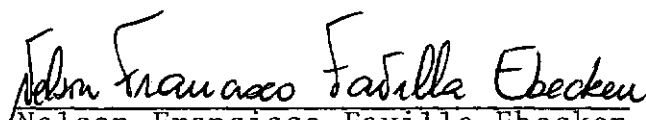


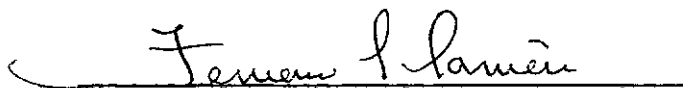
ANÁLISE NÃO-LINEAR DE ESTRUTURAS LAMINARES PELO
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Luiz Carlos Wrobel

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JA-
NEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.).

Aprovada por:


Nelson Francisco Favilla Ebecken
Presidente


Fernando Luiz Lobo B. Carneiro


Fernando Venâncio Filho


Edison Castro Prates de Lima

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
JULHO DE 1977

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Fernando Luiz Lobo B. Carneiro pelo interesse e carinho sempre demonstrado.

Ao amigo Nelson Francisco Favilla Ebecken pelo incentivo e apoio na orientação deste trabalho.

Aos colegas e professores da COPPE/UFRJ pelos ensinamentos recebidos.

A CAPES pelo apoio financeiro.

Aos funcionários da COPPE/UFRJ, particularmente a Heloísa Marques dos Santos.

A Helena Santos de Oliveira e Valdir da Silva Vaz, pela confecção gráfica.

SUMÁRIO

Neste trabalho, aplica-se o método dos elementos finitos à análise do comportamento não-linear geométrico de estruturas laminares, sob ação de cargas estáticas e dinâmicas.

Dois tipos de formulação são estudadas. Na primeira, através de elementos degenerados de elementos isoparamétricos, utiliza-se diretamente a teoria da elasticidade tridimensional, não introduzindo restrições quanto à grandeza das deformações.

A outra, derivada das equações de von Kármán para grandes deflexões de estruturas delgadas, é específica para problemas de pequenas deformações.

Resultados de diversas análises são apresentados. Discutem-se vantagens e limitações das aproximações desenvolvidas e eficiência dos modelos implementados.

ABSTRACT

In this work, the finite element method is applied to problems involving the geometrically non-linear behaviour of surface structures, subjected to static and dynamic loads.

Two kinds of formulations are studied. In the first one, through isoparametric degenerated elements, the tridimensional theory of elasticity is directly used. There are no restrictions for the magnitude of the deformations.

The other one, derived from the von Kármán strain expressions for large deflections of thin plates, is limited to problems involving small deformations.

Results from several analysis are presented. Advantages and limitations of the developed approximations are discussed, as well as the efficiency of the implemented models.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	1
I - ESTRUTURAS LAMINARES	3
1.1 - Tipos de Elementos	5
1.2 - Não-Linearidade Geométrica	7
1.3 - Elementos Planos	9
1.4 - Elementos Curvos	11
1.5 - Elementos Tridimensionais	13
1.6 - Elementos Implementados	19
II - FORMULAÇÃO DE GRANDES DEFORMAÇÕES	21
2.1 - Equações de Equilíbrio	21
2.2 - Elemento Tridimensional Degenerado	24
2.3 - Matriz de Rigidez Tangente	26
2.4 - Matriz de Massa	32
2.5 - Integração e Transformações Matriciais	34
2.6 - Introdução do Sexto Grau de Liberdade	46
III - FORMULAÇÃO DE GRANDES DEFLEXÕES	50
3.1 - Simplificações Introduzidas na Teoria Tridimensional	51
3.2 - Formulação do Método dos Elementos Finitos	63
3.3 - Elementos Implementados	70
IV - RESULTADOS DE ANÁLISES	75
4.1 - Placa Simplesmente Apoiada	76
a) Carga Estática	76
b) Carga Dinâmica	78

4.2 - Casca Cilíndrica Engastada	82
4.3 - "Folded Plates"	87
4.4 - Eficiência Computacional	112
V - CONCLUSÕES	114
BIBLIOGRAFIA	116
SIMBOLOGIA	121

INTRODUÇÃO

A consideração de não-linearidade geométrica é um fator importante na análise de estruturas laminares. A resposta não-linear de uma estrutura pode ser bastante diferente da linear quando as deflexões que a estrutura sofre são finitas, ao invés de infinitesimais (como consideradas pela teoria linear). O estudo deste fenômeno através de métodos analíticos, porém, é limitado a alguns tipos simples de estrutura, sob carregamentos e condições de contorno especiais.

Grande impulso se observou, nesse sentido, com o desenvolvimento do método dos elementos finitos, que permitiu a extensão do estudo a casos de estruturas de formas geométricas arbitrárias, com espessura variável, condições de contorno e carregamentos também arbitrários.

Inicialmente, sua aplicação a estruturas laminares era feita através de elementos planos. Com a evolução do método, desenvolveram-se elementos em cuja formulação se inclui a curvatura da estrutura, assim como elementos derivados de teorias tridimensionais.

Através do processo de degeneração de elementos isoparamétricos, Ahmad¹⁹ sugeriu um elemento de aplicação eficiente e econômica para análise linear de estruturas laminares delgadas e moderadamente espessas. Por conservar todas as características da teoria tridimensional, sua aplicação à análise não-linear pode ser feita sem as limitações impostas pelas teorias de corpos orientados.

No presente trabalho, comparam-se duas formulações

para análise não-linear geométrica de estruturas laminares: a primeira, sendo de teoria tridimensional, não impõe qualquer restrição à grandeza das deformações enquanto a outra, específica para estruturas delgadas, é aplicada em problemas de estruturas sujeitas a grandes deflexões, porém pequenas deformações.

No Capítulo I, comentam-se os diversos tipos de aproximação mais utilizadas na análise de estruturas laminares pelo método dos elementos finitos e como cada uma delas considera a não-linearidade geométrica. No segundo, derivam-se explicitamente as matrizes de rigidez e massa para um elemento tridimensional degenerado com esquema de integração numérica reduzida. Também discute-se a particularização para placas e a introdução do sexto grau de liberdade no campo de deslocamentos, para possibilitar o estudo de estruturas tipo "folded plates".

Uma formulação de grandes deflexões de estruturas delgadas, baseada nas equações de von Kármán, é desenvolvida no Capítulo III. Elementos retangulares, triangulares e quadriláteros com expansões simples ou refinadas para o campo de deslocamentos podem ser desenvolvidos. Um resumo da teoria de grandes deflexões de placas delgadas é também incluída.

Resultados de diversas análises são mostrados no Capítulo IV, onde se procura apresentar comparações entre os elementos implantados. No Capítulo V, comentam-se conclusões sobre os estudos efetuados, além de sugestões para desenvolvimentos futuros.

Os procedimentos automáticos foram programados em linguagem ALGOL (sistema B-6700 do NCE/UFRJ) para implementação na linguagem LORANE-NL (31).

I - ESTRUTURAS LAMINARES

A aplicação de estruturas laminares em projetos de engenharia civil teve grande desenvolvimento no século XX. Estruturas em forma de cascas começam a ser usadas, por volta de 1920, como uma solução prática para coberturas de grandes vãos que necessitavam permanecer desobstruídos. Desde a antiguidade, construções famosas já apresentam este tipo de cobertura, porém com seções transversais muito espessas. Os novos materiais empregados pela engenharia permitem que as atuais sejam bastante mais delgadas, proporcionando estruturas mais leves e, conseqüentemente, mais econômicas.

O sucesso desse tipo de estrutura deve-se, principalmente, à sua capacidade de suportar cargas. O equilíbrio estático de um elemento de placa sujeito a cargas transversais só é possível por ação de momentos fletores e torsões. Entretanto uma casca, em geral, é capaz de transmitir cargas por intermédio de tensões de membrana, que agem, em cada ponto, paralelamente a um plano tangente à superfície média, e são distribuídas uniformemente sobre sua espessura. Essa propriedade das cascas torna-as, como regra geral, muito mais rígidas que placas sob mesmas condições.

Outros ramos da engenharia desenvolvem aplicações de estruturas laminares. Com a disponibilidade de metais de alta resistência, projetos de máquinas e ferramentas mecânicas exploram suas formas. Um grande impulso nesse sentido verifica-se, também, nas indústrias aeronáutica e naval.

Devido a esse fatores, surgiu a necessidade de desenvolverem-se modelos matemáticos e físicos que possibilitassem

projetos seguros e econômicos.

Métodos analíticos para avaliar o comportamento estrutural das lâminas começaram a ser estudados há mais de um século. Lamé e Clapeyron¹ estabeleceram a teoria fundamental de membranas em 1826. Aron² estudou o seu comportamento flexional em 1874, já aproximando o problema do ponto de vista da teoria da elasticidade. Sua maior contribuição foi a redução do problema elástico, de tri para bidimensional. A distribuição dos deslocamentos numa direção normal ao plano da superfície média seguia as hipóteses sugeridas por Kirchhoff³, que as retas normais a esta superfície permanecem retas após a deformação do corpo, além de não sofrerem extensibilidade.

A primeira teoria geral de cascas delgadas, entretanto, só foi desenvolvida em 1888, por Love⁴. É baseada nas seguintes hipóteses:

- 1) Para uma casca ser considerada delgada, deve ter $t/R \ll 1$, onde t é a espessura e R o menor raio principal de curvatura
- 2) As deformações são pequenas.
- 3) O estado de tensões é plano.
- 4) A energia extensional e a de flexão não se acoplam.

A terceira hipótese incorpora o que hoje é chamado hipótese de Kirchhoff-Love, ou seja, que as normais permanecem normais após a deformação. Note-se que as deformações por cisalhamento transversal são desprezadas, o que torna a teoria não aplicável a cascas espessas, onde este efeito é significativo. Cascas espessas devem, então, ser estudadas no âmbito da elasticidade tridimensional.

A teoria de Love forma a base da moderna teoria de

casca delgadas e, atualmente, dirigem-se esforços no sentido de aprimorar sua formulação e, também, na resolução das equações diferenciais a ela associadas.

Soluções analíticas, entretanto, tem sua aplicação limitada. Geralmente, são de difícil utilização em problemas que apresentam formas geométricas arbitrárias, carregamentos especiais, condições de apoio irregulares, imperfeições iniciais e outros aspectos práticos de projeto.

Por outro lado, modelos físicos experimentais normalmente são muito dispendiosos, além de exigirem equipamento sofisticado e nem sempre disponível.

Com a crescente evolução dos computadores digitais, a partir da década de 50, os métodos computacionais aparecem como a solução ideal para estes problemas. Dentre todos, o método dos elementos finitos se destaca como o mais eficiente, devido a sua facilidade de tratar com particularidades de projeto, além de peculiaridades no comportamento das estruturas laminares, tais como não-linearidades devido a plasticidade e grandes deformações, instabilidades localizadas, etc.

1.1 - TIPOS DE ELEMENTOS

A primeira aplicação do método dos elementos finitos a casca foi feita na indústria aeronáutica. Estruturas de aviões consistem, normalmente, de um esqueleto recoberto por uma lâmina metálica. A idealização por elementos finitos desse tipo de estrutura era feita usando-se elementos de pórtico plano para o esqueleto interno e elementos planos para modelar a casca. Obtinha-se, assim, uma representação facetada da lâmina externa do avião. Os primeiros anos do M.E.F. foram ocupados, em grande par

te, no refinamento desse tipo de formulação.

O começo da década de 60 assistiu uma transformação na engenharia aeronáutica, que passou a projetar também naves espaciais. Este tipo de veículo tem a estrutura formada por cascas com curvaturas acentuadas, e as limitações da aproximação por meio de elementos planos tornam-se evidentes. Desenvolvem-se, então, elementos curvos, cuja formulação requer um novo exame na maneira de se representar a geometria dos elementos, as relações de formações-deslocamentos e o próprio campo de deslocamentos assumido.

Surgem elementos com simples ou dupla curvatura, com formulações próprias para aplicações específicas, função das características geométricas da estrutura a ser analisada.

Mais recentemente, com o esforço que tem sido desenvolvido para a exploração da energia nuclear, há uma grande interesse no projeto estrutural de reatores nucleares. Suas estruturas são compostas por cascas espessas, e o seu estudo deve ser feito a partir da mecânica dos sólidos. Para tal, desenvolvem-se elementos tridimensionais. Entretanto, certos tipos de reatores, assim como outras estruturas de interesse em engenharia, como barragens, vasos de pressão, etc., são formadas por cascas de espessura e curvaturas variáveis, de tal forma que algumas partes se comportam como espessas e outras como delgadas. Criou-se, então, uma dúvida quanto a vantagem da utilização desses elementos, devido ao seu elevado custo computacional.

Modificações apropriadas introduzidas em sua formulação, e que serão vistas posteriormente, possibilitaram o desenvolvimento de elementos derivados de teorias tridimensionais, portanto sem as aproximações das teorias de corpos orientados e evi-

tando a complexidade da geometria diferencial nelas envolvida, de aplicação eficiente tanto para estruturas moderadamente espessas como delgadas.

Em resumo, pode-se dizer que, atualmente, empregam-se três tipos de aproximação para a análise de cascas:

- 1) Na forma facetada, utilizando-se elementos planos.
- 2) A partir de teorias clássicas especializadas, com elementos curvos.
- 3) A partir de teorias tridimensionais.

1.2 - NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA

A determinação da carga para a qual uma estrutura perde a estabilidade (carga crítica) é um problema que deve ser considerado em seu projeto. Em trabalhos clássicos sobre o assunto, adotou-se a teoria da instabilidade linear para avaliar a carga crítica de certos tipos de estruturas laminares (5). Entretanto, experiências mostraram que as estruturas reais alcançavam o colapso, normalmente, com cargas de intensidade menores do que as previstas pela teoria linear, devido a presença de imperfeições iniciais e de não-linearidade geométrica.

As mudanças na geometria que sofre uma estrutura durante o processo de carregamento influem na sua capacidade de suportar cargas. Quando as deformações produzidas pelas cargas são pequenas, essas mudanças são desprezíveis. Quando, porém, as deformações são grandes, elas podem ser de importância bastante considerável.

Recentemente, houve um grande progresso na aplicação do M.E.F. a problemas de grandes deformações, considerando-se

a não-linearidade geométrica. Brebbia e Connor⁶ apresentaram uma formulação consistente para a análise de cascas abatidas ("shallow shells"), usando um elemento retangular, na qual a parcela não-linear da matriz de rigidez tangente é avaliada por meio de integração numérica. Uma formulação similar foi apresentada por Dhatt⁷, usando um elemento triangular de dupla curvatura, mais refinado.

Um procedimento geral para a análise por elementos finitos do problema de instabilidades de placas e cascas delgadas foi desenvolvido por Gallagher e outros⁸. Diversos trabalhos subsequentes deram continuidade a estas pesquisas.

Dispõem-se, agora, de ferramentas bastante poderosas para avaliar com mais precisão não apenas a carga crítica das estruturas, mas toda a história da deformação da peça em função da carga, tanto no seu estado pré como pós-crítico.

Com o refinamento dos projetos arquitetônicos e industriais, as estruturas laminares tornam-se cada vez mais delgadas. Algumas normas estruturais, como a CSA⁹, canadense, já permitem que se tire partido da sua rigidez pós-crítica.

O comportamento estrutural das placas delgadas sujeitas a esforços de compressão é caracterizado por uma considerável reserva de rigidez no seu estado pós-crítico. Em alguns casos, esta reserva pode atingir até 3 ou 4 vezes a carga inicial de flambagem. Nesses casos, a economia que se pode fazer no projeto, levando-se em conta a rigidez pós-crítica, é bastante grande. Certos tipos de cascas, como painéis cilíndricos sujeitos a cargas laterais, também apresentam este comportamento.

Experiências mais recentes, feitas por Swartz e outros¹⁰, com estruturas tipo "folded plates" de alumínio, acusaram resultados semelhantes. Essas estruturas tem sido largamente uti

lizadas na engenharia civil e mecânica, e são constituídas de lâminas ligadas longitudinalmente por seus bordos. Normalmente, são calculadas por meio de métodos energéticos, que não possuem a generalidade do M.E.F. Aqui também o M.E.F. aparece como o mais indicado para uma análise não-linear, onde se levam em conta as flambagens localizadas das lâminas que constituem a "folded plate" .

1.3 - ELEMENTOS PLANOS

A análise de cascas com este tipo de elemento é possível através de uma aproximação mais de ordem física do que matemática. Admite-se que o comportamento de uma superfície com curvatura contínua pode ser adequadamente representado pelo comportamento de uma superfície composta de pequenos elementos planos.

Essa aproximação acarreta o surgimento de momentos fletores descontínuos ao longo dos bordos dos elementos, o que não ocorre na estrutura real. Entretanto, intuitivamente percebe-se que à medida que se diminui o tamanho dos elementos, esse problema tende a ser minimizado e a solução aproximada deve convergir para a exata o que, de fato, é comprovado na prática.

Os elementos planos para a análise de cascas são formados pela superposição dos comportamentos de membrana, para representar o estado plano de tensões, e de flexão. Logo, qualquer discussão sobre a conveniência de seu uso deve levar em conta a facilidade de se encontrar elementos que aproximem esses comportamentos de forma suficientemente correta.

Pode-se dizer que, atualmente, a literatura sobre o assunto é muito ampla. Uma infinidade de elementos de membrana podem ser encontrados, com formulações variando de acordo com o seu refinamento, desde aqueles que adotam como graus de liberdade

apenas os deslocamentos dos pontos nodais (representação C^0), até os que adotam, além dos deslocamentos, suas derivadas de várias ordens (representação C^1). Os elementos de flexão necessitam um maior número de parâmetros nodais, já que um campo de deslocamentos que represente de forma aceitável o comportamento flexional de uma placa tem que ser, no mínimo, do terceiro grau. Entretanto, são também facilmente encontrados, em sua forma mais simples (T9, triangular e R12, retangular, ambos incompatíveis), ou em forma de elementos compatíveis, mais refinados, com campo de deslocamentos representados por polinômios de ordens mais altas.

Dispõem-se, alternativamente, de elementos derivados de princípios variacionais especiais, que levam a formulações híbridas e mistas. Elementos híbridos e mistos para cascas podem ser desenvolvidos da mesma forma que os do método dos deslocamentos, ou seja, a partir da superposição dos comportamentos de membrana e flexão.

Um elemento retangular com formulação híbrida, com campo de tensões assumido, para análise linear de cascas delgadas cilíndricas e de "folded plates" foi desenvolvido na referência (11). Entretanto, sua aplicação à análise não-linear geométrica introduz complexidades na formulação, exigindo grande esforço computacional.

Ao se fazer análise linear de cascas por meio de elementos planos, considera-se que as forças de membrana e de flexão produzem deformações independentes, portanto despreza-se o acoplamento entre estas parcelas que existe na estrutura real. Este problema não tem grande importância, e também é minimizado à medida que se refina a malha adotada na discretização da estrutura. Quando, porém, leva-se em conta a não-linearidade geométrica,

torna-se fundamental considerar esse acoplamento, assim como a influência das forças de membrana na rigidez à flexão da estrutura. Este problema é tratado em detalhe no Capítulo III.

Um ponto importante a se observar é a forma de considerar a massa da estrutura, em análises dinâmicas. Normalmente, costuma-se distribuí-la pelos pontos nodais usando-se uma matriz de massa consistente com a formulação adotada. Entretanto, neste caso, devido ao efeito físico de se aproximar uma superfície curva por outra composta de elementos planos, parece ser mais realístico e consistente com a aproximação a concentração da massa de cada elemento nos seus nós através de uma matriz de massa discreta.

Os elementos retangulares somente podem ser usados na discretização de cascas cilíndricas. Para cascas de forma geométrica arbitrária, pode-se utilizar elementos triangulares ou quadriláteros. Os quadriláteros são formados por quatro triângulos, sendo os graus de liberdade do nó central eliminados por meio de condensação estática.

Apesar de todas as aproximações adotadas quando se analisam cascas por meio de elementos planos, eles aparecem em praticamente todos os sistemas computacionais orientados para a análise de estruturas. Até hoje são muito usados, principalmente pela simplicidade de formulação, facilidade de serem acoplados a outros tipos de elementos (de pórticos, sólidos, etc.), e ao pequeno número de informações que necessitam como dados de entrada ao serem programados em computador.

1.4 - ELEMENTOS CURVOS

Vários tipos de elementos curvos podem ser encontra-

dos na literatura sobre o M.E.F. Esses elementos são sempre derivados de teorias particulares que se dividem, basicamente, em formulações para cascas abatidas e não abatidas.

O mais simples de todos os elementos para cascas cilíndricas foi sugerido por Brebbia e Connor¹², e tem sido usado tanto para cascas abatidas como não abatidas. Possui vinte graus de liberdade e é não conforme. Os graus de liberdade (5 por nó) são três deslocamentos, u , v , w , e duas rotações, w_x e $w_y - v/R$, sendo R o raio de curvatura da casca.

Gallagher¹³ desenvolveu um elemento conforme, com vinte e quatro graus de liberdade, semelhante ao de Brebbia e Connor. Os graus de liberdade adicionais correspondem à consideração de w_{xy} em cada nó. Note-se que este é um grau de liberdade interno, ou seja, não é um deslocamento nodal ao qual possam ser associadas forças ou momentos reais. Entretanto, expressando a energia de deformação de cada elemento em termos de ambos os tipos de deslocamentos nodais (externos e internos), e diferenciando com respeito a eles na maneira usual, é possível obter-se uma matriz de rigidez que relacione os deslocamentos com suas "forças" correspondentes.

Uma dificuldade aparece, porém, quando as matrizes de rigidez dos elementos são acumuladas para formar a matriz de rigidez da estrutura. Como as condições de compatibilidade só se aplicam aos graus de liberdade externos, a consideração de condições de compatibilidade para os graus de liberdade internos e de equilíbrio para suas "forças" correspondentes provocam uma superestimação da rigidez da estrutura. O processo mais comum de se evitar esta rigidez excessiva é a condensação estática dos graus de liberdade internos.

Cantin e Clough¹⁴ modificaram o elemento de Gallagher, introduzindo funções trigonométricas no campo de deslocamentos, de forma que todos os movimentos de corpo rígido ficassem representados explicitamente. Sabir e Lock¹⁵ demonstraram que, omitindo-se alguns termos do campo de deslocamentos, assim como o grau de liberdade w_{xy} , obtem-se um elemento que, apesar de não-conforme, aparentemente não apresenta nenhuma perda significativa de precisão, além de contar somente com graus de liberdade externos.

Inúmeros outros elementos, cada vez mais refinados, foram e ainda são desenvolvidos, como o de Bogner, Fox e Schmit¹⁶, conforme, com doze graus de liberdade por nó ($u, u_x, u_y, u_{xy}, v, v_x, v_y, v_{xy}, w, w_x, w_y, w_{xy}$), num total de quarenta e oito por elemento. Também são encontrados elementos com dupla curvatura, com especializações para cascas esféricas, paraboloidais, hiperboloidais e de outras formas geométricas, assim como elementos para cascas axissimétricas.

1.5 - ELEMENTOS TRIDIMENSIONAIS

O uso de elementos isoparamétricos já é consagrado no método dos elementos finitos (17). Na sua formulação, a geometria de cada elemento é interpolada a partir das coordenadas dos pontos nodais pelas mesmas funções de interpolação adotadas para definir o campo de deslocamentos conseguindo-se, assim, maior flexibilidade na discretização de geometrias arbitrárias.

O processo de degeneração de elementos isoparamétricos tridimensionais (18, 19), para aplicação na análise de estruturas laminares delgadas ou moderadamente espessas, surgiu da dificuldade de se estudar estes tipos de estruturas com elementos

tridimensionais (Figura 1.1).

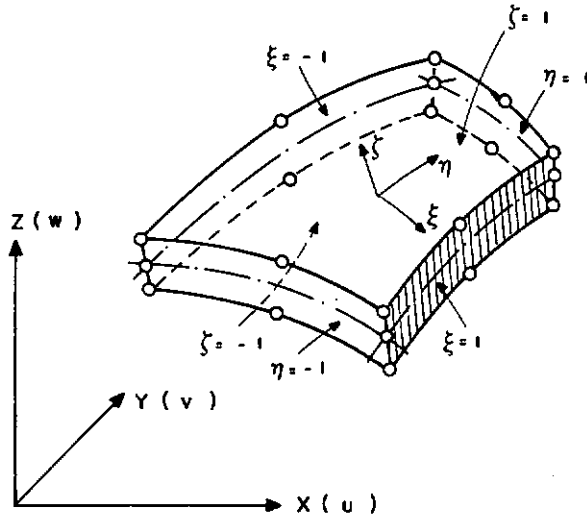


FIGURA 1.1 - ELEMENTO ISOPARAMÉTRICO TRIDIMENSIONAL

Em primeiro lugar, a consideração de três graus de liberdade por nó leva a valores muito grandes para os coeficientes de rigidez relativos a deslocamentos nodais cuja direção é muito próxima da normal à superfície média da estrutura, devido a espessura ser muito pequena quando comparada às outras dimensões. Isso acarreta um mal condicionamento da matriz de rigidez da estrutura, com consequentes problemas numéricos.

Além disso, o uso de vários nós ao longo da espessura despreza o fato das retas normais à superfície média permanecerem praticamente retas após a deformação do corpo. Assim, um grande número de graus de liberdade era desnecessariamente considerado na análise, aumentando o tempo de computação requerido na solução do problema.

No elemento degenerado (Figura 1.2) prescreve-se va

riação linear dos deslocamentos ao longo da espessura, ou seja, as retas normais permanecem retas, e despreza-se a parcela de energia de deformação correspondente as tensões normais ao plano da superfície média.

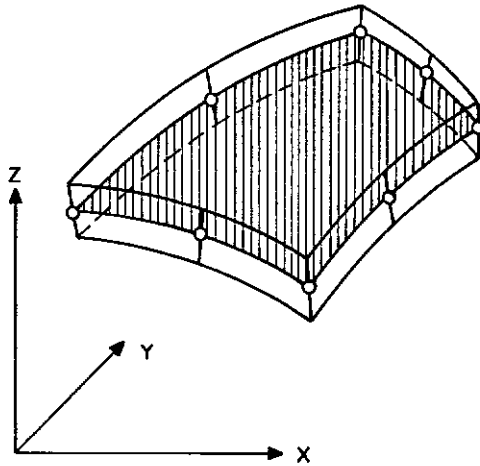


FIGURA 1.2 - ELEMENTO TRIDIMENSIONAL DEGENERADO

Note-se que as restrições para que as retas normais continuem normais à superfície média deformada foram deliberadamente omitidas possibilitando, dessa forma, que se leve em conta as deformações por cisalhamento, importantes na análise de estruturas espessas.

O elemento assim derivado apresenta excelentes resultados na análise de estruturas moderadamente espessas. Além disso, o fato de ter sua matriz de rigidez avaliada através de integração numérica evita a introdução de hipóteses simplificadas presentes na teoria usual de cascas.

O esquema de integração adotado para o elemento quadrático era, inicialmente, de 3×3 pontos de Gauss nas direções ξ e η e dois pontos na direção transversal ζ . Este esquema

torna o elemento muito rígido à flexão, problema causado pela excessiva parcela de deformação por cisalhamento imposta pelo campo de deslocamentos assumido, ao se desenvolverem deformações por flexão simples.

Este inconveniente foi contornado simplesmente com a redução do número de pontos de integração (20, 21). O novo esquema, conhecido por integração reduzida, além de praticamente não alterar os resultados obtidos com estruturas moderadamente espessas, fornece excelentes resultados também para estruturas bastante delgadas.

O elemento apresenta, também, maior eficiência computacional. Para sua integração, necessita apenas de 2×2 pontos de Gauss nas direções ξ e η , enquanto na direção ζ pode ser feita explicitamente para estruturas delgadas e através de dois pontos de Gauss para estruturas moderadamente espessas.

