

ALGORITMO DE GRADIENTES CONJUGADOS APLICADO À IDENTIFICAÇÃO DE  
PARÂMETROS NAS EQUAÇÕES DE PROPAGAÇÃO DE ONDA DE CHEIA

José Almir Cirilo

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE  
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JA  
NEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO  
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.).

Aprovada por:



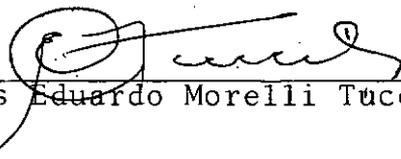
---

Rui Carlos Vieira da Silva  
Presidente



---

Jerson Kelman



---

Carlos Eduardo Morelli Tucci

CIRILO, JOSÉ ALMIR

Algoritmo de Gradientes Conjugados Aplicado à Identificação de Parâmetros nas Equações de Propagação de Onda de Cheia [Rio de Janeiro] , 1979.

VIII, 101p, 29,7cm (COPPE-UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1979)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro. Fac. Engenharia

1. Propagação de Cheias I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

A meus pais e a  
toda a minha família

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Rui Carlos Vieira da Silva, por sua eficiência na orientação durante o desenvolvimento deste trabalho.

Ao Prof. Pedro Guerrero Salazar, por sua ajuda no estudo das técnicas de otimização por nós utilizadas, e aos demais Professores da Área de Recursos Hídricos de quem fomos discípulo.

À Universidade Federal de Pernambuco, que nos proporcionou as condições necessárias à realização do curso e elaboração da tese, em especial aos Professores Abelardo Cardoso Montenegro e Euler Maia, responsáveis pelo Departamento de Engenharia Mecânica, do qual fazemos parte.

A Claudia, aos Engenheiros Villeneuve e Perez e à bibliotecária Eliete, da SUDENE, pelo fornecimento e envio de todos os dados necessários à execução deste trabalho.

Aos Engenheiros Joaquim Azevedo e Roberto Azevedo.

A Helena Santos de Oliveira, por sua eficiência nos trabalhos de datilografia.

## SUMÁRIO

O objetivo prioritário deste estudo é o desenvolvimento e aplicação de técnicas de otimização ao problema de identificação de parâmetros nas equações de propagação de onda de cheia.

Em síntese, o desenvolvimento deste trabalho é composto de:

- a) apresentação de métodos numéricos de solução das equações do escoamento não-permanente em canais abertos;
- b) estudo dos fatores que influenciam os valores dos parâmetros das equações do movimento;
- c) apresentação de técnicas de otimização através de busca por gradiente;
- d) combinação do esquema de discretização em diferenças finitas de Preissmann com técnicas de gradiente no desenvolvimento de algoritmos para a identificação de parâmetros;
- e) aplicação do algoritmo de gradientes conjugados, considerando os parâmetros constantes e variáveis no tempo, à reprodução de ondas de cheia do rio Capibaribe.

## ABSTRACT

The development and application of optimization techniques to the parameters identification problem in flood propagation equations are presented.

This work was basically developed by means of the following steps:

- a) presentation of Preissmann Implicit Method to the solution of unsteady open channel flow equations;
- b) study of factors affecting the equations parameters;
- c) presentation of gradient search optimization techniques;
- d) the association of Preissmann's scheme with gradient search techniques to develop parameters identification algorithms;
- e) application of the developed algorithm to the simulation of wave flood propagation in Capibaribe River with time-variable parameters.

## ÍNDICE

I	- INTRODUÇÃO .....	1.
II	- FUNDAMENTOS TEÓRICOS .....	5.
	2.1 - Equações do Movimento Não-Permanente em Canais.	5.
	2.2 - Método de Solução das Equações Diferenciais ...	7.
III	- MODELO DE SIMULAÇÃO .....	12.
	3.1 - Modelo de Simulação - Esquema Implícito de Preissmann	12.
	3.2 - Estabilidade e Precisão da Solução .....	15.
	3.3 - Discretização das Equações .....	15.
	3.4 - Discretização com Linearização das Equações ...	17.
	3.5 - Equações em Diferenças Finitas sem Linearização	21.
	3.6 - Condições de Fronteira .....	32.
IV	- ESTUDO DOS PARÂMETROS DO MODELO .....	34.
	4.1 - Importância dos Coeficientes da Parcela de Perda de Carga na Análise do Escoamento .....	34.
	4.2 - Fatores que Influenciam o Coeficiente de Rugosidade de Manning .....	35.
V	- TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO APLICADAS À IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS .....	37.
	5.1 - Algoritmo do Coeficiente de Influência .....	37.
	5.2 - Discussão do Método Proposto .....	38.
	5.3 - Métodos de Busca por Gradiente .....	39.
	5.4 - O "Steepest Descent Method" .....	40.
	5.5 - Método dos Gradientes Conjugados .....	41.
	5.6 - Algoritmo de Fletcher e Reeves .....	42.

VI - APLICAÇÃO DE TÉCNICAS DE BUSCA POR GRADIENTE À IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS EM ESCOAMENTO NÃO-PERMANENTE EM SITUAÇÕES REAIS .....	48.
6.1 - Considerações sobre os Parâmetros a Serem Calibrados .....	48.
6.2 - Considerações sobre o Esquema em Diferenças Finitas .....	49.
6.3 - Considerações sobre os Métodos de Otimização Utilizados .....	51.
6.4 - Aplicação do Método dos Gradientes Conjugados à Identificação dos Parâmetros em Propagação de Onda de Cheia .....	52.
VII - IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS NA PROPAGAÇÃO DE ONDAS DE CHEIA NO RIO CAPIBARIBE .....	58.
7.1 - Considerações Gerais .....	58.
7.2 - Coleta dos Dados Necessários .....	60.
7.3 - Manipulação dos Dados para Entrada no Modelo ...	61.
7.4 - Características do Modelo .....	69.
7.5 - Computador e Sub-Programas Utilizados .....	71.
7.6 - Apresentação e Discussão dos Resultados .....	71.
VIII - CONCLUSÕES .....	98.
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	100.

## I - INTRODUÇÃO

O tratamento matemático avançado do escoamento não-permanente em canais abertos teve início com o desenvolvimento de duas equações diferenciais parciais apresentadas em 1871 por Barré de Saint-Venant à Academia Francesa de Ciências. Uma destas equações, conhecida como equação da continuidade, representa a propriedade de armazenamento do canal; a outra, a equação do momentum, é baseada na 2<sup>a</sup> lei de Newton do movimento e representa a influência de forças externas sobre o escoamento. Estas equações, ao longo deste século transcorrido após a sua apresentação, foram substancialmente modificadas por diversos pesquisadores que as tornaram mais abrangentes, reduzindo-se no entanto à sua forma original quando a elas se aplicam hipóteses simplificadoras de uso prático.

O problema clássico que requer a solução destas equações é o movimento de onda de cheia ao longo de canais, naturais ou artificiais, e reservatórios. A importância destes estudos na engenharia de recursos hídricos se faz sentir na previsão e nos projetos de obras de controle de enchentes. Conhecidas as características físicas do corpo condutor, as equações de Saint-Venant nos permitem acompanhar o caminhar de uma onda de cheia através do mesmo, determinando os efeitos do armazenamento e das forças atuantes sobre a forma e o movimento da onda.

As técnicas de acompanhamento de uma onda de cheia através de um canal ou de um reservatório, conhecidas na literatura em língua inglesa como "flood routing", podem ser classificadas segundo dois processos: o processo hidrológico e o processo hidráulico. Este último faz uso das duas equações de Saint-

Venant, enquanto que o processo hidrológico utiliza apenas a equação da continuidade associada a uma outra relação que expresse o armazenamento do sistema em questão.

O método hidrológico, mais simples, pode fornecer resultados satisfatórios quando se tenta reproduzir matematicamente a propagação de uma onda de cheia em um trecho de canal. Em situações mais complexas, no entanto, como no caso da junção de rios, o método falha.

Este trabalho trata da propagação de onda de cheia em canais segundo o processo hidráulico, utilizando portanto as duas equações de Saint-Venant. Nestas equações podemos distinguir diversos tipos de variáveis e características, como, por exemplo, aquelas associadas à geometria do canal: área da seção transversal, largura superficial, declividade do leito, características de atrito, junção ou outras singularidades. Também a contribuição lateral ao longo do trecho de canal em questão depende de outras variáveis, as quais expressam o funcionamento da bacia contribuinte. A determinação dos valores de tais variáveis e características, em especial quando se trata de um canal natural, é uma tarefa de grande complexidade. Estes valores variam geralmente de uma seção para outra, ou até numa mesma seção, em função da profundidade do nível d'água. A continuidade de tais variações, obviamente, não pode ser levada em consideração em um modelo matemático que busca simular o funcionamento de um sistema do qual são conhecidas apenas características localizadas. Tal modelo envolve, portanto, a representação do trecho de rio em questão, com toda a sua complexidade natural, através de propriedades médias (áreas, larguras superficiais, fatores de resistência, etc.), ao longo do seu comprimento.

As características geométricas do canal (áreas das seções transversais, larguras superficiais, declividade do leito) podem ser obtidas por meio de levantamentos topográficos de seções diversas ao longo do trecho de rio em questão. As características representativas do atrito não são, no entanto, mensuráveis, sendo, por esta razão, normalmente consideradas como parâmetros a calibrar. Também não é mensurável a descarga lateral, resultante da contribuição de pequenos afluentes que não dispõem de postos fluviométricos, do escoamento superficial, das trocas com o lençol freático e da precipitação sobre o leito do rio.

Quando se pretende ajustar um modelo de simulação a uma dada bacia necessita-se conhecer valores dos parâmetros que sejam representativos do comportamento físico da mesma. Os parâmetros são normalmente ajustados por meio de métodos aproximados ou por processos heurísticos, modificando-se sucessivamente os seus valores até que os resultados simulados ajustem-se de maneira razoável aos registros de cheias conhecidas. O processo de determinação dos valores dos parâmetros através de um modelo no qual são conhecidas a entrada e a saída é chamado de identificação de parâmetros.

O objetivo deste trabalho é a aplicação de técnicas de otimização no desenvolvimento de algoritmos que permitam a identificação automática das características não-mensuráveis nas equações de Saint-Venant. A identificação automática substitui com vantagem o laborioso processo de calibração de parâmetros através de tentativas e erros. Seus resultados, no entanto, devem ser analisados pelo hidrólogo sob os aspectos físicos, uma vez que os valores ideais dos parâmetros, do ponto de vista matemático, podem ser incompatíveis com a realidade física que se tenta

simular.

As técnicas de otimização por nós utilizadas foram o "steepest descent method" e o método dos gradientes conjugados. As soluções das equações de Saint-Venant foram obtidas por meio do esquema implícito de discretização em diferenças finitas devido a Preissmann.

Procuramos ainda ressaltar duas alternativas no processo de identificação: a calibração com valores médios e a variação dos parâmetros no tempo.

## II - FUNDAMENTOS TEÓRICOS

### 2.1 - EQUAÇÕES DO MOVIMENTO NÃO-PERMANENTE EM CANAIS

A representação matemática do escoamento não-permanente em canais abertos é feita por meio de duas equações: - a equação da continuidade e a equação da conservação do momentum - conhecidas como as equações de Saint-Venant. São duas equações diferenciais não-lineares a derivadas parciais, das quais não são conhecidas soluções analíticas exceto em condições bastante simplificadas, de aplicabilidade restrita.

Visto que se trata de assunto amplamente estudado por inúmeros pesquisadores, abster-nos-emos da dedução das equações, as quais podem ser encontradas em qualquer trabalho sobre o assunto, especialmente em Chow<sup>4</sup>, Liggett<sup>15</sup>, Baltzer<sup>3</sup> e Viessman<sup>16</sup>.

Algumas hipóteses simplificadoras básicas foram feitas no desenvolvimento das equações do movimento. O número destas hipóteses depende naturalmente do grau de complexidade atribuído ao modelo matemático que se propõe a representar o escoamento. As considerações feitas neste trabalho foram as seguintes:

- 1) a superfície da onda varia gradualmente, de maneira que a distribuição vertical das pressões é considerada hidrostática;
- 2) a distribuição das velocidades na seção transversal não é substancialmente afetada durante a propagação da onda de cheia. Despreza-se assim a aceleração de Coriolis;
- 3) o movimento da onda pode ser considerado como bidimensional, desprezando-se os efeitos de possíveis diferenças de nível. Em outras palavras, não se considera a aceleração centrífuga decorrente da não-linearidade do canal;

- 4) a declividade média do leito do canal é considerada suficientemente pequena de modo a permitir substituir o seno do ângulo de declive pelo valor do ângulo em radianos;
- 5) a influência da rugosidade da seção sobre o movimento é considerada através da equação de Manning, cuja dedução foi feita para escoamentos permanentes mas que teve posteriormente seu emprego generalizado;
- 6) a contribuição lateral ocorre sem componentes de velocidade na direção do escoamento.

A obediência a estas restrições leva às seguintes equações:

#### Equação da Continuidade

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{1}{B} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{q}{B} \quad (2.1)$$

#### Equação do Momentum ou Equação Dinâmica

$$\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{QB}{A} \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{Q}{A} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q^2}{A^2} \frac{\partial A}{\partial x} + gA \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{Qq}{A} = gA (S - S_f) \quad (2.2)$$

onde:

A = área da seção transversal do canal;

B = largura superficial;

g = aceleração da gravidade local;

Q = vazão na seção transversal;

q = contribuição lateral;

S = declividade média do leito;

$S_f$  = perda de carga por unidade de comprimento do canal;

t = tempo;

x = comprimento do canal;

Z = espessura da lâmina d'água ou tirante.

A declividade de atrito, segundo a fórmula de Manning, é expressa por:

$$S_f = \frac{Q |Q|}{K^2} \quad (2.3)$$

sendo:

$$K^2 = \frac{A^2 R^m}{n^2} \quad (2.4)$$

onde:

K = condutância da seção;

m = parâmetro usualmente assumido igual a  $\frac{4}{3}$  ;

n = coeficiente de rugosidade de Manning;

R = raio hidráulico da seção.

## 2.2 - MÉTODOS DE SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Como já foi dito, a solução do sistema constituído pelas equações (2.1) e (2.2) não pode ser obtida analiticamente, tornando-se necessária a utilização de esquemas numéricos.

A partir do trabalho de Stoker, Isaacson e Troesch<sup>14</sup>, publicado em 1956, inúmeros pesquisadores têm-se dedicado ao desenvolvimento e aplicação de esquemas numéricos para solucionar as equações do movimento. Existem dois tipos de abordagem para a discretização das equações de Saint-Venant por meio de diferenças finitas: a 1<sup>a</sup> faz uso da forma característica das equações e os métodos que a utilizam são genericamente chamados de métodos das características. Entre eles podemos citar os desenvolvidos por Abbott<sup>15</sup>, Hartree<sup>15</sup> e Stoker<sup>14, 15</sup>. A 2<sup>a</sup> abordagem é feita a partir da forma em que as equações foram apresentadas neste traba-

lho e se constituem nos chamados métodos de malha fixa. O objetivo é resolver as equações do movimento para um número finito de pontos no plano  $\bar{x} - t$  com se mostra na Fig. (2.1).

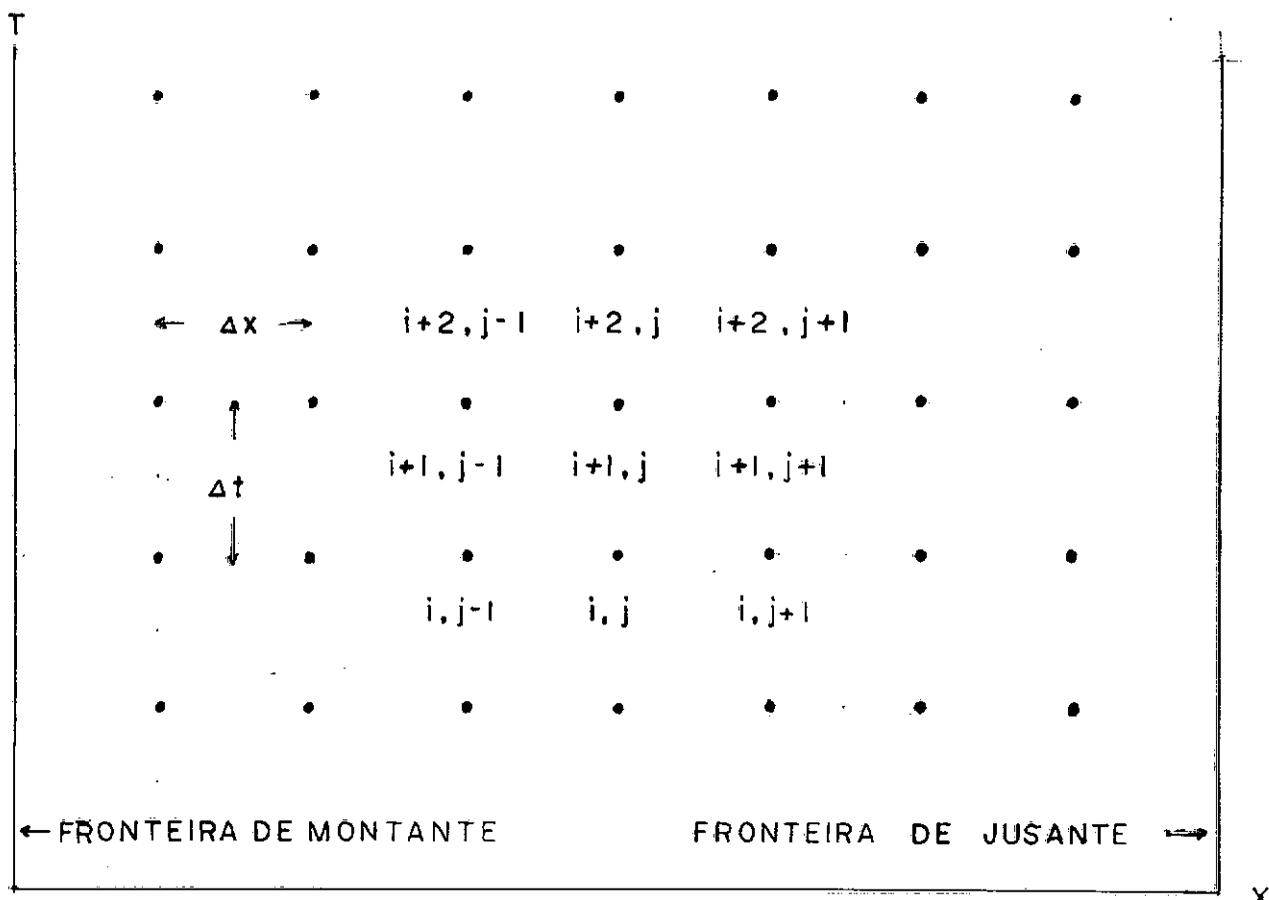


FIG. 2.1- ESQUEMA DE MALHA FIXA NO PLANO X-T

Há dois tipos básicos de esquemas de malha fixa: os esquemas explícitos e os implícitos.

Nos esquemas explícitos os valores das incógnitas no instante  $t + \Delta t$  dependem exclusivamente dos valores assumidos pelas variáveis no instante  $t$ . Desta maneira a solução do sistema no instante de cálculo  $i + 1$  e seção de cálculo  $j$  pode ser obtida independentemente dos valores assumidos pelas incógnitas em qualquer outra seção, no instante  $i + 1$ .

Os esquemas implícitos, no entanto, amarram os pontos  $i + 1$  entre si de maneira que se torna necessária a solução de sistemas de equações simultâneas de modo a fornecer de uma vez todos os valores das incógnitas no instante  $i + 1$  e nas diversas seções de cálculo.

É grande o número de esquemas explícitos e implícitos que tem sido aplicados para solucionar as equações de Saint-Venant. Entre os explícitos podemos citar o esquema de Stoker<sup>14, 15</sup>, o difusivo, o leap-prog, o esquema de Dronkers, o esquema de segunda-ordem Lax-Wendroff. Descrições detalhadas podem ser obtidas em Liggett<sup>15</sup>. Como exemplos de esquemas implícitos temos, entre outros, os de Stoker<sup>1, 14</sup>, Preissmann, Vasiliev e Abbott, os três últimos bem detalhados por Liggett e Cunge<sup>15</sup>.

Como foge ao objetivo deste trabalho, não entraremos em detalhes a respeito das características, vantagens e desvantagens dos diversos métodos assinalados. Vasta literatura pode ser encontrada descrevendo as peculiaridades de cada esquema, sejam trabalhos dos próprios autores ou aplicações posteriores feitas por outros pesquisadores ou órgãos técnicos. Assim, limitaremos-nos a descrever o esquema escolhido e as causas que levaram à escolha.

As equações do movimento envolvem derivadas parciais de duas variáveis dependentes (descarga ou velocidade e cota ou profundidade) por duas variáveis independentes, a distância  $x$  e o tempo  $t$ . As duas equações diferenciais são aproximadas por duas equações em diferenças finitas. O canal é dividido em trechos de comprimento  $\Delta x$  e as variáveis dependentes nos extremos de cada trecho são avaliadas a intervalos de tempo  $\Delta t$ .

Segundo Liggett e Cunge<sup>15</sup>, quando um método numérico é instável uma pequena perturbação, como, por exemplo, um erro de truncamento da solução exata, cresce com o tempo. Esta amplificação é frequentemente exponencial e o erro torna-se grande depois de uns poucos passos. Às vezes o crescimento é mais lento e só se nota depois de vários intervalos de tempo. Para que um esquema explícito seja estável deve satisfazer à clássica condição de Courant:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{(|V| \pm c)}, \quad c = \sqrt{g \frac{A}{B}} \quad (2.5)$$

onde  $V$  é a velocidade numa dada seção e  $c$  é a celeridade da onda.

Esta condição leva constantemente à necessidade de intervalos de tempo excessivamente pequenos, o que restringe a aplicabilidade dos métodos explícitos nos casos reais, visto que a ordem de grandeza de  $\Delta t$  torna-se incompatível com a precisão dos registros de dados, geralmente diários ou horários.

Os problemas de instabilidade nos esquemas explícitos tem levado portanto ao uso intensivo dos esquemas implícitos para a simulação matemática do escoamento não-permanente em canais naturais. Inúmeras aplicações, com excelentes resultados,

podem ser encontradas em Baltzer e Lai<sup>3</sup>, Amein e Fang<sup>1</sup>, Miller e Cunge<sup>15</sup> e muitos outros autores.

Pelo motivo exposto acima optamos pela adoção de um esquema implícito. Entre os diversos tipos encontrados na literatura optamos pelo esquema implícito de Preissmann, em virtude de de farta documentação disponível sobre o método e sua maior versatilidade, como veremos a seguir.

### III - MODELO DE SIMULAÇÃO

#### 3.1 - MODELO DE SIMULAÇÃO - ESQUEMA IMPLÍCITO DE PREISSMANN

Na malha esquematizada na Fig. (2.1) consideremos que todos os valores das variáveis são conhecidos para todos os pontos no instante  $t^i$  e que se deseja determinar os valores das variáveis no instante de cálculo  $t^{i+1} = t^i + \Delta t$ . Seja  $f(x, t)$  uma das variáveis dependentes das equações do movimento. Uma esquematização tridimensional é tentada na Fig. (3.1) para melhor percepção da discretização do esquema por diferenças finitas.

Escolhidos quatro pontos da malha, a superfície em três dimensões é aproximada por uma superfície poliédrica limitada pelos valores da função  $f(x, t)$  nos quatro pontos. O esquema define então uma aproximação de  $f$  representativa do retângulo  $x - t$  em questão, bem como as aproximações de suas derivadas em relação às variáveis independentes  $x$  e  $t$ .

Ao contrário do conhecido esquema de malha com ponto centrado de Stoker<sup>1,41</sup>, onde o valor de  $f$  representativo da região definida pelos quatro pontos é obtido pela média aritmética simples dos quatro valores limítrofes, equivalendo portanto à centralização do esquema, o método de Preissmann apresenta um coeficiente ponderativo  $0 \leq \theta \leq 1$  que permite deslocar o ponto representativo do intervalo.

Convém ressaltar que para  $\theta = \frac{1}{2}$  o esquema de Preissmann se reduz ao esquema de malha com ponto centrado ou "box scheme".



Da Figura (3.1) temos que:

$$f_j^i = \frac{f_j^i + f_{j+1}^i}{2} \quad (3.1)$$

$$f_j^{i+1} = \frac{f_j^{i+1} + f_{j+1}^{i+1}}{2} \quad (3.2)$$

$$f_j^\theta = f_j^i + \theta (f_j^{i+1} - f_j^i) \quad (3.3)$$

Substituindo as equações (3.1) e (3.2) em (3.3), temos que o valor de  $f(x, t)$ , estimado no intervalo em questão por  $f_j^\theta$ , será dado por:

$$f(x, t) \cong \frac{\theta}{2} (f_{j+1}^{i+1} + f_j^{i+1}) + \frac{1-\theta}{2} (f_{j+1}^i + f_j^i) \quad (3.4)$$

As aproximações das derivadas da função  $f$  em relação a  $x$  e  $t$  serão, respectivamente:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cong \frac{f_{j+1}^\theta - f_j^\theta}{\Delta x} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_j^{i+1} - f_j^i}{\Delta t} \quad (3.6)$$

Introduzindo nestas equações as expressões dadas em (3.1) e (3.2) e com o auxílio da Fig. (3.1) chegamos a:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cong \theta \frac{f_{j+1}^{i+1} - f_j^{i+1}}{\Delta x} + (1-\theta) \frac{f_{j+1}^i - f_j^i}{\Delta x} \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} \cong \frac{f_{j+1}^{i+1} - f_{j+1}^i + f_j^{i+1} - f_j^i}{2 \Delta t} \quad (3.8)$$

### 3.2 - ESTABILIDADE E PRECISÃO DA SOLUÇÃO

Liggett e Cunge<sup>15</sup> efetivaram estudos com o intuito de mostrar como a precisão dos resultados obtidos utilizando-se o esquema implícito de Preissmann é afetada pela escolha de diferentes valores dos parâmetros  $\Delta t$ ,  $\Delta x$  e  $\theta$ . Estes estudos, em bora baseados em análise espectral de equações diferenciais lineares, tiveram suas conclusões ratificadas por Cunge<sup>15</sup> através de experimentos numéricos usando as equações de Saint-Venant sem linearizações.

