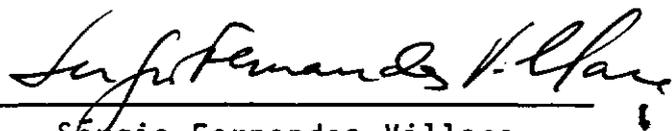


ESTUDO DA VALIDADE DA HIPÓTESE DE KIRCHHOFF-LOVE
NA TEORIA DAS PLACAS

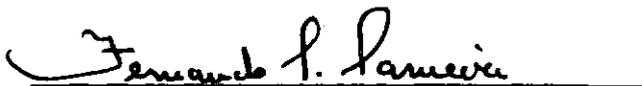
José Roberto Martins Ribeiro

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JA-
NEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.)

aprovada por



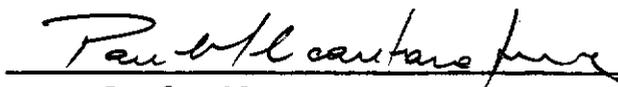
Sérgio Fernandes Villaça
(Presidente)



Fernando Luiz Lobo B. Carneiro



B. Ernani Diaz



Paulo Alcantara Gomes

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
AGOSTO DE 1976

ÍNDICE

DEDICATÓRIA	i
AGRADECIMENTOS	ii
RESUMO	iii
ABSTRACT	v
INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO I - Teoria da Elasticidade Linear e Princípios Variacionais de Energia	3
1.0 - Introdução	3
1.1 - Teoria da Elasticidade Linear para Pequenos Deslocamentos em Coordenadas Cartesianas Retangulares	3
1.2 - Princípio dos Trabalhos Virtuais	8
1.3 - Princípio da Energia Potencial Mínima .	8
1.4 - Generalização do Princípio da Energia Potencial Mínima	10
1.5 - Princípio de Hellinger-Reissner	11
CAPÍTULO II - Teoria Clássica para Flexão de Placas Delgadas (Kirchhoff-Love)	13
2.1 - Introdução	13
2.2 - Hipóteses Básicas	13
2.3 - Equações da Teoria Clássica	15
CAPÍTULO III - Teoria de Reissner para Flexão de Placas ...	28
3.1 - Introdução	28
3.2 - Equações de Equilíbrio	28

3.3 - Dedução das Expressões para τ_{xz} , τ_{yz} e σ_x	31
3.4 - Equações de Reissner	33
3.5 - Condições de Contorno	43
CAPÍTULO IV - Expressões Analíticas das Flechas e dos Es- forços Resultantes	45
4.1 - Introdução	45
4.2 - Teoria Clássica	48
4.3 - Teoria de Reissner	56
CAPÍTULO V - Resultados Numéricos da Teoria Clássica e da Teoria de Reissner	71
5.1 - Introdução	71
5.2 - Resultados Numéricos	72
5.3 - Análise dos Resultados	120
CONCLUSÕES	129
APÊNDICE A - Teoria de Hencky	132
REFERÊNCIAS	140
NOTAÇÃO	143

Aos meus pais e irmãos.
A Neyde e Aline.

AGRADECIMENTOS

Ao prof. Sêrgio Fernandes Villaça pela sugestão do tema.

Ao Dr. Ing. B. Ernani Diaz pela atenção e valiosas sugestões apresentadas.

Ao prof. Arlindo José Amorim Pontual da U.F.Pe. pelo incentivo e ensinamentos no período de graduação.

A Maria da Conceição Marques de Almeida e João Carlos Luiz Rosado, responsáveis pela datilografia e desenhos.

R E S U M O

Com a utilização da teoria da elasticidade linear e dos princípios variacionais de energia, deduziram-se as equações e as condições de contorno da teoria clássica de Kirchhoff-Love e da teoria refinada de Reissner.

As expressões analíticas da flecha e dos esforços resultantes foram deduzidas para placas retangulares submetidas a carregamentos transversais uniformemente distribuídos e condições de contorno nos quatro bordos, dadas por:

Caso 1 - quatro bordos simplesmente apoiados.

Caso 2 - dois bordos //simplesmente apoiados e dois bordos// engastados.

Caso 3 - dois bordos //simplesmente apoiados e dois bordos// livres.

Os resultados numéricos são apresentados em tabelas e gráficos e foram obtidos a partir da programação das expressões analíticas.

A análise dos resultados numéricos obtidos pelas duas teorias permite estabelecer valores para a relação h/a , onde h é a espessura da placa e a um lado da placa, a partir do qual não é mais válido utilizar a teoria clássica de Kirchhoff-Love.

São analisadas as perturbações existentes junto aos bordos e cantos da placa, oriundas da diferença existente entre

as duas teorias, quanto ao número de condições de contorno por bordo.

As equações da Teoria de Hencky são apresentadas no apêndice A.

A B S T R A C T

Equations and boundary conditions from the classical theory due to Kirchhoff-Love and the refined Reissner theory were obtained by using the linear theory of elasticity and standard energy variational principles.

Analytical expressions of deflections and resultant stresses are treated for rectangular plates subjected to transverse uniformly distributed loadings considering the following boundary conditions:

Case 1 - Four simply supported edges.

Case 2 - Two simply parallel supported edges and two parallel clamped edges.

Case 3 - Two simply parallel supported edges and two parallel free edges.

We obtain numerical results which are presented in tables and graphs from a digital program by using analytical expressions.

The analysis of the numerical results that we obtained by both theories allow us to establish certain values for the relation h/a where h is the thickness of the plate and a the length of a side of the plate, from here on is not possible to use any more a classical theory due to Kirchhoff-Love.

We analyse the perturbations which appear near to the boundary and corners of the plate, which arose from the difference between the two theories, according to the number of boundary conditions per each boundary.

The equations of Hencky's theory are presented in appendix A.

I N T R O D U Ç Ã O

Nas teorias que estudam as placas elásticas e, particularmente, nas que tratam do problema da flexão em placas submetidas a carregamentos transversais, é importante saber o que se entende por uma placa delgada com pequenos deslocamentos transversais.

Geralmente considera-se que as relações $w_{\max.}/h$ e h/a , onde $w_{\max.}$ é a flecha máxima, h a espessura da placa e a um lado da placa, definem o que seja uma placa delgada com pequenos deslocamentos transversais (flechas).

Segundo McFARLAND [2] e BARES [4] uma placa é delgada quando:

$$\frac{h}{a} \leq 0,05 \quad \text{e} \quad \frac{h}{a} \leq 0,20 \quad \text{respectivamente.}$$

Segundo McFARLAND [2], BARES [4], SZILARD [3] uma placa com pequenos deslocamentos transversais satisfaz a relação:

$$w_{\max.}/h \leq 1 \quad , \quad w_{\max.}/h \leq 0,20 \quad \text{e}$$

$$w_{\max.}/h \leq 0,20 \quad \text{respectivamente.}$$

Neste trabalho considera-se válido utilizar a teoria para pequenos deslocamentos transversais (Small-Deflection Theory), desde que seja satisfeita a relação $w_{\max.}/h \leq 0,200$ (ver SZILARD [3], pág. 340).

Entretanto, a consideração da placa ser delgada é analisada para os três casos estudados, comparando os resultados numéricos obtidos para flechas e esforços resultantes pela teoria clássica de Kirchhoff-Love e pela teoria refinada de Eric Reissner.

As simplificações existentes nas hipóteses básicas da teoria clássica de Kirchhoff-Love, conduzem a uma equação diferencial parcial de quarta ordem e, conseqüentemente, necessita-se de apenas duas condições de contorno por bordo.

A não satisfação de três condições de contorno por bordo, pela teoria clássica de Kirchhoff-Love, é fundamentalmente devida a consideração de deformações cisalhantes transversais nulas, isto é, $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$.

Investigações feitas por alguns autores deram origem a teorias mais refinadas que conduzem a problemas de integração de sexta ordem e, conseqüentemente, a satisfação de três condições de contorno por bordo. Destas teorias as mais conhecidas são devidas a E. Reissner (1945), H. Hencky (1947) e A. Kromm (1955).

No decorrer deste trabalho desenvolve-se a teoria clássica de Kirchhoff-Love e a teoria refinada de Reissner.

C A P Í T U L O I

TEORIA DA ELASTICIDADE LINEAR E PRINCÍPIOS VARIACIONAIS DE ENERGIA

1.0 - Introdução

Na dedução das equações que resolvem o problema da flexão em placas com pequenos deslocamentos pela teoria clássica e de Reissner, utiliza-se a Teoria da Elasticidade Linear para pequenos deslocamentos e os Princípios Variacionais de Energia, tais como:

- a) Princípio dos Trabalhos Virtuais;
- b) Princípio da Energia Potencial Mínima;
- c) Princípio Generalizado da Energia Potencial Mínima;
- d) Princípio de Hellinger-Reissner.

Nos parágrafos seguintes apresenta-se um resumo da Teoria da Elasticidade Linear para pequenos deslocamentos e dos Princípios Variacionais de Energia (Ver WASHIZU [6] e LIMA [20]).

1.1 - Teoria da Elasticidade Linear para Pequenos Deslocamentos em Coordenadas Cartesianas Retangulares

a) Introdução

Na teoria da elasticidade para pequenos deslocamentos

as componentes de deslocamento u , v e w de um ponto qualquer do corpo são consideradas pequenas, o que justifica a linearização das equações que governam o problema.

As equações governantes são sumarizadas a seguir:

b) Tensões

O estado de tensão interna para um ponto do corpo está definido por nove componentes de tensões:

$$\begin{array}{ccc} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{array}$$

que devem satisfazer as equações de equilíbrio:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \bar{b}_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \bar{b}_y = 0 \quad \text{em } V$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \bar{b}_z = 0 \quad (1.1.1)$$

$$\text{e } \tau_{xy} = \tau_{yx} ; \tau_{xz} = \tau_{zx} ; \tau_{yz} = \tau_{zy} .$$

Sendo \bar{b}_x , \bar{b}_y e \bar{b}_z as componentes das forças de massa.

c) Deformações

O estado de deformações para um ponto \bar{e} definido por

seis componentes de deformação:

$$\begin{array}{ccc} \epsilon_x & \epsilon_y & \epsilon_z \\ \gamma_{xy} & \gamma_{xz} & \gamma_{yz} \end{array}$$

d) Relações Deformação-Deslocamento

Na teoria de pequenos deslocamentos as relações deformação-deslocamento são dadas pelas expressões:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

e) Relações Tensão-Deformação

Na teoria de pequenos deslocamentos, as relações tensão-deformação são dados em forma linear e homogênea pela expressão:

$$\{\sigma\} = [A] \{\epsilon\} \quad \text{em } V \quad (1.1.3)$$

onde

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau'_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$[A]$ é uma matriz simétrica, conhecida como matriz elástica.

Invertendo tem-se

$$\{\epsilon\} = [B] \{\sigma\} \quad \text{em } V \quad (1.1.4)$$

Para um material isotrópico, o número das constantes elásticas independentes reduz-se a duas, e as relações tensão-deformação são dadas por:

$$\sigma_x = 2G \left[\epsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) \right] ; \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

$$\sigma_y = 2G \left[\epsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) \right] ; \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx}$$

$$\sigma_z = 2G \left[\epsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) \right] ; \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\text{com } G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.1.5)$$

ou,

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z) \right] ; \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} \left[\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z) \right] ; \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} \left[\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y) \right] ; \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad (1.1.6)$$

f) Condições de Contorno

A superfície S de um corpo pode ser dividida em duas partes do ponto de vista das condições de contorno: a parte S_σ so

bre as quais as condições de contorno são prescritas em termos de forças externas e a parte S_u sobre as quais as condições de contorno são prescritas em termos de deslocamentos.

$$\dot{S} = S_\sigma \cup S_u$$

Designando as componentes das forças externas prescritas, por unidade de área da superfície de contorno, por \bar{p}_x , \bar{p}_y , \bar{p}_z ; as condições de contorno mecânicas são dadas por

$$p_x = \bar{p}_x, \quad p_y = \bar{p}_y, \quad p_z = \bar{p}_z, \quad \text{em } S_\sigma \quad (1.1.7)$$

onde,

$$\begin{aligned} p_x &= \sigma_x \ell + \tau_{xy} m + \tau_{zx} n \\ p_y &= \tau_{xy} \ell + \sigma_y m + \tau_{yz} n \\ p_z &= \tau_{zx} \ell + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

e ℓ , m , n são os cossenos diretores da normal unitária Γ à fronteira.

$$\ell = \cos(x, \Gamma) \quad ; \quad m = \cos(y, \Gamma) \quad ; \quad n = \cos(z, \Gamma) \quad (1.1.9)$$

Chamando as componentes dos deslocamentos prescritos por \bar{u} , \bar{v} e \bar{w} , as condições geométricas são dadas por

$$u = \bar{u} \quad ; \quad v = \bar{v} \quad ; \quad w = \bar{w} \quad \text{em } S_u \quad (1.1.10)$$

Desde que, as equações que governam o problema tem forma linear é válido utilizar o princípio da superposição.

1.2 - Princípio dos Trabalhos Virtuais

O Princípio dos Trabalhos Virtuais conduz a minimização do funcional:

$$\begin{aligned} \Pi = & \int_V (\sigma_x \epsilon_x + \dots + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dV - \int_V (\bar{b}_x u + \bar{b}_y v + \bar{b}_z w) dV - \\ & - \int_{S_\sigma} (\bar{p}_x u + \bar{p}_y v + \bar{p}_z w) dS \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

E pode ser enunciado como:

"A soma dos trabalhos virtuais realizados pelas forças externas e internas, quando o corpo é submetido a deslocamentos arbitrários infinitesimais virtuais, satisfazendo as condições geométricas prescritas de contorno, é zero".

As grandezas livres para variar no funcional Π são os deslocamentos e as deformações em V e S_σ .

Segue, da própria formulação do princípio dos trabalhos virtuais, que:

$$\delta u = \delta v = \delta w = 0 \quad \text{em } S_u \quad (1.2.2)$$

1.3) - Princípio da Energia Potencial Mínima

O Princípio da Energia Potencial Mínima é obtido do Princípio do Trabalho Virtual, considerando-se que (Ver LIMA [20]):

a) Seja possível construir uma função positiva definida $U(\epsilon_x, \epsilon_y, \dots, \gamma_{yz})$, chamada Energia de Deformação por unidade

de volume, a partir das relações tensões-deformações dadas.

b) As forças de massa ($\bar{b}_x, \bar{b}_y, \bar{b}_z$), forças de superfície ($\bar{p}_x, \bar{p}_y, \bar{p}_z$) e os deslocamentos prescritos ($\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$) permaneçam inalterados durante a variação das grandezas não prescritas; isto é, as forças de corpo e as forças de superfície podem ser obtidas a partir das funções potenciais:

$$\begin{aligned} - \phi &= \bar{b}_x u + \bar{b}_y v + \bar{b}_z w \\ - \psi &= \bar{p}_x u + \bar{p}_y v + \bar{p}_z w \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

com sua primeira variação dada por:

$$\begin{aligned} - \delta\phi &= \bar{b}_x \delta u + \bar{b}_y \delta v + \bar{b}_z \delta w \\ - \delta\psi &= \bar{p}_x \delta u + \bar{p}_y \delta v + \bar{p}_z \delta w \end{aligned}$$

c) As componentes das deformações satisfaçam as condições de compatibilidade, isto é, possam ser derivadas a partir de u, v e w pelas relações deformações-deslocamentos.

d) As componentes u, v e w dos deslocamentos satisfaçam as condições cinemáticas de contorno.

O Princípio da Energia Potencial Mínima afirma que, com base nas condições acima o estado de deformação real do corpo pode ser obtido pela minimização do funcional definido por:

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_V U(\bar{\epsilon}) dV - \int_V (\bar{b}_x u + \bar{b}_y v + \bar{b}_z w) dV - \int_{S_\sigma} (\bar{p}_x u + \\ &+ \bar{p}_y v + \bar{p}_z w) dS \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

1.4 - Generalização do Princípio da Energia Potencial Mínima

O Princípio da Energia Potencial Mínima pode ser generalizado colocando-se as condições (c) e (d) dentro do funcional com auxílio de multiplicadores de Lagrange.

Prova-se que os multiplicadores de Lagrange, citados acima, têm dimensões de tensão e de força (Ver WASHIZU [6] e LIMA [20]).

Então o funcional escreve-se:

$$\begin{aligned} \Pi_G = & \int_V U(\epsilon) dV - \int_V (\bar{b}_x u + \bar{b}_y v + \bar{b}_z w) dV - \int_V \left\{ \sigma_x \left(\epsilon_x - \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \right. \\ & \left. \sigma_y \left(\epsilon_y - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \dots + \tau_{yz} \left[\gamma_{yz} - \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] \right\} dV - \int_{S_\sigma} (\bar{p}_x u + \bar{p}_y v + \bar{p}_z w) dS - \\ & - \int_{S_u} \left[(u - \bar{u}) p_x + (v - \bar{v}) p_y + (w - \bar{w}) p_z \right] dS \quad (1.4.1) \end{aligned}$$

Ou, reagrupando:

$$\begin{aligned} \Pi_G = & \int_V \left\{ U(\epsilon) - (\epsilon_x \sigma_x + \dots + \gamma_{yz} \tau_{yz}) + \left[\sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \dots + \tau_{yz} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] \right. \\ & \left. - (\bar{b}_x u + \bar{b}_y v + \bar{b}_z w) \right\} dV - \int_{S_\sigma} (\bar{p}_x u + \bar{p}_y v + \bar{p}_z w) dS - \\ & - \int_{S_u} \left[(u - \bar{u}) p_x + (v - \bar{v}) p_y + (w - \bar{w}) p_z \right] dS \quad (1.4.2) \end{aligned}$$

As grandezas livres para variar no funcional são as tensões ($\sigma_x, \dots, \tau_{yz}$), as deformações ($\epsilon_x, \dots, \gamma_{yz}$), os deslocamentos (u, v, w) e as forças externas atuantes em S_u (p_x, p_y, p_z), com nenhuma condição adicional prescrita.

1.5 - Princípio de Hellinger-Reissner

Satisfeitas as relações do tipo:

$$\frac{\partial U}{\partial \epsilon_x} - \sigma_x = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \epsilon_y} - \sigma_y = 0, \dots, \quad \frac{\partial U}{\partial \gamma_{yz}} - \tau_{yz} = 0 \quad (1.5.1)$$

que surgem quando se toma a primeira variação de (1.4.1), as deformações ($\epsilon_x, \epsilon_y, \dots, \gamma_{yz}$) não serão mais variáveis independentes e estarão dadas pelas relações tensões-deformações.

Define-se Energia Complementar pela expressão:

$$\int_V \Omega(\sigma) dV = \int_V (\sigma_x \epsilon_x + \dots + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dV - \int_V U(\epsilon) dV \quad (1.5.2)$$

com $\Omega(\sigma)$ sendo a Energia Complementar por unidade de volume.

Introduzindo-se no funcional dado em (1.4.2) a definição acima e integrando por partes obtêm-se:

$$\begin{aligned} - \Pi_R = & \int_V \Omega(\sigma) dV + \int_V \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \bar{b}_x \right) u + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \bar{b}_y \right) v + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \bar{b}_z \right) w \right] dV - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_{S_\sigma} \left[(p_x - \bar{p}_x) u + (p_y - \bar{p}_y) v + (p_z - \bar{p}_z) w \right] dS - \\
 & - \int_{S_u} (p_x \bar{u} + p_y \bar{v} + p_z \bar{w}) dS \qquad (1.5.3)
 \end{aligned}$$

As grandezas livres para variar no funcional são as tensões ($\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{yz}$), os deslocamentos (u, v, w) e as forças externas atuantes em S_u (p_x, p_y, p_z).

C A P Í T U L O I I

TEORIA CLÁSSICA PARA FLEXÃO DE PLACAS

DELGADAS (KIRCHHOFF-LOVE)

2.1 - Introdução

Neste capítulo são deduzidas as expressões fundamentais da teoria clássica.

Usa-se basicamente, a Teoria da Elasticidade para pequenos deslocamentos e o Princípio dos Trabalhos Virtuais, para a dedução da equação diferencial das placas delgadas e suas condições de contorno.

2.2 - Hipóteses Básicas

A teoria para pequenos deslocamentos baseia-se no fato de que as flechas são pequenas comparadas com a espessura da placa.

As hipóteses básicas da Teoria Clássica são:

a) A superfície média da placa é considerada como superfície neutra.

b) As tensões normais na direção transversal da placa são pequenas comparadas com as outras tensões, portanto são negligenciadas ($\sigma_z = 0$).

c) Os segmentos normais a superfície média da placa antes

da deformação, permanecem normais a esta superfície média depois da deformação ($\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$, hipótese de Kirchhoff-Love).

d) O material da placa é considerado homogêneo, isotrópico e hookeano.

É importante fazer comentários das hipóteses básicas mencionadas acima.

Hipótese (a):

Esta hipótese não é válida para placas delgadas com grande deslocamentos, comparados com a espessura da placa (Large Deflections).

Porém, quando a superfície média da placa é uma superfície desenvolvível, a hipótese continua válida mesmo para grandes deslocamentos.

Hipótese (b):

Esta hipótese torna-se inexata, para placas delgadas, na vizinhança de carregamentos concentrados.

Hipótese (c):

Esta hipótese não implica que a deformação cisalhante transversal seja necessariamente nula, mas que sua contribuição para a deformação da placa é desprezível.

Deve-se notar que, sempre para placas delgadas, esta hipótese leva a resultados errados em certas regiões, tais como nas proximidades de cantos ou perto de orifícios com diâmetro da ordem de grandeza da espessura da placa.

2.3 - Equações da Teoria Clássica

Inicialmente são deduzidas, com auxílio das hipóteses básicas, as relações deformação-deslocamento da teoria clássica e posteriormente com o auxílio do Princípio dos Trabalhos Virtuais a equação diferencial das placas delgadas e suas condições de contorno.

a) Relações Deformação-Deslocamento

Sejam $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ e $w(x, y, z)$ os deslocamentos de um ponto qualquer do interior da placa nas direções x, y e z .

Pelas hipóteses básicas conclui-se que:

$$w(x, y, z) = w(x, y)$$

Com auxílio das figuras 1, 2 e fazendo uso da hipótese (c) tem-se:

$$\operatorname{sen} \phi = - \frac{u}{z} \qquad u = - z \operatorname{sen} \phi$$

$$\operatorname{sen} \alpha = - \frac{v}{z} \qquad v = - z \operatorname{sen} \alpha$$

Como as flechas são pequenas pode-se escrever:

$$\operatorname{sen} \phi \cong \tan \phi$$

$$\operatorname{sen} \alpha \cong \tan \alpha$$

Utilizando a interpretação geométrica da derivada parcial, tem-se:

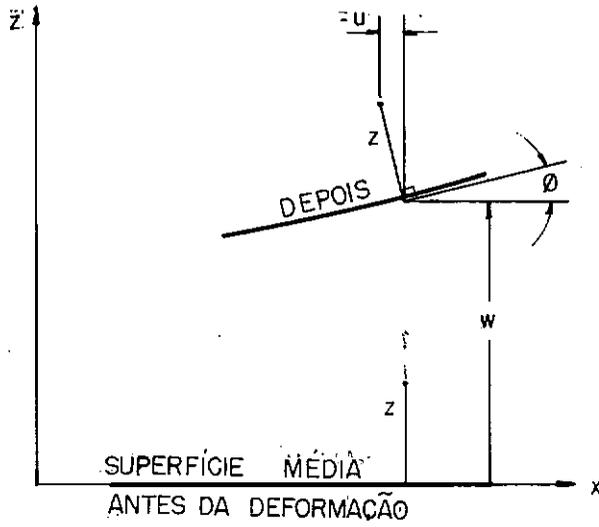


Fig. 1

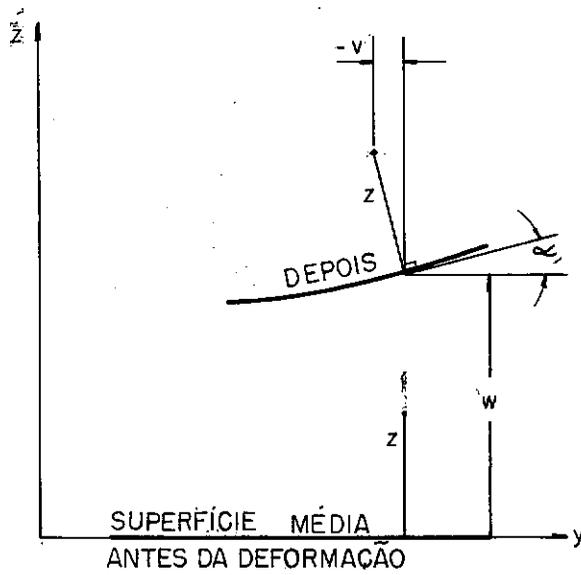


Fig. 2

$$\tan \phi = \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{e} \quad \tan \alpha = \frac{\partial w}{\partial y}$$

Logo,

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\text{e } w = w(x, y)$$

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y}$$

(2.3.1)

Usando as relações deformação-deslocamento dadas em (1.1.2)

$$\epsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\epsilon_z = \frac{\nu}{(1-\nu)} z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$\epsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\gamma_{xz} = 0$$

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$\gamma_{yz} = 0$$

(2.3.2)

É importante notar que a simples substituição das expressões obtidas para os deslocamentos nas relações deformação-deslocamento da teoria da elasticidade linear, resultou nas expressões $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$; mas deve-se observar que estas deformações, assim como a tensão σ_z , existem, porém são desprezíveis.

b) Relações Tensão-Deslocamento

As tensões σ_x , σ_y e τ_{xy} são obtidas substituindo-se as expressões de ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z e γ_{xy} em (1.1.5).

As tensões σ_z , τ_{xz} e τ_{yz} são obtidas a partir da substituição de σ_x , σ_y e τ_{xy} nas equações de equilíbrio (1.1.1.); sendo que na teoria clássica considera-se $\sigma_z = 0$.

$$\sigma_x = - \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) ; \quad \sigma_z = 0$$

$$\sigma_y = - \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot z \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) ; \quad \tau_{xz} = - \frac{3D}{2h} \cdot \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \cdot \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right]$$

$$\tau_{xy} = - \frac{E}{(1+\nu)} \cdot z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} ; \quad \tau_{yz} = - \frac{3D}{2h} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) \cdot \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right]$$

(2.3.3)

c) Relações Esforço Resultante-Deslocamento

Na solução de problemas de placas as tensões são normalmente substituídas pelos seus correspondentes esforços resultantes por unidade de comprimento, isto é:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \cdot z \, dz ; \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \cdot z \, dz ; \quad M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \cdot z \, dz$$

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \, dz ; \quad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} \, dz$$

Substituindo-se as expressões de (2.3.3) nas expressões anteriores, tem-se:

$$M_x = \left(\frac{h^3}{12}\right) \frac{\sigma_x}{z} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$M_y = \left(\frac{h^3}{12}\right) \frac{\sigma_y}{z} = -D \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$M_{xy} = \left(\frac{h^3}{12}\right) \cdot \frac{\tau_{xy}}{z} = -D (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$Q_x = \left(\frac{2h}{3}\right) \cdot \frac{\tau_{xz}}{\left[1 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2\right]} = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$Q_y = \left(\frac{2h}{3}\right) \cdot \frac{\tau_{yz}}{\left[1 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2\right]} = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

(2.3.4)

d) Equação Diferencial

Substituindo (2.3.2) em (1.2.1) tem-se

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_V (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dV - \int_V (\bar{b}_x u + \bar{b}_y v + \bar{b}_z w) dV \\ &- \int_{S_\sigma} (\bar{p}_x u + \bar{p}_y v + \bar{p}_z w) dS \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Variando o funcional (2.3.5),

$$\delta \Pi = \int_V (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dV - \int_V (\bar{b}_x \delta u + \bar{b}_y \delta v + \bar{b}_z \delta w) dV - \int_{S_\sigma} (\bar{p}_x \delta u + \bar{p}_y \delta v + \bar{p}_z \delta w) dS \quad (2.3.6)$$

Substituindo (2.3.2), (2.3.4) na 1ª integral de $\delta \Pi$ e usando a identidade de Green, tem-se

$$\begin{aligned} \int_V (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dV = & - \int_C \left[(M_x \ell + M_{xy} m) \delta \frac{\partial w}{\partial x} + \right. \\ & \left. + (M_{xy} \ell + M_y m) \delta \frac{\partial w}{\partial y} \right] ds + \int_A \left[\left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \delta \frac{\partial w}{\partial x} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \right) \delta \frac{\partial w}{\partial y} \right] dA \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

Para 2ª integral de $\delta \Pi$, tem-se:

$$\begin{aligned} \bar{b}_x = \bar{b}_y = 0 \quad e \quad \int_{-h/2}^{+h/2} \bar{b}_z dz = p(x, y) \\ - \int_V \bar{b}_z \delta w dV = - \int_A p(x, y) \delta w dA \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Finalmente utilizando (1.1.8) e (2.3.4) na 3ª integral de $\delta \Pi$ tem-se:

$$\bar{p}_x = \bar{\sigma}_x \ell + \bar{\tau}_{xy} m = \left(\frac{12}{h^3} \right) \cdot z \cdot (\bar{M}_x \ell + \bar{M}_{xy} m)$$

$$\bar{p}_y = \bar{\tau}_{xy}^{\ell} + \bar{\sigma}_{y^m} = \left(\frac{12}{h^3}\right) \cdot z \cdot (\bar{M}_{xy}^{\ell} + \bar{M}_{y^m})$$

$$\bar{p}_z = \bar{\tau}_{xz}^{\ell} + \bar{\tau}_{yz}^m = \frac{3}{2h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2 \right] (\bar{Q}_x^{\ell} + \bar{Q}_y^m)$$

$$- \int_{S_{\sigma}} (\bar{p}_x \delta u + \bar{p}_y \delta v + \bar{p}_z \delta w) dS = \int_{S_{\sigma}} \left(\frac{12}{h^3}\right) \cdot z^2 \cdot (\bar{M}_x^{\ell} + \bar{M}_{xy}^m) \cdot$$

$$\delta \frac{\partial w}{\partial x} \cdot ds dz + \int_{S_{\sigma}} \left(\frac{12}{h^3}\right) \cdot z^2 \cdot (\bar{M}_{xy}^{\ell} + \bar{M}_{y^m}) \delta \frac{\partial w}{\partial y} ds dz$$

$$- \int_{S_{\sigma}} \frac{3}{2h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2 \right] (\bar{Q}_x^{\ell} + \bar{Q}_y^m) \delta w ds dz = \int_{C_{\sigma}} \left[(\bar{M}_x^{\ell} + \right.$$

$$\left. \bar{M}_{xy}^m) \delta \frac{\partial w}{\partial x} + (\bar{M}_{xy}^{\ell} + \bar{M}_{y^m}) \delta \frac{\partial w}{\partial y} - (\bar{Q}_x^{\ell} + \bar{Q}_y^m) \delta w \right] ds$$

(2.3.9)

Das expressões dadas em (2.3.4) segue que:

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$$

$$Q_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \quad , \quad (2.3.10)$$

Substituindo (2.3.10) em (2.3.7)

$$\int_V (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dV = - \int_C \left[(M_x^{\ell} + M_{xy}^m) \delta \frac{\partial w}{\partial x} + \right.$$

$$+ (M_{xy}^{\ell} + M_y^m) \delta \left[\frac{\partial w}{\partial y} \right] ds + \int_A (Q_x \delta \frac{\partial w}{\partial x} + Q_y \delta \frac{\partial w}{\partial y}) dA \quad (2.3.11)$$

Usando a identidade de Green:

$$\int_A (Q_x \delta \frac{\partial w}{\partial x} + Q_y \delta \frac{\partial w}{\partial y}) dA = \int_C (Q_x^{\ell} + Q_y^m) \delta w ds - \int_A \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) \delta w dA \quad (2.3.12)$$

Definindo $Q_r = Q_x^{\ell} + Q_y^m$ e substituindo (2.3.12) em (2.3.11) tem-se:

$$\int_V (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dV = - \int_C \left[(M_x^{\ell} + M_{xy}^m) \delta \frac{\partial w}{\partial x} + (M_{xy}^{\ell} + M_y^m) \delta \frac{\partial w}{\partial y} - Q_r \delta w \right] ds - \int_A \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) \delta w dA \quad (2.3.13)$$

Substituindo (2.3.8), (2.3.9) e (2.3.13) em (2.3.6) tem-se:

$$\delta \Pi = - \int_A \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p \right) \delta w dA - \int_{C_{\sigma}} \left\{ \left[(M_x^{\ell} + M_{xy}^m) - (\bar{M}_x^{\ell} + \bar{M}_{xy}^m) \right] \delta \frac{\partial w}{\partial x} + \left[(M_{xy}^{\ell} + M_y^m) - (\bar{M}_{xy}^{\ell} + \bar{M}_y^m) \right] \delta \frac{\partial w}{\partial y} - (Q_r - \bar{Q}_r) \delta w \right\} ds -$$

$$- \int_{C_u} \left[(M_x^{\ell} + M_{xy}^m) \delta \frac{\partial w}{\partial x} + (M_{xy}^{\ell} + M_y^m) \delta \frac{\partial w}{\partial y} - Q_r \delta w \right] ds = 0 \quad (2.3.14)$$

Definindo $M_{xr} = M_x^{\ell} + M_{xy}^m$; $M_{yr} = M_{xy}^{\ell} + M_y^m$ e utilizando as relações:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \ell \frac{\partial}{\partial r} - m \frac{\partial}{\partial s} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y} = m \frac{\partial}{\partial r} + \ell \frac{\partial}{\partial s} \quad (\text{em } C),$$

na expressão (2.3.14) tem-se

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & - \int_A \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p \right) \delta w \, dA - \int_{C_\sigma} \left\{ \left[(M_{xr}^{\ell} + M_{yr}^m) - (\bar{M}_{xr}^{\ell} + \bar{M}_{yr}^m) \right] \delta \frac{\partial w}{\partial r} + \left[(M_{yr}^{\ell} - M_{xr}^m) - (\bar{M}_{yr}^{\ell} - \bar{M}_{xr}^m) \right] \delta \frac{\partial w}{\partial s} - \right. \\ & \left. - (Q_r - \bar{Q}_r) \delta w \right\} ds - \int_{C_u} \left[(M_{xr}^{\ell} + M_{yr}^m) \delta \frac{\partial w}{\partial r} + (M_{yr}^{\ell} - M_{xr}^m) \delta \frac{\partial w}{\partial s} - \right. \\ & \left. - Q_r \delta w \right] ds = 0 \end{aligned}$$

Definindo:

$M_r = M_{xr}^{\ell} + M_{yr}^m$, $M_{rs} = M_{yr}^{\ell} - M_{xr}^m$, integrando por partes o segundo termo da integral em C_u e utilizando as condições de contorno em C_u :

$$\delta w = 0 \quad \delta \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad (2.3.15)$$

tem-se:

$$\delta \Pi = - \int_A \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p \right) \delta w \, dA - \int_{C_\sigma} \left[(M_r - \bar{M}_r) \delta \frac{\partial w}{\partial r} + (M_{rs} - \bar{M}_{rs}) \delta \frac{\partial w}{\partial s} - (\bar{Q}_r - \bar{Q}_r) \delta w \right] ds = 0 \quad (2.3.16)$$

Integrando, o termo $\int_{C_\sigma} (M_{rs} - \bar{M}_{rs}) \delta \frac{\partial w}{\partial s} ds$, por partes, tem-se:

$$\int_{C_\sigma} (M_{rs} - \bar{M}_{rs}) \delta \frac{\partial w}{\partial s} ds = (M_{rs} - \bar{M}_{rs}) \delta w \Big|_{C_\sigma} - \int_{C_\sigma} \left(\frac{\partial M_{rs}}{\partial s} - \frac{\partial \bar{M}_{rs}}{\partial s} \right) \delta w \, ds \quad (2.3.17)$$

Substituindo (2.3.17) em (2.3.16)

$$\delta \Pi = - \int_A \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p \right) \delta w \, dA - \int_{C_\sigma} \left\{ (M_r - \bar{M}_r) \delta \frac{\partial w}{\partial r} + \left[(Q_r + \frac{\partial M_{rs}}{\partial s}) - (\bar{Q}_r + \frac{\partial \bar{M}_{rs}}{\partial s}) \right] \delta w \right\} ds - (M_{rs} - \bar{M}_{rs}) \delta w \Big|_{C_\sigma} \quad (2.3.18)$$

O termo final de (2.3.18) representa forças concentradas atuando no extremos de C_σ e na direção de +z.