Por serem derivados de teorias tridimensionais, os elementos isoparamétricos podem considerar fenômenos como não-linearidade física e geométrica sem que isto cause grandes modificações na sua formulação básica. O primeiro trabalho neste sentido foi mostrado por Nayak²², utilizando elementos planos, axissimétricos e tridimensionais. Nas referências (23, 24, 25), são feitas aplicações do elemento degenerado a estruturas elasto-plásticas.

Uma outra alternativa para melhorar o comportamento do elemento tridimensional degenerado na análise de estruturas delgadas é a utilização da hipótese de Kirchhoff discretizada (26, 27). Através de restrições análogas à hipótese de Kirchhoff, obriga-se a parcela de energia de deformação devida ao cisalhamento se anular em determinados pontos conseguindo-se, assim, relaxar o ex

cesso de rigidez à flexão. Note-se que o elemento obtido dessa forma tem seu uso específico para o estudo de estruturas delgadas.

Irons e Razzaque²⁸ adotaram tal técnica, impondo que as deformações se anulem nos pontos de integração de Gauss, e empregando essas restrições para eliminar certos parâmetros nodais. O elemento degenerado considera uma variação quadrática para as tensões de cisalhamento, mas somente linear para as tensões de flexão. Supondo-se, agora, que os bordos do elemento trabalhem como vigas cujas tensões de flexão variam linearmente, sua deformada é suficientemente definida apenas pela deflexão e inclinação em cada extremo. Como existem três nós ao longo de cada bordo, a deflexão e a inclinação do nó central são desnecessárias e, portanto, condensadas.

Recentemente, Irons²⁹ apresentou outro elemento cuja formulação segue a hipótese de Kirchhoff discretizada, o elemento SemiLoof para cascas delgadas. Os graus de liberdade são três deslocamentos (u, v, w) em cada ponto nodal, duas rotações do nó central e de cada nó de Loof³⁰, além de um grau de liberdade extra do nó central, a "bubble function", que é uma função que representa o estado de deformação de uma bolha sob pressão constante (Figura 1.3). Os nós de Loof são locados ao longo dos bordos do elemento, em posições correspondentes as dos pontos de Gauss para um esquema de integração numérica com dois pontos.

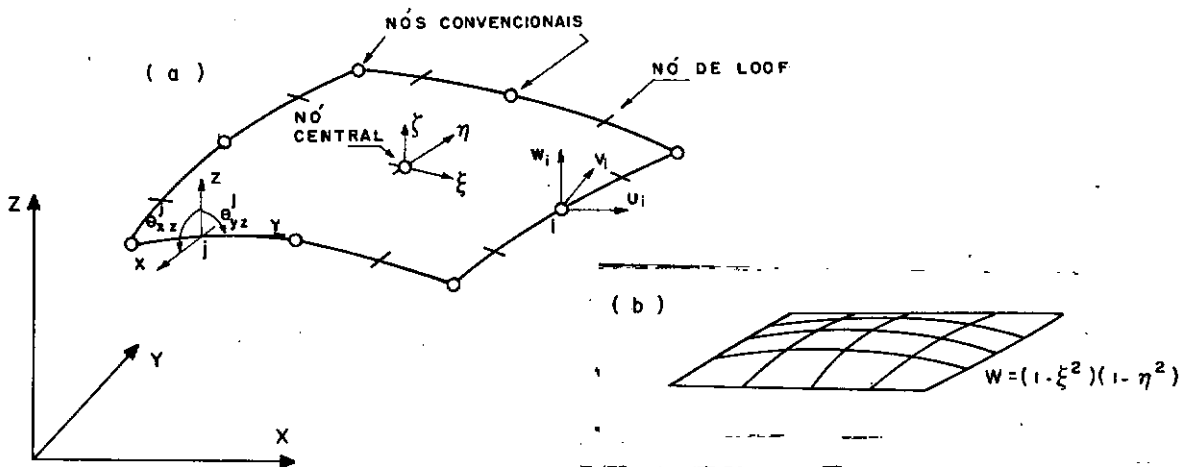


FIGURA 1.3 - ELEMENTO SEMILOOF (a) CONFIGURAÇÃO NODAL
(b) "BUBBLE FUNCTION"

Tem-se, portanto, um total de quarenta e três graus de liberdade, que são reduzidos para trinta e dois por meio de condensação estática. As restrições introduzidas na formulação ao se efetuar a condensação da rotação θ_{yz} em cada nó de Loof (num total de oito graus de liberdade) obrigam as deformações por cisalhamento se anularem nos 2×2 pontos de Gauss adotados na inte-gração numérica da matriz de rigidez de cada elemento. Para se condensar a "bubble function", impõem-se que estas deformações se anulem ao longo de todo o bordo do elemento; finalmente, ao elimi-nar-se as rotações do nó central (os dois graus de liberdade res-tantes), consegue-se anular as deformações por cisalhamento por toda a área do elemento.

O elemento assim obtido é considerado ideal para modelar problemas como cantos agudos ou acentuados, junções de m \acute{u} ltiplas superfícies, espessuras variáveis ou descontínuas, além de

poder ser acoplado, de maneira simples, a elementos de outros tipos, como triângulos e retângulos planos, elementos de pórtico plano, etc.

A consideração de não-linearidades com o SemiLoof, entretanto, deve exigir grande esforço computacional, devido ao número de graus de liberdade condensados existentes na sua formulação. Nenhum resultado neste sentido é conhecido até o presente.

1.6 - ELEMENTOS IMPLEMENTADOS

O presente trabalho visa o desenvolvimento de elementos para análise de estruturas laminares, considerando a não-linearidade geométrica, para implantação no sistema computacional LORANE-NL (31). Na escolha dos elementos relacionados para este fim, levou-se em conta o fato que sistemas computacionais devem procurar simplificar a entrada dos dados da estrutura a ser analisada. Desta forma, evitaram-se formulações que incluem como condições de contorno graus de liberdade de difícil significado físico. As aproximações utilizadas, porém, fornecem níveis de precisão bastante satisfatórios para problemas da prática.

Dois tipos de elementos foram considerados: o primeiro, tridimensional degenerado quadrático, derivado diretamente da mecânica dos sólidos e, o segundo, retangular plano, obtido pelo acoplamento de elementos de flexão de placas e estado plano de tensões. Objetivou-se com isto a comparação entre resultados obtidos com duas formulações distintas, mostrando os méritos e as limitações de cada uma.

O estudo da não-linearidade geométrica com o elemento degenerado não acarreta nenhuma restrição ao tensor de deformações de Green, permanecendo no âmbito da elasticidade tridi-

mensional. Os elementos planos, entretanto, introduzem aproximações na sua formulação ao reduzir o problema elástico para bidimensional. Como consequência, restrições impostas ao tensor de Green permitem apenas a análise de estruturas que sofrem grandes deflexões elásticas, porém pequenas deformações.

II - FORMULAÇÃO DE GRANDES DEFORMAÇÕES

Vários tipos de descrição podem ser usadas para re-
presentar o movimento de um contínuo (32). No presente trabalho,
como se estudam apenas materiais elásticos lineares, preferiu-se
adotar a descrição referencial, na qual as variáveis independen-
tes são a posição x de uma partícula numa configuração de refe-
rência arbitrária e o tempo t . Normalmente, na teoria da elas-
ticidade, a configuração de referência adotada é a posição ini-
cial, indeformada (tempo $t = 0$), para a qual um corpo retorna ao
ser descarregado. Neste caso, a descrição é conhecida como Lagran-
geana.

Deve-se, então, definir tensões e deformações se-
gundo a configuração indeformada, para que as equações constitui-
vas do material possam ser escritas com tensores relacionados a
um mesmo sistema de referência. São adotados, para tal, tensores
de deformações de Green ou Almansi e de tensões de Piola-Kirch-
hoff.

2.1 - EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Seja:

$$\underline{x} = [x \ y \ z]^T \quad (2.1)$$

o vetor que define as coordenadas cartesianas do ponto P de um
corpo no seu estado inicial. Se este ponto sofre um deslocamento
descrito por:

$$\underline{U} = [\underline{u} \ \underline{v} \ \underline{w}]^T \quad (2.2)$$

medido em relação ao mesmo sistema fixo de referência, suas novas coordenadas passam a ser:

$$\underline{\bar{X}} = [\underline{\bar{x}} \ \underline{\bar{y}} \ \underline{\bar{z}}]^T \quad (2.3)$$

tais que:

$$\underline{\bar{X}} = \underline{\bar{X}} + \underline{U} \quad (2.4)$$

No método dos elementos finitos os deslocamentos de um ponto qualquer no interior de um elemento são calculados a partir dos deslocamentos dos pontos nodais por:

$$\underline{U} = \underline{N} \cdot \underline{\delta} \quad (2.5)$$

onde $\underline{\delta}$ é o vetor que contém as componentes de deslocamentos dos nós e \underline{N} a matriz de funções de interpolação.

Como o modelo de deslocamentos foi preferido neste trabalho, a condição aproximada de equilíbrio é obtida pela aplicação do princípio dos trabalhos virtuais:

$$\underline{\psi} = \underline{R} - \underline{F} = \underline{0} \quad (2.6)$$

onde \underline{R} é o vetor das forças nodais equivalentes às forças externas (22) e \underline{F} o vetor das forças nodais internas (reativas).

O trabalho realizado pelas forças internas é dado por:

$$\underline{F}^T \cdot d\underline{\delta} = W = \int_V \underline{\sigma}^T \cdot d\underline{\varepsilon} dV \quad (2.7)$$

Através das relações entre deformações e deslocamentos é possível escrever-se uma equação do tipo:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{B} \cdot \underline{\delta} \quad (2.8)$$

cuja diferenciação em relação a $\underline{\delta}$ é:

$$d\underline{\varepsilon} = \underline{B}' \cdot d\underline{\delta} \quad (2.9)$$

Logo, levando (2.9) em (2.7), obtém-se:

$$\underline{F} = \int_V \underline{B}'^T \cdot \underline{\sigma} dV \quad (2.10)$$

Os resíduos $\underline{\psi}$ correspondem a forças nodais desequilibradas e, como tais, devem ser reduzidos até atingir a tolerância desejada.

Como \underline{R} e \underline{F} dependem dos deslocamentos nodais $\underline{\delta}$, o conjunto de equações (2.6) é não-linear, requerendo algoritmos especiais de solução que podem ser de tipos incrementais, iterativos ou outros. Esses procedimentos são discutidos detalhadamente nas referências (33, 34). Atualmente, dá-se preferência aos algoritmos que consideram a parcela não-balanceada dos esforços para a correção da configuração real de equilíbrio, na etapa seguinte (31).

2.2 - ELEMENTO TRIDIMENSIONAL DEGENERADO

A geometria do elemento é definida por (Fig. 2.1):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \sum_i N_i \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \sum_i N_i \cdot \frac{\xi}{Z} \cdot \underline{V}_{3i} \quad (2.11)$$

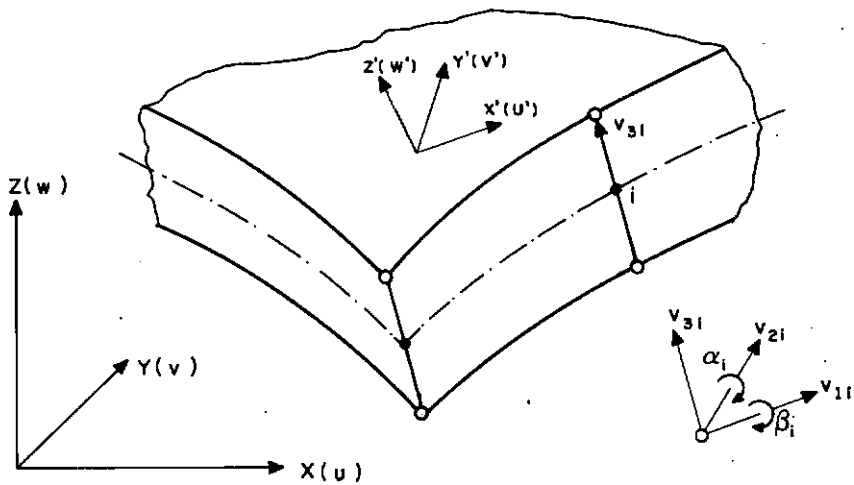


FIGURA 2.1 - COORDENADAS LOCAIS E GLOBAIS

No processo de degeneração desprezam-se as deformações na direção normal ao plano da superfície média. Assim, o campo de deslocamentos é definido pelas três componentes cartesianas dos deslocamentos dos nós da superfície média e duas rotações do vetor \underline{V}_{3i} , que representa a espessura em cada nó, em torno de direções ortogonais. Sendo \underline{v}_{1i} e \underline{v}_{2i} os vetores unitários dessas direções, pode-se escrever:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \sum N_i \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}_i + \sum N_i \zeta \frac{t_i}{2} \begin{bmatrix} v_{1i} & v_{2i} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}_i \quad (2.12)$$

onde u , v , w são deslocamentos nas direções globais x , y , z (Fig. 2.1).

Para a determinação única de v_{1i} e v_{2i} o seguinte esquema é adotado:

- calcula-se v_{2i} , normal ao plano formado por v_{3i} e o eixo x . Se estas duas direções são coincidentes, toma-se o eixo y , ao invés de x .
- calcula-se v_{1i} , normal ao plano formado por v_{2i} e v_{3i} .

Os vetores unitários dessas direções (v_{1i} , v_{2i} , v_{3i}) definem um sistema cartesiano local para cada nó. A rotação de v_{3i} em torno de v_{2i} é traduzida pelo escalar α e, em torno de v_{1i} , por β .

Devido a considerações introduzidas na degeneração do elemento, tensões e deformações são referidas ao sistema de eixos ortogonais x' , y' , z' (Fig. 2.1) local para cada elemento, relacionado à superfície $\zeta = \text{constante}$. Note-se que estas direções não coincidem com as direções nodais v_{1i} , v_{2i} , v_{3i} , já que o vetor v_{3i} é apenas aproximadamente normal à superfície média.

Um vetor normal à superfície $\zeta = \text{constante}$ pode ser definido pelo produto vetorial de quaisquer dois outros vetores tangentes a esta superfície. Desta forma, o vetor v'_3 na direção z' é obtido através de:

$$\underline{v}'_3 = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

Vetores \underline{v}'_2 e \underline{v}'_1 ortogonais, normais a \underline{v}'_3 , são determinados pelo mesmo processo descrito anteriormente. Os unitários dessas direções compõem a matriz dos cossenos diretores dos eixos locais x' , y' , z' :

$$\underline{\theta}' = \begin{bmatrix} \underline{v}'_1 & \underline{v}'_2 & \underline{v}'_3 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

2.3 - MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE

O tensor de deformações de Green da elasticidade tridimensional é considerado (em forma matricial) como:

$$\underline{\varepsilon}' = \left[\varepsilon'_x, \varepsilon'_y, \gamma'_{xy}, \gamma'_{yz}, \gamma'_{xz} \right]^T \quad (2.15)$$

sendo seus componentes definidos de forma completa:

$$\varepsilon'_x = \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} \right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial x'} \right)^2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial x'} \right)^2 \right] \quad (2.16)$$

$$\gamma'_{xy} = \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} + \left[\frac{\partial u'}{\partial x'} \cdot \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \cdot \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \cdot \frac{\partial w'}{\partial y'} \right]$$

Note-se que ε'_z foi desprezado, sendo esta aproximação compatível com as teorias de cascas usuais.

É possível, agora, separar os termos em duas parcelas:

$$\underline{\varepsilon}' = \underline{\varepsilon}^0 + \underline{\varepsilon}^L \quad (2.17)$$

onde:

$$\underline{\varepsilon}^0 = \left[\frac{\partial u'}{\partial x'}, \frac{\partial v'}{\partial y'}, \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'}, \frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'}, \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \right]^T \quad (2.18)$$

é o vetor de deformações lineares, infinitesimais, e:

$$\underline{\varepsilon}^L = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \theta_{-x}^T & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \theta_{-y}^T & \underline{0} \\ \theta_{-y}^T & \theta_{-x}^T & \underline{0} \\ \underline{0} & \theta_{-z}^T & \theta_{-y}^T \\ \theta_{-z}^T & \underline{0} & \theta_{-x}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_{-x} \\ \theta_{-y} \\ \theta_{-z} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \underline{A} \cdot \underline{\theta} \quad (2.19)$$

a contribuição não-linear, sendo:

$$\theta_{-x} = \left[\frac{\partial u'}{\partial x'} \quad \frac{\partial v'}{\partial x'} \quad \frac{\partial w'}{\partial x'} \right]^T \quad (2.20)$$

Através da relação entre deformações e deslocamentos (2.8), diferenciando $\underline{\varepsilon}^0$, obtém-se:

$$d\underline{\varepsilon}^0 = \underline{B}^0 \cdot d\underline{\delta} \quad (2.21)$$

A diferenciação de $\underline{\varepsilon}^L$ conduz a:

$$d\underline{\varepsilon}^L = \frac{1}{2} (d\underline{A} \cdot \underline{\theta} + \underline{A} \cdot d\underline{\theta}) \quad (2.22)$$

Devido a estrutura das matrizes envolvidas, esta

equação pode ser simplificada, já que:

$$d\tilde{A} \cdot \tilde{\theta} = \begin{bmatrix} d\tilde{\theta}_x^T & 0 & 0 \\ 0 & d\tilde{\theta}_y^T & 0 \\ d\tilde{\theta}_y^T & d\tilde{\theta}_x^T & 0 \\ 0 & d\tilde{\theta}_z^T & d\tilde{\theta}_y^T \\ d\tilde{\theta}_z^T & 0 & d\tilde{\theta}_x^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_x \\ \tilde{\theta}_y \\ \tilde{\theta}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_x^T & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\theta}_y^T & 0 \\ \tilde{\theta}_y^T & \tilde{\theta}_x^T & 0 \\ 0 & \tilde{\theta}_z^T & \tilde{\theta}_y^T \\ \tilde{\theta}_z^T & 0 & \tilde{\theta}_x^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\tilde{\theta}_x \\ d\tilde{\theta}_y \\ d\tilde{\theta}_z \end{bmatrix} = \tilde{A} \cdot d\tilde{\theta} \quad (2.23)$$

Assim, (2.22) é reduzida a:

$$d\tilde{\varepsilon}^L = \tilde{A} \cdot d\tilde{\theta} \quad (2.24)$$

O vetor $\tilde{\theta}$, definido em (2.19), é relacionado aos deslocamentos nodais por:

$$\tilde{\theta} = \tilde{G} \cdot \tilde{\delta} = \left[\tilde{G}_1^i, \dots, \tilde{G}_i^i, \dots \right] \left\{ \begin{array}{c} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_i \\ \vdots \end{array} \right\} \quad (2.25)$$

sendo:

$$\tilde{\delta}_i = \left\{ \begin{array}{c} u \\ v \\ w \\ \alpha \\ \beta \end{array} \right\}_i \quad (2.26)$$

os deslocamentos do nó genérico i .

Diferenciando $\underline{\theta}$ obtém-se:

$$d\underline{\theta} = \underline{G} \cdot d\underline{\delta} \quad (2.27)$$

Levando esta expressão em (2.24):

$$d\underline{\varepsilon}^L = \underline{B}^L \cdot d\underline{\delta} \quad (2.28)$$

com:

$$\underline{B}^L = \underline{A} \cdot \underline{G} \quad (2.29)$$

As equações (2.17), (2.19), (2.21) e (2.28) permitem concluir que:

$$\underline{\varepsilon}' = (\underline{B}^0 + \frac{1}{2} \cdot \underline{B}^L) \underline{\delta} \quad (2.30)$$

$$\underline{B}' = \underline{B}^0 + \underline{B}^L \quad (2.31)$$

Dispõem-se, agora, das relações necessárias para a avaliação da matriz de rigidez tangente, definida por:

$$d\underline{F} = \underline{K}_T \cdot d\underline{\delta} \quad (2.32)$$

A diferenciação de (2.10) conduz a:

$$d\underline{F} = d\left(\int_V \underline{B}'^T \cdot \underline{\sigma}' \, dV\right) = \int_V (d\underline{B}'^T \cdot \underline{\sigma}' + \underline{B}'^T \cdot d\underline{\sigma}') \, dV \quad (2.33)$$

Como \underline{B}^0 independe dos deslocamentos, obtem-se de (2.31):

$$d\underline{B}'^T = d(\underline{B}^L)^T = \underline{G}^T \cdot d\underline{A}^T \quad (2.34)$$

A relação entre tensões e deformações é dada por:

$$\underline{\sigma}' = \underline{D} \cdot \underline{\varepsilon}' \quad (2.35)$$

onde \underline{D} é a matriz das constantes elásticas do material utilizado. Como a matriz \underline{D} é introduzida explicitamente na formulação, torna-se simples a consideração de propriedades anisótropas ou propriedades variáveis ao longo de ζ , para estruturas tipo "sandwich". No presente trabalho são estudados apenas materiais isotrópicos, para os quais \underline{D} tem a seguinte forma:

$$\underline{D} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1 - \nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & \frac{1 - \nu}{2K} & 0 \\ \text{S I M .} & & & & \frac{1 - \nu}{2K} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Zienkiewicz¹⁷ sugere adotar-se para K o valor de 1.2 como correção para a distribuição dos cortantes ao longo da espessura, que resultam aproximadamente constantes devido a definição dos deslocamentos e que, na realidade, são aproximadamente parabólicos. Entretanto, para estruturas delgadas, a correção é irrelevante e os resultados de problemas práticos mostraram-se in

diferentes a este fator.

Deve-se ressaltar que a matriz \underline{D} não é derivada da tridimensional completa, 6×6 , simplesmente desprezando-se os termos apropriados. Na realidade, ela é obtida pela consideração de $\sigma'_z = 0$ nas relações constitutivas completas, através das substituições que essa consideração acarreta.

Derivando (2.35) obtem-se:

$$d\underline{\sigma}' = \underline{D} \cdot d\underline{\varepsilon}' = \underline{D} \cdot \underline{B}' \cdot d\underline{\delta} \quad (2.37)$$

Levando (2.34) e (2.37) em (2.33), comparando com (2.32), observa-se que:

$$\int_V (\underline{G}^T \cdot d\underline{A}^T \cdot \underline{\sigma}' + \underline{B}'^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B}' \cdot d\underline{\delta}) dV = \underline{K}_T \cdot d\underline{\delta} \quad (2.38)$$

É definida, então, uma matriz \underline{M}' de tensões tal que:

$$d\underline{A}^T \cdot \underline{\sigma}' = \underline{M}' \cdot d\underline{\theta} \quad (2.39)$$

De fato:

$$\begin{aligned}
 \underline{dA}^T \cdot \underline{\sigma}' &= \begin{bmatrix} d\theta_{\underline{x}} & \underline{0} & d\theta_{\underline{y}} & \underline{0} & d\theta_{\underline{z}} \\ \underline{0} & d\theta_{\underline{y}} & d\theta_{\underline{x}} & d\theta_{\underline{z}} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & d\theta_{\underline{y}} & d\theta_{\underline{x}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma'_{\underline{x}} \\ \sigma'_{\underline{y}} \\ \tau'_{\underline{xy}} \\ \tau'_{\underline{yz}} \\ \tau'_{\underline{xz}} \end{Bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \underline{I}_3 \cdot \sigma'_{\underline{x}} & \underline{I}_3 \cdot \tau'_{\underline{xy}} & \underline{I}_3 \cdot \tau'_{\underline{xz}} \\ & \underline{I}_3 \cdot \sigma'_{\underline{y}} & \underline{I}_3 \cdot \tau'_{\underline{yz}} \\ \text{S I M} \cdot & & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\theta_{\underline{x}} \\ d\theta_{\underline{y}} \\ d\theta_{\underline{z}} \end{Bmatrix} = \underline{M}' \cdot d\underline{\theta}
 \end{aligned}
 \tag{2.40}$$

onde \underline{I}_3 é a matriz identidade 3×3 .

Assim, através de (2.39) e (2.27) torna-se possível explicitar a matriz de rigidez tangente:

$$\underline{K}_T = \int_V (\underline{G}^T \cdot \underline{M}' \cdot \underline{G} + \underline{B}'^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B}') dV
 \tag{2.41}$$

2.4 - MATRIZ DE MASSA

Na presença de ações dinâmicas a formulação estática é simplesmente estendida com a aplicação do princípio de D'Alembert.

Seja $\underline{\ddot{U}}$ o vetor aceleração, representado por:

$$\underline{\ddot{U}} = \begin{bmatrix} \ddot{u} & \ddot{v} & \ddot{w} \end{bmatrix}^T
 \tag{2.42}$$

As forças de inércia para um material de densidade ρ são:

$$\underline{F}^M = - \rho \cdot \underline{\ddot{U}} \quad (2.43)$$

O vetor de forças nodais equivalentes às forças de inércia é calculada pela relação:

$$\underline{F} = \int_V \underline{N}^T \cdot \underline{F}^M dV = - \int_V \underline{N}^T \cdot \rho \cdot \underline{\ddot{U}} dV \quad (2.44)$$

Fazendo-se:

$$\underline{\ddot{U}} = \underline{N} \cdot \underline{\ddot{\delta}} \quad (2.45)$$

onde $\underline{\ddot{\delta}}$ é o vetor que contém as acelerações dos pontos nodais, a equação (2.44) é transformada em:

$$\underline{F} = - \int_V \underline{N}^T \cdot \rho \cdot \underline{N} \cdot \underline{\ddot{\delta}} dV = - \underline{M} \cdot \underline{\ddot{\delta}} \quad (2.46)$$

sendo:

$$\underline{M} = \int_V \underline{N}^T \cdot \rho \cdot \underline{N} dV \quad (2.47)$$

a matriz de massa consistente.

Uma outra alternativa é a utilização de matrizes de massa discreta. O aspecto importante é, agora, escolher um critério para definir qual a parcela da massa do elemento que será relacionada a cada grau de liberdade. Hinton e outros³⁵ pro-

põem que se avaliem os termos da diagonal principal da matriz de massa consistente e, então, distribuem-se as massas discretas na mesma proporção destes termos.

Os elementos da matriz de massa discreta podem, assim, ser descritos por:

$$m_{ii} = \frac{\int_V (\underline{N}_i^T \cdot \rho \cdot \underline{N}_i) dV}{\int_V \left(\sum_{i=1}^8 \underline{N}_i^T \cdot \rho \cdot \underline{N}_i \right) dV} \cdot \int_V \rho \cdot dV \quad (2.48)$$

$$m_{ij} = 0$$

A matriz de massa discreta avaliada com este procedimento fornece bons resultados mesmo quando a malha de elementos finitos contem elementos distorcidos.

2.5 - INTEGRAÇÃO E TRANSFORMAÇÕES MATRICIAIS

O cálculo das matrizes de rigidez e massa envolve integrais sobre o volume do elemento que são geralmente da forma:

$$\int_V \underline{S} \, dx \, dy \, dz \quad (2.49)$$

onde a matriz \underline{S} é função das coordenadas cartesianas.

Com a finalidade de evitar a integração explícita dessas matrizes, procura-se expressar \underline{S} em função das coordenadas naturais e, similarmente, transformar o volume infinitesimal $dx \cdot dy \cdot dz$, para haver a possibilidade de efetuar as integrações numericamente.

