

O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADO A PROBLEMAS DE
CASCAS E ESTRUTURAS LAMINARES UTILIZANDO-SE ELEMENTOS
TRIANGULARES PLANOS

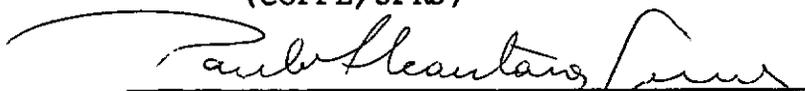
SILVIO ROMERO FREJ DA FONSECA LIMA

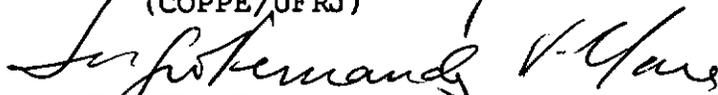
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PRO
GRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO, COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊN
CIA (M.Sc.)

Aprovada por:


Prof. Fernando Venancio Filho
(ITA) - Presidente


Prof. Fernando Luis Lobo Carneiro
(COPPE/UFRJ)


Prof. Paulo Alcântara Gomes
(COPPE/UFRJ)


Prof. Sergio Fernandes Villaça
(COPPE/UFRJ)

RIO DE JANEIRO
ESTADO DA GUANABARA-BRASIL
NOVEMBRO DE 1972

A

meus pais e minha irmã

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Fernando Venancio Filho pela incomparável solicitude e atenciosa orientação dada a este trabalho;

Ao Professor Fernando Luis Lobo B. Carneiro pelos valiosos ensinamentos, incentivo e dedicação;

Ao Professor Jonio Santos Pereira de Lemos, Diretor do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, pelo grande estímulo e amizade;

Ao Corpo Docente da COPPE na pessoa de seu Diretor, Professor Alberto Luis Coimbra, pelo apoio e incentivo aos cursos de Pós-Graduação;

Aos componentes do Núcleo de Computação Eletrônica da Universidade Federal do Rio de Janeiro, pela colaboração recebida;

A Maria de Lourdes de Almeida pela confecção gráfica.

SUMÁRIO

O presente trabalho tem por finalidade a análise de cascas com forma geométrica arbitrária e estruturas laminares pelo método dos Elementos Finitos, utilizando-se elementos triangulares planos com quinze e também com dezoito graus de liberdade.

Inicialmente é feita uma exposição sucinta do método, ressaltando-se seu caráter variacional. Segue-se o estudo do elemento acima mencionado, onde são analisadas cinco opções para formação da matriz de rigidez da estrutura.

Elaborou-se um programa automático para um computador IBM/360 MODELO 40H em Linguagem FORTRAN IV, funcionando com três das cinco opções, sendo possível a resolução de estruturas com no máximo 300 nós e 500 elementos.

ABSTRACT

The present work aims the analysis of general shells and folded plates by the Finite Element Method, with the use of a plane triangular finite element with fifteen and also with eighteen degrees of freedom.

A brief exposition of the Method in which its variational characteristic is pointed, is made at the beginning.

The development of the foregoing element is pursued with five options for the assemblage of the stiffness matrix of the structural system.

An automatic program based upon this finite element is written in FORTRAN IV for an IBM/360 Model 40H computer. With this program it is possible the solution of structural systems with a maximum of 300 points and 500 elements.

INDICE

pg.

CAPITULO I

O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

1.1 - Introdução	1
1.2 - O método dos elementos finitos - idéias básicas	3
1.3 - O método dos elementos finitos visto como uma forma especial do método de Rayleigh-Ritz	8
1.4 - Critérios de convergência	10

CAPITULO IIRESOLUÇÃO DE CASCAS E ESTRUTURAS LAMI-
NARES UTILIZANDO-SE ELEMENTOS TRIANGU-
LARES PLANOS

2.1 - Introdução	15
2.2 - Idealização estrutural	16
2.3 - Sistemas de referência	18
2.4 - Energia de deformação do elemento	23
2.5 - Formação da matriz de rigidez do elemento	27
2.6 - Transformação da matriz de rigidez do elemento	31
2.7 - Formação da matriz de rigidez da estrutura	35
2.8 - Forças nodais equivalentes	53
2.9 - Cálculo das tensões	60
2.10- Apoios elásticos	63
2.11- Convergência	64

CAPITULO III

PROGRAMA AUTOMÁTICO

3.1 - Considerações gerais sobre o programa elaborado	67
3.2 - Subrotinas que compõem o programa	67
3.3 - Convenções adotadas	69
3.4 - Subrotina DADOS (informações sobre a estrutura)	71
3.5 - Subrotina CARGA (cargas que atuam na estrutura)	75
3.6 - Subrotina FORMA (matriz de rigidez do elemento)	79
3.7 - Subrotina FVTIN (vetor das forças nodais)	85
3.8 - Subrotina RIGES (matriz de rigidez da estrutura)	88
3.9 - Subrotina DEBLO (definição das partições)	94
3.10 - Subrotina RESOL (resolução do sistema de equações)	95
3.11 - Subrotina CTENS (cálculo dos momentos e tensões)	100
3.12 - Comentários sobre as demais subrotinas	103
3.13 - Programa principal	104
3.14 - Considerações finais	106

CAPITULO IV

APLICAÇÕES E CONCLUSÕES

4.1 - Aplicações	109
------------------	-----

4.2 - Conclusões 134

APENDIX

A - Notações utilizadas no desenvolvimento teórico 137

B - Matriz de rigidez e vetor das forças nodais equivalentes de um elemento triangular para flexão de placas com nove deslocamentos nodais e também de um elemento triangular para estado plano de tensões com seis deslocamentos nodais 141

C - Manual de entrada do programa 151

D - Listagem do programa e subrotinas em linguagem FORTRAN 159

BIBLIOGRAFIA

199

INTRODUÇÃO

O método dos Elementos Finitos constitui sem dúvida o marco inicial de uma nova era na Análise Estrutural.

Motivados pelo grande interesse despertado por este método associado ao fato de que a resolução de cascas que não apresentam simetria de revolução constitui um notável problema matemático de solução analítica quase sempre impossível de ser obtida, e que para estruturas laminares as teorias existentes se aplicam para formas geométricas relativamente simples, fomos conduzido à realização deste trabalho, que trata da análise dos dois tipos de estruturas acima citados, pelo método dos elementos finitos, utilizando-se elementos triangulares planos.

Dos trabalhos existentes sobre o assunto destacam-se os de ZIENKIEWICZ^{1,3,6}, nos quais utiliza elementos triangulares planos com quinze graus de liberdade, introduzindo na matriz de rigidez do elemento, coeficientes de rigidez correspondentes à rotação segundo a normal a seu plano e os trabalhos de CLOUGH^{4,5}, em que considera também elementos triangulares

planos com quinze graus de liberdade, armazenando a matriz de rigidez em relação a um sistema local para cada nó, associado ao plano tangente à superfície da casca naquele ponto.

Neste trabalho apresentam-se inicialmente as idéias básicas do método dos elementos finitos, ressaltando seu caráter variacional. Segue-se o estudo de elementos triangulares planos, com quinze e dezoito graus de liberdade, obtidos da associação de um elemento triangular para estado plano de tensões e outro para flexão de placas. Analisam-se cinco opções para formação da matriz de rigidez da estrutura. São feitas também considerações sobre apoios elásticos e efeitos de temperatura. Paralelamente ao desenvolvimento teórico, foi elaborado um programa automático para um computador IBM/360 MODELO 40H em linguagem FORTRAN IV, sendo possível analisar estruturas com no máximo 300 nós e 500 elementos, funcionando com três das cinco opções. O programa segue uma técnica diferente daquele existente na COPPE⁷, considerando nós com seis e também com cinco graus de liberdade.

São apresentados os diagramas de blocos das subrotinas e do programa principal, exemplos de aplicações a diferentes tipos de estruturas, comparando-se a solução obtida com a analítica ou a proveniente da análise com outros tipos de elementos finitos. Finalmente apresentam-se as conclusões do estudo realizado.

CAPÍTULO I

O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

1.1 - Introdução

Ao apreciarmos a evolução da Teoria das Estruturas durante os últimos quinze anos, constatamos uma ampliação extraordinária de horizontes. Grande parte desse desenvolvimento deve-se ao emprego de computadores eletrônicos, já que tornaram possíveis a utilização de métodos numéricos que anteriormente não seriam concebíveis.

A solução de um problema elástico requer a integração de um sistema de equações diferenciais, relacionando três espécies de grandezas - tensões, deformações e deslocamentos - definidas sobre um domínio \mathcal{D} e limitado por uma fronteira F . Na maioria dos casos, a solução desse sistema por métodos analíticos é difícil e muitas vezes impossível de ser obtida. Dai surgiu a necessidade da utilização de métodos numéricos os quais podem ser subdivididos em dois tipos:

1. Solução numérica das equações diferenciais (técnica

2.

das diferenças finitas e integração numérica)

2. Métodos matriciais baseados na discretização da estrutura em elementos. (Método das forças e método dos deslocamentos).

Os métodos matriciais, sobretudo o método dos deslocamentos, constituem o mais poderoso instrumento da Análise Estrutural, não só pela grande facilidade da elaboração de programas automáticos para computadores digitais, como também permitem a solução de problemas que só poderiam ser resolvidos com modelos experimentais.

De início estes métodos foram aplicados à teoria das peças lineares, por apresentarem a notável característica de serem naturalmente discretas, até que no período 1954-1955, Argyris em uma série de trabalhos publicados⁸ generalizou estas idéias para o estudo da mecânica do contínuo, surgindo assim o Método dos Elementos Finitos. Em seguida vieram os trabalhos de Clough, Turner, Martin e Topp⁹ publicados em 1956. Porém o rápido desenvolvimento do método tem dificultado a sua apresentação sintética e o que hoje parece constituir uma apresentação perfeitamente geral é amanhã comprometido na sua reivindicação de generalidade por qualquer idéia nova que saia dos quadros estabelecidos.