Sendo δw e $\delta \frac{\partial w}{\partial r}$ arbitrários em A e C_σ , tem-se:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p(x, y) = 0 \quad \text{em A} \quad (2.3.19)$$

$$M_r = \bar{M}_r \quad \text{e} \quad Q_r + \frac{\partial M_{rs}}{\partial s} = \bar{Q}_r + \frac{\partial \bar{M}_{rs}}{\partial s} \quad \text{em } C_\sigma \quad (2.3.20)$$

onde (2.3.19) é a equação de equilíbrio e (2.3.20) as condições mecânicas de contorno.

As condições geométricas de contorno são dadas por:

$$w = \bar{w} \quad \text{e} \quad \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} \quad \text{em } C_u \quad (2.3.21)$$

Substituindo (2.3.10) em (2.3.19) e utilizando (2.3.4), tem-se

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D} \quad (\text{em } A) \quad (2.3.22)$$

A equação (2.3.22) é a equação diferencial das placas submetidas a carregamentos transversais.

Esta é uma equação diferencial parcial linear do tipo elítico com coeficientes constantes, não homogênea, de quarta ordem.

e) Condições de Contorno

Embora, na dedução da equação diferencial das placas delgadas submetidas a carregamentos transversais, tenha-se chegado a duas condições de contorno por bordo (ver equações (2.3.20) e (2.3.21)), sabe-se que as condições físicas reais do problema conduzem a existência de três condições de contorno por bordo.

A inconsistência existente entre as condições físicas e as condições matemáticas (equação diferencial linear de 4ª or

dem), decorrente do fato de ter-se desprezado as deformações cisalhantes transversais γ_{xz} e γ_{yz} (hipótese (c)), foi discutida por diversos autores, entre eles: Kirchhoff, Kelvin and Tait, Rayleigh e Boussinesq.

Kirchhoff, analisando o caso de bordo livre, concluiu que as duas condições de contorno dadas pelo esforço cortante Q_r e momento torçor M_{rs} podem ser condensadas em uma só, isto é: o momento torçor dado por $M_{rs} ds$ é estaticamente equivalente a um binário cuja força tem intensidade M_{rs} e cujo "braço" tem comprimento ds . Daí segue que a distribuição de momentos torçores M_{rs} ao longo do bordo, é estaticamente equivalente a uma distribuição de esforços cortantes de intensidade $Q_r = \frac{\partial M_{rs}}{\partial s}$.

Portanto, a condição de contorno condensada é dada por:

$$V_r = Q_r + \frac{\partial M_{rs}}{\partial s}$$

Como consequência da equivalência entre a distribuição de momentos torçores e a distribuição de esforços cortantes, surgem nos cantos das placas retangulares reações concentradas de intensidade igual a

$$R_c = 2M_{xy} = -2D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

(ver termo final da equação 2.3.18).

As condições de contorno usuais são dadas por:

1) Bordo Simplesmente Apoiado

$$w(x, y) = 0 \quad \text{e} \quad M_r(x, y) = 0 \quad (2.3.23)$$

2) Bordo Engastado

$$w(x, y) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial w}{\partial r}(x, y) = 0 \quad (2.3.24)$$

3) Bordo Livre

$$M_r(x, y) = 0 \quad \text{e} \quad Q_r + \frac{\partial M_{rs}}{\partial s} = 0 \quad (2.3.25)$$

Outras condições podem ser definidas, como mostra a referência [3].

C A P Í T U L O I I I

TEORIA DE REISSNER PARA FLEXÃO DE PLACAS

3.1 - Introdução

Neste capítulo são deduzidas as equações fundamentais da teoria de Reissner.

Usa-se basicamente a Teoria da Elasticidade para pequenos deslocamentos e o Princípio de Hellinger-Reissner, deduzido anteriormente.

3.2 - Equações de Equilíbrio:

Considera-se que o elemento de placa mostrado na fig. 3 esteja submetido a um carregamento por unidade de área, $p(x, y)$, atuando na superfície média do elemento.

Considera-se que o elemento de placa esteja em equilíbrio.

As resultantes de tensões são definidas por:

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x z \, dz \quad ; \quad M_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y z \, dz \quad ; \quad M_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} z \, dz$$

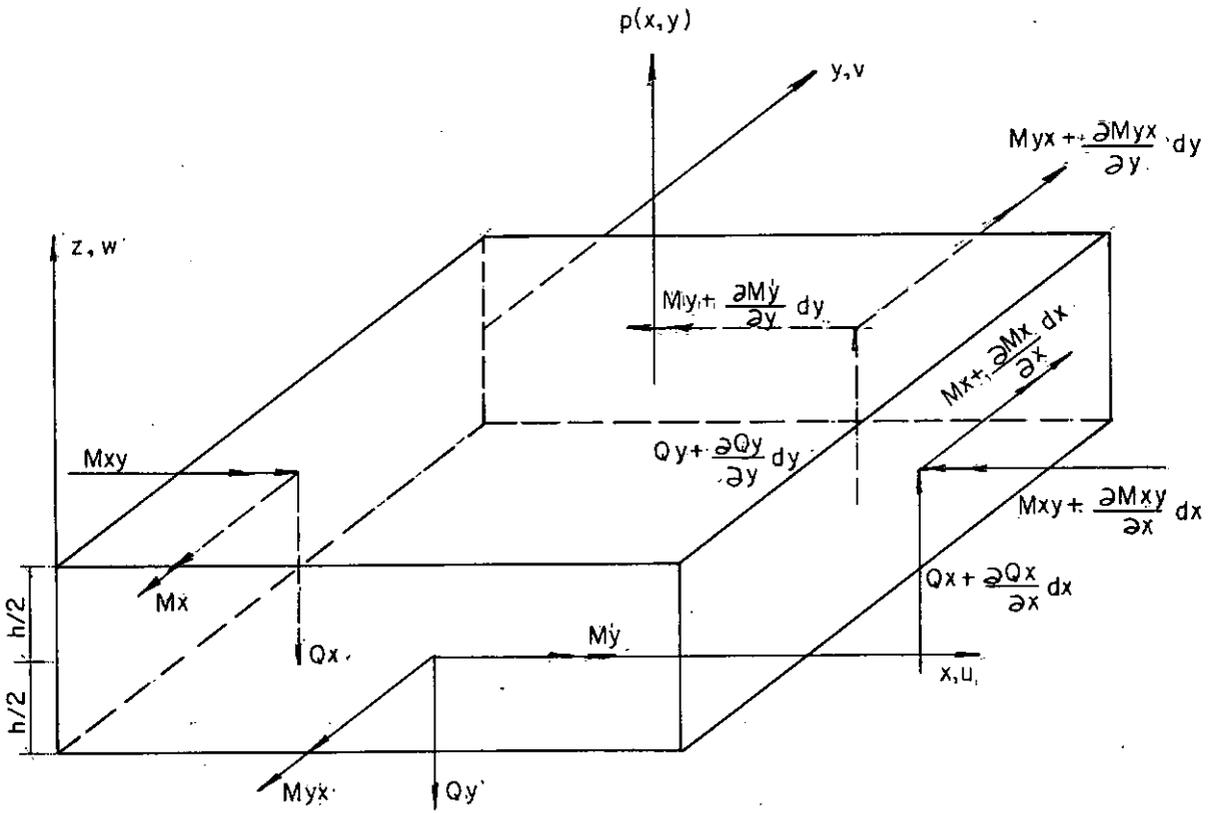


Fig. 3

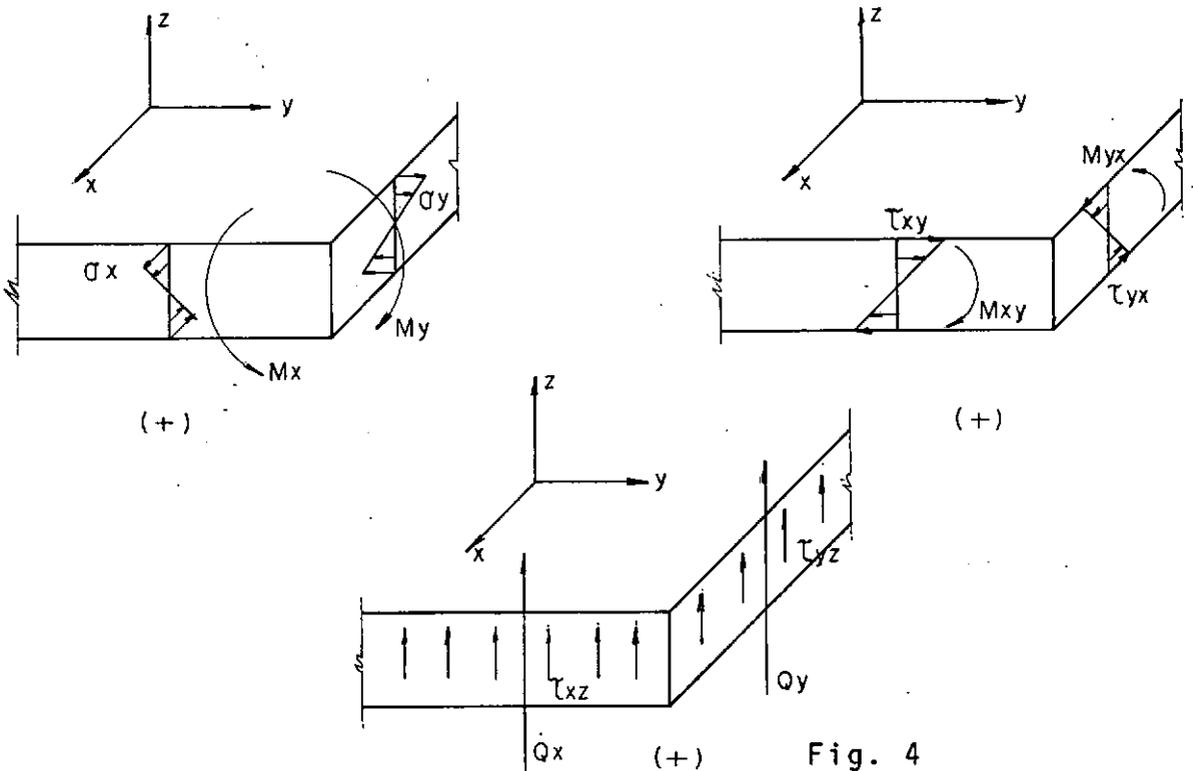


Fig. 4

$$M_{yx} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yx} z \, dz \quad ; \quad Q_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xz} \, dz \quad ; \quad Q_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yz} \, dz$$

(3.2.1)

Porém, como $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, segue: $M_{xy} = M_{yx}$

Utilizando-se do fato de que, na Teoria da Elasticidade para pequenos deslocamentos, as deformações tem efeito negligenciável sobre as condições de equilíbrio, as equações de equilíbrio são deduzidas supondo-se que a superfície média da placa deformada permaneça plana.

As equações são deduzidas utilizando-se as expressões:

$$\sum (\text{Forças na Direção } z) = 0$$

$$\sum (\text{Momentos em relação ao eixo } x) = 0$$

$$\sum (\text{Momentos em relação ao eixo } y) = 0$$

Logo:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \quad , \quad (3.2.2)$$

observando-se que nas duas últimas expressões desprezou-se o momento da carga $p(x, y)$ e os momentos devidos a variação dos cor-
tantes Q_x e Q_y .

3.3 - Dedução das Expressões para τ_{xz} , τ_{yz} e σ_z

Considera-se que:

a) as tensões σ_x , σ_y e τ_{xy} variam linearmente ao longo da espessura da placa, isto é:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \left(\frac{12M_x}{h^3}\right) z \\ \sigma_y &= \left(\frac{12M_y}{h^3}\right) z \\ \tau_{xy} &= \left(\frac{12M_{xy}}{h^3}\right) z\end{aligned}\quad (3.3.1)$$

b) as condições de contorno nas faces da placa são:

$$\begin{aligned}\sigma_z &= p(x, y) && \text{para } z = h/2 \\ \sigma_z &= 0 && \text{para } z = -h/2 \\ \tau_{xz} = \tau_{yz} &= 0 && \text{para } z = \pm h/2\end{aligned}\quad (3.3.2)$$

Substituindo as equações (3.3.1) nas equações de equi-
líbrio das tensões internas (1.1.1), desprezadas as forças de ma-
s

sa tem-se,

$$\left(\frac{12}{h^3}\right) \cdot \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\right) \cdot z + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0$$

$$\left(\frac{12}{h^3}\right) \cdot \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}\right) \cdot z + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0$$

Utilizando as equações (3.2.2) tem-se:

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = - \left(\frac{12}{h^3}\right) Q_x z$$

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = - \left(\frac{12}{h^3}\right) Q_y z$$

Integrando cada uma das expressões obtidas e utilizando as equações de contorno (3.3.2) segue:

$$\tau_{xz} = \frac{3Q_x}{2h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2 \right]$$

$$\tau_{yz} = \frac{3Q_y}{2h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2 \right] \quad (3.3.3)$$

Substituindo-se as expressões (3.3.3) na equação:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0$$

e utilizando-se da primeira das equações de (3.2.2) segue:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{3p}{2h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right]$$

Integrando a expressão acima com o uso de (3.3.2)

tem-se

$$\sigma_z = \frac{3p}{4} \left[\frac{2}{3} + \frac{z}{(h/2)} - \frac{1}{3} \left(\frac{z}{(h/2)} \right)^3 \right] \quad (3.3.4)$$

3.4 - Equações de Reissner

A Energia Complementar para um material homogêneo, isotrópico e hookeano, pode ser expressa em função das tensões, isto é:

$$\int_V \Omega(\sigma) dV = \frac{1}{2E} \int_V \left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu (\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) + 2(1+\nu) \cdot (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \right] dV \quad (3.4.1)$$

Substituindo as expressões das tensões dadas em (3.3.1) e (3.3.3) na expressão acima e integrando-se ao longo de z tem-se:

$$\int_V \Omega(\sigma) dV = \frac{1}{2} \int_A \frac{12}{Eh^3} \left[(M_x + M_y)^2 + 2(1+\nu)(M_{xy}^2 - M_x M_y) + \frac{(1+\nu)}{5} \cdot h^2 \cdot (Q_x^2 + Q_y^2) - \frac{\nu h^2}{5} p (M_x + M_y) \right] \cdot dA + \frac{1}{2E} \int_V \sigma_z^2 dz \quad (3.4.2)$$

Desprezando-se as forças de massa, o funcional dado em (1.5.3) pode ser escrito:

$$\begin{aligned}
 - \Pi_R = & \int_V \Omega(\sigma) dV + \int_V \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) u + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \right. \\
 & \cdot v + \left. \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) w \right] dV - \int_{S_\sigma} \left[(p_x - \bar{p}_x) u + (p_y - \bar{p}_y) v + \right. \\
 & \left. + (p_z - \bar{p}_z) w \right] dS - \int_{S_u} (p_x \bar{u} + p_y \bar{v} + p_z \bar{w}) dS \quad (3.4.3)
 \end{aligned}$$

Substituindo-se as expressões dadas em (3.3.1), (3.3.3), (3.3.4) e (1.1.8) na expressão acima, tem-se:

$$\begin{aligned}
 - \Pi_R = & \int_V \Omega(\sigma) dV + \int_V \left[\left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x \right) \cdot \left(\frac{12uz}{h^3} \right) + \right. \\
 & \left. + \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y \right) \cdot \left(\frac{12vz}{h^3} \right) + \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p \right) \cdot \frac{3w}{2h} \right. \\
 & \cdot \left. \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) \right] dV - \int_{S_\sigma} \left\{ \left[(M_x \ell + M_{xy} m) - (\bar{M}_x \ell + \bar{M}_{xy} m) \right] \cdot \left(\frac{12uz}{h^3} \right) + \right. \\
 & \left. + \left[(M_{xy} \ell + M_y m) - (\bar{M}_{xy} \ell + \bar{M}_y m) \right] \cdot \left(\frac{12vz}{h^3} \right) + \right. \\
 & \left. + \left[(Q_x \ell + Q_y m) - (\bar{Q}_x \ell + \bar{Q}_y m) \right] \cdot \frac{3w}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) \right\} dS
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{S_u} \left[(M_x \ell + M_{xy} m) \cdot \left(\frac{12\bar{u}z}{h^3} \right) + (M_{xy} \ell + M_y m) \cdot \left(\frac{12\bar{v}z}{h^3} \right) + \right. \\
& \left. + (Q_x \ell + Q_y m) \cdot \frac{3\bar{w}}{2h} \cdot \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) \right] dS \quad (3.4.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
- \Pi_R = & \int_V \Omega(\sigma) dV + \int_A \left[\left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x \right) \cdot \int_{-h/2}^{+h/2} \left(\frac{12u}{h^3} \right) z dz + \right. \\
& \left. + \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y \right) \cdot \int_{-h/2}^{+h/2} \left(\frac{12v}{h^3} \right) z dz + \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p \right) \cdot \right.
\end{aligned}$$

$$\left. \int_{-h/2}^{+h/2} \left[\frac{3w}{12} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) dz \right] dA - \int_{C_\sigma} \left\{ \left[(M_x \ell + M_{xy} m) - (\bar{M}_x \ell + \bar{M}_{xy} m) \right] \cdot \right.$$

$$\left. \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{12u}{h^3} \right) \cdot z dz + \left[(M_{xy} \ell + M_y m) - (\bar{M}_{xy} \ell + \bar{M}_y m) \right] \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{12v}{h^3} \right) z dz + \right.$$

$$\left. + \left[(Q_x \ell + Q_y m) - (\bar{Q}_x \ell + \bar{Q}_y m) \right] \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{3w}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) dz \right] \cdot ds - \right.$$

$$\left. - \int_{C_u} \left[(M_x \ell + M_{xy} m) \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{12\bar{u}}{h^3} \right) z dz + (M_{xy} \ell + M_y m) \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{12\bar{v}}{h^3} \right) z dz + \right.$$

$$+ (Q_x \ell + Q_y m) \cdot \left[\frac{3w}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) dz \right] ds \quad (3.4.5)$$

Os deslocamentos generalizados da placa β_x , β_y e w_R são definidos a partir das expressões abaixo:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x u dz = M_x \beta_x ; \quad \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y v dz = M_y \beta_y ; \quad \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} u dz = M_{xy} \beta_x$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} v dz = M_{xy} \beta_y ; \quad \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} w dz = Q_x w_R ; \quad \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} w dz = Q_y w_R$$

(3.4.6)

Substituindo (3.3.1) e (3.3.3) em (3.4.6), tem-se:

$$\beta_x = \left(\frac{12}{h^3} \right) \int_{-h/2}^{h/2} u z dz \quad , \quad \beta_y = \left(\frac{12}{h^3} \right) \int_{-h/2}^{h/2} v z dz$$

$$w_R = \frac{3}{2h} \int_{-h/2}^{h/2} w \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] dz, \quad (3.4.7)$$

β_x e β_y são as rotações das normais ao plano médio da placa,

w_R representa o valor médio, tomado ao longo da espessura da placa, dos deslocamentos transversais dos pontos da placa.

Substituindo (3.4.7) em (3.4.5):

$$\begin{aligned}
 - \Pi_R = & \int_V \Omega(\sigma) \, dV + \int_A \left[\left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x \right) \beta_x + \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y \right) \right. \\
 & \cdot \left. \beta_y + \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p \right) w_R \right] \, dA - \int_{C_\sigma} \left\{ \left[(M_x \, \ell + M_{xy} \, m) - (\bar{M}_x \, \ell + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \bar{M}_{xy} \, m) \right] \beta_x + \left[(M_{xy} \, \ell + M_y \, m) - (\bar{M}_{xy} \, \ell + \bar{M}_y \, m) \right] \beta_y + \right. \\
 & \left. \left[(Q_x \, \ell + Q_y \, m) - (\bar{Q}_x \, \ell + \bar{Q}_y \, m) \right] w_R \right\} \, ds - \int_{C_u} \left[(M_x \, \ell + M_{xy} \, m) \cdot \bar{\beta}_x \right. \\
 & \left. + (M_{xy} \, \ell + M_y \, m) \bar{\beta}_y + (Q_x \, \ell + Q_y \, m) \bar{w}_R \right] \, ds \quad (3.4.8)
 \end{aligned}$$

As quantidades sujeitas a variação em (3.4.8) são:

$$M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y, \beta_x, \beta_y \text{ e } w_R$$

Fazendo a variação do funcional dado em (3.4.8) e usando a identidade de Green tem-se:

$$- \delta \Pi_R = \int_A \left\{ \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x \right) \cdot \delta \beta_x + \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y \right) \right.$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \delta\beta_y + \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p \right) \delta w_R + \left\{ \frac{12}{Eh^3} \left[(M_x + M_y) - (1 + \nu) M_y \frac{\nu h^2}{10} p \right] - \right. \\
& - \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \left. \right\} \delta M_x + \left\{ \frac{12}{Eh^3} \left[(M_x + M_y) - (1 + \nu) M_x - \frac{\nu h^2}{10} p \right] - \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right\} \delta M_y + \\
& + \left[\frac{24(1 + \nu)}{Eh^3} M_{xy} - \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \right] \delta M_{xy} + \left[\frac{12}{Eh^3} \cdot \frac{(1 + \nu)h^2}{5} Q_x - \right. \\
& - \left. \left(\beta_x + \frac{\partial w_R}{\partial x} \right) \right] \delta Q_x + \left[\frac{12}{Eh^3} \cdot \frac{(1 + \nu)h^2}{5} Q_y - \left(\beta_y + \frac{\partial w_R}{\partial y} \right) \right] \delta Q_y \} \\
& \cdot dA + \int_{C_u} \left[(\delta M_x \ell + \delta M_{xy} m)(\beta_x - \bar{\beta}_x) + (\delta M_{xy} \ell + \delta M_y m)(\beta_y - \bar{\beta}_y) \right. \\
& + (\delta Q_x \ell + \delta Q_y m)(w_R - \bar{w}_R) \left. \right] ds - \int_{C_\sigma} \left\{ \left[(M_x \ell + M_{xy} m) - (\bar{M}_x \ell + \right. \right. \\
& \left. \left. + \bar{M}_{xy} m) \right] \delta\beta_x + \left[(M_{xy} \ell + M_y m) - (\bar{M}_{xy} \ell + \bar{M}_y m) \right] \delta\beta_y + \right. \\
& \left. + \left[(Q_x \ell + Q_y m) - (\bar{Q}_x \ell + \bar{Q}_y m) \right] \delta w_R \right\} ds = 0 \quad (3.4.9)
\end{aligned}$$

Então de (3.4.9), com a utilização do cálculo variacional, segue que:

i) Condições de equilíbrio em A:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0 \quad (3.4.10)$$

ii) Relações Força - Deslocamento:

$$\frac{12}{Eh^3} \left[(M_x + M_y) - (1 + \nu) M_y - \frac{\nu h^2}{10} p \right] - \frac{\partial \beta_x}{\partial x} = 0$$

$$\frac{12}{Eh^3} \left[(M_x + M_y) - (1 + \nu) M_x - \frac{\nu h^2}{10} p \right] - \frac{\partial \beta_y}{\partial y} = 0$$

$$\frac{24(1 + \nu)}{Eh^3} M_{xy} - \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) = 0 \quad \text{em A}$$

$$\frac{12(1 + \nu)}{Eh^3} \cdot \frac{h^2}{5} \cdot Q_x - \left(\beta_x + \frac{\partial w_R}{\partial x} \right) = 0$$

$$\frac{12(1 + \nu)}{Eh^3} \cdot \frac{h^2}{5} \cdot Q_y - \left(\beta_y + \frac{\partial w_R}{\partial y} \right) = 0$$

(3.4.11)

iii) No contorno C_u :

$$w_R = \bar{w}_R$$

$$\beta_x = \bar{\beta}_x$$

$$\beta_y = \bar{\beta}_y$$

(3.4.12)

iv) No contorno C_σ :

$$M_x \ell + M_{xy} m = \bar{M}_x \ell + \bar{M}_{xy} m$$

$$M_{xy} \ell + M_y m = \bar{M}_{xy} \ell + \bar{M}_y m$$

$$Q_x \ell + Q_y m = \bar{Q}_x \ell + \bar{Q}_y m \quad (3.4.13)$$

De (3.4.11) segue que:

Relações Força - Deslocamento

$$M_x = D \left(\frac{\partial \beta_y}{\partial x} + \nu \frac{\partial \beta_x}{\partial y} \right) + \frac{\nu h^2 p}{10(1-\nu)}$$

$$M_y = D \left(\nu \frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right) + \frac{\nu h^2 p}{10(1-\nu)}$$

$$M_{xy} = \frac{(1-\nu)D}{2} \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right)$$

em A

$$\beta_x = - \frac{\partial w_R}{\partial x} + \frac{h^2}{5D(1-\nu)} Q_x$$

$$\beta_y = - \frac{\partial w_R}{\partial y} + \frac{h^2}{5D(1-\nu)} Q_y$$

(3.4.14)

O sistema de oito equações diferenciais parciais lineares de 1ª ordem, dado por (3.4.10) e (3.4.14), juntamente com as condições de contorno em C_u e C_σ , dadas em (3.4.12) e (3.4.13), re

solve o problema de flexão em placas com pequenos deslocamentos segundo a teoria de Reissner.

O sistema dado pelas oito equações diferenciais lineares de 1ª ordem conduz naturalmente a três condições de contorno por bordo, existindo assim uma coerência entre as condições físicas e matemáticas de contorno.

Este sistema pode ser condensado em um outro de três equações diferenciais parciais, porém aumentando a ordem do sistema, afim de que continuem sendo satisfeitas três condições de contorno por bordo.

Então, substituindo β_x e β_y nas expressões de M_x , M_y e M_{xy} segue:

$$M_x = \frac{\nu h^2 p}{10(1-\nu)} + \frac{h^2}{5(1-\nu)} \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) - D \left(\frac{\partial^2 w_R}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_R}{\partial y^2} \right)$$

$$M_y = \frac{\nu h^2 p}{10(1-\nu)} + \frac{h^2}{5(1-\nu)} \left(\nu \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) - D \left(\nu \frac{\partial^2 w_R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_R}{\partial y^2} \right)$$

$$M_{xy} = \frac{h^2}{10} \left(\frac{\partial Q_x}{\partial y} + \frac{\partial Q_y}{\partial x} \right) - D(1-\nu) \frac{\partial^2 w_R}{\partial x \partial y}$$

Utilizando a terceira equação dada em (3.4.10) tem-se:

$$M_x = \frac{h^2}{5} \frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{\nu h^2}{10(1-\nu)} p - D \left(\frac{\partial^2 w_R}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_R}{\partial y^2} \right)$$

$$M_y = \frac{h^2}{5} \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \frac{\nu h^2}{10(1-\nu)} p - D \left(\nu \frac{\partial^2 w_R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_R}{\partial y^2} \right)$$

$$M_{xy} = \frac{h^2}{10} \left(\frac{\partial Q_x}{\partial y} + \frac{\partial Q_y}{\partial x} \right) - D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w_R}{\partial x \partial y} \quad (3.4.15)$$

Substituindo (3.4.15) nas duas primeiras equações de (3.4.10) tem-se:

$$Q_x - \frac{h^2}{10} \nabla^2 Q_x + \frac{h^2}{10(1 - \nu)} \frac{\partial p}{\partial x} = - D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w_R$$

$$Q_y - \frac{h^2}{10} \nabla^2 Q_y + \frac{h^2}{10(1 - \nu)} \frac{\partial p}{\partial y} = - D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w_R$$

Derivando a primeira equação acima em relação a x , a segunda em relação a y e utilizando a terceira equação de (3.4.10) tem-se:

$$D \nabla^4 w_R = p - \frac{kh^2}{10} \nabla^2 p \quad \text{com} \quad k = \frac{2 - \nu}{1 - \nu}$$

O novo sistema de equações diferenciais parciais é dado por:

$$Q_x - \frac{h^2}{10} \nabla^2 Q_x + \frac{h^2}{10(1 - \nu)} \frac{\partial p}{\partial x} = - D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w_R \quad (a)$$

$$Q_y - \frac{h^2}{10} \nabla^2 Q_y + \frac{h^2}{10(1 - \nu)} \frac{\partial p}{\partial y} = - D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w_R \quad (b)$$

$$D \nabla^4 w_R + \frac{kh^2}{10} \nabla^2 p = p \quad (c)$$

(3.4.16)

3. 5 - Condições de Contorno

Mostrou-se, no parágrafo anterior, que na teoria de Reissner cada bordo satisfaz a três condições de contorno.

Em placas retangulares as condições de contorno usuais são:

Bordo Simplesmente Apoiado

$$w_R = 0 \quad M_r = 0 \quad \beta_s^{(1)} = 0 \quad (a)$$

$$w_R = 0 \quad M_r = 0 \quad M_{rs} = 0 \quad (b)$$

Bordo Engastado

$$w_R = 0 \quad \beta_r^{(1)} = 0 \quad \beta_s^{(1)} = 0$$

Bordo Livre

$$M_r = 0 \quad M_{rs} = 0 \quad Q_r^{(1)} = 0$$

No caso de bordo simplesmente apoiado a condição de contorno exata é dada por (b).

Utilizando a condição de contorno exata, alguns autores obtiveram a solução analítica para a flecha e os esforços resultantes em placas retangulares com os quatro bordos simplesmente

(1) - Estas condições de contorno são conhecidas como naturais, pelo fato de surgirem naturalmente do funcional no processo de minimização do mesmo.

apoiados (Ver GIRKMANN [8] e CARLEY and LANGHAAR [15]).

A condição aproximada dada em (a) é utilizada em alguns artigos que estudam o assunto - (Ver SALERNO and GOLDBERG [13] e KOELLER and ESSENBURG [14]) - e será a adotada no decorrer deste trabalho.

A utilização, nos bordos simplesmente apoiados, da condição de contorno aproximada conduz a uma mudança no cálculo da reação de apoio, isto é: sendo o momento torçor diferente de zero, a reação de apoio de bordos simplesmente apoiados será dada pela expressão

$$R_r = Q_r + \frac{\partial M_{rs}}{\partial s}$$

Convém lembrar que no caso de placas retangulares com os quatro bordos simplesmente apoiados, esta consideração conduz a existência de reações concentradas nos cantos da placa, semelhante a teoria clássica, em contradição com as reações distribuídas, encontradas quando se utiliza a condição de contorno exata (Ver GIRKMANN [8], pág. 204 - Fig. 124 ou CARLEY and LANGHAAR [15]).

C A P Í T U L O I V

EXPRESSÕES ANALÍTICAS DAS FLECHAS E DOS
ESFORÇOS RESULTANTES

4.1 - Introdução:

Neste capítulo são deduzidas as expressões analíticas das flechas e dos esforços resultantes em placas, para a teoria clássica (Kirchhoff-Love) e teoria de Reissner.

O carregamento atuante é considerado constante, uniformemente distribuído ao longo de todo domínio da placa e orientado no sentido do eixo z .

Isto é:

$$p(x, y) = p_0 \quad \text{em } A.$$

Os casos estudados são dados pelas figuras 5, 6 e 7.