Desta forma, chega-se a integrais do tipo:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{S}(\xi, \eta) \cdot \det \underline{J}_c \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \quad (2.50)$$

Sejam as equações (2.11) e (2.12), que representam a variação paramétrica das coordenadas e dos deslocamentos no interior de um elemento. Nessas equações, a matriz \underline{N} de funções de interpolação está associada a coordenadas curvilíneas:

$$\underline{N} = \underline{N}(\xi, \eta) \quad (2.51)$$

A relação entre as derivadas dos deslocamentos com respeito ao sistema global e ao sistema de eixos curvilíneos é dada por:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \underline{J}_c^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

onde \underline{J}_c é o jacobiano de transformação de coordenadas:

$$\underline{J}_c = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

A obtenção de \underline{J}_c é feita a partir da equação (2.11):

$$\underline{J}_c = \begin{bmatrix} \underline{N}_\xi^T (\underline{X} + \zeta \cdot \underline{V}_x) & \underline{N}_\xi^T (\underline{Y} + \zeta \cdot \underline{V}_y) & \underline{N}_\xi^T (\underline{Z} + \zeta \cdot \underline{V}_z) \\ \underline{N}_\eta^T (\underline{X} + \zeta \cdot \underline{V}_x) & \underline{N}_\eta^T (\underline{Y} + \zeta \cdot \underline{V}_y) & \underline{N}_\eta^T (\underline{Z} + \zeta \cdot \underline{V}_z) \\ \underline{N}^T \cdot \underline{V}_x & \underline{N}^T \cdot \underline{V}_y & \underline{N}^T \cdot \underline{V}_z \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

sendo:

$$\begin{aligned} \underline{N} &= \left[N_1 \dots N_8 \right]^T \\ \underline{N}_\xi &= \left[\frac{\partial N_1}{\partial \xi} \dots \frac{\partial N_8}{\partial \xi} \right]^T \\ \underline{X} &= \left[x_1 \dots x_8 \right]^T \\ \underline{V}_x &= \frac{1}{2} \left[VX_1 \dots VX_8 \right]^T \end{aligned} \quad (2.55)$$

tal que VX_i é a projeção de \underline{V}_{3i} sobre o eixo x .

As derivadas dos deslocamentos com relação ao sistema global são, agora, transformadas em derivadas locais dos deslocamentos referidos ao sistema local:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = \underline{\theta}'^T \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \underline{\theta}' \quad (2.56)$$

onde $\underline{\theta}'$ é a matriz dos cossenos diretores de x' , y' , z' definida em (2.14).

Levando (2.52) em (2.56) chega-se a:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = \underline{\theta}'^T \cdot \underline{J}_c^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \cdot \underline{\theta}' \quad (2.57)$$

Na avaliação do produto $\underline{\theta}'^T \cdot \underline{J}_c^{-1}$ uma particularidade deve ser notada. O jacobiano definido em (2.53) pode ser representado por:

$$\underline{J}_c = \begin{pmatrix} \underline{H} \\ \underline{L} \\ \underline{T} \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

tal que:

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

\underline{H} e \underline{L} são vetores tangentes à superfície

$\zeta = \text{constante}$ e \underline{T} normal a esta superfície.

Logo, a matriz inversa fica:

$$\underline{J}_C^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{L} \times \underline{T} & \underline{T} \times \underline{H} & \underline{H} \times \underline{L} \end{bmatrix} / \det \underline{J}_C \quad (2.60)$$

onde as duas primeiras colunas continuam representando vetores tangentes à superfície $\zeta = \text{constante}$ e a terceira um vetor normal a esta superfície.

A matriz de cossenos diretores $\underline{\theta}'$ pode ser expressa por:

$$\underline{\theta}' = \begin{bmatrix} \underline{\theta}_1 & \underline{\theta}_2 & \underline{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

onde o vetor $\underline{\theta}_3$ tem a mesma direção de $\underline{H} \times \underline{L}$.

O produto, então, reduz-se a:

$$\begin{aligned} \underline{C} = \underline{\theta}'^T \cdot \underline{J}_C^{-1} &= \begin{Bmatrix} \underline{\theta}_1 \\ \underline{\theta}_2 \\ \underline{\theta}_3 \end{Bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{L} \times \underline{T} & \underline{T} \times \underline{H} & \underline{H} \times \underline{L} \end{bmatrix} / \det \underline{J}_C = \\ &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix} \quad (2.62) \end{aligned}$$

As derivadas dos deslocamentos com relação ao sistema de coordenadas curvilíneas são obtidas diretamente da equa-

çãõ (2.12):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{\xi}^T \left[\underline{u} + \zeta \cdot \underline{t} (F_{11} \cdot \underline{\alpha} + F_{12} \cdot \underline{\beta}) \right] & N_{\xi}^T \left[\underline{v} + \zeta \cdot \underline{t} (F_{21} \cdot \underline{\alpha} + F_{22} \cdot \underline{\beta}) \right] & N_{\xi}^T \left[\underline{w} + \zeta \cdot \underline{t} (F_{31} \cdot \underline{\alpha} + F_{32} \cdot \underline{\beta}) \right] \\ N_{\eta}^T \left[\underline{u} + \zeta \cdot \underline{t} (F_{11} \cdot \underline{\alpha} + F_{12} \cdot \underline{\beta}) \right] & N_{\eta}^T \left[\underline{v} + \zeta \cdot \underline{t} (F_{21} \cdot \underline{\alpha} + F_{22} \cdot \underline{\beta}) \right] & N_{\eta}^T \left[\underline{w} + \zeta \cdot \underline{t} (F_{31} \cdot \underline{\alpha} + F_{32} \cdot \underline{\beta}) \right] \\ N^T \cdot \underline{t} (F_{11} \cdot \underline{\alpha} + F_{12} \cdot \underline{\beta}) & N^T \cdot \underline{t} (F_{21} \cdot \underline{\alpha} + F_{22} \cdot \underline{\beta}) & N^T \cdot \underline{t} (F_{31} \cdot \underline{\alpha} + F_{32} \cdot \underline{\beta}) \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

sendo:

$$\begin{aligned} \underline{u} &= \left[u_1 \ \dots \ u_8 \right]^T \\ \underline{t} &= \frac{1}{2} \left[t_1 \ \dots \ t_8 \right]^T \\ \underline{F}_{ij} &= \left[F_{ij1} \ \dots \ F_{ij8} \right]^T \end{aligned} \quad (2.64)$$

tal que:

$$\underline{v}_{1i} = \left\{ \begin{array}{c} F_{11} \\ F_{21} \\ F_{31} \end{array} \right\}_i \quad ; \quad \underline{v}_{2i} = \left\{ \begin{array}{c} F_{12} \\ F_{22} \\ F_{32} \end{array} \right\}_i \quad (2.65)$$

representam os cossenos diretores das direções nodais V_{1i} e V_{2i} :

É possível, então, determinar explicitamente os termos da matriz \underline{G} de (2.25) que relaciona $\underline{\theta}$, definida em (2.19), com os deslocamentos nodais. De acordo com (2.57) uma sub-matriz de \underline{G} para o nó genérico i é dada por:

$$\underline{G}_i = \begin{bmatrix} \theta_{11} \cdot a_{1i} & \theta_{21} \cdot a_{1i} & \theta_{31} \cdot a_{1i} & b_{1i} \cdot a_{1i} & b_{2i} \cdot a_{1i} \\ \theta_{12} \cdot a_{1i} & \theta_{22} \cdot a_{1i} & \theta_{32} \cdot a_{1i} & b_{3i} \cdot a_{1i} & b_{4i} \cdot a_{1i} \\ \theta_{13} \cdot a_{1i} & \theta_{23} \cdot a_{1i} & \theta_{33} \cdot a_{1i} & b_{5i} \cdot a_{1i} & b_{6i} \cdot a_{1i} \\ \theta_{11} \cdot a_{2i} & \theta_{21} \cdot a_{2i} & \theta_{31} \cdot a_{2i} & b_{1i} \cdot a_{2i} & b_{2i} \cdot a_{2i} \\ \theta_{12} \cdot a_{2i} & \theta_{22} \cdot a_{2i} & \theta_{32} \cdot a_{2i} & b_{3i} \cdot a_{2i} & b_{4i} \cdot a_{2i} \\ \theta_{13} \cdot a_{2i} & \theta_{23} \cdot a_{2i} & \theta_{33} \cdot a_{2i} & b_{5i} \cdot a_{2i} & b_{6i} \cdot a_{2i} \\ 0 & 0 & 0 & b_{1i} \cdot a_{3i} & b_{2i} \cdot a_{3i} \\ 0 & 0 & 0 & b_{3i} \cdot a_{3i} & b_{4i} \cdot a_{3i} \\ 0 & 0 & 0 & b_{5i} \cdot a_{3i} & b_{6i} \cdot a_{3i} \end{bmatrix}$$

(2.66)

onde:

$$a_{1i} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot c_{11} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot c_{12}$$

$$a_{2i} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot c_{21} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot c_{22}$$

$$a_{3i} = N_i \cdot \frac{c_{33}}{\zeta}$$

$$b_{1i} = \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot (F_{11_i} \cdot \theta_{11} + F_{21_i} \cdot \theta_{21} + F_{31_i} \cdot \theta_{31})$$

$$b_{2i} = \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot (F_{12_i} \cdot \theta_{11} + F_{22_i} \cdot \theta_{21} + F_{32_i} \cdot \theta_{31}) \quad (2.67)$$

$$b_{3i} = \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot (F_{11_i} \cdot \theta_{12} + F_{21_i} \cdot \theta_{22} + F_{31_i} \cdot \theta_{32})$$

$$b_{4i} = \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot (F_{12_i} \cdot \theta_{12} + F_{22_i} \cdot \theta_{22} + F_{32_i} \cdot \theta_{32})$$

$$b_{5i} = \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot (F_{11_i} \cdot \theta_{13} + F_{21_i} \cdot \theta_{23} + F_{31_i} \cdot \theta_{33})$$

$$b_{6i} = \zeta \cdot \frac{t_i}{2} \cdot (F_{12_i} \cdot \theta_{13} + F_{22_i} \cdot \theta_{23} + F_{32_i} \cdot \theta_{33})$$

Para a avaliação da matriz \underline{B}' , torna-se necessário definir:

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{x}}{\partial y} & \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} & \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} \\ \frac{\partial \bar{x}}{\partial z} & \frac{\partial \bar{y}}{\partial z} & \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

que é o jacobiano de deformações, relacionado a \underline{J}_c da seguinte forma:

$$\underline{\bar{J}}_c = \underline{J}_c \cdot \underline{J} \quad (2.69)$$

sendo $\underline{\bar{J}}_c$ o jacobiano de transformação de coordenadas para a geometria atualizada.

Similarmente a (2.54), $\underline{\bar{J}}_c$ é obtido por:

$$\underline{\bar{J}}_c = \begin{bmatrix} \underline{N}_\xi^T (\bar{X} + \zeta \cdot \bar{V}_x) & \underline{N}_\xi^T (\bar{Y} + \zeta \cdot \bar{V}_y) & \underline{N}_\xi^T (\bar{Z} + \zeta \cdot \bar{V}_z) \\ \underline{N}_\eta^T (\bar{X} + \zeta \cdot \bar{V}_x) & \underline{N}_\eta^T (\bar{Y} + \zeta \cdot \bar{V}_y) & \underline{N}_\eta^T (\bar{Z} + \zeta \cdot \bar{V}_z) \\ \underline{N}^T \cdot \bar{V}_x & \underline{N}^T \cdot \bar{V}_y & \underline{N}^T \cdot \bar{V}_z \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

onde:

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 & \dots & \bar{x}_8 \end{bmatrix}^T \quad (2.71)$$

$$\bar{V}_x = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} \bar{v}_{x1} & \dots & \bar{v}_{x8} \end{bmatrix}^T$$

representam, respectivamente, as coordenadas e o vetor que define

a espessura, em cada n \bar{o} , na configuração atualizada.

Assim, \underline{J} pode ser calculado através de:

$$\underline{J} = \underline{J}_c^{-1} \cdot \bar{\underline{J}}_c \quad (2.72)$$

Reduzindo ao sistema local, obtem-se:

$$\underline{J}' = \underline{\theta}'^T \cdot \underline{J}_c^{-1} \cdot \bar{\underline{J}}_c \cdot \underline{\theta}' \quad (2.73)$$

É possível, agora, avaliar a matriz \underline{B}' por (2.21), (2.28) e (2.31). Tendo em conta que $\bar{\underline{X}}' = \underline{X}' + \underline{U}'$, uma sub-matriz de \underline{B}' para o n \bar{o} genérico i é dada por:

$$\underline{B}'_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \cdot d_{1i} & a_{1i} \cdot d_{2i} & a_{1i} \cdot d_{3i} & a_{1i} \cdot \ell_{1i} & a_{1i} \cdot \ell_{2i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2i} \cdot d_{4i} & a_{2i} \cdot d_{5i} & a_{2i} \cdot d_{6i} & a_{2i} \cdot \ell_{3i} & a_{2i} \cdot \ell_{4i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1i} \cdot d_{4i} & a_{1i} \cdot d_{5i} & a_{1i} \cdot d_{6i} & a_{1i} \cdot \ell_{3i} & a_{1i} \cdot \ell_{4i} \\ + & + & + & + & + \\ a_{2i} \cdot d_{1i} & a_{2i} \cdot d_{2i} & a_{2i} \cdot d_{3i} & a_{2i} \cdot \ell_{1i} & a_{2i} \cdot \ell_{2i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & a_{2i} \cdot \ell_{5i} & a_{2i} \cdot \ell_{6i} \\ a_{2i} \cdot d_{7i} & a_{2i} \cdot d_{8i} & a_{2i} \cdot d_{9i} & + & + \\ \vdots & \vdots & \vdots & a_{3i} \cdot \ell_{3i} & a_{3i} \cdot \ell_{4i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & a_{1i} \cdot \ell_{5i} & a_{1i} \cdot \ell_{6i} \\ a_{1i} \cdot d_{7i} & a_{1i} \cdot d_{8i} & a_{1i} \cdot d_{9i} & + & + \\ \vdots & \vdots & \vdots & a_{3i} \cdot \ell_{1i} & a_{3i} \cdot \ell_{2i} \end{bmatrix}$$

(2.74)

onde:

$$d_{1i} = \theta_{11} \cdot J'_{11} + \theta_{12} \cdot J'_{12} + \theta_{13} \cdot J'_{13}$$

$$d_{2i} = \theta_{21} \cdot J'_{11} + \theta_{22} \cdot J'_{12} + \theta_{23} \cdot J'_{13}$$

$$d_{3i} = \theta_{31} \cdot J'_{11} + \theta_{32} \cdot J'_{12} + \theta_{33} \cdot J'_{13}$$

$$d_{4i} = \theta_{11} \cdot J'_{21} + \theta_{12} \cdot J'_{22} + \theta_{13} \cdot J'_{23}$$

$$d_{5i} = \theta_{21} \cdot J'_{21} + \theta_{22} \cdot J'_{22} + \theta_{23} \cdot J'_{23}$$

$$d_{6i} = \theta_{31} \cdot J'_{21} + \theta_{32} \cdot J'_{22} + \theta_{33} \cdot J'_{23}$$

$$d_{7i} = \theta_{11} \cdot J'_{31} + \theta_{12} \cdot J'_{32} + \theta_{13} \cdot J'_{33}$$

(2.75)

$$d_{8i} = \theta_{21} \cdot J'_{31} + \theta_{22} \cdot J'_{32} + \theta_{23} \cdot J'_{33}$$

$$d_{9i} = \theta_{31} \cdot J'_{31} + \theta_{32} \cdot J'_{32} + \theta_{33} \cdot J'_{33}$$

$$x_{1i} = b_{1i} \cdot J'_{11} + b_{3i} \cdot J'_{12} + b_{5i} \cdot J'_{13}$$

$$x_{2i} = b_{2i} \cdot J'_{11} + b_{4i} \cdot J'_{12} + b_{6i} \cdot J'_{13}$$

$$x_{3i} = b_{1i} \cdot J'_{21} + b_{3i} \cdot J'_{22} + b_{5i} \cdot J'_{23}$$

$$x_{4i} = b_{2i} \cdot J'_{21} + b_{4i} \cdot J'_{22} + b_{6i} \cdot J'_{23}$$

$$x_{5i} = b_{1i} \cdot J'_{31} + b_{3i} \cdot J'_{32} + b_{5i} \cdot J'_{33}$$

$$x_{6i} = b_{2i} \cdot J'_{31} + b_{4i} \cdot J'_{32} + b_{6i} \cdot J'_{33}$$

Sendo \underline{M}' definido em (2.40) e \underline{D} em (2.36) o cálculo da matriz de rigidez pode, então, ser efetuado. O vetor de forças nodais internas, necessário para a avaliação das forças não-balanceadas, é calculado por:

$$\underline{F} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{B}'^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{\varepsilon}' \cdot \det \underline{J}_C \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \quad (2.76)$$

Como se utiliza um referencial Lagrangeano, as tensões obtidas representam forças por unidade de área indeformada. É necessário, então, transformá-las em tensões de Cauchy usuais, referidas à configuração deformada do corpo. Essa transformação é feita da seguinte forma (32):

$$\underline{\bar{\sigma}}' = \frac{1}{\det \underline{J}'} \cdot \underline{J}' \cdot \underline{\sigma}' \cdot \underline{J}'^T \quad (2.77)$$

Para maior eficiência computacional, as tensões de vem ser calculadas nos pontos de integração dos elementos. Desta forma obtem-se, também, maior precisão nos resultados. Entretanto, se por algum motivo são requeridas as tensões nos pontos nodais, o cálculo pode ser feito sem qualquer dificuldade adicional.

Resta efetuar a integração numérica. O esquema adotado para a matriz de rigidez e o vetor de forças internas é de $2 \times 2 \times 2$ pontos de integração de Gauss. Para estruturas delgadas, porém, a integração pode ser feita explicitamente ao longo de ζ , desprezando-se a variação de $\underline{\theta}'$ com relação a ζ . Consegue-se, com isto, reduzir à metade o esforço computacional dispendido no processo. Esta simplificação, entretanto, não é adequada para estruturas espessas.

A matriz de massa exige um esquema de integração mais refinado, por conter termos de ordens mais altas (36, 37). Adotou-se, para esta matriz, 3×3 pontos de Gauss nas direções ξ e η , mantendo-se 2 pontos ao longo de ζ .

Os procedimentos mostrados anteriormente simplificam-se bastante quando o elemento tridimensional degenerado é especializado para análise de placas. Neste caso, as direções ζ e z são coincidentes, logo os vetores nodais v_{1i} , v_{2i} , v_{3i} podem ser definidos nas direções x , y , z , respectivamente. Além disso, não é mais necessário referir-se tensões e deformações a um sistema local, já que a direção global z é normal ao plano da superfície média.

A geometria do elemento é, agora, especificada pelas coordenadas x e y e a espessura, em cada nó. Os graus de liberdade por nó são a deflexão w e as rotações θ_x e θ_y , num total de 24 para o elemento quadrático. A integração ao longo de ζ pode sempre ser feita explicitamente.

Rock e Hinton³⁸ sugerem para este elemento matrizes de massa discreta que desprezam a inércia de rotação. Dois esquemas para a distribuição da massa do elemento são apresentados: 1/8 em cada nó, para elementos retangulares, ou distribuição proporcional aos termos da diagonal principal da matriz de massa consistente, para elementos curvos ou distorcidos.

2.6 - INTRODUÇÃO DO SEXTO GRAU DE LIBERDADE

O elemento degenerado para cascas não pode ser aplicado ao estudo de "folded plates" devido à impossibilidade da definição única do vetor que representa a espessura, para nós localizados nas junções das lâminas que compõem a estrutura.

Como estes nós coincidem com pontos de descontinuidade na curvatura, admite-se que mais de um vetor pode ser construído com essa finalidade (Fig. 2.2).

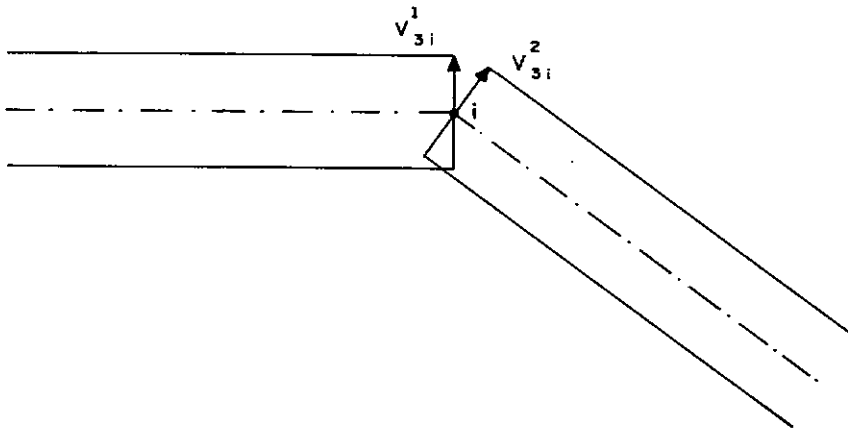


FIGURA 2.2 - PONTO DE DESCONTINUIDADE NA CURVATURA

Sendo a matriz de rigidez da estrutura avaliada através da acumulação das matrizes de rigidez dos elementos, esta consideração não acarreta nenhum inconveniente já que, dentro de cada elemento, a espessura por nó é univocamente definida. Torna-se necessário, apenas, o cuidado de, na geração dos elementos, possibilitar-se entrada de dados capazes de representar as várias "espessuras" que um nó pode ter.

No sistema de equações, porém, não é possível acoplar-se diretamente os graus de liberdade, pelo fato das direções em torno das quais definem-se rotações não serem coincidentes, devido à existência de mais de um vetor nodal V_{3i} (Fig. 2.2). Para contornar este problema, utilizou-se um artifício semelhante ao adotado na análise de cascas por meio de elementos planos: a introdução do sexto grau de liberdade por nó, neste caso, a rotação fictícia de V_{3i} em torno de seu próprio eixo (17, 50).

Este artifício proporciona, através de rotações apropriadas de eixos, que se obtenham três deslocamentos (u , v ,

w) e três rotações $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$ por nó, todos relacionados ao sistema global, de forma que o acoplamento entre as matrizes de rigidez dos elementos possa ser efetuado.

A transformação de coordenadas é efetuada por:

$$\underline{K}_T = \underline{R}^T \cdot \underline{K}'_T \cdot \underline{R} \quad (2.78)$$

sendo \underline{K}'_T a matriz de rigidez tangente com os graus de liberdade correspondentes a rotações referidos aos sistemas nodais locais. Na matriz \underline{K}_T , todos são relacionados ao sistema global. \underline{R} é a matriz de rotação dos sistemas nodais locais para o sistema global, dada por:

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} \underline{r} & \underline{0} & \underline{0} & \dots \\ \underline{0} & \underline{r} & \underline{0} & \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{r} & \\ \vdots & & & \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

onde o número de sub-matrizes \underline{r} é igual ao número de nós do elemento.

Uma sub-matriz de rotação \underline{r} para o nó genérico i tem a forma:

III - FORMULAÇÃO DE GRANDES DEFLEXÕES

O estudo de estruturas laminares delgadas constituiúdas por materiais lineares elásticos admite que se introduzam simplificações na teoria tridimensional (39, 40). A maioria dos materiais utilizados na engenharia só podem ser considerados elásticos para alongamentos e distorções muito pequenos comparados à unidade. Apenas alguns poucos materiais, como a borracha, mantêm suas propriedades elásticas sob deformações relativamente grandes. Assim, para grande parte dos problemas da prática, é interessante considerar-se as estruturas sujeitas a pequenas deformações. Também é válido, para estes casos, a utilização da hipótese de Kirchhoff.

Consegue-se, desta forma, reduzir o problema a bidimensional bastando, agora, a determinação dos deslocamentos da superfície média para se ter caracterizado o estado de deformações em toda a estrutura.

A formulação assim obtida pode ser aplicada ao estudo de placas ou cascas delgadas que sofrem deflexões muito grandes, provenientes de fortes efeitos de flexão. A teoria da elasticidade clássica, linear, supõem que as rotações que os elementos do corpo experimentam são da mesma ordem de grandeza das deformações e, portanto, só pode ser aplicada ao caso de fraca flexão (pequenas deflexões). Uma formulação muito usada em análise não-linear de placas delgadas, e que será adotada no presente trabalho, é proposta por T. von Kármán para um caso intermediário : rotações desprezíveis em relação à unidade, porém muito maiores que as deformações, correspondentes a estruturas que sofrem grandes

des deflexões.

3.1 - SIMPLIFICAÇÕES INTRODUZIDAS NA TEORIA TRIDIMENSIONAL

Numa placa delgada de espessura constante é definido um sistema de eixos cartesianos x , y , z , cuja origem encontra-se no plano da superfície média. A direção do eixo z é considerada normal a este plano.

No desenvolvimento da teoria de deformações de placas delgadas adota-se a hipótese de Kirchhoff. Essa hipótese pode ser formulada analiticamente pelas seguintes equações:

$$\gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0 \quad (3.1)$$

$$\epsilon_z = 0 \quad (3.2)$$

A equação (3.1) determina que as retas normais à superfície média permaneçam normais após a deformação, enquanto (3.2) traduz a inextensibilidade destas retas.

Os componentes que se anulam no tensor de Green permitem escrever:

$$\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

O sistema de equações diferenciais homogêneas (3.3),

cujas incógnitas são u , v , w , tem solução do tipo:

$$\begin{aligned} u &= u_0(x, y) + z \cdot \theta(x, y) \\ v &= v_0(x, y) + z \cdot \psi(x, y) \\ w &= w_0(x, y) + z \cdot \lambda(x, y) \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde u_0 , v_0 , w_0 representam deslocamentos de pontos situados na superfície média ($z = 0$).

Levando (3.4) em (3.3), obtem-se :

$$\begin{aligned} \theta^2 + \psi^2 + (1 + \lambda)^2 &= 1 \\ (1 + \frac{\partial u_0}{\partial x}) \theta + \frac{\partial v_0}{\partial x} \cdot \psi + \frac{\partial w_0}{\partial x} (1 + \lambda) &= 0 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} \cdot \theta + (1 + \frac{\partial v_0}{\partial y}) \psi + \frac{\partial w_0}{\partial y} (1 + \lambda) &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

expressões que possibilitam definir θ , ψ , λ em função dos deslocamentos da superfície média.

Resolvendo as duas últimas equações de (3.5), considerando θ e ψ como incógnitas, chega-se a:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\alpha_1^0}{\alpha_3^0} \cdot (1 + \lambda) \\ \psi &= \frac{\alpha_2^0}{\alpha_3^0} \cdot (1 + \lambda) \end{aligned} \quad (3.6)$$

sendo:

$$\alpha_1^0 = \frac{\partial v_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_0}{\partial y} - \left(1 + \frac{\partial v_0}{\partial y}\right) \frac{\partial w_0}{\partial x}$$

$$\alpha_2^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial w_0}{\partial x} - \left(1 + \frac{\partial u_0}{\partial x}\right) \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (3.7)$$

$$\alpha_3^0 = \left(1 + \frac{\partial u_0}{\partial x}\right) \left(1 + \frac{\partial v_0}{\partial y}\right) - \frac{\partial u_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial v_0}{\partial x}$$

Substituindo (3.6) na primeira equação de (3.5) ,
obtem-se :

$$\lambda = \frac{\alpha_3^0}{\sqrt{\alpha_1^{0^2} + \alpha_2^{0^2} + \alpha_3^{0^2}}} - 1 \quad (3.8)$$

Define-se, agora, um ponto $M(x, y, z)$ no interior da placa. Após a deformação, este ponto passa a ocupar a posição $\bar{M}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

O ponto $N(x + dx, y + dy, z + dz)$, infinitamente próximo de M , é deslocado até a posição $\bar{N}(\bar{x} + d\bar{x}, \bar{y} + d\bar{y}, \bar{z} + d\bar{z})$.

o vetor $\underline{\bar{M}}$, de projeções $d\bar{x}$, $d\bar{y}$, $d\bar{z}$, determina o módulo e a direção do elemento de linha do corpo cujo módulo e direção, antes da deformação, eram dados pelo vetor \underline{M} , de projeções dx , dy , dz .