1.2 - O Método dos Elementos Finitos - Idéias básicas

Inicialmente deve-se obter um modelo para a estrutura real, imaginando-a subdividida em elementos que se supõe ligados entre si por pontos denominados nós. Assim, o domínio \mathcal{D} da estrutura fica dividido em subdomínios; sendo e um elemento genérico, o subdomínio correspondente representaremos por \mathcal{D}^e .

Seja

$$\{u\} = [M] \{C\} \quad (1.1)$$

o vetor que contém os deslocamentos de um ponto $P \in \mathcal{D}^e$. A matriz $[M]$ cujos elementos são funções de coordenadas, define o campo de deslocamentos assumido e $\{C\}$ é um vetor de coeficientes a determinar. Designando por $\{q^e\}$ o vetor dos deslocamentos nodais do elemento e e por $\{q\}$ o vetor que reúne as componentes de deslocamentos de todos os nós da estrutura, as condições reduzidas de compatibilidade são traduzidas por meio de uma matriz $[A^e]$ tal que:

$$\{q^e\} = [A^e] \{q\} \quad (1.2)$$

As matrizes $[A^e]$, fazendo-se e variar de 1 a n (n - número total de elementos da estrutura), definem a topologia do sistema de elementos.

Particularizando (1.1) para os pontos nodais, tem-se:

$$\{q^e\} = [N] \{C\} \quad (1.3)$$

4.

Supondo $[N]$ não singular, de (1.3) resulta:

$$\{C\} = [N]^{-1} \{q^e\} \quad (1.4)$$

Substituindo-se o vetor $\{C\}$ obtido de (1.4) em (1.1), tem-se os deslocamentos no interior do elemento em função dos deslocamentos nodais e das coordenadas.

$$\{u\} = [M] [N]^{-1} \{q^e\} \quad (1.5)$$

Sejam $\{\sigma\}$, $\{\epsilon\}$, $\{X\}$ e $\{p\}$ os vetores que contém as componentes das tensões, deformações, forças de massa e forças atuando na fronteira do elemento, respectivamente.

A energia de deformação do elemento¹⁰ é dada por:

$$U^e = \int_{V^e} \left(\int_0^\epsilon \{\sigma\}^t \{d\epsilon\} \right) dV \quad (1.6)$$

Porém:

$$\{\sigma\} = [H] \{\epsilon\} \quad (1.7)$$

(relação tensão-deformação, sendo $[H]$ uma matriz simétrica e definida positiva).

Então:

$$U^e = \frac{1}{2} \int_{V^e} \{\epsilon\}^t [H] \{\epsilon\} dV \quad (1.8)$$

Utilizando as relações obtidas e sendo $[D]$ o operador diferencial que relaciona as deformações $\{\varepsilon\}$ com os deslocamentos $\{u\}$

$$\{\varepsilon\} = [D]\{u\} \quad (1.9)$$

a energia de deformação do elemento pode ser expressa por:

$$U^e = \frac{1}{2} \{q^e\}^t [K^e] \{q^e\} \quad (1.10)$$

onde:

$$[K^e] = ([N]^{-1})^t \left(\int_{V^e} ([D] [M])^t [H] ([D] [M]) dV \right) [N]^{-1} \quad (1.11)$$

A matriz $[K^e]$ é denominada matriz de rigidez do elemento.

A energia potencial total do elemento será dada por:

$$\pi^e = U^e - \int_{V^e} \{X\}^t \{u\} dV - \int_{\bar{F}^e} \{p\}^t \{u\} dF \quad (1.12)$$

sendo \bar{F}^e a parte da fronteira onde não se fixam deslocamentos.

Novamente utilizando as relações obtidas, (1.12) pode ser expressa como:

6.

$$\pi^e = \frac{1}{2} \{q^e\}^t [K^e] \{q^e\} - \{Q^e\}^t \{q^e\} \quad (1.13)$$

onde:

$$\{Q^e\} = ([N]^{-1})^t \left(\int_{V^e} [M]^t \{x\} dV + \int_{F^e} [M]^t \{p\} dF \right) \quad (1.14)$$

O vetor $\{Q^e\}$ é denominado de vetor das forças nodais equivalentes do elemento.

Seja π a energia potencial total da estrutura; então,

$$\pi = \sum_{e=1}^n \pi^e = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^n \{q^e\}^t [K^e] \{q^e\} - \sum_{e=1}^n \{Q^e\}^t \{q^e\} \quad (1.15)$$

Introduzindo as condições reduzidas de compatibilidade vem:

$$\begin{aligned} \pi = \frac{1}{2} \{q\}^t & \left(\sum_{e=1}^n [A^e]^t [K^e] [A^e] \right) \{q\} - \\ & - \left(\sum_{e=1}^n \{Q^e\}^t [A^e] \right) \{q\} \end{aligned} \quad (1.16)$$

A expressão (1.16) representa a energia potencial total da estrutura, "para o campo de deslocamentos assumido", em função dos deslocamentos nodais.

O princípio da mínima energia potencial afirma que o verdadeiro estado de deformação de uma estrutura satisfazendo as condições de equilíbrio e compatibilidade é aquele para o

qual a energia potencial total da estrutura é mínima.

Em (1.16) as variáveis são os deslocamentos nodais e a condição necessária para um extremo é que:

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, m) \quad (1.17)$$

onde q_i ($i = 1, \dots, m$) são os elementos do vetor $\{q\}$ e $m = n_p \cdot n_{gl}$, sendo n_p o número total de nós da estrutura e n_{gl} o número de graus de liberdade por nó (suposto constante). Dai resulta um sistema de m equações lineares a m incógnitas que pode ser escrito da seguinte forma:

$$[K] \{q\} = \{Q\} \quad (1.18)$$

onde:

$$[K] = \sum_{e=1}^n [A^e]^t [K^e] [A^e] \quad (1.19)$$

e

$$\{Q\} = \sum_{e=1}^n [A^e]^t \{Q^e\} \quad (1.20)$$

A matriz $[K]$ é chamada matriz de rigidez da estrutura e o vetor $\{Q\}$ é denominado de vetor das forças nodais equivalentes da estrutura. Na prática as montagens das matrizes $[K]$ e $\{Q\}$ são feitas por soma das contribuições dos diversos elementos, não se utilizando as matrizes $[A^e]$ ($e = 1, \dots, n$).

8.

A equação (1.18) permite obter os deslocamentos nodais se for fixado um número suficiente de deslocamentos a fim de impedirem movimentos de corpo rígido.

1.3 - O Método dos Elementos Finitos visto como uma forma especial do Método de Rayleigh-Ritz

Suponha que se deseja o mínimo de um funcional $J[y]$ definido em um espaço M de funções admissíveis, que por simplicidade considera-se um espaço linear, no qual se define uma norma^{11,12},

Seja:

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots \quad (1.21)$$

uma sucessão de funções linearmente independentes de M e seja M_n o subespaço¹³ de M gerado pelas n primeiras funções de (1.21). Assim se $y_n \in M_n$, então existem n números reais $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tais que

$$y_n = \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \dots + \alpha_n \varphi_n \quad (1.22)$$

Se em vez de procurarmos um mínimo para $J[y]$ no espaço M , limitarmos ao subespaço M_n , o funcional $J[y]$ será então transformado numa função $J[\alpha_1 \varphi_1 + \dots + \alpha_n \varphi_n]$ de n variáveis $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Seja y^* o elemento de M_n que minimiza $J[y]$ e μ_n o valor do mínimo. É fácil verificar que $\mu_n \geq \mu_{n+1}$, pois qualquer combinação linear de $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ é também uma combinação linear de $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \varphi_{n+1}$.

Se $\mu = \inf_y J[y]$, a convergência da sucessão

$$\mu_1, \mu_2, \dots \tag{1.23}$$

para o valor μ é garantida pelo seguinte teorema, o qual será apenas enunciado:

Teorema 1

Se o funcional $J[y]$ é contínuo e se a sequência $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ é completa, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \mu$$

onde

$$\mu = \inf_y J[y]$$

Para demonstração ver por exemplo referência 11. A técnica acima descrita é conhecida como o Método de Rayleigh-Ritz.

O Método dos Elementos Finitos pode ser visto como uma forma especial do Método de Rayleigh-Ritz no qual "funções lo-

10.

cais" são usadas para funções admissíveis do problema¹⁴. Estas funções são tais que se estendem sobre a região de todos os elementos ligados em um nó particular, tendo valor unitário no nó e zero (e se necessário derivadas nulas) nos outros nós e no contorno da região. Se as funções satisfazem as condições exigidas pelo Teorema 1, então a solução obtida com o Método dos Elementos Finitos converge para a solução exata com o refinamento da malha.

É importante observar que as condições do Teorema 1 são apenas de suficiência para a convergência.

Em seguida serão apresentados os requisitos a que devem satisfazer o campo de deslocamentos assumido, para que haja convergência.

1.4 - CrITÉRIOS de Convergência

Nos métodos aproximados, a capacidade de convergência e a rapidez de convergência para a solução exata são de grande importância e talvez estes métodos terão de ser julgados tendo em vista esses dois pontos.

Os conceitos de erro e de convergência costumam ser quantificados pela noção de distância entre dois campos elásticos, que é definida como a energia de deformação correspondente

a sua diferença.

Desta forma o erro de uma solução mede-se pela distância à solução exata e a convergência para a solução exata caracteriza-se pela convergência para zero da sucessão das distâncias¹⁵.

Para que haja convergência para a solução exata é condição suficiente mas não necessária que o campo de deslocamentos assumido satisfaça as condições de completitude e conformidade. As condições de conformidade referem-se a compatibilidade de deslocamentos ao longo de um lado comum a dois elementos.

As condições de completitude são traduzidas pelos dois critérios seguintes¹.

1. O campo de deslocamentos assumido deve ser tal que não haja deformação do elemento quando os deslocamentos nodais são causados por um movimento de corpo rígido.
2. O campo de deslocamentos assumido deve ser tal que se os deslocamentos nodais são compatíveis com uma condição de deformação unitária constante, esta deformação unitária constante seja realmente obtida a partir do campo de deslocamentos.