As conclusões destes trabalhos foram as seguintes:

- 1) o esquema é numericamente estável quando  $0,5 \leq \theta \leq 1$ , e é sempre instável para  $\theta < 0,5$ ;
- 2) Para  $\theta = 0,5$  podem surgir oscilações parasitas na solução, especialmente quando a resistência ao escoamento é pequena. Estas oscilações podem ocasionar um fenômeno similar a uma instabilidade numérica e seu comprimento de onda depende do valor de  $\Delta x$ . Recomenda-se usar  $0,6 \leq \theta \leq 1,0$ ;
- 3) quando  $\frac{\Delta x}{\Delta t} \cong \sqrt{\frac{gA}{B}}$  o modelo matemático dá uma imagem de uma frente de onda mais íngreme, suavizando-se quando a taxa  $\frac{\Delta x}{\Delta t}$  diminui. Se  $\Delta x \gg \Delta t$  aparecem longas ondas artificiais, porém a solução ainda é razoável.

### 3.3 - DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES

Seja o sistema de equações diferenciais composto pela equação da continuidade e equação dinâmica

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{1}{B} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{q}{B} \\ \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{QB}{A} \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{Q}{A} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q^2}{A^2} \frac{\partial A}{\partial x} + g A \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{Qq}{A} = g A \left( S - \frac{Q|Q|}{K^2} \right) \end{array} \right.$$

e as aproximações por diferenças finitas do esquema de Preissmann

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x^i, t) \cong \frac{\theta}{2} (f_{j+1}^{i+1} + f_j^{i+1}) + \frac{1-\theta}{2} (f_{j+1}^i + f_j^i) \\ \frac{\partial f}{\partial x} \cong \theta \frac{f_{j+1}^{i+1} - f_j^{i+1}}{\Delta x} + (1-\theta) \frac{f_{j+1}^i - f_j^i}{\Delta x} \\ \frac{\partial f}{\partial t} \cong \frac{f_{j+1}^{i+1} - f_{j+1}^i + f_j^{i+1} - f_j^i}{2 \Delta t} \end{array} \right. \quad (3.10)$$

A discretização é feita substituindo-se os valores das variáveis do sistema (3.9), assim como suas derivadas, pelas estimativas fornecidas no sistema (3.10), onde a função  $f$  é substituída por qualquer das variáveis dependentes que aparecem nas equações do movimento.

Feitas as substituições, como será estudado a seguir, chegamos a um sistema de equações não-lineares constituído de  $2(N-1)$  equações a  $2N$  incógnitas, onde  $N$  é o número de seções de cálculo. As incógnitas são as vazões e tirantes nas diversas seções, no instante de cálculo  $i+1$ . Para que o sistema seja univocamente determinado são necessárias mais duas equações, proporcionadas pelas condições de fronteira.

Neste ponto, analisaremos dois caminhos para executar a discretização das equações do movimento segundo o esquema de Preissmann. Inicialmente efetuando linearizações nas equações em diferenças finitas e depois preservando a não-linearidade do sistema.

### 3.4 - DISCRETIZAÇÃO COM LINEARIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES

Para simplificar a notação deixaremos de escrever o sobrescrito correspondente ao instante de cálculo  $i$ . Desta maneira, usaremos  $Q_j$  para representar a vazão no instante  $i$ , seção de cálculo  $j$ , ao invés de  $Q_j^i$ . Além disso, sejam

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta Q_j = Q_j^{i+1} - Q_j \\ \Delta Q_{j+1} = Q_{j+1}^{i+1} - Q_{j+1} \\ \Delta Z_j = Z_j^{i+1} - Z_j \\ \Delta Z_{j+1} = Z_{j+1}^{i+1} - Z_{j+1} \\ \Delta B_j = B_j^{i+1} - B_j, \text{ etc.} \end{array} \right. \quad (3.11)$$

A linearização será feita com o auxílio das seguintes expressões, obtidas por desenvolvimento em séries de potências e conservando apenas os termos de até primeira ordem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(1 + \theta \frac{\Delta B_{j+1} + \Delta B_j}{B_{j+1} + B_j}\right)^{-1} \cong 1 - \theta \frac{\Delta B_{j+1} + \Delta B_j}{B_{j+1} + B_j} \\ \frac{1}{A_j + \Delta A_j} = \frac{1}{A_j \left(1 + \frac{\Delta A_j}{A_j}\right)} \cong \frac{1}{A_j} \left(1 - \frac{\Delta A_j}{A_j}\right) \\ \frac{1}{(A_j + \Delta A_j)^2} = \frac{1}{A_j} \frac{1}{\left(1 + \frac{\Delta A_j}{A_j}\right)^2} \cong \frac{1}{A_j^2} \left(1 - 2 \frac{\Delta A_j}{A_j}\right) \end{array} \right. \quad (3.12)$$

e ainda

$$\left\{ \begin{array}{l}
 (Q_j + \Delta Q_j)^2 \cong Q_j^2 + 2 Q_j \Delta Q_j \\
 (Q_j + \Delta Q_j) \cdot |Q_j + \Delta Q_j| \cong Q_j |Q_j| + 2 |Q_j| \Delta Q_j \\
 \Delta B_j \cong \frac{d B_j}{d Z_j} \Delta Z_j \quad \Delta B_{j+1} \cong \frac{d B_{j+1}}{d Z_{j+1}} \Delta Z_{j+1} \\
 \Delta A_j \cong \frac{d A_j}{d Z_j} \Delta Z_j \cong B_j \Delta Z_j \quad \Delta A_{j+1} \cong B_{j+1} \Delta Z_{j+1}
 \end{array} \right. \quad (3.13)$$

A combinação dos sistemas (3.9) a (3.13) leva às seguintes equações:

- Equação da Continuidade

$$\left\{ \begin{array}{l}
 C_j \Delta Z_{j+1} + D_j \Delta Q_{j+1} = E_j \Delta Z_j + F_j \Delta Q_j + G_j \quad , \quad \text{onde} \\
 C_j = 1 - \frac{4 \theta \Delta t}{(B_{j+1} + B_j)^2} \left( \frac{Q_{j+1} - Q_j}{\Delta x} - q \right) \frac{d B_{j+1}}{d Z_{j+1}} \\
 D_j = \frac{4 \theta \Delta t}{\Delta x \cdot (B_{j+1} + B_j)} \\
 E_j = -1 + \frac{4 \theta \Delta t}{(B_{j+1} + B_j)^2} \left( \frac{Q_{j+1} - Q_j}{\Delta x} - q \right) \frac{d B_j}{d Z_j} \\
 F_j = \frac{4 \theta \Delta t}{\Delta x \cdot (B_{j+1} + B_j)} \\
 G_j = \frac{-4 \Delta t}{B_{j+1} + B_j} \left( \frac{Q_{j+1} - Q_j}{\Delta x} - q \right)
 \end{array} \right. \quad (3.14)$$

- Equação Dinâmica

$$C_j' \Delta Z_{j+1} + D_j' \Delta Q_{j+1} = E_j' \Delta Z_j + F_j' \Delta Q_j + G_j' \quad , \quad \text{onde}$$

$$C_j' = -\frac{1}{2} \left( \frac{Q_{j+1} B_{j+1}}{A_{j+1}} + \frac{Q_j B_j}{A_j} \right) + \theta \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ - (Q_{j+1} - Q_j) \frac{Q_{j+1} B_{j+1}}{A_{j+1}^2} - B_{j+1} \right.$$

$$\left. \left( \frac{Q_{j+1}^2}{A_{j+1}^2} + \frac{Q_j^2}{A_j^2} \right) + \frac{2 Q_{j+1}^2}{A_{j+1}^3} (A_{j+1} - A_j) B_{j+1} + g B_{j+1} (Z_{j+1} - Z_j) + \right.$$

$$\left. + g (A_{j+1} + A_j) - \Delta x \frac{B_{j+1}}{A_{j+1}^2} Q_{j+1} q \right\} + g \theta \Delta t \frac{Q_{j+1} |Q_{j+1}|}{K_{j+1}^2}$$

$$\left( B_{j+1} - \frac{2 A_{j+1}}{K_{j+1}} \frac{d K_{j+1}}{d Z_{j+1}} \right) - g S \theta \Delta t B_{j+1}$$

$$D_j' = 1 + \frac{\theta \Delta t}{\Delta x} \left\{ \frac{Q_{j+1}}{A_{j+1}} + \frac{Q_j}{A_j} + \frac{Q_{j+1} - Q_j}{A_{j+1}} - (A_{j+1} - A_j) \frac{2 Q_{j+1}}{A_{j+1}^2} + \frac{\Delta x q}{A_{j+1}} \right\} +$$

$$+ 2 g \theta \Delta t \frac{A_{j+1} |Q_{j+1}|}{K_{j+1}^2}$$

$$E_j' = \frac{1}{2} \left( \frac{Q_{j+1} B_{j+1}}{A_{j+1}} + \frac{Q_j B_j}{A_j} \right) - \frac{\theta \Delta t}{\Delta x} \left\{ - (Q_{j+1} - Q_j) \frac{Q_j B_j}{A_j^2} + B_j \left( \frac{Q_{j+1}^2}{A_{j+1}^2} - \frac{Q_j^2}{A_j^2} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2 Q_j^2}{A_j^3} (A_{j+1} - A_j) B_j + g B_j (Z_{j+1} - Z_j) - g (A_{j+1} + A_j) - \Delta x \frac{B_j}{A_j^2} Q_j q \right\} -$$

$$- g \theta \Delta t \frac{Q_j |Q_j|}{K_j^2} \left( B_j - \frac{2 A_j}{K_j} \frac{d K_j}{d Z_j} \right) + g S \theta \Delta t B_j$$

$$F_j' = -1 - \frac{\theta \Delta t}{\Delta x} \left\{ - \frac{Q_{j+1}}{A_{j+1}} - \frac{Q_j}{A_j} + \frac{Q_{j+1} - Q_j}{A_j} - \frac{2 Q_j}{A_j^2} (A_{j+1} - A_j) + \Delta x \frac{q}{A_j} \right\} -$$

$$- 2 g \theta \Delta t \frac{A_j |Q_j|}{K_j^2}$$

$$G_j' = -\frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ (Q_{j+1} - Q_j) \left( \frac{Q_{j+1}}{A_{j+1}} + \frac{Q_j}{A_j} \right) - (A_{j+1} - A_j) \left( \frac{Q_{j+1}^2}{A_{j+1}^2} + \frac{Q_j^2}{A_j^2} \right) + g (Z_{j+1} - Z_j) \right.$$

$$\left. (A_{j+1} + A_j) \right] - g \Delta t \left[ \frac{Q_{j+1} |Q_{j+1}| A_{j+1}}{K_{j+1}^2} + \frac{Q_j |Q_j| A_j}{K_j^2} - S (A_{j+1} + A_j) \right] -$$

$$- \Delta t \left( \frac{Q_{j+1}}{A_{j+1}} + \frac{Q_j}{A_j} \right) q$$

(3.15)

Nesta discretização consideramos a declividade do trecho e a contribuição lateral constantes. Desde que se conheça a declividade  $S$  e a descarga lateral  $q$  em cada trecho, bem como a variação desta no tempo, pode-se considerar este fato na formulação das equações em diferenças finitas.

Como se pode notar, os coeficientes  $C_j$ ,  $D_j$ ,  $E_j$ ,  $F_j$  e  $G_j$ , da equação da continuidade, e  $C'_j$ ,  $D'_j$ ,  $E'_j$ ,  $F'_j$  e  $G'_j$ , da equação dinâmica, podem ser perfeitamente determinados, em um dado instante de cálculo  $i$ , visto que, por hipótese, quando nos propomos a determinar os valores das incógnitas em um instante  $i + 1$  já conhecemos todos os valores das variáveis no instante  $i$ . Desta maneira ficamos com um conjunto de  $2(N - 1)$  equações ( $N - 1$  trechos, duas equações para cada um) e  $2N$  incógnitas (descarga e tirante em cada ponto da malha). Adicionando duas condições de fronteira chegamos ao seguinte sistema linear, em um dado instante de cálculo  $i$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_M (\Delta Z_1, \Delta Q_1) = 0 \\ X_1 (\Delta Z_1, \Delta Q_1, \Delta Z_2, \Delta Q_2) = 0 \\ Y_1 (\Delta Z_1, \Delta Q_1, \Delta Z_2, \Delta Q_2) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ X_j (\Delta Z_j, \Delta Q_j, \Delta Z_{j+1}, \Delta Q_{j+1}) = 0 \\ Y_j (\Delta Z_j, \Delta Q_j, \Delta Z_{j+1}, \Delta Q_{j+1}) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ X_{N-1} (\Delta Z_{N-1}, \Delta Q_{N-1}, \Delta Z_N, \Delta Q_N) = 0 \\ Y_{N-1} (\Delta Z_{N-1}, \Delta Q_{N-1}, \Delta Z_N, \Delta Q_N) = 0 \\ F_J (\Delta Z_N, \Delta Q_N) = 0 \end{array} \right. \quad (3.16)$$

Neste sistema as funções  $F_M$  e  $F_J$  referem-se às condições de fronteira de montante e jusante, respectivamente, enquanto que  $X_j$  e  $Y_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N - 1$ , referem-se às equações da continuidade e do momentum, nesta ordem.

A solução do sistema de equações lineares (3.16) nos permite obter os valores de  $Q$  e  $Z$  em todas as seções de cáculo, no instante  $i + 1$ , visto que  $Q_j^{i+1} = Q_j + \Delta Q_j$  e  $Z_j^{i+1} = Z_j + \Delta Z_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ .

### 3.5 - EQUAÇÕES EM DIFERENÇAS FINITAS SEM LINEARIZAÇÃO

Através dos sistemas (3.9) e (3.10) chegamos às seguintes expressões:

- Equação de Continuidade

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta t} (Z_{j+1}^{i+1} + Z_j^{i+1}) + D_j (Q_{j+1}^{i+1} - Q_j^{i+1}) + G_j = 0 \quad , \quad \text{onde} \\ D_j = \frac{2 T \theta}{\Delta x} \\ G_j = 2 T \left[ \frac{Q_{j+1} - Q_j}{\Delta x} - \frac{\theta}{2} (q_{j+1}^{i+1} + q_j^{i+1}) - \frac{1 - \theta}{2} (q_{j+1} + q_j) - \frac{\theta}{\Delta x} (Q_{j+1} - Q_j) \right] - \frac{Z_{j+1} + Z_j}{2 \Delta t} \\ T = \frac{1}{\theta (B_{j+1}^{i+1} + B_j^{i+1}) + (1 - \theta) (B_{j+1} + B_j)} \end{array} \right. \quad (3.17)$$

- Equação Dinâmica

$$C_j' \cdot Z_{j+1}^{i+1} + D_j' \cdot Q_{j+1}^{i+1} + E_j' \cdot Z_j^{i+1} + F_j' \cdot Q_j^{i+1} + G_j' = 0$$

onde:

$$C'_j = -\frac{1}{2 \Delta t} \left[ \frac{\theta}{2} \left( \frac{Q_{j+1}^{i+1} B_{j+1}^{i+1}}{A_{j+1}^{i+1}} + \frac{Q_j^{i+1} B_j^{i+1}}{A_j^{i+1}} \right) + \frac{1-\theta}{2} \left( \frac{Q_{j+1} B_{j+1}}{A_{j+1}} + \frac{Q_j B_j}{A_j} \right) \right] + \frac{g \theta}{2 \Delta x} \cdot W$$

$$D'_j = \frac{1}{2 \Delta t} + \frac{\theta}{4 \Delta t} (z_{j+1} + z_j) \frac{B_{j+1}^{i+1}}{A_{j+1}^{i+1}} + \frac{\theta}{2 \Delta x} \left[ \theta \left( \frac{Q_{j+1}^{i+1}}{A_{j+1}^{i+1}} + \frac{Q_j^{i+1}}{A_j^{i+1}} \right) + (1-\theta) \left( \frac{Q_{j+1}}{A_{j+1}} + \frac{Q_j}{A_j} + \frac{Q_{j+1} - Q_j}{A_{j+1}^{i+1}} \right) - w' \frac{Q_{j+1}^{i+1}}{(A_{j+1}^{i+1})^2} \right] + \frac{\theta}{2} \left( g \cdot \frac{A_{j+1}^{i+1} |Q_{j+1}^{i+1}|}{(K_{j+1}^{i+1})^2} + \frac{q_{j+1}^{i+1}}{A_{j+1}^{i+1}} \right)$$

$$E'_j = \frac{-1}{2 \Delta t} \left[ \frac{\theta}{2} \left( \frac{Q_{j+1}^{i+1} B_{j+1}^{i+1}}{A_{j+1}^{i+1}} + \frac{Q_j^{i+1} B_j^{i+1}}{A_j^{i+1}} \right) + \frac{1-\theta}{2} \left( \frac{Q_{j+1} B_{j+1}}{A_{j+1}} + \frac{Q_j B_j}{A_j} \right) \right] - \frac{g \theta}{2 \Delta x} \cdot W$$

$$F'_j = \frac{1}{2 \Delta t} + \frac{\theta}{4 \Delta t} (z_{j+1} + z_j) \frac{B_j^{i+1}}{A_j^{i+1}} - \frac{\theta}{2 \Delta x} \left[ \theta \left( \frac{Q_{j+1}^{i+1}}{A_{j+1}^{i+1}} + \frac{Q_j^{i+1}}{A_j^{i+1}} \right) + (1-\theta) \left( \frac{Q_{j+1}}{A_{j+1}} + \frac{Q_j}{A_j} - \frac{Q_{j+1} - Q_j}{A_j^{i+1}} \right) + w' \frac{Q_j^{i+1}}{(A_j^{i+1})^2} \right] + \frac{\theta}{2} \left( g \frac{A_j^{i+1} |Q_j^{i+1}|}{(K_j^{i+1})^2} + \frac{q_j^{i+1}}{A_j^{i+1}} \right)$$

$$G'_j = \frac{(1-\theta)}{2 \Delta x} \left[ (1-\theta) (Q_{j+1} - Q_j) \left( \frac{Q_{j+1}}{A_{j+1}} + \frac{Q_j}{A_j} \right) - w' \left( \frac{Q_{j+1}^2}{A_{j+1}^2} + \frac{Q_j^2}{A_j^2} \right) + g W (z_{j+1} - z_j) \right] + \frac{(1-\theta)}{2} \left[ \frac{z_{j+1} + z_j}{2 \Delta t} \cdot \left( \frac{Q_{j+1} B_{j+1}}{A_{j+1}} + \frac{Q_j B_j}{A_j} \right) + g \left( \frac{A_{j+1} Q_{j+1} |Q_{j+1}|}{K_{j+1}^2} + \frac{A_j Q_j |Q_j|}{K_j^2} \right) + \frac{Q_{j+1} q_{j+1}}{A_{j+1}} + \frac{Q_j q_j}{A_j} \right] - \frac{Q_{j+1} + Q_j}{2 \Delta t} - \frac{g S}{2} \cdot W$$

finalmente,

$$W = \theta (A_{j+1}^{i+1} + A_j^{i+1}) + (1 - \theta) (A_{j+1} + A_j) \quad (3.18)$$

$$W' = \theta (A_{j+1}^{i+1} - A_j^{i+1}) + (1 - \theta) (A_{j+1} - A_j)$$

Como podemos observar, estamos agora com duas equações não-lineares, visto que os coeficientes  $D_j$ ,  $G_j$ ,  $C_j'$ ,  $D_j'$ ,  $E_j'$ ,  $F_j'$  e  $G_j'$  dependem de valores de variáveis no instante  $i + 1$ .

Do mesmo modo como se procedeu para as equações linearizadas, chegamos ao seguinte sistema, no instante de cálculo  $i$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_M (Z_1^{i+1}, Q_1^{i+1}) = 0 \\ X_1 (Z_1^{i+1}, Q_1^{i+1}, Z_2^{i+1}, Q_2^{i+1}) = 0 \\ Y_1 (Z_1^{i+1}, Q_1^{i+1}, Z_2^{i+1}, Q_2^{i+1}) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ X_j (Z_j^{i+1}, Q_j^{i+1}, Z_{j+1}^{i+1}, Q_{j+1}^{i+1}) = 0 \\ Y_j (Z_j^{i+1}, Q_j^{i+1}, Z_{j+1}^{i+1}, Q_{j+1}^{i+1}) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ X_{N-1} (Z_{N-1}^{i+1}, Q_{N-1}^{i+1}, Z_N^{i+1}, Q_N^{i+1}) = 0 \\ Y_{N-1} (Z_{N-1}^{i+1}, Q_{N-1}^{i+1}, Z_N^{i+1}, Q_N^{i+1}) = 0 \\ F_J (Z_N^{i+1}, Q_N^{i+1}) = 0 \end{array} \right. \quad (3.19)$$

Para solucionar este sistema, usaremos, como proposto por Amein e Fang<sup>1</sup>, o método iterativo generalizado de Newton-Raphson. Seja  $S^k$  um vetor que contém as estimativas das  $2N$  incógnitas do sistema (3.19), em um ciclo iterativo de ordem  $k$ . O método de Newton-Raphson para resolução de um sistema de equações não-lineares consiste em resolver sucessivos siste-

mas lineares tais que

$$J(S^k) \times \Delta S^k = -f(S^k) \quad (3.20)$$

$$S^k = \{s_1^k, s_2^k, \dots, s_{2N}^k\} = \{z_1^k, Q_1^k, z_2^k, Q_2^k, \dots, z_N^k, Q_N^k\} \quad (3.21)$$

$$\Delta S^k = \{z_1^{k+1} - z_1^k, Q_1^{k+1} - Q_1^k, z_2^{k+1} - z_2^k, \dots, z_N^{k+1} - z_N^k, Q_N^{k+1} - Q_N^k\} \quad (3.22)$$

$$J(S^k) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \frac{\partial f_1}{\partial s_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial s_{2N}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s_1} & \frac{\partial f_2}{\partial s_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial s_{2N}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_{2N}}{\partial s_1} & \frac{\partial f_{2N}}{\partial s_2} & \dots & \frac{\partial f_{2N}}{\partial s_{2N}} \end{pmatrix}_{S=S^k} \quad (3.23)$$

Nas equações (3.21) e (3.22) os sobrescritos correspondentes ao instante de cálculo  $i + 1$  foram suprimidos para não sobrecarregar a notação.

Como se vê,  $J(S^k)$  é a matriz jacobiana do sistema (3.19) em um ciclo iterativo de ordem  $k$ .  $f_1, f_2, \dots, f_{2N}$  são funções cujas raízes desejamos obter, correspondentes às  $2N$  equações citadas. Por fim,

$$f(S^k) = R^k = \{r_0^k, r_{1,1}^k, r_{2,1}^k, \dots, r_{1,j}^k, r_{2,j}^k, \dots, r_{1,N-1}^k, r_{2,N-1}^k, r_N^k\} \quad (3.24)$$

corresponde aos resíduos do sistema (3.19) no ciclo  $k$ , da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 F_M (Z_1^k, Q_1^k) = r_0^k \\
 X_1 (Z_1^k, Q_1^k, Z_2^k, Q_2^k) = r_{1,1}^k \\
 Y_1 (Z_1^k, Q_1^k, Z_2^k, Q_2^k) = r_{2,1}^k \\
 \dots\dots\dots \\
 X_j (Z_j^k, Q_j^k, Z_{j+1}^k, Q_{j+1}^k) = r_{1,j}^k \\
 Y_j (Z_j^k, Q_j^k, Z_{j+1}^k, Q_{j+1}^k) = r_{2,j}^k \\
 \dots\dots\dots \\
 X_{N-1} (Z_{N-1}^k, Q_{N-1}^k, Z_N^k, Q_N^k) = r_{1,N-1}^k \\
 Y_{N-1} (Z_{N-1}^k, Q_{N-1}^k, Z_N^k, Q_N^k) = r_{2,N-1}^k \\
 F_J (Z_N^k, Q_N^k) = r_N^k
 \end{array} \right. \quad (3.25)$$

Onde  $Z_j^k, Q_j^k, j = 1, 2, \dots, N$  representam os valores do tirante e da descarga correspondentes ao instante  $i + 1$ , seção de cálculo  $j$ , na iteração  $k$ .

#### - Derivadas das Equações em Diferenças Finitas

Como se observa em (3.23), para obtenção da matriz jacobiana do sistema definido em (3.19), no ciclo iterativo de ordem  $k$ , torna-se necessária a avaliação das derivadas das funções no mesmo ponto. A seguir estão apresentadas as expressões destas derivadas.