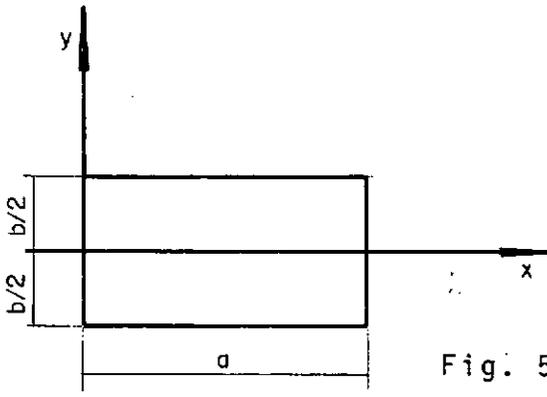


Fig. 5

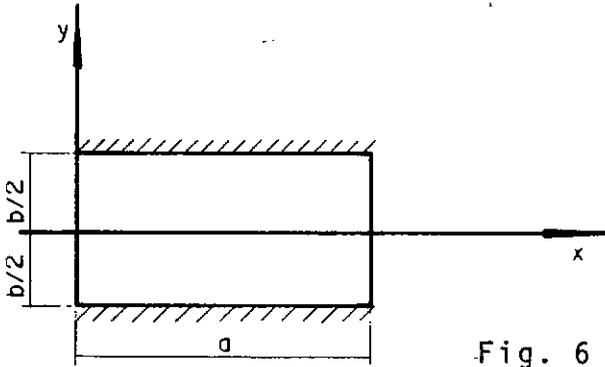


Fig. 6

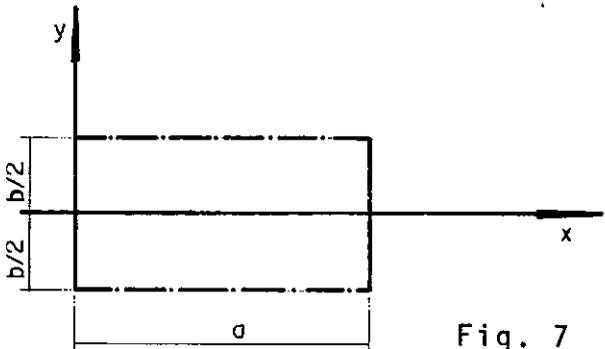


Fig. 7

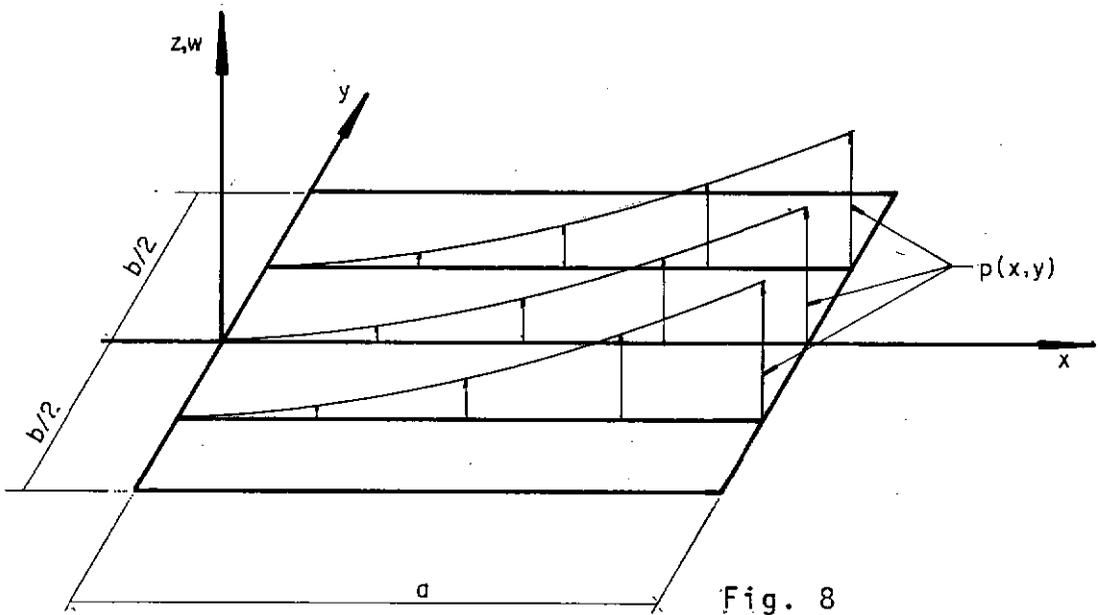


Fig. 8

Convém observar que a solução rigorosa do problema de placas é um problema de valor de contorno da física matemática.

As equações dadas por (2.3.22) e (3.4.16c) tem suas soluções escritas como:

$$w(x, y) = w_h(x, y) + w_p(x, y)$$

onde,

$w_h(x, y)$ = solução geral da equação homogênea.

$w_p(x, y)$ = solução particular da equação não homogênea.

O fato das equações (2.3.22) e (3.4.16c) serem lineares é que torna esta superposição possível.

Usa-se, para a solução das equações (2.3.22) e (3.4.16c), o método de Lévy.

Salienta-se que algumas condições devem ser satisfeitas afim de que o método de Lévy seja aplicado, isto é:

a) dois dos bordos opostos da placa são simplesmente apoiados (ver fig. 8);

b) o carregamento transversal, nos casos estudados, tem a mesma distribuição em todas as seções paralelas ao eixo x , (ver fig. 8);

c) a solução particular $w_p(x, y)$ é obtida considerando a placa como infinita em uma direção (no caso $b \rightarrow \infty$).

A condição c) implica que a solução é só em uma variável

vel (no caso, na variável x).

4.2 - Teoria Clássica

a) Flecha

A equação (2.3.22) com as respectivas condições de contorno resolve o problema da flexão de placas delgadas com pequenos deslocamentos.

Aplicando o método de Lévy, considerando que a parte do contorno da placa definida pelas retas $y = + b/2$ e $y = - b/2$ (ver fig. 8) possuem condições arbitrárias de contorno, porém simétricas com relação ao eixo x , obtém-se:

$$w_h(x, y) = \frac{1}{D} \sum_m (C_2 \cosh \mu y + C_3 y \sinh \mu y) \operatorname{sen} \mu x$$

$$w_p(x, y) = \frac{1}{D} \sum_m \frac{4p_0}{a\mu^5} \operatorname{sen} \mu x \quad , \quad \text{com } \mu = \frac{m\pi}{a}$$

$$m = 1, 3, 5, \dots$$

Então,

$$w(x, y) = \frac{1}{D} \sum_m \left(C_2 \cosh \mu y + C_3 y \sinh \mu y + \frac{4p_0}{a\mu^5} \right) \operatorname{sen} \mu x$$

$$m = 1, 3, 5, \dots \quad (4.2.1)$$

Da expressão da flecha obtém-se as expressões dos esforços, isto é:

b) Momentos

$$M_x(x, y) = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$M_x(x, y) = \sum_m \left[(1 - \nu) C_2 \mu^2 \cosh \mu y + (1 - \nu) C_3 \mu^2 y \sinh \mu y - \right. \\ \left. - 2\nu C_3 \mu \cosh \mu y + \frac{4p_0}{a\mu^3} \right] \sin \mu x \quad (4.2.2)$$

$$M_y(x, y) = -D \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$M_y(x, y) = \sum_m \left[(\nu - 1) C_2 \mu^2 \cosh \mu y + (\nu - 1) C_3 \mu^2 y \sinh \mu y - \right. \\ \left. - 2C_3 \mu \cosh \mu y + \frac{4p_0}{a\mu^3} \nu \right] \sin \mu x \quad (4.2.3)$$

$$M_{xy}(x, y) = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$M_{xy}(x, y) = (\nu - 1) \sum_m (C_2 \mu^2 \sinh \mu y + C_3 \mu \sinh \mu y + C_3 \mu^2 y \cosh \mu y) \cos \mu x \\ m = 1, 3, 5, \dots \quad (4.2.4)$$

c) Cortantes

$$Q_x(x, y) = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$Q_x(x, y) = \sum_m \left(\frac{4p_0}{a\mu^2} - 2\mu^2 C_3 \cosh \mu y \right) \cos \mu x \quad (4.2.5)$$

$$Q_y(x, y) = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$Q_y(x, y) = - \sum_m 2C_3 \mu^2 \sinh \mu y \cdot \sin \mu x$$

$$m = 1, 3, 5, \dots \quad (4.2.6)$$

d) Reações de Apoio

As reações de apoio são dadas pelas expressões:

$$R_x(x, y) = \left(Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) (x, y) \quad \forall (x, y) \in C_\sigma$$

$$R_y(x, y) = \left(Q_y + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} \right) (x, y) \quad \forall (x, y) \in C_\sigma$$

Logo,

$$R_x(x, y) = \sum_m \left[\frac{4p_0}{a\mu^2} - 2\mu^2 C_3 \cosh \mu y + (\nu - 1) \cdot (C_2 \mu^3 \cosh \mu y + 2C_3 \mu^2 \cosh \mu y + C_3 \mu^3 y \sinh \mu y) \right] \cdot \cos \mu x$$

$$R_y(x, y) = \sum_m \left[-2C_3 \mu^2 \sinh \mu y - (\nu - 1) \cdot (C_2 \mu^3 \sinh \mu y + C_3 \mu^2 \sinh \mu y + C_3 \mu^3 y \cosh \mu y) \right] \cdot \sin \mu x$$

Nos bordos da placa,

$$R_x(a, y) = -R_x(0, y) = \sum_m \left[\frac{4p_0}{a\mu^2} - 2\mu^2 C_3 \cosh \mu y + (\nu - 1) \cdot (C_2 \mu^3 \cosh \mu y + 2C_3 \mu^2 \cosh \mu y + C_3 \mu^3 y \sinh \mu y) \right] \cdot (-1)$$

$$R_y(x, b/2) = -R_y(x, -b/2) = \sum_{\bar{m}} \left[-2C_3\mu^2 \operatorname{senh}\alpha (v-1) \cdot (C_2\mu^3 \cdot \operatorname{senh}\alpha + C_3\mu^2 \operatorname{senh}\alpha + C_3\mu^2 \alpha \operatorname{cosh}\alpha) \right] \operatorname{sen}\mu x$$

$$m = 1, 3, 5, \dots \quad (4.2.7a, b)$$

No caso de $y = \pm b/2$ serem bordos engastados tem-se:

$$R_y(x, b/2) = -R_y(x, -b/2) = Q_y(x, b/2) = -Q_y(x, -b/2)$$

Reações Totais

As reações em cada um dos quatros bordos são dadas por:

$$R_{x_1} = \int_{-b/2}^{+b/2} \left(Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) (0, y) dy$$

$$R_{x_1} = R_{x_2}$$

$$R_{x_2} = \int_{-b/2}^{+b/2} \left(Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) (a, y) dy$$

$$R_{y_1} = \int_0^a \left(Q_y + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} \right) (x, b/2) dx$$

$$R_{y_1} = -R_{y_2}$$

$$R_{y_2} = \int_0^a \left(Q_y + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} \right) (x, -b/2) dx$$

Logo,

$$R_{x1} = \sum_m \left[\left(4C_3\mu \operatorname{senh}\alpha - \frac{4p_0}{a\mu^2} \cdot b \right) + 2(1-\nu) \cdot (C_2\mu^2 \operatorname{senh}\alpha + C_3\mu \operatorname{senh}\alpha + C_3\mu \alpha \operatorname{cosh}\alpha) \right]$$

$$R_{y1} = \sum_m \left[-4C_3\mu \operatorname{senh}\alpha + 2(1-\nu) \cdot (C_2\mu^2 \operatorname{senh}\alpha + C_3\mu \operatorname{senh}\alpha + C_3\mu \alpha \operatorname{cosh}\alpha) \right]$$

m = 1, 3, 5, ... (4.2.8 a, b)

Então a reação total é dada pela expressão:

$$R_T = (R_{x1} - R_{x2}) + (R_{y1} - R_{y2})$$

$$R_T = \sum_m \left[\frac{8p_0 b}{\mu^2 a} - 8(1-\nu) \cdot (C_2\mu^2 \operatorname{senh}\alpha + C_3\mu \operatorname{senh}\alpha + C_3\mu \alpha \operatorname{cosh}\alpha) \right]$$

m = 1, 3, 5, ... (4.2.9)

Observa-se na expressão (4.2.9) que a reação total não é igual ao carregamento distribuído atuante multiplicado pela área.

O termo $\sum_m \frac{8p_0 b}{\mu^2 a}$ de (4.2.9) corresponde a

$$\int_0^a \int_{-b/2}^{b/2} p_0(x, y) dx dy \text{ (carregamento atuante).}$$

O termo restante em (4.2.9) corresponde a soma das reações concentradas que surgem nos quatro cantos da placa retangular.

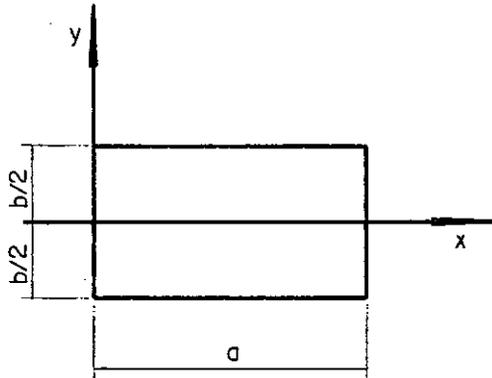
e) Determinação das constantese.1) - Quatro bordos simplesmente apoiados

Fig.. 9

$$w(x, y) \Big|_{x=0, a} = 0$$

$$w(x, y) \Big|_{y = \pm b/2} = 0$$

$$M_x(x, y) \Big|_{x=0, a} = 0$$

$$M_y(x, y) \Big|_{y = \pm b/2} = 0$$

Então,

$$C_3 = \frac{2p_0}{a\mu^4} \cdot \frac{1}{\cosh\alpha}$$

$$C_2 = - \frac{1}{\cosh\alpha} \left(C_3 \frac{b}{2} \operatorname{senh}\alpha + \frac{4p_0}{a\mu^5} \right)$$

$$\text{com } \alpha = \mu \frac{b}{2}$$

e.2) - Dois bordos paralelos simplesmente apoiados e dois bordos paralelos engastados

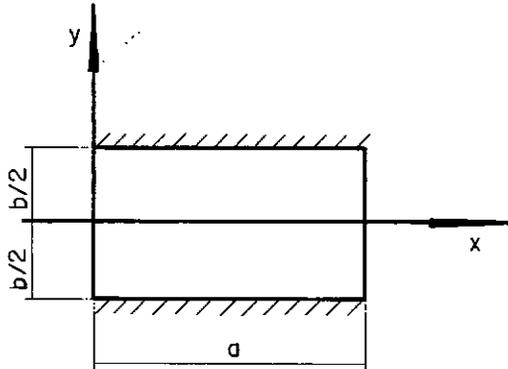


Fig. 10

$$w(x, y) \Big|_{x=0, a} = 0$$

$$w(x, y) \Big|_{y = \pm b/2} = 0$$

$$M_x(\bar{x}, y) \Big|_{x=0, a} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}(x, y) \Big|_{y = \pm b/2} = 0$$

Então,

$$C_3 = \frac{8p_0}{a\mu^4} \cdot \frac{\operatorname{senh}\alpha}{2\alpha + \operatorname{senh}2\alpha}$$

$$C_2 = -\frac{1}{\operatorname{cosh}\alpha} \left(C_3 \frac{b}{2} \operatorname{senh}\alpha + \frac{4p_0}{a\mu^5} \right)$$

e.3) - Dois bordos paralelos simplesmente apoiados e dois bordos paralelos livres

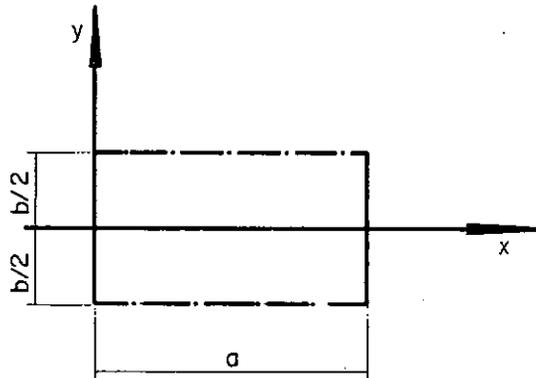


Fig. 11

$$w(x, y) \Big|_{x=0, a} = 0 \quad M_y(x, y) \Big|_{y=\pm b/2} = 0$$

$$M_x(x, y) \Big|_{x=0, a} = 0 \quad Q_y(x, y) + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x}(x, y) \Big|_{y=\pm b/2} = 0$$

Então,

$$C_3 = \frac{4p_0}{Ka\mu^4} v \operatorname{senh}\alpha$$

$$C_2 = \frac{[2\operatorname{cosh}\alpha - (v-1)\alpha\operatorname{senh}\alpha] \mu C_3 - \frac{4p_0}{a\mu^3} v}{(v-1)\mu^2\operatorname{cosh}\alpha}$$

com, $K = \alpha(v-1) + \frac{(v+3)}{2} \operatorname{senh}2\alpha$

4.3 - Teoria de Reissner

Foram deduzidas no capítulo 3, as equações que, juntamente com as condições de contorno, resolvem o problema da flexão de placas pela teoria de Reissner.

As equações estão dadas em (3.4.16. a,b,c), formando um sistema de equações diferenciais parciais lineares que envolvem a flecha $w_R(x, y)$ e as duas forças cisalhantes $Q_x(x, y)$ e $Q_y(x, y)$.

Transcrevendo o sistema dado em (3.4.16 a,b,c) tem-se:

$$Q_x - \frac{h^2}{10} \nabla^2 Q_x + \frac{h^2}{10(1-\nu)} \frac{\partial p}{\partial x} = - D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w_R$$

$$Q_y - \frac{h^2}{10} \nabla^2 Q_y + \frac{h^2}{10(1-\nu)} \frac{\partial p}{\partial y} = - D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w_R$$

$$D \nabla^4 w_R + \frac{h^2}{10} \nabla^2 p = p$$

Inicialmente resolve-se a equação (3.4.16 c) do sistema.

Os casos estudados, tanto de carregamento como de condições de contorno, são iguais ao da teoria clássica.

Logo, $p(x, y) = p_0$ em A

Então a equação (3.4.16 c) pode ser escrita:

$$D \nabla^4 w_R = p(x, y) \quad (4.3.1)$$

a) Flecha

Apesar da equação (4.3.1) ser semelhante a equação da teoria clássica, a solução do tipo Lévy apresentada para a teoria clássica não pode ser aplicada na equação (4.3.1).

Uma solução para (4.3.1) deve satisfazer a duas condições:

$$1. \quad \left. \frac{\partial^2 w_R}{\partial x^2} \right|_{x=0, a} \neq 0 \quad (\text{a curvatura deve refletir o efeito do cisalhamento})$$

2. A solução para uma placa infinita deve ser obtida a partir da solução para placa finita.

A partir das condições acima constroi-se uma solução tipo Lévy modificada, dada pela expressão:

$$w_R(x, y) = \frac{p_0}{24D} \left[\sum_m \frac{96}{a\mu^5} Y(y) \operatorname{sen}\mu x + \frac{6kh^2}{5} (ax - x^2) \right]$$

$$m = 1, 3, 5, \dots \quad (4.3.2)$$

onde $\mu = \frac{m\pi}{a}$ e $k = \frac{2-\nu}{1-\nu}$

Desenvolvendo o carregamento atuante, $p(x, y) = p_0$ em A, em série de Fourier, tem-se:

$$p(x, y) = \frac{4p_0}{a} \sum_m \frac{1}{\mu} \operatorname{sen}\mu x$$

$$m = 1, 3, 5, \dots \quad (4.3.3)$$

Substituindo-se (4.3.2) e (4.3.3) em (4.3.1) obtém-se:

$$\frac{d^4 Y}{dy^4} - 2\mu^2 \frac{d^2 Y}{dy^2} + \mu^4 Y = -\mu^4$$

cuja solução geral é:

$$Y(y) = C_5 \cosh \mu y + C_6 \mu y \sinh \mu y + C_7 \sinh \mu y + C_8 \mu y \cosh \mu y + 1 \quad (4.3.4)$$

Desenvolvendo em série de Fourier a função $f(x) = x^2 - ax$ definida no intervalo $0 \leq x \leq a$, tem-se:

$$f(x) = x^2 - ax = -\frac{8}{a} \sum_m \frac{1}{\mu^3} \operatorname{sen} \mu x$$

$$m = 1, 3, 5, \dots \quad (4.3.5)$$

Substituindo-se (4.3.4) e (4.3.5) na expressão (4.3.2) e usando-se a simetria em relação ao eixo x , tem-se:

$$w_R(x, y) = \frac{P_0}{24D} \sum_m \left[\frac{96}{a\mu^5} (C_5 \cosh \mu y + C_6 \mu y \sinh \mu y + 1) + \right. \\ \left. + \frac{48kh^2}{5a\mu^3} \right] \operatorname{sen} \mu x$$

$$m = 1, 3, 5, \dots \quad (4.3.6)$$

b) Cortantes

O sistema formado pelas equações (3.4.16 a,b) pode ser resolvido pela soma de uma solução particular do sistema com a solução do sistema homogêneo, isto é:

$$Q_x = Q_{xp} + Q_{xh}$$

$$Q_y = Q_{yp} + Q_{yh}$$

Assume-se, as expressões abaixo, como solução particular do sistema:

$$Q_{xp} = -D \frac{\partial \nabla^2 w_R}{\partial x} - \frac{kh^2}{10} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$Q_{yp} = -D \frac{\partial \nabla^2 w_R}{\partial y} - \frac{kh^2}{10} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (4.3.7 \text{ a,b})$$

Substituindo-se (4.3.2) e $p(x, y) = p_0$ em (4.3.7 a,b)

tem-se:

$$Q_{xp} = \sum_m \left[\frac{4p_0}{a\mu^2} (1 - 2C_6 \cosh \mu y) \right] \cdot \cos \mu x$$

$$Q_{yp} = \sum_m \left(-\frac{8p_0}{a\mu^2} C_6 \sinh \mu y \right) \cdot \sin \mu x$$

$$m = 1, 3, 5, \dots \quad (4.3.8 \text{ a,b})$$

Reissner demonstrou que a solução do sistema homogêneo pode ser dada pelas expressões:

$$Q_{xh} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \text{e} \quad Q_{yh} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

onde $\phi = \phi(x, y)$ é uma função de tensão.

Substituindo-se nas expressões de Q_x e Q_y tem-se:

$$Q_x = \sum_m \left[\frac{4p_0}{a\mu^2} (1 - 2C_6 \cosh \mu y) \right] \cos \mu x + \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$Q_y = \sum_m \left(-\frac{8p_0}{a\mu^2} \cdot C_6 \cdot \sinh \mu y \right) \cdot \sin \mu x - \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$m = 1, 3, 5, \dots \quad (4.3.9 \text{ a,b})$$

Substituindo-se (4.3.9 a,b) em (3.4.16 a,b) obtem-se:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\phi - \frac{h^2}{10} \nabla^2 \phi \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\phi - \frac{h^2}{10} \nabla^2 \phi \right) = 0$$

Logo,

$$\phi - \frac{h^2}{10} \nabla^2 \phi = C \quad (\text{constante})$$

Assumindo $C = 0$ tem-se:

$$\phi - \frac{h^2}{10} \nabla^2 \phi = 0 \quad (4.3.10)$$

A equação (4.3.10) é do tipo elítico, ou mais precisamente, uma equação de Laplace não homogênea (equação de Poisson).

Um dos métodos usados para a resolução de equações diferenciais parciais lineares é o conhecido Método da Separação de

Variáveis.

Convém lembrar que certas condições devem ser satisfeitas para a aplicação do método a problemas em duas variáveis x e y . (Ver WEINBERGER [5]).

Sabe-se que os bordos definidos pelas retas $x = 0$ e $x = a$ são simplesmente apoiados, logo tem-se que:

$$\left. \frac{\partial w_R}{\partial y} - \frac{h^2}{5D(1-\nu)} Q_y \right|_{x=0, a} = 0$$

como $\left. \frac{\partial w_R}{\partial y} \right|_{x=0, a} = 0$, logo: $\left. Q_y \right|_{x=0, a} = 0$

Portanto de (4.3.9 b) segue:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} (0, y) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} (a, y) = 0 \quad (4.3.11)$$

Fazendo $\phi(x, y) = A(x) \cdot B(y)$ e substituindo em (4.3.10) tem-se:

$$A''(x) \cdot B(y) + A(x) \cdot B''(y) - \frac{10}{h^2} A(x) \cdot B(y) = 0$$

$$\frac{A''(x)}{A(x)} = - \frac{B''(y)}{B(y)} + \frac{10}{h^2} = - \lambda^2 \quad (\lambda \neq 0)$$

Então,

$$A''(x) + \lambda^2 A(x) = 0$$

$$B''(y) - \eta^2 B(y) = 0 \quad (4.3.12 \text{ a,b})$$

$$\text{com } \eta^2 = \frac{10}{h^2} + \lambda^2$$

De (4.3.11) segue que:

$$A'(0) = 0 \quad \text{e} \quad A'(a) = 0 \quad (4.3.13)$$

Resolvendo (4.3.12 a) tem-se:

$$A(x) = D_1 \cosh \lambda x + D_2 \sen \lambda x$$

de (4.3.13) segue:

$$A'(0) = 0 \quad D_2 = 0$$

$$A'(a) = 0 \quad \lambda a = n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Logo,

$$A_n(x) = D_1 \cos \lambda x$$

A solução de (4.3.12 b) escreve-se:

$$B_n(x) = D_3 \sinh \eta y + D_4 \cosh \eta y$$

$$\text{com } \eta = \sqrt{\frac{10}{h^2} + \lambda^2}$$

Portanto,

$$\phi_n(x, y) = (C_1 \sinh \eta y + C_2 \cosh \eta y) \cos \lambda x$$

Então,

$$\phi(x, y) = \sum_n \phi_n(x, y)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.3.14)$$

Substituindo-se (4.3.14) em (4.3.9 a,b) tem-se:

$$Q_x(x, y) = \sum_m \frac{4p_0}{a\mu^2} (1 - 2C_6 \cosh \mu y) \cos \mu x +$$

$$m = 1, 3, 5, \dots$$

$$+ \sum_n \lambda (C_1 \cosh n y + C_2 \sinh n y) \cos \lambda x$$

$$n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.3.15)$$

$$Q_y(x, y) = \sum_m \left(-\frac{8p_0}{a\mu^2} C_6 \sinh \mu y \right) \cdot \sin \mu x +$$

$$m = 1, 3, 5, \dots$$

$$+ \sum_n \lambda (C_1 \sinh n y + C_2 \cosh n y) \sin \lambda x$$

$$n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.3.16)$$

Em virtude da simetria de eixos de carregamento tem-se:

- i) $Q_y(x, y) = -Q_y(x, -y)$ (função ímpar)
- ii) $Q_x(x, y) = -Q_x(a - x, y)$

- Logo: i) implica $C_2 = 0$
 ii) implica $n = 1, 3, 5, \dots$

Então,

$$Q_x(x, y) = \sum_m \left[\frac{4p_0}{a\mu^2} (1 - 2C_6 \cosh\mu y) + nC_1 \cdot \cosh n y \right] \cos \mu x$$

$$m = 1, 3, 5, \dots \quad (4.3.17)$$

$$Q_y(x, y) = \sum_m \left[-\frac{8p_0}{a\mu^2} C_6 \cdot \sinh\mu y + \mu C_1 \sinh n y \right] \sin \mu x$$

$$m = 1, 3, 5, \dots \quad (4.3.18)$$

Observa-se que as equações (4.3.17) e (4.3.18) satisfazem a terceira equação de (3.4.10).

c) Momentos

Substituindo-se (4.3.6), (4.3.17) e (4.3.18) em (3.4.14) tem-se:

$$c.1) - M_x(x, y)$$

$$M_x(x, y) = \sum_m \left\{ \frac{8h^2 p_0}{5a\mu} \cdot C_6 \cdot \cosh\mu y - \frac{h^2 n \mu}{5} C_1 \cosh n y - \right.$$

$$\left. - \frac{4p_0}{a\mu^3} \left[((\nu - 1) C_5 + 2\nu C_6) \cosh\mu y + (\nu - 1) C_6 \mu \sinh\mu y - 1 \right] \right\} \cdot \sin \mu x$$

$$m = 1, 3, 5, \dots \quad (4.3.19)$$

c.2) - $M_y (x, y)$

$$M_y (x, y) = \sum_m \left\{ -\frac{8h^2 p_0}{5a\mu} \cdot C_6 \cosh \mu y + \frac{h^2}{5} n\mu C_1 \cosh ny \right. \\ \left. - \frac{4p_0}{a\mu^3} \left[((1-\nu) C_5 + 2C_6) \cosh \mu y + (1-\nu) C_6 \mu y \sinh \mu y - \nu \right] + \right. \\ \left. + \frac{2h^2 p_0}{5a\mu} \nu \right\} \cdot \sin \mu x \\ m = 1, 3, 5, \dots \quad (4.3.20)$$

c.3) - $M_{xy} (x, y)$

$$M_{xy} (x, y) = \sum_m \left\{ -\frac{8p_0 h^2}{5a\mu} \cdot C_6 \sinh \mu y + \frac{h^2}{10} (n^2 + \mu^2) \cdot \right. \\ \left. \cdot C_1 \cdot \sinh ny - \frac{4p_0(1-\nu)}{a\mu^3} \cdot \left[(C_5 + C_6) \sinh \mu y + \right. \right. \\ \left. \left. + C_6 \mu y \cosh \mu y \right] \right\} \cos \mu x \\ m = 1, 3, 5, \dots \quad (4.3.21)$$

d) Reações de Apoio

Observou-se no capítulo III (parágrafo 5), que a não satisfação da condição de contorno exata em bordos simplesmente apoiados, conduz a utilização da expressão $R_r = Q_r + \frac{\partial M_{rs}}{\partial s}$, no lugar de $R_r = Q_r$, na determinação da reação de apoio nestes bordos.

Nos bordos engastados utiliza-se a expressão $R_r = Q_r$, na determinação da reação de apoio.

Então, analisando os três casos tem-se:

a) Caso 1

$$R_x(0, y) = Q_x(0, y) + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}(0, y)$$

$$R_x(a, y) = Q_x(a, y) + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}(a, y)$$

$$R_y(x, b/2) = Q_y(x, b/2) + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x}(x, b/2)$$

$$R_y(x, -b/2) = Q_y(x, -b/2) + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x}(x, -b/2)$$

b) Caso 2

$$R_x(0, y) = Q_x(0, y) + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}(0, y)$$

$$R_x(a, y) = Q_x(a, y) + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}(a, y)$$

$$R_y(x, b/2) = Q_y(x, b/2)$$

$$R_y(x, -b/2) = Q_y(x, -b/2)$$

c) Caso 3

$$R_x(0, y) = Q_x(0, y) + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}(0, y)$$

$$R_x(a, y) = Q_x(a, y) + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}(a, y)$$

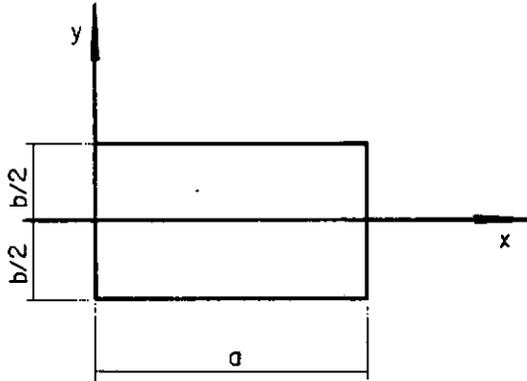
e) Determinação das Constantese.1) - Quatro bordos simplesmente apoiados

Fig. 12

$$w_R(x, y) \Big|_{x=0, a} = 0$$

$$w_R(x, y) \Big|_{y=\pm b/2} = 0$$

$$M_x(x, y) \Big|_{x=0, a} = 0$$

$$M_y(x, y) \Big|_{y=\pm b/2} = 0$$

$$\beta_y = \frac{\partial w_R}{\partial y} - \frac{h^2}{5D(1-\nu)} Q_y \Big|_{x=0, a} = 0$$

$$\beta_x = \frac{\partial w_R}{\partial x} - \frac{h^2}{5D(1-\nu)} Q_x \Big|_{y=\pm b/2} = 0$$

Logo,

$$C_1 = 0$$

$$C_5 = - \frac{1}{\cosh \alpha} \left[1 + \frac{k_\mu^2 h^2}{10} + \frac{\alpha \tanh \alpha}{2} \right]$$

$$C_6 = \frac{1}{2 \cosh \alpha}$$

com $\alpha = \frac{\mu b}{2}$

e.2) - Dois bordos paralelos simplesmente apoiados e dois bordos paralelos engastados

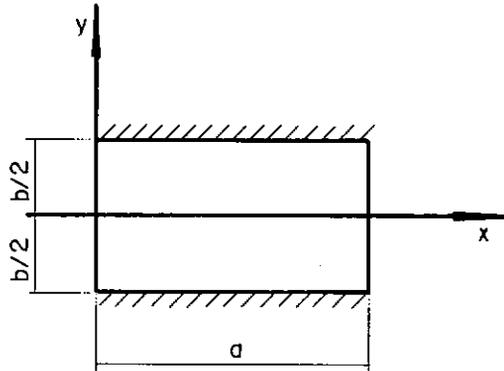


Fig. 13

$$w_R(x, y) \Big|_{x=0, a} = 0 \qquad w_R(x, y) \Big|_{y=\pm b/2} = 0$$

$$M_x(x, y) \Big|_{x=0, a} = 0 \qquad \beta_x(x, y) \Big|_{y=\pm b/2} = 0$$

$$\beta_y(x, y) \Big|_{x=0, a} = 0 \qquad \beta_y(x, y) \Big|_{y=\pm b/2} = 0$$

Logo:

$$C_1 = \frac{4p_0}{a\mu^2 n} \cdot \frac{1}{\cosh\left(\frac{nb}{2}\right)} \cdot (2C_6 \cosh\alpha - 1)$$

$$C_5 = -\frac{1}{\cosh\alpha} \left(C_6 \alpha \operatorname{senh}\alpha + \frac{kh^2 \mu^2}{10} + 1 \right)$$

$$C_6 = \frac{\frac{1}{\mu^4} \cdot \left(1 + \frac{kh^2\mu^2}{10}\right) \tanh\alpha - \frac{h^2}{5\eta\mu(1-\nu)} \tanh\left(\frac{\eta b}{2}\right)}{E}$$

com,

$$E = \left[\left(\frac{1}{\mu^4} + \frac{2h^2}{5\mu^2(1-\nu)} \right) \operatorname{senh}\alpha + \frac{1}{\mu^4} \cdot \frac{\alpha}{\operatorname{cosh}} - \frac{2h^2}{5\mu\eta(1-\nu)} \operatorname{cosh}\alpha \cdot \tanh\left(\frac{\eta b}{2}\right) \right]$$

c.3) - Dois bordos paralelos simplesmente apoiados e dois bordos paralelos livres

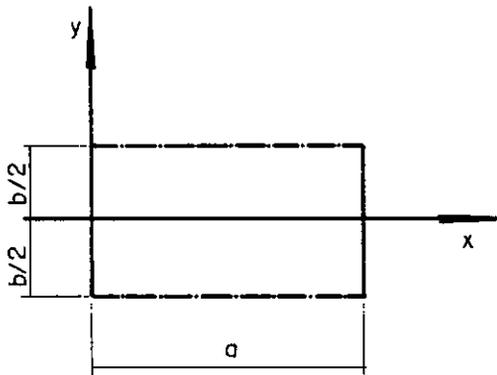


Fig. 14

$$\begin{aligned} w_R(x, y) \Big|_{x=0, a} &= 0 & Q_y(x, y) \Big|_{y=\pm b/2} &= 0 \\ M_x(x, y) \Big|_{x=0, a} &= 0 & M_y(x, y) \Big|_{y=\pm b/2} &= 0 \\ \beta_y(x, y) \Big|_{x=0, a} &= 0 & M_{xy}(x, y) \Big|_{y=\pm b/2} &= 0 \end{aligned}$$

Logo,

$$C_1 = \frac{8p_0}{a\mu^3} \cdot C_6 \cdot \frac{\operatorname{senh}\alpha}{\operatorname{senh}\left(\frac{\eta b}{2}\right)}$$

$$C_5 = \frac{(1+\nu) - (1-\nu) \alpha \operatorname{cotg}\alpha}{(1-\nu)} \cdot C_6$$

$$C_6 = \frac{\nu \eta^2 h^2}{10 F \operatorname{cosh}\alpha}$$

com,

$$F = \frac{2\mu^2 h^2}{5} \left[1 - \frac{\eta \operatorname{tanh}\alpha}{\mu \operatorname{tanh}\left(\frac{\eta b}{2}\right)} \right] + (3+\nu) - \frac{2\alpha(1-\nu)}{\operatorname{senh}2\alpha}$$

C A P Í T U L O V

RESULTADOS NUMÉRICOS DA TEORIA CLÁSSICA E
DA TEORIA DE REISSNER

5.1 - Introdução

Neste capítulo são apresentados, através de tabelas e gráficos os resultados numéricos obtidos pelas teorias clássica e de Reissner.