No caso de flexão de placas em que a compatibilidade completa não é conseguida, E.R. de Arantes e Oliveira estabeleceu uma condição que substitui a de conformidade¹⁶.

Se as condições de completitude e conformidade são satisfeitas, a energia potencial total tende para o valor exato por valores superiores (fig. 1.1).

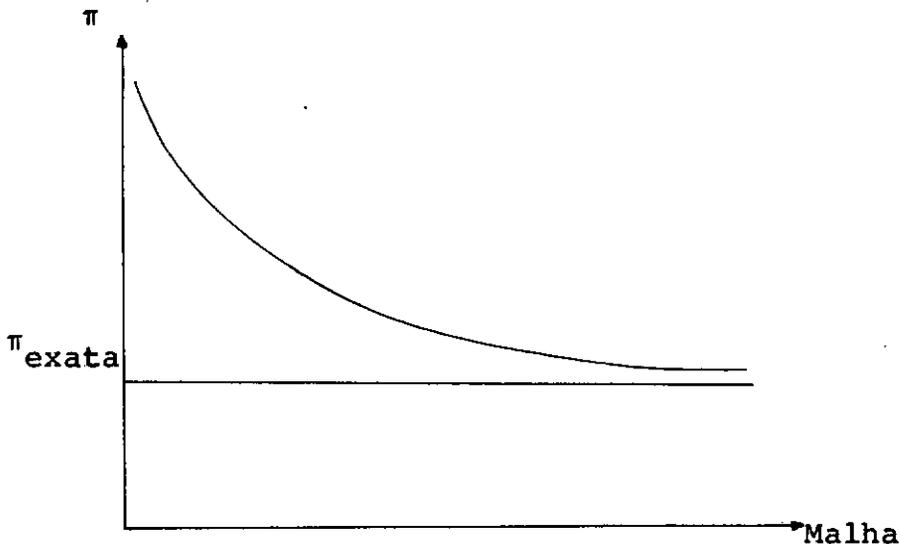


Fig. 1.1

No caso de convergência de elementos não conformes esta é não monótona.

Para finalizar esta introdução desejaríamos ressaltar que atualmente um dos problemas que começa ser abordado é o da otimização da malha. Não se trata mais de saber se há ou não

convergência para a solução exata e sim acelerar esta convergência e estimar sua velocidade¹⁷. Deverão ser estabelecidas regras qualitativas sobre a topologia da rede e em seguida a determinação ótima dos nós, sendo já iniciado estudos nesse sentido pelo Departamento de Matemática Aplicada do Laboratório Nacional de Engenharia Civil de Lisboa¹⁸.

CAPITULO II

RESOLUÇÃO DE CASCAS E ESTRUTURAS LAMINARES

UTILIZANDO-SE ELEMENTOS TRIANGULARES

PLANOS

2.1 - Introdução

Desde o início de seu desenvolvimento, o Método dos Elementos Finitos apresentou-se ideal para análise de cascas, devido a sua grande flexibilidade no tratamento de estruturas de forma geométrica irregular, complexidade de carregamento, materiais com propriedades diferentes e comportamento não linear. São bem conhecidas as dificuldades encontradas na resolução do sistema de equações diferenciais para a solução de cascas; são poucos os problemas que podem ser resolvidos por métodos analíticos.

Esta nova formulação permite também tratar a estrutura como um todo, o que vem dar ao modelo idealizado, um comportamento mais aproximado daquele apresentado pela estrutura real, como por exemplo, o estudo de uma barragem solidária com sua fundação.

16.

Uma grande variedade de elementos para cascas têm sido propostos. Neste trabalho serão analisados elementos triangulares planos com quinze e também com dezoito graus de liberdade.

Vale salientar que estes elementos podem ser usados para a resolução de estruturas laminares ("Folded Plates") e de placas submetidas a um carregamento transversal e outro em seu próprio plano.

2.2. - Idealização estrutural

No caso de cascas, a estrutura será aproximada por uma superfície poliédrica, constituída por elementos triangulares planos, cujos vértices se situam na sua superfície média.

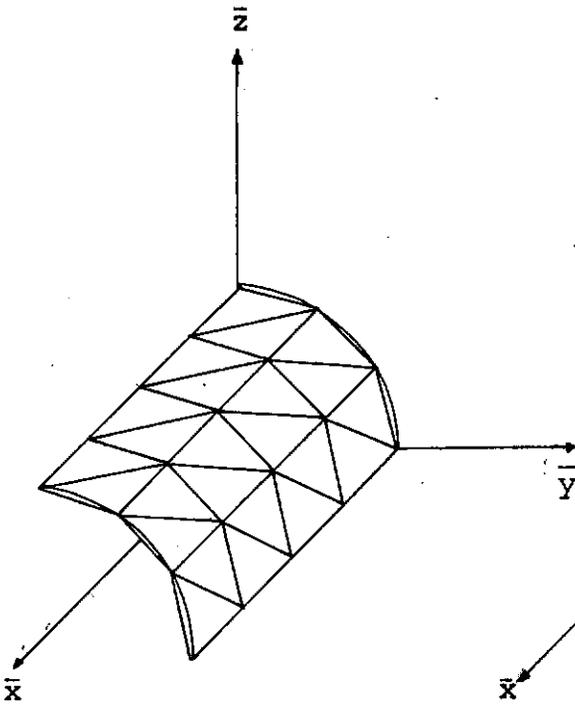


Fig. 2.1

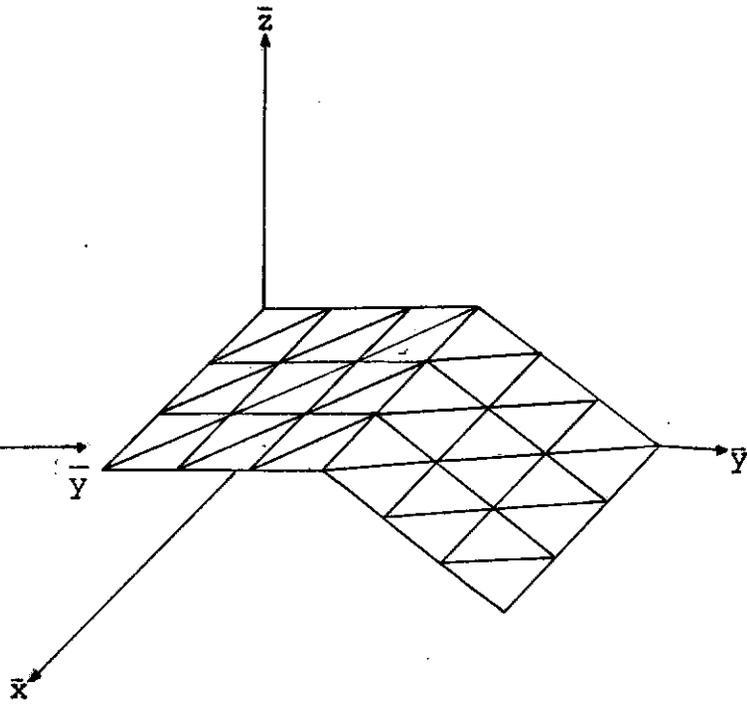


Fig. 2.2

Um nó será dito planar se todos os elementos que concorrem naquele nó estão situados no mesmo plano; caso contrário o nó será dito não planar.

18.

2.3 - Sistemas de referência

O referencial $\bar{x} \bar{O} \bar{y} \bar{z}$ (figs. 2.1 e 2.2) em relação ao qual serão fornecidas as coordenadas dos nós da estrutura será chamado de sistema global de referência.

Para cada elemento define-se um sistema de coordenadas, tendo dois dos eixos situados em seu próprio plano, o qual será denominado de sistema local do elemento.

Considere-se um elemento qualquer da superfície indicada na figura 2.1.

Sejam

$$\{\bar{X}_i\} = \left\{ \begin{array}{c} \bar{x}_i \\ \bar{y}_i \\ \bar{z}_i \end{array} \right\} \quad i = 1, 2, 3$$

os vetores das coordenadas dos nós do elemento, em relação ao sistema global.

O sistema local do elemento será definido pelas seguintes condições (fig. 2.3):

1. A origem do sistema coincidindo com o nó 1 do elemento.

2. O eixo Ox paralelo ao lado 2-3 e sentido de 2 para 3
3. O eixo Oz normal ao plano do elemento, tendo o mesmo sentido do vetor rotação correspondente à seqüência 1, 2, 3.
4. O triedro $xOyz$ seja direto.

Estas quatro condições definem univocamente o sistema de referência.

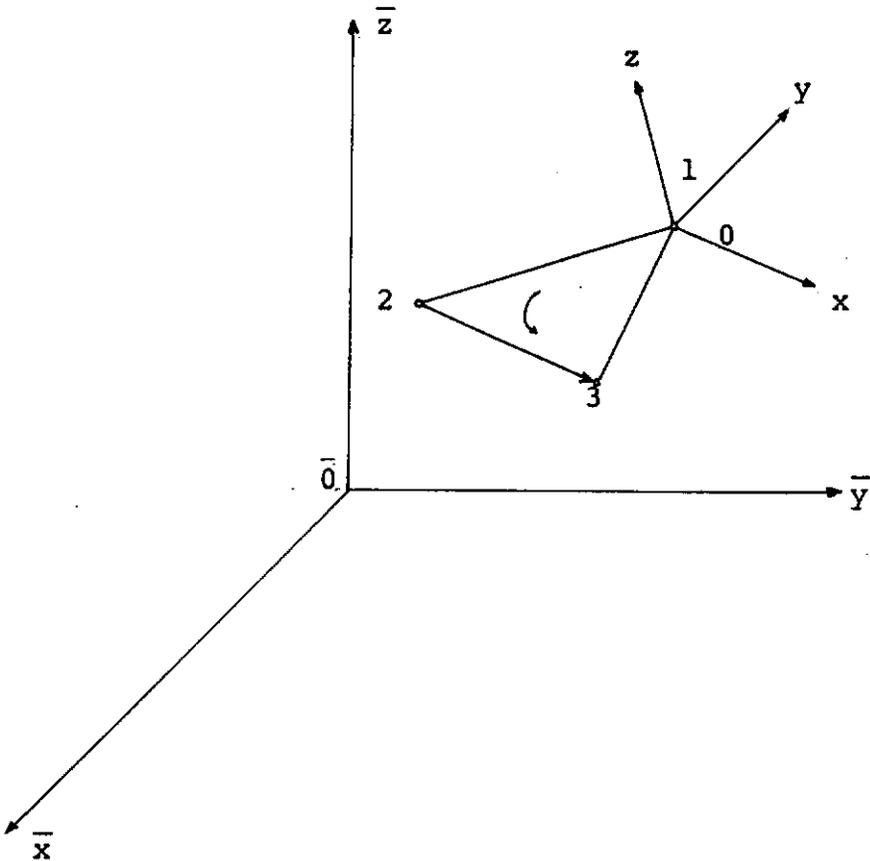


Fig. 2.3

20.