Dadas as funções  $X_j$  e  $Y_j$  correspondentes às equações do movimento discretizadas em diferenças finitas:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 X_j = \frac{1}{2 \Delta t} (Z_{j+1}^{i+1} + Z_j^{i+1}) + D_j (Q_{j+1}^{i+1} - Q_j^{i+1}) + G_j \\
 Y_j = C_j' \cdot Z_{j+1}^{i+1} + D_j' \cdot Q_{j+1}^{i+1} + E_j' \cdot Z_j^{i+1} + F_j' \cdot Q_j^{i+1} + G_j'
 \end{array} \right. \quad (3.26)$$

e derivando em relação às diversas variáveis, temos, para a equação da continuidade, as derivadas em relação a  $Z_{j+1}^{i+1}$ :

$$\left\{ \begin{aligned}
 \frac{\partial X_j}{\partial Z_{j+1}^{i+1}} &= \frac{1}{2 \Delta t} + (Q_{j+1}^{i+1} - Q_j^{i+1}) \frac{\partial D_j}{\partial Z_{j+1}^{i+1}} + \frac{\partial G_j}{\partial Z_{j+1}^{i+1}}, \quad \text{onde} \\
 \frac{\partial D_j}{\partial Z_{j+1}^{i+1}} &= - \frac{2 \theta^2 T^2}{\Delta x} \cdot \frac{dB}{dZ} \Big|_{i+1, j+1} \\
 \frac{\partial G_j}{\partial Z_{j+1}^{i+1}} &= - 2 a \theta T^2 \frac{dB}{dZ} \Big|_{i+1, j+1} \\
 a &= \frac{Q_{j+1} - Q_j}{\Delta x} - \frac{\theta}{2} (q_{j+1}^{i+1} + q_j^{i+1}) - \frac{1 - \theta}{2} (q_{j+1} + q_j) - \frac{\theta}{\Delta x} (Q_{j+1} - Q_j)
 \end{aligned} \right. \quad (3.27)$$

em relação a  $Z_j^{i+1}$  :

$$\left\{ \begin{aligned}
 \frac{\partial X_j}{\partial Z_j^{i+1}} &= \frac{1}{2 \Delta t} + (Q_{j+1}^{i+1} - Q_j^{i+1}) \frac{\partial D_j}{\partial Z_j^{i+1}} + \frac{\partial G_j}{\partial Z_j^{i+1}} \\
 \frac{\partial D_j}{\partial Z_j^{i+1}} &= \frac{-2 \theta^2 T^2}{\Delta x} \frac{dB}{dZ} \Big|_{i+1, j} \\
 \frac{\partial G_j}{\partial Z_j^{i+1}} &= - 2 a \theta T^2 \frac{dB}{dZ} \Big|_{i+1, j}
 \end{aligned} \right. \quad (3.28)$$

em relação a  $Q_{j+1}^{i+1}$  e  $Q_j^{i+1}$  :

$$\left\{ \begin{aligned}
 \frac{\partial X_j}{\partial Q_{j+1}^{i+1}} &= D_j \\
 \frac{\partial X_j}{\partial Q_j^{i+1}} &= - D_j
 \end{aligned} \right. \quad (3.29)$$

Por outro lado, a partir da equação dinâmica temos, em relação a  $Z_{j+1}^{i+1}$  :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Y_j}{\partial Z_{j+1}^{i+1}} &= C_j' + Z_{j+1}^{i+1} \frac{\partial C_j'}{\partial Z_{j+1}^{i+1}} + Q_{j+1}^{i+1} \frac{\partial D_j'}{\partial Z_{j+1}^{i+1}} + Z_j^{i+1} \frac{\partial E_j'}{\partial Z_{j+1}^{i+1}} + Q_j^{i+1} \frac{\partial F_j'}{\partial Z_{j+1}^{i+1}} + \frac{\partial G_j'}{\partial Z_{j+1}^{i+1}} \\
 \frac{\partial C_j'}{\partial Z_{j+1}^{i+1}} &= - \frac{\theta}{4 \Delta t} \frac{Q_{j+1}^{i+1}}{A_{j+1}^{i+1}} \left( \frac{dB}{dZ} \Big|_{i+1,j+1} - \frac{B_{j+1}^{i+1}}{A_{j+1}^{i+1}} \cdot \frac{dA}{dZ} \Big|_{i+1,j+1} \right) + \frac{g \theta^2}{2 \Delta \bar{x}} \cdot \frac{dA}{dZ} \Big|_{i+1,j+1} \\
 \frac{\partial D_j'}{\partial Z_{j+1}^{i+1}} &= - \left\{ \frac{\theta}{2 \Delta \bar{x}} \left[ 2 Q_{j+1}^{i+1} \left( \theta - \frac{W'}{A_{j+1}^{i+1}} \right) + (1 - \theta) (Q_{j+1} - Q_j) \right] + \frac{\theta}{2} Q_{j+1}^{i+1} + \frac{\theta}{4 \Delta t} \right. \\
 &\quad \left. (Z_{j+1} + Z_j) B_{j+1}^{i+1} \right\} \times \frac{1}{(A_{j+1}^{i+1})^2} \cdot \frac{dA}{dZ} \Big|_{i+1,j+1} + \frac{g \theta}{2} \cdot \frac{|Q_{j+1}^{i+1}|}{(K_{j+1}^{i+1})^2} \\
 &\quad \left( \frac{dA}{dZ} \Big|_{i+1,j+1} - \frac{2 A_{j+1}^{i+1}}{K_{j+1}^{i+1}} \cdot \frac{dK}{dZ} \Big|_{i+1,j+1} \right) + \frac{\theta}{4 \Delta t} \cdot \frac{Z_{j+1} + Z_j}{A_{j+1}^{i+1}} \cdot \frac{dB}{dZ} \Big|_{i+1,j+1} \\
 \frac{\partial E_j'}{\partial Z_{j+1}^{i+1}} &= - \frac{\theta}{4 \Delta t} \frac{Q_{j+1}^{i+1}}{A_{j+1}^{i+1}} \left( \frac{dB}{dZ} \Big|_{i+1,j+1} - \frac{B_{j+1}^{i+1}}{A_{j+1}^{i+1}} \frac{dA}{dZ} \Big|_{i+1,j+1} \right) - \frac{g \theta^2}{2 \Delta \bar{x}} \frac{dA}{dZ} \Big|_{i+1,j+1} \\
 \frac{\partial F_j'}{\partial Z_{j+1}^{i+1}} &= \frac{\theta^2}{2 \Delta \bar{x}} \left[ \frac{Q_{j+1}^{i+1}}{(A_{j+1}^{i+1})^2} - \frac{Q_j^{i+1}}{(A_j^{i+1})^2} \right] \cdot \frac{dA}{dZ} \Big|_{i+1,j+1} \\
 \frac{\partial G_j'}{\partial Z_{j+1}^{i+1}} &= \left\{ \frac{1 - \theta}{2 \Delta \bar{x}} \left[ g (Z_{j+1} - Z_j) - \frac{Q_{j+1}^2}{A_{j+1}^2} - \frac{Q_j^2}{A_j^2} - \frac{g S}{2} \right] \theta \frac{dA}{dZ} \Big|_{i+1,j+1} \right. \quad (3.30)
 \end{aligned}$$

Em relação a  $Z_j^{i+1}$

$$\frac{\partial Y_j}{\partial Z_j^{i+1}} = Z_{j+1}^{i+1} \frac{\partial C_j'}{\partial Z_j^{i+1}} + Q_{j+1}^{i+1} \frac{\partial D_j'}{\partial Z_j^{i+1}} + E_j' + Z_j^{i+1} \frac{\partial E_j'}{\partial Z_j^{i+1}} + Q_j^{i+1} \frac{\partial F_j'}{\partial Z_j^{i+1}} + \frac{\partial G_j'}{\partial Z_j^{i+1}}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial C_j^i}{\partial Z_j^{i+1}} &= -\frac{\theta}{4 \Delta t} \frac{Q_j^{i+1}}{A_j^{i+1}} \left( \frac{dB}{dZ} \Big|_{i+1,j} - \frac{B_j^{i+1}}{A_j^{i+1}} \frac{dA}{dZ} \Big|_{i+1,j} \right) + \frac{g \theta^2}{2 \Delta x} \frac{dA}{dZ} \Big|_{i+1,j} \\
 \frac{\partial D_j^i}{\partial Z_j^{i+1}} &= \frac{\theta^2}{2 \Delta x} \left[ \frac{Q_{j+1}^{i+1}}{(A_{j+1}^{i+1})^2} - \frac{Q_j^{i+1}}{(A_j^{i+1})^2} \right] \frac{dA}{dZ} \Big|_{i+1,j} \\
 \frac{\partial E_j^i}{\partial Z_j^{i+1}} &= -\frac{\theta}{4 \Delta t} \frac{Q_j^{i+1}}{A_j^{i+1}} \left( \frac{dB}{dZ} \Big|_{i+1,j} - \frac{B_j^{i+1}}{A_j^{i+1}} \frac{dA}{dZ} \Big|_{i+1,j} \right) - \frac{g \theta^2}{2 \Delta x} \cdot \frac{dA}{dZ} \Big|_{i+1,j} \\
 \frac{\partial F_j^i}{\partial Z_j^{i+1}} &= \left\{ \frac{\theta}{2 \Delta x} \left[ 2 Q_j^{i+1} \left( \theta + \frac{W'}{A_j^{i+1}} \right) - (1 - \theta) (Q_{j+1} - Q_j) \right] - \frac{\theta}{2} q_j^{i+1} - \frac{\theta}{4 \Delta t} \right. \\
 &\quad \left. (Z_{j+1} + Z_j) B_j^{i+1} \right\} \times \frac{1}{(A_j^{i+1})^2} \cdot \frac{dA}{dZ} \Big|_{i+1,j} + \frac{g \theta}{2} \frac{|Q_j^{i+1}|}{(K_j^{i+1})^2} \left( \frac{dA}{dZ} \Big|_{i+1,j} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2 A_j^{i+1}}{K_j^{i+1}} \frac{dK}{dZ} \Big|_{i+1,j} \right) + \frac{\theta}{4 \Delta t} \cdot \frac{Z_{j+1} + Z_j}{A_j^{i+1}} \cdot \frac{dB}{dZ} \Big|_{i+1,j} \\
 \frac{\partial G_j^i}{\partial Z_j^{i+1}} &= \left\{ \frac{1 - \theta}{2 \Delta x} \left[ g (Z_{j+1} - Z_j) + \frac{Q_{j+1}^2}{A_{j+1}^2} + \frac{Q_j^2}{A_j^2} \right] - \frac{g S}{2} \right\} \theta \frac{dA}{dZ} \Big|_{i+1,j}
 \end{aligned} \right.$$

Em relação a  $Q_{j+1}^{i+1}$

$$\frac{\partial Y_j}{\partial Q_{j+1}^{i+1}} = Z_{j+1}^{i+1} \frac{\partial C_j'}{\partial Q_{j+1}^{i+1}} + Q_{j+1}^{i+1} \frac{\partial D_j'}{\partial Q_{j+1}^{i+1}} + D_j' + Z_j^{i+1} \frac{\partial E_j'}{\partial Q_{j+1}^{i+1}} + Q_j^{i+1} \frac{\partial F_j'}{\partial Q_{j+1}^{i+1}} + \frac{\partial G_j'}{\partial Q_{j+1}^{i+1}}$$

$$\frac{\partial C_j'}{\partial Q_{j+1}^{i+1}} = - \frac{\theta}{4 \Delta t} \frac{B_{j+1}^{i+1}}{A_{j+1}^{i+1}}$$

$$\frac{\partial D_j'}{\partial Q_{j+1}^{i+1}} = \frac{\theta}{2 \Delta x} \left[ \frac{\theta}{A_{j+1}^{i+1}} - \frac{W'}{(A_{j+1}^{i+1})^2} \right] + \frac{g \theta}{2} \frac{A_{j+1}^{i+1}}{(K_{j+1}^{i+1})^2}$$

(3.32)

$$\frac{\partial E_j'}{\partial Q_{j+1}^{i+1}} = \frac{\partial C_j'}{\partial Q_{j+1}^{i+1}}$$

$$\frac{\partial F_j'}{\partial Q_{j+1}^{i+1}} = - \frac{\theta^2}{2 \Delta x A_{j+1}^{i+1}}$$

$$\frac{\partial G_j'}{\partial Q_{j+1}^{i+1}} = 0$$

E em relação a  $Q_j^{i+1}$

$$\left\{ \begin{aligned}
 \frac{\partial Y_j}{\partial Q_j^{i+1}} &= Z_{j+1}^{i+1} \frac{\partial C_j'}{\partial Q_j^{i+1}} + Q_{j+1}^{i+1} \frac{\partial D_j'}{\partial Q_j^{i+1}} + Z_j^{i+1} \frac{\partial E_j'}{\partial Q_j^{i+1}} + F_j' + Q_j^{i+1} \frac{\partial F_j'}{\partial Q_j^{i+1}} + \frac{\partial G_j'}{\partial Q_j^{i+1}} \\
 \frac{\partial C_j'}{\partial Q_j^{i+1}} &= - \frac{\theta}{4 \Delta t} \frac{B_j^{i+1}}{A_j^{i+1}} \\
 \frac{\partial D_j'}{\partial Q_j^{i+1}} &= \frac{\theta^2}{2 \Delta x A_j^{i+1}} \\
 \frac{\partial E_j'}{\partial Q_j^{i+1}} &= \frac{\partial C_j'}{\partial Q_j^{i+1}} \\
 \frac{\partial F_j'}{\partial Q_j^{i+1}} &= \frac{-\theta}{2 \Delta x} \left[ \frac{\theta}{A_j^{i+1}} + \frac{W'}{(A_j^{i+1})^2} \right] + \frac{g \theta}{2} \cdot \frac{A_j^{i+1}}{(K_j^{i+1})^2} \\
 \frac{\partial G_j'}{\partial Q_j^{i+1}} &= 0
 \end{aligned} \right. \quad (3.33)$$

Estas derivadas, avaliadas em  $S^k$ , constituem-se nos elementos da matriz jacobiana em um ciclo  $k$ . Em suma, o procedimento pode ser sintetizado nos seguintes passos:

- 1) atribuímos valores a  $S^0 = \{s_1^0, s_2^0, \dots, s_{2N}^0\}$ . A partir destes valores determinamos o vetor de resíduos  $R^0$ ;
- 2) determinamos nova aproximação dos valores das incógnitas através de  $S^1 = S^0 - J^{-1}(S^0) \times R^0$ , onde  $J^{-1}(S^0)$  é a inversa da matriz jacobiana avaliada em  $S^0$ ;

3) o processo é repetido sucessivamente com  $S^{k+1} = S^k - J^{-1}(S^k) \times R^k$ ; a convergência é obtida quando os resíduos se tornam muito pequenos ou quando o módulo da diferença entre  $S^{k+1}$  e  $S^k$  é menor que uma tolerância pré-estabelecida.

Como se vê, a solução do sistema não-linear é obtida através da resolução de sucessivos sistemas lineares.

Convém notar que a matriz jacobiana em qualquer instante  $i$ , iteração  $k$ , apresenta uma estrutura em banda, com no máximo quatro elementos não-nulos por linha. É fundamental tirar-se partido deste fato, visto que a solução destes sistemas é responsável pela maior parte do tempo de processamento.

Em (3.34) mostramos os elementos não-nulos da matriz jacobiana avaliada no ciclo  $k$ .

$$\left[ \begin{array}{cccc}
 \frac{\partial F_M}{\partial Z_1^{i+1}} & \frac{\partial F_M}{Q_1^{i+1}} & & \\
 \frac{\partial X_1}{\partial Z_1^{i+1}} & \frac{\partial X_1}{\partial Q_1^{i+1}} & \frac{\partial X_1}{\partial Z_2^{i+1}} & \frac{\partial X_1}{\partial Q_2^{i+1}} \\
 \frac{\partial Y_1}{\partial Z_1^{i+1}} & \frac{\partial Y_1}{\partial Q_1^{i+1}} & \frac{\partial Y_1}{\partial Z_2^{i+1}} & \frac{\partial Y_1}{\partial Q_2^{i+1}} \\
 & & \frac{\partial X_2}{\partial Z_2^{i+1}} & \frac{\partial X_2}{\partial Q_2^{i+1}} & \frac{\partial X_2}{\partial Z_3^{i+1}} & \frac{\partial X_2}{\partial Q_3^{i+1}} \\
 & & \frac{\partial Y_2}{\partial Z_2^{i+1}} & \frac{\partial Y_2}{\partial Q_2^{i+1}} & \frac{\partial Y_2}{\partial Z_3^{i+1}} & \frac{\partial Y_2}{\partial Q_3^{i+1}} \\
 & & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 & & & \frac{\partial X_{N-1}}{\partial Z_{N-1}^{i+1}} & \frac{\partial X_{N-1}}{\partial Q_{N-1}^{i+1}} & \frac{\partial X_{N-1}}{\partial Z_N^{i+1}} & \frac{\partial X_{N-1}}{\partial Q_N^{i+1}} \\
 & & & \frac{\partial Y_{N-1}}{\partial Z_{N-1}^{i+1}} & \frac{\partial Y_{N-1}}{\partial Q_{N-1}^{i+1}} & \frac{\partial Y_{N-1}}{\partial Z_N^{i+1}} & \frac{\partial Y_{N-1}}{\partial Q_N^{i+1}} \\
 & & & & & \frac{\partial F_J}{\partial Z_N^{i+1}} & \frac{\partial F_J}{\partial Q_N^{i+1}} \\
 & & & & & \frac{\partial F_J}{\partial Z_N^{i+1}} & \frac{\partial F_J}{\partial Q_N^{i+1}}
 \end{array} \right] \quad (3.34)$$

### 3.6 - CONDIÇÕES DE FRONTEIRA

Nas seções 3.4 e 3.5 mencionamos a necessidade de mais duas equações, além das proporcionadas pela discretização das equações de Saint-Venant, para que as descargas e tirantes correspondentes ao instante de cálculo  $i + 1$  pudessem ser univocamente determinados. Estas equações, uma em cada extremo do trecho considerado, são obtidas através de vazões ou tirantes registrados em cada seção limítrofe, ou ainda através de uma curva-chave, para a seção de jusante. As equações têm a seguinte forma:

#### - Fronteira de Montante

$$Q_1^{i+1} - Q_1^{i+1(*)} = 0 \quad (3.35)$$

ou

$$z_1^{i+1} - z_1^{i+1(*)} = 0 \quad (3.36)$$

#### - Fronteira de Jusante

$$Q_N^{i+1} - Q_N^{i+1(*)} = 0 \quad (3.37)$$

ou

$$z_N^{i+1} - z_N^{i+1(*)} = 0 \quad (3.38)$$

ou ainda

$$Q_N^{i+1} - f(z_N^{i+1}) = 0 \quad (3.39)$$

O asterisco representa valores medidos e  $f(z_N^{i+1})$  a relação descarga-tirante proporcionada pela curva-chave de jusante.

Liggett e Cunge<sup>15</sup> apresentam recomendações para a escolha das condições de fronteira adequadas.

Concluída a apresentação do modelo matemático de

simulação através do esquema de Preissmann de discretização das equações diferenciais por diferenças finitas, passaremos a apresentar o objetivo fundamental deste trabalho: uma análise dos parâmetros do escoamento e um método de calibração automática dos seus valores em situações reais.

## IV - ESTUDO DOS PARÂMETROS DO MODELO

4.1 - IMPORTÂNCIA DOS COEFICIENTES DA PARCELA DE PERDA DE CARGA NA ANÁLISE DO ESCOAMENTO

Sejam as equações já conhecidas

$$S_f = \frac{Q |Q|}{K^2}$$

$$K^2 = \frac{A^2 R^m}{n^2}$$

Como se observa, a condutância da seção depende do expoente do raio hidráulico  $m$  e do coeficiente de rugosidade de Manning  $n$ . A calibração destes coeficientes constitui-se em etapa prioritária do problema de simulação matemática do escoamento em rios e canais. Estes parâmetros não são fisicamente mensuráveis e são determinados na prática geralmente por métodos de tentativa e erro, a partir de modelos matemáticos dos quais se conhece o "INPUT" e o "OUTPUT" (hidrogramas, cotas, curvas-chaves, por exemplo). Esta fase é conhecida como identificação de parâmetros.

Como veremos nas aplicações que serão apresentadas neste trabalho, é o coeficiente de rugosidade de Manning o parâmetro de maior sensibilidade nas equações do movimento, merecendo por isto maior atenção dos pesquisadores. Quanto ao expoente do raio hidráulico  $m$ , é normalmente utilizado com o valor empírico  $\frac{4}{3}$ , obtido para condições de escoamento permanente.

#### 4.2 - FATORES QUE INFLUENCIAM O COEFICIENTE DE RUGOSIDADE DE MANNING

O coeficiente  $n$  é altamente influenciado por um conjunto de características do meio condutor e do escoamento, que atuam de uma maneira interdependente e que por isto necessitam ser examinadas conjuntamente. Em virtude do caráter localizado destas características, cada caso apresenta condições próprias, o que torna ainda mais complexa a tarefa de estimar o valor deste coeficiente em uma dada situação.

Segundo Chow<sup>4</sup>, os fatores que influenciam mais diretamente o valor do coeficiente de Manning são:

- 1) rugosidade superficial - representada pela forma e tamanho dos grãos constituintes do material que forma o perímetro molhado e produz o efeito de retardamento sobre o escoamento. De modo geral o valor de  $n$  cresce conforme a dimensão dos grãos seja maior;
- 2) vegetação - seu crescimento reduz a capacidade de escoamento do canal, funcionando como uma espécie de rugosidade superficial adicional;
- 3) irregularidade do canal - variação de forma no perímetro molhado e na seção transversal, presença de bancos de areia e lodo ao longo do comprimento, ondulações no leito. Verifica-se que se essas modificações ocorrem de maneira gradual ao longo do comprimento do canal o valor de  $n$  não é sensivelmente modificado. Por outro lado, mudanças abruptas na forma da seção aumentam o valor de  $n$ ;
- 4) alinhamento do canal - a presença de meandros costuma elevar o valor de  $n$ , talvez pela deposição de partículas sólidas carregadas;
- 5) sedimentação - o efeito da sedimentação sobre o valor do coeficiente de Manning depende naturalmente do tipo de material depositado. A deposição de argilas e siltes levará à redução

da rugosidade superficial, situação oposta ocorrendo com a de posição de grãos mais grossos ou mesmo cascalhos e seixos transportados, ou ainda, formação de bancos de areia e oscilações no leito;

- 6) profundidade e descarga - normalmente o valor de  $n$  decresce com o aumento da profundidade e da descarga. Quando a lâmina d'água é pouco profunda as irregularidades do leito do canal são expostas e seus efeitos tornam-se pronunciados;
- 7) material suspenso e leito móvel - quando em movimento consomem energia e aumentam conseqüentemente a perda de carga. O material suspenso, encontrando-se em repouso, aumenta a rugosidade aparente do canal.

Como podemos concluir das considerações acima, a natureza dos fatores que afetam o valor do coeficiente de Manning exige um conhecimento profundo das características do canal para que se possa atribuir judiciosamente valores ao coeficiente de rugosidade em uma simulação matemática do escoamento ao longo do seu percurso. Chow<sup>4</sup> apresenta alguns métodos experimentais e empíricos para a determinação de  $n$ , em uma dada seção, bem como tabelas com valores médios recomendados, em função das características do corpo condutor.

Conhecida a influência dos parâmetros da parcela de atrito das equações de Saint-Venant, passaremos a estudar métodos que nos permitam solucionar o problema da determinação dos valores por eles assumidos em uma condição real de escoamento, em um canal natural. Como já foi dito, esta fase é conhecida como identificação dos parâmetros ou calibração do modelo.

## V - TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO APLICADAS À IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS

### 5.1 - ALGORITMO DO COEFICIENTE DE INFLUÊNCIA

O problema de identificação consiste em determinar valores dos parâmetros que permitam, a partir de uma entrada do modelo, chegar-se a uma saída compatível com valores conhecidos. No caso de calibração dos parâmetros das equações de Saint Venant, a entrada e saída do modelo de identificação são valores de descargas ou tirantes registrados nas duas seções limítrofes do trecho de canal em questão. A identificação automática dos parâmetros é feita iterativamente, obtendo-se a cada ciclo uma saída e comparando-se esta saída simulada com o registro disponível. Os parâmetros são considerados calibrados quando uma tolerância estabelecida é satisfeita.

Um processo de identificação de parâmetros aplicado ao escoamento não-permanente em canais abertos foi proposto por Yeh e Becker<sup>17</sup> em 1972. Estes autores fizeram uso do algoritmo do coeficiente de influência para calibrar as duas características da declividade de atrito, ou seja, o coeficiente de Manning  $n$  e o expoente do raio hidráulico  $m$ .

O algoritmo do coeficiente de influência é um procedimento baseado na busca por gradiente e no método de quasilinearização para solução de sistemas de equações diferenciais. O objetivo é satisfazer ao critério dos mínimos quadrados, isto é, minimizar o somatório dos quadrados das diferenças entre os valores calculados para as incógnitas na seção de jusante e os valores registrados na mesma seção.

A função objetivo proposta pelos citados autores

é:

$$F = \sum_{i=1}^M (\epsilon_i^{(k)})^2 + \sum_{i=1}^M (\eta_i^{(k)})^2 \quad (5.1)$$

onde  $M$  é o número de instantes de cálculo e

$$\begin{aligned} \epsilon_i^{(k)} &= Q_N^{i(k)} - Q_N^{i(*)} \\ \eta_i^{(k)} &= Z_N^{i(k)} - Z_N^{i(*)} \end{aligned} \quad (5.2)$$

onde o sobrescrito  $k$  representa os valores de descargas e tirantes simulados com os atuais valores dos parâmetros e o asterisco simboliza os valores medidos, na seção de jusante.

No final, após diversas considerações, a obtenção dos valores dos parâmetros para o ciclo  $k + 1$  é conseguida através da resolução de um sistema com duas equações a duas incógnitas.