Obtem-se uma maior versatilidade nas tabelas, utilizando-se os coeficientes adimensionais definidos abaixo:

$$\alpha = \frac{w(x, y)}{p_0 a^4 / D} \quad \text{ou} \quad \bar{\alpha} = \frac{w_R(x, y)}{p_0 a^4 / D}$$

$$\lambda_x = \frac{M_x(x, y)}{p_0 a^2} \quad ; \quad \lambda_y = \frac{M_y(x, y)}{p_0 a^2} \quad ; \quad \lambda_{xy} = \frac{M_{xy}(x, y)}{p_0 a^2}$$

$$\gamma_x = \frac{Q_x(x, y)}{p_0 a} \quad ; \quad \gamma_y = \frac{Q_y(x, y)}{p_0 a}$$

$$\rho_x = \frac{R_x(x, y)}{p_0 a} \quad ; \quad \rho_y = \frac{R_y(x, y)}{p_0 a}$$

(os esforços são dados por metro)

Os parâmetros de entrada nas tabelas são:

coeficiente de Poisson (ν)	}	(Reissner)
Relação b/a		
Relação h/a		

coeficiente de Poisson (ν)	}	(Clássica)
Relação b/a		

A relação h/a representa a influência da espessura da placa.

5.2 - Resultados Numéricos

a - Introdução

As fórmulas analíticas obtidas nos capítulos anteriores para a teoria clássica e de Reissner foram programadas obtendo-se, como resultado, valores numéricos para as flechas, momentos, cortantes e reações de apoio.

Devido a existência, nos casos estudados de uma dupla simetria, os valores numéricos das flechas e dos esforços resultantes foram obtidos em pontos pertencentes a um quarto da placa.

b - Convergência

O estudo da convergência das séries que representam as expressões analíticas das flechas e esforços resultantes dados pela teoria de Reissner, é feito para os valores máximos assumidos pelas expressões analíticas, no domínio da placa.

A convergência é analisada, nos três casos estudados,

para a relação $h/a = 0,050$, $b/a = 1$ e $\nu = 0,3$.

A seguir são apresentadas tabelas que mostram os valores numéricos assumidos pela flecha e esforços resultantes para diversos números de termos das séries.

Caso 1:

Nº de T.	$b/a = 1$		$(\nu = 0,3)$			
	$100\alpha^{(1)}$	$10\lambda_x^{(1)}$	$10\lambda_y^{(1)}$	$10\lambda_{xy}^{(3)}$	$\gamma_x^{(2)}$	$\gamma_y^{(4)}$
3	0,411	0,482	0,480	0,320	0,304	-0,343
5	0,411	0,480	0,480	0,322	0,318	-0,340
10	0,411	0,479	0,479	0,323	0,328	-0,337
20	0,411	0,479	0,479	0,322	0,333	-0,338
50	0,411	0,479	0,479	0,322	0,336	-0,338
100	0,411	0,479	0,479	0,322	0,337	-0,338
200	0,411	0,479	0,479	0,321	0,337	-0,338
300	0,411	0,479	0,479	0,321	0,337	-0,338
400	0,411	0,479	0,479	0,321	0,337	-0,338
500	0,411	0,479	0,479	0,321	0,338	-0,338

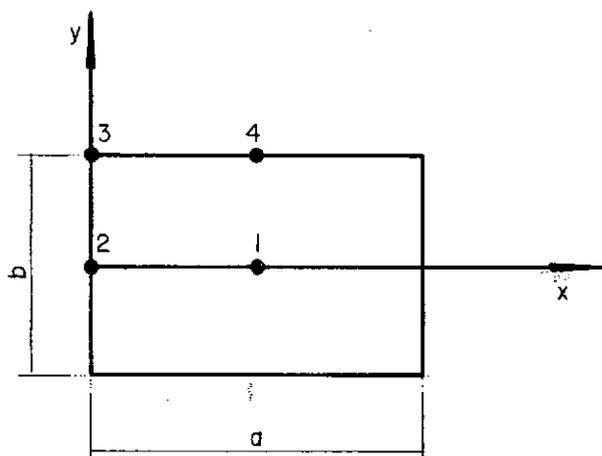


Fig. 15

Caso 2:

Nº de T.	$b/a = 1$ ($\nu = 0,3$)					
	$100\alpha^{(1)}$	$10\lambda_x^{(1)}$	$10\lambda_y^{(4)}$	λ_{xy}	γ_x	γ_y
3	0,199	0,251	-0,694	0,139	0,212	-0,517
5	0,199	0,249	-0,693	0,139	0,226	-0,512
10	0,199	0,248	-0,692	0,140	0,236	-0,509
20	0,199	0,249	-0,692	0,140	0,241	-0,509
50	0,199	0,249	-0,692	0,140	0,244	-0,509
100	0,199	0,249	-0,692	0,141	0,245	-0,509
200	0,199	0,249	-0,692	0,141	0,245	-0,509
300	0,199	0,249	-0,692	0,142	0,245	-0,509
400	0,199	0,249	-0,692	0,142	0,246	-0,509
500	0,199	0,249	-0,692	0,142	0,246	-0,509

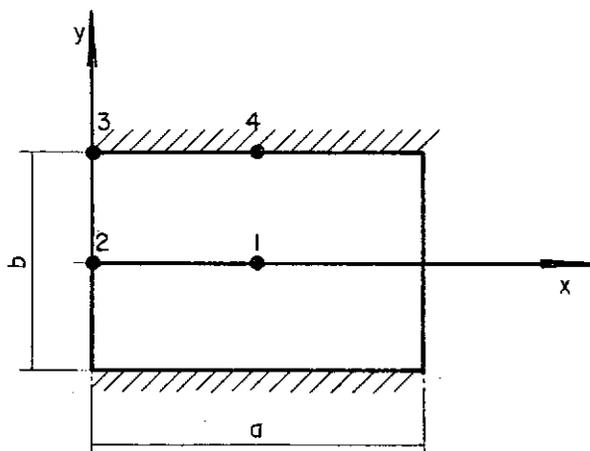


Fig. 16

Caso 3:

$b/a = 1 \quad (\nu = 0,3)$					
Nº de T.	$10\alpha^{(4)}$	$\lambda_x^{(4)}$	$10\lambda_y^{(1)}$	λ_{xy}	$\gamma_x^{(2)}$
3	0,152	0,130	0,266	-0,189	0,433
5	0,152	0,129	0,265	-0,189	0,446
10	0,152	0,129	0,265	-0,190	0,457
20	0,152	0,129	0,265	-0,190	0,462
50	0,152	0,129	0,265	-0,190	0,465
100	0,152	0,129	0,265	-0,191	0,466
200	0,152	0,129	0,265	-0,191	0,466
300	0,152	0,129	0,265	-0,191	0,466
400	0,152	0,129	0,265	-0,192	0,466
500	0,152	0,129	0,265	-0,192	0,466

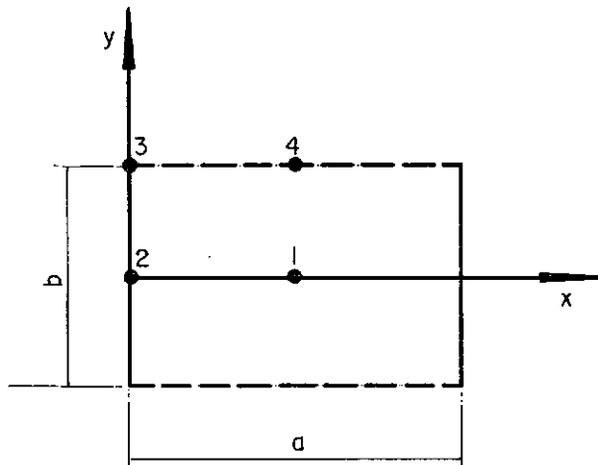


Fig. 17

Analisando-se os três casos conclui-se que:

Flechas - a série converge muito rapidamente e uma precisão suficiente é obtida tomando-se os dois primeiros termos da série.

Momentos Fletores - a sêrie converge rapidamente e uma precisão suficiente é obtida tomando-se os cinco primeiros termos da sêrie.

Momentos Torçores - a sêrie converge rapidamente e uma boa precisão é obtida tomando-se os cinco primeiros termos da sêrie.

Esforços Cortantes - a sêrie do esforço cortante (γ_y) converge com uma boa precisão, tomando-se os vinte primeiros termos da sêrie, porém a sêrie do esforço cortante (γ_x) converge lentamente e uma boa precisão é obtida tomando-se um número de termos maior ou igual a cem.

c - Tabelas

As tabelas apresentadas a seguir fornecem os valores máximos e as variações, ao longo de retas paralelas aos eixos x e y da placa, das flechas, momentos, cortantes e reações de apoio.

A comparação dos resultados obtidos neste trabalho pode ser feita consultando-se as referências [1], [3], [4] e [13], entre outras.

Caso 1 - Referência [13] ($\nu = 0,3$)				
h/a	$100\alpha_{m\bar{a}x.}^{(1)}$	$10\lambda_{ym\bar{a}x.}^{(1)}$	$10\lambda_{ym\bar{a}x.}^{(1)}$	b/a
0,005	0,406	0,479	0,479	1
0,010	0,406	0,479	0,479	
0,050	0,411	0,479	0,479	
0,100	0,424	0,481	0,481	

TABELAS

h/a	Valores Maximos (ν = 0,3)								b/a
	100α _{max.} ⁽¹⁾	10λ _{xmax.} ⁽¹⁾	10λ _{ymax.} ⁽¹⁾	10λ _{xymax.} ⁽³⁾	γ _{xmax.} ⁽²⁾	γ _{ymax.} ⁽⁴⁾	ρ _{xmax.} ⁽²⁾	ρ _{ymax.} ⁽⁴⁾	
0,005	0,406	0,479	0,479	0,325	0,338	0,338	0,420	0,420	1
0,010	0,406	0,479	0,479	0,325	0,338	0,338	0,420	0,420	
0,025	0,407	0,479	0,479	0,324	0,338	0,338	0,420	0,420	
0,050	0,411	0,479	0,479	0,321	0,338	0,338	0,420	0,420	
0,075	0,416	0,480	0,480	0,316	0,338	0,338	0,420	0,420	
0,100	0,424	0,480	0,480	0,311	0,338	0,338	0,420	0,420	
0,125	0,434	0,481	0,481	0,308	0,338	0,338	0,420	0,420	
0,150	0,446	0,482	0,482	0,305	0,338	0,338	0,420	0,420	
0,175	0,461	0,483	0,483	0,302	0,338	0,338	0,420	0,420	
0,200	0,478	0,485	0,486	0,297	0,338	0,338	0,420	0,420	
0,250	0,518	0,488	0,488	0,287	0,338	0,338	0,420	0,420	
0,300	0,567	0,492	0,492	0,274	0,338	0,338	0,420	0,420	
T.Class:	0,406	0,479	0,479	0,325	0,338	0,338	0,420	0,420	

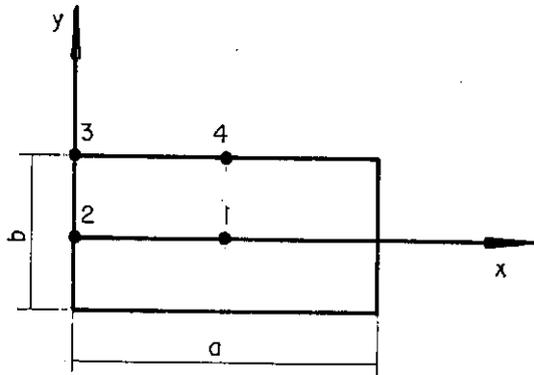


TABELA 1 - Valores Maximos

h/a	Variação do coeficiente α ao longo da reta $y = 0$ ($v = 0,3$) (100α)									b/a
	$x=0,10a$	$x=0,15a$	$x=0,20a$	$x=0,25a$	$x=0,30a$	$x=0,35a$	$x=0,40a$	$x=0,45a$	$x=0,50a$	
0,005	0,132	0,192	0,246	0,294	0,334	0,365	0,388	0,402	0,406	1
0,010	0,132	0,192	0,246	0,294	0,334	0,365	0,388	0,402	0,406	
0,025	0,132	0,192	0,247	0,295	0,335	0,366	0,389	0,403	0,407	
0,050	0,133	0,194	0,249	0,297	0,338	0,369	0,392	0,406	0,411	
0,075	0,136	0,197	0,253	0,302	0,342	0,374	0,398	0,412	0,416	
0,100	0,139	0,202	0,258	0,308	0,349	0,382	0,405	0,419	0,424	
0,125	0,143	0,207	0,265	0,316	0,358	0,391	0,415	0,429	0,434	
0,150	0,147	0,214	0,273	0,325	0,368	0,402	0,427	0,442	0,446	
0,175	0,153	0,222	0,283	0,336	0,381	0,416	0,441	0,456	0,461	
0,200	0,160	0,231	0,295	0,350	0,395	0,431	0,457	0,473	0,478	
0,250	0,176	0,253	0,322	0,381	0,430	0,468	0,496	0,512	0,518	
0,300	0,195	0,280	0,355	0,419	0,472	0,514	0,543	0,561	0,567	
T.Cláss.	0,132	0,192	0,246	0,294	0,334	0,365	0,388	0,402	0,406	

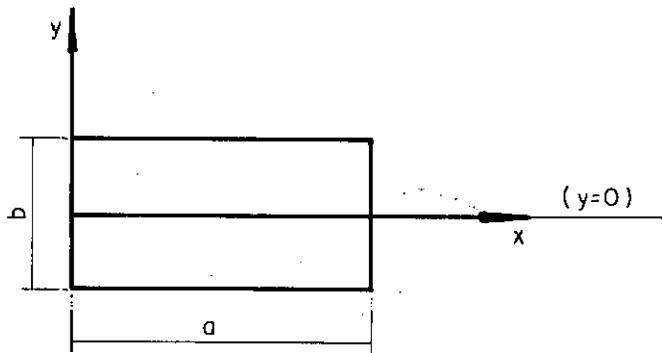
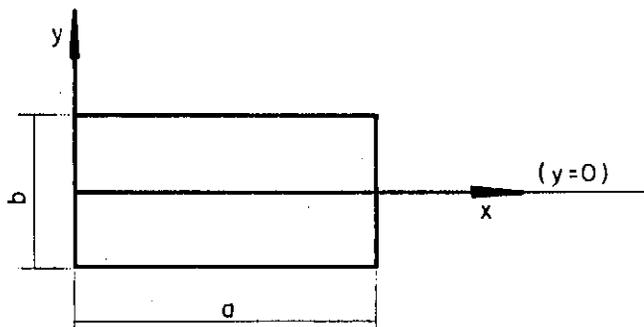


TABELA 2 - Flecha

h/a	Variação do coeficiente λ_x ao longo da reta $y = 0$ ($10\lambda_x$) ($\nu = 0,3$)									b/a
	$x=0,10a$	$x=0,15a$	$x=0,20a$	$x=0,25a$	$x=0,30a$	$x=0,35a$	$x=0,40a$	$x=0,45a$	$x=0,50a$	
0,005	0,209	0,284	0,343	0,389	0,424	0,449	0,466	0,476	0,479	1
0,010	0,209	0,284	0,343	0,389	0,424	0,449	0,466	0,476	0,479	
0,025	0,209	0,284	0,343	0,389	0,424	0,449	0,466	0,476	0,479	
0,050	0,209	0,284	0,344	0,389	0,424	0,449	0,466	0,476	0,479	
0,075	0,209	0,284	0,344	0,390	0,424	0,450	0,467	0,467	0,480	
0,100	0,210	0,285	0,344	0,390	0,425	0,450	0,467	0,477	0,480	
0,125	0,210	0,285	0,345	0,391	0,426	0,451	0,468	0,478	0,481	
0,150	0,210	0,286	0,345	0,392	0,426	0,452	0,469	0,479	0,482	
0,175	0,211	0,286	0,346	0,392	0,427	0,453	0,470	0,480	0,484	
0,200	0,211	0,287	0,347	0,393	0,429	0,454	0,472	0,482	0,485	
0,250	0,212	0,289	0,349	0,396	0,431	0,457	0,475	0,485	0,488	
0,300	0,214	0,291	0,352	0,399	0,435	0,461	0,479	0,489	0,492	
T.Cláss.	0,209	0,284	0,343	0,389	0,424	0,449	0,466	0,476	0,479	



h/a	Variação do coeficiente λ_{xy} ao longo da reta $y = + b/2$ ($10\lambda_{xy}$)									b/a
	$x=0$	$x=0,10a$	$x=0,15a$	$x=0,20a$	$x=0,25a$	$x=0,30a$	$x=0,35a$	$x=0,40a$	$x=0,45a$	
0,005	0,325	0,295	0,267	0,235	0,200	0,162	0,123	0,082	0,041	1
0,010	0,325	0,295	0,267	0,235	0,200	0,162	0,123	0,082	0,041	
0,025	0,324	0,295	0,267	0,235	0,200	0,162	0,123	0,082	0,041	
0,050	0,321	0,294	0,267	0,235	0,200	0,162	0,123	0,082	0,041	
0,075	0,316	0,293	0,266	0,234	0,199	0,162	0,122	0,082	0,041	
0,100	0,310	0,292	0,265	0,233	0,198	0,161	0,122	0,082	0,041	
0,125	0,301	0,290	0,264	0,232	0,198	0,160	0,122	0,082	0,041	
0,150	0,290	0,288	0,262	0,231	0,197	0,160	0,121	0,081	0,041	
0,175	0,278	0,285	0,260	0,230	0,195	0,159	0,120	0,081	0,041	
0,200	0,264	0,282	0,258	0,228	0,194	0,158	0,120	0,080	0,040	
0,250	0,229	0,275	0,252	0,224	0,191	0,155	0,118	0,079	0,040	
0,300	0,187	0,266	0,246	0,218	0,187	0,152	0,116	0,078	0,039	
T.Cláss.	0,325	0,295	0,267	0,235	0,200	0,162	0,123	0,082	0,041	

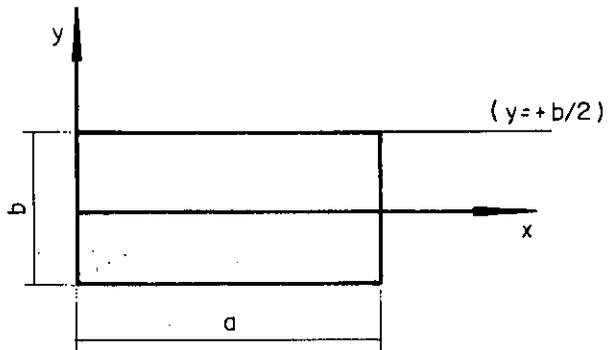


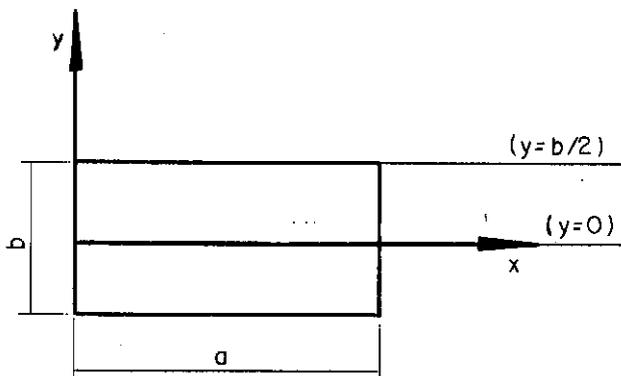
TABELA 4 - Momento Torçor

	Variação do coeficiente γ_x ao longo da reta $y = 0$									b/a
	x=0	x=0,10a	x=0,15a	x=0,20a	x=0,25a	x=0,30a	x=0,35a	x=0,40a	x=0,45a	
T.Clássica	0,338	0,246	0,206	0,170	0,136	0,106	0,078	0,051	0,025	1
T.Reissner	0,338	0,246	0,206	0,170	0,136	0,106	0,078	0,051	0,025	

	Variação do coeficiente γ_y ao longo da reta $y = b/2$									b/a
	x=0,10a	x=0,15a	x=0,20a	x=0,25a	x=0,30a	x=0,35a	x=0,40a	x=0,45a	x=0,50a	
T.Clássica	0,171	0,218	0,254	0,281	0,303	0,318	0,329	0,336	0,338	1
T.Reissner	0,171	0,218	0,254	0,281	0,303	0,318	0,329	0,336	0,338	

TABELA 5 - Esforço Cortante

Obs.: Neste caso os valores dos esforços cortantes coincidem para as duas teorias.



Variação do coeficiente ρ_y ao longo da reta $y = + b/2$ ($\nu = 0,3$)										b/a
	$x=0,10a$	$x=0,15a$	$x=0,20a$	$x=0,25a$	$x=0,30a$	$x=0,35a$	$x=0,40a$	$x=0,45a$	$x=0,50a$	
T.Clássica	0,220	0,278	0,322	0,355	0,380	0,399	0,411	0,418	0,420	1
T.Reissner	0,220	0,278	0,322	0,355	0,380	0,399	0,411	0,418	0,420	

Resultante das Reações de Apoio				
h/a	ϕ_x	ϕ_y	ϕ_c	b/a
0,005	0,315	0,315	0,065	1
0,025	0,315	0,315	0,065	
0,050	0,314	0,314	0,064	
0,100	0,312	0,312	0,062	
0,125	0,310	0,310	0,060	
0,150	0,308	0,308	0,058	
0,175	0,306	0,306	0,056	
0,200	0,303	0,303	0,053	
T.Cláss.	0,315	0,315	0,065	

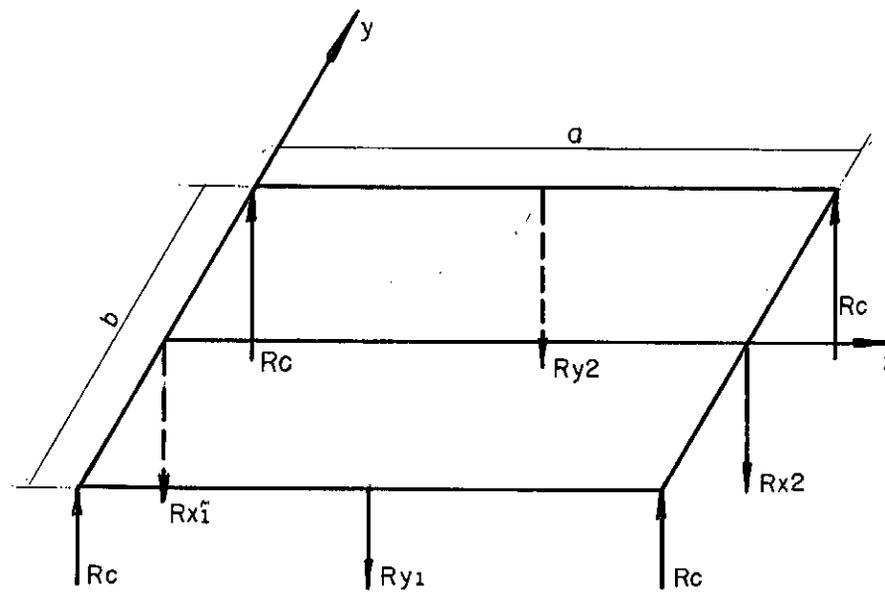


TABELA 6 - Reação de Apoio

$$|R_{x_1}| = |R_{x_2}| = \phi_x p_0 a^2,$$

$$|R_c| = \phi_c p_0 a^2 \quad e \quad R_T = (2\phi_x + 2\phi_y - 4\phi_c) p_0 a^2$$

$$|R_{y_1}| = |R_{y_2}| = \phi_y p_0 a^2,$$

h/a	Valores Maximos ($\nu = 0,3$)								b/a
	$100\alpha_{m\bar{a}x.}^{(1)}$	$10\lambda_{xm\bar{a}x.}^{(1)}$	$10\lambda_{ym\bar{a}x.}^{(4)}$	$10\lambda_{xm\bar{a}x.}^{(4)}$	$10\lambda_{ym\bar{a}x.}^{(1)}$	$10\lambda_{xym\bar{a}x.}$	$\gamma_{xm\bar{a}x.}^{(2)}$	$\gamma_{ym\bar{a}x.}^{(4)}$	
0,005	0,192	0,244	-0,698	-0,210	0,332	0,144	0,244	-0,516	1
0,010	0,192	0,244	-0,698	-0,209	0,332	0,144	0,244	-0,515	
0,025	0,194	0,245	-0,697	-0,209	0,333	0,143	0,244	-0,513	
0,050	0,199	0,249	-0,692	-0,207	0,333	0,142	0,246	-0,509	
0,075	0,208	0,254	-0,685	-0,204	0,334	0,141	0,247	-0,505	
0,100	0,220	0,262	-0,673	-0,199	0,336	0,139	0,249	-0,500	
0,125	0,235	0,271	-0,659	-0,193	0,338	0,137	0,251	-0,493	
0,150	0,254	0,282	-0,642	-0,186	0,339	0,135	0,254	-0,486	
0,175	0,275	0,294	-0,623	-0,178	0,341	0,134	0,257	-0,479	
0,200	0,298	0,307	-0,602	-0,169	0,343	0,135	0,260	-0,471	
0,250	0,353	0,334	-0,557	-0,148	0,348	0,143	0,267	-0,454	
0,300	0,416	0,362	-0,551	-0,126	0,354	0,152	0,274	-0,438	
T.Class.	0,192	0,244	-0,698	-0,210	0,332	0,144	0,244	-0,516	

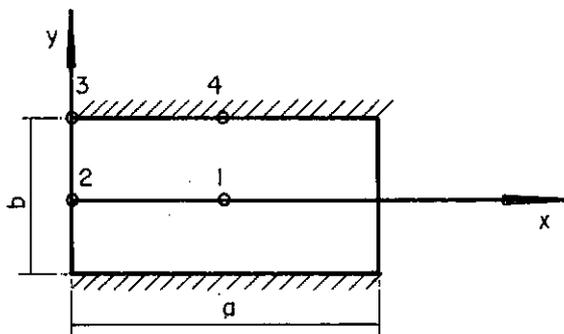


TABELA 7 - Valores Maximos

h/a	Variação do coeficiente α ao longo da reta $y = 0$. (100α) ($\nu = 0,3$)									b/a
	$x=0,10a$	$x=0,15a$	$x=0,20a$	$x=0,25a$	$x=0,30a$	$x=0,35a$	$x=0,40a$	$x=0,45a$	$x=0,50a$	
0,005	0,065	0,094	0,120	0,142	0,160	0,174	0,184	0,190	0,192	1
0,010	0,065	0,094	0,120	0,142	0,160	0,174	0,184	0,190	0,192	
0,025	0,066	0,095	0,121	0,143	0,161	0,176	0,186	0,192	0,194	
0,050	0,068	0,098	0,124	0,147	0,166	0,180	0,191	0,197	0,199	
0,075	0,071	0,102	0,130	0,154	0,174	0,189	0,199	0,205	0,208	
0,100	0,075	0,109	0,138	0,163	0,184	0,200	0,211	0,218	0,220	
0,125	0,081	0,117	0,148	0,175	0,197	0,214	0,226	0,233	0,235	
0,150	0,088	0,126	0,160	0,189	0,212	0,230	0,243	0,251	0,254	
0,175	0,095	0,137	0,174	0,204	0,230	0,250	0,264	0,272	0,275	
0,200	0,104	0,149	0,189	0,222	0,250	0,271	0,286	0,295	0,298	
0,250	0,124	0,178	0,224	0,264	0,296	0,321	0,339	0,349	0,353	
0,300	0,148	0,211	0,266	0,312	0,350	0,379	0,400	0,412	0,416	
T.Cláss.	0,065	0,094	0,120	0,142	0,160	0,174	0,184	0,190	0,192	

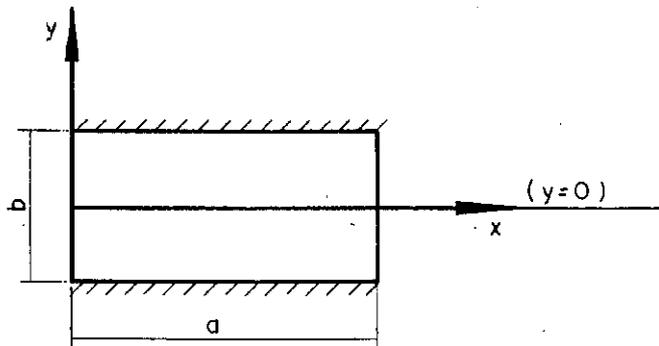


TABELA 8 - Flecha

	Variação do coeficiente λ_x ao longo da reta $y = 0$. ($10\lambda_x$) ($\nu = 0,3$)									
	x=0,10a	x=0,15a	x=0,20a	x=0,25a	x=0,30a	x=0,35a	x=0,40a	x=0,45a	x=0,50a	
0,005	0,135	0,175	0,203	0,221	0,232	0,238	0,242	0,243	0,244	1
0,010	0,135	0,175	0,203	0,221	0,232	0,238	0,242	0,244	0,244	
0,025	0,135	0,176	0,203	0,222	0,233	0,239	0,243	0,245	0,245	
0,050	0,136	0,178	0,206	0,224	0,236	0,243	0,246	0,248	0,249	
0,075	0,138	0,180	0,209	0,228	0,241	0,248	0,252	0,254	0,254	
0,100	0,141	0,184	0,214	0,234	0,247	0,255	0,259	0,261	0,262	
0,125	0,144	0,189	0,220	0,241	0,255	0,263	0,268	0,270	0,271	
0,150	0,148	0,194	0,227	0,249	0,264	0,273	0,278	0,281	0,282	
0,175	0,152	0,200	0,234	0,258	0,274	0,284	0,290	0,293	0,294	
0,200	0,156	0,206	0,242	0,267	0,284	0,295	0,302	0,306	0,307	
0,250	0,164	0,218	0,258	0,286	0,306	0,320	0,328	0,332	0,334	
0,300	0,173	0,231	0,275	0,307	0,329	0,345	0,355	0,360	0,362	
T.Cláss.	0,135	0,175	0,203	0,221	0,232	0,238	0,242	0,243	0,244	

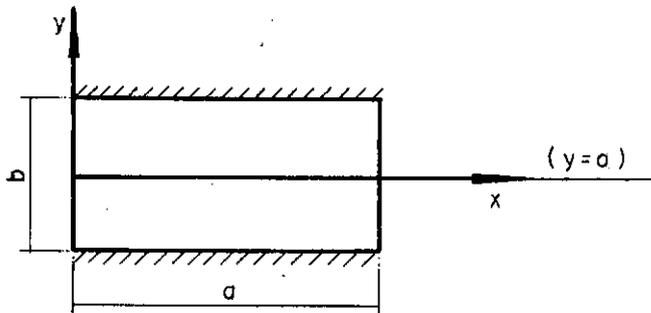


TABELA 9 - Momento Fletor

h/a	Variação do coeficiente λ_y ao longo da reta $x = a/2$									b/a
	$y=0$	$y=0,2b/2$	$y=0,3b/2$	$y=0,4b/2$	$y=0,6b/2$	$y=0,7b/2$	$y=0,8b/2$	$y=0,9b/2$	$y=1,0b/2$	
0,005	0,332	0,302	0,262	0,205	0,024	-0,105	-0,265	-0,462	-0,698	1
0,010	0,332	0,302	0,262	0,205	0,025	-0,105	-0,265	-0,462	-0,698	
0,025	0,333	0,302	0,263	0,205	0,025	-0,104	-0,264	-0,461	-0,697	
0,050	0,333	0,303	0,264	0,206	0,027	-0,102	-0,262	-0,458	-0,692	
0,075	0,334	0,304	0,265	0,208	0,030	-0,099	-0,258	-0,453	-0,685	
0,100	0,336	0,306	0,267	0,210	0,033	-0,094	-0,253	-0,446	-0,673	
0,125	0,338	0,308	0,269	0,213	0,037	-0,089	-0,246	-0,436	-0,659	
0,150	0,339	0,310	0,272	0,216	0,042	-0,082	-0,237	-0,424	-0,642	
0,175	0,341	0,312	0,274	0,219	0,048	-0,075	-0,227	-0,410	-0,623	
0,200	0,343	0,315	0,227	0,223	0,054	-0,067	-0,216	-0,395	-0,602	
0,250	0,348	0,320	0,284	0,231	0,067	-0,049	-0,191	-0,361	-0,557	
0,300	0,354	0,327	0,292	0,241	0,083	-0,028	-0,163	-0,325	-0,511	
T.Cláss.	0,332	0,302	0,262	0,205	0,024	-0,105	-0,265	-0,462	-0,698	