Sejam

$$\{X_i\} = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad i = 1, 2, 3$$

os vetores das coordenadas dos nós do elemento, relativamente ao sistema local; então

$$\{\bar{X}_i\} = \{\bar{X}_1\} + [L] \{X_i\} \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

onde $\{\bar{X}_1\}$ contém as coordenadas do nó 1 em relação ao sistema global e $[L]_{3 \times 3}$ é uma matriz de transformação dada por:

$$[L] = \begin{bmatrix} \cos(\bar{x}, x) & \cos(\bar{x}, y) & \cos(\bar{x}, z) \\ \cos(\bar{y}, x) & \cos(\bar{y}, y) & \cos(\bar{y}, z) \\ \cos(\bar{z}, x) & \cos(\bar{z}, y) & \cos(\bar{z}, z) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

onde (\bar{x}, x) representa o ângulo entre os eixos Ox e $\bar{O}\bar{x}$ etc.

A matriz $[L]$ pode ser escrita sob a forma:

$$[L] = [\{\ell_x\} \{\ell_y\} \{\ell_z\}] \quad (2.3)$$

sendo $\{\ell_x\}$, $\{\ell_y\}$ e $\{\ell_z\}$ os vetores que contêm os cossenos diretores dos eixos Ox , Oy e Oz respectivamente.

Introduzindo-se a seguinte notação:

$$\{\bar{X}_{ij}\} = \{\bar{X}_i\} - \{\bar{X}_j\} \quad \begin{array}{l} i = 1,2,3 \\ j = 1,2,3 \end{array}$$

Então

$$\{\ell_x\} = \frac{1}{\delta_{23}} \{\bar{X}_{32}\} \quad (2.4)$$

onde δ_{23} representa o comprimento do lado 2-3:

$$\delta_{23} = \sqrt{\{\bar{X}_{32}\}^t \{\bar{X}_{32}\}} \quad (2.5)$$

Da definição do eixo Oz resulta que:

$$\{\ell_z\} = \frac{1}{2\Delta} \{\bar{X}_{32}\} \times \{\bar{X}_{12}\} \quad (2.6)$$

onde o símbolo \times indica o produto vetorial dos vetores cujas componentes são os elementos de $\{\bar{X}_{32}\}$ e $\{\bar{X}_{12}\}$, e Δ representa a área do triângulo 1 2 3.

$$2\Delta = \text{módulo} (\{\bar{X}_{32}\} \times \{\bar{X}_{12}\}) \quad (2.7)$$

Desenvolvendo (2.6) vem:

$$\{l_z\} = \frac{1}{2\Delta} \begin{Bmatrix} \bar{y}_{32} \cdot \bar{z}_{12} - \bar{z}_{32} \cdot \bar{y}_{12} \\ \bar{z}_{32} \cdot \bar{x}_{12} - \bar{x}_{32} \cdot \bar{z}_{12} \\ \bar{x}_{32} \cdot \bar{y}_{12} - \bar{y}_{32} \cdot \bar{x}_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

Finalmente tendo em vista o fato de que o triedro xOyz deve ser direto, tem-se

$$\{l_y\} = \{l_z\} \times \{l_x\} \quad (2.9)$$

O vetor obtido já possui módulo unitário uma vez que $\{l_x\}$ e $\{l_z\}$ são ortonormais.

Como a matriz $[L]$ é ortogonal, então admite sempre inversa sendo:

$$[L]^{-1} = [L]^t \quad (2.10)$$

Formada a matriz $[L]$, de (2.1) e (2.10) resulta que as coordenadas dos nós em relação ao sistema local do elemento serão dadas por:

$$\{x_i\} = [L]^t (\{\bar{x}_i\} - \{\bar{x}_1\}) \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.11)$$

2.4 - Energia de Deformação do Elemento

Considere-se um elemento triangular plano sujeito simultaneamente a um estado de membrana e de flexão. Seja o elemento indicado na fig. 2.4 onde está representado também o sistema local do elemento. Neste referencial tem-se seguintes deslocamentos para um nó genérico i ($i = 1, 2, 3$)

$$\{q_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

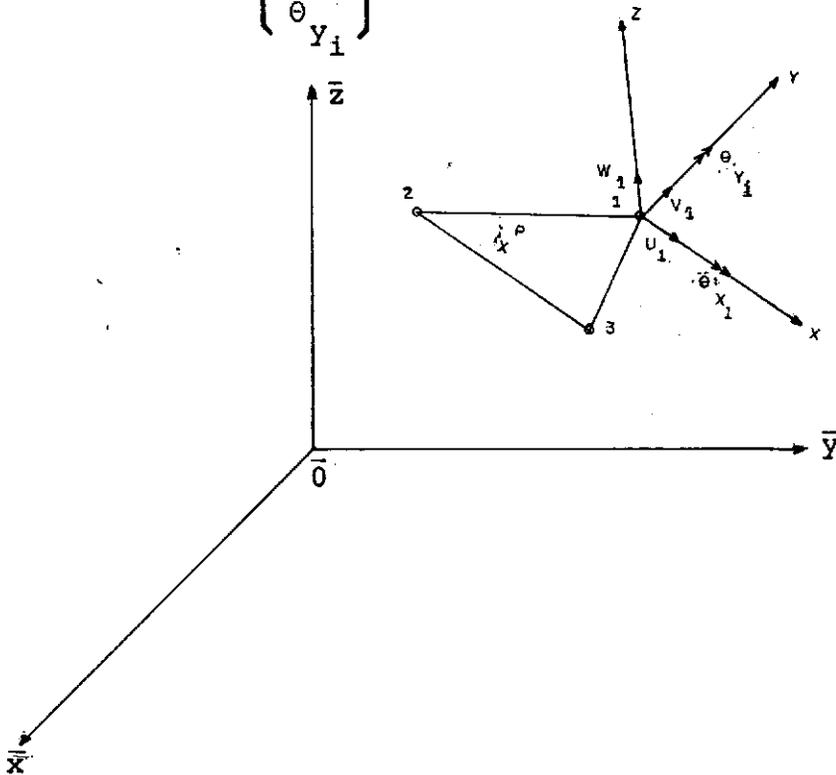


Fig. 2.4

Inicialmente consideremos o elemento sujeito a um estado de membrana. Sejam $\{\epsilon^m\}$ e $\{\sigma^m\}$ as deformações e tensões respectivamente, em um ponto P de coordenadas (x, y) :

$$\{\sigma^m\} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\} \quad (2.13)$$

$$\{\epsilon^m\} = \{\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \gamma_{xy}\} \quad (2.14)$$

A energia de deformação correspondente será:

$$U^m = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma^m\}^t \{\epsilon^m\} dV \quad (2.15)$$

Admitindo a distribuição de tensões constante ao longo da espessura h do elemento chega-se a seguinte expressão para U^m (utilizando a Lei de Hooke e as relações entre deformações e deslocamentos):

$$U^m = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \iint \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} (1-\nu) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy \quad (2.16)$$

onde a integral se estende sobre a superfície do elemento e E e ν são o módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson respectivamente.

Considerando agora o mesmo elemento submetido apenas a flexão, neste caso as curvaturas serão tomadas como "deformações unitárias" e como "tensões" os momentos por unidade de comprimento; então:

$$\{\sigma^f\} = \{M_x \quad M_y \quad M_{xy}\} \quad (2.17)$$

$$\{\epsilon^f\} = \{c_{xx} \quad c_{yy} \quad c_{xy}\} = - \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\} \quad (2.18)$$

A energia de deformação a flexão será:

$$U^f = \frac{1}{2} \int_A \{\sigma^f\}^t \{\epsilon^f\} dA \quad (2.19)$$

onde a integral se estende sobre a área do elemento. Substituindo em (2.19) $\{\sigma^f\}$ e $\{\epsilon^f\}$ tem-se¹⁹:

$$U^f = \frac{1}{2} D \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (2.20)$$

sendo

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$$

No caso do elemento estar submetido simultaneamente a estado de membrana e flexão, deve-se considerar dois casos pa-

ra o cálculo da energia de deformação $U^{19,20}$:

Caso 1: não considerar a deformação do plano médio do elemento, devido aos esforços de flexão. Neste caso a energia de deformação U será:

$$U = U^m + U^f \quad (2.21)$$

com U^m e U^f dados em (2.16) e (2.20) respectivamente.