## 5.2 - DISCUSSÃO DO MÉTODO PROPOSTO

Becker e Yeh fizeram em seu trabalho uma apresentação do algoritmo utilizando o esquema explícito de Stocker, apresentando como exemplo de aplicação o amortecimento de uma onda sinusoidal, visando testar a convergência, precisão e rapidez no processo de identificação dos parâmetros. A propagação da onda foi feita através de um canal idealizado com forma trapezoidal, e os parâmetros considerados constantes no espaço e no tempo.

Os autores mostraram que o algoritmo apresenta boas condições de convergência, rapidez na obtenção das soluções e estabilidade numérica, desde que obedecidas as restrições impostas

ao esquema explícito.

Para aplicação do algoritmo do coeficiente de influência a um caso real de propagação de onda de cheia em um canal natural devem ser consideradas as seguintes restrições:

- 1) as imposições feitas aos esquemas explícitos para que haja estabilidade numérica não recomendam o uso de tais esquemas;
- 2) o uso de um esquema implícito exige condições de fronteira, uma em cada extremo do canal. A utilização deste tipo de esquema faz com que  $\epsilon_i^{(k)}$  ou  $\eta_i^{(k)}$  seja nulo, conforme a condição de fronteira seja fornecida por descargas ou tirantes medidos na seção de jusante. Isto faz com que o sistema perca a unicidade, invalidando portanto o algoritmo. Situação idêntica ocorre quando se usa como condição de fronteira de jusante uma relação entre descargas e tirantes, através de uma curva-chave;
- 3) dadas as inúmeras influências a que estão sujeitos os parâmetros a calibrar, em especial o coeficiente de Manning, é difícil, para condições naturais, obter bons resultados na calibração considerando que os valores dos parâmetros permaneçam constantes no tempo e ao longo de todo o comprimento do canal.

Diante de tais restrições, ficamos impossibilitados de usar o algoritmo do coeficiente de influência, o que nos levou a utilizar, para identificação dos parâmetros, os métodos de busca que passaremos a descrever.

### 5.3 - MÉTODOS DE BUSCA POR GRADIENTE

Entre as técnicas de otimização aplicáveis ao problema de identificação de parâmetros abordado por este trabalho, optamos pela utilização de métodos que usam a direção do gradiente da função em um ponto como o caminho a seguir para atingir o ótimo. Esta escolha foi baseada nas vantagens em termos de me-

nor número de iterações e, conseqüentemente, menor tempo computacional dos métodos que utilizam gradientes quando comparados a processos alternativos de busca, como, por exemplo, métodos de busca unidirecional.

Neste trabalho foram utilizados dois processos de busca por gradiente: o "steepest descent method" e o método dos gradientes conjugados.

#### 5.4 - O "STEEPEST DESCENT METHOD"

Este método foi proposto por Box e Wilson em 1951. Nesta técnica todas as variáveis são modificadas simultaneamente e a direção de busca é definida proporcionalmente à sensitividade da função objetivo, estimada para cada variável de decisão. A idéia básica é, portanto, que cada variável seja modificada na proporção da magnitude de sua declividade.

Sejam as equações

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \lambda^{(k)} \frac{\nabla f (X^{(k)})}{\| \nabla f (X^{(k)}) \|} \quad (5.3)$$

onde  $X^{(k)}$  e  $X^{(k+1)}$  representam vetores que contêm os valores das variáveis de decisão nos ciclos iterativos de ordem  $k$  e  $k + 1$ .  $\nabla f (X^{(k)})$  é o vetor gradiente da função objetivo  $f$  em  $X^{(k)}$ ; isto é,

$$\nabla f (X^{(k)}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial f}{\partial x_N} \end{vmatrix}_{X=X^{(k)}} \quad (5.4)$$

$\| \nabla f (X^{(k)}) \|$  é a norma do vetor gradiente em  $X^{(k)}$  e  $\lambda^{(k)}$  representa a amplitude do passo a ser dado na direção do gradiente, no sentido negativo, na iteração  $k$ .

Sendo  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ , as equações acima nos levam às seguintes expressões:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - h^{(k)} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right)_k \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - h^{(k)} \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)_k \\ \dots\dots\dots \\ x_n^{(k+1)} = x_n^{(k)} - h^{(k)} \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)_k \end{array} \right. \quad (5.5)$$

onde  $h^{(k)}$  é um fator de proporcionalidade de distância definido por

$$h^{(k)} = \frac{\lambda^{(k)}}{\| \nabla f (X^{(k)}) \|} = \frac{\lambda^{(k)}}{\sqrt{\left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right)_k^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)_k^2 + \dots + \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)_k^2}} \quad (5.6)$$

## 5.5 - MÉTODO DOS GRADIENTES CONJUGADOS

### Direções Conjugadas

Sejam  $S^{(0)}, S^{(1)}, \dots, S^{(n-1)}$  vetores que definem um conjunto de  $n$  direções linearmente independentes do espaço vetorial  $E^n$ . Estas direções são ditas serem conjugadas em relação a uma matriz quadrada positiva definida  $Q$  se

$$(S^{(i)})^T Q S^{(j)} = 0 \quad 0 \leq i \neq j \leq n - 1 \quad (5.7)$$

onde  $(S^{(i)})^T$  é o vetor transposto de  $S^{(i)}$ .

Pode-se provar, conforme indicado na literatura

sobre o assunto, que, se as direções conjugadas são empregadas, qualquer função objetivo quadrática de  $n$  variáveis que tem um mínimo pode ser minimizada em no máximo  $n$  passos.

Dois importantes métodos de otimização fazem uso das direções conjugadas: são os algoritmos de Fletcher e Powell e o devido a Fletcher e Reeves.

O algoritmo de Fletcher e Powell procura encontrar um conjunto de  $n$  dimensões que descrevam a superfície de modo que cada direção seja conjugada a todas as outras. Descrição detalhada do método pode ser encontrada em Himmelblau<sup>6</sup>.

O algoritmo de Fletcher e Reeves foi empregado neste trabalho e será descrito em detalhes a seguir.

De modo geral, ambos os algoritmos têm-se mostrado eficientes para determinação do ótimo, mesmo para funções objetivos não-quadráticas.

## 5.6 - ALGORITMO DE FLETCHER E REEVES

O método dos gradientes conjugados de Fletcher-Reeves determina uma sequência de direções de busca através de um vetor  $S^{(k)}$  definido como uma combinação linear de  $-\nabla f(X^{(k)})$ , o gradiente negativo da função objetivo em  $X^{(k)}$  e  $S^{(k-1)}$ , a direção de busca anterior. A equação que define esta relação é

$$S^{(k)} = -\nabla f(X^{(k)}) + \omega_k S^{(k-1)} \quad (5.8)$$

onde  $\omega_k$  é um escalar definido de maneira que as direções de  $S^{(k)}$  e  $S^{(k-1)}$  sejam conjugadas em relação à matriz hessiana da função objetivo  $H$ , isto é,

$$(S^{(k)})^T H S^{(k-1)} = 0 \quad (5.9)$$

Pode-se demonstrar que o valor de  $\omega_k$  que satisfaz à condição imposta acima é dado por

$$\omega_k = \frac{\nabla^T f(X^{(k)}) \nabla f(X^{(k)})}{\nabla^T f(X^{(k-1)}) \nabla f(X^{(k-1)})} = \frac{\|\nabla f(X^{(k)})\|^2}{\|\nabla f(X^{(k-1)})\|^2} \quad (5.10)$$

O método de Fletcher-Reeves pode ser então esquematizado nos seguintes passos:

- 1) para a estimativa inicial  $X^{(0)}$  calcula-se  $S^{(0)} = -\nabla f(X^{(0)})$ ;
- 2) através de uma busca unidimensional segundo a direção definida por  $S^{(0)}$ , determina-se o mínimo da função objetivo nessa direção, ou seja,  $X^{(1)}$ ;
- 3)  $f(X^{(1)})$  e  $\nabla f(X^{(1)})$  são calculados;
- 4) a nova direção de busca é determinada através de

$$S^{(1)} = -\nabla f(X^{(1)}) + \frac{\|\nabla f(X^{(1)})\|^2}{\|\nabla f(X^{(0)})\|^2} S^{(0)} \quad (5.11)$$

- 5) volta-se ao passo 2, se necessário, com  $S^{(1)}$  em lugar de  $S^{(0)}$  e assim se prossegue sucessivamente. Depois de  $n+1$  iterações ( $n$  é o número de variáveis de decisão) o processo é reciclado com  $X^{(n+1)}$  no lugar de  $X^{(0)}$  no passo 2;
- 6) a busca é terminada com sucesso no ciclo  $k$  quando uma dada tolerância para  $f(X^{(k)})$  ou  $\|S^{(k)}\|$  é satisfeita.

A busca unidimensional citada no passo 2 é feita através do método DSC-Powell (combinação do método de Davies, Swann e Campey com o método de Powell). Nos passos do algoritmo descrito a seguir,  $d$  é uma variável independente em uma direção de busca  $S^{(k)}$  tal que

$$\begin{cases} X^{(\ell+1)} = X^{(\ell)} + \Delta X^{(\ell)} \\ \Delta X^{(\ell)} = d^{(\ell)} \cdot S^{(k)} \end{cases} \quad (5.12)$$

onde o sobrescrito  $\ell$  indica o ciclo de cálculo na busca unidimensional do mínimo na direção de  $S^{(k)}$ .

Os passos de cálculo do DSC-Powell são os seguintes:

- 1) define-se um incremento  $\Delta d$  inicial e se faz  $d^{(0)} = \Delta d$ . Calcula-se  $\Delta X^{(0)}$ ;
- 2) calcula-se  $f(X^{(0)})$  e  $f(X^{(0)} + \Delta X^{(0)})$ . Se

$$f(X^{(0)} + \Delta X^{(0)}) \leq f(X^{(0)})$$

segue-se para o passo 3. Se

$$f(X^{(0)} + \Delta X^{(0)}) > f(X^{(0)})$$

inverte-se o sentido da busca, com  $-\Delta d$  ao invés de  $\Delta d$ , e executa-se o passo 3;

- 3) calcula-se  $X^{(\ell+1)}$ ;
- 4) calcula-se  $f(X^{(\ell+1)})$ ;
- 5) se  $f(X^{(\ell+1)}) \leq f(X^{(\ell)})$ , duplica-se o valor de  $\Delta d$  e retorna-se ao passo 3 com  $\ell$  incrementado de uma unidade e  $d^{(\ell)} = d^{(\ell-1)} + \Delta d$ . Se, no entanto,  $f(X^{(\ell+1)}) > f(X^{(\ell)})$ , reduz-se  $\Delta d$  à metade e se retorna aos passos 3 e 4 para mais um cálculo apenas. Este procedimento leva a quatro pontos igualmente espaçados para os quais  $f(X)$  foi avaliada. A Figura (5.1) ilustra os passos 1 a 5;

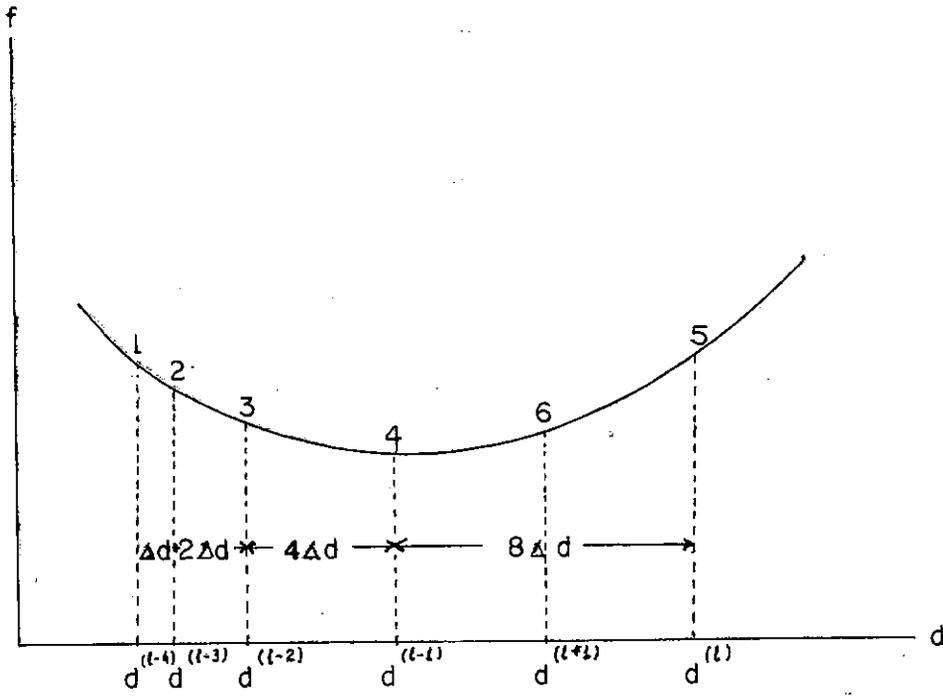


FIGURA 5.1 - REPRESENTAÇÃO DOS PASSOS DA BUSCA UNIDIMENSIONAL DSC - POWELL

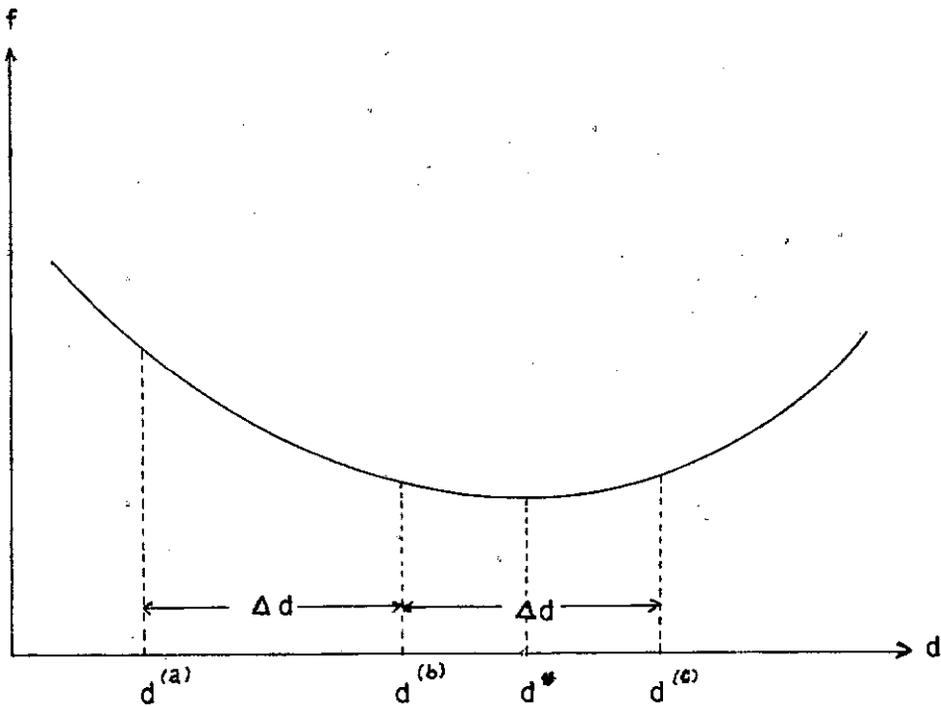


FIGURA 5.2 - INTERPOLAÇÃO PARABÓLICA

- 6) dos quatro pontos igualmente espaçados elimina-se o extremo mais afastado do valor de  $d$  que corresponde ao menor valor de  $f(X)$ . A seguir representa-se os três pontos restantes por  $d^{(a)}$ ,  $d^{(b)}$  e  $d^{(c)}$ , sendo  $d^{(b)}$  o ponto centrado,  $d^{(a)} = d^{(b)} - \Delta d$  e  $d^{(c)} = d^{(b)} + \Delta d$ ;
- 7) estima-se o valor de  $d$  correspondente ao mínimo considerando-se que  $d^{(a)}$ ,  $d^{(b)}$  e  $d^{(c)}$  são abscissas de pontos de uma parábola. A estimativa do mínimo é obtida através de  $d^*$ , abscissa do vértice, como mostrado na Figura (5.2):

$$d^* = \frac{[(d^{(b)})^2 - (d^{(c)})^2]f(X^{(a)}) + [(d^{(c)})^2 - (d^{(a)})^2]f(X^{(b)}) + [(d^{(a)})^2 - (d^{(b)})^2]f(X^{(c)})}{2 [(d^{(b)} - d^{(c)})f(X^{(a)}) + (d^{(c)} - d^{(a)})f(X^{(b)}) + (d^{(a)} - d^{(b)})f(X^{(c)})]} \quad (5.13)$$

- 8) se a diferença entre  $d^*$  e o ponto entre  $d^{(a)}$ ,  $d^{(b)}$  e  $d^{(c)}$  que corresponde ao menor valor da função objetivo não for maior que uma tolerância pré-estabelecida, a busca é parada em virtude de a precisão na determinação de  $f(X)$  não permitir que se consiga melhor resultado. De outra maneira, avalia-se  $X^*$  e  $f(X^*)$ , elimina-se do conjunto o ponto que corresponde ao maior valor de  $f(X)$  e executa-se nova interpolação no passo 7. A supressão de um dos quatro pontos deve ser feita sempre de modo que, dos três pontos restantes, o interior corresponda ao menor valor da função objetivo, para que o processo de interpolação parabólica possa continuar. Se a eliminação do ponto correspondente ao maior valor da função objetivo não permitir que tal situação ocorra, o ponto suprimido deve ser outro;
- 9) a busca unidimensional é concluída em qualquer passo se uma tolerância para  $f(X)$  é satisfeita ou se, no passo 8, duas interpolações parabólicas consecutivas não levam a qualquer redução significativa no valor da função objetivo.

As técnicas de otimização descritas nesta seção podem ser aplicadas ao problema de identificação de parâmetros, considerando-se como variáveis de decisão os parâmetros a cali-

brar e definindo-se uma função objetivo cuja minimização representa o ajustamento das descargas e tirantes calculados aos medidos, na seção de jusante. Trataremos disso no capítulo seguinte.

## VI - APLICAÇÃO DE TÉCNICAS DE BUSCA POR GRADIENTE À IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS EM ESCOAMENTO NÃO-PERMANENTE EM SITUAÇÕES REAIS

### 6.1 - CONSIDERAÇÕES SOBRE OS PARÂMETROS A SEREM CALIBRADOS

Nos capítulos precedentes fizemos considerações sobre os parâmetros da parcela de atrito nas equações de Saint-Venant, em especial sobre o coeficiente de atrito de Manning e os inúmeros fatores que influenciam o seu valor. Introduziremos agora um terceiro parâmetro a calibrar: a contribuição lateral ao longo do trecho de rio em questão.

Como já foi dito anteriormente, nos problemas usuais de simulação o expoente do raio hidráulico é considerado igual a  $4/3$ , obtido da condição de escoamento permanente. O coeficiente de Manning é calibrado a partir de registros de cheias passadas, quando tais dados são disponíveis. Na ausência destes é comum serem adotados valores médios para  $n$  a partir do confronto das características do rio ou canal em questão com as de um outro onde o parâmetro já foi calibrado. Em várias situações são simplesmente adotados valores médios na faixa  $0,03 - 0,04$ , na qual se enquadram a maioria dos cursos d'água naturais. Convém lembrar, no entanto, que, de acordo com os fatores já citados no capítulo IV que influenciam esta característica de atrito, seu valor não permanece constante durante a propagação de uma onda de cheia. Muito pelo contrário, sofre sensíveis variações, como já determinado experimentalmente por muitos pesquisadores e como tentaremos mostrar neste trabalho.

Vejamos, por fim, a possibilidade de considerar a descarga lateral como um terceiro parâmetro a calibrar. Esta contribuição é devida à presença de pequenos afluentes nos quais não

existem postos fluviométricos e ao escoamento superficial, sub-superficial e básico, decorrentes de precipitações sobre a bacia, que afluem ao rio ao longo do seu comprimento, e ainda à precipitação sobre o próprio leito. Por depender da precipitação e das características da bacia, a descarga lateral varia no tempo e espacialmente. Sua determinação é feita de modo precário, normalmente estimando-se valores médios a partir de fórmulas empíricas ou baseadas no método racional. Estas últimas estimam a descarga lateral a partir da intensidade da chuva que provoca a cheia e de características da bacia contribuinte, como sua área e um coeficiente de escoamento superficial.

Neste ponto defrontamo-nos com dois caminhos a seguir na tentativa de calibrar os parâmetros citados. O primeiro caminho consiste em considerar os parâmetros constantes. Tal procedimento, desde que forneça bons resultados, constitui-se no esquema ideal de calibração, visto que os parâmetros calibrados com valores médios facilitam a simulação da propagação de cheias subsequentes. A segunda possibilidade, mais coerente do ponto de vista dos fatores que influenciam os parâmetros, é considerá-los variáveis.

Ambos os métodos foram aplicados e serão discutidos em detalhes posteriormente.

## 6.2 - CONSIDERAÇÕES SOBRE O ESQUEMA EM DIFERENÇAS FINITAS

Conforme discutido no Capítulo III, a discretização das equações do movimento por diferenças finitas através do esquema implícito de Preissmann leva-nos a duas possibilidades: linearizar as expressões resultantes ou utilizá-las na íntegra.

A vantagem decorrente das linearizações sobre a

utilização das equações em sua forma original deve-se ao fato de que a determinação das vazões e tirantes no instante  $i + 1$  e nas diversas seções de cálculo é feita através da resolução de sistemas de equações lineares, enquanto que no segundo caso os sistemas a serem resolvidos são não-lineares. Naturalmente, em termos de tempo computacional, as linearizações resultam em considerável vantagem.

Há no entanto a se ressaltar uma restrição importante a tais linearizações: as simplificações feitas nas expressões indicadas no Capítulo III são válidas apenas quando  $\Delta f < f$ , sendo  $f$  uma variável dependente qualquer que aparece nas citadas expressões. A não obediência a esta restrição leva ao aparecimento de instabilidades numéricas, como pudemos constatar em nossas aplicações.

Como veremos nas aplicações a seguir, o rio Capi-baribe, escolhido como exemplo na utilização das técnicas de otimização apresentadas neste trabalho, caracteriza-se pela formação muito rápida de ondas de cheia, como se poderá constatar observando-se os hidrogramas das mesmas. Tal fato leva conseqüentemente à violação da restrição exigida para que possam ser justificadas as linearizações.

Deve-se notar, no entanto, que a relação  $\Delta f/f$  pode ser reduzida desde que o intervalo de discretização do tempo  $\Delta t$  seja reduzido. Isto foi feito, porém se fez necessário tal acréscimo no número de instantes de cálculo que o tempo de processamento, única vantagem do método, tornou-se equivalente ao tempo gasto na solução das equações sem linearização. Uma outra dificuldade que se nos apresentou ao diminuir o intervalo de tempo  $\Delta t$  foi a necessidade de executar interpolações nos registros

de vazões na seção de montante, a fronteira inicial, enquanto que no processo de solução das equações originais foi possível utilizar como intervalo de tempo o mesmo intervalo segundo o qual são fornecidos os registros de vazões e tirantes, dispensando-se assim quaisquer interpolações sobre estes dados.

Apesar das desvantagens citadas e que nos levaram a deixar de lado as equações linearizadas, visto que elas não nos trariam nenhum benefício nas nossas aplicações, acreditamos que sua utilização possa ser vantajosa no estudo da propagação de cheias de grande duração e que não apresentem condições bruscas de formação e recessão, como as que foram por nós analisadas.

### 6.3 - CONSIDERAÇÕES SOBRE OS MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO UTILIZADOS

No Capítulo anterior descrevemos genericamente dois métodos de busca: O "steepest descent method" e o método das direções conjugadas. Ambos foram utilizados no processo de identificação dos parâmetros com bons resultados. O primeiro qualifica-se por suas características de simplicidade e rapidez na obtenção do mínimo, porém nem sempre a busca chega a alcançar um ótimo local. Existem algumas circunstâncias em que a busca falha. Um exemplo pode ser dado quando a função objetivo apresenta um ponto estacionário (todas as componentes do gradiente da função objetivo nulas) conhecido como ponto de sela, que é um mínimo em uma direção e máximo em outra. Outra falha comum deste método é a oscilação nas vizinhanças do mínimo.

Maiores detalhes a respeito podem ser obtidos em Himmelblau<sup>6</sup> e Nowacki<sup>9</sup>.

Embora em nossas aplicações o "steepest descent method" tenha fornecido bons resultados, estes não serão apresen

tados neste trabalho, visto que são praticamente idênticos aos obtidos através da técnica mais refinada dos gradientes conjugados, sobre cuja aplicação passaremos a discorrer.

#### 6.4 - APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS GRADIENTES CONJUGADOS À IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS EM PROPAGAÇÃO DE ONDA DE CHEIA

Conforme discutimos antes, estudaremos o problema de identificação dos parâmetros sob dois aspectos:

- a) fazendo-os assumir valores constantes, médios, em todas as seções e instantes de cálculo;
- b) considerando a variação dos seus valores durante a propagação da onda de cheia.

Indicaremos a expressão da função objetivo em cada caso, a maneira segundo a qual estimamos as componentes do gradiente em cada ponto e os passos a serem executados na busca dos valores ótimos dos parâmetros.

##### - Calibração a Parâmetros Constantes

Seja a função objetivo

$$F = \sum_{i=1}^M \epsilon_i^2 \quad (6.1)$$

onde

$$\epsilon_i = Q_N^i - Q_N^{i(*)} \quad (6.2)$$

sendo  $Q_N^i$  e  $Q_N^{i(*)}$  as descargas na seção de jusante, respectivamente simuladas e medidas. O objetivo é, portanto, determinar valores dos parâmetros tais que o somatório dos quadrados das diferenças entre as descargas registradas e calculadas seja o mínimo

mo possível. Desde que se use como condição de fronteira final uma curva-chave, o ajustamento dos tirantes simulados na seção de jusante se fará ao mesmo tempo em que é feito o ajuste das vazões na referida seção, em virtude da relação descarga - tirante proporcionada.