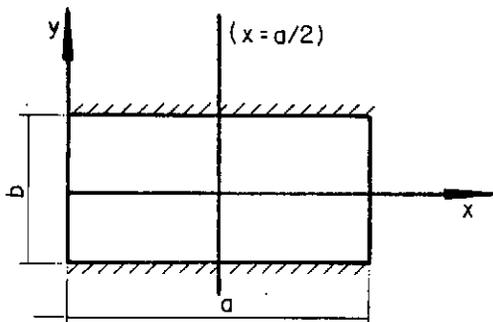


TABELA 10 - Momento Flétor

h/a	Variação do coeficiente λ_{xy} ao longo da reta $x = 0$ ($\nu = 0,3$) ($10\lambda_{xy}$)									b/a
	$y=0,1b/2$	$y=0,2b/2$	$y=0,4b/2$	$y=0,5b/2$	$y=0,6b/2$	$y=0,7b/2$	$y=0,8b/2$	$y=0,9b/2$	$y=1,0b/2$	
0,005	0,032	0,064	0,116	0,134	0,144	0,141	0,123	0,080	0,005	
0,010	0,032	0,064	0,116	0,134	0,144	0,141	0,123	0,080	0,010	
0,025	0,032	0,064	0,116	0,134	0,143	0,141	0,123	0,080	0,024	
0,050	0,032	0,063	0,116	0,133	0,142	0,140	0,121	0,080	0,044	
0,075	0,032	0,063	0,114	0,132	0,141	0,138	0,119	0,084	0,062	
0,100	0,032	0,062	0,113	0,130	0,139	0,136	0,119	0,091	0,076	
0,125	0,031	0,061	0,111	0,128	0,137	0,135	0,121	0,099	0,087	
0,150	0,031	0,060	0,110	0,126	0,135	0,134	0,123	0,107	0,099	
0,175	0,030	0,059	0,108	0,124	0,134	0,134	0,126	0,116	0,100	
0,200	0,030	0,058	0,106	0,123	0,132	0,135	0,130	0,123	0,103	
0,250	0,029	0,056	0,103	0,120	0,131	0,137	0,137	0,137	0,100	
0,300	0,028	0,054	0,100	0,118	0,131	0,140	0,144	0,146	0,087	
T.Cláss.	0,032	0,064	0,116	0,134	0,144	0,141	0,123	0,080	0	

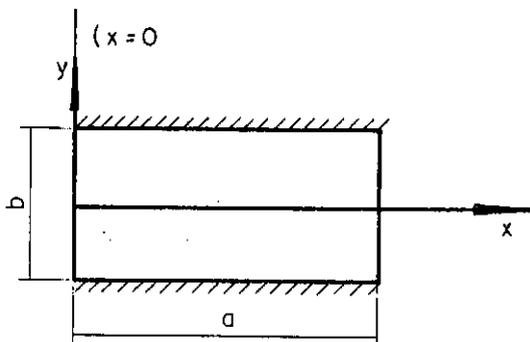


TABELA 11 - Momento Torçor

h/a	Variação do coeficiente λ_{xy} ao longo da reta $y = b/2$ ($100\lambda_{xy}$) ($\nu = 0,3$)									b/a
	$x=0$	$x=0,10a$	$x=0,15a$	$x=0,20a$	$x=0,25a$	$x=0,30a$	$x=0,35a$	$x=0,40a$	$x=0,45a$	
0,005	0,005	0,004	0,003	0,002	0,002	0,002	0,001	0,001	0,000	1
0,005	0,051	0,037	0,031	0,025	0,020	0,016	0,012	0,007	0,004	
0,010	0,100	0,074	0,062	0,051	0,040	0,031	0,023	0,015	0,007	
0,025	0,240	0,186	0,155	0,127	0,101	0,078	0,057	0,037	0,018	
0,050	0,445	0,370	0,312	0,256	0,205	0,158	0,115	0,075	0,037	
0,075	0,617	0,546	0,465	0,386	0,311	0,241	0,176	0,115	0,057	
0,100	0,757	0,708	0,612	0,512	0,416	0,324	0,238	0,156	0,077	
0,150	0,948	0,989	0,873	0,745	0,614	0,485	0,360	0,237	0,118	
0,200	1,026	1,208	1,084	0,938	0,783	0,625	0,467	0,310	0,154	
0,250	0,997	1,370	1,244	1,089	0,917	0,738	0,554	0,370	0,185	
0,300	0,867	1,477	1,357	1,198	1,016	0,822	0,621	0,415	0,208	
T.Cláss.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

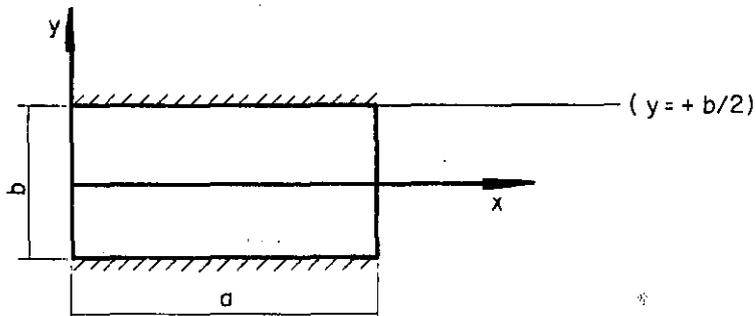


TABELA 12 - Momento Torçor

h/a	Variação do coeficiente γ_x ao longo da reta $x=0$ ($\nu = 0,3$)									b/a
	$y=0$	$y=0,2b/2$	$y=0,4b/2$	$y=0,5b/2$	$y=0,6b/2$	$y=0,7b/2$	$y=0,8b/2$	$y=0,9b/2$	$y=1,0b/2$	
0,005	0,244	0,231	0,188	0,154	0,109	0,050	-0,027	-0,134	0	1
0,010	0,244	0,231	0,188	0,154	0,109	0,051	-0,027	-0,134	0	
0,025	0,244	0,231	0,189	0,155	0,110	0,052	-0,025	-0,131	0	
0,050	0,246	0,232	0,190	0,156	0,112	0,054	-0,021	-0,112	0	
0,075	0,247	0,234	0,192	0,159	0,115	0,059	-0,012	-0,083	0	
0,100	0,249	0,236	0,195	0,162	0,119	0,065	0,008	-0,055	0	
0,125	0,251	0,238	0,198	0,166	0,124	0,073	0,016	-0,030	0	
0,150	0,254	0,241	0,201	0,170	0,130	0,082	0,031	-0,009	0	
0,175	0,257	0,244	0,206	0,175	0,137	0,093	0,045	0,008	0	
0,200	0,260	0,248	0,210	0,181	0,145	0,103	0,059	0,022	0	
0,250	0,267	0,255	0,220	0,193	0,160	0,123	0,083	0,044	0	
0,300	0,274	0,263	0,230	0,205	0,175	0,140	0,101	0,060	0	
T.Cláss.	0,244	0,231	0,188	0,154	0,109	0,050	-0,027	-0,134	-0,326	

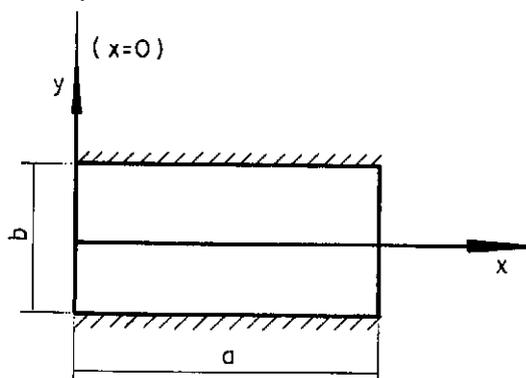


TABELA 13 - Esforço Cortante

h/a	Variação do coeficiente ρ_x ao longo da reta $x = 0$ ($\nu = 0,3$)									b/a
	$y=0$	$y=0,2b/2$	$y=0,4b/2$	$y=0,5b/2$	$y=0,6b/2$	$y=0,7b/2$	$y=0,8b/2$	$y=0,9b/2$	$y=1,0b/2$	
0,005	0,310	0,291	0,231	0,182	0,117	0,031	-0,085	-0,249	0,095	1
0,025	0,310	0,291	0,232	0,183	0,118	0,032	-0,083	-0,245	-0,047	
0,050	0,311	0,292	0,232	0,184	0,120	0,034	-0,079	-0,215	-0,095	
0,100	0,313	0,294	0,236	0,188	0,126	0,046	-0,047	-0,114	-0,653	
0,125	0,314	0,296	0,238	0,192	0,131	0,057	-0,024	-0,071	-1,068	
0,150	0,316	0,298	0,241	0,196	0,138	0,070	0,001	-0,036	-1,576	
0,175	0,318	0,300	0,245	0,201	0,147	0,085	0,024	-0,008	-2,175	
0,200	0,320	0,302	0,249	0,208	0,157	0,100	0,045	0,014	-2,865	
T.Cláss.	0,310	0,291	0,231	0,182	0,117	0,031	-0,085	-0,250	-0,555	

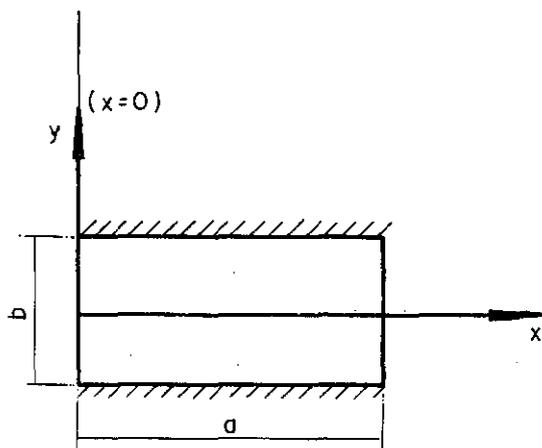


TABELA 14 - Reação de Apoio

h/a	Variação do coeficiente ρ_y ao longo da reta $y = b/2$ ($v = 0,3$)									b/a
	$x=0,10a$	$x=0,15a$	$x=0,20a$	$x=0,25a$	$x=0,30a$	$x=0,35a$	$x=0,40a$	$x=0,45a$	$x=0,50a$	
0,005	-0,291	-0,362	-0,413	-0,449	-0,476	-0,494	-0,507	-0,514	-0,516	1
0,010	-0,290	-0,361	-0,411	-0,448	-0,475	-0,494	-0,506	-0,513	-0,515	
0,025	-0,284	-0,356	-0,407	-0,445	-0,472	-0,491	-0,503	-0,511	-0,513	
0,050	-0,271	-0,346	-0,399	-0,438	-0,466	-0,486	-0,499	-0,507	-0,509	
0,075	-0,260	-0,334	-0,389	-0,430	-0,460	-0,480	-0,494	-0,502	-0,505	
0,100	-0,249	-0,324	-0,379	-0,421	-0,452	-0,474	-0,488	-0,497	-0,500	
0,125	-0,240	-0,314	-0,370	-0,412	-0,443	-0,466	-0,482	-0,490	-0,493	
0,150	-0,233	-0,305	-0,360	-0,403	-0,435	-0,458	-0,474	-0,483	-0,486	
0,175	-0,226	-0,297	-0,352	-0,394	-0,426	-0,450	-0,466	-0,476	-0,479	
0,200	-0,221	-0,290	-0,344	-0,386	-0,418	-0,442	-0,458	-0,468	-0,471	
0,250	-0,211	-0,277	-0,329	-0,370	-0,402	-0,425	-0,442	-0,452	-0,454	
0,300	-0,203	-0,266	-0,316	-0,356	-0,387	-0,410	-0,426	-0,435	-0,438	
T.Cláss.	-0,293	-0,363	-0,414	-0,450	-0,477	-0,495	-0,507	-0,514	-0,516	

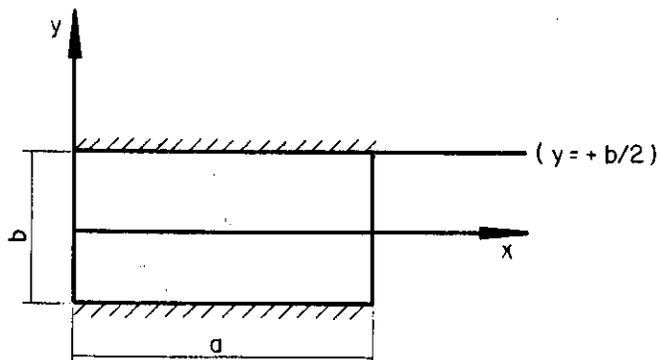


TABELA 15 - Reação de Apoio

h/a	Valores M̄aximos ($\nu = 0,3$)							b/a
	$10\alpha_{m\bar{a}x.}^{(4)}$	$10\alpha_{m\bar{a}x.}^{(1)}$	$\lambda_{xm\bar{a}x.}^{(4)}$	$\lambda_{xm\bar{a}x.}^{(1)}$	$10\lambda_{ym\bar{a}x.}^{(1)}$	$\gamma_{xm\bar{a}x.}^{(2)}$	$\rho_{xm\bar{a}x.}^{(2)}$	
0,005	0,150	0,131	0,131	0,122	0,270	0,468	0,445	1
0,010	0,150	0,131	0,131	0,122	0,270	0,468	0,445	
0,025	0,151	0,131	0,130	0,122	0,268	0,468	0,443	
0,050	0,152	0,132	0,129	0,122	0,265	0,466	0,442	
0,075	0,154	0,133	0,128	0,122	0,262	0,466	0,441	
0,100	0,156	0,134	0,128	0,122	0,258	0,464	0,437	
0,125	0,158	0,136	0,127	0,122	0,255	0,463	0,435	
0,150	0,161	0,138	0,126	0,123	0,251	0,462	0,432	
0,175	0,164	0,140	0,125	0,123	0,248	0,461	0,430	
0,200	0,168	0,143	0,124	0,123	0,244	0,460	0,427	
0,250	0,176	0,150	0,123	0,123	0,236	0,458	0,425	
0,300	0,186	0,159	0,121	0,124	0,227	0,457	0,423	
T.Cl̄ass.	0,150	0,131	0,131	0,122	0,271	0,468	0,445	

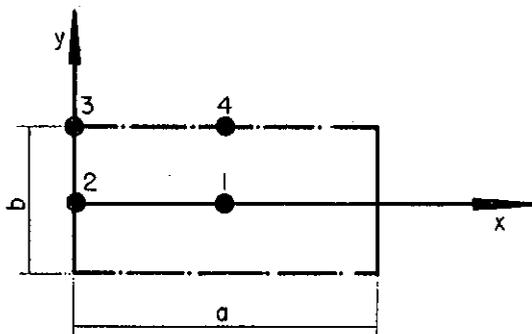


TABELA 16 - Valores M̄aximos

h/a	Variação do coeficiente α ao longo da reta $y = 0$ (10α) ($\nu = 0,3$)									b/a
	$x=0,10a$	$x=0,15a$	$x=0,20a$	$x=0,25a$	$x=0,30a$	$x=0,35a$	$x=0,40a$	$x=0,45a$	$x=0,50a$	
0,005	0,041	0,060	0,078	0,093	0,106	0,117	0,125	0,129	0,131	1
0,010	0,041	0,060	0,078	0,093	0,106	0,117	0,125	0,129	0,131	
0,025	0,041	0,060	0,078	0,093	0,107	0,117	0,125	0,130	0,131	
0,050	0,041	0,061	0,078	0,094	0,107	0,118	0,126	0,130	0,132	
0,075	0,042	0,061	0,079	0,095	0,108	0,119	0,126	0,131	0,133	
0,100	0,042	0,062	0,080	0,096	0,109	0,120	0,128	0,132	0,134	
0,125	0,043	0,063	0,081	0,097	0,110	0,121	0,129	0,134	0,136	
0,150	0,044	0,064	0,082	0,098	0,112	0,123	0,131	0,136	0,138	
0,175	0,045	0,065	0,084	0,100	0,114	0,126	0,134	0,139	0,140	
0,200	0,046	0,066	0,086	0,102	0,117	0,128	0,136	0,142	0,143	
0,250	0,048	0,070	0,090	0,108	0,123	0,134	0,143	0,148	0,150	
0,300	0,051	0,074	0,095	0,114	0,130	0,142	0,151	0,157	0,159	
T.Cláss.	0,041	0,060	0,078	0,093	0,106	0,117	0,125	0,129	0,131	

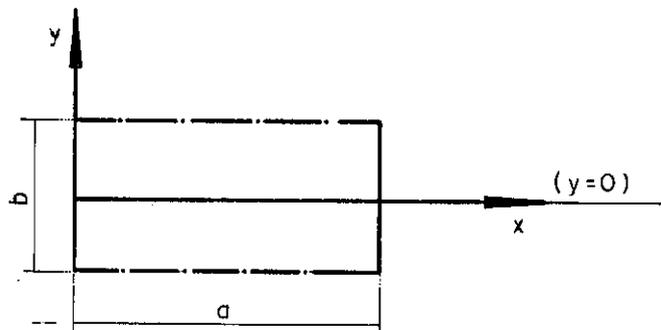


TABELA 17 - Flecha

h/a	Variação do coeficiente α ao longo da reta $y = b/2$ (10α) ($\nu = 0,3$)									b/a
	$x=0,10a$	$x=0,15a$	$x=0,20a$	$x=0,25a$	$x=0,30a$	$x=0,35a$	$x=0,40a$	$x=0,45a$	$x=0,50a$	
0,005	0,047	0,069	0,089	0,107	0,122	0,134	0,143	0,148	0,150	1
0,010	0,047	0,069	0,089	0,107	0,123	0,134	0,143	0,149	0,150	
0,025	0,047	0,069	0,090	0,108	0,123	0,135	0,144	0,149	0,151	
0,050	0,048	0,070	0,090	0,108	0,124	0,136	0,145	0,150	0,152	
0,075	0,048	0,071	0,091	0,110	0,125	0,137	0,146	0,152	0,154	
0,100	0,049	0,072	0,093	0,111	0,127	0,139	0,148	0,154	0,156	
0,125	0,049	0,073	0,094	0,113	0,129	0,141	0,151	0,156	0,158	
0,150	0,051	0,074	0,096	0,115	0,131	0,144	0,153	0,159	0,161	
0,175	0,052	0,076	0,098	0,117	0,134	0,147	0,156	0,162	0,164	
0,200	0,053	0,078	0,100	0,120	0,137	0,150	0,160	0,166	0,168	
0,250	0,056	0,082	0,106	0,126	0,144	0,158	0,168	0,174	0,176	
0,300	0,060	0,087	0,112	0,134	0,152	0,167	0,178	0,184	0,186	
T.Cláss.	0,047	0,069	0,089	0,107	0,122	0,134	0,143	0,148	0,150	

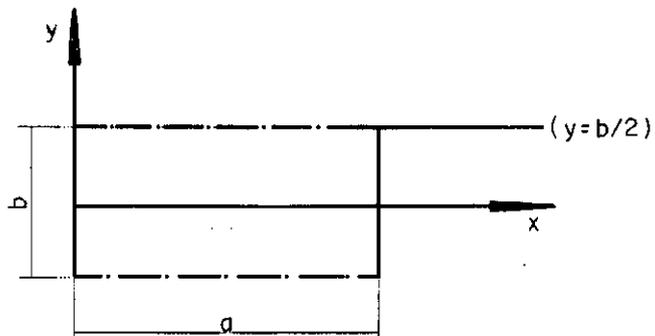


TABELA 18 - Flecha

h/a	Variação do coeficiente λ_x ao longo da reta $y=0$ ($\nu = 0,3$)									b/a
	$x=0,10a$	$x=0,15a$	$x=0,20a$	$x=0,25a$	$x=0,30a$	$x=0,35a$	$x=0,40a$	$x=0,45a$	$x=0,50a$	
0,005	0,044	0,063	0,078	0,092	0,103	0,112	0,118	0,121	0,122	1
0,010	0,044	0,063	0,078	0,092	0,103	0,112	0,118	0,121	0,122	
0,025	0,044	0,063	0,078	0,092	0,103	0,112	0,118	0,121	0,122	
0,050	0,044	0,063	0,078	0,092	0,103	0,112	0,118	0,121	0,122	
0,075	0,044	0,063	0,078	0,092	0,103	0,112	0,118	0,121	0,122	
0,100	0,044	0,063	0,078	0,092	0,103	0,112	0,118	0,121	0,122	
0,125	0,044	0,063	0,078	0,092	0,103	0,112	0,118	0,121	0,122	
0,150	0,044	0,063	0,078	0,092	0,103	0,112	0,118	0,121	0,123	
0,175	0,044	0,063	0,079	0,092	0,103	0,112	0,118	0,122	0,123	
0,200	0,044	0,063	0,079	0,092	0,103	0,112	0,118	0,122	0,123	
0,250	0,044	0,063	0,079	0,092	0,104	0,112	0,118	0,122	0,123	
0,300	0,045	0,063	0,079	0,093	0,104	0,113	0,119	0,123	0,124	
T.Cláss.	0,044	0,063	0,078	0,092	0,103	0,112	0,118	0,121	0,122	

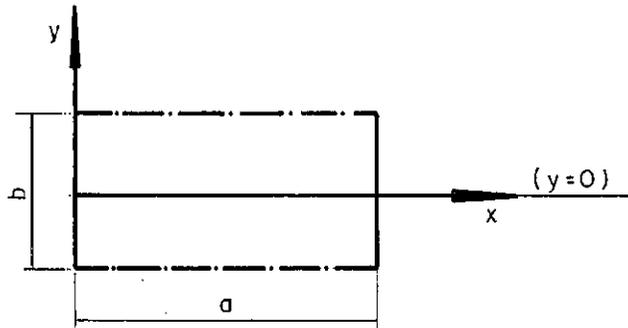


TABELA 19 - Momento Flétor

h/a	Variação do coeficiente λ_x ao longo da reta $y = b/2$ ($v = 0,3$)									b/a
	$x=0,10a$	$x=0,15a$	$x=0,20a$	$x=0,25a$	$x=0,30a$	$x=0,35a$	$x=0,40a$	$x=0,45a$	$x=0,50a$	
0,005	0,047	0,067	0,084	0,098	0,110	0,119	0,126	0,130	0,131	1
0,010	0,047	0,067	0,084	0,098	0,110	0,119	0,126	0,129	0,131	
0,025	0,047	0,066	0,083	0,098	0,109	0,118	0,125	0,129	0,130	
0,050	0,046	0,066	0,083	0,097	0,109	0,118	0,124	0,128	0,129	
0,075	0,046	0,065	0,082	0,096	0,108	0,117	0,123	0,127	0,128	
0,100	0,046	0,065	0,081	0,096	0,107	0,116	0,122	0,126	0,128	
0,125	0,045	0,064	0,081	0,095	0,106	0,116	0,122	0,126	0,127	
0,150	0,045	0,064	0,080	0,094	0,106	0,114	0,121	0,125	0,126	
0,175	0,044	0,063	0,080	0,094	0,105	0,114	0,120	0,124	0,125	
0,200	0,044	0,062	0,079	0,093	0,104	0,113	0,119	0,123	0,124	
0,250	0,043	0,061	0,078	0,091	0,102	0,111	0,118	0,121	0,123	
0,300	0,042	0,060	0,076	0,090	0,104	0,110	0,116	0,120	0,121	
T.Cláss.	0,047	0,067	0,084	0,098	0,110	0,119	0,126	0,130	0,131	

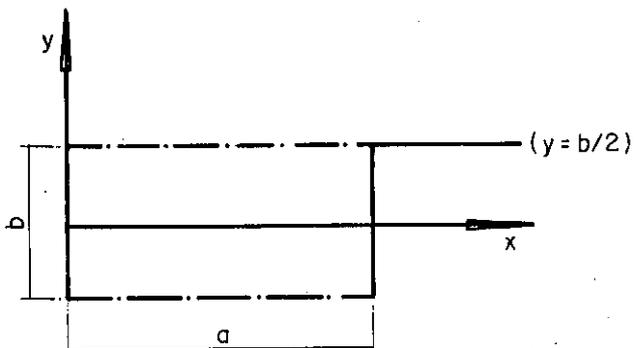


TABELA 20 - Momento Fletor

h/a	Variação do coeficiente λ_y ao longo da reta $x = a/2$ ($10\lambda_y$) ($\nu = 0,3$)									b/a
	$x=0$	$x=0,2b/2$	$y=0,3b/2$	$y=0,4b/2$	$y=0,5b/2$	$y=0,6b/2$	$y=0,7b/2$	$y=0,8b/2$	$y=0,9b/2$	
0,005	0,270	0,262	0,250	0,234	0,213	0,186	0,151	0,109	0,058	1
0,010	0,270	0,261	0,250	0,234	0,212	0,184	0,150	0,108	0,057	
0,025	0,268	0,259	0,248	0,231	0,209	0,181	0,146	0,103	0,051	
0,050	0,265	0,256	0,244	0,227	0,204	0,175	0,139	0,095	0,043	
0,075	0,262	0,252	0,240	0,222	0,199	0,169	0,132	0,087	0,036	
0,100	0,258	0,248	0,236	0,218	0,194	0,163	0,125	0,080	0,030	
0,125	0,255	0,245	0,232	0,213	0,188	0,157	0,118	0,073	0,027	
0,150	0,251	0,241	0,227	0,208	0,182	0,150	0,111	0,067	0,024	
0,175	0,248	0,237	0,223	0,203	0,177	0,144	0,105	0,062	0,021	
0,200	0,244	0,233	0,218	0,198	0,171	0,138	0,099	0,058	0,019	
T.Cláss.	0,271	0,262	0,251	0,235	0,214	0,187	0,152	0,111	0,060	

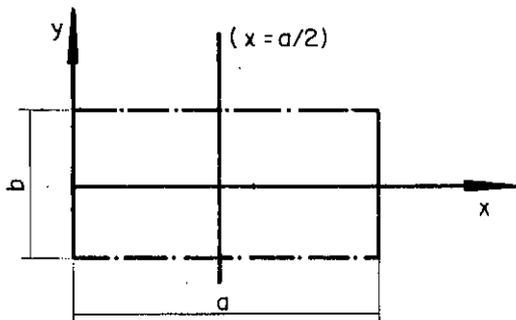


TABELA 21 - Momento Flétor

h/a	Variação do coeficiente λ_{xy} ao longo da reta $x = 0$ ($10\lambda_{xy}$) ($\nu = 0,3$)									h/a
	$y=0,2b/2$	$y=0,3b/2$	$y=0,4b/2$	$y=0,5b/2$	$y=0,6b/2$	$y=0,7b/2$	$y=0,8b/2$	$y=0,9b/2$	$y=1,0b/2$	
0,005	-0,024	-0,038	-0,053	-0,071	-0,093	-0,118	-0,150	-0,190	0	
0,010	-0,024	-0,038	-0,054	-0,072	-0,093	-0,119	-0,151	-0,192	0	
0,025	-0,025	-0,039	-0,055	-0,073	-0,093	-0,122	-0,154	-0,195	0	
0,050	-0,026	-0,040	-0,056	-0,076	-0,098	-0,126	-0,160	-0,192	0	
0,075	-0,027	-0,042	-0,059	-0,079	-0,102	-0,131	-0,163	-0,180	0	
0,100	-0,028	-0,044	-0,061	-0,082	-0,106	-0,135	-0,163	-0,165	0	
0,125	-0,029	-0,046	-0,064	-0,086	-0,110	-0,138	-0,161	-0,152	0	
0,150	-0,031	-0,048	-0,067	-0,089	-0,114	-0,139	-0,157	-0,141	0	
0,175	-0,032	-0,050	-0,070	-0,092	-0,116	-0,140	-0,153	-0,132	0	
0,200	-0,034	-0,052	-0,073	-0,095	-0,118	-0,140	-0,149	-0,125	0	
0,250	-0,037	-0,057	-0,078	-0,099	-0,122	-0,139	-0,143	-0,114	0	
0,300	-0,040	-0,060	-0,082	-0,104	-0,124	-0,138	-0,138	-0,109	0	
T.Cláss.	-0,024	-0,038	-0,053	-0,071	-0,092	-0,118	-0,150	-0,189	-0,240	

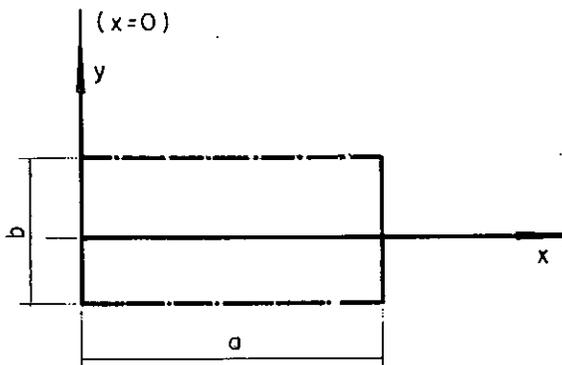


TABELA 22 - Momento Torçor

	Variação do coeficiente λ_{xy} ao longo da reta $y = b/2$ ($10\lambda_{xy}$) ($\nu = 0,3$)									b/a
	$x=0$	$x=0,10a$	$x=0,15a$	$x=0,20a$	$x=0,25a$	$x=0,30a$	$x=0,35a$	$x=0,40a$	$x=0,45a$	
T.Clássica	-0,240	-0,221	-0,203	-0,180	-0,154	-0,126	-0,096	-0,065	-0,033	1
T.Reissner	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

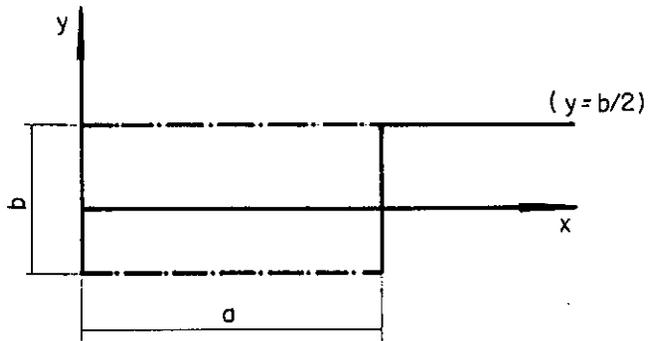


TABELA 23 - Momento Torçor

h/a	Variação do coeficiente γ_x ao longo da reta $x = 0$ ($\nu = 0,3$)									b/a
	$y=0$	$y=0,1b/2$	$y=0,2b/2$	$y=0,3b/2$	$y=0,4b/2$	$y=0,6b/2$	$y=0,8b/2$	$y=0,9b/2$	$y=1,0b/2$	
0,005	0,468	0,468	0,467	0,465	0,462	0,452	0,436	0,424	15,718	1
0,010	0,468	0,468	0,466	0,464	0,461	0,452	0,436	0,424	8,115	
0,025	0,468	0,467	0,466	0,464	0,461	0,451	0,434	0,427	3,554	
0,050	0,466	0,466	0,465	0,463	0,459	0,449	0,435	0,487	2,035	
0,075	0,466	0,465	0,464	0,461	0,458	0,448	0,446	0,550	1,530	
0,100	0,464	0,464	0,462	0,460	0,457	0,447	0,463	0,590	1,278	
0,125	0,463	0,463	0,461	0,459	0,456	0,448	0,480	0,611	1,127	
0,150	0,462	0,462	0,460	0,458	0,455	0,450	0,495	0,621	1,027	
0,175	0,461	0,460	0,459	0,457	0,454	0,454	0,506	0,625	0,955	
0,200	0,460	0,459	0,458	0,456	0,454	0,457	0,515	0,626	0,902	
0,250	0,458	0,458	0,457	0,456	0,456	0,465	0,527	0,622	0,828	
0,300	0,457	0,457	0,456	0,456	0,458	0,471	0,534	0,615	0,778	
T.Cláss.	0,468	0,468	0,467	0,465	0,462	0,452	0,437	0,424	0,404	

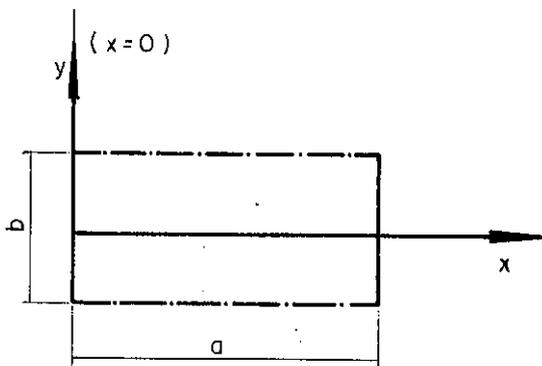


TABELA 24 - Esforço Cortante

h/a	Variação do coeficiente γ_x ao longo da reta $y = 0$ ($\nu = 0,3$)									b/a
	$x=0$	$x=0,10a$	$x=0,15a$	$x=0,20a$	$x=0,25a$	$x=0,30a$	$x=0,35a$	$x=0,40a$	$x=0,45a$	
0,005	0,468	0,370	0,322	0,275	0,228	0,182	0,136	0,090	0,045	1
0,010	0,468	0,370	0,322	0,274	0,228	0,182	0,136	0,090	0,045	
0,025	0,468	0,369	0,321	0,274	0,227	0,181	0,136	0,090	0,045	
0,050	0,466	0,368	0,320	0,273	0,227	0,181	0,135	0,090	0,045	
0,075	0,466	0,367	0,320	0,272	0,226	0,180	0,135	0,090	0,045	
0,100	0,464	0,366	0,319	0,272	0,225	0,180	0,134	0,089	0,045	
0,125	0,463	0,365	0,318	0,271	0,224	0,179	0,134	0,089	0,044	
0,150	0,462	0,364	0,317	0,270	0,224	0,178	0,133	0,089	0,044	
0,175	0,461	0,363	0,316	0,269	0,223	0,178	0,133	0,088	0,044	
0,200	0,460	0,362	0,315	0,268	0,222	0,177	0,132	0,088	0,044	
0,250	0,458	0,360	0,313	0,267	0,221	0,176	0,132	0,088	0,044	
0,300	0,457	0,359	0,312	0,266	0,220	0,176	0,131	0,087	0,044	
T.Cláss.	0,468	0,370	0,322	0,275	0,228	0,182	0,136	0,090	0,045	