Caso 2: Considerar a deformação do plano médio do elemento, devido aos esforços de flexão. Então a energia de deformação U será dada por²⁰:

$$U = U^{*m} + U^f \quad (2.22)$$

onde

$$U^{*m} = \iint (N_{x,x} \epsilon'_x + N_y \epsilon'_y + N_{xy} \gamma'_{xy}) dx dy + U^m \quad (2.23)$$

com U^m definido como em 2.16, e sendo:

$$\begin{cases} \epsilon'_x = \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \epsilon'_y = \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \gamma'_{xy} = \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad (2.24)$$

$$\begin{cases} N_x = \sigma_x h \\ N_y = \sigma_y h \\ N_{xy} = \tau_{xy} h \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{onde } \sigma_x, \sigma_y \text{ e } \tau_{xy} \text{ são} \\ \text{as tensões definidas em} \end{array} \quad (2.25)$$

$$(2.13)$$

u' , v' e w - componentes do pequeno deslocamento que um ponto da superfície média da placa experimenta durante a flexão. Então:

$$\begin{aligned}
 U^{*m} = & \iint \left[N_x \frac{\partial u'}{\partial x} + N_y \frac{\partial v'}{\partial y} + N_{xy} \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) \right] dx dy + \\
 & + \frac{1}{2} \iint \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy + U^m
 \end{aligned}
 \tag{2.26}$$

onde a integral se estende sobre a área do elemento. Neste caso tem-se um problema não linear e nas considerações que se seguem será analisado apenas o caso 1.

2.5 - Formação da matriz de rigidez do elemento

O campo de deslocamento assumido será definido por²:

$$u = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + c_3 \xi_3$$

$$v = c_4 \xi_1 + c_5 \xi_2 + c_6 \xi_3$$

$$w = c_7 \xi_1 + c_8 \xi_2 + c_9 \xi_3 + c_{10} \xi_1 \xi_2 + c_{11} \xi_2 \xi_3 +$$

$$+ c_{12} \xi_1 \xi_3 + c_{13} (\xi_1^2 \xi_2 - \xi_1 \xi_2^2) + c_{14} (\xi_2 \xi_3^2 -$$

$$- \xi_3 \xi_2^2) + c_{15} (\xi_3 \xi_1^2 - \xi_1 \xi_3^2)$$

onde (ξ_1, ξ_2, ξ_3) são as coordenadas naturais de um ponto genérico P; representando por Δ_1, Δ_2 e Δ_3 as áreas dos triângulos indicados na fig. 2.5 e por Δ a área total do triângulo, as coordenadas naturais do ponto P serão definidas por:

$$\xi_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad \xi_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad \xi_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} \quad (2.28)$$

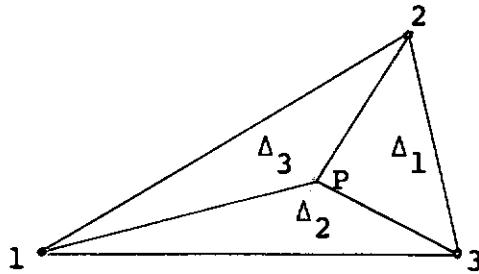


Fig. 2.5

Seguindo o processo descrito no capítulo anterior, através de (1.11) obtêm-se a matriz de rigidez do elemento.

Entretanto é mais simples se obter independentemente as matrizes de rigidez $[k^m]$ e $[k^f]$ para os estados de membrana e flexão respectivamente e depois formar a matriz de rigidez do elemento para os dois estados atuando simultaneamente.

Obtidas $[k^m]$ e $[k^f]$ pode-se escrever:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} F_x \\ F_y \end{array} \right\}_1 \\ \left\{ \begin{array}{l} F_x \\ F_y \end{array} \right\}_2 \\ \left\{ \begin{array}{l} F_x \\ F_y \end{array} \right\}_3 \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} [k_{11}^m] & [k_{12}^m] & [k_{13}^m] \\ [k_{21}^m] & [k_{22}^m] & [k_{23}^m] \\ [k_{31}^m] & [k_{32}^m] & [k_{33}^m] \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} u \\ v \end{array} \right\}_1 \\ \left\{ \begin{array}{l} u \\ v \end{array} \right\}_2 \\ \left\{ \begin{array}{l} u \\ v \end{array} \right\}_3 \end{array} \right\} \quad (2.29)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} F_z \\ M_x \\ M_y \end{array} \right\}_1 \\ \left\{ \begin{array}{l} F_z \\ M_x \\ F_y \end{array} \right\}_2 \\ \left\{ \begin{array}{l} F_z \\ M_x \\ M_y \end{array} \right\}_3 \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} [k_{11}^f] & [k_{12}^f] & [k_{13}^f] \\ [k_{21}^f] & [k_{22}^f] & [k_{23}^f] \\ [k_{31}^f] & [k_{32}^f] & [k_{33}^f] \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{array} \right\}_1 \\ \left\{ \begin{array}{l} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{array} \right\}_2 \\ \left\{ \begin{array}{l} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{array} \right\}_3 \end{array} \right\} \quad (2.30)$$

sendo $\left\{ \begin{array}{l} F_x \\ F_y \end{array} \right\}_i$ e $\left\{ \begin{array}{l} F_z \\ M_x \\ M_y \end{array} \right\}_i$ ($i=1,2,3$) as forças nodais e-

quivalentes do elemento.

A matriz de rigidez $[k^e]$ do elemento, correspondente aos deslocamentos nodais dados em (2.12) será formada segundo o esquema indicado na figura 2.6.

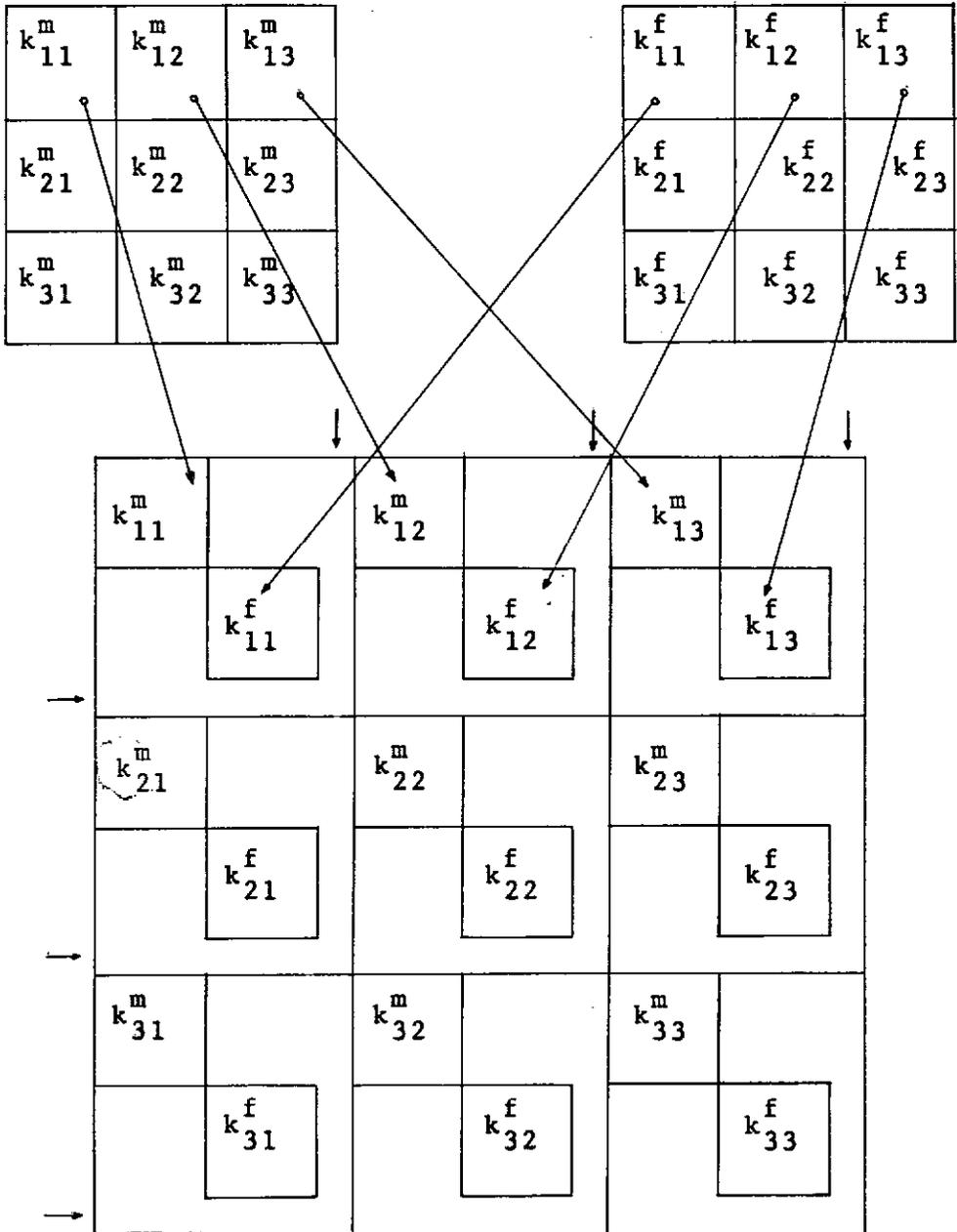


Fig. 2.6

2.6 - Transformação da matriz de rigidez do elemento

Sejam $\{q_i\}$ ($i=1,2,3$) os vetores dos deslocamentos nodais do elemento. Sendo $[k^e]$ a matriz de rigidez e $\{Q_i\}$... ($i=1,2,3$) os vetores das forças nodais equivalentes, então:

$$\begin{Bmatrix} \{Q_1\} \\ \{Q_2\} \\ \{Q_3\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [k_{11}] & [k_{12}] & [k_{13}] \\ [k_{21}] & [k_{22}] & [k_{23}] \\ [k_{31}] & [k_{32}] & [k_{33}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_1\} \\ \{q_2\} \\ \{q_3\} \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

Muitas vezes é conveniente exprimir os deslocamentos de um dado nó, por exemplo, nó 2, em relação a outro sistema de referência.