Como:

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= x + u(x, y, z) \\
 \bar{y} &= y + v(x, y, z) \\
 \bar{z} &= z + w(x, y, z)
 \end{aligned}
 \tag{3.9}$$

as componentes do vetor \bar{M} podem ser obtidas por diferenciação de (3.9):

$$\begin{aligned}
 d\bar{x} &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\
 d\bar{y} &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \\
 d\bar{z} &= \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dz
 \end{aligned}
 \tag{3.10}$$

Estas equações expressam as projeções de um elemento de linha do corpo, após a deformação, em termos de suas projeções antes da deformação.

Resolvendo o sistema de equações (3.10), supondo como incógnitas dx , dy , dz , obtem-se:

$$\begin{aligned}
 dx &= \frac{1}{\det Q} (\alpha_{11} \cdot d\bar{x} + \alpha_{12} \cdot d\bar{y} + \alpha_{13} \cdot d\bar{z}) \\
 dy &= \frac{1}{\det Q} (\alpha_{21} \cdot d\bar{x} + \alpha_{22} \cdot d\bar{y} + \alpha_{23} \cdot d\bar{z}) \\
 dz &= \frac{1}{\det Q} (\alpha_{31} \cdot d\bar{x} + \alpha_{32} \cdot d\bar{y} + \alpha_{33} \cdot d\bar{z})
 \end{aligned}
 \tag{3.11}$$

sendo:

$$\alpha_{11} = \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \cdot \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - \frac{\partial v}{\partial z} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\alpha_{12} = \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} - \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\alpha_{13} = \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} - \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\alpha_{21} = \frac{\partial v}{\partial z} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} - \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\alpha_{22} = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \cdot \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.12)$$

$$\alpha_{23} = \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\alpha_{31} = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} - \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\alpha_{32} = \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} - \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\alpha_{33} = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \cdot \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

e:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & 1 + \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

As equações (3.11) expressam as projeções de um elemento de linha do corpo, antes da deformação, em termos de suas projeções após a deformação.

Supondo que o vetor \underline{M} , após a deformação, fique paralelo ao eixo x , com projeções $(\underline{\bar{M}})_x = d\bar{x}$, $(\underline{\bar{M}})_y = 0$, $(\underline{\bar{M}})_z = 0$, suas projeções antes da deformação são:

$$dx = \frac{\alpha_{11}}{\det Q} \cdot d\bar{x}$$

$$dy = \frac{\alpha_{21}}{\det Q} \cdot d\bar{x} \quad (3.14)$$

$$dz = \frac{\alpha_{31}}{\det Q} \cdot d\bar{x}$$

e seu módulo:

$$|\underline{M}| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \frac{1}{\det Q} \sqrt{\alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2} \cdot d\bar{x} = \frac{d\bar{x}}{1 + E_{\bar{x}}} \quad (3.15)$$

onde:

$$E_{\bar{x}} = \frac{|\underline{\bar{M}}| - |\underline{M}|}{|\underline{M}|} = \frac{\det Q}{\sqrt{\alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2}} - 1 \quad (3.16)$$

é o alongamento relativo do vetor \underline{M} .

Os cossenos diretores de \underline{M} são:

$$\cos(\underline{M}, x) = \frac{1 + E_x^-}{\det Q} \cdot \alpha_{11}$$

$$\cos(\underline{M}, y) = \frac{1 + E_x^-}{\det Q} \cdot \alpha_{21} \quad (3.17)$$

$$\cos(\underline{M}, z) = \frac{1 + E_x^-}{\det Q} \cdot \alpha_{31}$$

Esses cossenos determinam a direção, antes da deformação, do elemento de linha que, após a deformação, torna-se paralelo ao eixo x .

Analogamente, pode-se obter:

$$E_y^- = \frac{\det Q}{\sqrt{\alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{32}^2}} - 1 \quad (3.18)$$

$$E_z^- = \frac{\det Q}{\sqrt{\alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2 + \alpha_{33}^2}} - 1$$

Chamando de i_1, i_2, i_3 os vetores unitários das três direções acima que, após a deformação, tornam-se ortogonais, seus cossenos diretores com o sistema de eixos coordenados x, y, z podem ser tabelados da forma:

	i_1	i_2	i_3
x	$\frac{1 + E_x^-}{\det \underline{Q}} \cdot \alpha_{11}$	$\frac{1 + E_y^-}{\det \underline{Q}} \cdot \alpha_{12}$	$\frac{1 + E_z^-}{\det \underline{Q}} \cdot \alpha_{13}$
y	$\frac{1 + E_x^-}{\det \underline{Q}} \cdot \alpha_{21}$	$\frac{1 + E_y^-}{\det \underline{Q}} \cdot \alpha_{22}$	$\frac{1 + E_z^-}{\det \underline{Q}} \cdot \alpha_{23}$
z	$\frac{1 + E_x^-}{\det \underline{Q}} \cdot \alpha_{31}$	$\frac{1 + E_y^-}{\det \underline{Q}} \cdot \alpha_{32}$	$\frac{1 + E_z^-}{\det \underline{Q}} \cdot \alpha_{33}$

(3.19)

O volume do paralelepípedo infinitesimal de lados dx , dy , dz é dado por:

$$V = dx \cdot dy \cdot dz \quad (3.20)$$

Após a deformação, o paralelepípedo torna-se oblíquo, sendo as projeções dos lados deformados $d\bar{x}$, $d\bar{y}$, $d\bar{z}$ calculadas por (3.10). O volume, então, passa a ser:

$$\bar{V} = d\bar{x} \cdot d\bar{y} \cdot d\bar{z} = \det \underline{Q} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad (3.21)$$

A razão entre os volumes final e inicial é:

$$\frac{\bar{V}}{V} = \det \underline{Q} = 1 + \Delta \quad (3.22)$$

onde Δ é a mudança relativa no volume do corpo, devido à deformação.

Como na teoria de pequenas deformações desprezam-se alongamentos e distorções, comparados à unidade, a tabela (3.19) reduz-se a :

	i_1	i_2	i_3
x	α_{11}	α_{12}	α_{13}
y	α_{21}	α_{22}	α_{23}
z	α_{31}	α_{32}	α_{33}

(3.23)

A substituição de u, v, w por u_0, v_0, w_0 na definição dos parâmetros α_{ij} (3.12) permite escrever:

$$\sqrt{\alpha_1^0{}^2 + \alpha_2^0{}^2 + \alpha_3^0{}^2} = 1 \quad (3.24)$$

sendo α_i^0 como em (3.7).

Logo, introduzindo (3.24) em (3.8), obtem-se:

$$\lambda = \alpha_3^0 - 1 \quad (3.25)$$

Levando (3.25) em (3.6) :

$$\theta = \alpha_1^0 \quad (3.26)$$

$$\psi = \alpha_2^0$$

A consideração de (3.25) e (3.26) em (3.4) proporciona que se obtenha uma relação através da qual é possível calcular os deslocamentos de um ponto qualquer da estrutura em termos dos deslocamentos do ponto correspondente na superfície média, função de x e y apenas.

Substituindo esses valores de deslocamentos nas expressões das componentes do tensor de deformações de Green:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \varepsilon_{x_0} + z \cdot \beta_x + z^2 \cdot \eta_x \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_{y_0} + z \cdot \beta_y + z^2 \cdot \eta_y\end{aligned}\quad (3.27)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy_0} + z \cdot \beta_{xy} + z^2 \cdot \eta_{xy}$$

sendo:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{x_0} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_{y_0} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right]\end{aligned}\quad (3.28)$$

$$\gamma_{xy_0} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_0}{\partial y}$$

$$\beta_x = \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\beta_y = \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y}\quad (3.29)$$

$$\beta_{xy} = \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\begin{aligned} \eta_x &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \eta_y &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right] \\ \eta_{xy} &= \frac{\partial \theta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Os termos em z^2 indicam que uma lei de variação linear dos deslocamentos ao longo da espessura implica numa lei de variação quadrática dos componentes de deformação. Entretanto, para pequenas deformações, as correções introduzidas pelos termos não-lineares são insignificantes, podendo ser desprezadas.

A equação (3.27) reduz-se, então, a :

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \epsilon_{x_0} + z \cdot \beta_x \\ \epsilon_y &= \epsilon_{y_0} + z \cdot \beta_y \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy_0} + z \cdot \beta_{xy} \end{aligned} \quad (3.31)$$

onde os parâmetros β_x , β_y , β_{xy} caracterizam a curvatura da su perfície média deformada da placa.

As equações (3.31) são utilizadas em problemas de deflexões muito grandes. Quando as rotações que os elementos do corpo sofrem são pequenas comparadas à unidade, algumas simplificações podem ser introduzidas em (3.28) e (3.29).

Na teoria de placas delgadas sujeitas a pequenas deformações, além disso, admite-se que as rotações relativas dos

elementos em torno do eixo z (normal à superfície média) são muito menores que em torno de x e y . Essa propriedade deriva do fato de placas serem estruturas muito rígidas no seu plano.

De acordo com essas considerações, podem ser desprezados em (3.28) e (3.29) todos os termos não-lineares, exceto os correspondentes a rotações da superfície média. Obtem-se, então:

$$\begin{aligned}\epsilon_{x_0} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \epsilon_{y_0} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2\end{aligned}\quad (3.32)$$

$$\gamma_{xy_0} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_0}{\partial y}$$

$$\beta_x = \frac{\partial \theta}{\partial x} = - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}$$

$$\beta_y = \frac{\partial \psi}{\partial x} = - \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\quad (3.33)$$

$$\beta_{xy} = \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = - 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}$$

A substituição de (3.32) e (3.33) em (3.31) leva às equações propostas por T. von Kármán para a deformação de placas. Para este grau de aproximação, os deslocamentos de um ponto qualquer da placa são calculados a partir dos deslocamentos de pontos correspondentes na superfície média por:

$$u = u_0 - z \cdot \frac{\partial w_0}{\partial x}$$

$$v = v_0 - z \cdot \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (3.34)$$

$$w = w_0$$

3.2 - FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Através das equações (3.34) observa-se que o estudo foi reduzido de tri para bidimensional. Resta, agora, desenvolver uma formulação eficiente para se calcular os deslocamentos de pontos situados na superfície média.

A relação entre deformações e deslocamentos da superfície média (3.31) pode ser escrita em forma matricial como:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^P + z \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}^F \quad (3.35)$$

sendo:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^P = \underline{\underline{\varepsilon}}^{P,0} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{P,L} \quad (3.36)$$

definidos em (3.32) e (3.33):

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{P,0} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right\} ; \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^{P,L} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ 2 \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right\} \quad (3.37)$$

$$\underline{\varepsilon}^F = - \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} \quad (3.38)$$

O vetor $\underline{\varepsilon}^P$ contém as deformações provenientes do estado plano de tensões, sendo $\underline{\varepsilon}^{P,0}$ a contribuição infinitesimal e $\underline{\varepsilon}^{P,L}$ a parcela não-linear, consequência das mudanças na geometria da estrutura. O vetor $\underline{\varepsilon}^F$ contém as deformações por flexão, produzidas pela curvatura da superfície média.

As tensões correspondentes a estas deformações são, usualmente, definidas em termos de esforços solicitantes. Na formulação clássica da teoria de placas, esforços normais e momentos fletores e torsões por unidade de comprimento são calculados por:

$$N_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x \cdot dz \quad ; \quad N_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y \cdot dz \quad ; \quad N_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} \cdot dz \quad (3.39)$$

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} z \cdot \sigma_x \cdot dz \quad ; \quad M_y = \int_{-t/2}^{t/2} z \cdot \sigma_y \cdot dz \quad ; \quad M_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} z \cdot \tau_{xy} \cdot dz \quad (3.40)$$

onde σ_x e σ_y são as tensões normais, τ_{xy} a tensão cisalhante e t a espessura da placa.

Para materiais isotrópicos, a matriz \underline{D} que relacio

na tensões e deformações tem a seguinte forma:

$$\underline{D} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Assim, integrando as equações (3.39) e (3.40) obtem-se:

$$\underline{N} = \left\{ N_x \quad N_y \quad N_{xy} \right\}^T = \underline{D}^P \cdot \underline{\varepsilon}^P \quad (3.42)$$

$$\underline{T} = \left\{ M_x \quad M_y \quad M_{xy} \right\}^T = \underline{D}^F \cdot \underline{\varepsilon}^F \quad (3.43)$$

sendo:

$$\underline{D}^P = t \cdot \underline{D} \quad (3.44)$$

$$\underline{D}^F = \frac{t^3}{12} \cdot \underline{D}$$

Definindo a relação entre deslocamentos num ponto qualquer e deslocamentos nodais por:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \underline{N} \cdot \underline{\delta} \quad (3.45)$$

onde:

$$\underline{\delta}_i = \begin{Bmatrix} \underline{\delta}_i^P \\ \underline{\delta}_i^F \end{Bmatrix} \quad (3.46)$$

$$\underline{N}_i = \begin{bmatrix} \underline{N}_i^P & 0 \\ 0 & \underline{N}_i^F \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

é possível transformar as equações (3.37) e (3.38) em :

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon}^{P,0} &= \underline{B}^P \cdot \underline{\delta}^P \\ \underline{\varepsilon}^{P,L} &= \frac{1}{2} \cdot \underline{B}^{F,L} \cdot \underline{\delta}^F \\ \underline{\varepsilon}^F &= \underline{B}^{F,0} \cdot \underline{\delta}^F \end{aligned} \quad (3.48)$$

As matrizes \underline{B}^P e $\underline{B}^{F,0}$ relacionam, respectivamente, deformações infinitesimais de estado plano de tensões e de flexão com os deslocamentos nodais correspondentes. A matriz $\underline{B}^{F,L}$ é não-linear, função dos deslocamentos. Para o seu cálculo é necessário reescrever $\underline{\varepsilon}^{P,L}$ como:

$$\underline{\varepsilon}^{P,L} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \underline{A} \cdot \underline{\theta} \quad (3.49)$$

A diferenciação de (3.49) conduz a :

$$d\underline{\underline{\varepsilon}}^{P,L} = \frac{1}{2} (d\underline{A} \cdot \underline{\theta} + \underline{A} \cdot d\underline{\theta}) = \underline{A} \cdot d\underline{\theta} \quad (3.50)$$

O vetor $\underline{\theta}$ (3.49) é relacionado aos deslocamentos nodais por:

$$\underline{\theta} = \underline{G} \cdot \underline{\delta}^F \quad (3.51)$$

sendo:

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^F}{\partial x} & \frac{\partial N_2^F}{\partial x} & \dots \\ \frac{\partial N_1^F}{\partial y} & \frac{\partial N_2^F}{\partial y} & \dots \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Esta expressão, ao ser diferenciada, fornece:

$$d\underline{\theta} = \underline{G} \cdot d\underline{\delta}^F \quad (3.53)$$

Logo, através de (3.50) e (3.53), chega-se a :

$$d\underline{\underline{\varepsilon}}^{P,L} = \underline{B}^{F,L} \cdot d\underline{\delta}^F \quad (3.54)$$

com:

$$\underline{B}^{F,L} = \underline{A} \cdot \underline{G} \quad (3.55)$$

A matriz de rigidez tangente é obtida pela diferen

ciação com relação a $\underline{\delta}$ da expressão :

$$\underline{F} = \int_V \underline{B}^T \cdot \underline{\sigma} \, dV \quad (3.56)$$

que representa o vetor das forças nodais internas. Assim:

$$d\underline{F} = \underline{K}_T \cdot d\underline{\delta} = \int_V (\underline{B}^T \cdot d\underline{\sigma} + d\underline{B}^T \cdot \underline{\sigma}) \, dV \quad (3.57)$$

A matriz \underline{B} relaciona incrementos de deformações aos deslocamentos:

$$d\underline{\varepsilon} = \underline{B} \cdot d\underline{\delta} \quad (3.58)$$

e pode ser decomposta numa parcela infinitesimal e outra não-linear, da forma:

$$\underline{B} = \underline{B}^0 + \underline{B}^L = \begin{bmatrix} \underline{B}^P & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{B}^{F,0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{B}^{F,L} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

Como \underline{B}^0 independe dos deslocamentos, obtem-se de (3.55):

$$d\underline{B}^T = d \left[\underline{B}^{F,L} \right]^T = \underline{G}^T \cdot d\underline{A}^T \quad (3.60)$$

É possível, então, uma relação do tipo:

$$d\underline{A}^T \cdot \underline{\sigma} = \underline{T}' \cdot d\underline{\theta} = \underline{T}' \cdot \underline{G} \cdot d\underline{\delta}^F \quad (3.61)$$

sendo:

$$\underline{T}' = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

A matriz de rigidez tangente pode, agora, ser avaliada por:

$$\underline{K}_T = \int_V (\underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B} + \underline{G}^T \cdot \underline{T}' \cdot \underline{G}) dV \quad (3.63)$$

A integração explícita ao longo de z fornece:

$$\underline{K}_T = \underline{K}^0 + \underline{K}^L \quad (3.64)$$

onde:

$$\underline{K}^0 = \int_A (\underline{B}^{PT} \cdot \underline{D}^P \cdot \underline{B}^P + \underline{B}^{F,0T} \cdot \underline{D}^F \cdot \underline{B}^{F,0}) dA \quad (3.65)$$

$$\underline{K}^L = \int_A (\underline{B}^{PT} \cdot \underline{D}^P \cdot \underline{B}^{F,L} + \underline{B}^{F,L^T} \cdot \underline{D}^P \cdot \underline{B}^{F,L} + \underline{B}^{F,L^T} \cdot \underline{D}^P \cdot \underline{B}^P + \underline{G}^T \cdot \underline{M}' \cdot \underline{G}) dA \quad (3.66)$$

e:

$$\underline{M}' = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

Separando os componentes do vetor de deformações $\underline{\varepsilon}$ (3.35) em:

$$\underline{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \underline{\varepsilon}^P \\ \underline{\varepsilon}^F \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{B}^O & \frac{1}{2} \cdot \underline{B}^{F,L} \\ \underline{0} & \underline{B}^{F,O} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \underline{\delta}^P \\ \underline{\delta}^F \end{Bmatrix} \quad (3.68)$$

o vetor de forças nodais internas (3.56) pode ser calculado por:

$$\underline{F} = (\underline{K}^O + \underline{K}^F) \underline{\delta} \quad (3.69)$$

com \underline{K}^O como em (3.65) e:

$$\underline{K}^F = \int_A \left(\frac{1}{2} \cdot \underline{B}^{P,T} \cdot \underline{D}^P \cdot \underline{B}^{F,L} + \underline{B}^{F,L,T} \cdot \underline{D}^P \cdot \underline{B}^P + \frac{1}{2} \cdot \underline{B}^{F,L,T} \cdot \underline{D}^P \cdot \underline{B}^{F,L} \right) dA \quad (3.70)$$

3.3 - ELEMENTOS IMPLEMENTADOS

Com a formulação desenvolvida, diversos modelos podem ser implementados, entre elementos triangulares, retangulares e quadriláteros arbitrários, com variadas opções no que diz respeito à definição do campo de deslocamentos.

Brebbia e Connor⁶ desenvolveram um elemento para cascas abatidas no qual a curvatura da estrutura é levada em conta nas relações deformações-deslocamentos. O vetor $\underline{\varepsilon}^{P,0}$ tem a forma:

$$\underline{\varepsilon}^{P,0} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} - w \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \\ \frac{\partial v}{\partial y} - w \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \cdot w \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \end{array} \right. \quad (3.71)$$

sendo a casca considerada abatida quando:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2, \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \ll 1 \quad (3.72)$$

Para tal, valeram-se da associação de elemento linear de estado plano de tensões com o elemento R-12 (41), cúbico não-conforme de flexão. Deste modo, a parcela linear da matriz de rigidez tangente pode ser avaliada explicitamente. A contribuição não-linear, porém, é calculada por meio de integração numérica, devido à complexidade dos termos envolvidos.

Gallagher e outros^{4,2} estudaram fenômenos de instabilidades de placas e cascas abatidas utilizando-se de elemento quadrilátero plano. Neste caso, a parcela não-linear da matriz de rigidez considera apenas a influência das forças de membrana na rigidez à flexão da estrutura (termo $\underline{G}^T \cdot \underline{M}' \cdot \underline{G}$).

Com a finalidade de possibilitar a integração ex-

plícita das matrizes dos elementos, algumas simplificações foram introduzidas, por exemplo, a consideração de forças de membrana constantes em cada elemento, iguais à média das mesmas por nó. O comportamento flexional do elemento é aproximado por meio de um polinômio de terceiro grau. Assim, na avaliação da matriz \underline{K}^0 (3.65), como aparecem apenas derivadas segundas dos deslocamentos de flexão, vários coeficientes do polinômio são eliminados, tornando simples a integração. A matriz \underline{G} (3.52), entretanto, é função de derivadas de primeira ordem desses deslocamentos, o que torna a integração de \underline{K}^L (3.66) muito complexa.

Foram adotadas, então, no cálculo de \underline{K}^0 e \underline{K}^L , expansões de ordens diferentes para os deslocamentos de flexão: cúbica no primeiro caso, linear ou quadrática no segundo. Comprovou-se que os erros introduzidos por essa inconsistência são reduzidos com o refinamento das malhas.

Prato⁴³, seguindo uma formulação mista assumiu, além das forças de membrana, também a matriz \underline{A} (3.49) de rotações constante para cada elemento.

Bergan e Clough⁴⁴ estudaram placas com deformações iniciais utilizando elemento quadrilátero parcialmente quadrático, composto pela associação do elemento isoparamétrico linear de estado plano de tensões (17) com o elemento Q-19 de flexão (45). Na formação do Q-19, utilizam-se quatro triângulos com três graus de liberdade (w, θ_x, θ_y) por nó. Para garantir compatibilidade de deslocamentos no interior do elemento, definem-se nós no ponto médio das fronteiras comuns a cada dois triângulos. Estes nós apresentam possibilidade de rotação em torno da normal à superfície média (θ_n) , totalizando dezenove graus de liberdade por elemento.

Ao se acoplar o elemento isoparamétrico, que possui dois graus de liberdade (u, v) por nó, funções de deslocamentos associadas aos deslocamentos no plano, para o nó central, são incluídas na análise. Posteriormente, eliminam-se os graus de liberdade de todos os nós internos por meio de condensação estática. A consideração de deformações iniciais é feita através de funções de interpolação adequadas.

Como o presente trabalho pretende efetuar comparação entre resultados obtidos com formulação tridimensional e de placas delgadas, procurou-se manter as mesmas características geométricas do elemento desenvolvido no capítulo anterior. Optou-se, desta forma, por elemento retangular para a solução dos exemplos analisados. O comportamento de estado plano é representado por expansão linear e, à flexão, por expansão cúbica, preservando-se compatibilidade de deslocamentos, apenas. A rotação θ_n em torno da normal à superfície média é incluída como grau de liberdade fictício ao nível do elemento, necessário para a obtenção da matriz de rigidez da estrutura.

Polinômios de ordem mais alta também podem ser usados tanto para aproximar o comportamento de estado plano de tensões quanto para o flexional. Como na análise não-linear o tempo de geração das matrizes dos elementos é crítico, parece ser mais eficiente a utilização de elementos simples, muito embora estes elementos exijam discretizações refinadas da estrutura.

A parcela linear da matriz de rigidez tangente e do vetor de forças nodais equivalentes foi obtida explicitamente da referência (41), sendo a contribuição não-linear calculada através de integração numérica. Testaram-se diversos esquemas de integração, adotando-se 2×2 pontos de Gauss.

A matriz de massa consistente, da mesma forma, é explicitada em (41), havendo necessidade de transformação idêntica a da matriz de rigidez a fim de se obter a matriz de massa da estrutura. Matrizes de massa discreta também são consideradas.

Seguindo o mesmo tipo de aproximação, dois outros modelos foram incluídos: o triângulo correspondente à associação dos elementos TRIM-3 e T-9 e o quadrilátero obtido por mera condensação de quatro destes triângulos.

IV - RESULTADOS DE ANÁLISES

Neste capítulo procura-se estabelecer comparação entre os resultados numéricos obtidos através da utilização das duas formulações desenvolvidas anteriormente. Para tal, estudam-se estruturas laminares de diferentes formas geométricas. Sempre que possível, as soluções do método dos elementos finitos são confrontadas com soluções analíticas ou experimentais, a fim de se verificar a concordância entre os vários métodos no tratamento do fenômeno de não-linearidade geométrica.

Na primeira análise, empregam-se elementos particularizados para flexão de placas. Os estudos efetuados comprovam o grande enrijecimento que estas estruturas apresentam, normalmente, quando se considera a influência das forças de membrana na rigidez à flexão.

A resposta dinâmica da casca cilíndrica engastada do segundo exemplo é obtida para uma carga de intensidade maior que a de flambagem. Diferentes tempos de duração da carga são considerados. Comparam-se soluções lineares e não-lineares.

O comportamento não-linear de "folded plates" sujeitas a cargas transversais é discutido no terceiro exemplo. Para possibilitar este estudo, faz-se necessária a consideração do sexto grau de liberdade no campo de deslocamentos do elemento desenvolvido para cascas. Analisam-se diversos modelos, com excelentes resultados.

4.1 - PLACA SIMPLEMENTE APOIADA

a) Carga Estática

As características geométricas e propriedades da placa são mostradas na figura (4.1). A carga aplicada é de 15 psi, uniformemente distribuída. Devido à simetria, analisou-se apenas uma quarta parte da estrutura.

Este problema foi resolvido analiticamente por Levy⁴⁶, que utilizou as equações diferenciais de grandes deflexões propostas por von Kármán, obtendo a solução através de expansão em séries trigonométricas. Bergan e Clough⁴⁴ estudaram o mesmo caso por meio de M.E.F., valendo-se do elemento quadrilátero descrito no capítulo anterior, adotando malha 4 x 4 na discretização da estrutura. Os resultados concordaram com os de Levy.

A estrutura apresenta forte não-linearidade geométrica, enrijecendo-se rapidamente com a deformação. Assim, a aplicação da carga deve ser feita através de pequenos incrementos no início e verificações de equilíbrio para correção da configuração deformada do corpo.

A análise com o elemento degenerado de placas ("PLAIDQ") foi efetuada com malha 2 x 2 e, com o de placas delgadas ("FPRNC"), através de 16 elementos (4 x 4). Dividiu-se a carga total em sete incrementos, sendo os três primeiros de 1 psi e os demais de 3 psi. Os resultados obtidos com o elemento degenerado, comparados aos de Levy, encontram-se nas figuras (4.1) e (4.2). Como se trata de uma placa delgada, as deformações por cisalhamento transversal não têm influência na análise, conforme mostra a tabela 4.1, onde se compara também o número de iterações efetuadas em cada incremento de carga. O método adotado para a resolução do sistema de equações não-lineares foi o de Newton-Raphson, com

tolerância fixada em 1% .