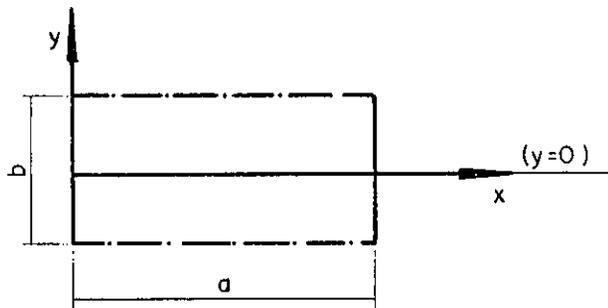


TABELA 25 - Esforço Cortante

h/a	Variação do coeficiente γ_y ao longo da reta $x = a/2$ ($10\gamma_y$) ($\nu = 0,3$)									b/a
	$y=0,1b$	$y=0,2b/2$	$y=0,3b/2$	$y=0,4b/2$	$y=0,6b/2$	$y=0,7b/2$	$y=0,8b/2$	$y=0,9b/2$	$y=1,0b/2$	
0,005	-0,049	-0,098	-0,150	-0,206	-0,330	-0,401	-0,479	-0,564	0	1
0,010	-0,049	-0,099	-0,151	-0,207	-0,332	-0,403	-0,481	-0,567	0	
0,025	-0,050	-0,101	-0,154	-0,210	-0,337	-0,409	-0,489	-0,575	0	
0,050	-0,051	-0,104	-0,158	-0,216	-0,346	-0,421	-0,501	-0,562	0	
0,075	-0,053	-0,107	-0,163	-0,223	-0,356	-0,431	-0,505	-0,521	0	
0,100	-0,054	-0,110	-0,168	-0,229	-0,365	-0,438	-0,499	-0,474	0	
0,125	-0,056	-0,113	-0,173	-0,236	-0,372	-0,440	-0,485	-0,430	0	
0,150	-0,058	-0,117	-0,178	-0,242	-0,377	-0,438	-0,467	-0,391	0	
0,175	-0,059	-0,120	-0,182	-0,247	-0,378	-0,431	-0,447	-0,358	0	
0,200	-0,061	-0,123	-0,186	-0,251	-0,377	-0,423	-0,426	-0,329	0	
0,250	-0,063	-0,127	-0,191	-0,255	-0,369	-0,401	-0,387	-0,288	0	
0,300	-0,065	-0,129	-0,193	-0,255	-0,356	-0,376	-0,352	-0,247	0	
T.Cláss.	-0,048	-0,098	-0,150	-0,204	-0,328	-0,398	-0,476	-0,562	-0,655	

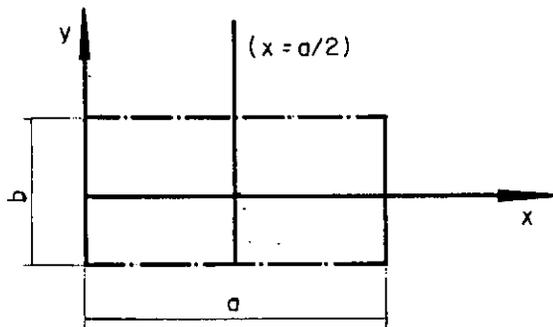
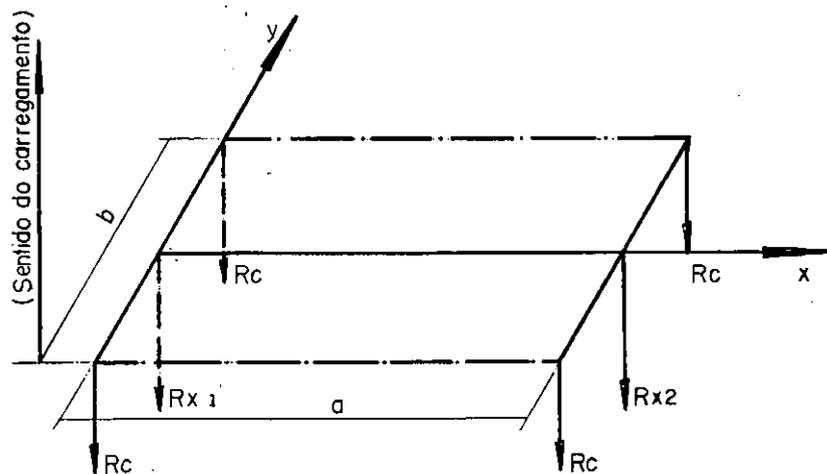


TABELA 26 - Esforço Cortante

h/a	Variação do coeficiente ρ_x ao longo da reta $x=0$ ($\nu = 0,3$)									b/a
	$y=0$	$y=0,1b/2$	$y=0,2b/2$	$y=0,3b/2$	$y=0,4b/2$	$y=0,6b/2$	$y=0,8b/2$	$y=0,9b/2$	$y=1,0b/2$	
0,005	0,445	0,444	0,441	0,436	0,428	0,405	0,365	0,334	30,913	1
0,025	0,443	0,442	0,439	0,434	0,427	0,403	0,361	0,340	6,626	
0,050	0,442	0,441	0,437	0,432	0,424	0,399	0,361	0,458	3,706	
0,100	0,437	0,436	0,433	0,427	0,419	0,394	0,415	0,663	2,649	
0,125	0,435	0,434	0,430	0,424	0,416	0,395	0,449	0,706	2,688	
0,150	0,482	0,431	0,428	0,422	0,414	0,399	0,478	0,728	2,903	
0,175	0,430	0,428	0,425	0,419	0,412	0,405	0,501	0,737	3,250	
0,200	0,427	0,426	0,423	0,418	0,412	0,411	0,519	0,739	3,708	
T.Cláss.	0,445	0,444	0,441	0,436	0,429	0,406	0,366	0,335	0,283	



$$|R_{x1}| = |R_{x2}| = \phi_x p_0 ab$$

$$|R_c| = \phi_c p_0 a^2$$

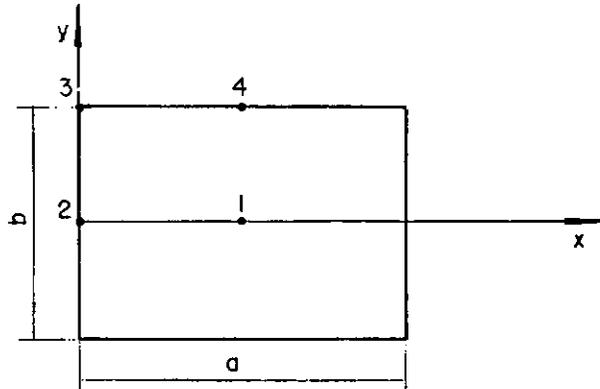
$$|R_{y1}| = |R_{y2}| = \phi_y p_0 ab$$

	T. Clássica	T. Reissner
ϕ_x	0,404	0,500
ϕ_y	0	0
ϕ_c	0,096	0

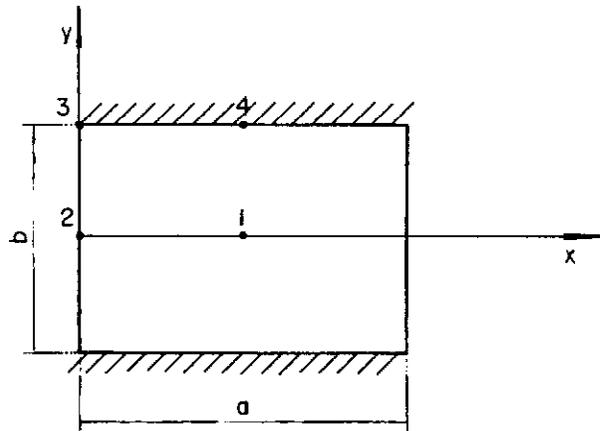
TABELA 27 - Reação de Apoio

GRÁFICOS

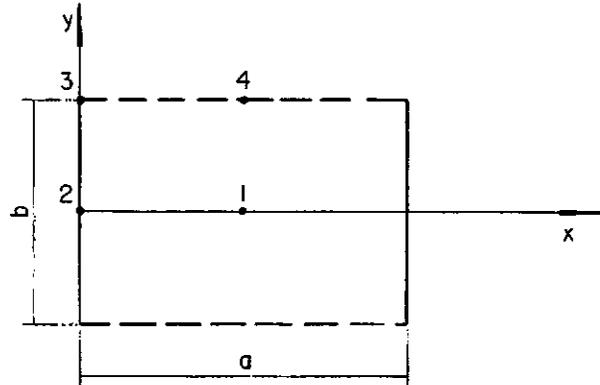
Caso 1

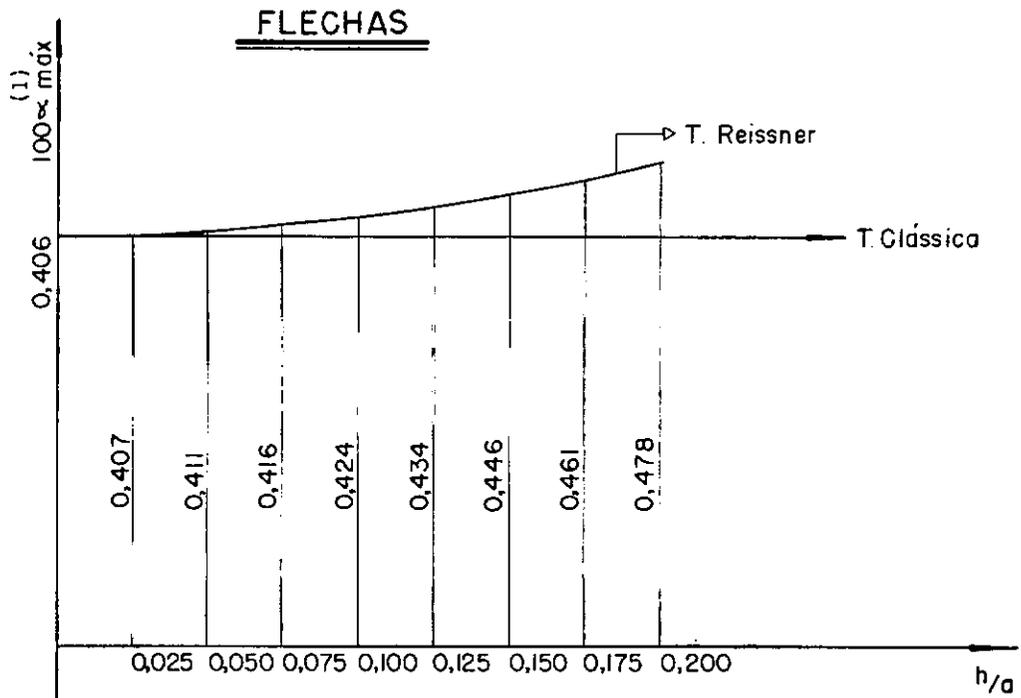
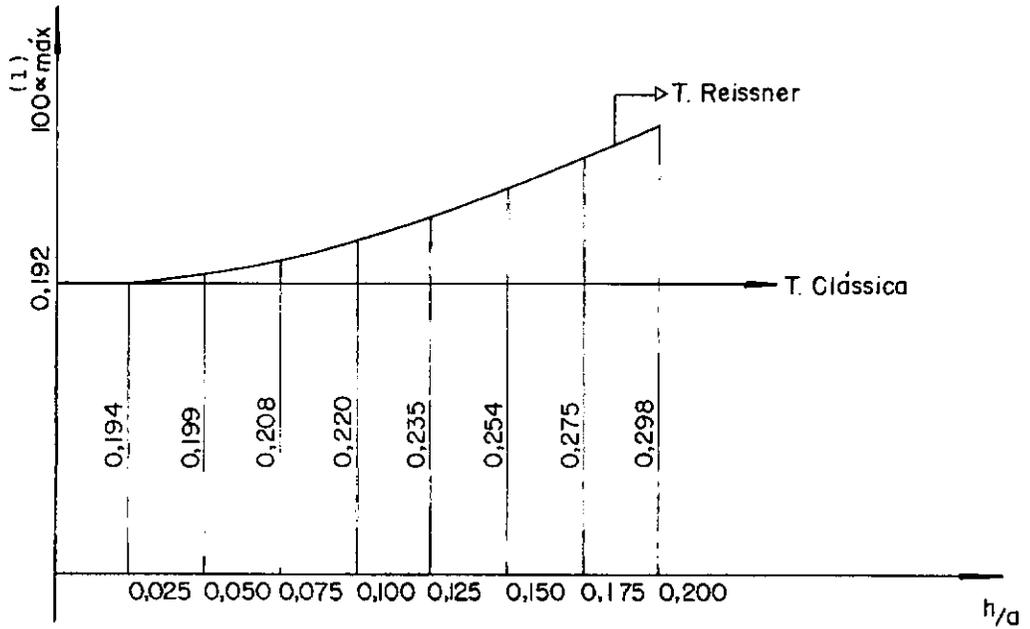


Caso 2



Caso 3



Gráfico 1 - h/a x flecha máxima ($b/a = 1$ e $\nu = 0,3$) - Caso 1Gráfico 2 - h/a x flecha máxima ($b/a = 1$ e $\nu = 0,3$) - Caso 2

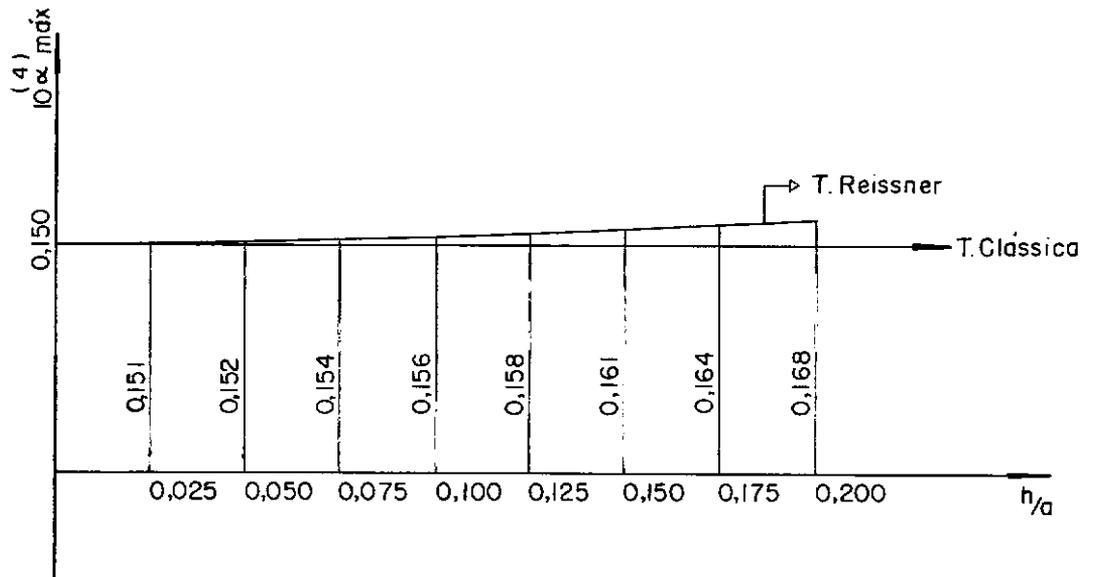


Gráfico 3 - h/a x flecha máxima ($b/a=1$ e $\nu=0,3$) - Caso 3

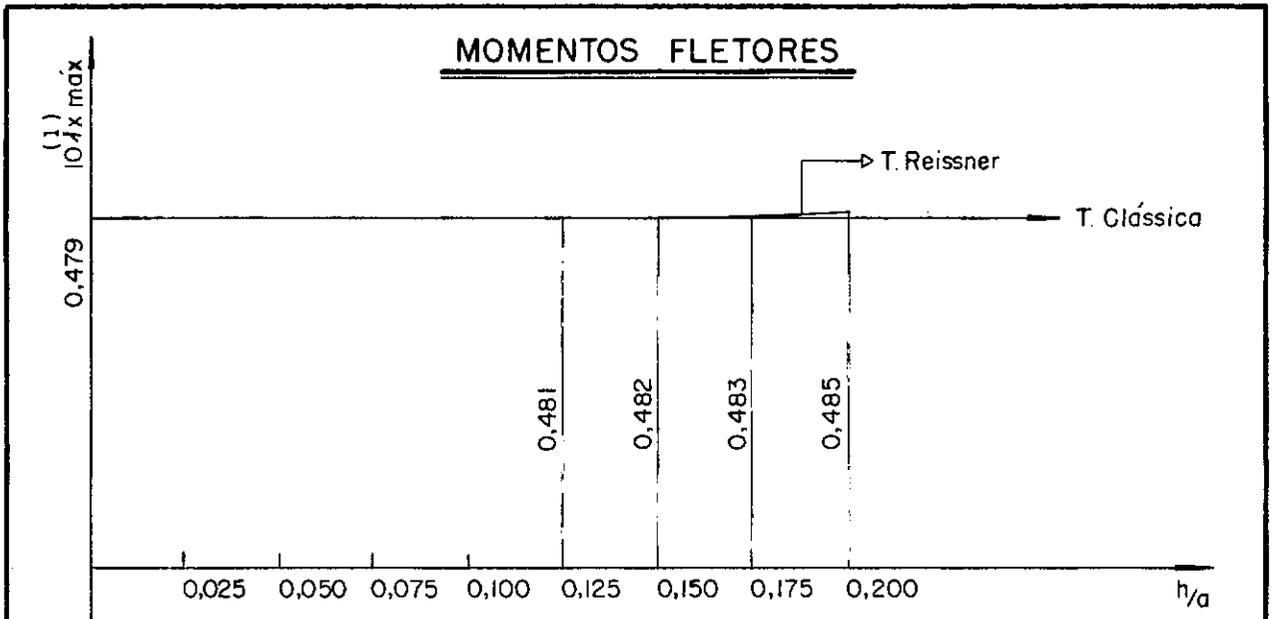


Gráfico 4 - h/a x mom. fletor M_x máx. ($b/a = 1$ e $\nu = 0,3$) - Caso 1

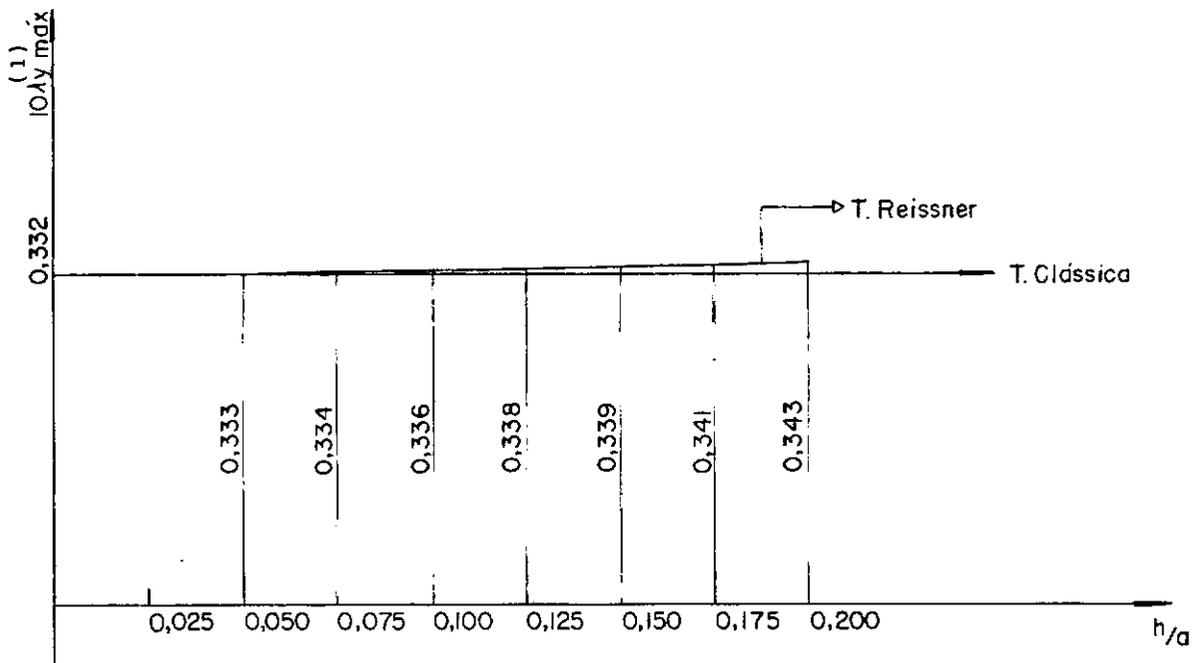
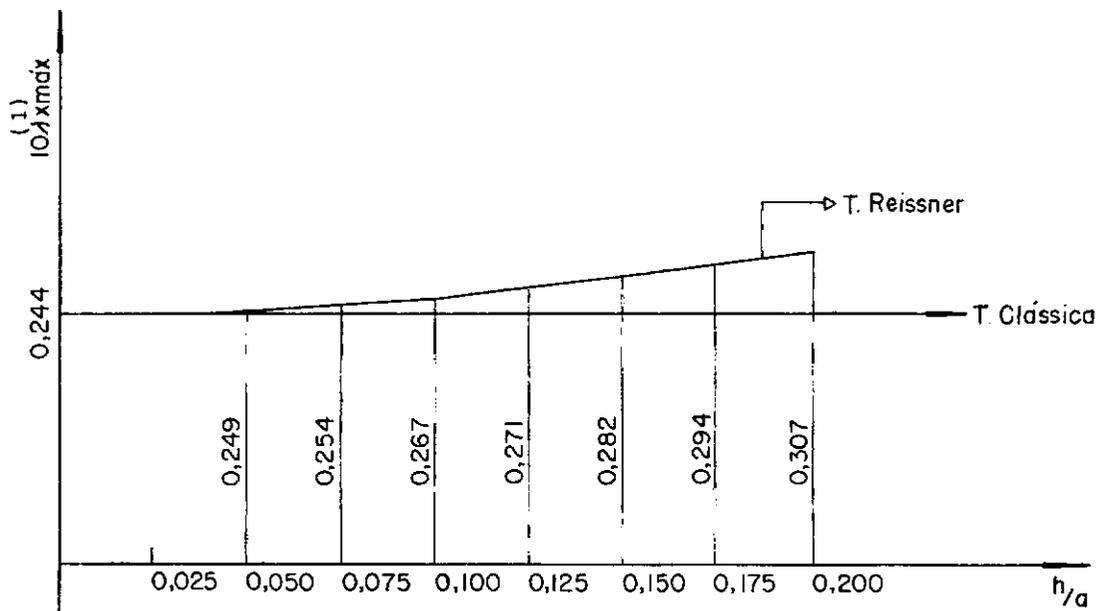
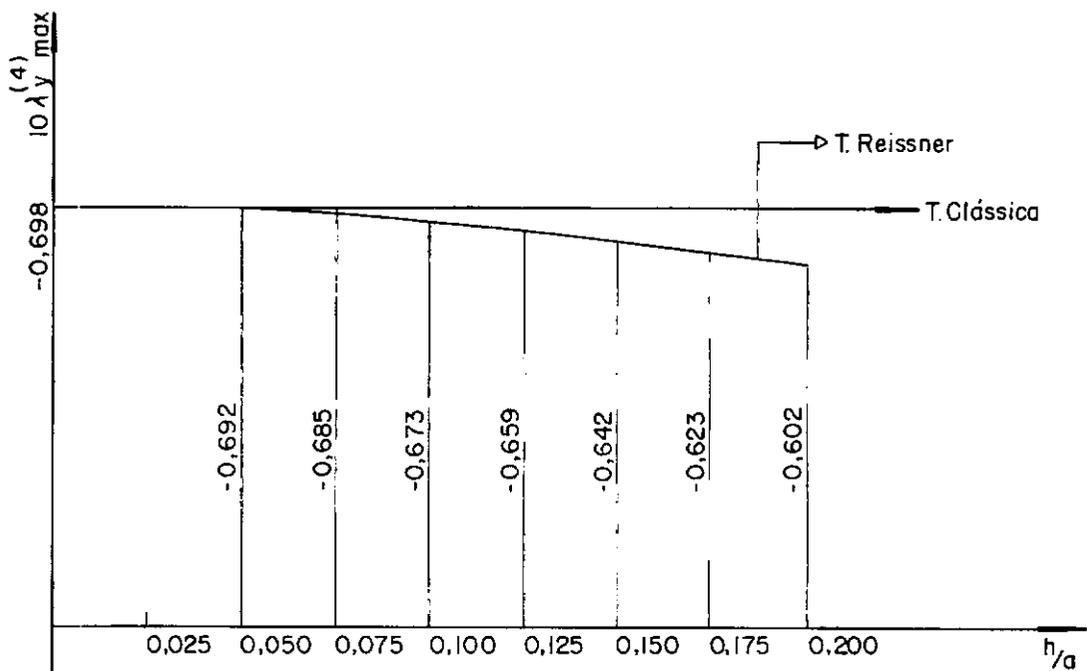


Gráfico 5 - h/a x mom. fletor M_y máx. ($b/a = 1$ e $\nu = 0,3$) - Caso 2



(+)
Gráfico 6 - h/a x mom. fletor M_x máx. ($b/a = 1$ e $\nu = 0,3$) - Caso 2



(-)
Gráfico 7 - h/a x mom. fletor M_y máx. ($b/a = 1$ e $\nu = 0,3$) - Caso 2

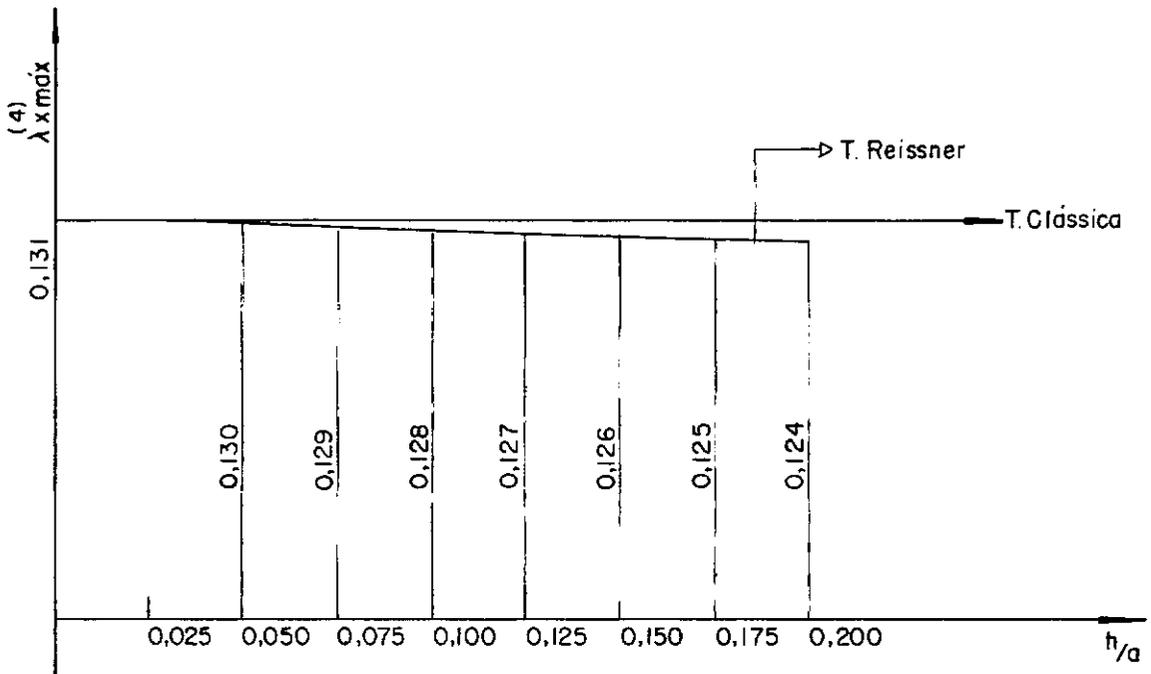


Gráfico 8 - h/a x mom. fletor M_x máx. ($b/a=1$ e $\nu=0,3$) - Caso 3

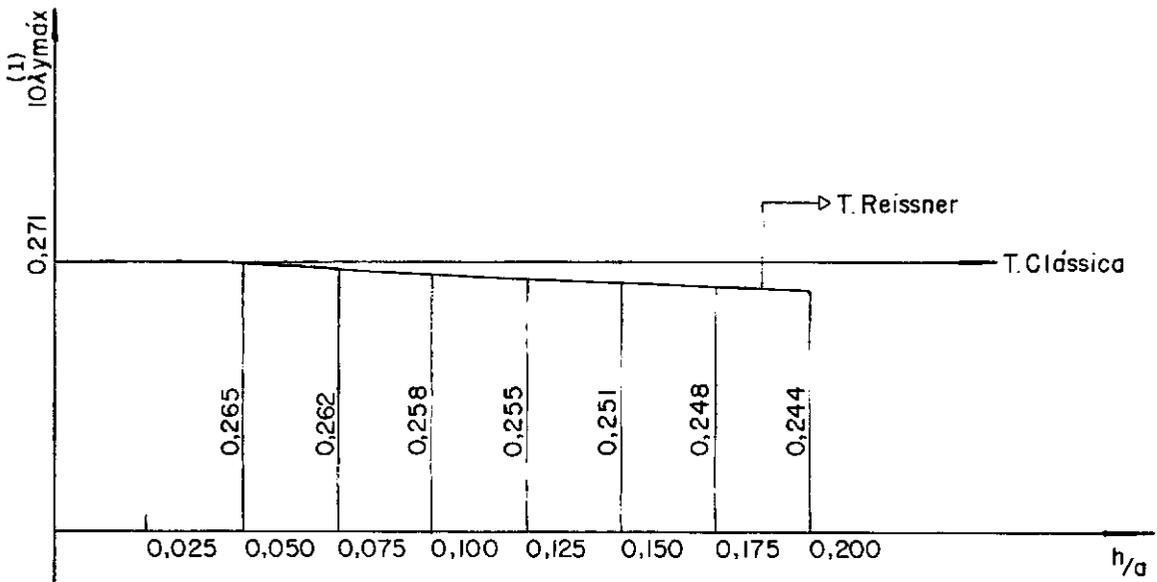


Gráfico 9 - h/a x mom. fletor M_y máx. ($b/a=1$ e $\nu=0,3$) - Caso 3

MOMENTOS TORÇORES

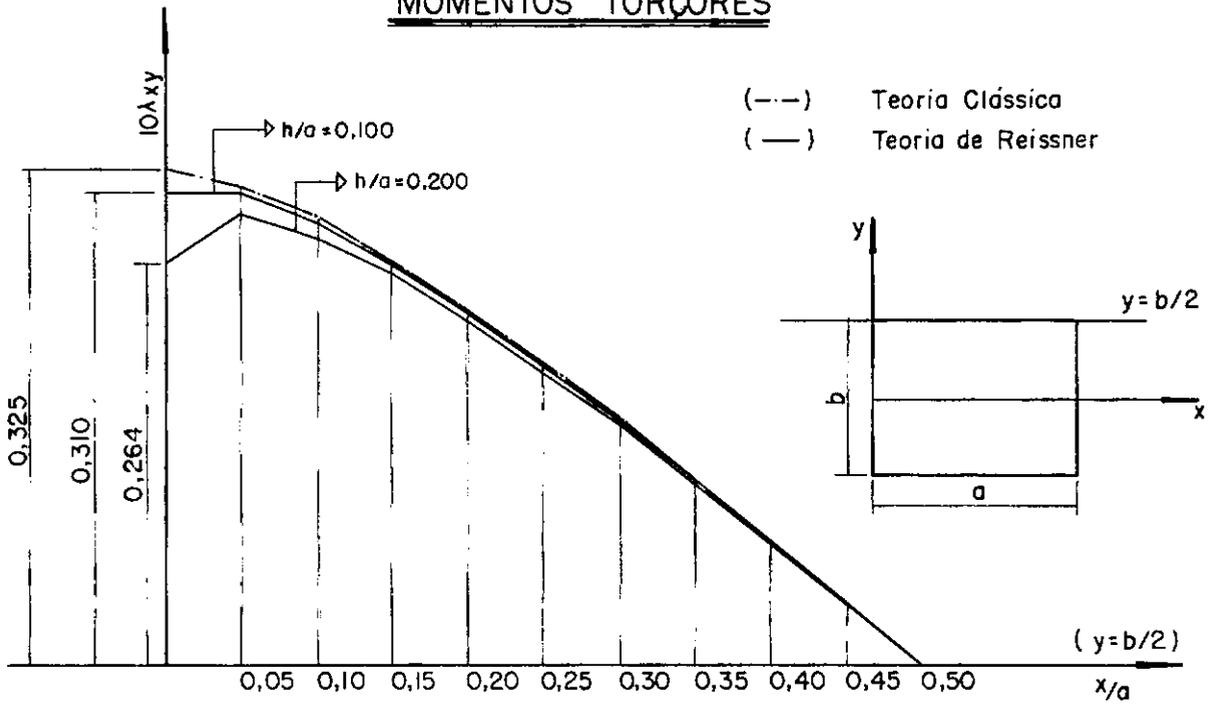


Gráfico I - variação de M_{xy} ao longo de $y = b/2$ para cada h/a ($b/a = 1$ e $\nu = 0,3$)