Os passos de cálculo do algoritmo de calibração nestas circunstâncias são os seguintes:

- 1) atribuem-se aos parâmetros valores iniciais e com estes executa-se a simulação para todo o período considerado determinando-se o valor inicial da função objetivo  $F$  ;
- 2) cada parâmetro, isoladamente, é modificado por um pequeno incremento e após novas simulações obtêm-se novos valores da função objetivo. Os quocientes entre as variações da função objetivo, decorrentes do incremento dado a cada parâmetro, e os incrementos correspondentes são as estimativas das componentes do gradiente da função  $F$  no ponto definido pelos atuais valores dos parâmetros;
- 3) definida a direção do gradiente, aplica-se o algoritmo dos gradientes conjugados para procurar o mínimo local da função objetivo. Retorna-se ao passo 2, com o menor valor de  $F$  obtido e os valores correspondentes dos parâmetros, sempre que se fizer necessário determinar uma nova direção de busca;
- 4) o processamento é encerrado quando uma tolerância no valor da função objetivo é satisfeita ou quando um número limite de iterações fixado é atingido.

#### - Calibração a Parâmetros Variáveis

Conforme considerações feitas anteriormente, as características do atrito, em especial o coeficiente de Manning, variam, em uma dada seção, à medida que ocorre a passagem da onda de cheia. Por outro lado, como uma seção difere das outras

quanto à forma, material constituinte do seu perímetro, cobertura vegetal e outras características, naturalmente haverá variação nos valores destes parâmetros de uma seção para outra. A contribuição lateral, por sua vez, depende da precipitação e das características físicas da bacia principal e das bacias dos pequenos tributários cujas descargas são enquadradas na vazão lateral.

Tais fatos nos levaram a pensar em desenvolver um modelo de calibração de parâmetros onde fosse considerada a variação dos mesmos tanto no espaço como no tempo. Esta hipótese foi no entanto rejeitada por dois motivos:

- 1) embora não impossível, tal procedimento é inviável do ponto de vista computacional, visto que levaria a um tempo de processamento muito alto, mesmo em computadores de grande porte;
- 2) a natureza dos dados disponíveis não nos permite atingir tal nível de sofisticação. Os resultados, portanto, não seriam representativos da situação real do escoamento.

Estes dois aspectos serão melhor discutidos nas aplicações feitas no próximo Capítulo.

Mediante tais limitações, consideramos apenas a variação dos parâmetros com o tempo, o que equivale a supor que o trecho em questão apresenta características físicas homogêneas. A viabilidade desta suposição será discutida na análise dos resultados das aplicações feita posteriormente.

Após estas considerações, apresentamos as características do modelo:

- Função Objeto

$$F_i = \epsilon_{i+1}^2 \quad (6.3)$$

$$\epsilon_{i+1} = Q_N^{i+1} - Q_N^{i+1(*)} \quad i = 1, 2, \dots, M - 1 \quad (6.4)$$

Como se pode constatar comparando-se estas equações com as do esquema para calibração a parâmetros constantes, a diferença consiste no fato de que, enquanto naquele procura-se determinar valores médios dos parâmetros tais que o somatório dos quadrados dos desvios das vazões seja minimizado, neste a minimização é feita a cada instante, determinando-se os valores dos parâmetros que correspondam à melhor aproximação entre as vazões simulada e medida, na seção de jusante, isto é, que minimizem  $F_i$ . Alcançado este objetivo, passa-se ao instante de cálculo seguinte.

Excetuando-se o fato de que a função objetivo e seu gradiente são avaliados a cada instante de cálculo e não sobre todo o período, os passos a serem seguidos na calibração dos parâmetros são os mesmos já descritos no algoritmo anterior. Obedecendo à formulação do esquema implícito, considera-se que os valores dos parâmetros em um instante de cálculo  $i$  são conhecidos. O algoritmo é aplicado de modo a determinar, no instante de cálculo  $i$ , os valores que serão assumidos pelos parâmetros no instante seguinte de modo que  $\epsilon_{i+1}$  não ultrapasse uma tolerância fixada.

Uma vantagem adicional do algoritmo com parâmetros variáveis sobre o de parâmetros constantes deve-se ao fato de que ele nos permite estimar o valor inicial do passo a ser dado na busca por gradiente, conforme mostraremos a seguir. A determinação da amplitude inicial do passo constitui-se normalmente em um problema dos métodos de busca, visto que uma má estimativa pode levar a um número de iterações muito grande, quando o

passo estimado é muito pequeno, ou oscilações em torno do ótimo, quando o passo é muito grande.

- Determinação da Amplitude do Passo Inicial em Cada Iteração

Sejam  $r$ ,  $m$  e  $q$  os parâmetros a calibrar, respectivamente o quadrado do coeficiente de Manning, o expoente do raio hidráulico e a contribuição lateral. O primeiro passo em cada iteração é calculado através do "steepest descent method".

De acordo com o sistema (5.5) temos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{i+1}^{(1)} = r_{i+1}^{(0)} - h^{(0)} a_{1,i+1}^{(0)} \\ m_{i+1}^{(1)} = m_{i+1}^{(0)} - h^{(0)} a_{2,i+1}^{(0)} \\ q_{i+1}^{(1)} = q_{i+1}^{(0)} - h^{(0)} a_{3,i+1}^{(0)} \end{array} \right. \quad (6.5)$$

onde  $a_{1,i+1}^{(0)}$ ,  $a_{2,i+1}^{(0)}$  e  $a_{3,i+1}^{(0)}$  são as estimativas iniciais das derivadas parciais da função objetivo  $F_i$  em relação aos parâmetros correspondentes ao instante de cálculo  $i + 1$ .

Consideremos a seguinte aproximação:

$$\Delta \epsilon_{i+1} \cong \frac{\partial \epsilon_{i+1}}{\partial r_{i+1}} \Delta r_{i+1} + \frac{\partial \epsilon_{i+1}}{\partial m_{i+1}} \Delta m_{i+1} + \frac{\partial \epsilon_{i+1}}{\partial q_{i+1}} \Delta q_{i+1} \quad (6.6)$$

Esta equação, aplicada ao sistema (6.5), leva-nos

a

$$\epsilon_{i+1}^{(1)} = \epsilon_{i+1}^{(0)} - \frac{h^{(0)}}{2 \epsilon_{i+1}^{(0)}} \left[ (a_{1,i+1}^{(0)})^2 + (a_{2,i+1}^{(0)})^2 + (a_{3,i+1}^{(0)})^2 \right] \quad (6.7)$$

Supondo que  $h^{(0)}$  nos leve a alcançar um mínimo local, a função objetivo nesta direção de busca terá derivada em relação a  $h^{(0)}$  nula. Tirando proveito deste fato chegamos à expressão abaixo, que nos fornece a amplitude do passo inicial.

$$h^{(0)} = \frac{2 (\varepsilon_{i+1}^{(0)})^2}{(a_{1,i+1}^{(0)})^2 + (a_{2,i+1}^{(0)})^2 + (a_{3,i+1}^{(0)})^2} \quad (6.8)$$

Neste Capítulo e nos que o precederam apresentamos inicialmente considerações gerais sobre os esquemas numéricos de discretização por meio de diferenças finitas usados para solucionar as equações de Saint-Venant e nos estendemos em mais detalhes no esquema implícito de Preissmann. A seguir abordamos as técnicas de otimização aplicadas ao problema de identificação de parâmetros, tecendo considerações sobre o algoritmo do coeficiente de influência, o "steepest descent method" e finalmente o método dos gradientes conjugados.

No próximo Capítulo apresentaremos os resultados da aplicação do método dos gradientes conjugados devido a Fletcher-Reeves, associado ao esquema implícito de Preissmann, para a calibração de parâmetros em propagação de ondas de cheia no rio Capibaribe, em Pernambuco.

## VII - IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS NA PROPAGAÇÃO DE ONDAS DE CHEIA NO RIO CAPIBARIBE

### 7.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS

A bacia do rio Capibaribe localiza-se na região nordeste do Estado de Pernambuco e sua área é cerca de 7.400 Km<sup>2</sup>. Para efeito de estudos encontra-se dividida em três sub-bacias com características distintas: a do Alto, do Médio e do Baixo Capibaribe. Um mapa da bacia é apresentado na Fig. (7.1).

O Alto Capibaribe, com cerca de 2.450 Km<sup>2</sup>, compreende a região a montante da cidade de Toritama. Possui um regime pluviométrico anual médio de 600 mm, seu semestre provável de ocorrência de chuva é fevereiro-julho e seu trimestre mais intenso é março-maio.

O Médio Capibaribe apresenta uma área de 3.050 Km<sup>2</sup> e compreende a região entre Toritama e Limoeiro. Seu regime pluviométrico anual médio varia entre 600 mm em Toritama e 1.000 mm em Limoeiro. Seu semestre mais provável de ocorrência de chuva é março-agosto, enquanto seu trimestre mais intenso é abril-junho.

O Baixo Capibaribe, finalmente, tem aproximadamente 1.750 Km<sup>2</sup> e compreende a região entre Limoeiro e o litoral. Seu regime pluviométrico médio anual varia de 1.000 mm em Limoeiro a 1.700 mm no litoral. Seu semestre e trimestre de ocorrência de chuvas coincidem com os do Médio Capibaribe.

Embora a forma geral da bacia seja alongada, o Médio e o Baixo Capibaribe contribuem com uma grande parcela para a formação das enchentes, sendo neste caso seu funcionamento análogo ao de uma bacia de forma radial.

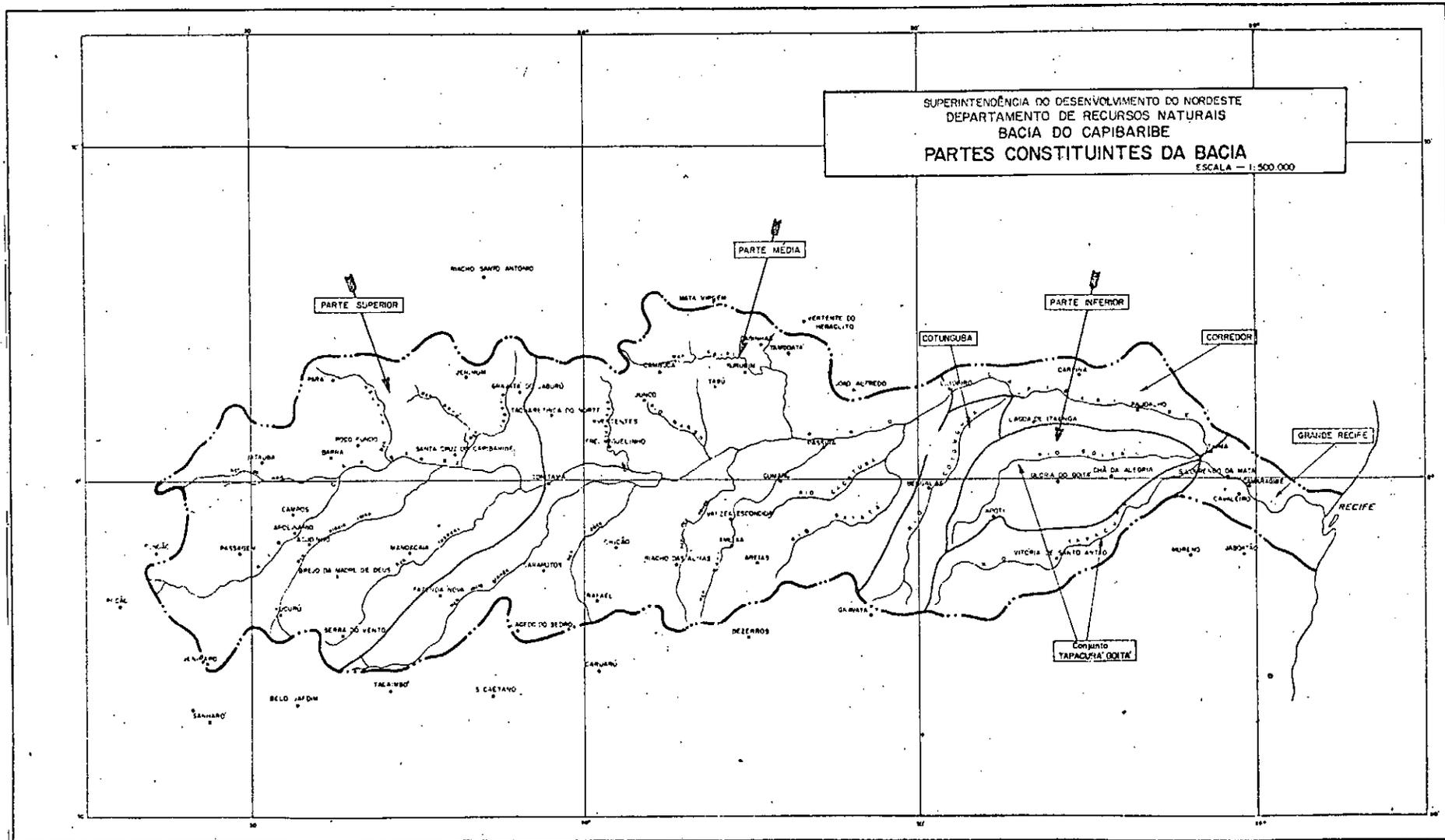


FIG. 7.1 - BACIA DO RIO CAPIBARIBE

Em sua foz encontra-se a cidade de Recife, cuja al titude média é da ordem de 1,37 m acima do nível do mar.

Em virtude do regime pluviométrico da bacia, os me ses que apresentam maior probabilidade de ocorrência de enchentes são abril, maio e junho, uma vez que nesse período é maior o ris co de ocorrerem grandes chuvas em toda a extensão da bacia.

## 7.2 - COLETA DOS DADOS NECESSÁRIOS

Possivelmente o problema capital enfrentado pelos que tentam aplicar modelos de simulação e calibração a situações reais é a carência de dados. Registros históricos curtos, seções de medição muito espaçadas, desconhecimento quase total das características topográficas dos cursos d'água e afluentes importantes dos quais não se dispõe de qualquer registro de tirantes e vazões são alguns exemplos de tal carência.

Embora estes problemas sejam uma constante nas re giões Norte e Nordeste do Brasil, o rio Capibaribe, em virtude das catastróficas inundações das quais foram vítimas Recife e ci dades adjacentes, foi equipado com uma boa rede hidrométrica. Des ta forma, dispomos de postos de medição de vazões nas cidades de Toritama, Limoeiro, Paudalho, Tiama e São Lourenço da Mata, todos ao longo do Capibaribe, além de postos nos afluentes Tapacurá e Goitá.

Para cada seção de medição foi calibrada uma cur va-chave em escala bi-logarítmica.

Infelizmente a operação dos postos flu viométricos pela SUDENE só foi iniciada a partir de 1966, logo após a grande cheia que atingiu Recife em junho desse ano. Desta manei

ra, são poucos os registros de cheias disponíveis, em virtude da operação recente dos postos. Apenas três enchentes significativas, nos anos de 1969, 1970 e 1975. Esta última, a maior delas, apresentou um pico de  $3.400 \text{ m}^3/\text{s}$  em São Lourenço, bem superior à capacidade de escoamento da calha. A ocorrência de transbordamento dificulta sobremaneira a calibração das características de atrito, de modo que não fizemos uso dos dados desta cheia neste trabalho.

De relatórios publicados pela SUDENE<sup>10, 11, 12</sup> extraímos os seguintes dados:

- a) registros horários de vazões e tirantes nos postos de medição instalados no Capibaribe;
- b) levantamento topográfico das seções transversais onde os postos estão instalados;
- c) curva-chave do rio em cada uma dessas seções;
- d) comprimento de cada trecho do rio limitado por duas seções de medição;
- e) altitudes dos postos fluviométricos.

### 7.3 - MANIPULAÇÃO DOS DADOS PARA ENTRADA NO MODELO

#### - Áreas das Seções Transversais e Larguras Superficiais

Conforme dissemos anteriormente, para determinação das áreas das seções transversais e larguras superficiais dispomos apenas de levantamentos topográficos nas seções onde se efetuam as medições. Como o modelo discretiza o trecho de rio em  $N - 1$  intervalos de comprimento  $\Delta x$  limitados por  $N$  seções de cálculo, é necessário que se conheça a variação das áreas e larguras superficiais nesta  $N$  seções. O ideal seria, portanto,

que fossem obtidos levantamentos topográficos de cada seção de cálculo. Na ausência destes, procedemos da seguinte forma:

- a) tabelamos áreas e larguras superficiais das seções transversais extremas de cada trecho, para diversas profundidades da lâmina d'água;
- b) a área molhada  $A$  e a largura superficial  $B$  correspondentes a um dado tirante  $Z$ , nas seções extremas, são obtidas por interpolação linear nas respectivas tabelas;
- c) as derivadas  $\frac{dA}{dZ}$  e  $\frac{dB}{dZ}$  que aparecem nos elementos da matriz jacobiana foram aproximadas pelas expressões em diferenças finitas  $\frac{\Delta A}{\Delta Z}$  e  $\frac{\Delta B}{\Delta Z}$ , para um dado  $Z$ ;
- d) os valores de  $A$ ,  $B$ ,  $\frac{\Delta A}{\Delta Z}$  e  $\frac{\Delta B}{\Delta Z}$ , para uma seção intermediária qualquer, foram obtidos por interpolação linear a partir dos valores calculados nas duas seções extremas para o tirante  $Z$  em questão. O parâmetro interpolador foi a distância da seção considerada às seções extremas.

As tabelas (7.2) e (7.3) mostram áreas e larguras tabeladas nas seções extremas dos dois trechos considerados.

#### - Condutância da Seção e sua Derivada

De acordo com a equação (2.4), a condutância  $K$  é dada por:

$$K = \frac{A R^{m/2}}{r^{1/2}} \quad (7.1)$$

onde  $r$  é o quadrado do coeficiente de Manning  $n$ . Considerando, para cálculo do raio hidráulico, que a seção transversal é retangular de largura  $B$  e profundidade  $Z$ , temos:

$$K = \frac{(BZ)^{\frac{m}{2} + 1}}{r^{1/2} (B + 2Z)^{m/2}} \quad (7.2)$$

RIU CAPIBARIBE ----- TRECHO TORITAMA - LIMOEIRO

DADOS DE ENTRADA DO MODELO

TABELAMENTO DE AREAS E LARGURAS SUPERFICIAIS NAS SECOES EXTREMAS

MONTANTE

JUSANTE

PONTO	PROF. (M)	AREA (M2)	LARG. (M)	PONTO	PROF. (M)	AREA (M2)	LARG. (M)
1	0.0	0.0	0.0	1	1.0	7.6	45.0
2	1.0	30.6	92.2	2	1.5	32.1	52.8
3	1.5	87.7	113.3	3	2.0	58.8	54.0
4	2.0	151.6	116.7	4	2.5	86.3	56.2
5	3.0	281.8	117.8	5	3.0	114.0	57.9
6	4.0	412.7	117.8	6	3.5	144.2	59.6
7	5.0	543.6	117.8	7	4.0	174.8	62.9
8	6.0	674.4	117.8	8	4.1	181.3	67.4
9	7.0	805.3	117.8	9	4.5	208.5	68.6
10	8.0	936.2	117.8	10	5.0	243.1	69.7
11	9.0	1067.0	117.8	11	5.5	278.2	70.8
12	10.0	1197.9	117.8	12	6.0	313.0	70.8
				13	6.5	349.3	71.9
				14	7.0	385.8	74.2
				15	7.5	423.2	75.3
				16	8.0	460.9	75.3
				17	8.5	498.5	75.3
				18	9.0	536.2	75.3
				19	9.5	573.8	75.3
				20	10.0	611.5	75.3

TABELA 7.2 - ÁREAS E LARGURAS SUPERFICIAIS



Para cálculo da derivada da condutância em relação à profundidade, aplicando-se a regra da cadeia

$$\frac{dK}{dZ} = \frac{\partial K}{\partial B} \frac{dB}{dZ} + \frac{\partial K}{\partial Z} \quad (7.3)$$

e calculando-se as derivadas parciais, chegamos a

$$\frac{dK}{dZ} = r^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{A}{B+2Z} \right)^{\frac{m}{2}} \left\{ \left[ \left( \frac{m}{2} + 1 \right) Z - \frac{m}{2} \cdot \frac{A}{B+2Z} \right] \frac{dB}{dZ} + \left( \frac{m}{2} + 1 \right) B - m \frac{A}{B+2Z} \right\} \quad (7.4)$$

#### - Comprimentos e Declividades dos Trechos

Os comprimentos dos trechos foram obtidos com o auxílio de um curvímetro e um mapa da bacia na escala 1/250.000. Como não existe um levantamento da seção longitudinal do rio, o que nos permitiria obter a declividade a cada  $\Delta x$ , utilizamos a declividade média de cada trecho considerado.

#### - Curvas-Chaves

Como se pode notar observando as curvas-chaves nos postos de medição de vazões em Limoeiro e Paudalho, apresentadas em escala bi-logarítmica nas Figuras (7.4) e (7.5), existe uma tendência de variação linear entre logaritmos de vazões e tirantes, especialmente para valores de descargas altos, naturalmente pelo fato de que foi feita extrapolação. Desta maneira procuramos ajustar, pelo método dos mínimos quadrados, equações do tipo  $Q = a Z^b$  às curvas em questão. Desde que os coeficientes de correlação entre as funções ajustadas e os pontos selecionados nas duas curvas ficaram em torno de 0,99, os ajustes foram considerados bons. As equações são as seguintes:

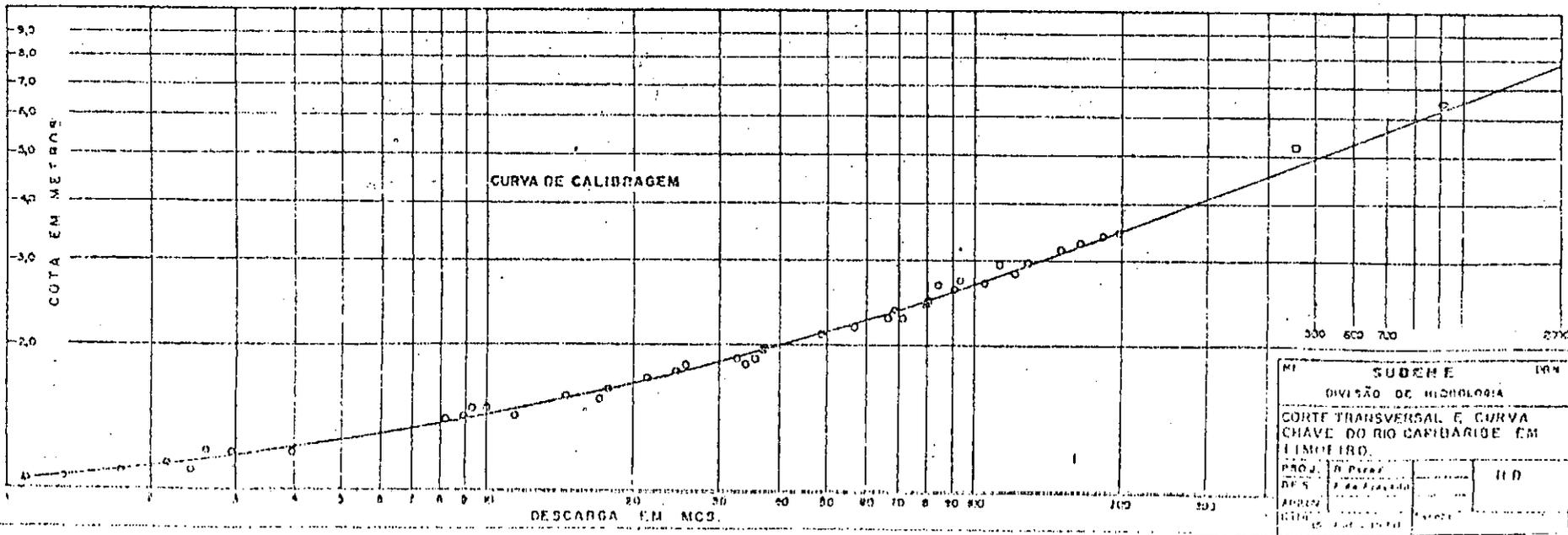
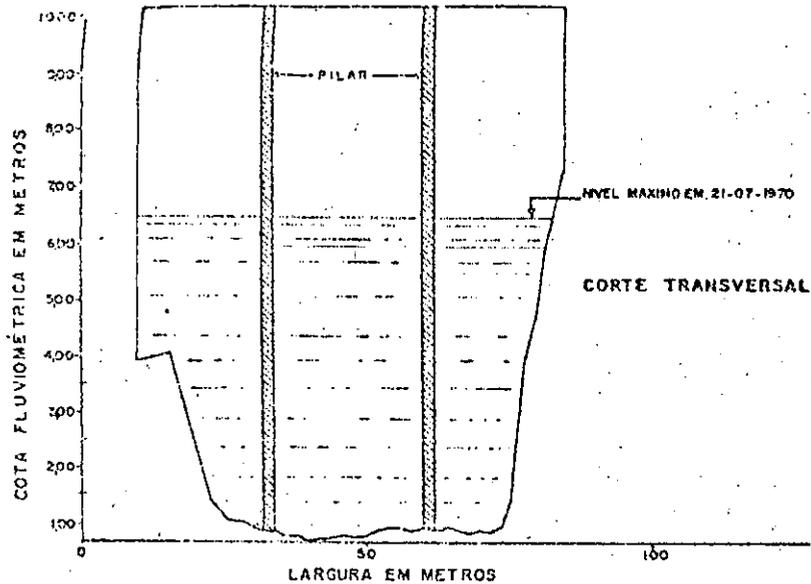