CARGA (psi)	DESLOCAMENTO CENTRAL ($\times 10^{-2}$ in)		Nº DE ITERAÇÕES	
	"PLAIDQ"	"FPRNC"	"PLAIDQ"	"FPRNC"
1	5,803	5,775	6	5
2	8,242	8,274	3	3
3	9,931	9,979	3	3
6	13,342	13,410	2	2
9	15,710	15,785	2	2
12	17,591	17,664	2	2
15	19,180	19,246	2	2

TABELA 4.1 - PLACA SIMPLEMENTE APOIADA

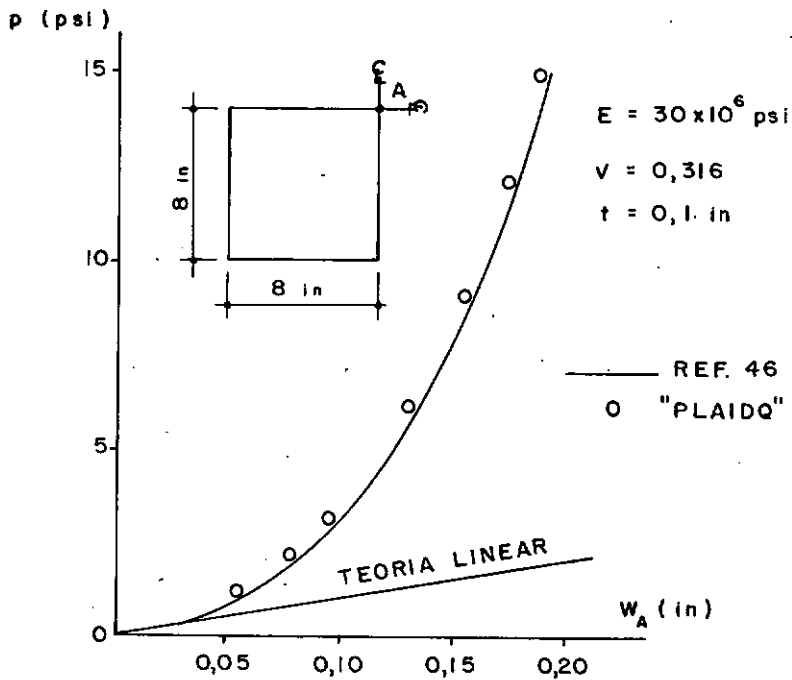


FIGURA 4.1- DEFLEXÕES DO NÓ CENTRAL

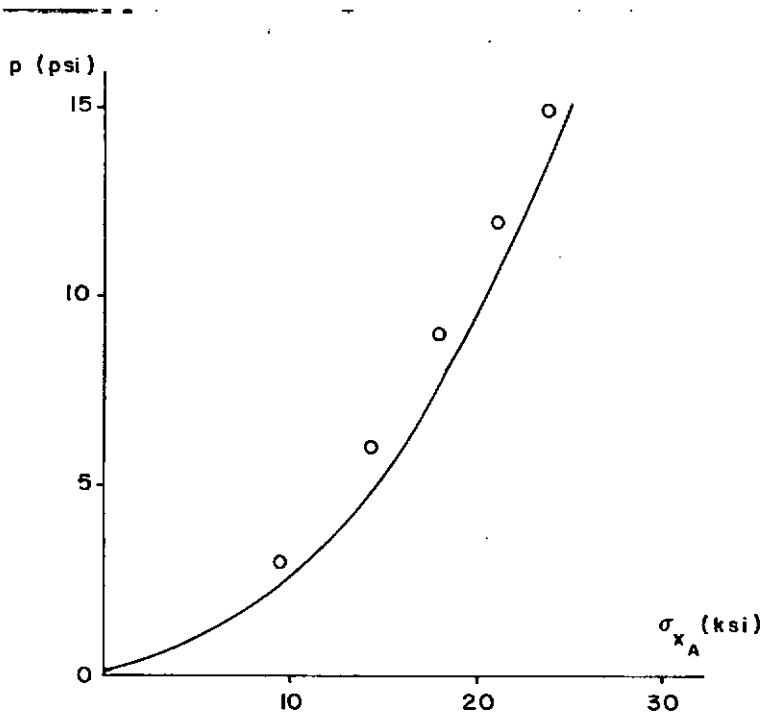


FIGURA 4.2 - TENSÕES NO NÓ CENTRAL

b) Carga Dinâmica

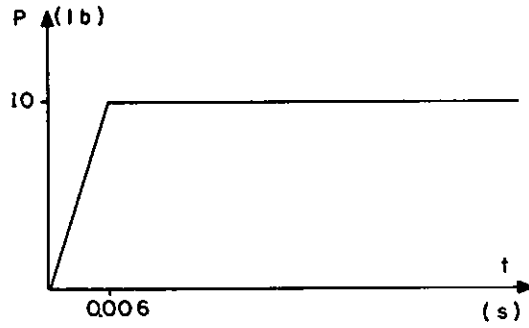
A placa retangular da figura (4.3b) é exemplo do manual do programa NONSAP³⁴, onde se obtém a resposta dinâmica linear para uma carga de aplicação súbita e constante (figura 4.3a). Utilizando este exemplo, procurou-se comparar as respostas não-lineares fornecidas pela estrutura para o mesmo caso de carregamento.

Na figura (4.4) é mostrada a variação da deflexão do nó central ao longo do tempo. Note-se que os deslocamentos são da ordem de metade da espessura, logo o problema é fracamente não-linear. Contudo, estes efeitos ainda são sensíveis, reduzindo a deflexão máxima em aproximadamente 20%, tanto na análise estática como na dinâmica. Também o período natural diminui com a não-linearidade.

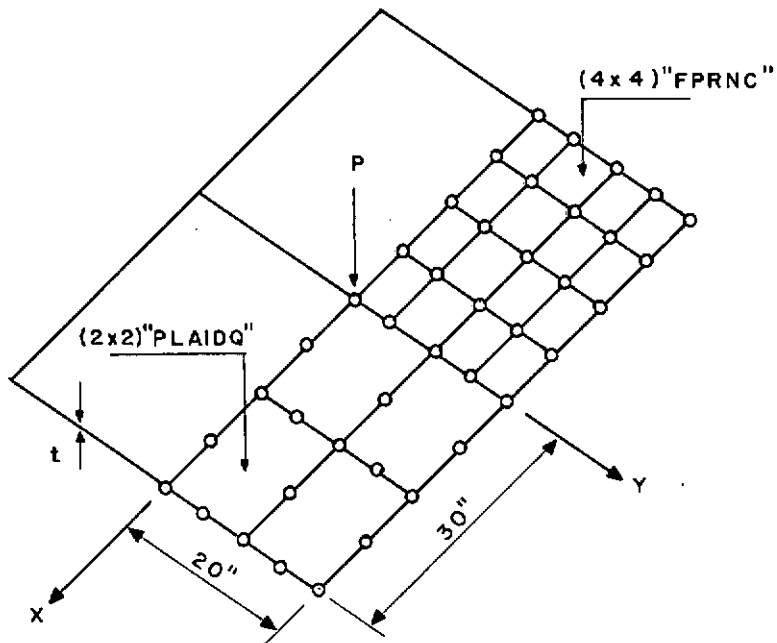
As respostas dinâmicas foram obtidas com matrizes

de massa consistente. Considerou-se, também, matrizes de massa discreta, nas quais a inércia de rotação foi desprezada. Os resultados coincidiram com os anteriores.

Para verificar a convergência das soluções, malhas mais refinadas dos dois elementos foram analisadas, porém os resultados não mostraram qualquer alteração significativa.



(a) CARGA CONCENTRADA



$$E = 30000 \text{ lb / in}^2 \quad \nu = 0.25$$

$$\rho = 0.0003 \frac{\text{lb. s}^2}{\text{in}^4} \quad t = 1 \text{ in}$$

(b) CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS

FIGURA 4.3 - PLACA COM CARGA DINÂMICA

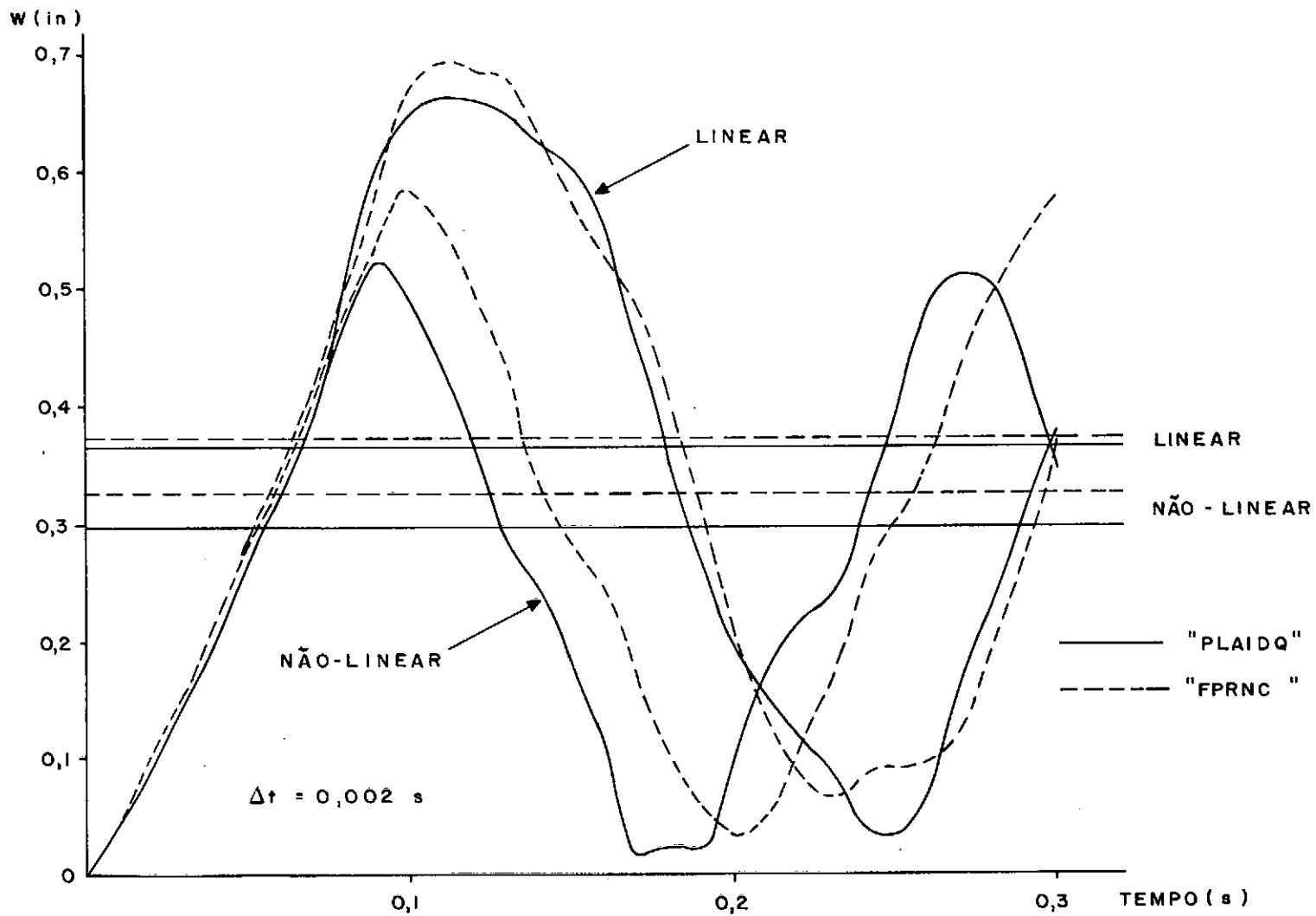


FIGURA 4.4 - DEFLEXÕES DO NÓ CENTRAL

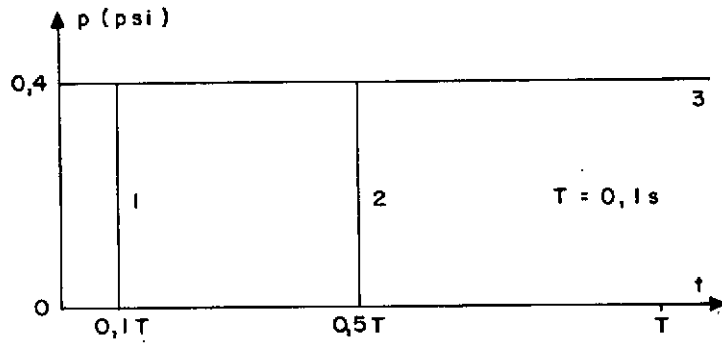
4.2 - CASCA CILÍNDRICA ENGASTADA

A casca cilíndrica da figura (4.5b) é exemplo clássico, constando em diversos trabalhos sobre o método dos elementos finitos (6, 31, 47). Pretende-se estudar os efeitos da não-linearidade na sua resposta a cargas dinâmicas.

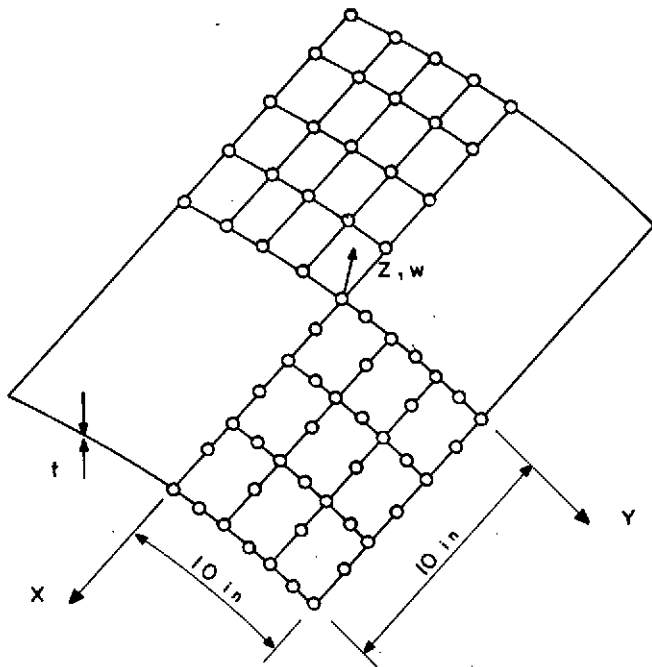
A geometria, propriedades e variação da carga com o tempo são mostradas em (4.5). Foram efetuadas três análises: na primeira, a carga considerada tem curta duração, atuando apenas cerca de 10% do período do primeiro modo normal de vibração; na segunda, atua durante metade deste período e, na terceira, tem duração infinita, com valor constante.

Como a casca é muito abatida, as deflexões provocam considerável mudança na forma de seção transversal. Essas mudanças são responsáveis pela não-linearidade da resposta. No caso especial da Figura (4.8), as deflexões são de ordem tal que a curvatura da casca é alterada, com ocorrência de "snap-through".

Nas soluções obtidas observa-se que, em todos os casos, a análise linear fornece resultados menores que os não-lineares. Esta diferença é afetada pela duração da carga: é da ordem de 20% na figura (4.6); em (4.7), aumenta para 50%; na figura (4.8), é superior a 80%.



(a) CARGA DISTRIBUIDA



$$E = 450000 \text{ psi}$$

$$\rho = 0,0001 \frac{\text{lb} \cdot \text{s}^2}{\text{in}^4}$$

(b) CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS

$$R = 100 \text{ in}$$

$$\nu = 0,3$$

$$t = 0,125 \text{ in}$$

FIGURA 4.5- CASCA CILÍNDRICA ENGASTADA

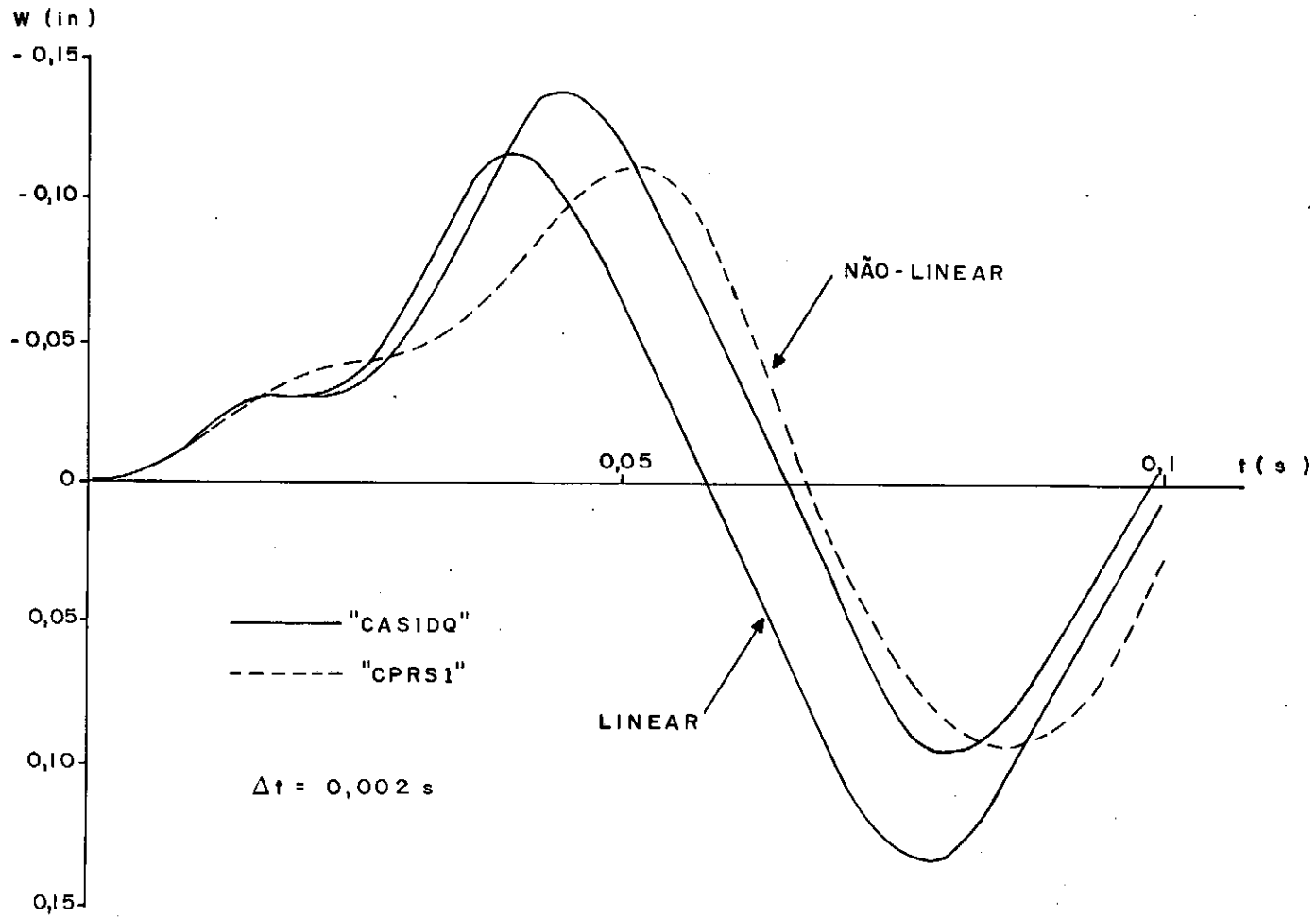


FIGURA 4.6 - DEFLEXÃO CENTRAL (CASO 1)

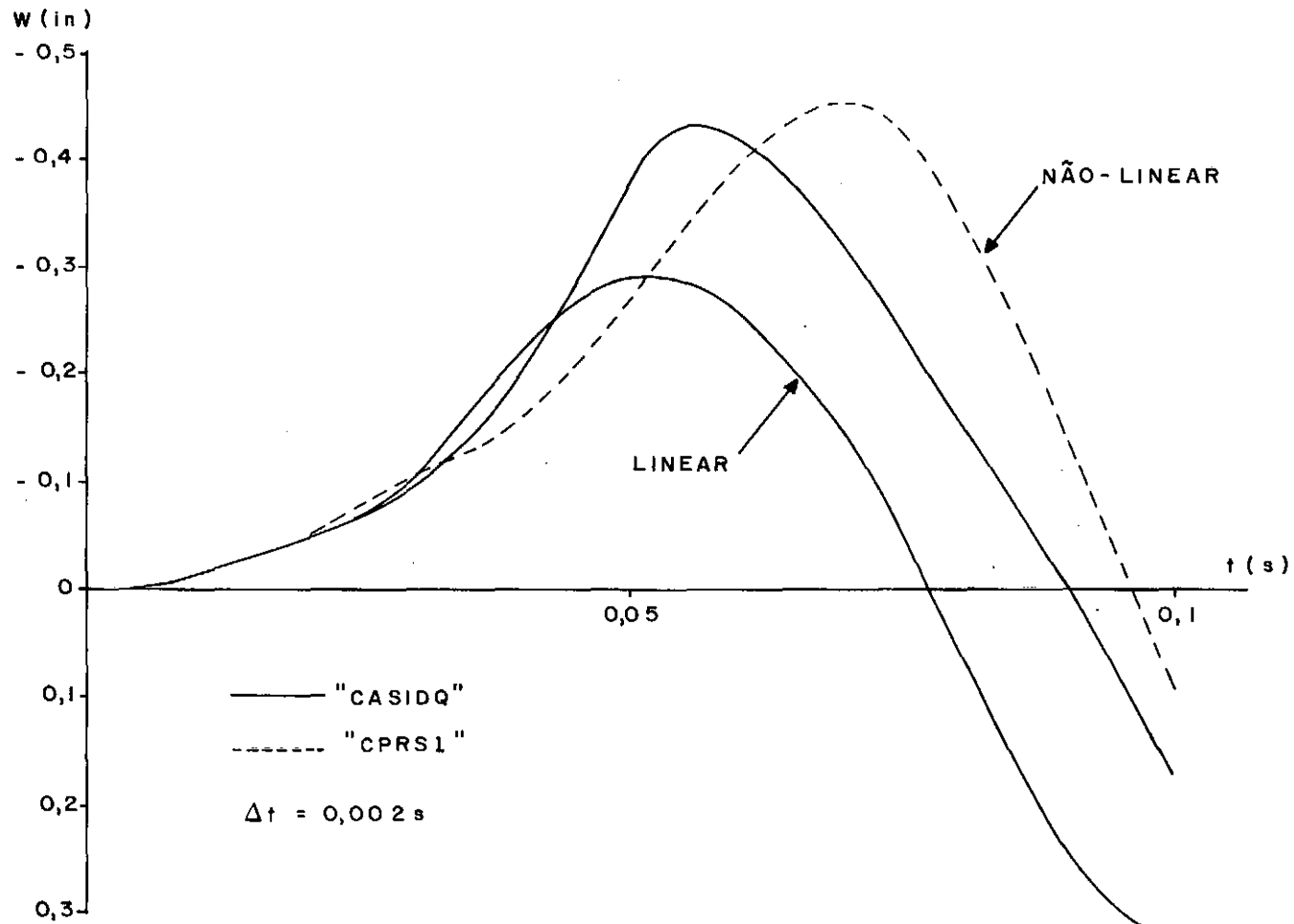


FIGURA 4.7- DEFLEXÃO CENTRAL (CASO 2)

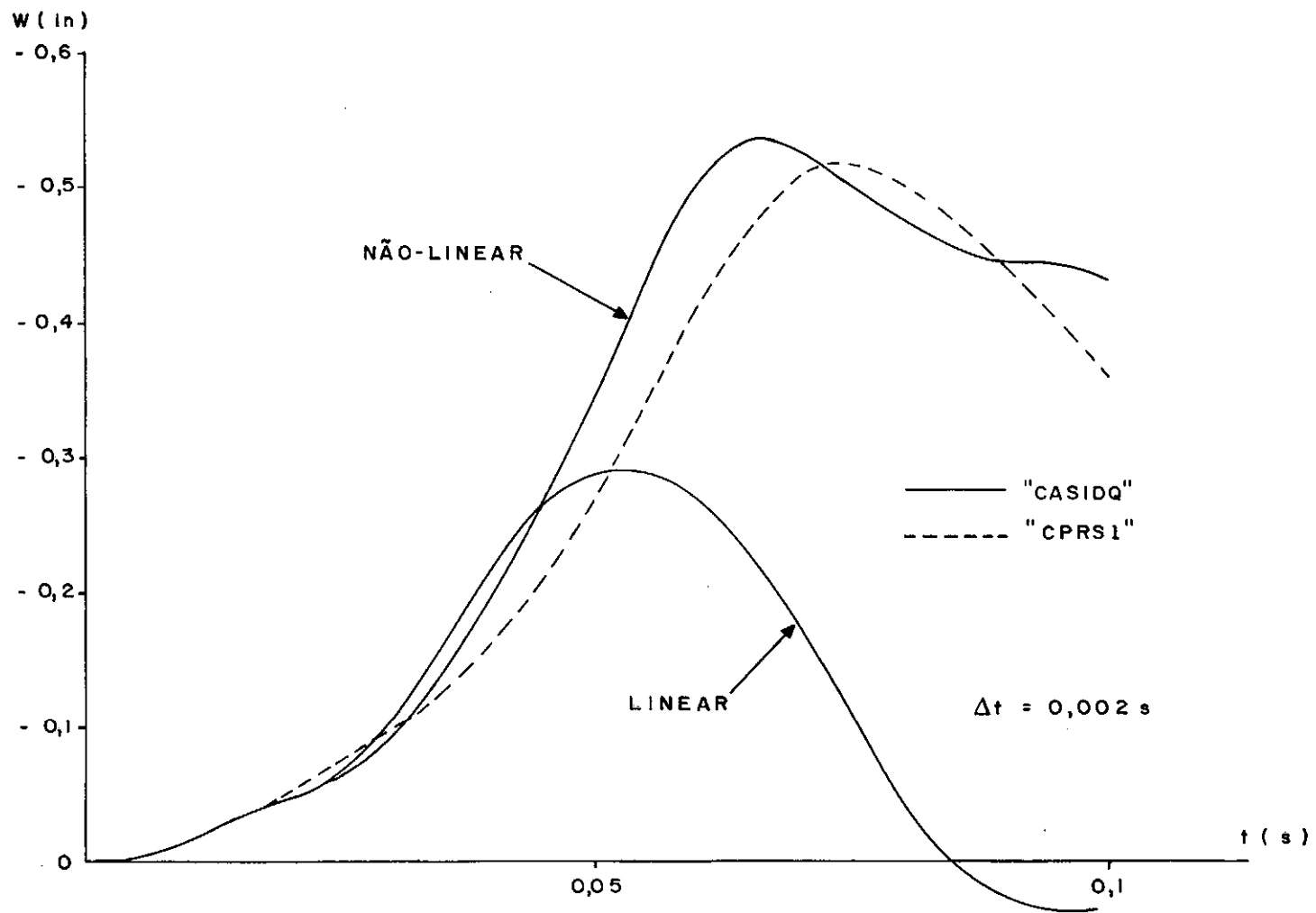


FIGURA 4.8 - DEFLEXÃO CENTRAL (CASO 3)

4.3 - "FOLDED PLATES"

Apesar da crescente utilização deste tipo de estrutura, poucos resultados numéricos de análises de seu comportamento não-linear são fornecidos. Assim, para testar a eficiência dos elementos desenvolvidos, no presente trabalho, na análise de estruturas cuja superfície média apresenta descontinuidades estudou-se, inicialmente, um exemplo simples de viga com seção T .

Foram considerados dois tipos de seção transversal diferentes, porém com mesma área e momento de inércia, de modo que os resultados obtidos com uso de elementos derivados de teoria de viga-coluna sejam iguais em ambos os casos. As características e propriedades das estruturas são mostradas nas figuras (4.9a) e (4.9b), como também as malhas adotadas.

Na figura (4.10), observa-se que as deflexões obtidas com o elemento tridimensional degenerado ("PRIIDQ") praticamente coincidem com o resultado dos elementos de pórtico plano ("PP"). Além disso, não houve qualquer alteração sensível entre os resultados para os dois tipos de seção. O mesmo não ocorre com o elemento de placas delgadas ("CPRS1"), que não considera deformações por cisalhamento transversal, significativas nesta análise.

A alma da viga é associada a uma placa com carga no próprio plano, logo seu comportamento de flexão é aproximado pela expansão linear de estado plano da placa.

Os resultados obtidos para o tipo II são melhores que para o tipo I, pois no primeiro caso a flexão da mesa (representada por expansão cúbica) é predominante, enquanto no segundo caso predomina a flexão da alma.

Esforços normais e momentos fletores na seção de

engastamento são confrontados nas tabelas (4.2) e (4.3). A principal diferença entre os resultados parece ser a consideração de deformações por cisalhamento na formulação tridimensional. Entretanto, outro fator de influência é a incompatibilidade de deslocamentos que ocorre, no elemento "CPRS1", ao longo da interseção entre mesa e alma. O deslocamento w da mesa, aproximado por expansão cúbica, coincide em direção com o deslocamento v da alma, aproximado por expansão linear. Essa inconsistência não acontece no elemento "PRIIDQ", onde todos os deslocamentos tem variação quadrática.