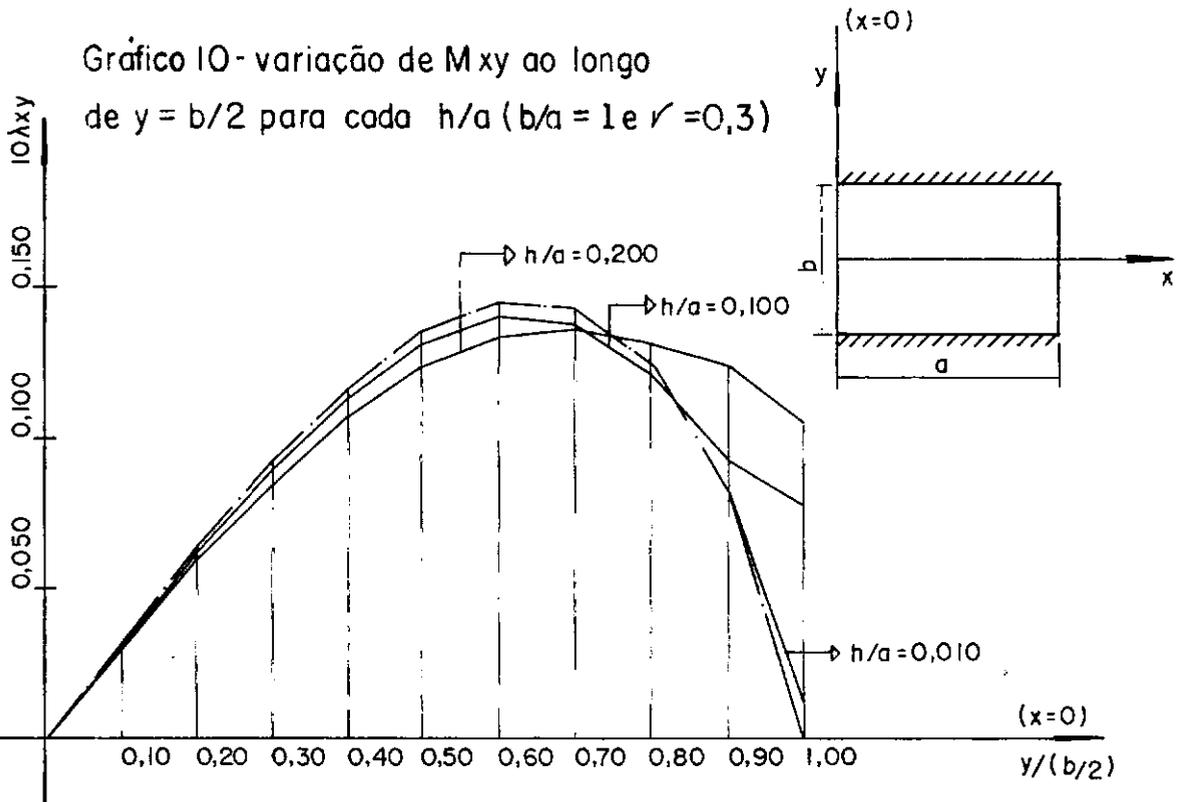


Gráfico II - variação de M_{xy} ao longo de $x = 0$ para cada h/a ($b/a = 1$ e $\nu = 0,3$)

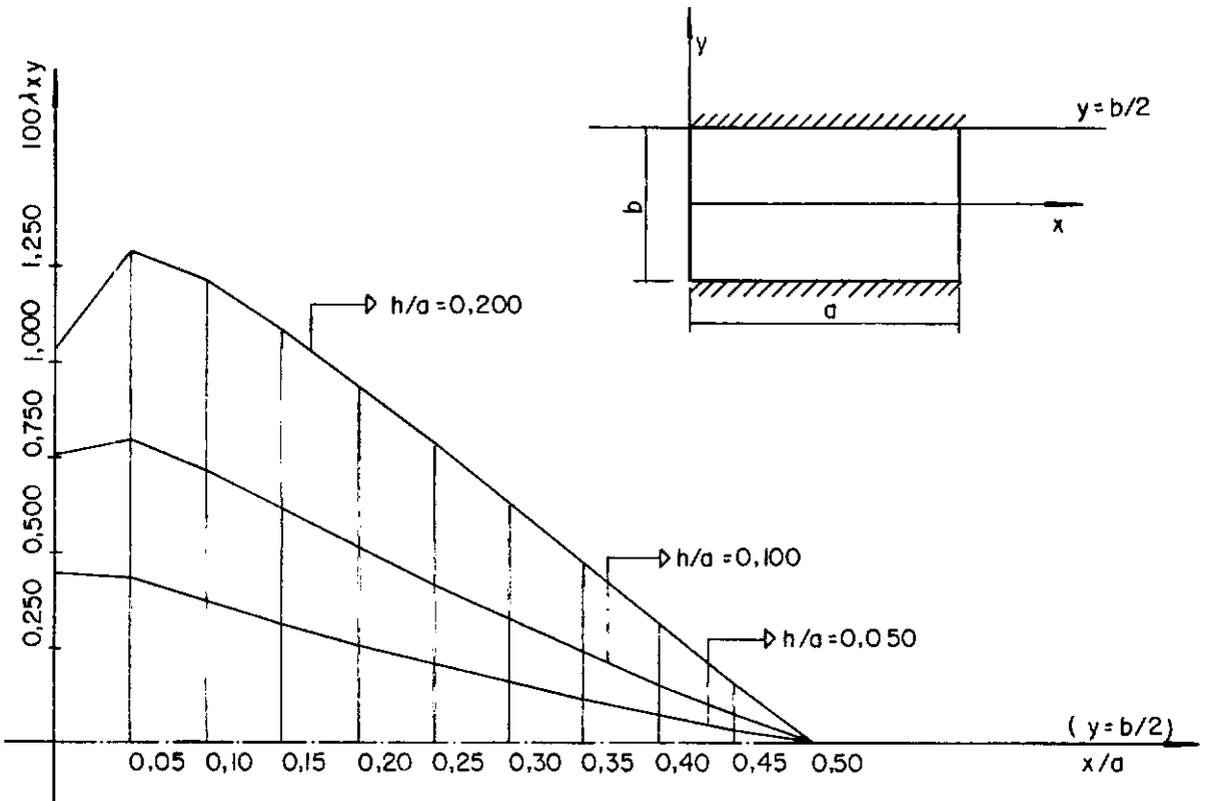


Gráfico 12 - variação de M_{xy} ao longo de $y = b/2$ para cada h/a . ($b/a = 1$ e $\nu = 0,3$)

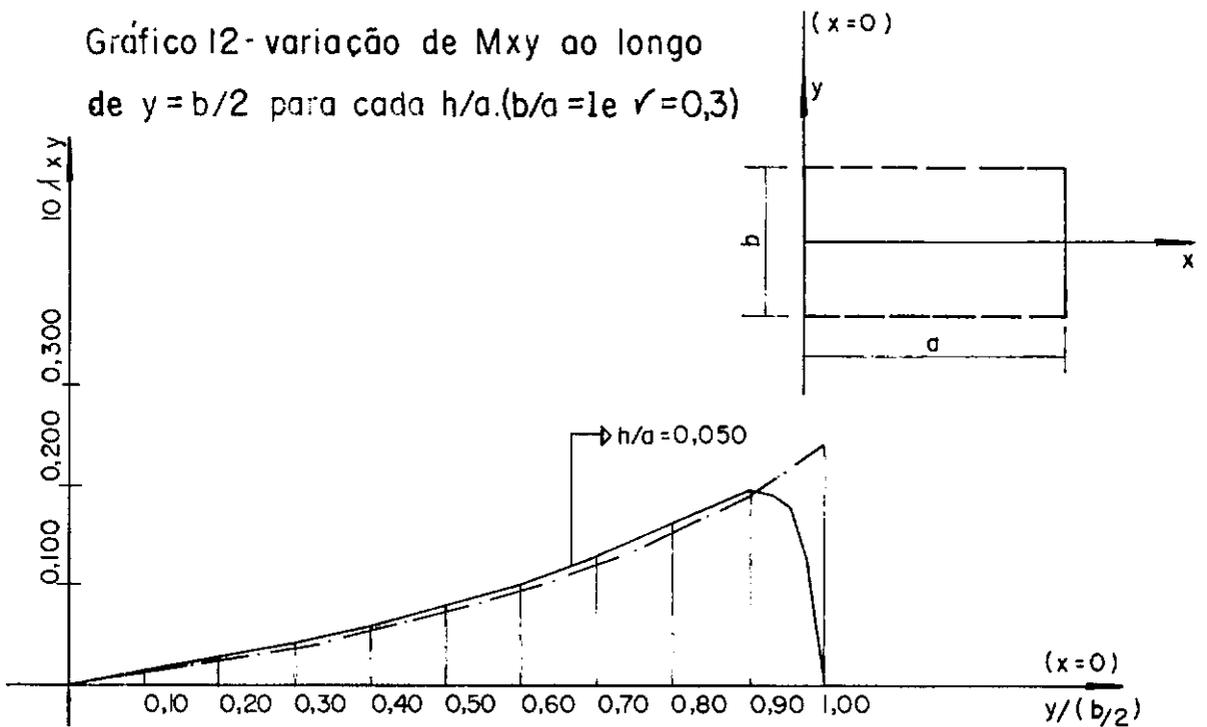


Gráfico 13 - variação de M_{xy} ao longo de $x = 0$ para cada h/a . ($b/a = 1$ e $\nu = 0,3$)

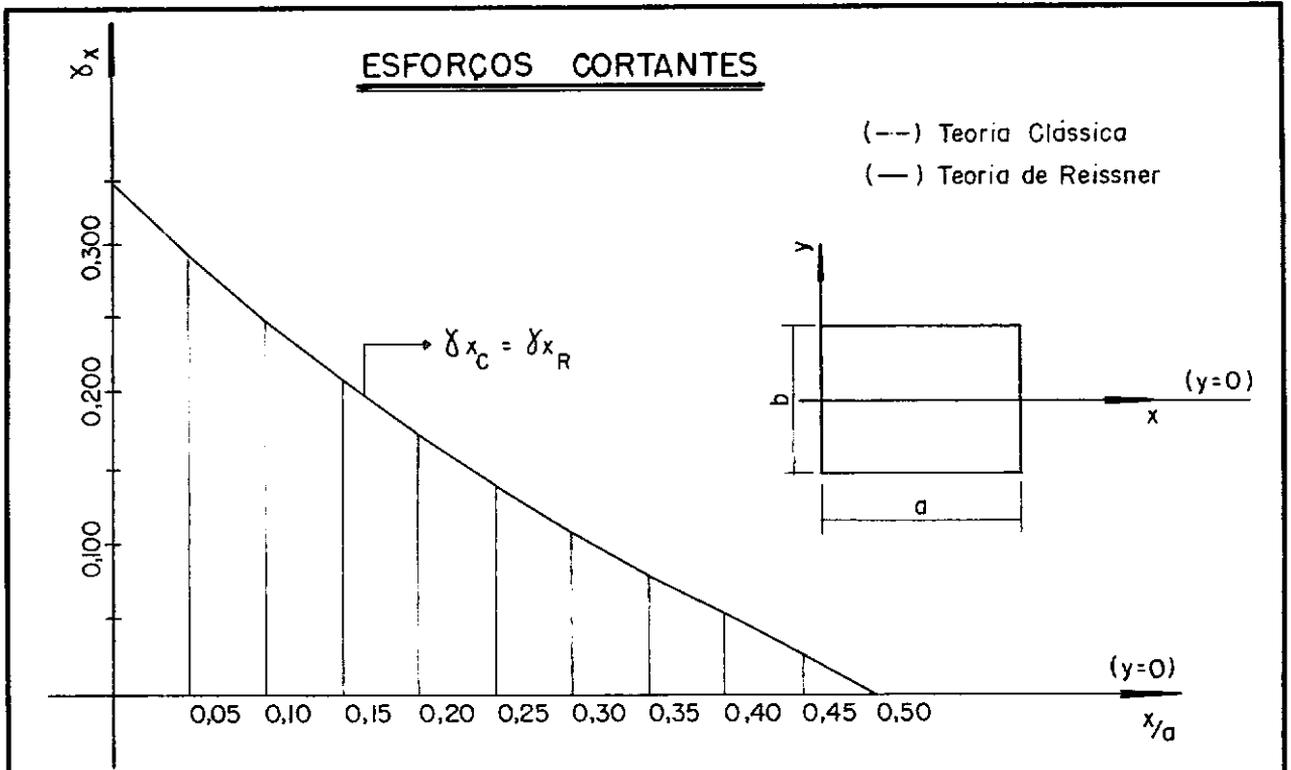


Gráfico 14 - variação de Q_x ao longo de $y=0$ para cada h/a ($b/a = 1$ e $\nu = 0,3$)

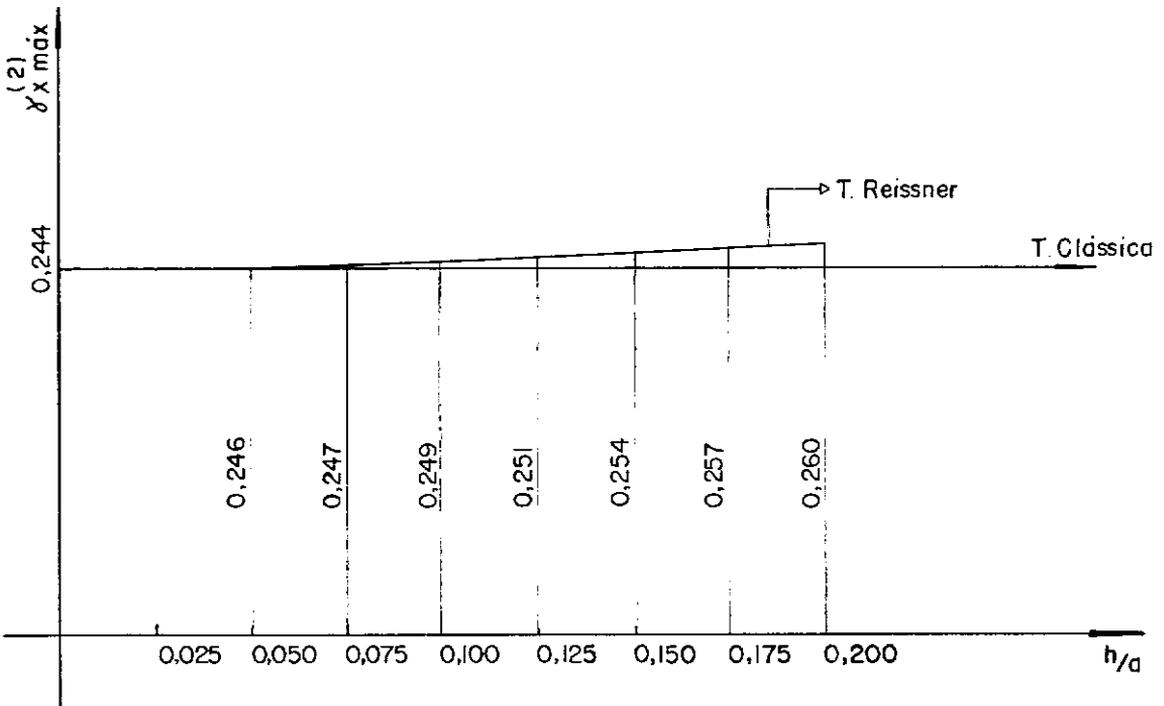


Gráfico 15 - h/a x esf. cortante Q_x máx. ($b/a = 1$ e $\nu = 0,3$)

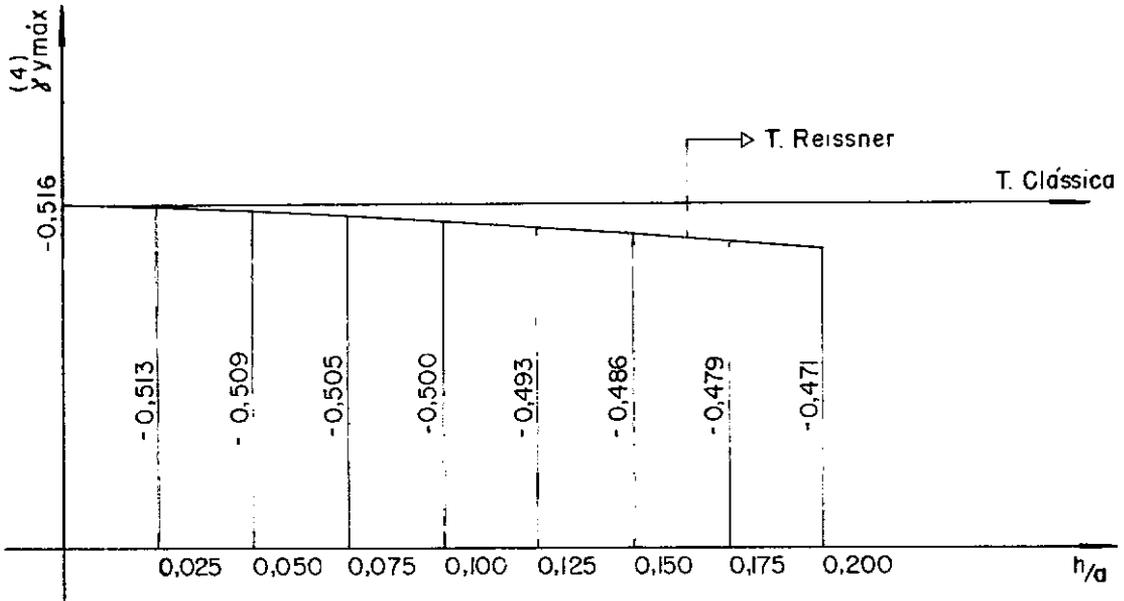
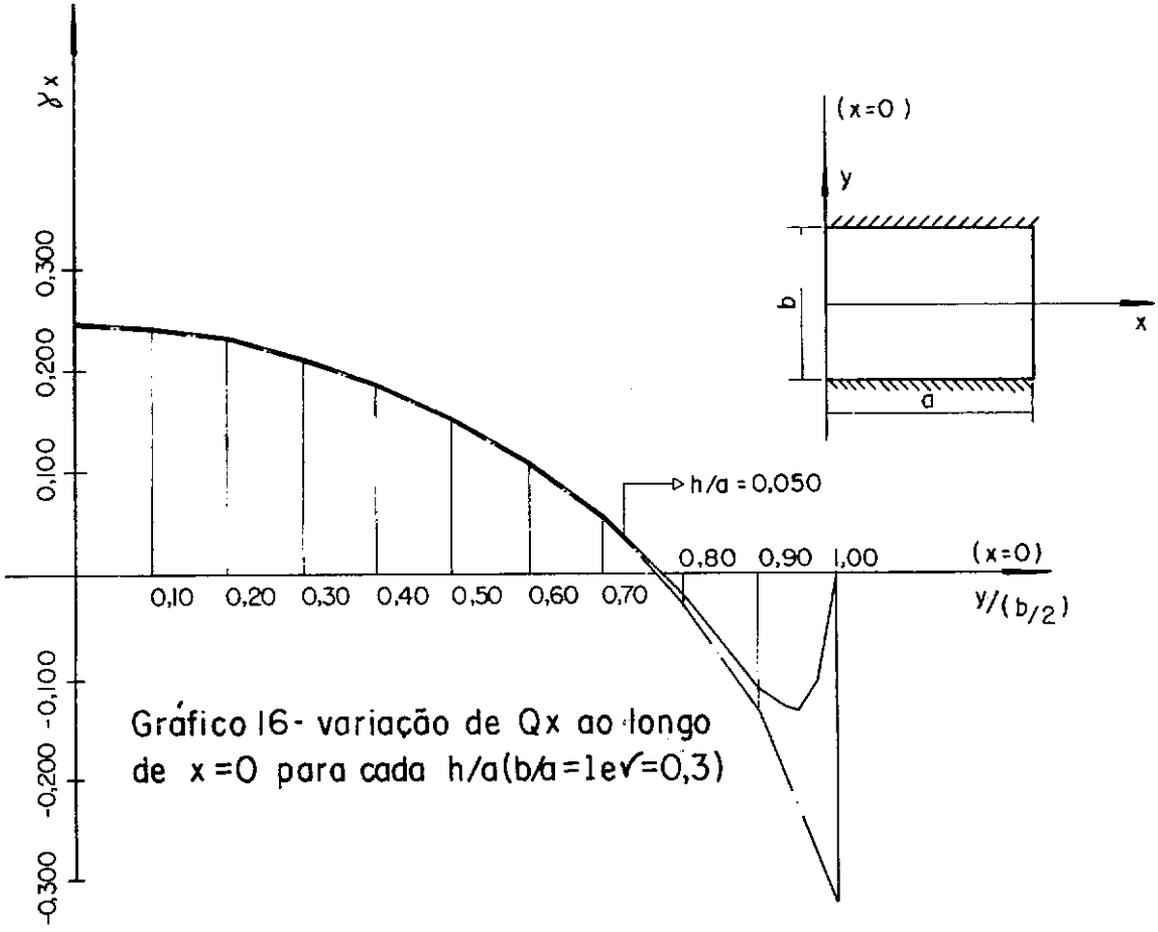


Gráfico 17 - h/a x esf. cortante Q_y máx. ($b/a=1$ e $\nu=0,3$)

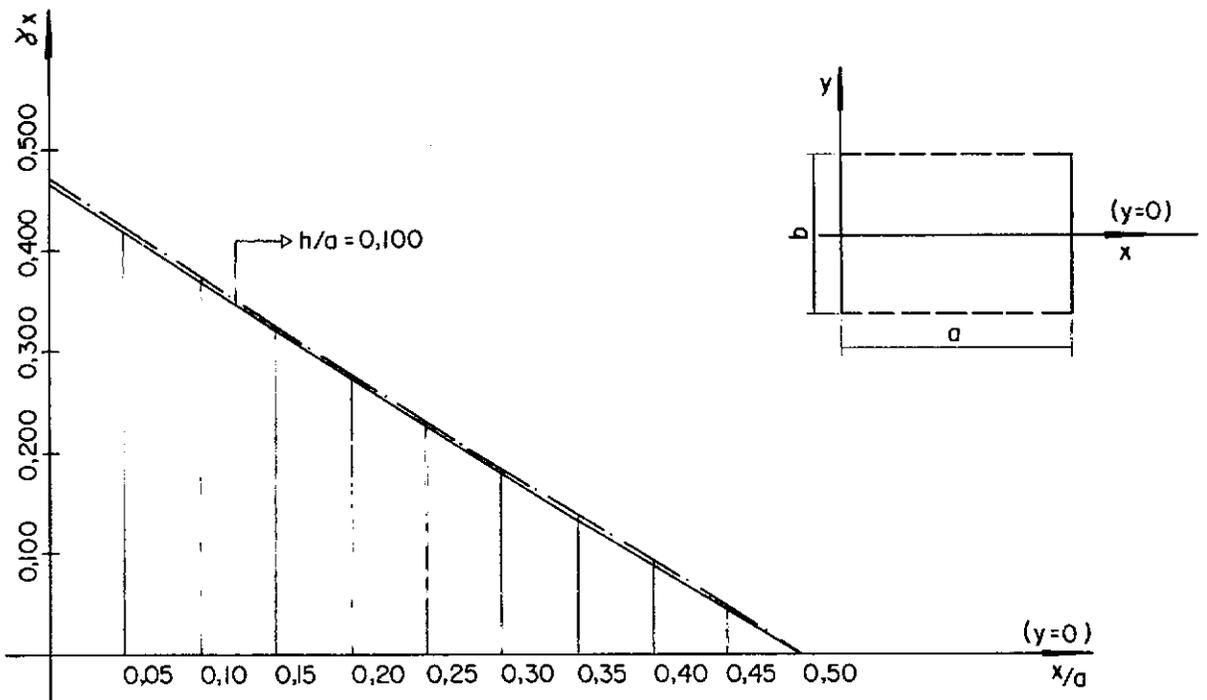


Gráfico 18 - variação de Q_x ao longo de $y=0$ para cada h/a ($b/a = 1$ e $\nu = 0,3$)

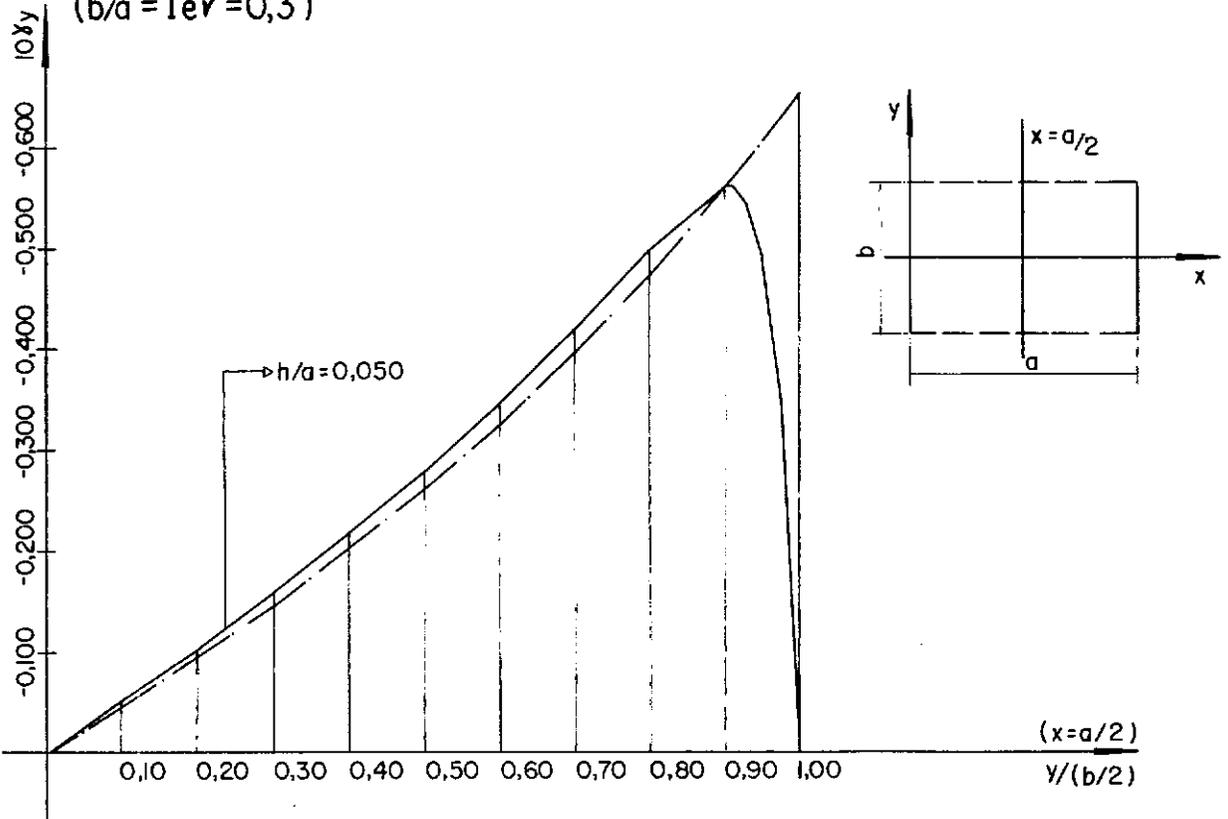
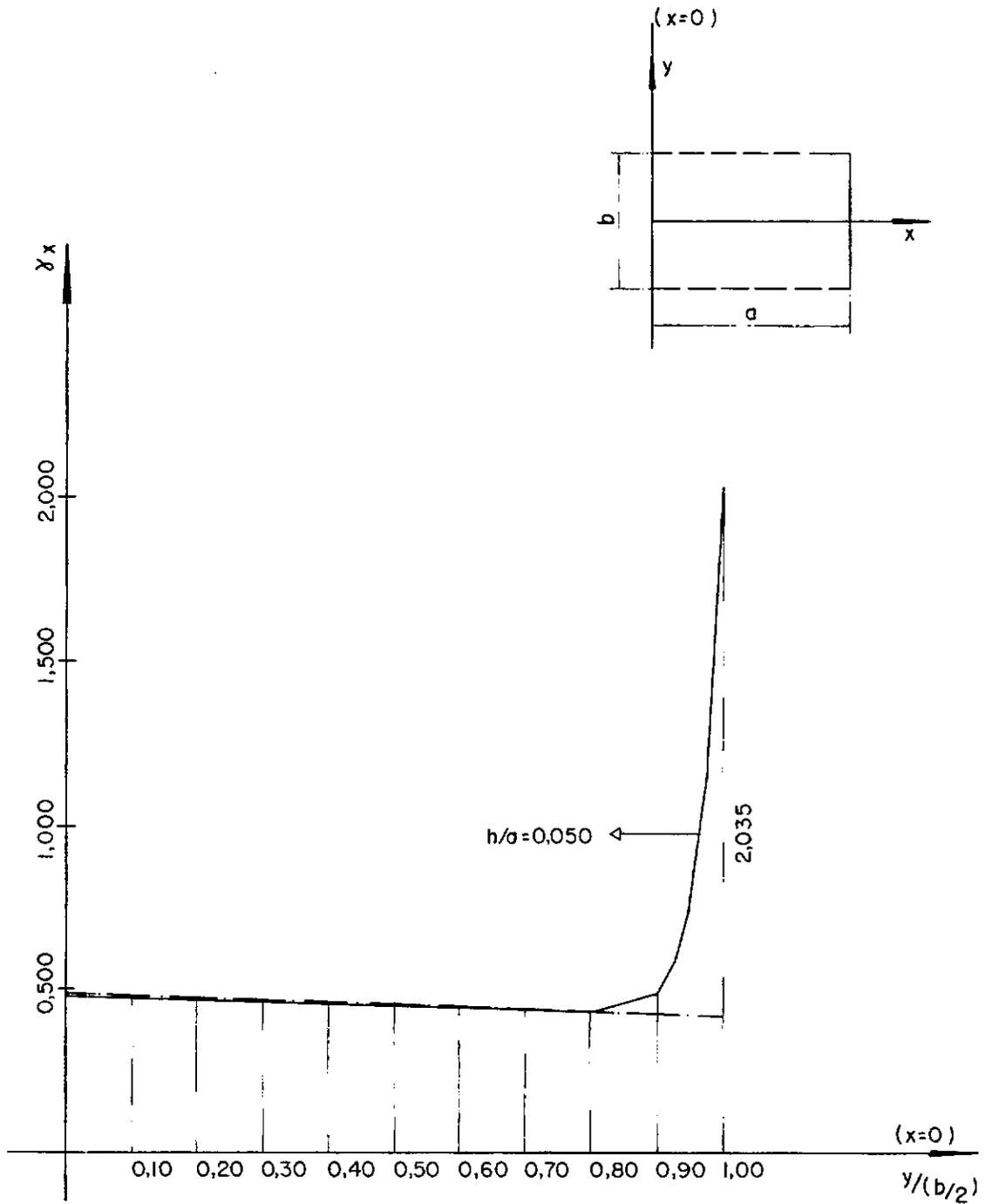
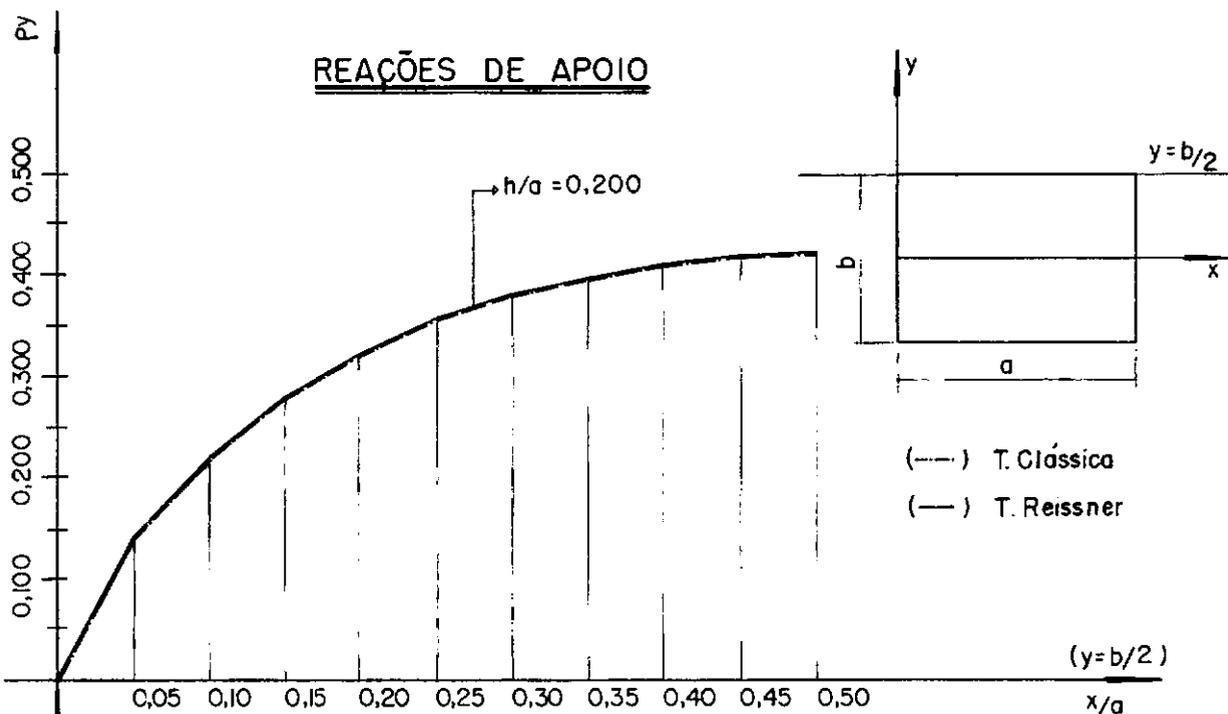


Gráfico 19 - variação de Q_y ao longo de $x=a/2$ para cada h/a ($b/a = 1$ e $\nu = 0,3$)



REAÇÕES DE APOIO



$R_c = 0,0650 p_0 a^2$ (T. Clássica)

$R_c = 0,0619 p_0 a^2$ (h/a = 0,100)

Gráfico 21 - variação de R_y ao longo de $y = b/2$ ($b/a = 1$ e $\nu = 0,3$)