FIGURA 7.4 - SEÇÃO TRANSVERSAL E CURVA-CHAVE EM LIMOEIRO

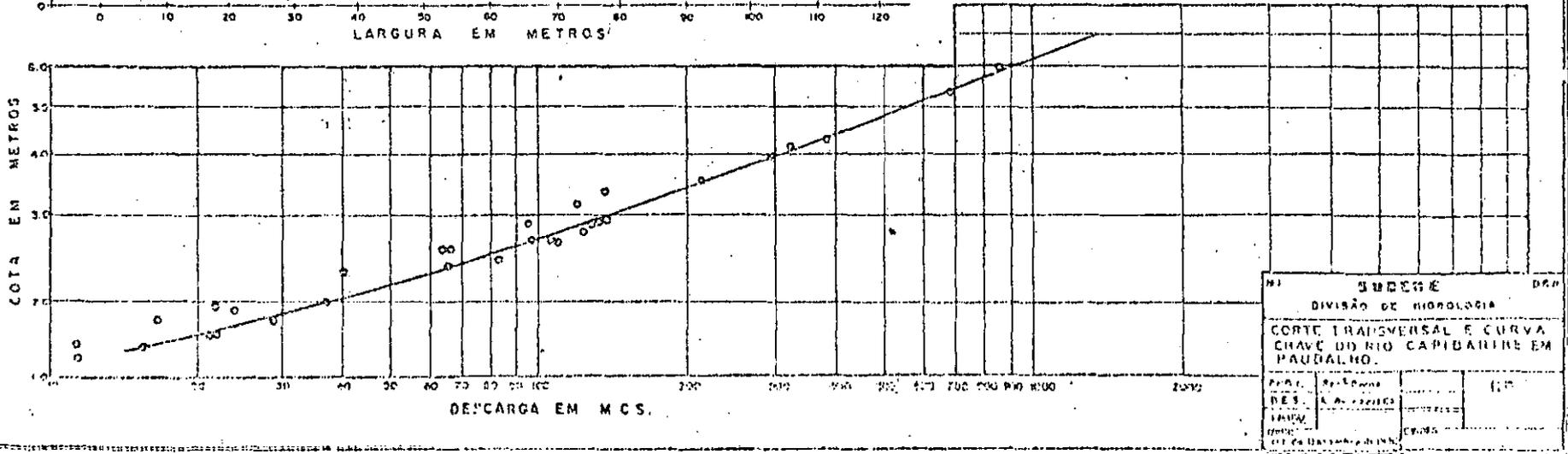
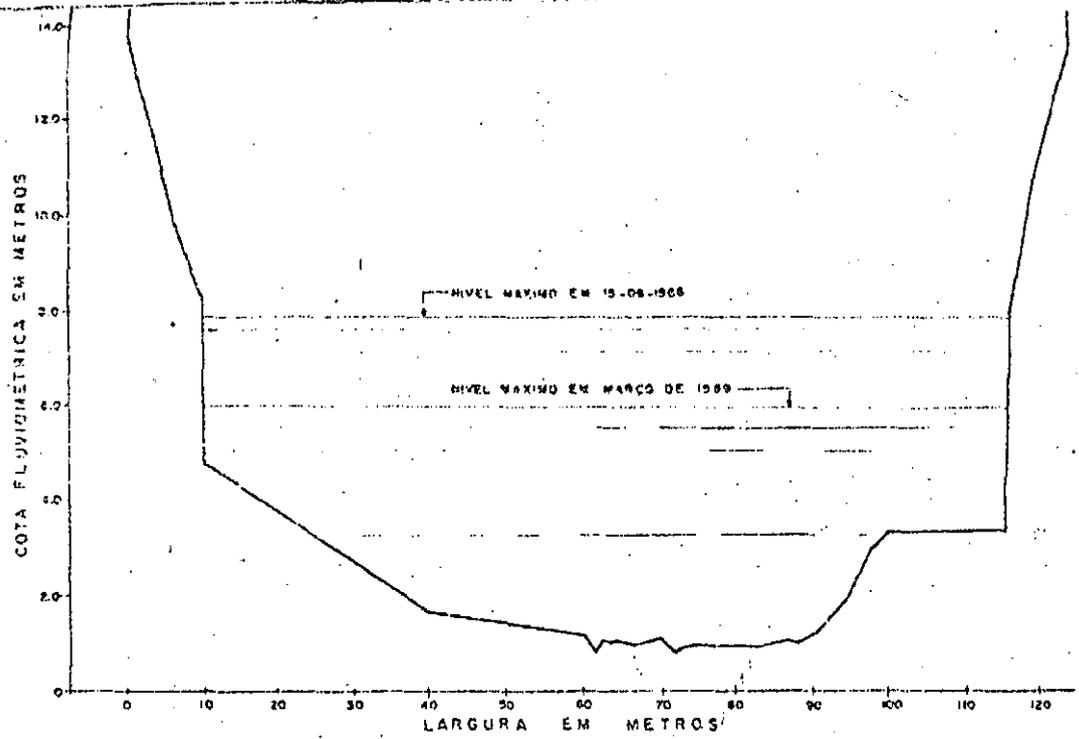


FIGURA 7.5 - SEÇÃO TRANSVERSAL E CURVA-CHAVE EM PAUDALHO

$$\text{Limoeiro: } Q = 4,5392 Z^{2,9591} \quad (7.5)$$

$$\text{Paudalho: } Q = 6,28138 Z^{2,79519} \quad (7.6)$$

sendo  $Q$  a vazão em  $m^3/s$  e  $Z$  o tirante em metros.

#### - Valores Iniciais dos Parâmetros

Ao coeficiente de Manning atribuímos valores iniciais 0,035 a 0,045, compatíveis com as estimativas feitas pela SUDENE. O expoente do raio hidráulico teve seus valores iniciais em cada caso ajustados após 4 ou 5 tentativas, e ao final chegamos à conclusão que, nas nossas aplicações, seu valor inicial deveria ser fixado entre 0,5 e 1,3. A utilização de valores de  $m$  fora deste intervalo acarretou normalmente problemas na convergência dos esquemas numéricos.

A estimativa da contribuição lateral média foi obtida propagando-se cada onda de cheia sem descarga lateral e com os parâmetros de atrito fixos em seus valores iniciais. Do hidrograma real na seção de jusante e deste hidrograma propagado obtivemos por diferença o volume de contribuição do trecho, o qual, distribuído ao longo do percurso e da duração da cheia em questão, permitiu-nos obter uma estimativa da contribuição lateral média para cada trecho do rio em cada cheia. Tais valores foram compatíveis com as estimativas feitas pela SUDENE.

#### - Estado Inicial

Os hidrogramas foram selecionados de maneira que, para  $t = 0$ , não houvesse diferença sensível entre as descargas e tirantes registrados nas duas seções limítrofes. Desta maneira achamos suficiente obter vazões e tirantes nas seções interme

diárias por meio de interpolação linear entre os valores extremos.

#### - Condições de fronteira

Para a fronteira de montante utilizamos o hidrograma das vazões afluentes e para a de jusante, uma curva-chave.

### 7.4 - CARACTERÍSTICAS DO MODELO

#### - Intervalos de Discretização

O intervalo de tempo  $\Delta t$  foi fixado em uma hora, igual ao intervalo segundo o qual são registrados vazões e tirantes nas seções de medição. Esta é a condição ideal, visto que não necessitamos fazer nenhuma interpolação na condição de fronteira inicial, ou seja, nas vazões afluentes. Além disto,  $\Delta t=1h$  é um intervalo de tempo suficientemente pequeno para que os resultados tenham a confiabilidade necessária.

A escolha do intervalo de comprimento de trecho  $\Delta x$  deve ser feita de maneira a não encobrir singularidades do rio, como sejam meandros, variações bruscas na seção transversal, mudanças acentuadas na declividade do trecho, etc. No entanto, como já dissemos anteriormente, a ausência de dados não nos permite fazer tal análise. Desta forma fixamos o número de seções de cálculo nos dois trechos do rio Capibaribe estudados em 30,20 e 16 e comparamos os resultados, que pouco diferiram um do outro. Assim optamos por 16 seções de cálculo igualmente espaçadas, correspondentes a intervalos de 5,1 Km e 2,5 Km, respectivamente nos trechos Toritama-Limoeiro e Limoeiro-Paudalho.

Convém ressaltar que os intervalos  $\Delta t$  e  $\Delta x$  não necessitam ser obrigatoriamente constantes. O intervalo  $\Delta x$ , por

exemplo, pode variar em função das características do rio, no intuito de representar trechos de maior uniformidade.

- Coefficiente Ponderador do Esquema de Preissmann

Conforme discutimos na seção (3.2), este parâmetro deve estar compreendido no intervalo  $0,6 \leq \theta \leq 1,0$ . Testamos diversos valores entre 0,65 e 0,90 e não obtivemos mudanças significativas nos resultados. Na maior parte das aplicações fixamo-nos no valor  $\theta = 0,7$ .

- Condições de Convergência

Como já foi dito antes, os valores das descargas e tirantes, em todas as seções de cálculo, correspondentes ao instante  $i + 1$ , são obtidos através do método iterativo de Newton Raphson. Consideramos que o esquema converge sempre que os desvios percentuais dos valores das incógnitas em uma iteração  $k$  em relação aos obtidos na iteração  $k - 1$  não ultrapassem 1%. Satisfeita esta condição, consideramos os parâmetros calibrados sempre que os desvios percentuais das vazões calculadas em relação às medidas, na seção de jusante, não ultrapassem 5%.

- Incrementos dos Valores dos Parâmetros

Para estimar as derivadas da função objetivo em relação aos parâmetros a calibrar, como foi discutido no passo 2 do algoritmo de calibração apresentado na seção (6.4), faz-se necessário incrementar os parâmetros de pequenas quantidades e determinar a variação correspondente no valor da função objetivo. Estes incrementos devem ser pequenos o suficiente para que a razão entre diferenças finitas aproxime-se da derivada no ponto. Por outro lado, valores pequenos demais podem levar a resultados

falsos em virtude de erros de aproximação no cálculo da função objetivo. Por tentativas concluímos que incrementos da ordem de 0,1 a 1% do atual valor do parâmetro são aceitáveis.

Todos estes dados de entrada são apresentados nos quadros correspondentes ao estudo de cada cheia.

#### 7.5 - COMPUTADOR E SUB-PROGRAMAS UTILIZADOS

Os resultados que serão apresentados a seguir foram obtidos utilizando-se o computador BURROUGHS B/6700 do Núcleo de Computação Eletrônica da UFRJ. A resolução dos sucessivos sistemas lineares a que se reduz o método iterativo de Newton-Raphson foi conseguida através da subrotina GELB do SSP<sup>7</sup> (Scientific Subroutine Package). Subrotinas eficientes utilizando o algoritmo de Fletcher-Reeves e o método de busca unidirecional DSC-Powell podem ser obtidas no SSP<sup>7</sup> e em Himmelblau<sup>6</sup>.

#### 7.6 - APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Mostramos a seguir os resultados obtidos na tentativa de reprodução das cheias ocorridas no rio Capibaribe em março de 1969 e julho de 1970. Os trechos do rio selecionados para o acompanhamento das ondas de cheia foram Toritama-Limoeiro e Limoeiro-Paudalho. O corredor Paudalho-São Lourenço não foi utilizado em virtude da presença de dois importantes afluentes, os rios Tapacurã e Goitã, que exigiriam o desenvolvimento de um modelo de junção de rios, pois, dada a importância de sua contribuição, suas afluições não poderiam ser enquadradas na descarga lateral. Tal modelo pode ser obtido nos trabalhos de Stoker<sup>14</sup> e Araújo Silva<sup>2</sup>. Como o objetivo primordial deste trabalho não é o estudo da bacia do Capibaribe e sim a aplicabilidade do modelo de iden-

tificação de parâmetros, abstivemo-nos de analisar o caso da junção. Acreditamos, no entanto, que isto possa ser feito sem maiores problemas.

#### - Aplicação do Modelo de Calibração a Parâmetros Constantes

Os quadros (7.6), (7.7) e (7.8) mostram os dados de entrada e os resultados da aplicação do modelo de calibração a parâmetros constantes à cheia de março de 1969 no trecho Limoeiro-Paudalho. O hidrograma apresentado corresponde a 6 iterações e não satisfaz à condição de convergência. Como se pode constatar, o ajuste dos pontos do hidrograma simulado ao medido não é bom, após cerca de 50 minutos de processamento. Este alto tempo deve-se ao fato de que qualquer avaliação da função objetivo, seja para a estimativa das derivadas, seja na busca unidirecional, necessita de simulação com os valores atuais dos parâmetros ao longo de todo o período. Cada simulação, para uma cheia de 75 horas de duração, consome, em média, 1 min 45 s de tempo de processamento.

Acompanhando os passos da busca durante as diversas iterações, concluímos que a falha se deve não ao processo utilizado, mas à impossibilidade de se representar os parâmetros por valores médios. O algoritmo de identificação levou-nos efetivamente à obtenção de mínimos da função objetivo. Tais mínimos, no entanto, estiveram sempre muito superiores ao valor máximo admitido como tolerância, correspondente a um afastamento de 5% do hidrograma medido.

Apesar deste insucesso, acreditamos que em alguns casos o processo de calibração com parâmetros constantes venha a fornecer resultados satisfatórios, na dependência das caracterís

```

*****
*
*                               DADOS FISICOS DE ENTRADA DO MODELO
*
*                               2.79519
* EQUACAO DA CURVA-CHAVE EM PAUDALHO - Q = 6.28138 . Z
*                               (M3/S)      (4)
*
*                               I- COEFICIENTE DE MANNING = 0.034
* ESTIMATIVAS INICIAIS I
*   DOS VALORES DOS I- EXPOENTE DO RAIO HIDRAULICO = 1.30
*   PARAMETROS I
*                               I- DESCARGA LATERAL = 0.00178 M3/S/M
*
* COMPRIMENTO DO TRECHO DO RIO = 37500. M
*
* DECLIVIDADE MEDIA DO TRECHO = 0.0018 M/M
*
* DURACAO DA CHEIA = 75 HORAS
*
*****

```

QUADRO 7.6 - DADOS DA ENCHENTE DE 1969

```

*****
*
*          DADOS MATEMATICOS DE ENTRADA DO MODELO
*
*          I - COEFICIENTE DE MANNING = -0.00005
* INCREMENTOS DADOS          I
*   AGS VALORES DJS          I - EXPOENTE DO RAIO HIDRAULICO = -0.01
*   PARAMETROS              I
*          I - DESCARGA LATERAL = 0.0002 M3/S/M
*
* NUMERO DE SECOES DE CALCULO = 16
*
* INTERVALO DE DISCRETIZACAO DO TEMPO = 3600. SEGUNDOS
*
* COEFICIENTE DO ESQUEMA IMPLICITO DE PREISSMANN = 0.90
*
*          I - EPS:TOLERANCIA RELATIVA = .1E-05
* PARAMETROS DE ENTRADA I
* DA SUBROTINA GELB      I - NJ:NUMERO DE COLUNAS DE B(SISTEMA A.X=B) = 1
* (RESOLVE OS SISTEMAS I
* DE EQUACOES LINEARES) I - NOS:NUMERO DE CODIAGONAIS SUPERIORES = 2
*          I
*          I - NDI:NUMERO DE CODIAGONAIS INFERIORES = 2
*
* TOLERANCIA RELATIVA ADMITIDA NO PROCESSO ITERATIVO DE NEWTON-RAPHSON = 0.01
*-----
* TOLERANCIA RELATIVA ADMITIDA NO PROCESSO DE CALIBRACAO = 0.05
*
*****

```

QUÁDRO 7.7 - DADOS DO MODELO

ARACAPANGENSIS

PROPAGACAO DE ONDA DE CHEIA NO RIO CAPIBARIBE, EM PERNAMBUCO

ENCHENTE OCORRIDA ENTRE 14/ 3/1969 E 17/ 3/1969

TRECHO LINDEIRO - FAUDALMO

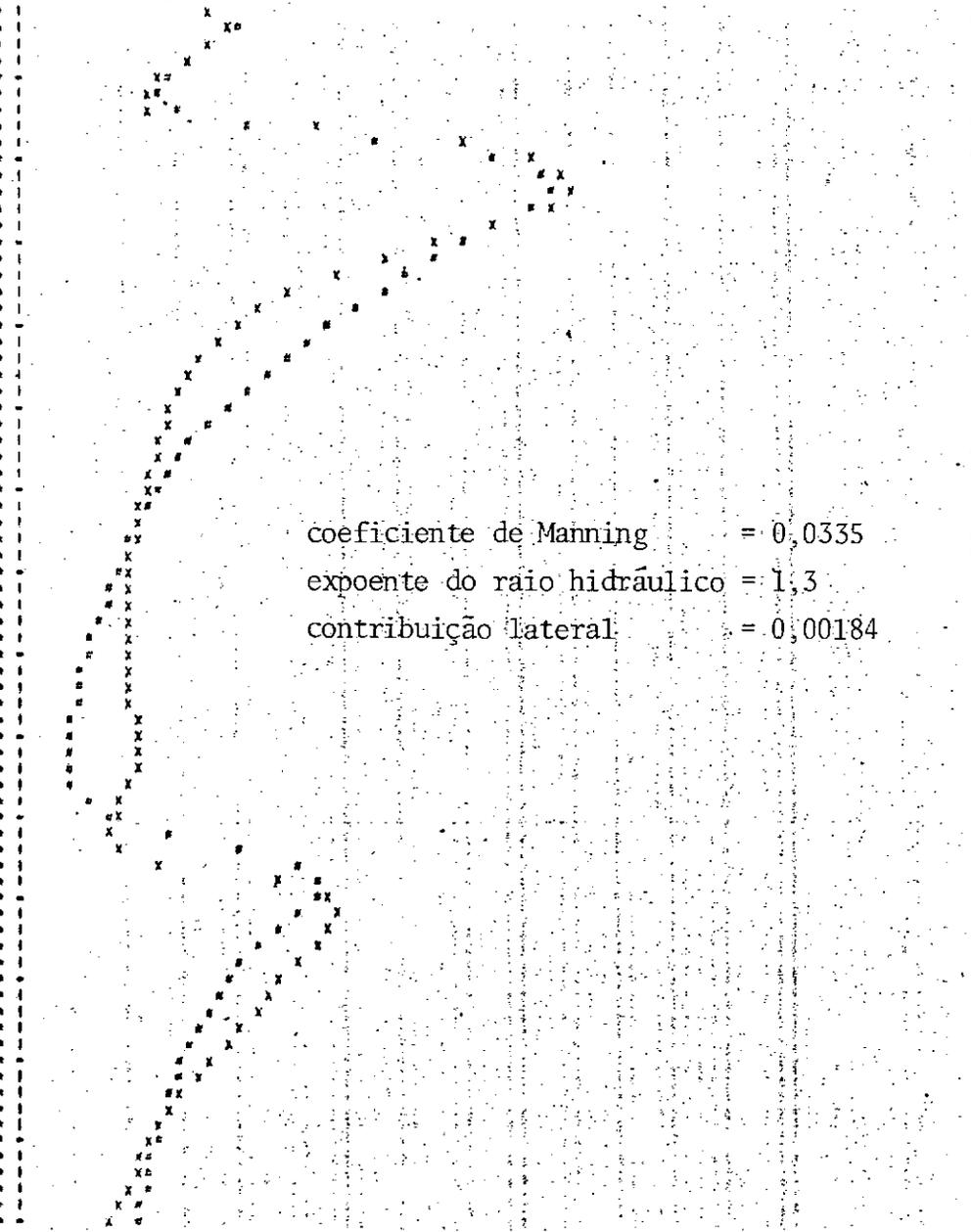
X = HIDROGRAFIA DE JUSANTE, MEDIDA  
 \* = HIDROGRAFIA DE JUSANTE, SIMULADA

TEMPO (HR) MONI. JUSANTE

MED. SIMU.

75 15. 225 300 375 450 525 600 675 750 825 900 975 1050 1125 1200 1275 1350 1425 1500

1	199	370	370
2	174	395	412
3	167	392	473
4	175	332	401
5	310	294	310
6	521	277	290
7	611	276	324
8	934	530	431
9	880	752	521
10	831	867	605
11	774	947	680
12	737	923	309
13	669	891	680
14	600	794	809
15	571	710	741
16	530	635	715
17	475	563	672
18	440	494	631
19	404	402	590
20	369	409	551
21	331	346	515
22	301	359	482
23	278	334	451
24	250	320	420
25	230	313	392
26	223	303	367
27	206	290	344
28	193	250	324
29	179	279	307
30	169	272	292
31	159	266	279
32	140	265	265
33	132	259	253
34	125	254	243
35	119	251	232
36	107	247	222
37	103	240	212
38	98	242	201
39	93	242	191
40	87	244	184
41	83	240	177
42	80	247	172
43	80	252	160
44	82	258	161
45	97	261	157
46	121	265	159
47	202	259	159
48	320	249	164
49	431	237	162
50	520	228	219
51	530	220	304
52	495	229	417
53	450	240	497
54	390	265	535
55	300	302	533
56	310	360	500
57	365	395	470
58	291	530	444
59	283	503	415
60	272	479	343
61	262	455	375
62	251	435	361
63	244	418	349
64	235	390	330
65	220	365	320
66	220	347	320
67	210	320	311
68	208	315	303
69	202	293	290
70	193	281	290
71	187	265	280
72	178	250	277
73	175	242	271
74	170	232	264
75	164	222	250



coeficiente de Manning = 0,0335  
 expoente do raio hidráulico = 1,3  
 contribuição lateral = 0,00184

QUADRO 7.8 - CALIBRAÇÃO A PARÂMETROS CONSTANTES

ticas físicas do trecho de rio considerado e da cheia em questão.

Deve-se notar que os resultados descritos foram obtidos utilizando-se uma esquematização geométrica do canal que pode ser muito diferente da sua configuração real, e isto deve-se constituir numa importante causa de erro.

- Aplicação do Modelo de Calibração a Parâmetros Variáveis no Tempo

Os quadros (7.9) a (7.11) mostram os dados de entrada e os hidrogramas, registrado e calculado, em Limoeiro, correspondentes ao acompanhamento da cheia de março de 1969 no trecho Toritama-Limoeiro. O quadro (7.12) apresenta os valores dos três parâmetros, coeficiente de Manning, expoente do raio hidráulico e contribuição lateral, bem como as vazões calculadas, em cada instante de cálculo. Para efeito de melhor visualização os pontos foram unidos por segmentos de retas.

Os quadros (7.13) a (7.16) mostram dados e resultados equivalentes, correspondentes à mesma cheia, porém no trecho Limoeiro-Paudalho.

Conforme se pode constatar através dos quadros (7.11) e (7.15), os hidrogramas nas seções de Limoeiro e Paudalho foram eficientemente reproduzidos, ao contrário da calibração a parâmetros constantes anteriormente apresentada. Além do mais, tais resultados foram obtidos com tempos de processamento na faixa de 3,5 a 6 minutos, enquanto que no caso anterior foram necessários em média 50 minutos para que fossem executadas seis iterações no algoritmo.