CARGA (t)	T I P O I				T I P O II			
	"PRIIDQ"		"CPRS1"		"PRIIDQ"		"CPRS1"	
	A	B	A	B	A	B	A	B
4	11651	14934	9358	10734	17713	20533	13466	14510
8	20590	26315	15536	18484	32193	37040	23386	24958
12	28140	35934	19869	24588	44545	51298	31060	33150
16	35102	44682	23230	29779	56475	64406	37512	40108

TABELA 4.2 - ESFORÇOS NORMAIS N_x (t/m) NO ENGASTE

CARGA (t)	T I P O I				T I P O II			
	"PRIIDQ"		"CPRS1"		"PRIIDQ"		"CPRS1"	
	A	B	A	B	A	B	A	B
4	- 152	- 135	- 180	- 134	- 1065	- 1046	- 1096	- 1100
8	- 265	- 224	- 364	- 226	- 1722	- 1733	- 1829	- 1792
12	- 361	- 301	- 527	- 304	- 2278	- 2297	- 2456	- 2374
16	- 445	- 372	- 674	- 375	- 2769	- 2801	- 3015	- 2890

TABELA 4.3 - MOMENTOS FLETORES M_x (t · m/m) NO ENGASTE

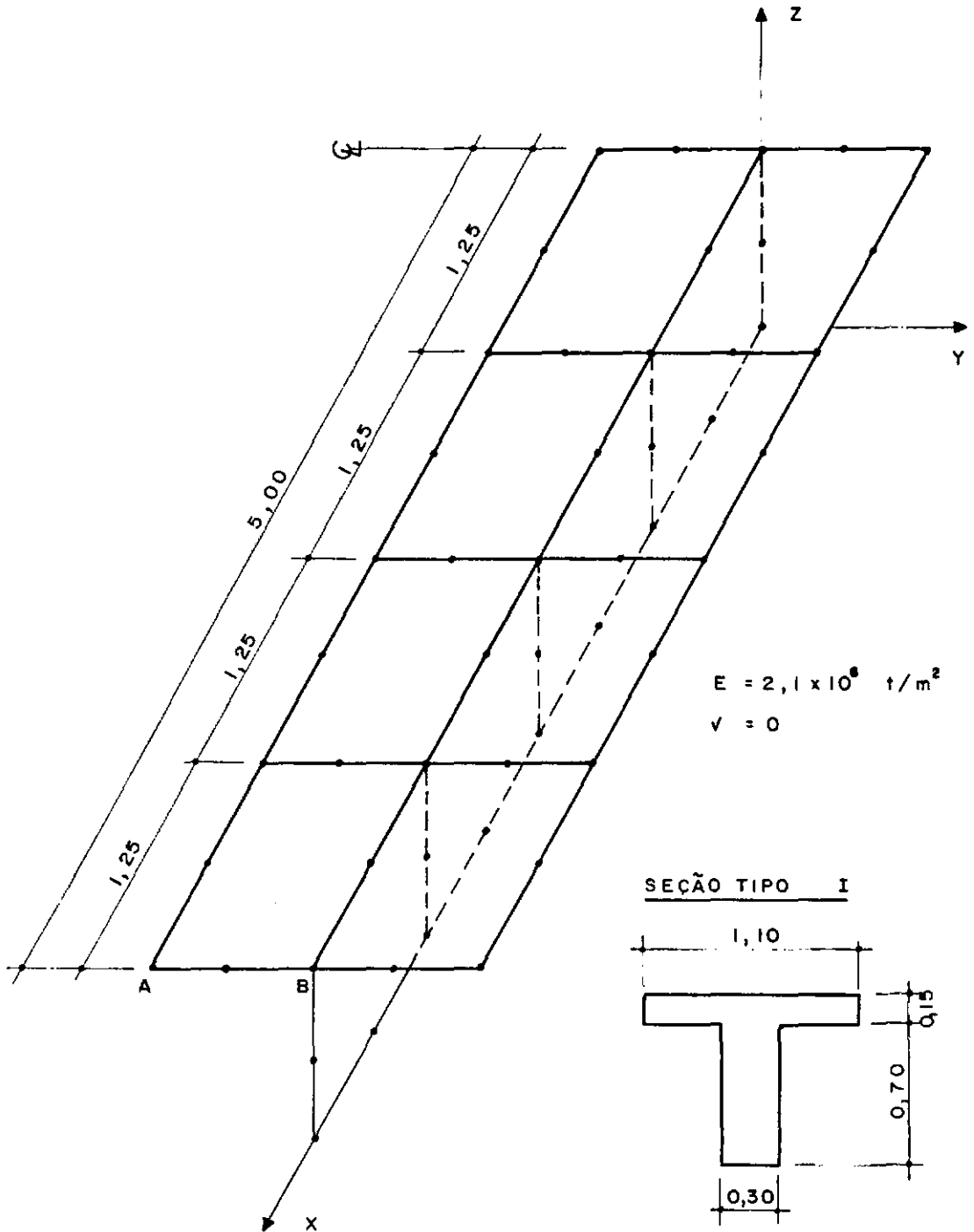


FIGURA 4.9 a - VIGA COM SEÇÃO T - ELEMENTO "PRILDO"

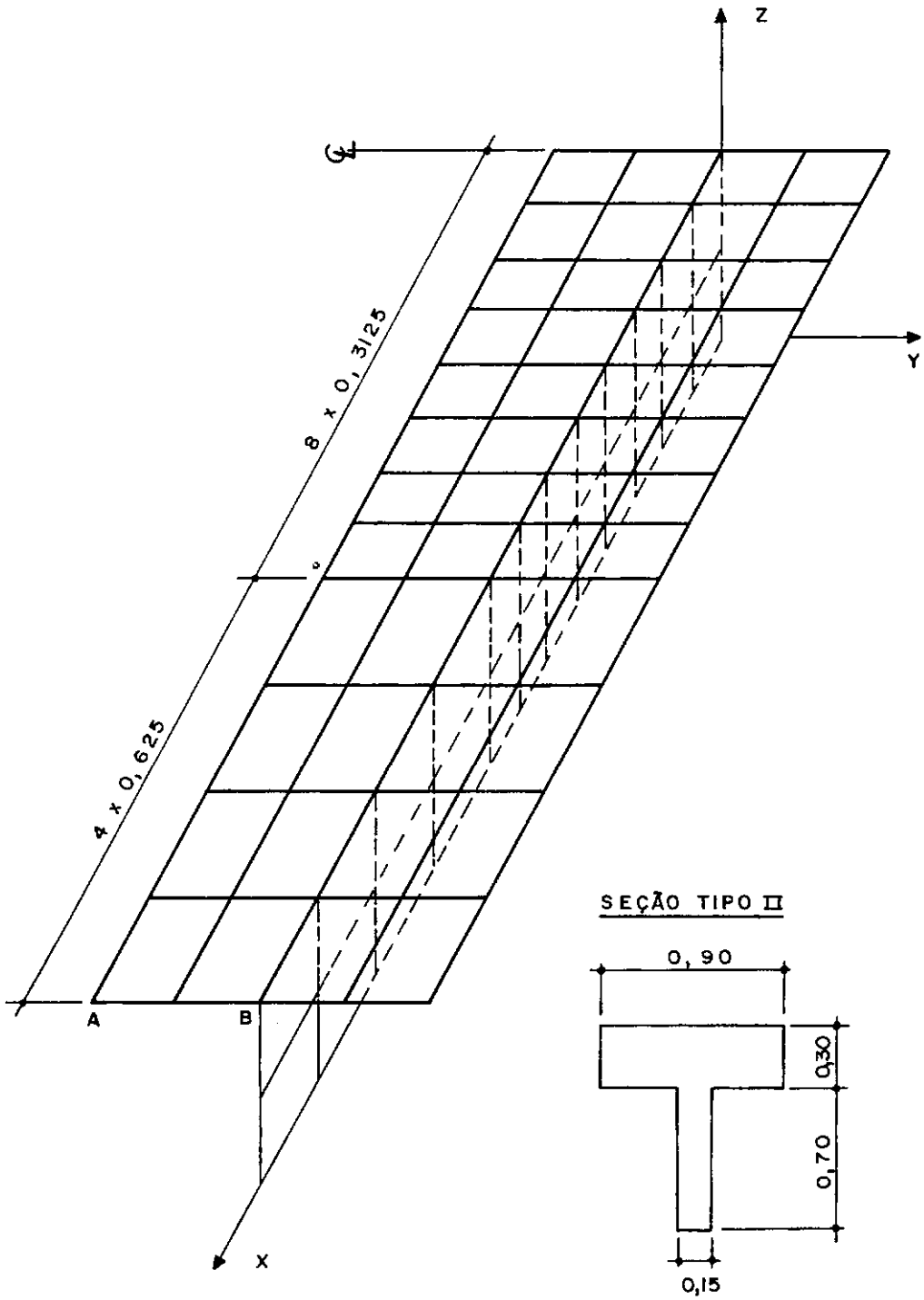


FIGURA 4.9 b - VIGA COM SEÇÃO T - ELEMENTO "CPRS I"

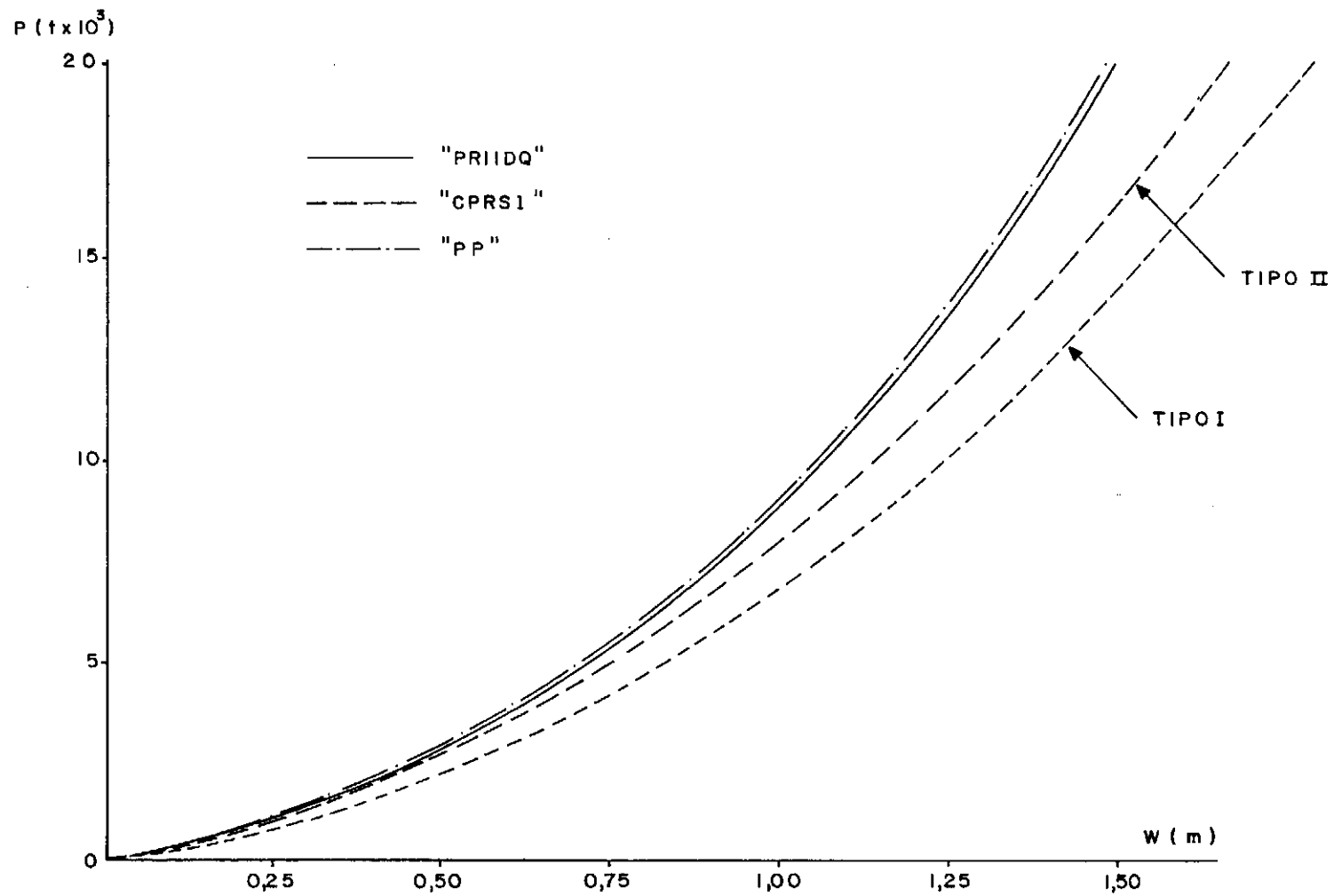


FIGURA 4.10- DEFLEXÃO CENTRAL

O elemento degenerado, por ser de formulação isoparamétrica, é bastante eficiente na discretização de geometrias arbitrárias. Para demonstrar essa propriedade, recorreu-se a um exemplo analisado na referência (11) através de elementos retangulares de formulação híbrida, com seis graus de liberdade por nó. As características do modelo encontram-se na figura (4.11). Os diafragmas das extremidades foram construídos com chapas de alumínio da mesma espessura das que compõem a estrutura e ligados às lâminas por meio de cantoneiras de aço.

Inicialmente, a consideração dos diafragmas foi feita através de condições de contorno apropriadas. Sendo estes delgados, restringiram-se apenas deslocamentos no seu próprio plano. A tabela (4.4) apresenta uma comparação com resultados de (11). Como a carga aplicada provoca deslocamentos muito pequenos, desprezam-se os efeitos de não-linearidade.

Numa segunda análise, os diafragmas também foram discretizados, obtendo-se elementos bastante distorcidos (figura 4.12). Os resultados dessa análise, comparados à anterior, são mostrados na tabela (4.5). Apesar dos diafragmas terem sido considerados como infinitamente flexíveis perpendicularmente ao seu plano, as diferenças foram pequenas mesmo para pontos situados na sua proximidade. Conclui-se que esta aproximação é satisfatória no caso de diafragmas delgados. O grau de distorção dos elementos não teve nenhuma influência nos resultados.

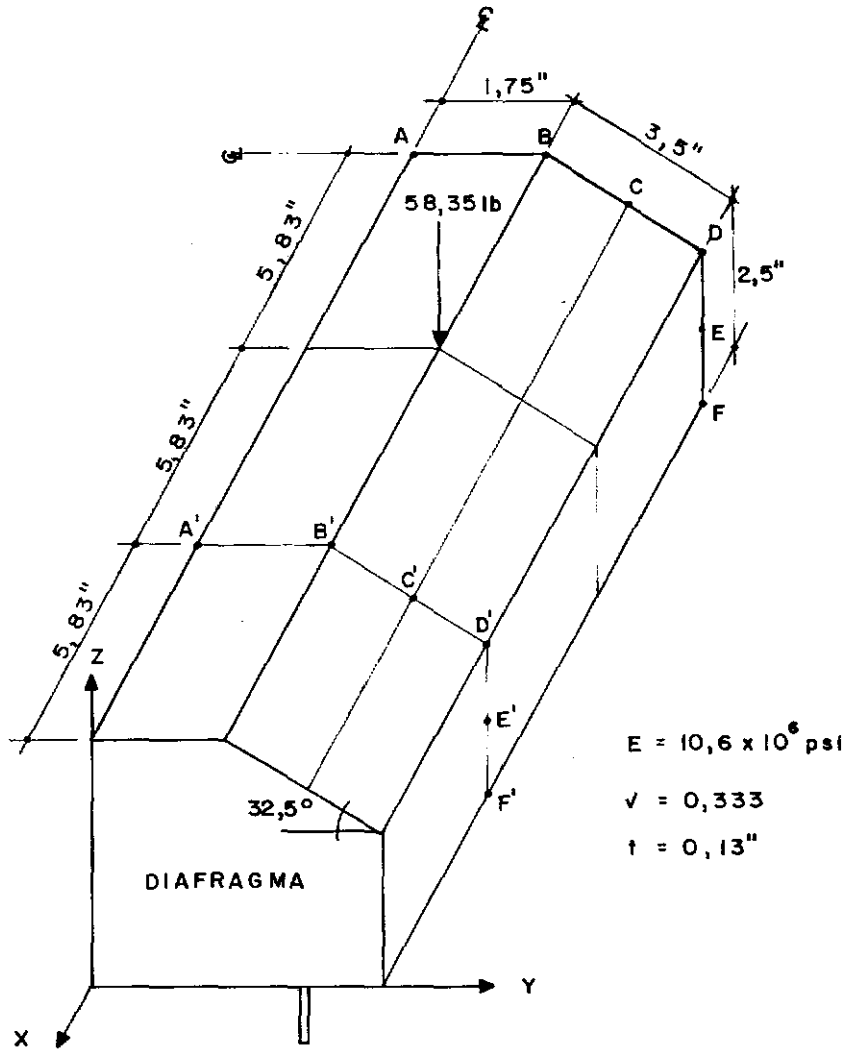


FIGURA 4.11 - CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS

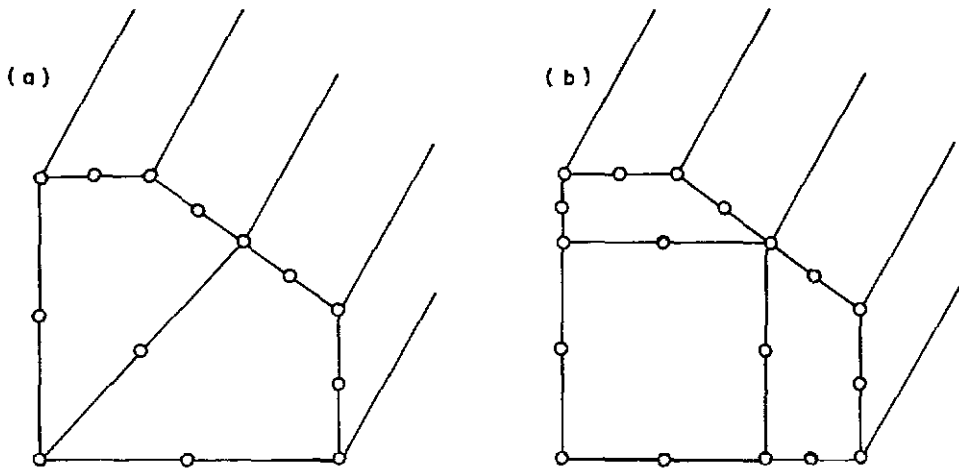


FIGURA 4.12 - DISCRETIZAÇÃO DO DIAFRAGMA

N ^o	A	B	C	D	E	F
DESLOCAMENTOS VERTICAIS ($\times 10^{-3}$ in)						
"PRIIDQ" (4 x 3)	- 14,83	- 12,25	- 5,71	2,88	2,90	2,92
"CPRS1" (5 x 12)	- 14,60	- 12,00	- 5,67	2,71	2,74	2,76
REF. 11 (5 x 12)	- 14,90	- 12,20	- 5,72	2,87	2,90	2,92
DESLOCAMENTOS HORIZONTAIS ($\times 10^{-3}$ in)						
"PRIIDQ"	0	0	4,20	9,66	17,08	24,47
"CPRS1"	0	0	4,09	9,40	16,60	23,80
REF. 11	0	0	4,19	9,64	17,00	24,40
TENSÃO σ_x (psi)						
"PRIIDQ"	- 970	- 845	8	897	655	440
"CPRS1"	- 833	- 847	5	851	576	318
REF. 11	- 953	- 918	10	904	654	387
MOMENTO M_y (lb · in/in)						
"PRIIDQ"	3,87	3,94	1,90	- 0,23	- 0,04	0
"CPRS1"	3,80	3,87	1,75	- 0,29	- 0,14	0
REF. 11	3,90	3,97	1,80	- 0,29	- 0,15	0

TABELA 4.4 - "FOLDED PLATE" COM CARGAS CONCENTRADAS

N ^o	A	B	C	D	E	F
(a)	- 14,82	- 12,21	- 5,86	2,49	2,52	2,54
(b)	- 14,82	- 12,22	- 5,85	2,54	2,57	2,59
(c)	- 14,83	- 12,25	- 5,71	2,88	2,90	2,92
N ^o	A'	B'	C'	D'	E'	F'
(a)	- 7,51	- 6,15	- 2,99	1,15	1,16	1,17
(b)	- 7,47	- 6,15	- 2,97	1,19	1,20	1,21
(c)	- 7,42	- 6,13	- 2,85	1,44	1,45	1,46

TABELA 4.5 - DESLOCAMENTOS VERTICAIS ($\times 10^{-3}$ in)

NOTA: (a) DIAFRAGMA DISCRETIZADO NA FIG. (4.12a)

(b) DIAFRAGMA DISCRETIZADO NA FIG. (4.12b)

(c) CONDIÇÕES DE CONTORNO NAS EXTREMIDADES:

u , θ_x , θ_z livres ; v , w , θ_y restringidos

Para estudar o comportamento não-linear de "folded plates" sujeitas a cargas transversais, analisaram-se três estruturas de diferentes formas geométricas. As dimensões dessas estruturas foram selecionadas de modo a possibilitar a comparação dos resultados com os obtidos experimentalmente na ref. (10). Todos os modelos foram construídos com chapas de alumínio 2024-T3 e se apoiam, nas extremidades, em diafragmas delgados. Aplicaram-se cargas gravitacionais uniformemente distribuídas, de intensidade tal que possibilitaram o desenvolvimento de flambagens localizadas e a observação do comportamento pós-crítico das estruturas. Na referência (10), descrevem-se detalhadamente os equipamentos e as técnicas adotadas nos ensaios.

A geometria, propriedades e malhas utilizadas na discretização dos modelos são mostradas nas figuras (4.13), (4.14) e (4.15). Em todos os casos, a convergência da solução foi verificada através do refinamento das malhas, sendo que as apresentadas fornecem resultados considerados satisfatórios.

Nas figuras (4.16) e (4.20), comparam-se perfis de deflexões ao longo do eixo longitudinal de simetria, para vários níveis de carga. Devido aos modelos serem construídos com chapas muito delgadas, os resultados obtidos com a formulação tridimensional e a de placas delgadas praticamente coincidem. A pequena discrepância entre estas soluções e a experimental é comum neste tipo de comparação e pode ser explicada, principalmente, pela não consideração de imperfeições iniciais na análise por elementos finitos. Essas imperfeições proporcionam o desenvolvimento de flambagens localizadas, que podem ser observadas no resultado experimental, para os níveis mais altos de carga.

Na figura (4.20), comparou-se também a solução ob-

tida na referência (48), através de elementos planos com expansão cúbica para o comportamento de membrana. A maior eficiência desses elementos é relativa, pois sua formulação e implementação são mais complexas, exigindo maior esforço computacional. Note-se que os resultados obtidos com 80 elementos lineares se aproximam mais da solução tridimensional e da experimental do que com 54 elementos cúbicos.

Deflexões, tensões e esforços em diversos pontos de interesse são mostrados nas figuras (4.17), (4.18), (4.19) e (4.21) e nas tabelas (4.6) a (4.9).

CARGA (psf)	"PRIIDQ"			"CPRS1"		
	A	B	C	A	B	C
95,5	- 476	- 368	1407	- 459	- 392	1359
153,7	- 730	- 722	1512	- 729	- 759	1556
182,8	- 867	- 860	1797	- 871	- 921	1810
211,9	- 1005	- 997	2082	- 1012	- 1073	2108
241,0	- 1145	- 1137	2371	- 1153	- 1227	2411
270,1	- 1285	- 1280	2663	- 1296	- 1386	2724

TABELA 4.6 - ESFORÇO NORMAL N_x (lb/in) - MODELO I

CARGA (psf)	"PRIIDQ"	"CPRS1"
95,5	- 6,50	- 7,12
153,7	- 2,54	- 3,07
182,8	- 1,38	- 2,08
211,9	- 0,21	- 0,64
241,0	2,22	1,22
270,1	4,76	3,73

TABELA 4.7 - MOMENTO FLETOR M_y (lb · in/in) PARA NÓ A - MODELO I

CARGA (psf)	"PRIIDQ"			"CPRS1"		
	A	B	C	A	B	C
95,5	1,31	1,54	2,94	1,24	1,47	2,92
153,7	2,26	2,43	3,72	2,21	2,40	3,63
211,9	3,22	3,36	4,78	3,15	3,36	4,72
270,1	4,23	4,32	5,73	4,15	4,33	5,74
328,3	5,31	5,32	6,58	5,22	5,34	6,70
357,4	5,88	5,83	6,97	5,79	5,86	7,17
386,5	6,48	6,36	7,35	6,38	6,40	7,62

TABELA 4.8 - DESLOCAMENTOS VERTICAIS ($\times 10^{-1}$ in) - MODELO II

CARGA (psf)	"PRIIDQ"				"CPRS1"			
	A	C	D	E	A	C	D	E
40	7,63	5,81	3,73	1,24	7,12	5,43	3,52	1,18
80	14,38	10,94	6,98	2,27	12,74	10,54	6,84	2,27
120	19,90	15,06	9,49	2,98	20,39	15,56	10,10	3,35
150	24,17	18,28	11,49	3,58	25,25	19,28	12,52	4,16
180	28,33	21,45	13,46	4,17	30,07	22,97	14,93	4,96
200	31,48	23,84	15,00	4,67	33,26	25,41	16,53	5,50

TABELA 4.9 - DESLOCAMENTOS VERTICAIS ($\times 10^{-2}$ in) - MODELO III

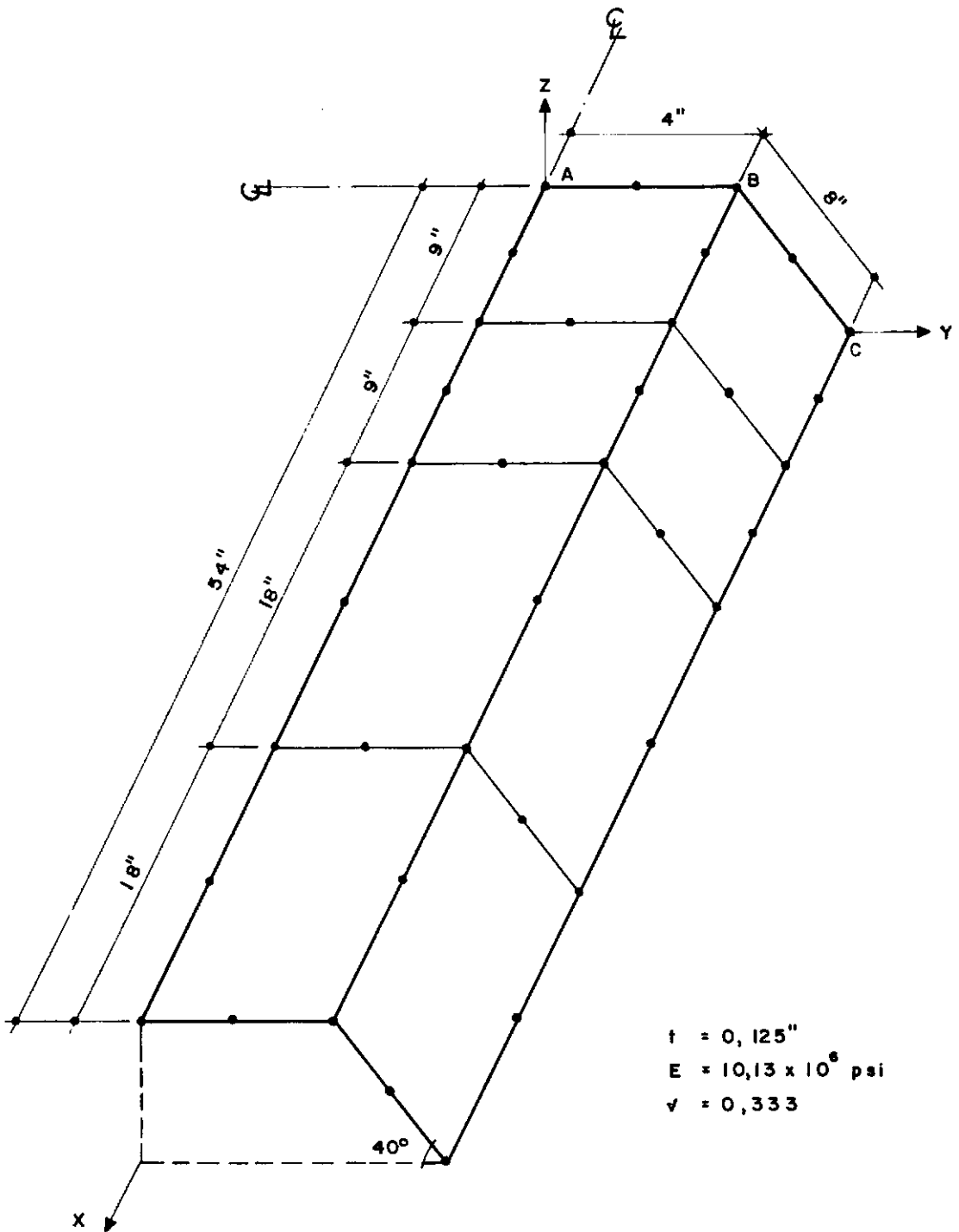


FIGURA 4.13a - MODELO I - ELEMENTO "PRIIDQ"