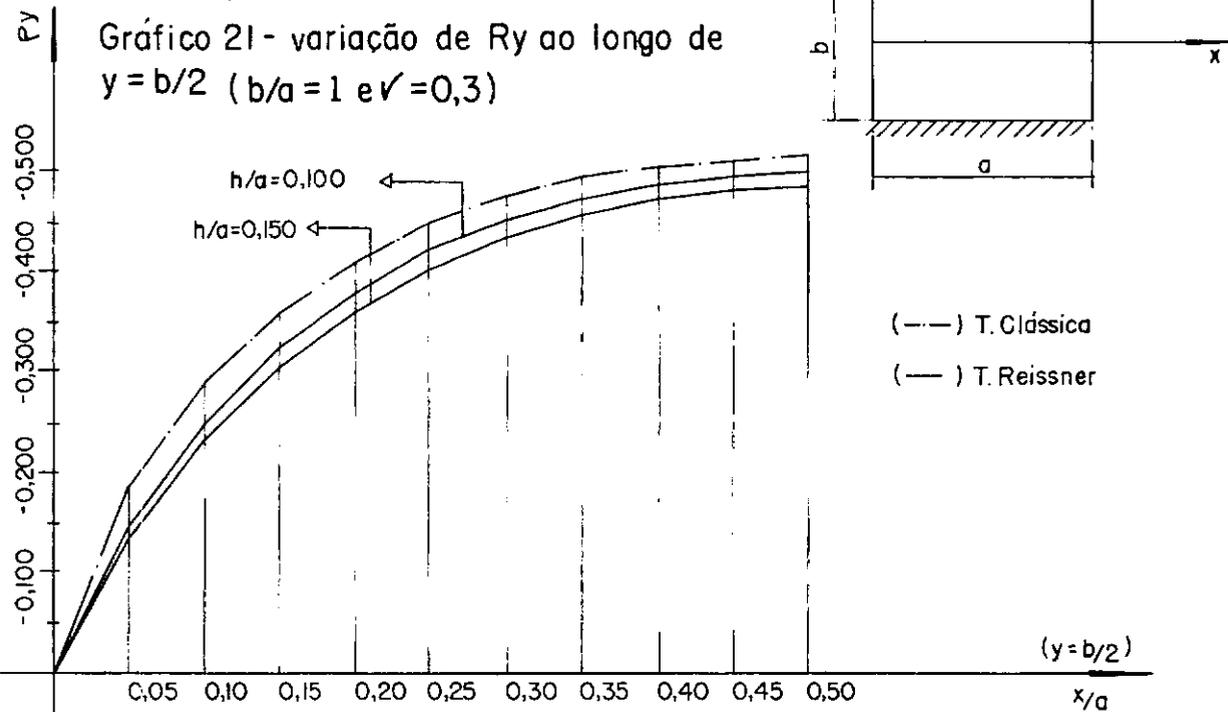


Gráfico 22 - variação de R_y ao longo de $y = b/2$ para cada h/a ($b/a = 1$ e $\nu = 0,3$)

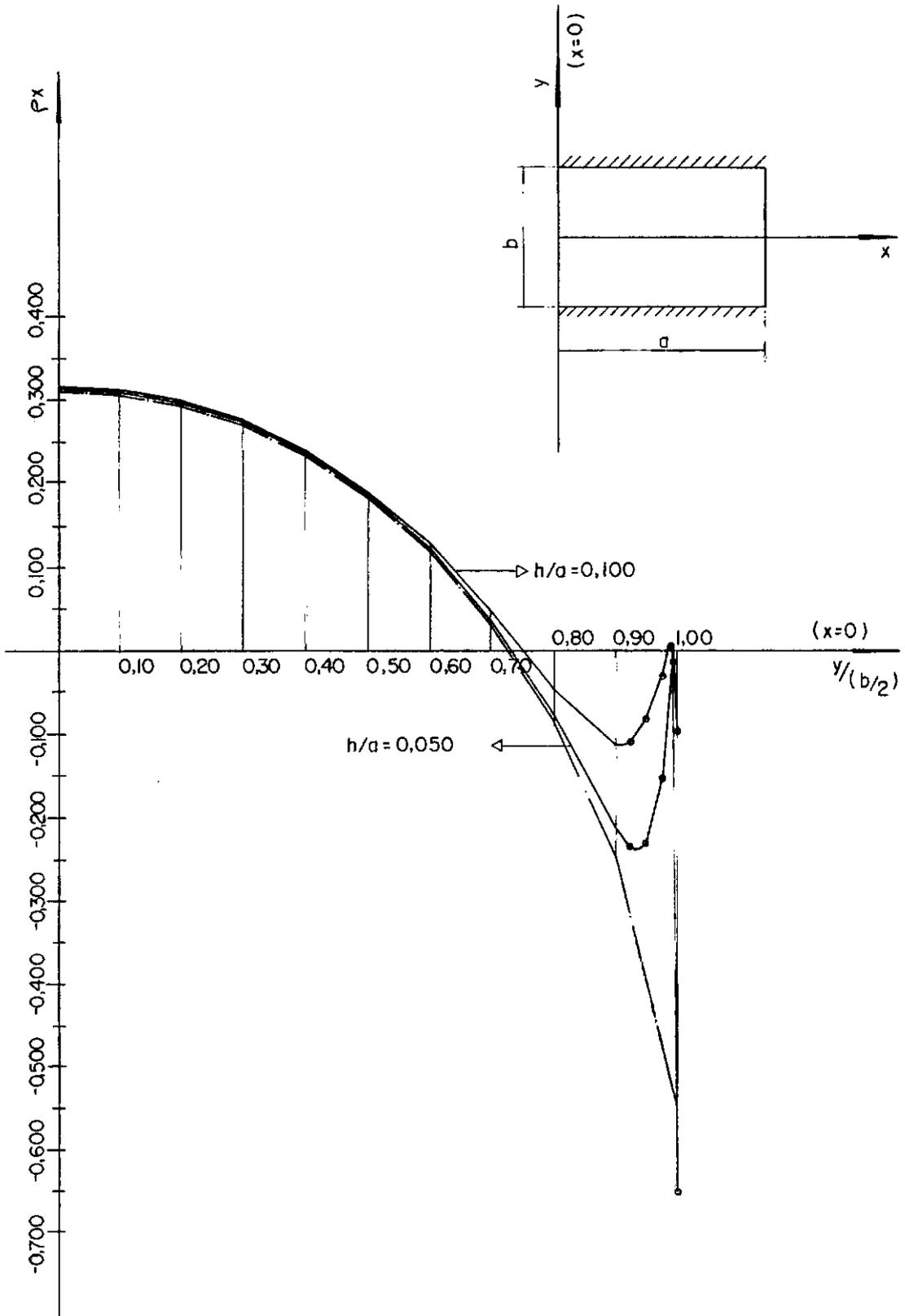
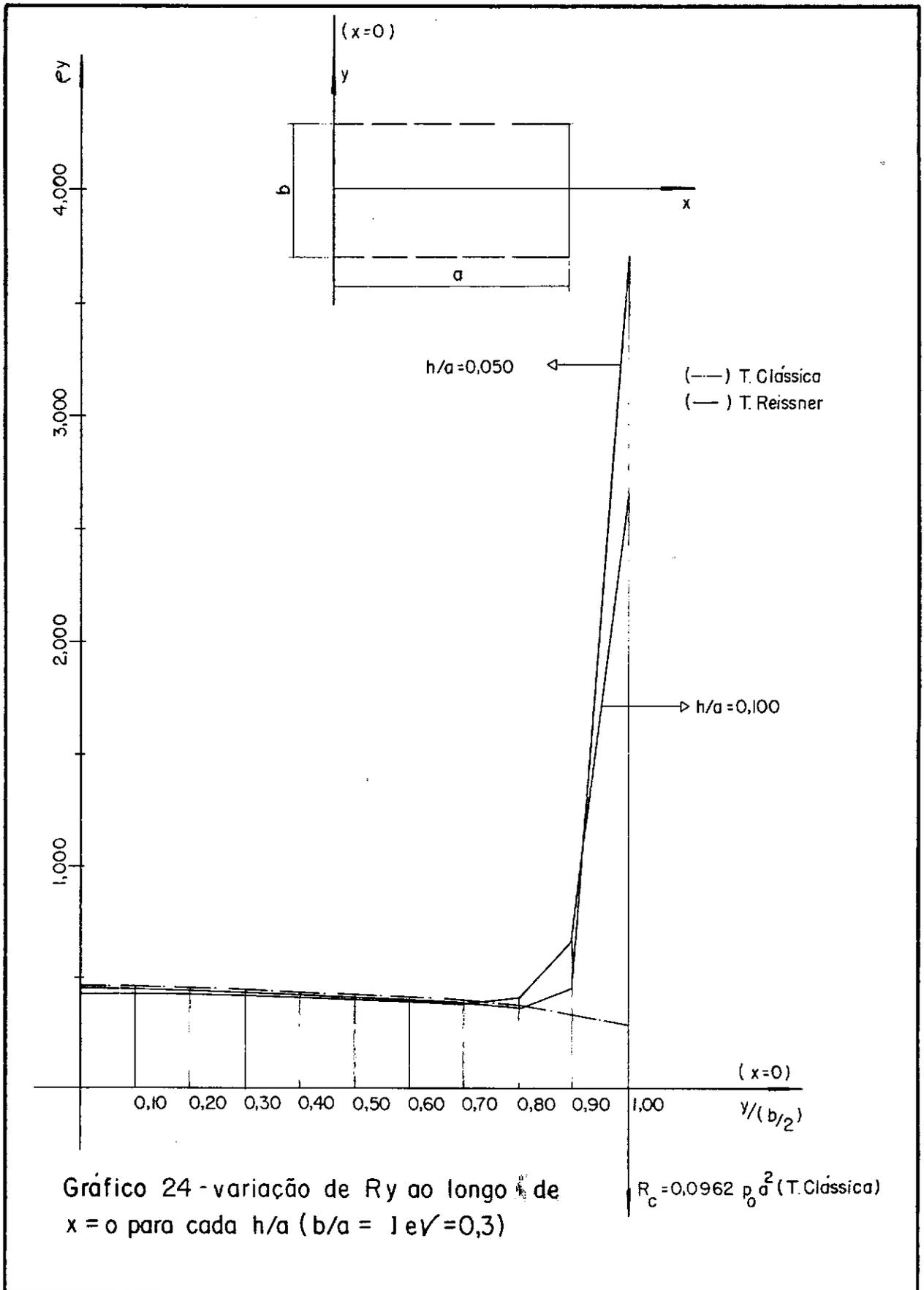


Gráfico 23 - variação de R_x ao longo de $x=0$ para cada h/a ($b/a = 1$ e $\nu = 0,3$)



5.3 - Análise dos Resultados

Os objetivos principais deste parágrafo são:

1) Analisar a influência da espessura da placa, dada pela relação h/a , nos valores das flechas e dos esforços resultantes, comparando os resultados obtidos nas duas teorias e determinando assim, o intervalo de variação da relação h/a a partir do qual não é mais válido considerar a placa como delgada.

2) determinar as conseqüências decorrentes da escolha da condição de contorno aproximada nos bordos simplesmente apoiados.

A comparação dos resultados numéricos obtidos nas duas teorias é feita a partir da definição, para as flechas e os esforços resultantes, das relações abaixo:

$$c_1 = \frac{\alpha_R}{\alpha_c} \quad , \quad c_2 = \frac{\lambda_{xR}}{\lambda_{xc}} \quad , \quad c_3 = \frac{\lambda_{yR}}{\lambda_{yc}} \quad , \quad c_4 = \frac{\gamma_{xR}}{\gamma_{xc}} \quad ,$$

$$c_5 = \frac{\gamma_{yR}}{\gamma_{yc}} \quad , \quad c_6 = \frac{\rho_{xR}}{\rho_{xc}} \quad , \quad c_7 = \frac{\rho_{yR}}{\rho_{yc}}$$

e dos gráficos apresentados a seguir.

Considera-se a placa como delgada quando as relações definidas acima forem menores ou iguais a 1,10.

A análise é feita para placas que satisfazem as relações $b/a = 1$ e $\nu = 0,3$.

5.3.1 - Flechas (Gráficos 1, 2 e 3)

No quadro abaixo, observa-se que para h/a variando de 0,050 a 0,200 a relação α_R/α_C varia de 1,2% a 17,7% no caso 1; 3,8% a 55,6% no caso 2 e 1,3% a 11,8% no caso 3.

h/a	0,050	0,075	0,100	0,125	0,150	0,175	0,200	Caso
$c_1^{(1)}$	1,012	1,025	1,044	1,067	1,098	1,136	1,177	1
$c_1^{(1)}$	1,038	1,084	1,148	1,228	1,323	1,432	1,556	2
$c_1^{(1)}$	1,013	1,024	1,037	1,053	1,072	1,093	1,118	3

Pelo critério adotado, a placa \bar{e} delgada para os seguintes valores de h/a :

$$\text{Caso 1: } h/a \leq 0,150$$

$$\text{Caso 2: } h/a \leq 0,085$$

$$\text{Caso 3: } h/a \leq 0,175$$

5.3.2 - Momentos Fletores (Gráficos 4, 5, 6, 7, 8 e 9)a) $c_2^{(1)}$ - centro da placa

h/a	0,050	0,075	0,100	0,125	0,150	0,175	0,200	Caso
c_2	1,000	1,002	1,002	1,004	1,006	1,008	1,012	1
c_2	1,020	1,041	1,074	1,111	1,156	1,205	1,258	2
c_2	0,999	0,999	0,999	1,000	1,001	1,002	1,002	3

A placa é delgada para os seguintes valores de h/a ,

Caso 1: $h/a \leq 0,200$

Caso 2: $h/a \leq 0,125$

Caso 3: $h/a \leq 0,200$

b) $c_2^{(4)}$ - centro do bordo engastado ou livre

h/a	0,050	0,075	0,100	0,125	0,150	0,175	0,200	Caso
c_2	0,986	0,971	0,948	0,919	0,886	0,848	0,805	2
c_2	0,987	0,980	0,973	0,967	0,960	0,954	0,947	3

Então,

Caso 2: $h/a \leq 0,200$

Caso 3: $h/a \leq 0,200$

c) $c_3^{(1)}$ - centro da placa

h/a	0,050	0,075	0,100	0,125	0,150	0,175	0,200	Caso
c_3	1,000	1,002	1,002	1,004	1,006	1,008	1,012	1
c_3	1,003	1,006	1,012	1,018	1,021	1,027	1,033	2
c_3	0,977	0,966	0,954	0,941	0,928	0,915	0,903	3

Logo,

$$\text{Caso 1: } h/a \leq 0,200$$

$$\text{Caso 2: } h/a \leq 0,200$$

$$\text{Caso 3: } h/a \leq 0,200$$

d) $c_3^{(4)}$ - centro do bordo engastado ou livre

h/a	0,050	0,075	0,100	0,125	0,150	0,175	0,200	Caso
c_3	0,991	0,981	0,964	0,944	0,920	0,893	0,862	2
c_3	0,977	0,966	0,954	0,941	0,928	0,915	0,900	3

Logo,

$$\text{Caso 2: } h/a \leq 0,200$$

$$\text{Caso 3: } h/a \leq 0,200$$

5.3.3 - Momentos Torçores (Gráficos 10, 11, 12 e 13)

A condição aproximada tem grande influência nos resultados numéricos dos momentos torçores, visto que a condição exata implica em $M_{xy} = 0$.

Os gráficos apresentados dão uma boa idéia desta influência.

a) Gráfico 10 (Caso 1)

É interessante observar que a utilização da condição aproximada conduz a uma boa concordância nos valores numéricos dados pelas duas teorias; existe porém, perto dos cantos da placa, uma pequena variação nos valores da teoria de Reissner. A condição exata ($M_{xy} = 0$) discorda frontalmente com a teoria clássica.

b) Gráfico 11 (Caso 2)

Neste caso, há uma boa concordância nas duas teorias para valores de $h/a \leq 0,050$. Existem variações nas regiões próximas ao canto da placa, principalmente para $h/a > 0,050$.

A condição exata ($M_{xy} = 0$) é discordante com a teoria clássica.

c) Gráfico 12 (Caso 2)

Ao longo deste bordo, quando a relação $h/a \rightarrow 0$ o momento torsor (M_{xy}) $\rightarrow 0$. Há portanto uma concordância com a teoria clássica, para pequenos valores de h/a .

É importante observar que neste bordo as condições de contorno são satisfeitas exatamente.

d) Gráfico 13 (Caso 3)

As duas teorias concordam para pequenos valores de h/a . Existe uma variação na vizinhança do canto da placa, motivada pe-

1a condição de bordo livre ($M_{xy} = 0$).

5.3.4 - Esforços Cortantes (Gráficos 14, 15, 16, 17, 18, 19 e 20)

Analogamente ao momento torsor, as variações existentes ocorrem sempre na vizinhança dos cantos da placa.

a) Valores Máximos (Gráfico 15)

h/a	0,050	0,075	0,100	0,125	0,150	0,175	0,200	Caso
$c_4^{(2)}$	1	1	1	1	1	1	1	1
$c_4^{(2)}$	1,005	1,012	1,020	1,030	1,040	1,052	1,065	2
$c_4^{(2)}$	0,996	0,994	0,991	0,989	0,986	0,984	0,981	3

Logo,

Caso 1: $h/a \leq 0,200$

Caso 2: $h/a \leq 0,200$

Caso 3: $h/a \leq 0,200$

b) Valores Máximos (Gráfico 17)

h/a	0,050	0,075	0,100	0,125	0,150	0,175	0,200	Caso
$c_5^{(1)}$	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1
$c_5^{(4)}$	0,986	0,978	0,968	0,956	0,942	0,928	0,912	2

Logo,

Caso 1: $h/a \leq 0,200$

Caso 2: $h/a \leq 0,200$

c) Gráfico 14

As duas teorias coincidem, qualquer que seja a relação h/a .

d) Gráfico 16

As duas teorias tem uma boa concordância ao longo de quase todo o bordo, havendo discordância junto aos cantos da placa.

Este fato é uma consequência natural da condição de contorno, isto é:

$$\beta_x \Big|_{y=b/2} = \left[\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{h^2}{5D(1-\nu)} Q_x \right] \Big|_{y=b/2} = 0$$

porém, $\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{y=b/2} = 0$ então $Q_x \Big|_{y=b/2} = 0$

e) Gráfico 18

As duas teorias concordam muito bem.

f) Gráfico 19

Hã uma boa concordância para valores de $h/a \leq 0,075$, ao longo de quase todo bordo, existindo discordância junto aos cantos da placa devido a condição de contorno $Q_y = 0$ (bordo livre).

g) Gráfico 20

Ao longo deste bordo, o esforço cortante tem uma boa aproximação para valores $h/a \leq 0,050$. Existe uma grande variação na vizinhança do canto da placa.

5.3.5 - Reações de Apoio (Gráficos 21, 22, 23 e 24)

As reações de apoio, dadas pela teoria de Reissner, em bordos simplesmente apoiados, sofrem grande influência da condição de contorno aproximada (Ver capítulo III, parágrafo 3.5). Analogamente aos esforços cortantes e momentos fletores, as reações de apoio sofrem variações junto aos cantos das placas.

a) Gráfico 21

Neste gráfico há uma perfeita concordância entre as duas teorias ao longo do apoio. As reações concentradas dadas pela teoria de Reissner, consequência da condição aproximada, são menores do que as dadas pela teoria clássica.

Salienta-se que a condição de contorno exata conduz a reações distribuídas perto dos cantos das placas.

b) Gráfico 22

Para valores crescentes de h/a as curvas da teoria de Reissner afastam-se da curva da teoria clássica.

c) Gráfico 23

O gráfico mostra que para pequenos valores de h/a , e-

xiste uma boa concordância entre as duas teorias ao longo de quase todo bordo, exceto perto do canto da placa.

Para valores crescentes de h/a as variações no canto aumentam.

d) Gráfico 24

Na teoria clássica existem nos cantos das placas reações concentradas que na teoria de Reissner são distribuídas. Ao longo do apoio, exceto junto ao canto, as duas teorias convergem a medida que h/a diminua.

C O N C L U S Õ E S

A teoria clássica de Kirchhoff-Love, cujas hipóteses encontram-se no capítulo II, não permite avaliar o efeito da espessura da placa sobre os valores das flechas e esforços resultantes, considerando então a placa como delgada. As teorias mais refinadas, em particular a teoria de Reissner, permitem tal avaliação.

A comparação dos resultados obtidos pelas duas teorias, feita no parágrafo 5.3, mostra que o intervalo de variação da relação h/a , dentro do qual é válido considerar a placa como delgada, depende dentre outras coisas, fundamentalmente da variável de comparação escolhida, isto é: a flecha, o momento fletor, etc...

Tomando como variável de comparação a flecha, conclui-se que:

Caso 1:

$$h/a \leq 0,150$$

Caso 2:

$$h/a \leq 0,085$$

Caso 3:

$$h/a \leq 0,175.$$

Considerando o momento fletor como variável de comparação conclui-se que, a exceção do momento M_y no centro da placa (gráfico 6), os resultados obtidos pela teoria clássica de Kirchhoff-Love (placas delgadas) podem ser utilizados pelo menos até $h/a \leq 0,200$.

As condições de contorno dadas pela teoria de Reissner são responsáveis pelas variações que ocorrem nos valores dos momentos torçores e esforços cortantes, ao longo dos bordos e na vizinhança dos cantos da placa. Para os momentos torçores, a utilização no bordo simplesmente apoiado da condição aproximada é responsável pela boa aproximação existente entre as duas teorias, nestes bordos. O mesmo não ocorre no bordo engastado (gráfico 12) e livre (tabela 23), onde a condição exata conduz os momentos torçores a valores distintos. Exceto no caso 1, onde os valores numéricos coincidem exatamente em todo domínio da placa, o esforço cortante tem uma razoável aproximação, existindo porém variações em regiões vizinhas aos bordos engastados e livres, como mostram os gráficos 16, 19 e 20.

Nas reações de apoio, a condição de contorno aproximada conduz, no caso 1, a reações concentradas nos cantos da placa em substituição as reações distribuídas dadas em [8]. No caso 2, quando h/a cresce, as reações nos bordos engastados decrescem e nos bordos simplesmente apoiados crescem, existindo variações perto do canto da placa. Um fato importante ocorre no caso 3, onde a reação concentrada dada pela teoria clássica, distribui-se na região junto ao canto.

Finalmente sugere-se para um futuro trabalho, o desenvolvimento de uma teoria para placas espessas, (ver L.H. DONNELL [16], C.W. LEE and L.H. DONNELL [17] e C.W. LEE [18]), comparando-se os resultados obtidos com os existentes em outras teorias (Kirchhoff-Love, Reissner, Kromm, Hencky, etc...), bem como a utilização de programas de elementos finitos para placas (LIMA [20] e BIGNON [19]).

A P Ê N D I C E ATEORIA DE HENCKY

Como ocorrem nas teorias mais refinadas, a teoria de Hencky conduz a um sistema de equações diferenciais parciais que implica em três condições de contorno por bordo.

As hipóteses básicas da teoria são:

- a) o efeito da deformação transversal é desprezado ($\epsilon_z = 0$).
- b) as tensões cizalhantes transversais τ_{xz} e τ_{yz} são funções independentes de z , isto é, somente o valor médio das tensões ao longo da espessura da placa é levado em conta.
- c) os deslocamentos u e v são funções lineares de z .

As equações que governam o problema são obtidas a partir do princípio dos deslocamentos virtuais (Princípio de Lagrange).

A seguir escreve-se as relações necessárias para o desenvolvimento da teoria de Hencky.

1) Relações Tensão-Deformação

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu\epsilon_y) & \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\nu\epsilon_x + \epsilon_y) \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} & \tau_{xz} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xz} & \tau_{yz} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{yz} \end{aligned} \quad (A.1)$$

2) Relações Deformação-Deslocamento

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

3) Relações Tensão-Deslocamento

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) & \sigma_y &= \frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \tau_{xz} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \tau_{yz} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

As componentes dos deslocamentos são dadas na teoria de Hencky por:

$$u = z \omega_x(x,y) \quad v = z \omega_y(x,y) \quad w = w(x,y) \quad (\text{A.4})$$

Logo,

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} z \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \omega_y}{\partial y} \right)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} z \left(\nu \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} \right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} z \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial y} + \frac{\partial \omega_y}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\omega_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad \tau_y = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\omega_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (A.5)$$

Observa-se em (A.5) que as tensões τ_{xz} e τ_{yz} não dependem de z , conseqüência de (A.4), e portanto as condições de contorno $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ em $z = \pm h/2$ não podem ser satisfeitas. Hencky observa que tal fato deve ser levado em conta, quando se utilizar o princípio dos deslocamentos virtuais para a obtenção das equações que governam o problema estudado.

Usa-se na dedução das equações, as notações dadas abaixo:

X_p, Y_p, Z_p - componentes do carregamento externo atuando nas superfícies da placa.

S_x, S_y, S_z - componentes de tensões nas superfícies da placa.

$$S_x = \sigma_x \ell + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n$$

$$S_y = \tau_{yx} \ell + \sigma_y m + \tau_{yz} n$$

$$S_z = \tau_{zx} \ell + \tau_{zy} m + \sigma_z n \quad , \quad (A.6)$$

onde ℓ, m e n são os co-senos diretores da normal unitária a fronteira.

Da teoria da elasticidade segue

$$\begin{aligned} X &= \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \\ Y &= \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \\ Z &= \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

onde X, Y e Z são as componentes das forças de massa.

Hencky utiliza o princípio dos deslocamentos virtuais, no qual a variação da energia potencial total de um corpo elástico em equilíbrio anula-se, isto é:

$$\begin{aligned} &\int_A \left[(S_x - X_p) \delta u + (S_y - Y_p) \delta v + (S_z - Z_p) \delta w \right] dA \\ &- \int_V (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) dV = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Considerando que o carregamento $p(x,y)$ atue somente em $z = -h/2$, então

$$\begin{aligned} X_p(z = \pm h/2) &= 0, \quad Y_p(z = \pm h/2) = 0, \quad Z_p(z = + h/2) = 0, \\ Z_p(z = - h/2) &= - p \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Utilizando (A.5), (A.6) e (A.9) em (A.8) tem-se,

$$\int_A \left[(\tau_{xz} \delta u) \Big|_{z=+h/2} - (\tau_{xz} \delta u) \Big|_{z=-h/2} + (\tau_{yz} \delta v) \Big|_{z=+h/2} - (\tau_{yz} \delta v) \Big|_{z=-h/2} - p \delta w \right] dA - \int_V (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) dV \quad (A.10)$$

Sabe-se de (A.5) que,

$$\tau_{xz} \Big|_{z=\pm h/2} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\omega_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{yz} \Big|_{z=\pm h/2} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\omega_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (A.11)$$

de (A.4) segue que

$$\delta u = z \delta \omega_x \quad \text{e} \quad \delta v = z \delta \omega_y, \quad \text{logo}$$

$$\delta u \Big|_{z=\pm h/2} = \pm \frac{h}{2} \delta \omega_x, \quad \delta v \Big|_{z=\pm h/2} = \pm \frac{h}{2} \delta \omega_y, \quad \delta w \Big|_{z=\pm h/2} = \delta w \quad (A.12)$$

Substituindo (A.11) e (A.12) em (A.8), tem-se:

$$\int_A \left[\frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\omega_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta \omega_x + \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\omega_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \delta \omega_y - p \delta w - \int_{-h/2}^{+h/2} (X \delta \omega_x + Y \delta \omega_y + Z \delta w) dz \right] dA = 0 \quad (A.13)$$

Então, do cálculo variacional segue

$$\frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\omega_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \int_{-h/2}^{+h/2} z \, dz = 0$$

$$\frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\omega_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \int_{-h/2}^{+h/2} z \, dz = 0$$

$$p + \int_{-h/2}^{+h/2} Z \, dz = 0 \quad (\text{A.14})$$

Porém,

$$\int_{-h/2}^{+h/2} Xz \, dz = \int_{-h/2}^{+h/2} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) z \, dz$$

$$\int_{-h/2}^{+h/2} Yz \, dz = \int_{-h/2}^{+h/2} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) z \, dz$$

$$\int_{-h/2}^{+h/2} Z \, dz = h \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right), \quad (\text{A.15})$$

de (A.5) segue que

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \frac{E}{1-\nu^2} z \left[\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial x^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial y^2} + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial x \partial y} \right]$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \frac{E}{1-\nu^2} z \left[\frac{\partial^2 \omega_y}{\partial y^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial x^2} + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial x \partial y} \right]$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \nabla^2 w \right) \quad (\text{A.16})$$

Substituindo (A.16), (A.15) em (A.14), obtêm-se

$$\omega_x + \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{h^2}{6(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial x^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial y^2} + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial x \partial y} \right) = 0 ,$$

$$\omega_y + \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{h^2}{6(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 \omega_y}{\partial y^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial x^2} + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial x \partial y} \right) = 0 ,$$

$$\frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \nabla^2 w \right) + p = 0 \quad (\text{A.17})$$

O sistema de três equações diferenciais parciais nas variáveis ω_x , ω_y e w dado em (A.17) resolve o problema proposto pela teoria de Hencky.

O sistema (A.17) pode ser substituído por outro equivalente, isto é:

$$\omega_x + \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{h^2}{6(1-\nu)} \left[\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial x^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial y^2} + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial x \partial y} \right] = 0$$

$$\omega_y + \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{h^2}{6(1-\nu)} \left[\frac{\partial^2 \omega_y}{\partial y^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial x^2} + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial x \partial y} \right] = 0$$

$$D \nabla^4 w = p - \frac{h^2}{6(1-\nu)} \nabla^2 p \quad (\text{A.18})$$

Observa-se que Hencky não introduziu na sua teoria conceitos de momentos e forças cortantes.

A teoria de Hencky conduz resultados menos exatos do

que a teoria de Reissner. Uma extensão da teoria de Hencky é dada por VLADIMIR PANC [7].

REFERÊNCIAS

Livros

- [1] TIMOSHENKO and WOINOWSKY-KRIEGER - Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill Kōgakusha, 2^a edição, 1959.
- [2] MCFARLAND, SMITH and BERNHART - Analysis of Plates, Spartan, 1^a edição, 1972.
- [3] RUDOLPH SZILARD - Theory and Analysis of Plates, Prentice-Hall, 1^a edição, 1974.
- [4] RICHARD BARES - Tablas para el Calculo de Places y Vigas Pared, Gustavo Gili, edição, 1970.
- [5] HANS F. WEINBERGER - A First Course in Partial Differential Equations, Blaisdell, 1^a edição, 1965.
- [6] K. WASHIZU - Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergaman Press, 1^a edição, 1968.
- [7] VLADIMIR PANC - Theories of Elastic Plates, Noordhoff. International Publishing, 1^a edição, 1975.
- [8] KARL GIRKMANN - Flachentragwerke, Springer-Verlag, 2^a edição,
- [9] KREIDER, KULLER, OSTBERG and PERKINS - An Introduction to Linear Analysis, Addison-Wesley, 1^a edição, 1966.

Artigos

- [10] ERIC REISSNER - On the Theory of Bending of Elastic Plates, Journal of Mathematics and Physics, Vol. 23-24, 1944 - 1945.
- [11] ERIC REISSNER - The Effect of Transverse Shear Deformation on Bending of Elastic Plates, Journal of Applied Mechanics, Vol. 12, 1945.
- [12] ERIC REISSNER - On Bending of Elastic Plates, Quarterly of Applied Mechanics, Vol. 5, 1947 - 1948.
- [13] SALERNO and GOLDBERG - Effect of Shear Deformation on the Bending of Rectangular Plates Journal of Applied Mechanics, Vol. 27, 1960.
- [14] R. C. KOELLER and F. ESSENBURG - Shear Deformation in Rectangular Plates, Proceedings of the Fourth U.S. National Congress of Applied Mechanics, 1962.
- [15] THOMAS G. CARLEY and HENRY L. LANGHAAR - Transverse Shearing Stress in Rectangular Plates, Journal of the Engineering Mechanics Division, February 1968.
- [16] L. H. DONNELL - A Theory for Thick Plates, Proc. 2nd U.S. Nat. Cong. Appl., ASME, 1955, pp. 369 - 373.
- [17] C. W. LEE and L. H. DONNELL - A Study of Thick Plates under Tangential Loads Applied on the Faces, Proc. 3rd U.S. Nat. Cong. Appl. Mech., ASME, 1958, pp.401-409.

- [18] C. W. LEE - A Three-Dimensional Solution for Simply Supported Rectangular Plates, Proc. 5th U.S. Nat. Cong. Appl. Mechanics, 1966, pp. 291.

Teses

- [19] PABLO GASTON BIGNON - Elementos Finitos Isoparamétricos Mixtos para Flexão de Placas, COPPE, dezembro 1972.
- [20] EDISON CASTRO PRATES LIMA - Elementos Finitos para Flexão de Placas com Campo de Tensões Assumido, COPPE, dezembro 1972.

N O T A Ç Ã O

As principais notações apresentadas no texto são dadas a seguir:

a, b	:	lados da placa
$\bar{b}_x, \bar{b}_y, \bar{b}_z$:	forças de massa
C	:	linha do contorno
C_u	:	parte da linha do contorno onde os deslocamentos são prescritos.
C_σ	:	parte da linha do contorno onde as tensões são prescritas.
$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$:	rigidez a flexão da placa
E	:	módulo de elasticidade
$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$:	módulo de elasticidade transversal
h	:	espessura da placa
ℓ, m, n	:	cosenos diretores da normal \bar{n} superfície
M_x, M_y	:	momentos de flexão
M_{xy}	:	momento de torção
$p(x, y)$:	carregamento externo atuante
p_0	:	carregamento uniformemente distribuído

P_x, P_y, P_z	:	componentes das forças externas por unidade de de área.
Q_x, Q_y	:	esforços cortantes
R_c	:	reação concentrada no centro da placa
R_x	:	reações distribuídas ao longo dos eixos $x = 0$ e $x = a$
R_y	:	reações distribuídas ao longo dos eixos $y = \pm b/2$
S	:	superfície de contorno
S_u	:	parte da superfície e de contorno onde os deslocamentos são prescritos.
S_σ	:	parte da superfície de contorno onde as tensões são prescritas.
$U(\epsilon)$:	energia de deformação por unidade de volume.
u, v, w	:	deslocamento de um ponto genérico da placa, nas direções x, y, z respectivamente.
$w(x, y)$:	flecha (teoria clássica)
$w_R(x, y)$:	flecha (teoria de Reissner)
β_x, β_y	:	rotações
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$:	deformações cisalhantes
δ	:	variação
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$:	deformações normais

- ν : coeficiente de Poisson
- $\Omega(\sigma)$: energia complementar por unidade de volume
- $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$: tensões normais
- $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$: tensões cisalhantes