A análise da variação com o tempo dos parâmetros nos levou às seguintes conclusões:

1) a variação no tempo do expoente do raio hidráulico  $m$  é sem-

```

*****
*
*                               DADOS FISICOS DE ENTRADA DO MODELO
*
*                               2.95910
* EQUACAO DA CURVA-CHAVE EM LIMOEIRO - Q = 4.53920 . Z
*                               (M3/S)           (M)
*
*                               1- COEFICIENTE DE MANNING = 0.035
* ESTIMATIVAS INICIAIS I
*   DOS VALORES DOS I- EXPOENTE DO RAIO HIDRAULICO = 0.60
*   PARAMETROS I
*   I- DESCARGA LATERAL = 0.00076 M3/S/M
*
* COMPRIMENTO DO TRECHO DO RIO = 76500. M
*
* DECLIVIDADE MEDIA DO TRECHO = 0.0031 M/M
*
* DURACAO DA CHEIA = 74 HORAS
*
*****

```

QUADRO 7.9 - DADOS DA ENCHENTE DE 1969, TRECHO TORITAMA-LIMOEIRO

```

*****
*
*           DADOS MATEMATICOS DE ENTRADA DO MODELO
*
*           |- COEFICIENTE DE MANNING = -0.00005
* INCREMENTOS DADOS |
*   AOS VALDRES DOS |- EXPOENTE DO RAI0 HIDRAULICO = -0.01
*   PARAMETROS      |
*           |- DESCARGA LATERAL = 0.0001 M3/S/M
*
* NUMERO DE SECOES DE CALCULO = 16
*
* INTERVALO DE DISCRETIZACAO DO TEMPO = 3600. SEGUNDOS
*
* COEFICIENTE DO ESQUEMA IMPLICITO DE PREISSMANN = 0.70
*
*           |- EPS:TOLERANCIA RELATIVA = .1E-05
* PARAMETROS DE ENTRADA |
* DA SUBROTINA GELB    |- NJ:NUMERO DE COLUNAS DE B(SISTEMA A.X=B) = 1
* (RESOLVE OS SISTEMAS |
* DE EQUACOES LINEARES) |- NDS:NUMERO DE CODIAGONAIS SUPERIORES = 2
*           |
*           |- NDI:NUMERO DE CODIAGONAIS INFERIORES = 2
*
* _TOLERANCIA RELATIVA ADMITIDA NO PROCESSO ITERATIVO DE NEWTON-RAPHSON = 0.01
*
* TOLERANCIA RELATIVA ADMITIDA NO PROCESSO DE CALIBRACAU = 0.05
*
*****

```

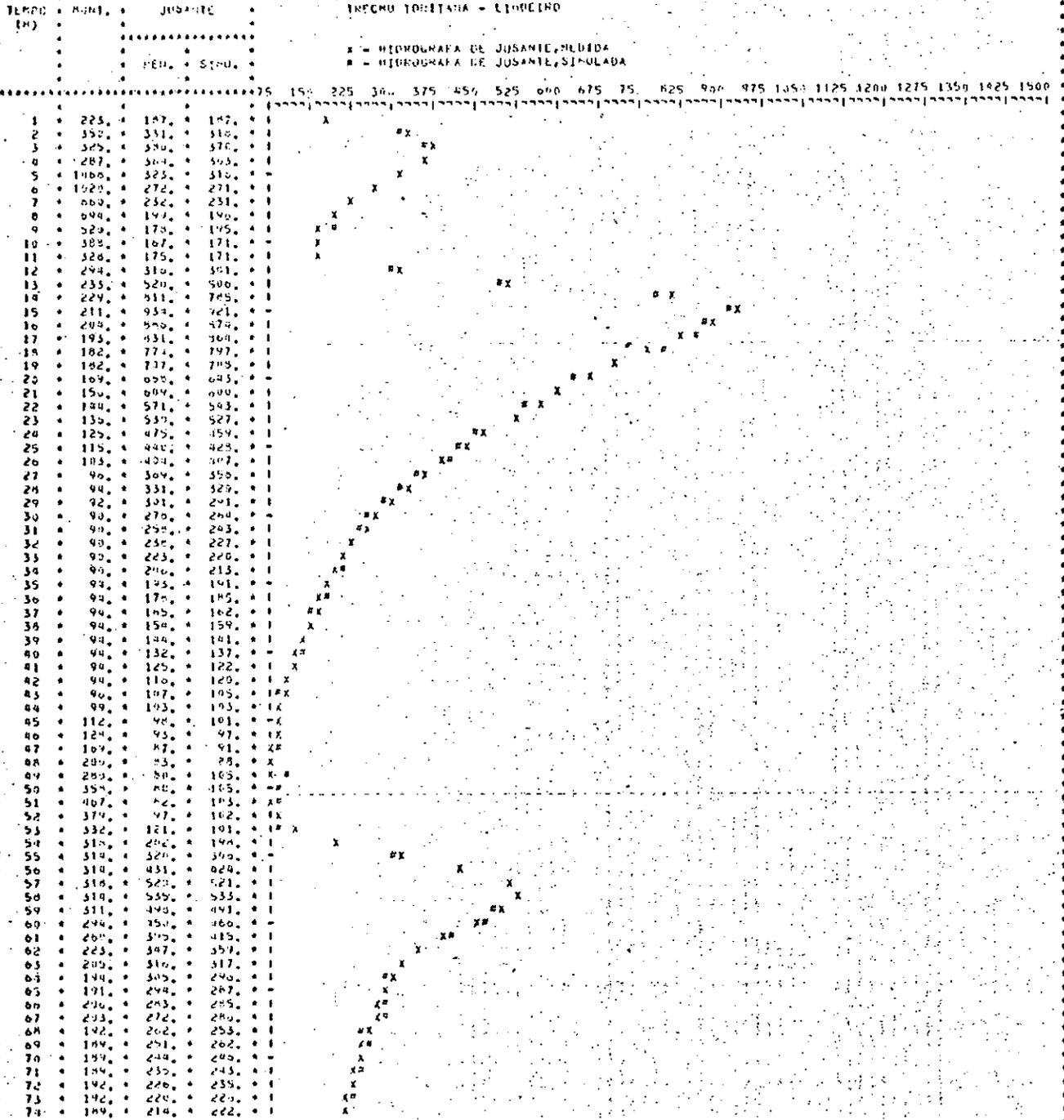
DESCARGAS (m³/s)

PROPAGACAO DE ONDA DE CHEIA NO RIO CAMARIBE, EM PENHABUÇO

ENCHENTE OCORRIDA ENTRE 18/ 3/1969 E 17/ 3/1969

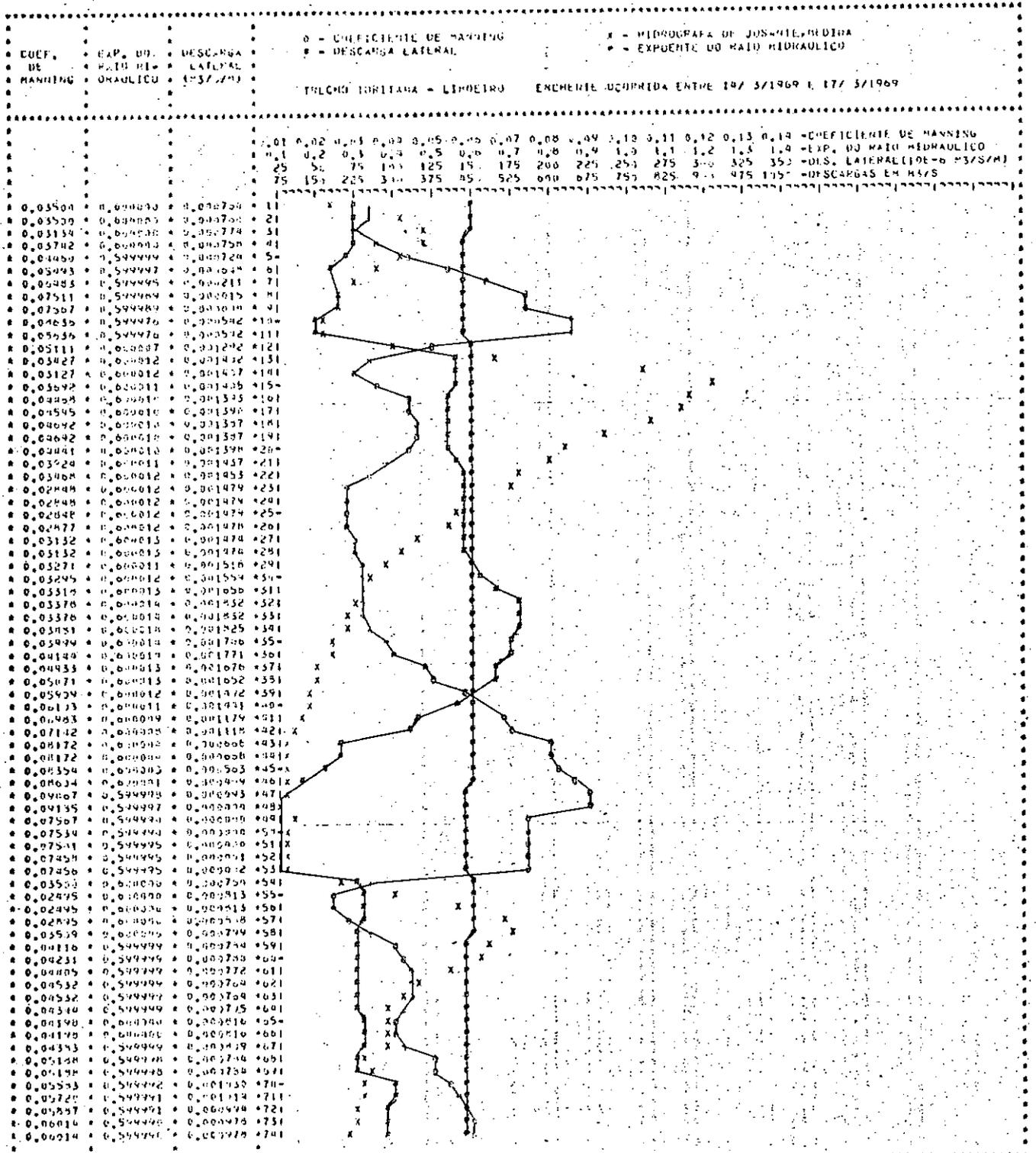
INTECNU TOBITANA - LIMOIRO

X = HIDROGRAFA DE JUSANTE, PLUIDA  
 ■ = HIDROGRAFA DE JUSANTE, SIMULADA



QUADRO 7.11

HIDROGRAMAS SIMULADO E REGISTRADO EM LIMOIRO NA ENCHENTE DE 1969



QUADRO 7.12  
VARIACAO DOS PARAMETROS NO TEMPO



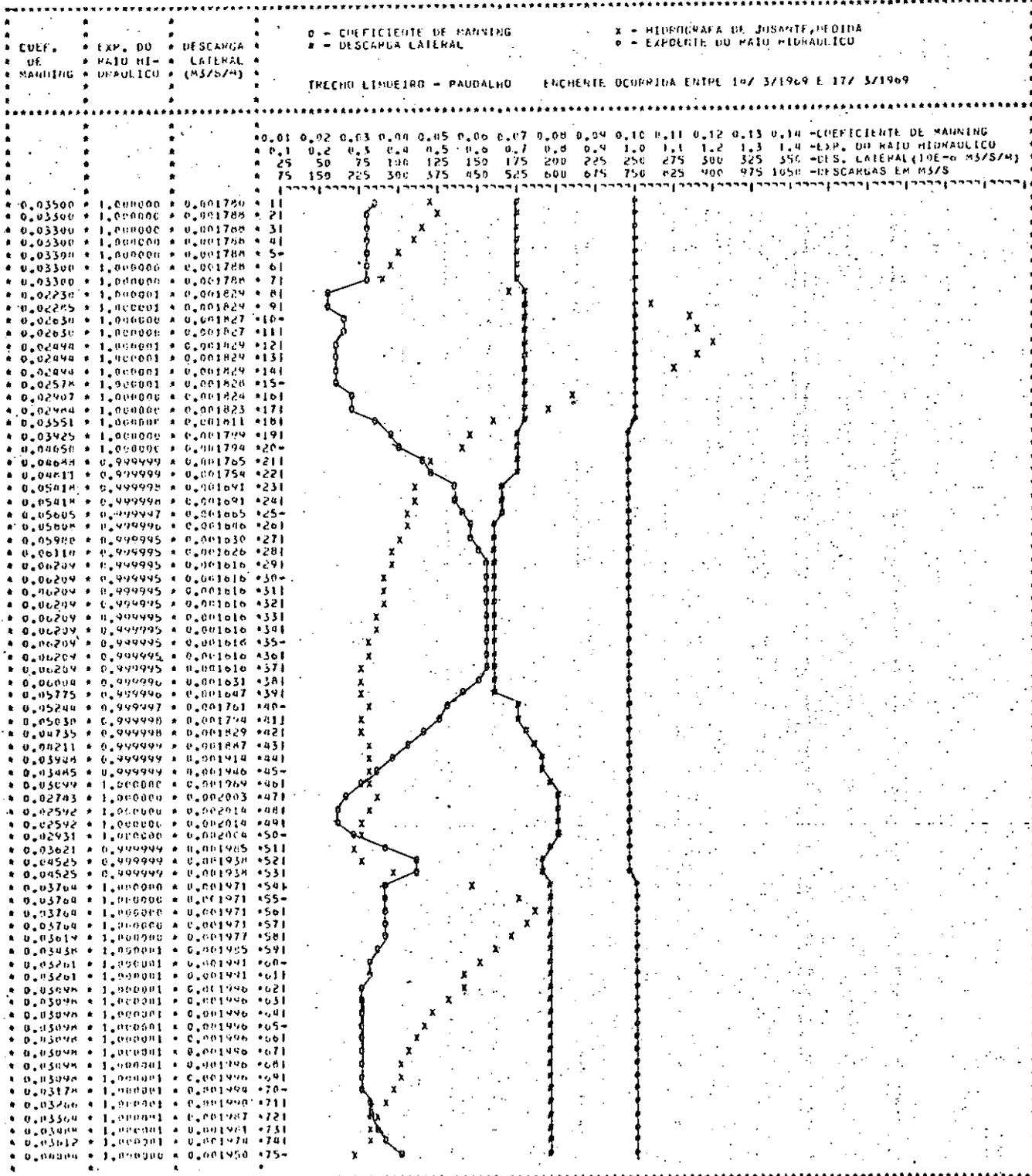
```

*****
*
*          DADOS MATEMATICOS DE ENTRADA DO MODELO
*
*          I- COEFICIENTE DE MANNING = -0.00005
* INCREMENTOS DADOS      |
*   AOS VALORES DOS     |
*   PARAMETROS          |
*          I- DESCARGA LATERAL = 0.0001 M3/S/M
*
* NUMERO DE SECOES DE CALCULO = 16
*
* INTERVALO DE DISCRETIZACAO DO TEMPO = 3600. SEGUNDOS
*
* COEFICIENTE DO ESQUEMA IMPLICITO DE PREISSMANN = 0.70
*
*          I- EPS:TOLERANCIA RELATIVA = .1E-05
* PARAMETROS DE ENTRADA |
* DA SUBROTINA GELB     |
* (RESOLVE OS SISTEMAS |
* DE EQUACOES LINEARES) |
*          I- NDS:NUMERO DE CODIAGONAIS SUPERIORES = 2
*          |
*          I- NDI:NUMERO DE CODIAGONAIS INFERIORES = 2
*
* TOLERANCIA RELATIVA ADMITIDA NO PROCESSO ITERATIVO DE NEWTON-RAPHSON = 0.01
*
* TOLERANCIA RELATIVA ADMITIDA NO PROCESSO DE CALIBRACAO = 0.05
*
*****

```

QUADRO 7.14 - DADOS DO MODELO





QUADRO 7.16

- VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS NO TEMPO

pre inferior a 1/1000 do valor inicial, conforme se pode constatar observando os valores registrados nos quadros (7.12) e (7.16). Atribuindo-se diversos valores iniciais ao parâmetro  $m$ , observamos que, para qualquer valor inicial na faixa  $0,5 \leq m \leq 1$ , este parâmetro permaneceu praticamente constante durante todo o tempo de simulação. Fora desta faixa apareceram normalmente problemas de convergência;

- 2) de modo geral, a descarga lateral apresentou-se mais alta nos instantes correspondentes à passagem das ondas de cheia e mais baixa nas recessões. Constatamos, no entanto, que sua variação com o tempo é influenciada tanto pelo valor inicial que lhe é atribuído como pelo valor inicial do expoente do raio hidráulico  $m$ . A Figura (7.17) mostra a variação da contribuição lateral no tempo, para diferentes valores iniciais, na cheia de março de 1969, trecho Limoeiro-Paudalho;
- 3) o coeficiente de Manning apresentou, nos casos estudados, uma tendência geral de assumir valores mais baixos com o crescimento das vazões, crescendo, à medida que estas baixavam, até um valor bastante alto, para a seguir novamente ter seu valor reduzido. Testes feitos com diferentes valores iniciais de  $n$  levaram à mesma tendência de variação deste parâmetro com o tempo conforme se pode constatar na Fig. (7.18).

A influência do expoente do raio hidráulico sobre o coeficiente de Manning é mostrada na Fig. (7.19). Como se pode constatar, para maiores valores de  $m$  correspondem maiores valores do coeficiente de Manning, o que é coerente com a expressão da perda de carga.

Em função de tais considerações, chegamos à conclusão de que a calibração da descarga lateral, considerando-se a sua variação no tempo, não fornece resultados confiáveis. Por outro lado, o expoente do raio hidráulico  $m$ , visto que apresenta variação no tempo tão insignificante, pode ser considerado constante.

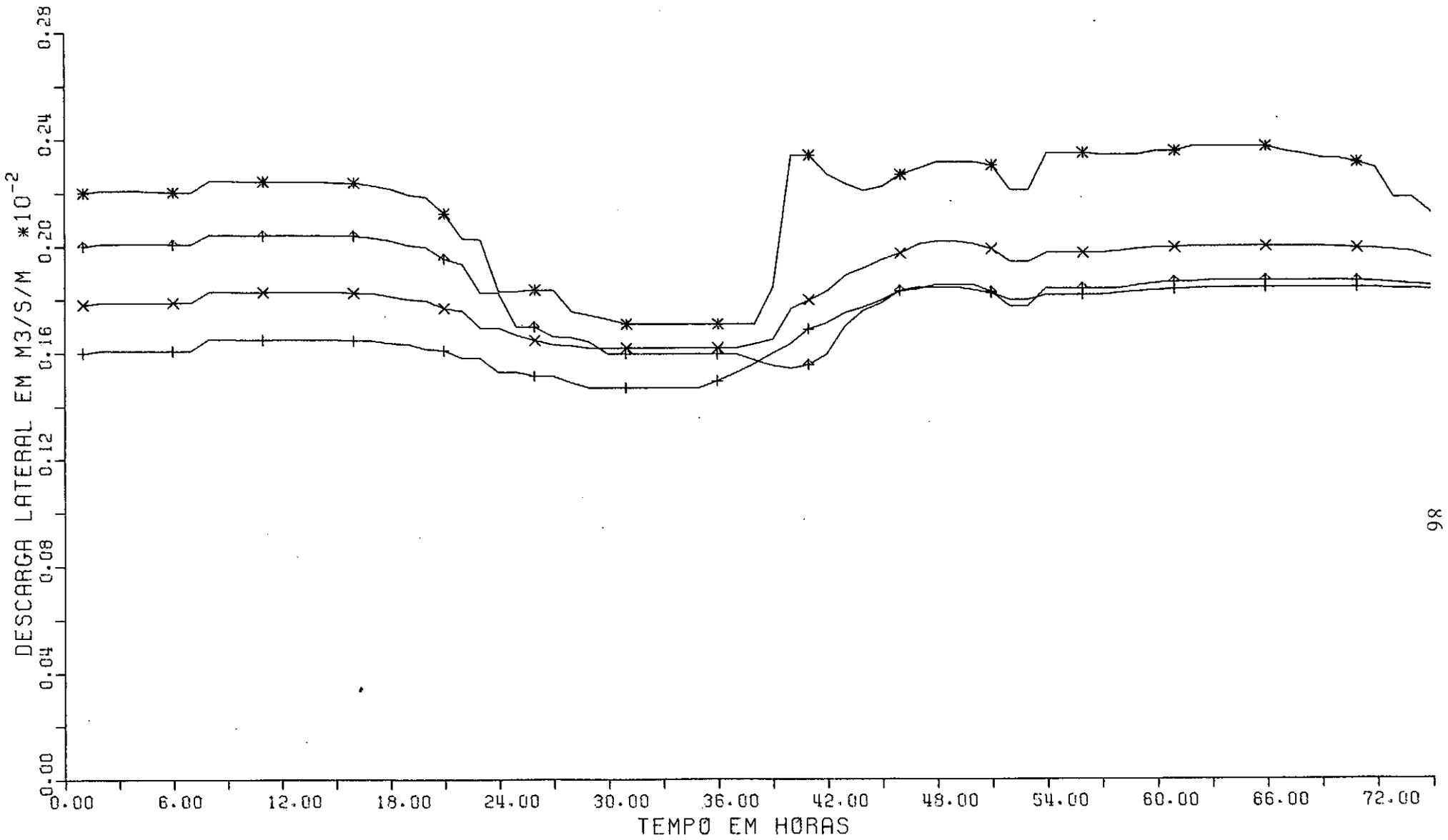


FIGURA 7.17 - COMPORTAMENTO DA CONTRIBUIÇÃO LATERAL PARA DIFERENTES VALORES INICIAIS

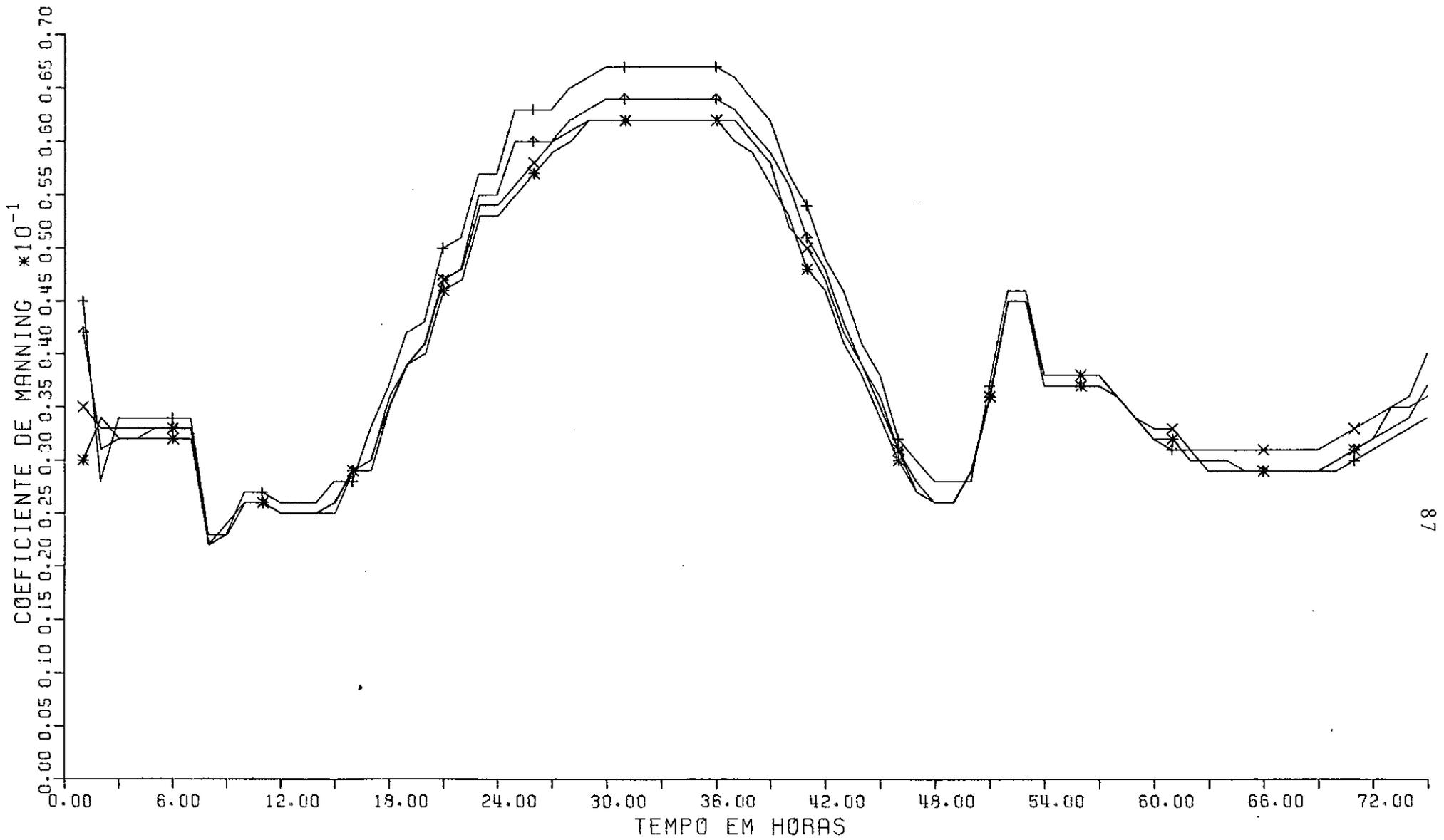


FIGURA 7.18 - COMPORTAMENTO DO COEFICIENTE DE MANNING PARA DIFERENTES VALORES INICIAIS

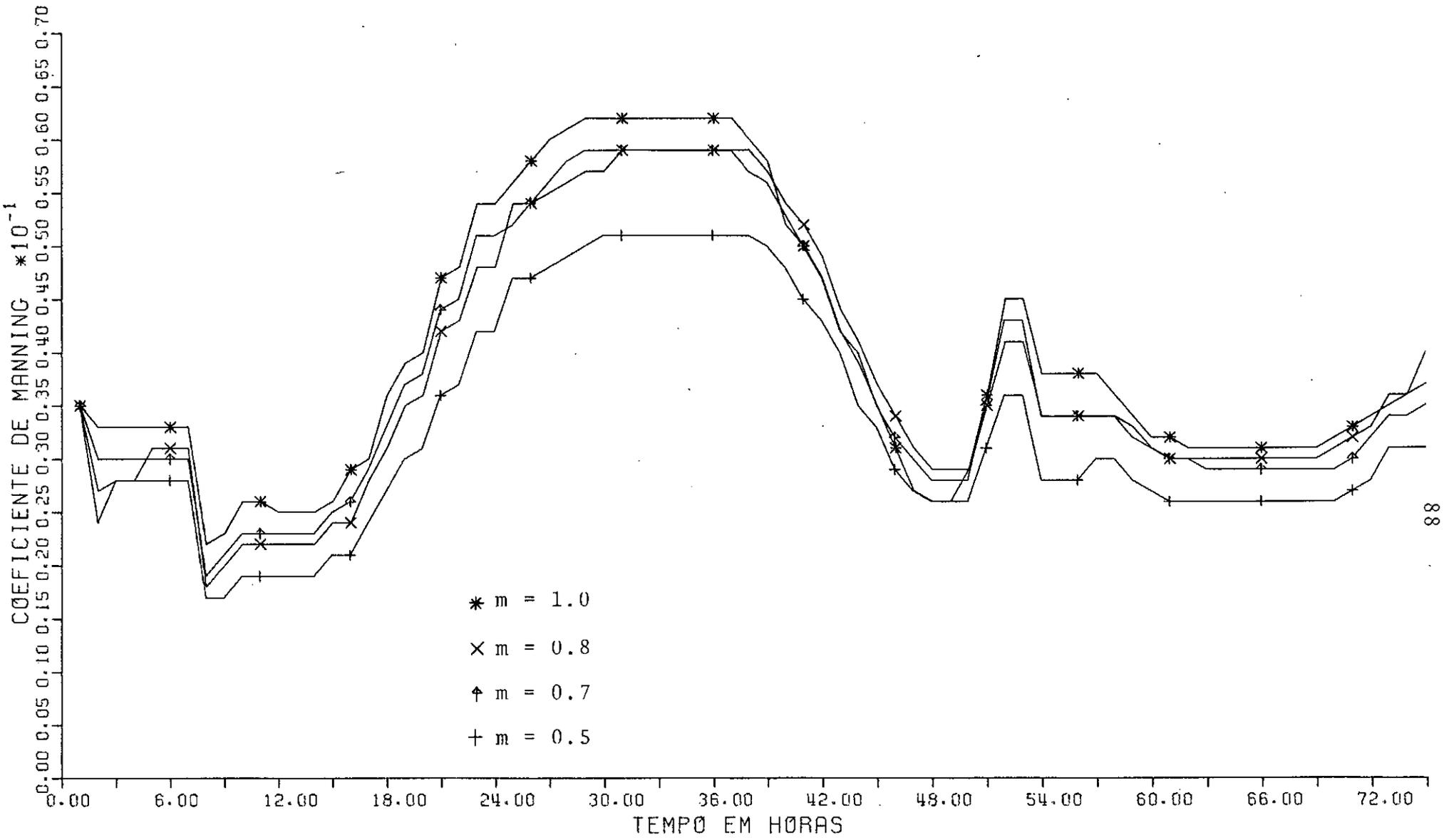


FIGURA 7.19 - INFLUENCIA DO EXPOENTE DO RAI0 HIDRÁULICO SOBRE O COEFICIENTE DE MANNING

Com base nestas conclusões apresentamos nos quadros (7.20) e (7.21) os hidrogramas e os valores dos parâmetros correspondentes à cheia de 1969, trecho Limoeiro-Paudalho, onde o único parâmetro a calibrar no algoritmo foi o coeficiente de Manning. O parâmetro  $m$  e a contribuição lateral foram considerados constantes, atribuindo-se a esta o valor médio calculado inicialmente.