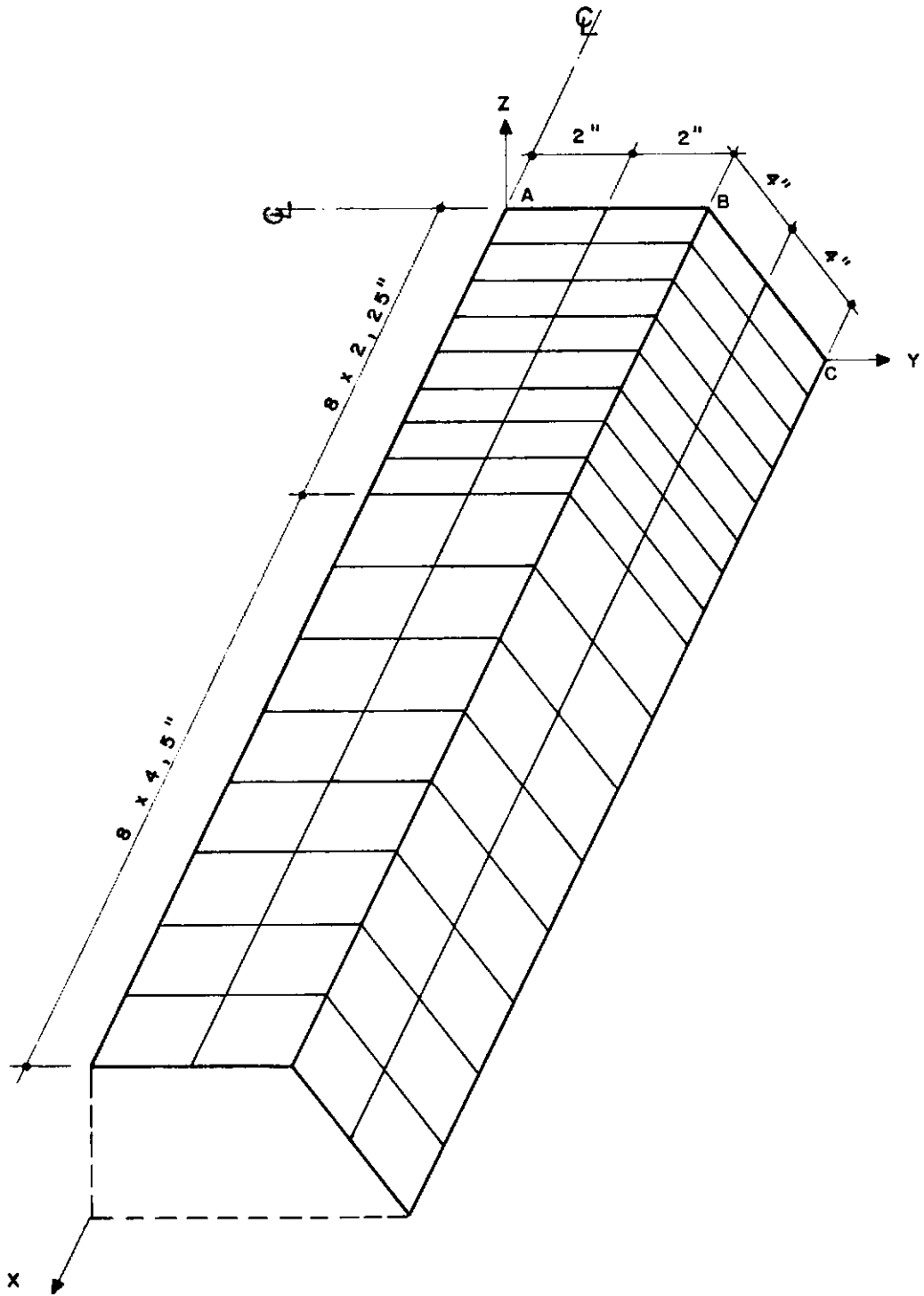


FIGURA 4.13b - MODELO I - ELEMENTO "CPRS1"

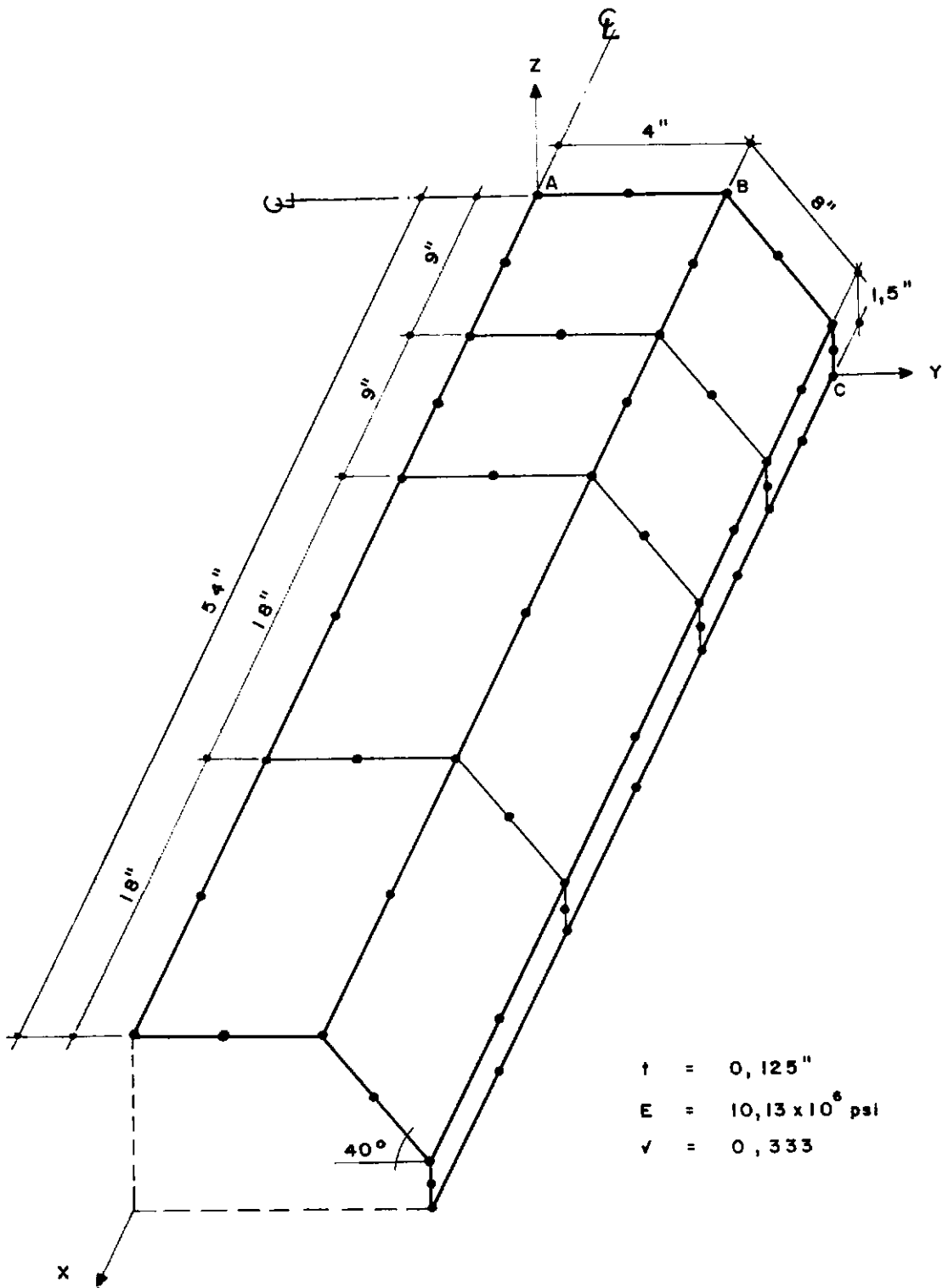


FIGURA 4.14a - MODELO II - ELEMENTO "PRIIDQ"

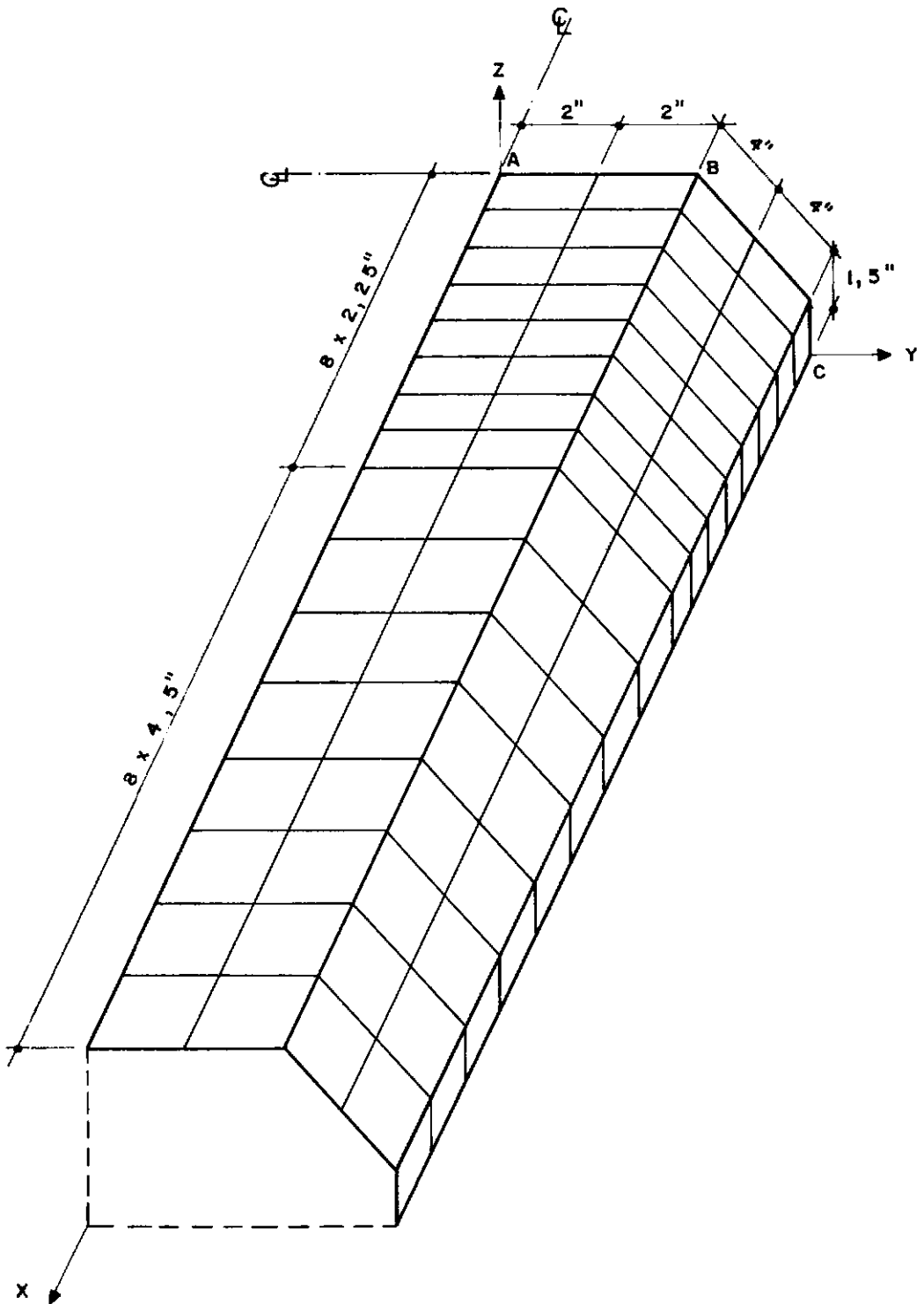


FIGURA 4.14 b - MODELO II - ELEMENTO "CPRS1"

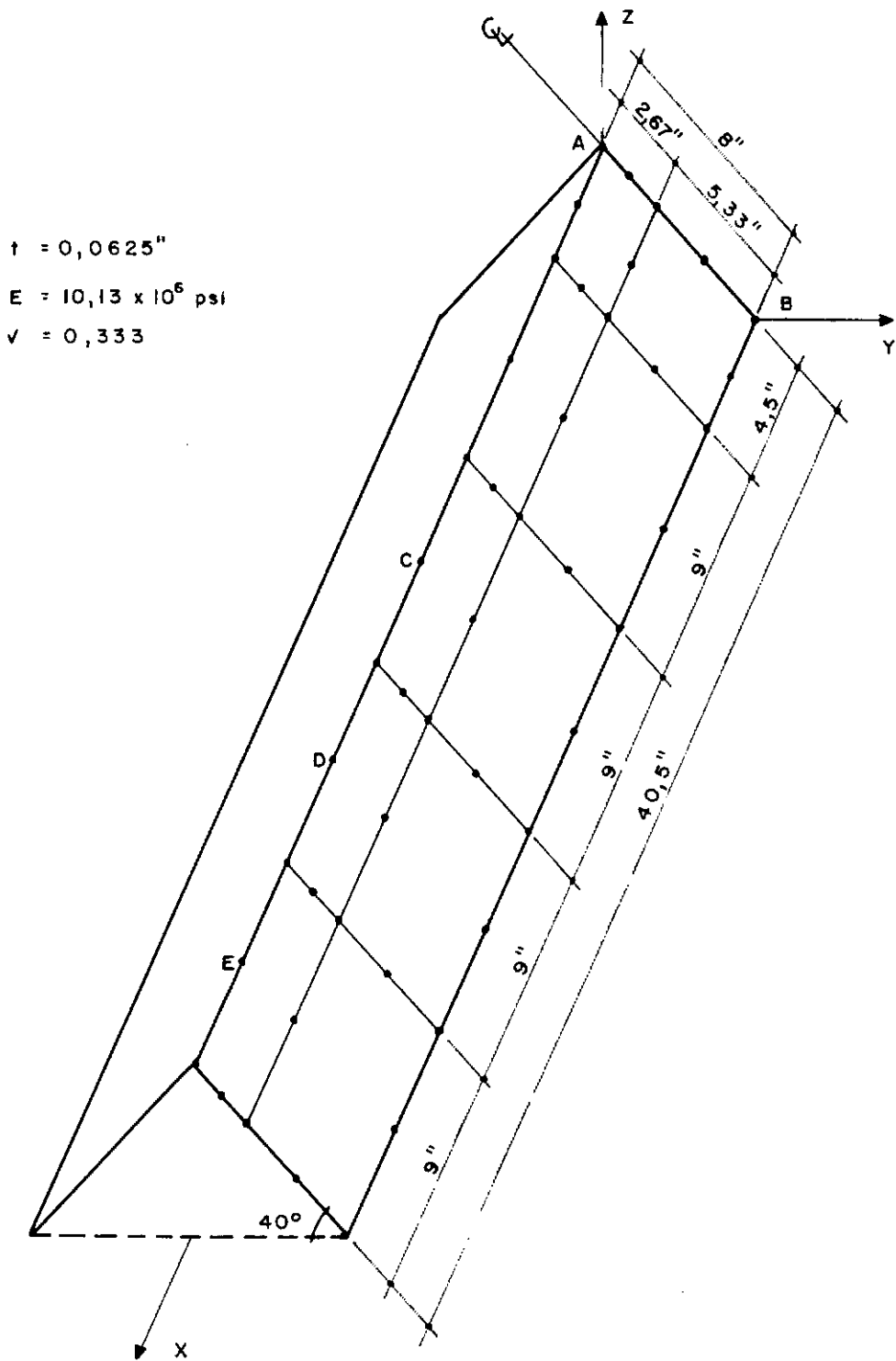


FIGURA 4.15 a - MODELO III - ELEMENTO "PRIIDQ"

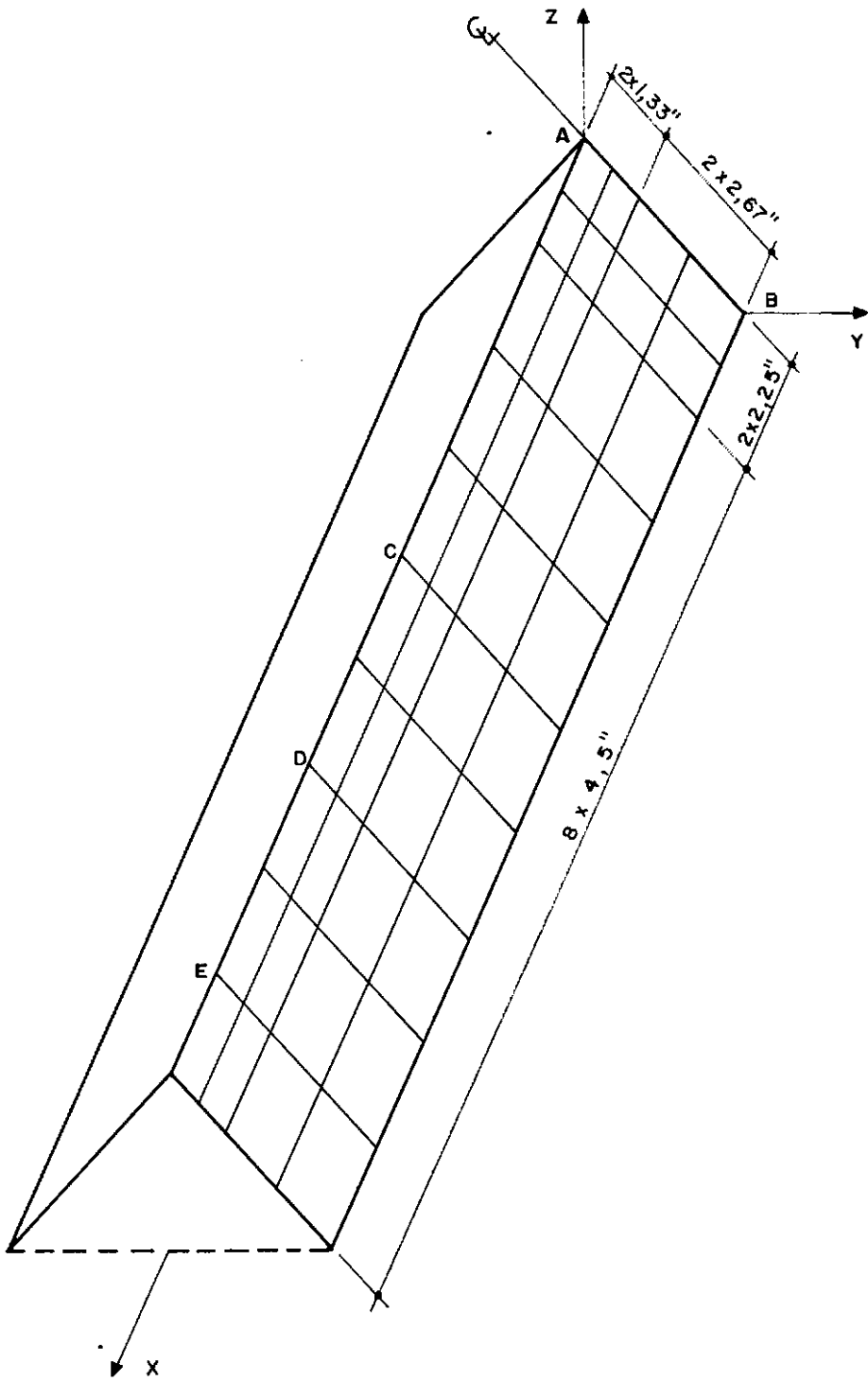


FIGURA 4.15b - MODELO III - ELEMENTO "CPRS1"

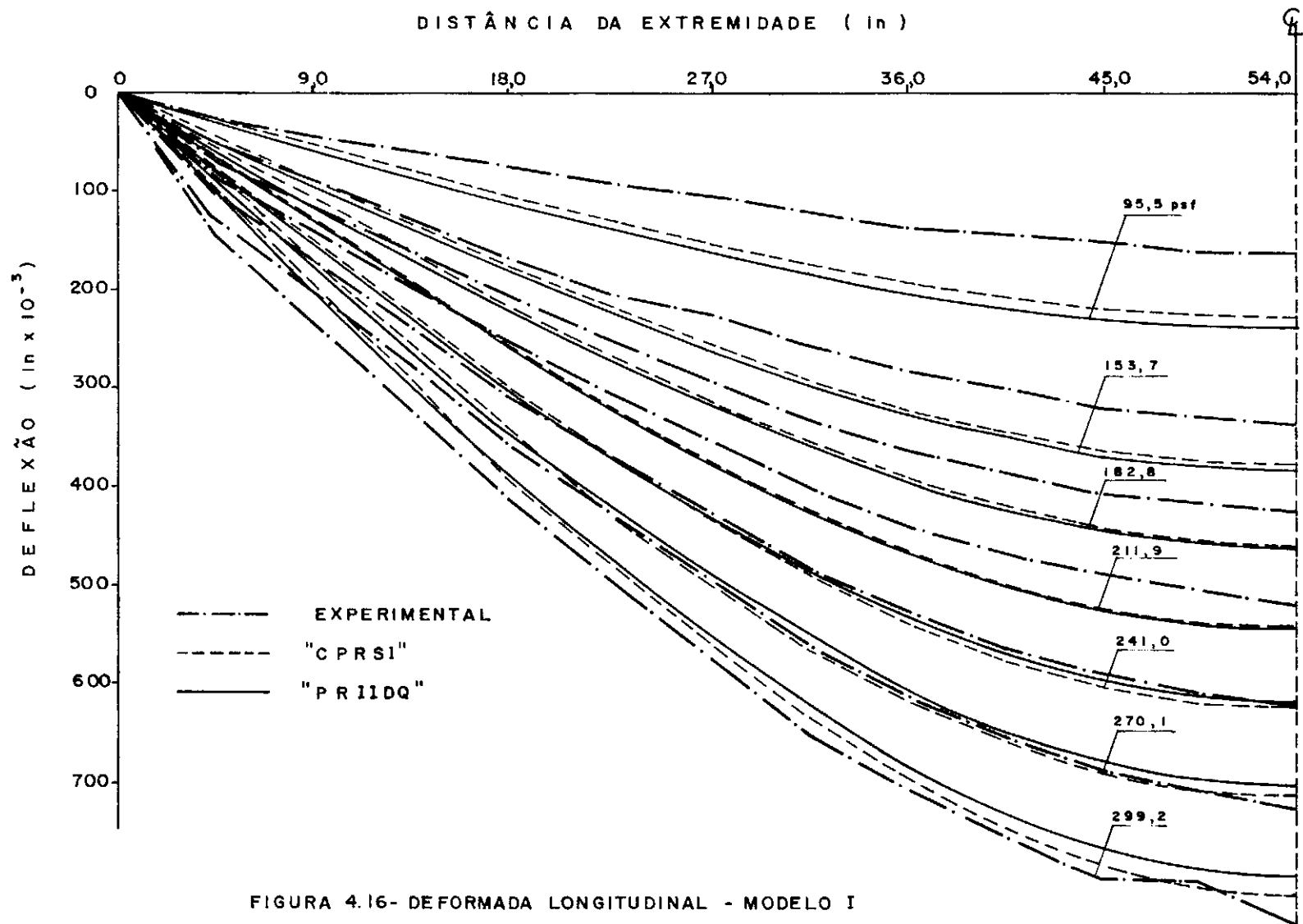


FIGURA 4.16- DEFORMADA LONGITUDINAL - MODELO I

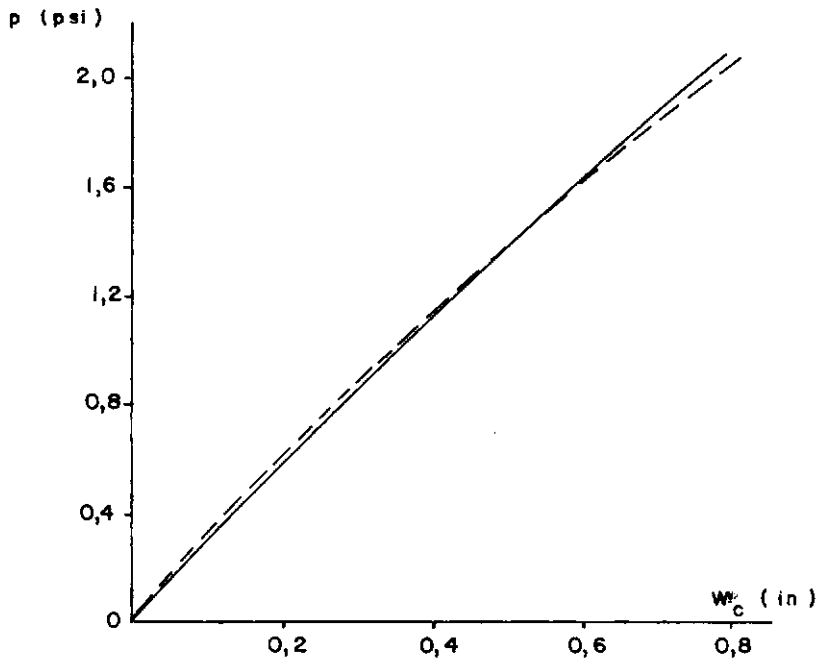
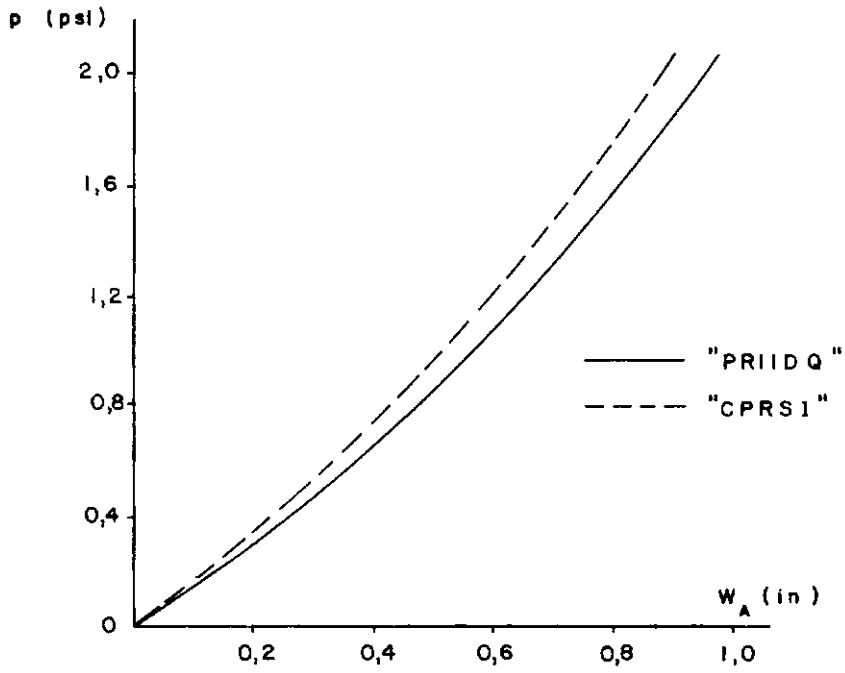