Seja $\{\bar{q}_2\}$ o vetor que contém os novos deslocamentos e $[L_2]$ a matriz que os relaciona com $\{q_2\}$; isto é:

$$\{\bar{q}_2\} = [L_2] \{q_2\} \quad (2.32)$$

Sendo $[L_2]$ uma matriz rotação, então $[L_2]^{-1} = [L_2]^t$ e de (2.32) resulta que:

$$\{q_2\} = [L_2]^t \{\bar{q}_2\} \quad (2.33)$$

tendo em vista (2.33), a equação matricial (2.31) permite escrever:

$$\begin{aligned}
 \{Q_1\} &= [k_{11}] \{q_1\} + [k_{12}] [L_2]^t \{\bar{q}_2\} + [k_{13}] \{q_3\} \\
 \{Q_2\} &= [k_{21}] \{q_1\} + [k_{22}] [L_2]^t \{\bar{q}_2\} + [k_{23}] \{q_3\} \\
 \{Q_3\} &= [k_{31}] \{q_1\} + [k_{32}] [L_2]^t \{\bar{q}_2\} + [k_{33}] \{q_3\}
 \end{aligned}
 \tag{2.34}$$

Prê-multiplicando ambos os membros da segunda equação de (2.34) por $[L_2]$ ($\det [L_2] \neq 0$), vem:

$$\begin{aligned}
 [L_2] \{Q_2\} &= [L_2] [k_{21}] \{q_1\} + [L_2] [k_{22}] [L_2]^t \{\bar{q}_2\} + \\
 &+ [L_2] [k_{23}] \{q_3\}
 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
 \{\bar{Q}_2\} &= [L_2] [k_{21}] \{q_1\} + [L_2] [k_{22}] [L_2]^t \{\bar{q}_2\} + \\
 &+ [L_2] [k_{23}] \{q_3\}
 \end{aligned}
 \tag{2.35}$$

onde

$$\{\bar{Q}_2\} = [L_2] \{Q_2\}
 \tag{2.36}$$

$\{\bar{Q}_2\}$ representa o vetor das forças nodais equivalentes do nó 2, em relação ao novo referencial. Substituindo-se a segunda equação de (2.34) pela equação (2.35) que lhe é equivalente resulta:

$$\begin{Bmatrix} \{Q_1\} \\ \{\bar{Q}_2\} \\ \{Q_3\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [k_{11}] & [k_{12}] [L_2]^t & [k_{13}] \\ [L_2] [k_{21}] & [L_2] [k_{22}] [L_2]^t & [L_2] [k_{23}] \\ [k_{31}] & [k_{32}] [L_2]^t & [k_{33}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_1\} \\ \{\bar{q}_2\} \\ \{q_3\} \end{Bmatrix}$$

(2.37)

Obtêm-se assim a matriz de rigidez e o vetor das forças nodais equivalentes do elemento, relativamente aos deslocamentos $\{q_1\}$, $\{\bar{q}_2\}$ e $\{q_3\}$.

Supondo agora

$$\begin{aligned} \{\bar{q}_1\} &= [L_1] \{q_1\} \\ \{\bar{q}_2\} &= [L_2] \{q_2\} \\ \{\bar{q}_3\} &= [L_3] \{q_3\} \end{aligned} \tag{2.38}$$

pode-se generalizar (2.37).

Assim a matriz de rigidez $[\bar{k}^e]$ relativa aos deslocamentos $\{\bar{q}_i\}$ ($i=1,2,3$) será:

$$[\bar{k}^e] = \begin{bmatrix} [L_1] [k_{11}] [L_1]^t & [L_1] [k_{12}] [L_2]^t & [L_1] [k_{13}] [L_3]^t \\ [L_2] [k_{21}] [L_1]^t & [L_2] [k_{22}] [L_2]^t & [L_2] [k_{23}] [L_3]^t \\ [L_3] [k_{31}] [L_1]^t & [L_3] [k_{32}] [L_2]^t & [L_3] [k_{33}] [L_3]^t \end{bmatrix}$$

(2.39)

ou

$$[\bar{K}^e] = [MT] [K^e] [MT]^t \quad (2.40)$$

sendo:

$$[K^e] = \begin{bmatrix} [k_{11}] & [k_{12}] & [k_{13}] \\ [k_{21}] & [k_{22}] & [k_{23}] \\ [k_{31}] & [k_{32}] & [k_{33}] \end{bmatrix} \quad e$$

$$[MT] = \begin{bmatrix} [L_1] & [0] & [0] \\ [0] & [L_2] & [0] \\ [0] & [0] & [L_3] \end{bmatrix}$$

O vetor das forças nodais equivalentes do elemento em relação ao novo referencial pode ser obtido facilmente:

$$\{\bar{Q}^e\} = [MT] \{Q^e\}$$

onde:

$$\{\bar{Q}^e\} = \begin{Bmatrix} \{\bar{Q}_1\} \\ \{\bar{Q}_2\} \\ \{\bar{Q}_3\} \end{Bmatrix} \quad e \quad \{Q^e\} = \begin{Bmatrix} \{Q_1\} \\ \{Q_2\} \\ \{Q_3\} \end{Bmatrix} \quad (2.41)$$

2.7 - Formação da matriz de rigidez da estrutura

Obtida a matriz de rigidez relativamente ao sistema local do elemento, a próxima etapa será formar a matriz de rigidez da estrutura.

Exprimindo-se os deslocamentos nodais em relação ao sistema global, um nó genérico i terá seis deslocamentos, sendo três translações (\bar{u} , \bar{v} , \bar{w}) e três rotações ($\bar{\theta}_x$, $\bar{\theta}_y$, $\bar{\theta}_z$). Como no sistema local do elemento tem-se apenas cinco deslocamentos por nó, considera-se o sexto deslocamento θ_z , introduzindo-se na matriz de rigidez do elemento, linhas e colunas de zeros, nas posições indicadas pelas setas na fig. 2.6. No vetor das forças nodais equivalentes deverão também ser acrescentados elementos nulos correspondentes ao "sexto grau de liberdade". Através de (2.40) se obtém a matriz de rigidez do elemento em relação ao sistema global de referência.

Entretanto, o procedimento acima descrito conduz a singularidade na matriz de rigidez da estrutura no caso de existirem nós planares^{1,3,6}, isto devido ao fato de se atribuir rigidez nula na direção normal θ_z . Se as equações de equilíbrio de um nó planar são obtidas em relação a um sistema local de referência, tem-se seis equações das quais a última (correspondente a rotação segundo a normal ao plano do elemento) é da forma $0=0$.

Cinco alternativas serão apresentadas para contornar o problema.

Primeira Opção

Exprimir os deslocamentos dos nós planares em relação a um sistema de coordenadas local e eliminar a equação $0=0$. No caso dos nós não planares, os deslocamentos serão expressos em relação ao sistema global de referência.

Para cada elemento calcula-se a matriz de rigidez em relação ao sistema local. Sendo i um nó não planar e representando por $\{q_i\}$ os deslocamentos desse nó em relação ao sistema local do elemento e por $\{\bar{q}_i\}$ os deslocamentos em relação ao sistema global, a matriz de transformação $[L_i]$ do sistema local para o sistema global será dada por:

$$[L_i] = \begin{bmatrix} [L] & [0] \\ [0] & [L] \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

com $[L]$ definida em 2.2. Então:

$$\{\bar{q}_i\} = [L_i] \{q_i\} \quad (2.43)$$

sendo:

$$\{q_i\} = \left\{ \begin{array}{c} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \\ \theta_{z_i} \end{array} \right\} \quad (2.44)$$

No caso do nó i ser planar, os deslocamentos desse nó serão expressos em relação a um sistema "local".

A escolha desse sistema é arbitrária, devendo apenas satisfazer a condição de que dois de seus eixos estejam no plano dos elementos. No presente trabalho ele será definido pelas seguintes condições:

1. A origem coincidindo com o nó i .
2. Seus eixos 0^*x^* , 0^*y^* e 0^*z^* deverão ser paralelos respectivamente aos eixos $\bar{0}\bar{x}$, $\bar{0}\bar{y}$ e $\bar{0}\bar{z}$ do sistema local do elemento de menor número que concorre no nó considerado (fig. 2.7).

O sistema acima definido será denominado de "sistema local planar".

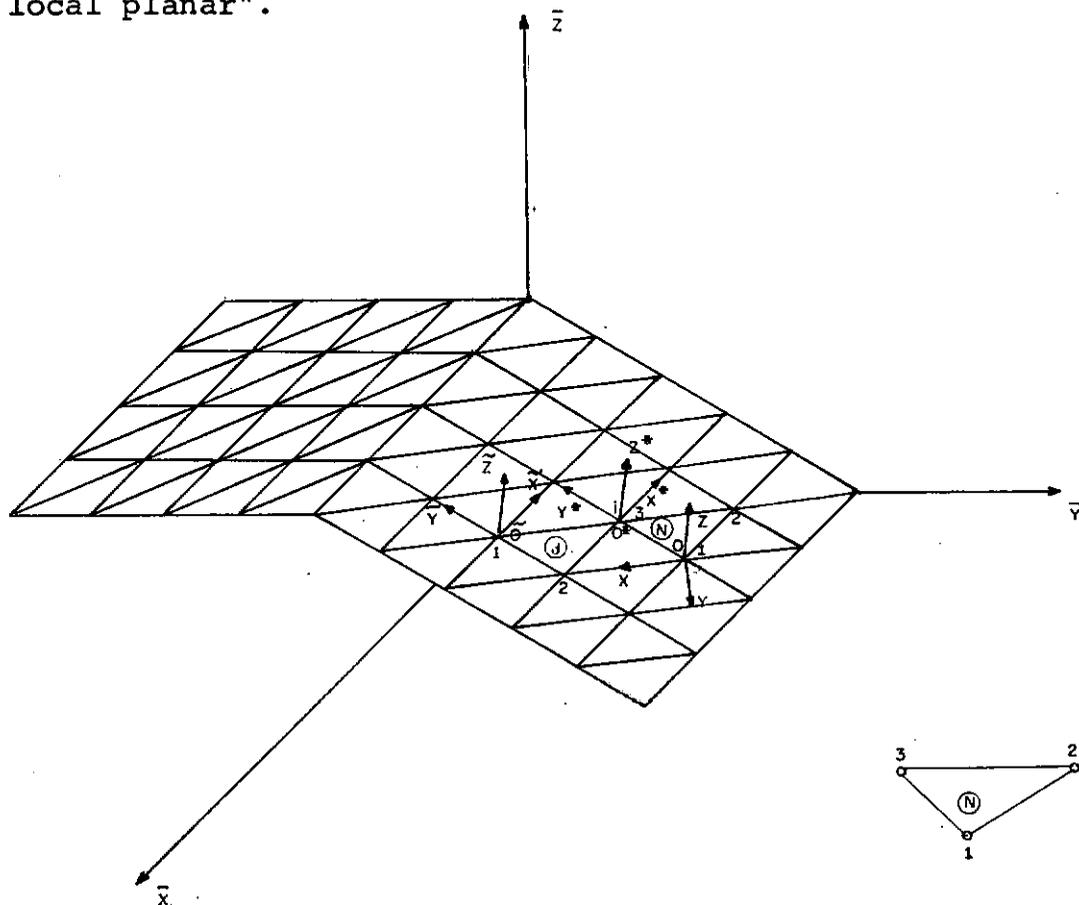


Fig. 2.7

N - elemento do qual se calcula a matriz de rigidez

J - elemento de menor número que concorre no nó i

Sejam

$$\{x_2\} = \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Bmatrix} \quad e \quad \{x_3\} = \begin{Bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{Bmatrix}$$

os vetores das coordenadas dos nós 2 e 3 do elemento J respectivamente, em relação ao referencial $x_0y_0z_0$ (os nós 2 e 3 definem o eixo \tilde{Ox} do sistema local do elemento J) e seja s_{32} o comprimento do lado 2-3 desse elemento. Supõe-se que todos os elementos sejam numerados no mesmo sentido (horário ou anti-horário)