Comparando este último resultado àquele onde os três parâmetros foram considerados variáveis, constatamos que o coeficiente de Manning apresentou a mesma tendência e praticamente assumiu os mesmos valores. Isto justifica nossa decisão de considerá-lo como o único parâmetro a calibrar automaticamente.

Apresentamos, por fim, os resultados relativos à cheia de julho de 1970. Deixamos a sua apresentação por último em virtude do fato de que ela apresenta uma característica que dificulta sensivelmente o trabalho de calibração. Conforme se pode constatar através da Figura (7.22), que mostra os hidrogramas registrados em Limoeiro e Paudalho, existiu uma grande contribuição no trecho. Esta contribuição foi devida à ocorrência de fortes chuvas em todo o corredor Limoeiro-Paudalho, bem como na bacia do Cotunguba, um afluente do rio Capibaribe neste corredor, no qual não existe nenhum posto fluviométrico.

Para que se possa ter uma idéia da importância destas contribuições nesta cheia, a estimativa dos técnicos da SUDENE<sup>11</sup> para a contribuição do Cotunguba e do trecho na formação da descarga máxima em Paudalho ( $1320 \text{ m}^3/\text{s}$ ), foi cerca de  $500 \text{ m}^3/\text{s}$ , aproximadamente 40% do total.

Em obediência às conclusões a que chegamos no estudo da cheia anterior, consideramos o coeficiente de Manning co

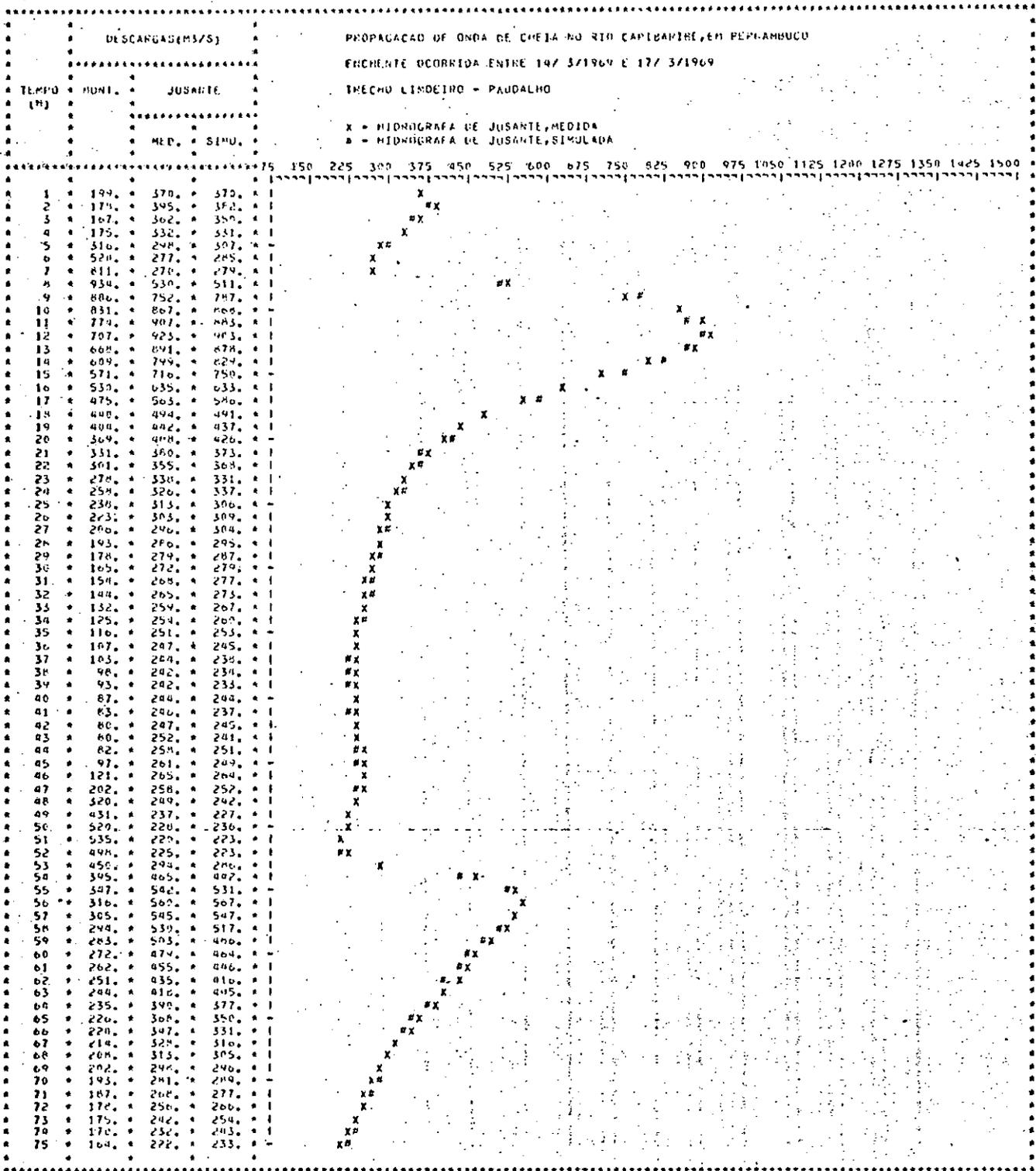


FIGURA 7.20 - HIDROGRAMAS SIMULADO E REGISTRADO EM PAUDALHO, COM APENAS O COEFICIENTE DE MANNING VARIANDO NO TEMPO.



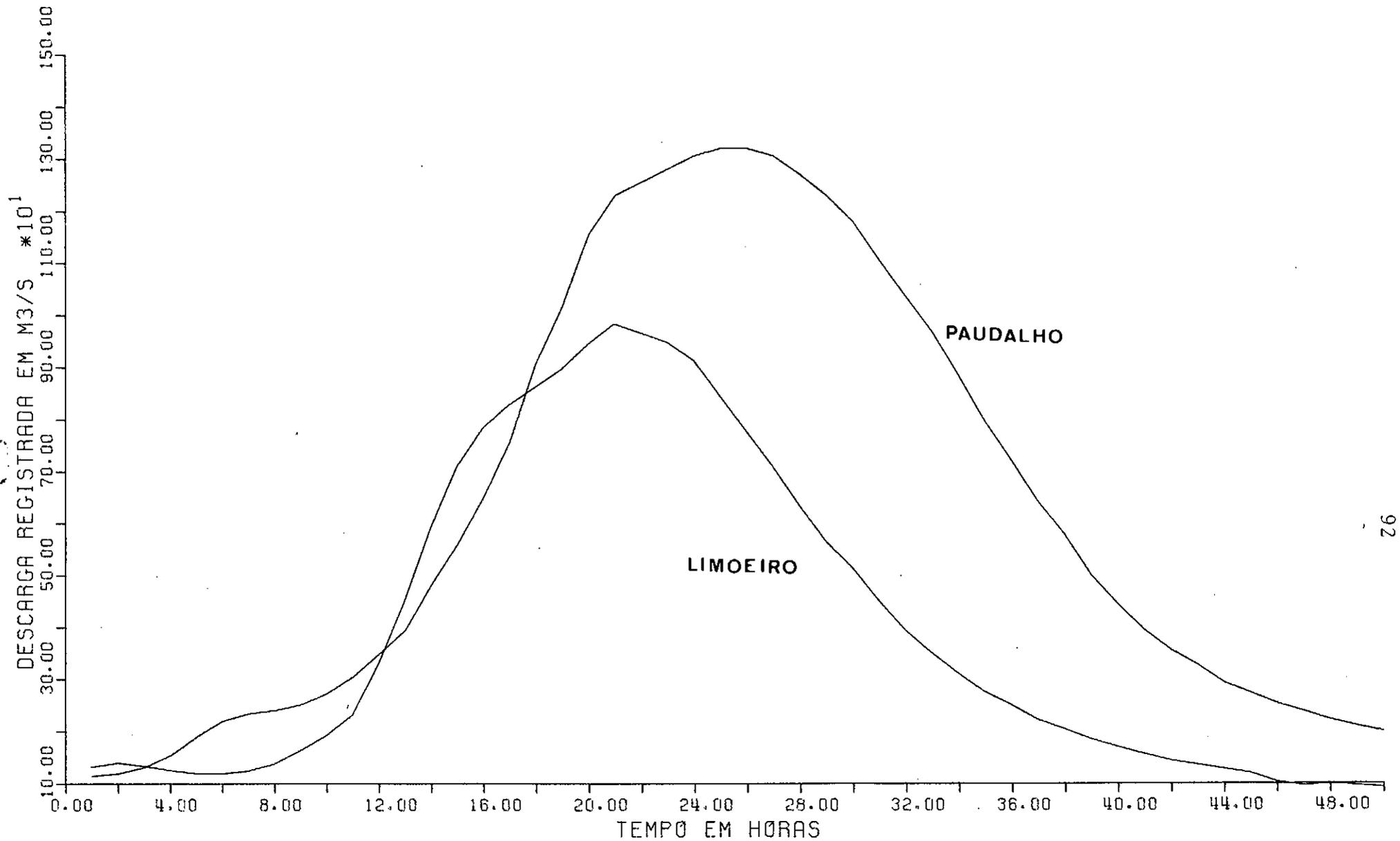


FIGURA 7.22 - HIDROGRAMAS REGISTRADOS EM LIMOEIRO E PAUDALHO DURANTE A CHEIA DE 1970

mo único parâmetro a calibrar no algoritmo. Para a descarga lateral adotamos uma distribuição triangular com um pico de amplitude igual ao dobro do valor médio, este obtido conforme explicado anteriormente. O expoente do raio hidráulico foi ajustado após três tentativas, baseadas na calibração da outra cheia estudada.

Os dados e resultados encontram-se apresentados nos quadros (7.23) a (7.26).

```

*****
*
*                               DADOS FISICOS DE ENTRADA DO MODELO
*
*
*                               2.79519
* EQUACAO DA CURVA-CHAVE EM PAUDALHO - Q = 6.28138 . Z
*                               (M3/S)          (M)
*
*                               I = COEFICIENTE DE MANNING = 0.042
* ESTIMATIVAS INICIAIS I
* DOS VALORES DOS I - EXPONENTE DO RAIO HIDRAULICO = 0.60
* PARAMETROS I
* I - DESCARGA LATERAL = 0.00550 M3/S/M (média)
*
* COMPRIMENTO DO TRECHO DO RIO = 37500. M
*
* DECLIVIDADE MEDIA DO TRECHO = 0.0018 M/M
*
* DURACAO DA CHEIA = 52 HORAS
*
*****

```

QUADRO 7.23 - DADOS DA ENCHENTE DE 1970 - ...

```

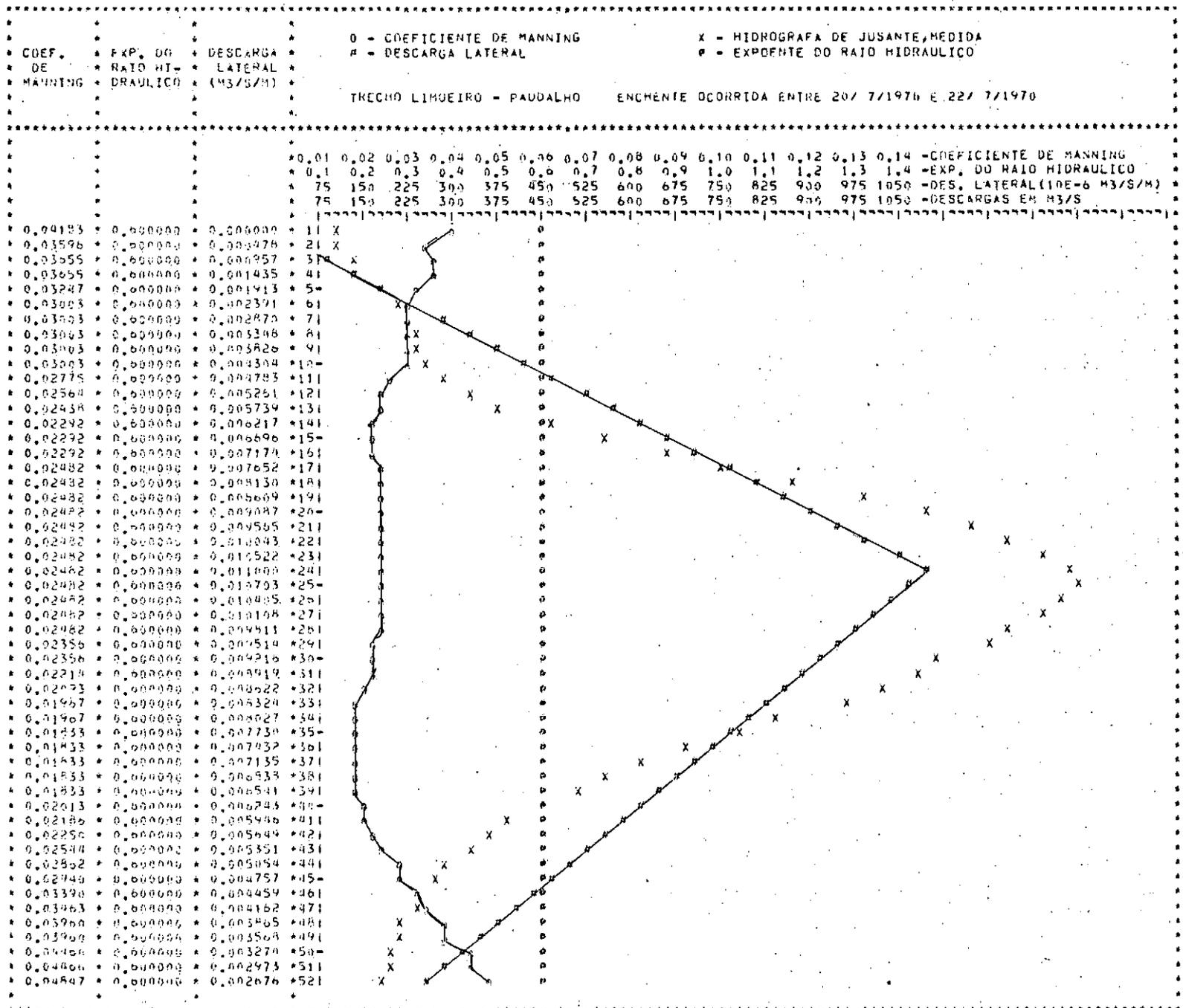
*****
*
*          DADOS MATEMATICOS DE ENTRADA DO MODELO
*
*          I- COEFICIENTE DE MANNING = -0.00005
* INCREMENTOS DADOS I
*   AOS VALORES DOS I- EXPOENTE DO RAI0 HIDRAULICO = -0.01
*   PARAMETROS      I
*          I- DESCARGA LATERAL = 0.0001 M3/S/M
*
* NUMERO DE SECOES DE CALCULO = 16
*
* INTERVALO DE DISCRETIZACAO DO TEMPO = 3600. SEGUNDOS
*
* COEFICIENTE DO ESQUEMA IMPLICITO DE PREISSMANN = 0.70
*
*          I- EPS:TOLERANCIA RELATIVA = .1E-05
* PARAMETROS DE ENTRADA I
* DA SUBROTINA GELB    I- NJ;NUMERO DE COLUNAS DE B(SISTEMA A.X=B) = 1
* (RESOLVE OS SISTEMAS I
* DE EQUACOES LINEARES) I- NDS:NUMERO DE CODIAGONAIS SUPERIORES = 2
*          I
*          I- NDI;NUMERO DE CODIAGONAIS INFERIORES = 2
*
* TOLERANCIA RELATIVA ADMITIDA NO PROCESSO ITERATIVO DE NEWTON-RAPHSON = 0.01
*
* TOLERANCIA RELATIVA ADMITIDA NO PROCESSO DE CALIBRACAO = 0.05
*
*****

```

QUADRO 7.24 - DADOS DO MODELO

DESCARGAS (M <sup>3</sup> /S)			PROPAGACAO DE ONDA DE CHEIA NO RIO CAPIBARIBE, EM PERNAMBUCO																				
			ENCHENTE OCORRIDA ENTRE 20/ 7/1970 E 22/ 7/1970																				
TEMPO (H)	MONT.	JUSANTE	TRECHO LIMBEIRO - PAUDALHO																				
			X - HIDROGRAFA DE JUSANTE, MEDIDA																				
			# - HIDROGRAFA DE JUSANTE, SIMULADA																				
			75	150	225	300	375	450	525	600	675	750	825	900	975	1050	1125	1200	1275	1350	1425	1500	
1	132	119	114	X																			
2	140	117	114	X																			
3	134	131	130	X#																			
4	126	154	140	X#																			
5	120	199	183		X																		
6	127	220	214		X																		
7	125	234	233		X																		
8	130	240	248		X																		
9	164	251	255		X																		
10	193	272	262		X																		
11	232	305	292		X#																		
12	331	349	335		X#																		
13	452	345	387		X#																		
14	593	422	469		X#																		
15	710	509	557		X#																		
16	784	600	678		X#																		
17	828	759	758		X#																		
18	802	907	883		X#																		
19	890	1015	1000		X#																		
20	944	1145	1098		X#																		
21	983	1230	1178		X#																		
22	966	1255	1244		X#																		
23	943	1280	1249		X#																		
24	913	1305	1339		X#																		
25	845	1320	1350		X#																		
26	777	1320	1333		X#																		
27	713	1305	1292		X#																		
28	635	1270	1232		X#																		
29	560	1230	1210		X#																		
30	515	1180	1124		X#																		
31	452	1105	1082		X#																		
32	395	1035	1026		X#																		
33	351	967	951		X#																		
34	312	883	891		X#																		
35	270	795	790		X#																		
36	251	723	702		X#																		
37	223	641	625		X#																		
38	205	578	565		X#																		
39	180	500	519		X#																		
40	171	445	450		X#																		
41	157	395	349		X#																		
42	140	357	375		X#																		
43	130	328	331		X#																		
44	120	294	293		X#																		
45	120	274	285		X#																		
46	103	254	252		X#																		
47	90	239	246		X#																		
48	100	223	217		X#																		
49	96	211	220		X#																		
50	92	200	190		X#																		
51	84	192	198		X#																		
52	82	182	184		X#																		

QUADRO 7.25 - HIDROGRAMAS SIMULADO E REGISTRADO EM PAUDALHO, CHEIA DE 1970



QUADRO 7.26 - VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS NO TEMPO

## VIII - CONCLUSÕES

Apresentamos neste trabalho um método de calibração de parâmetros em propagação de onda de cheia que, acreditamos, seja rápido e eficiente quando os parâmetros são considerados variáveis. Partindo da premissa de que os parâmetros possam ser calibrados considerando-se apenas a sua variação no tempo, chegamos a bons resultados na reprodução da cheia estudada inicialmente, nos dois trechos considerados.

A análise dos valores assumidos pela contribuição lateral variando-se o seu valor inicial e a interferência nela produzida pelo parâmetro  $m$  levou-nos a concluir que a descarga lateral não deve ser considerada como um parâmetro a calibrar. Sua determinação deve ser feita por outro processo e seus valores devem entrar como dados do modelo

O expoente do raio hidráulico, por sua vez, é pouco sensível ao modelo de identificação de parâmetros por nós usado e pode ser considerado constante, assumindo um valor dentro de uma faixa limitada após algumas tentativas.

Finalmente, concluímos que é o coeficiente de Manning  $n$  o parâmetro mais importante das equações de Saint-Venant e a reprodução de ondas de cheia pode ser conseguida através da calibração deste parâmetro, considerando-se a sua variação no tempo.

Durante a apresentação e discussão dos resultados abstivemo-nos de tecer considerações sobre o significado físico das variações apresentadas pelos parâmetros no tempo, em especial sobre o coeficiente de Manning. Embora os resultados por nós obtidos possam ser justificados pelos fatores que influenciam

este parâmetro, descritos no Capítulo IV, em duas cheias apenas não nos seria possível tirar conclusões sobre o assunto. Acreditamos, no entanto, que os algoritmos de identificação de parâmetros por nós apresentados, em especial o de gradientes conjugados, quando aplicados à calibração do coeficiente de Manning em diversas cheias ocorridas em um dado trecho do rio, permitam um conhecimento mais profundo desta característica de atrito, possibilitando o estabelecimento de critérios mais precisos para a atribuição de valores a este parâmetro, nos problemas de propagação de ondas de cheia.

Lembramos, por fim, que a confiabilidade dos resultados obtidos através da aplicação de qualquer modelo de identificação de parâmetros é limitada qualitativa e quantitativamente pelos dados disponíveis. Em nossas aplicações fomos forçados a interpolar características geométricas sobre toda a extensão dos trechos do Rio Capibaribe considerados. Recomendamos, que, em tais circunstâncias, seja feita uma análise da influência de diferentes esquematizações das seções de cálculo sobre os resultados.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 AMEIN, M. and FANG, C.S. - Implicit Flood Routing in Natural Channels, Journal of the Hydraulics Division, ASCE, vol. 96, No. HY12, 2481-2499, December, 1970.
- 2 ARAÚJO SILVA, P.C. DE - Método Implícito para Solução do Problema de Ondas de Cheia em Junção de Rios, Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, 1972. 201 p.
- 3 BALTZER, R.A. and LAI, C. - Computer Simulations of Unsteady Flows in Waterways, Journal of the Hydraulics Division, ASCE, vol: 94, No. HY4, 1083-1117, July, 1968.
- 4 CHOW, V.T. - Open-Channel Hydraulics, International Student Edition, McGraw-Hill Kogakusha, LTD., Tokyo, 1959. 680 p.
- 5 ELLIS, J. - Unsteady Flow in Channel of Variable Cross Section, Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 96, No. HY10, 1927-1945, October, 1970.
- 6 HIMMELBLAU, D.M. - Applied Nonlinear Programming, McGraw-Hill Book Company, New York, 1972. 498 p.
- 7 IBM - Scientific Subroutine Package, Version 3, S/360, Programmer's Manual, New York. 454 p.
- 8 LINSLEY, R.K., KOHLER, M.A. and PAULHUS, J.L.H. - Hydrology for Engineers, International Student Edition, Second Edition, McGraw-Hill Kogakusha, LTD., Tokyo, 1975. 482p.
- 9 NOWACKI, H. - Optimization Methods, The British Ship Research Association, No. 410, November, 1971..34 p.
- 10 SUDENE - Controle de Enchentes na Bacia do Capibaribe, Vol.1, Recife, 1967. 175 p.
- 11 SUDENE - Enchentes no Rio Capibaribe, Recife, 1975. 155 p.
- 12 SUDENE - Relatório da Enchente do Capibaribe em julho de 1975, Recife, 1975. 33 p.

- 13 STARK, R.M. and NICHOLLS, R.L. - Mathematical Foundations for Design Civil Engineering Systems, McGraw-Hill Book Company, New York, 1972. 566 p.
- 14 STOKER, J.J., ISAACSON, E. and TROESCH, A. - Numerical Solution of Flood Prediction and River Regulation Problems, Report III, Institute of Mathematical Sciences, New York University, 1956. 70 p.
- 15 UNSTEADY FLOW IN OPEN CHANNELS - Fort Collins, 1974. Fort Collins, Water Resources Publications, 1975. 3 vols.
- 16 VIESSMAN, Jr., W.; HARBAUGH, T.E. and KNAPP, J.W. - Introduction to Hydrology, Intext Educational Publishers, New York, 1972. 415 p.
- 17 YEH, W. W-G and BECKER, L. - Identification of Parameters in Unsteady Open Channel Flows; Water Resources Research, vol. 8, No. 4, 956-964, August, 1972.