FIGURA 4.17 - CURVAS CARGA-DEFLEXÃO - MODELO I

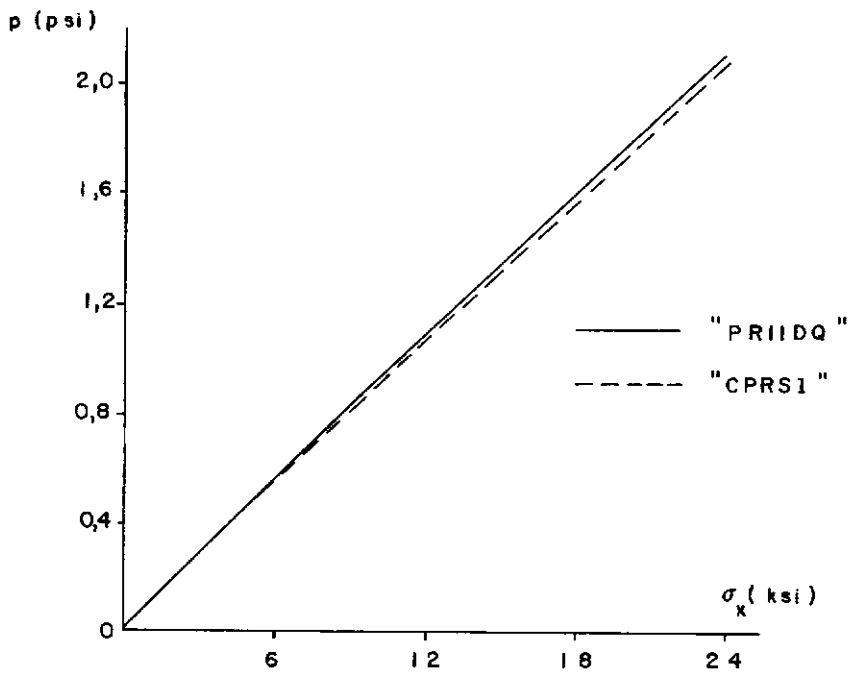


FIGURA 4.18 - TENSÕES DE TRAÇÃO (NÓ A)-MODELO I

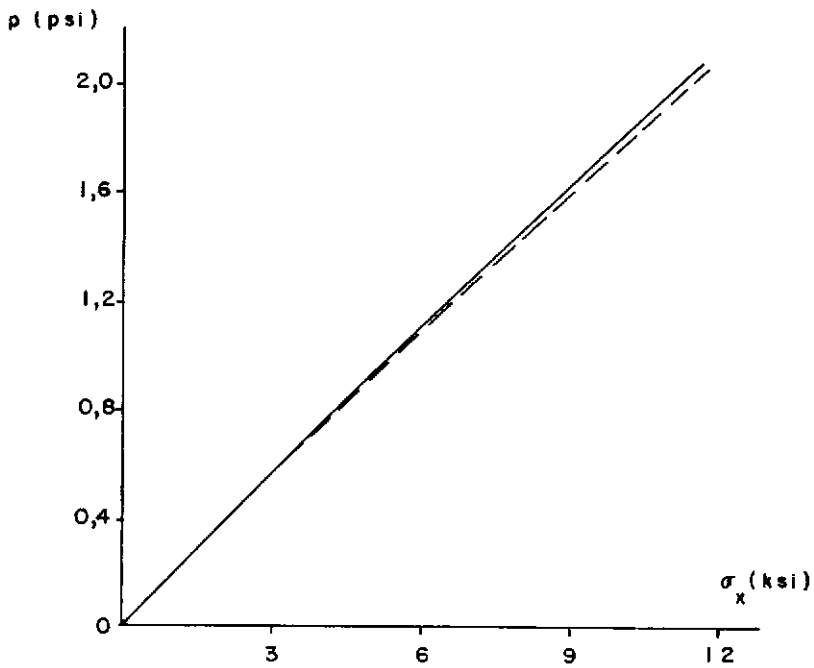


FIGURA 4.19 - TENSÕES DE COMPRESSÃO (NÓ C)-MODELO I

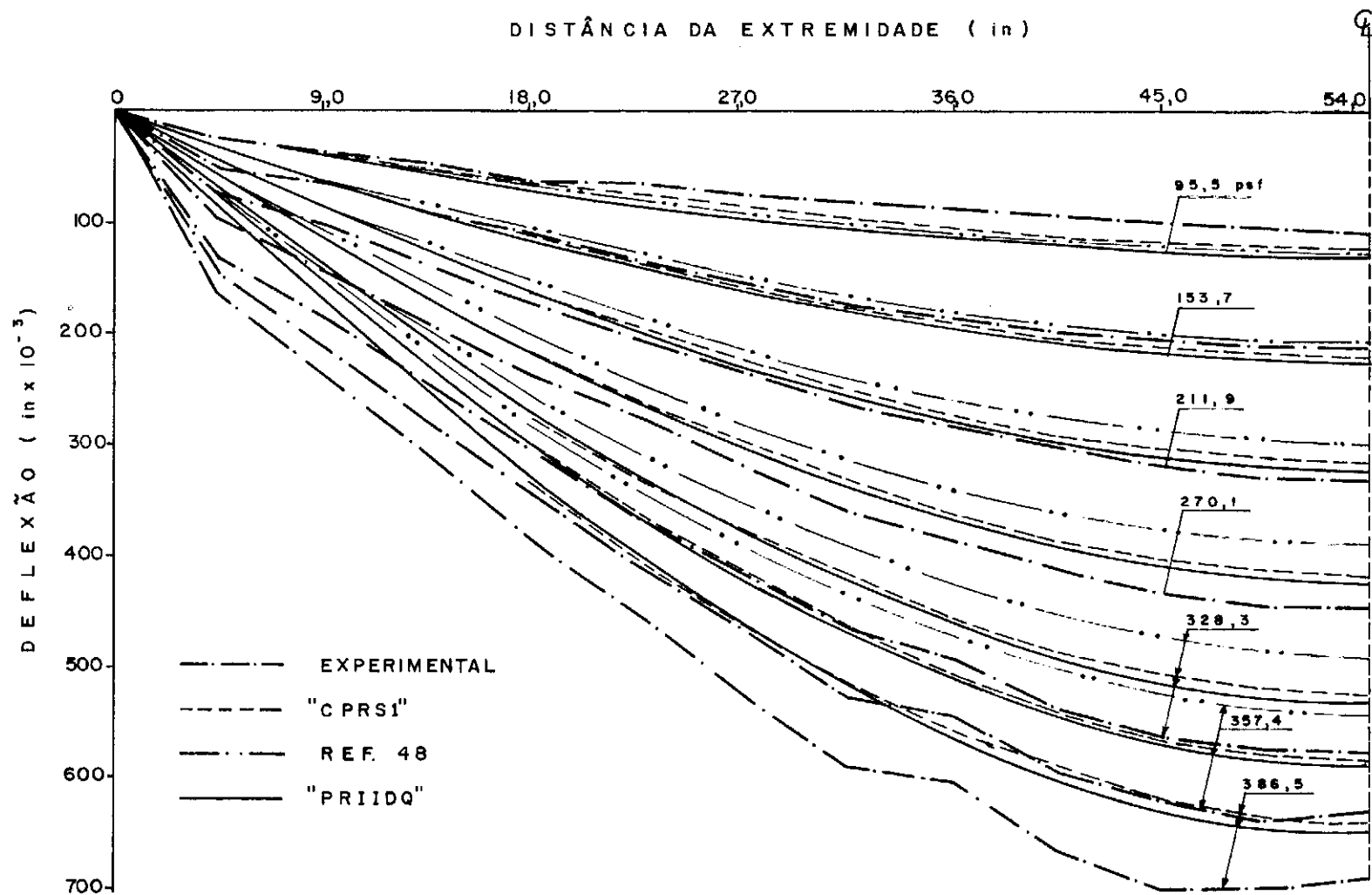


FIGURA 4.20- DEFORMADA LONGITUDINAL - MODELO II

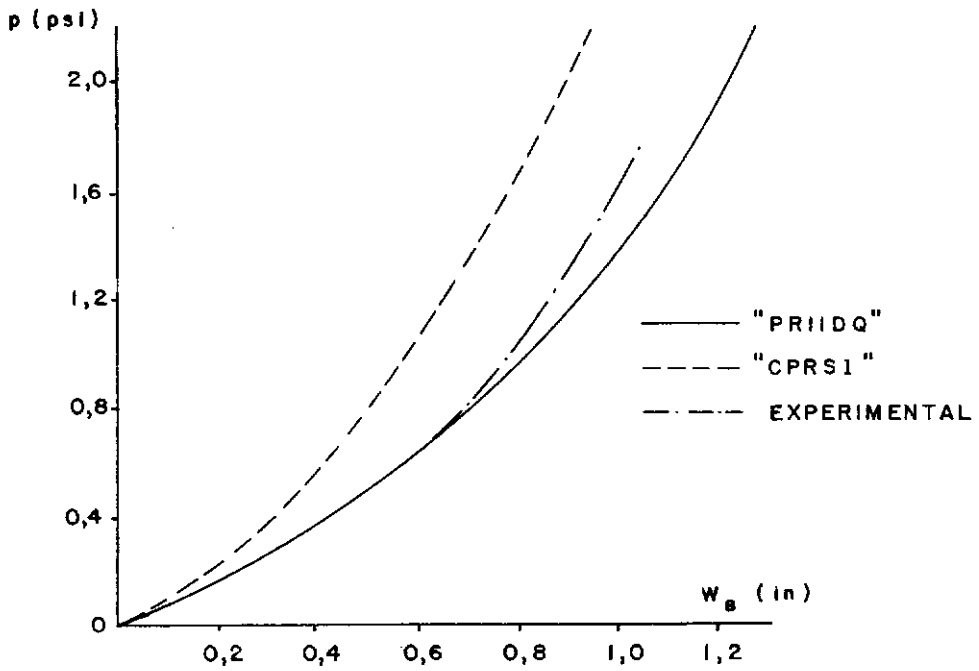
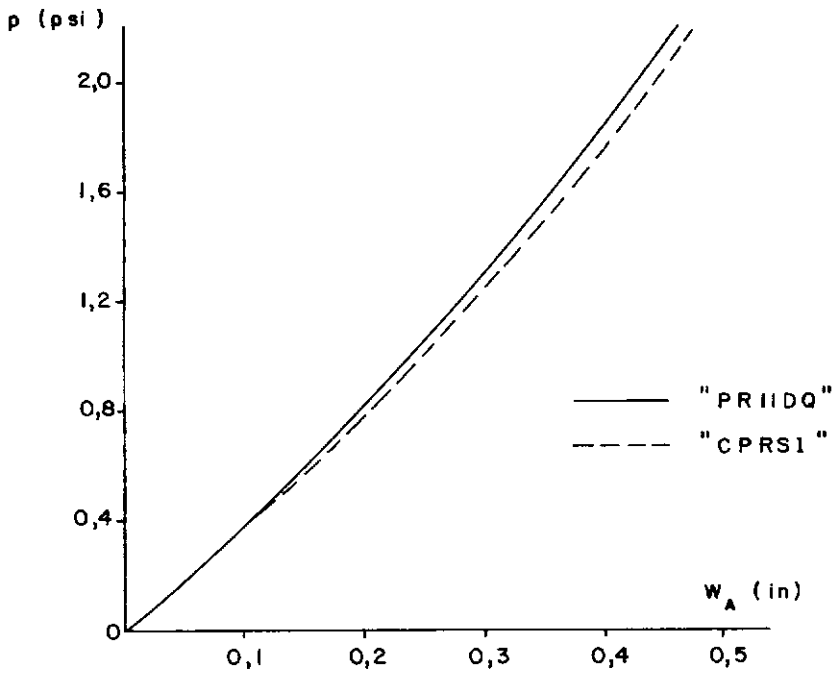


FIGURA 4.21 - CURVAS CARGA-DEFLEXÃO - MODELO III

4.4 - EFICIÊNCIA COMPUTACIONAL

Na tabela abaixo, mostram-se os tempos necessários para o cálculo das matrizes dos elementos, obtidos no computador BURROUGHS B-6700 do NCE/UFRJ, sem nenhuma especificação de prioridade em qualquer caso.

Para a análise linear este tempo compreende a obtenção, apenas, da matriz de rigidez linear, enquanto que a coluna correspondente à análise não-linear engloba, ainda, a matriz de rigidez não-linear e o vetor de forças nodais equivalentes ao estado de tensões da configuração anterior. Todos os tempos são dados em segundos.

TIPO DE ELEMENTO	ANÁLISE LINEAR	ANÁLISE NÃO-LINEAR
"PLAIDQ"	2,5	5,8
"CASIDQ"	4,3	10,6
"PRIIDQ"	6,0	14,2
"FPRNC"	0,5	1,0
"CPRS1"	1,2	2,2

TABELA 4.10 - EFICIÊNCIA COMPUTACIONAL

Pode-se notar que a geração das matrizes de elementos planos, mais simples, envolve muito menor esforço computacional. Entretanto, mesmo para estruturas formadas por superfícies delgadas planas e de espessura constante, evidencia-se um certo equilíbrio entre as duas aproximações. Isto pode ser observado nos modelos da figura (4.14a) e (4.14b), cujas características gerais são indicadas na tabela (4.11). As discretizações adotadas,

com 12 e 80 elementos, praticamente se equivalem em nível de precisão e tempo total dispendido na resolução do problema.

CARACTERÍSTICAS DOS MODELOS DISCRETIZADOS	"PRIIDQ"	"CPRS1"
NÚMERO DE ELEMENTOS	12	80
NÚMERO DE NÓS	51	102
NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE	306	612
MÁXIMA LARGURA DE BANDA	84	48
NÚMERO DE ELEMENTOS NÃO-NULOS DA MATRIZ DE RIGIDEZ	25704	29376
TEMPO TOTAL POR INCREMENTO (em segundos)	216	228

TABELA 4.11 - CARACTERÍSTICAS DOS MODELOS

V - CONCLUSÕES

O tratamento de problemas de deflexões finitas de estruturas laminares, considerando a não-linearidade geométrica, é feito de forma eficiente através do método dos elementos finitos. Sua utilização permite o conhecimento de toda a história da deformação do corpo em função das cargas aplicadas, tanto no estado pré como pós-crítico. Deve ser ressaltado, porém, que problemas não-lineares só podem ser tratados de maneira efetiva com a utilização de computadores de grande porte.

Pelos resultados das análises efetuadas, fica claro que a aproximação fornecida pelos elementos derivados das equações de von Kármán é suficiente para grande parte dos problemas práticos da engenharia. Estruturas delgadas planas ou abatidas, de espessura constante, são analisadas indiferentemente com uma ou outra formulação. O estudo de estruturas com curvaturas acentuadas, embora possível por meio de elementos planos, exige grande esforço computacional devido à necessidade de se adotarem malhas refinadas para aproximar as curvaturas. Nestes casos, é aconselhável a utilização de elementos de formulação isoparamétrica, assim como para estruturas que apresentam variações de espessura.

Estruturas espessas devem ser estudadas através de elementos de teorias tridimensionais, pois a parcela de deformação por cisalhamento transversal é significativa, não podendo ser desprezada.

Diafragmas como os dos modelos analisados são convenientemente discretizados por combinação de elementos retangulares e triangulares planos. Entretanto, persiste a incompatibilidade de deslocamentos para os nós situados na interseção de lâmi-

nas ortogonais. Um meio de removê-la é a utilização de elementos com expansão cúbica para estado plano de tensões, muito embora sua implementação se torne um pouco mais complexa.

Equações constitutivas de materiais não-lineares podem ser incorporadas explicitamente na formulação isoparamétrica tridimensional, sem dificuldades adicionais. Este assunto é tratado na referência (25). Problemas que incluem os dois tipos de não-linearidade, como grandes deformações de membranas constituídas por materiais incompressíveis são analisados, por exemplo, na referência (49).

Uma segunda geração de elementos isoparamétricos, que se vale da hipótese de Kirchhoff discretizada, como é o caso do elemento conhecido por SemiLoof, tem aplicação extremamente eficiente na análise linear de estruturas laminares delgadas. Evolução idêntica parece ser recomendável ao caso da análise não-linear. Entretanto, devido à sua maior complexidade e ao número de graus de liberdade condensados, torna-se difícil prever se o uso deste elemento será conveniente, uma vez que esta aproximação pode resultar computacionalmente dispendiosa na análise não-linear. Resultados nesse sentido são aguardados com interesse.

BIBLIOGRAFIA

- 1 - LAMÉ, G. e CLAPEYRON, E. - Mémoires sur l'Équilibre Intérieur des Corps Solides Homogènes - Mémoires Presents a l'Academie des Sciences de l'Institut de France, Se cond Series, 4, 1828.
- 2 - ARON, H. - Das Gleichgewicht und die Bewegung einer Unendlich Dunnen - Beliebige Gekrummten, Elastischen Schale, Journal für Reine und Ange. Math., 1874.
- 3 - LOVE, A.E.H. - On the Small Free Vibrations and Deformations of Thin Elastic Shells - Phil. Trans. Royal Soc., London, Vol. 179, 1888.
- 4 - KIRCHHOFF, G., J.F. Math.(Crelle), Bd. 40, 1850.
- 5 - TIMOSHENKO, S. e GERE, J. - Theory of Elastic Stability - McGraw-Hill, New York, 1961.
- 6 - BREBBIA, C. e CONNOR, J. - Geometrically Non-Linear Finite Element Analysis - J.Eng. Mech. Div., ASCE, 95, 463-483, 1969.
- 7 - DHATT, G.S. - Instability of Thin Shells by the Finite Element Method - Proc. IASS Symp. Folded Plates and Prismatic Structures, Viena, 1970.
- 8 - GALLAGHER, R.H.; LIEN, S. e MAU, S.T. - A Finite Element Plate and Shell pre and post-Buckling Analysis - Proc. Air Force Third Conf. Matrix Meth. Struct. Mech., Wright-Patterson A.F.B., Ohio, 1971.
- 9 - CSA STANDARD S190 - Design of Light Gauge Aluminum Products - Canadian Standards Association, 1968.
- 10 - SWARTZ, S.E.; MIKHAIL, M.L. e GURALNICK, S.A. - Buckling of Folded Plate Structures - Experimental Mechanics, Journal of the Society for Experimental Stress Analysis, 269-274, 1969.

- 11 - GROEHS, A.G. - Um Estudo de Tensões e Deformações em Fô-lhas Poliédricas Utilizando o Método dos Elementos Fi-nitos - Tese de Mestrado, U.F.R.G.S., 1975.
- 12 - BREBBIA, C. e CONNOR, J. - A Stiffness Matrix for a Shallow Retangular Shell Element - J. Eng. Mech. Div., ASCE, 93, EM5, 43-65, 1967.
- 13 - GALLAGHER, R.H. - The Development and Evaluation of Matrix Methods for Thin Shell Structural Analysis - Ph.D. Thesis, State University of New York, Buffalo, New York, 1966.
- 14 - CANTIN, G. e CLOUGH, R.W. - A Curved Cylindrical Shell Fi-nite Element - AIAA Journal, Vol. 6, n° 6, 1057-1062, 1968.
- 15 - SABIR, A.B. e LOCK, A.C. - A Curved Cylindrical Shell Fini-te Element - International Journal of Mechanical Scien-ces, 44, 1972.
- 16 - BOGNER, F.K.; FOX, R.L. e SCHMIT, L.A. - A Cylindrical Shell Discrete Element - AIAA Journal, Vol. 5, n° 4, 745-751 1967.
- 17 - ZIENKIEWICZ, O.C. - The Finite Element Method in Engineering Science - McGraw-Hill, London, 1971.
- 18 - AHMAD, S.; IRONS, B.M. e ZIENKIEWICZ, O.C. - Curved Thick Shell and Membrane Elements with Particular Reference to Axisymmetric Problems - Proc. Conf. Matrix Meth. Struc. Mech., Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1968.
- 19 - AHMAD, S.; IRONS, B.M. e ZIENKIEWICZ, O.C. - Analysis of Thick to Thin Shell Structures by Curved Finite Ele-ments - International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 2, 419-451, 1970.
- 20 - ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R.L. e TOO, J.M. - Reduced In-tegration Technique in General Analysis of Plates and Shells - International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 3, 275-290, 1971.

- 21 - PAWSEY, S.F. e CLOUGH, R.W. - Improved Numerical Integration of Thick Shell Finite Elements - Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 3, 575-586, 1971.
- 22 - NAYAK, G.C. e ZIENKIEWICZ, O.C. - A General Approach to Problems of Plasticity and Large Deformations Using Isoparametric Elements - Proc. Air Force Third Conf. Matrix Meth. Struc. Mech., Wright-Patterson A.F.B., Ohio, 1971.
- 23 - LANDAU, L. e EBECKEN, N.F.F. - Análise Não-Linear de Estruturas de Superfície por Meio de Elementos Finitos Tridimensionais Degenerados - Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Civil, Caracas, Venezuela, 1975.
- 24 - LANDAU, L.; WROBEL, L.C. e EBECKEN, N.F.F. - Análise Elasto-Plástica de Estruturas de Superfície - Colóquio Franco-Brasileiro sobre Métodos Numéricos em Engenharia, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1976.
- 25 - LANDAU, L. - Análise de Grandes Deformações e Plasticidade por Meio de Elementos Finitos Isoparamétricos - Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, 1976.
- 26 - WEMPNER, G.A.; ODEN, J.T. e KROSS, D.A. - Finite Element Analysis of Thin Shells - J. Eng. Mech. Div., ASCE, EM6, 1273-1294, 1968.
- 27 - WEMPNER, G.A. - Finite Elements, Finite Rotations and Small Strains of Flexible Shells - Int. J. Solids Structures, Vol. 5, 117-153, 1969.
- 28 - IRONS, B.M. e RAZZAQUE, A. - A Further Modification to Ahmad's Shell Element - Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 5, 588-589, 1973.
- 29 - IRONS, B.M. - The SemiLoof Shell Element - Finite Elements for Thin Shells and Curved Members, Chap. 11, Wiley, London, 1976.
- 30 - LOOF, H.W. - The Economical Computation of Stiffness of Large Structural Elements - Int. Symp. on Use of Comp. in Struct. Eng., University of Newcastle-Upon-Tyne, 1966.

- 31 - EBECKEN, N.F.F. - LORANE-NL: Uma Linguagem Orientada à Análise Estrutural Não-Linear - Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, 1977.
- 32 - MALVERN, L.E. - Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium - Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1969.
- 33 - ODEN, J.T. - Finite Elements of Nonlinear Continua - McGraw Hill, New York, 1972.
- 34 - BATHE, K.J., WILSON, E.L. e IDING, R.H. - NONSAP - A Structural Analysis Program for Static and Dynamic Response of Nonlinear Systems - Report UCSESM, 74-3, 1974 .
- 35 - HINTON, E.; ROCK, T. e ZIENKIEWICZ, O.C. - A Note on Mass Lumping and Related Processes in the Finite Element Method - Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 4, 245-249, 1976.
- 36 - BOSSAK, M.A.J. e ZIENKIEWICZ, O.C. - Free Vibration of Initially Stressed Solids, with Particular Reference to Centrifugal-Force Effects in Rotating Machinery - Journal of Strain Analysis, Vol. 8, Nº 4, 245-252 , 1973.
- 37 - ROCK, T. e HINTON, E. - Free Vibration and Transient Response of Thick and Thin Plates Using the Finite Element Method - Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 3, 51-63, 1974.
- 38 - ROCK, T. e HINTON, E. - A Finite Element Method for the Free Vibration of Plates Allowing for Transverse Shear Deformation - Computers and Structures, Vol. 6, 37-44, 1976.
- 39 - NOVOZHILOV, V.V. - Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity - Graylock Press, Rochester, New York, 1953.
- 40 - FUNG, Y.C. - Foundations of Solid Mechanics - Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.

- 41 - PRZEMIENIECKI, J.S. - Theory of Matrix Structural Analysis - McGraw-Hill, New York, 1968.
- 42 - GALLAGHER, R.H.; GELLATLY, R.A.; PADLOG, J. e MALLET, R.H. A Discrete Procedure for Thin Shell Instability Analysis - AIAA Journal, Vol. 5, nº 1, 135-148, 1967.
- 43 - PRATO, C. - A Mixed Finite Element for Thin Shell Analysis - Ph.D. Thesis, Department of Civil Engineering, M.I.T., 1968.
- 44 - BERGAN, P. e CLOUGH, R.W. - Large Deflection Analysis of Plates and Shallow Shells Using the Finite Element Method - International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 5, 543-556, 1973.
- 45 - CLOUGH, R.W. e FELIPPA, C.A. - A Refined Quadrilateral Element for Analysis of Plate Bending - Proc. Air Force First Conf. Matrix Meth. Struct. Mech., Wright-Patterson A.F.B., Ohio, 1965
- 46 - LEVY, S. - Bending of Rectangular Plates with Large Deflections - NACA Technical Note nº 846, 1942.
- 47 - MATSUI, T. e MATSUOKA, O. - A New Finite Element Scheme for Instability Analysis of Thin Shells - International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 10, 145-170, 1976.
- 48 - KHAN, A.Q. e HARRIS, P.J. - Post-Buckling Behaviour of Thin Walled Structures - Computational Methods in Nonlinear Mechanics, The Texas Institute for Computational Mechanics, 1974.
- 49 - EBECKEN, N.F.F. - Grandes Deformações de Membranas de Materiais Hiperelásticos Incompressíveis - COPPE/UFRJ, 1977.
- 50 - LIMA, S.R.F.F. - O Método dos Elementos Finitos Aplicado a Problemas de Cascas e Estruturas Laminares Utilizando-se Elementos Triangulares Planos - Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, 1972.

SIMBOLOGIA

x, y, z	- coordenadas globais no estado indeformado
$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$	- coordenadas globais no estado deformado
u, v, w	- deslocamentos globais
\underline{N}	- matriz de funções de interpolação
$\underline{\delta}$	- vetor dos deslocamentos nodais
\underline{R}	- vetor das forças nodais externas
\underline{F}	- vetor das forças nodais internas
$\underline{\psi}$	- vetor das forças nodais desequilibradas
$\underline{\sigma}$	- vetor de tensões
$\underline{\varepsilon}$	- vetor de deformações
\underline{V}_3	- vetor que representa a espessura em cada nó
α, β	- rotações do vetor \underline{V}_3
ξ, η, ζ	- coordenadas naturais
x', y', z'	- coordenadas locais
u', v', w'	- deslocamentos locais
\underline{K}_T	- matriz de rigidez tangente
\underline{D}	- matriz de propriedades elásticas
E	- módulo de elasticidade
ν	- coeficiente de Poisson
\underline{M}	- matriz de massa
$\underline{\ddot{\delta}}$	- acelerações nodais
ρ	- densidade
\underline{J}_C	- jacobiano de transformação de coordenadas
$\bar{\underline{J}}_C$	- jacobiano de transformação de coordenadas para a configuração deformada
\underline{J}	- jacobiano de deformações
\underline{J}'	- jacobiano de deformações para o sistema local

- N_x, N_y, N_{xy} - esforços normais
 M_x, M_y, M_{xy} - momentos fletores e torsor
 t - espessura
 "PLAIDQ" - elemento degenerado do isoparamétrico tridimensional, especializado para análise de placas.
 "CASIDQ" - elemento degenerado do isoparamétrico tridimensional, especializado para análise de cascas.
 "PRIIDQ" - elemento degenerado do isoparamétrico tridimensional, especializado para análise de "folded plates".
 "FPRNC" - elemento retangular cúbico não-conforme, para análise de placas em flexão (R-12).
 "CPRS1" - elemento retangular plano para análise de cascas e "folded plates", composto pela associação de elemento linear de estado plano de tensões e elemento cúbico não-conforme de flexão.