Se $\{q_i\}$ é definido como anteriormente e $\{q_i^*\}$ são os deslocamentos do nó i em relação ao sistema $x^*y^*z^*$, tem-se:

$$\{q_i^*\} = [L_i] \{q_i\} \quad (2.45)$$

sendo

$$[L_i] = \begin{bmatrix} [L] & [0] \\ [0] & [L] \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{x_{32}}{s_{32}} & \frac{y_{32}}{s_{32}} & 0 \\ -\frac{y_{32}}{s_{32}} & \frac{x_{32}}{s_{32}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

onde

$$x_{32} = x_3 - x_2$$

$$y_{32} = y_3 - y_2$$

Com este procedimento, obtêm-se as matrizes de transformação $[L_1]$, $[L_2]$ e $[L_3]$, correspondentes aos nós 1, 2 e 3 do elemento N. Através de (2.40) e (2.41) tem-se a matriz de rigidez e o vetor das forças nodais equivalentes do elemento em relação aos novos deslocamentos. Segue-se a eliminação das linhas e colunas associadas ao "sexto grau de liberdade (θ_z)", somente para os nós planares. Daí, a matriz de rigidez do elemento poderá ser do tipo 15 x 15, 16 x 16, 17 x 17 ou 18 x 18, conforme este tenha os três nós planares, dois nós planares, apenas um nó planar ou nenhum nó planar respectivamente. Esta técnica conduz a dificuldades de programação¹.

Segunda opção

Exprimir os deslocamentos dos nós planares em relação a um sistema de coordenadas local e substituir as equações

40.

do tipo $0 = 0$ por $K'_{\theta_z} \theta_{z_i} = 0$, sendo K'_{θ_z} números arbitrários não nulos. Este procedimento, obviamente conduz aos mesmos resultados que o descrito anteriormente, porém apresenta as seguintes desvantagens: maior número de equações, sobretudo nas estruturas prismáticas laminares, onde o número de nós planares é grande e maior largura de banda, pois todos os nós terão seis graus de liberdade.

Terceira Opção

Em vez de se introduzir linhas e colunas de zeros, considera-se para todos os elementos, quer seus nós sejam planares ou não, rigidez a rotação segundo a normal ao plano do elemento. Assim, se i, j e k são os nós do elemento, uma rotação θ_{z_i} no nó i , dá origem a momentos M_z em seus nós, não produzindo nenhuma outra reação.

Para assegurar o equilíbrio, a soma dos momentos deverá ser nula e arbitrariamente eles são escolhidos proporcionais ao produto do módulo de elasticidade E , espessura h e área Δ do elemento. A rigidez a rotação então pode ser expressa como^{1,3,6}:

$$\begin{Bmatrix} M_{z_i} \\ M_{z_j} \\ M_{z_k} \end{Bmatrix} = \alpha E h \Delta \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{z_i} \\ \theta_{z_j} \\ \theta_{z_k} \end{Bmatrix}$$

(2.48)

onde α é um coeficiente a ser determinado. O efeito desta rotação foi analisado numericamente. Para isto considerou-se uma casca cilíndrica apoiada em diafragmas, sujeita apenas ao peso próprio (fig.2.9). Utilizando uma malha 7 x 9 (80 nós) foram determinadas as deflexões na secção média $\bar{y} = 0$ para diferentes valores do parâmetro α , comparando-se com a solução analítica²⁴ (ver fig. 2.10 e tabela 2.1).

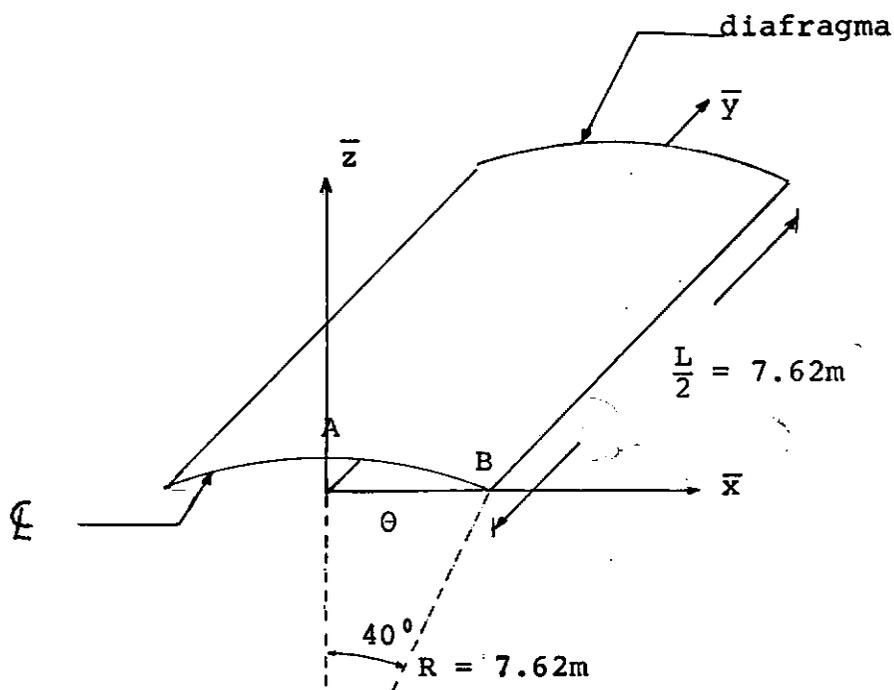


Fig. 2.9

42.

$\nu = 0$ (coeficiente de Poisson)

$E = 2,100,000 \text{ t/m}^2$ (módulo de elasticidade)

$\gamma = 5.78 \text{ t/m}^3$ (peso específico)

$h = 0.0762 \text{ m}$ (espessura)

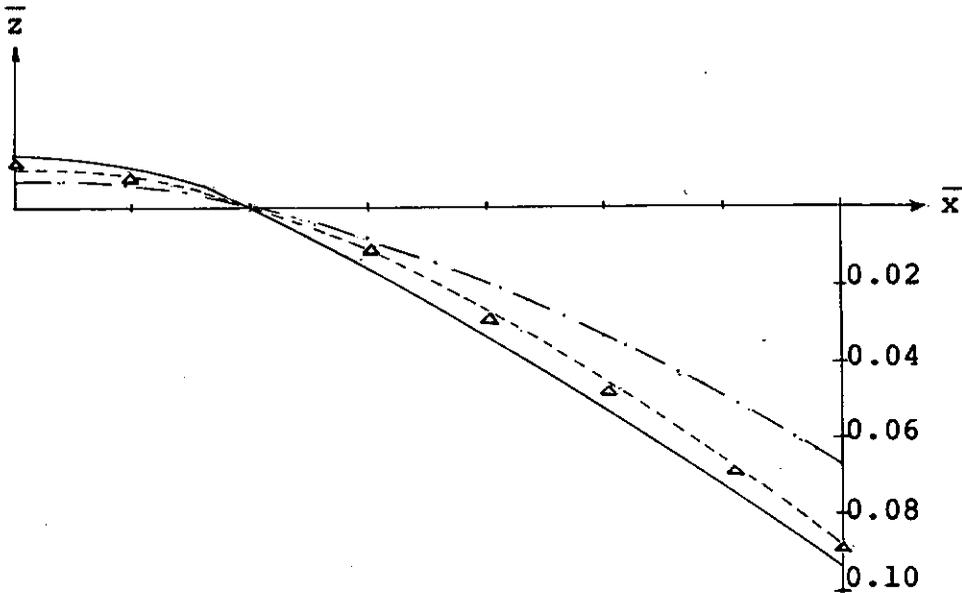


Fig. 2.10: Deflexões na seção média

- ref 24 (solução analítica)
- $\alpha = 0.03$
- · - · - $\alpha = 1.00$
- △ $\alpha = 0.0001$

	Deflexões em A	Deflexões em B
solução exata	0.01300	-0.09300
$\alpha = 1.0000$	0.00639	-0.06692
$\alpha = 0.0300$	0.01088	-0.09047
$\alpha = 0.0001$	0.01122	-0.09254

Tabela 2.1

Conforme se pode concluir da tabela 2.1, valores pequenos de α ($\alpha \leq 0.03$), conduzem a bons resultados.

