, D., "Finite - difference Energy Method versus finite element models: two variational approaches in one computer program". Apresentado no International Symposium on numerical and computer methods in structural mechanics, Urbana, setembro de 1971.

12 - Forsythe, G. e Wason, W., "Finite - difference Methods for partial differential equations", John Wiley, New York, 1960.