Quarta Opção

Considerar todos os nós com cinco graus de liberdade^{4,5}. A fim de eliminar o "sexto grau de liberdade" é necessário considerar para cada nó, um sistema local associado com o plano tangente à superfície da casca naquele ponto, o qual será denominado de "sistema local tangente". Seja i um nó genérico; uma maneira simples de se resolver este problema é tomar como normal à casca em i , a normal média associada aos elementos que concorrem no nó considerado. Assim os cossenos diretores de normal em i serão a média aritmética dos cossenos diretores das normais aos diversos elementos que concorrem nesse nó. Com isto fica definido um dos eixos, o eixo O^*z^* por exemplo, e seja $\{l_z^*\}$ o

vetor dos cossenos diretores desse eixo em relação ao sistema de referência global. Assim:

$$\{l_z^*\} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix} \quad (2.49)$$

com $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$

O eixo O^*x^* será tomado perpendicular ao eixo O^*z^* e paralelo ao plano $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$; seja $\{l_x^*\}$ o vetor dos cossenos diretores desse eixo em relação ao sistema global:

$$\{l_x^*\} = \begin{Bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.50)$$

Daí obtêm-se um sistema de equações tendo a e b como incógnitas:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ \alpha a + \beta b = 0 \end{cases} \quad (2.51)$$

Serão considerados três casos:

1º caso: $\alpha \neq 0$, isto é, o eixo O^*z^* não é normal ao eixo $\bar{O}\bar{x}$.
Então de (2.51) resulta:

$$a = \pm \frac{\beta}{2} \sqrt{\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2}} ; \quad b = \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2}}$$

Na figura 2.11 se vê que existem duas possibilidades para o eixo O^*x^* , satisfazendo as condições impostas (daí as duas soluções do sistema de equações (2.51)).

O sentido de O^*x^* será escolhido de modo que o ângulo θ entre os eixos O^*x^* e $\bar{O}\bar{x}$ pertença ao intervalo $[0, \pi/2]$.

Assim, se:

$$\beta/\alpha > 0 \quad \text{então} \quad a = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2}} \quad \text{e} \quad b = -\sqrt{\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2}}$$

$$\beta/\alpha < 0 \quad \text{então} \quad a = -\frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2}} \quad \text{e} \quad b = \sqrt{\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2}}$$

$$\beta = 0 \quad \text{então} \quad a = 0 \quad \text{e} \quad b = 1 \quad (\text{poderia ser } b = -1)$$

(2.52)

2º caso: $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$; isto é, o eixo O^*z^* é normal ao eixo $\bar{O}\bar{x}$ não sendo normal ao eixo $\bar{O}\bar{y}$.

De (2.51) resulta:

$$\begin{aligned} b &= 0 \\ a &= \pm 1 \end{aligned}$$

se optando pela solução:

$$b = 0 \quad e \quad a = 1 \quad (2.53)$$

o que equivale a tomar O^*x^* paralelo e de mesmo sentido a $\bar{O}\bar{x}$.

3º caso: $\alpha = 0$ e $\beta = 0$, isto é, o eixo O^*z^* é normal ao plano $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$. Neste caso o sistema (2.51) apresenta uma infinidade de soluções, sendo escolhida a solução:

$$a = 1 \quad e \quad b = 0 \quad (2.54)$$

o que equivale a se tomar o sistema local do nó paralelo ao sistema global.

Nos três casos o eixo O^*y^* será tal que o triedro $x^*O^*y^*z^*$ seja direto.

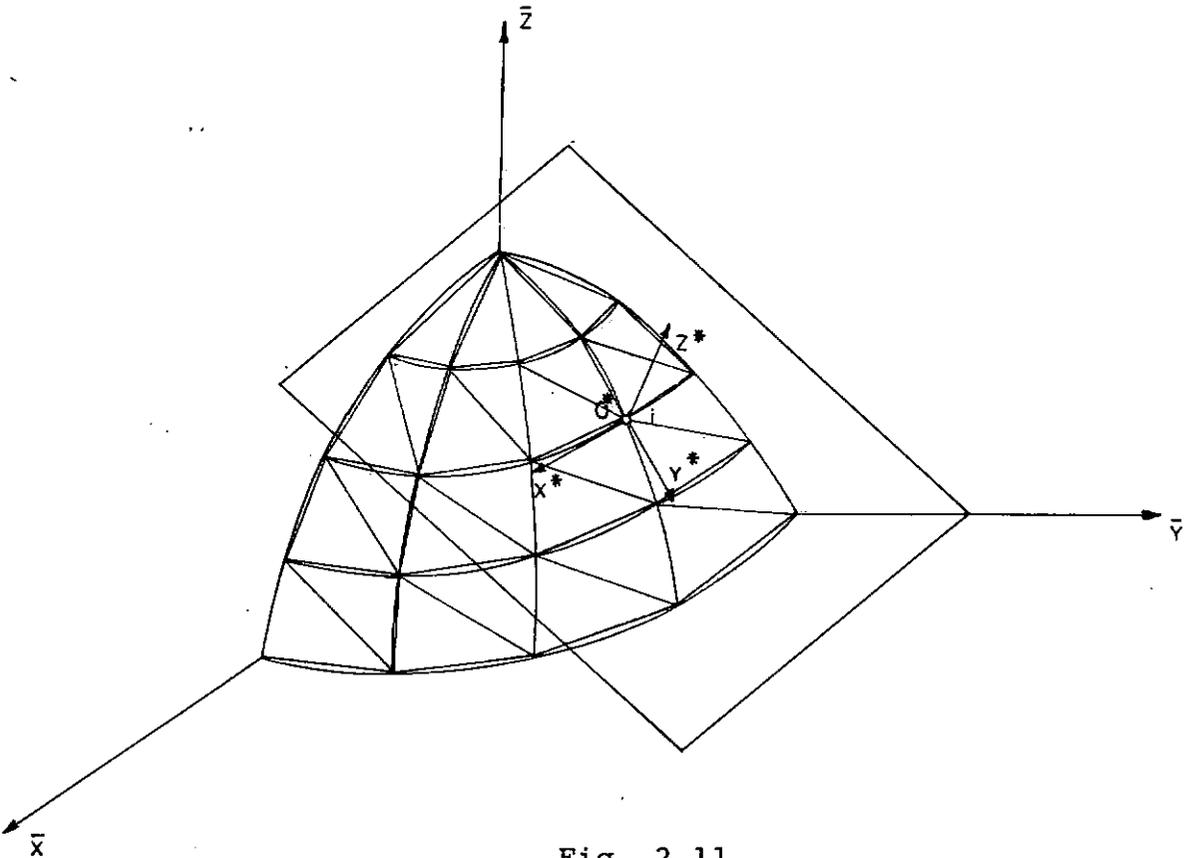


Fig. 2.11

Definido o sistema local do nó, com $\{\ell_x^*\}$, $\{\ell_y^*\}$ e $\{\ell_z^*\}$ é formada a matriz de transformação $[L_i^*]$ do sistema local do nó para o sistema global. Assim:

$$\{\bar{q}_i\} = [L_i^*]\{q_i^*\} \quad (2.55)$$

Então, para um dado elemento e obtem-se as matrizes de transformação $[L_1^*]$, $[L_2^*]$ e $[L_3^*]$ para os seus três nós. Representando por $\{q_i\}$ ($i=1,2,3$) o vetor que contém os deslocamentos do nó i em relação ao sistema local do elemento, de (2.43) tem-se:

$$\{\bar{q}_i\} = [L_i]\{q_i\} \quad (i=1,2,3) \quad (2.56)$$

Como $[L_i^*]$ ($i=1,2,3$) é uma matriz ortogonal, de (2.55) e de (2.56) resulta:

$$\{q_i^*\} = [L_i^*]^t [L_i]\{q_i\} \quad (i=1,2,3) \quad (2.57)$$

Utilizando (2.40) e (2.41) obtém-se a matriz de rigidez e o vetor das forças nodais equivalentes em relação aos novos deslocamentos.

Quinta Opção

Utilizar um elemento mais refinado para representar o comportamento de membrana e que inclua entre os deslocamentos

mentos nodais, uma rotação segundo a normal ao plano do elemento.

Para representar o comportamento de membrana, considera-se um elemento com quatro pontos nodais e vinte graus de liberdade. Para o ponto nodal i ($i=1,2,3$) os deslocamentos nodais são²:

$$\{q_i^m\} = \{u \ v \ (u_{,x} + \nu v_{,y}) \ (v_{,y} + \nu u_{,x}) \ (u_{,y} + v_{,x}) \ \frac{1}{2}(v_{,x} - u_{,y}) \}_i$$

para $i = 4$ (2.58)

$$\{q_4^m\} = \{u \ v\}_4$$

sendo: $u_{,x} = \frac{\partial u}{\partial x}$ $u_{,y} = \frac{\partial u}{\partial y}$ $v_{,x} = \frac{\partial v}{\partial x}$ $v_{,y} = \frac{\partial v}{\partial y}$

e ν coeficiente de Poisson.

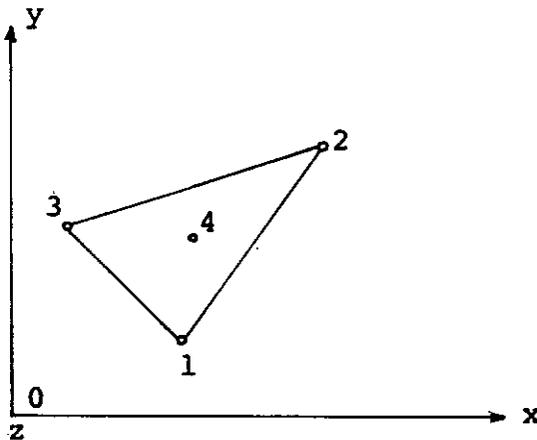


Fig. 2.8

O comportamento a flexão será representado por um elemento com nove graus de liberdade. Para o ponto nodal i ($i = 1, 2, 3$) os deslocamentos nodais são:

$$\{q_i^f\} = \{w \theta_x \theta_y\}_i \quad (2.59)$$

Associando-se estes dois elementos obtém-se a matriz de rigidez $[k^e]$ (29 x 29), relativamente aos parâmetros.

$$e \quad \{u \ v \ (u_{,x} + v_{,y}) \ (v_{,y} + u_{,x}) \ (u_{,y} + v_{,x}) \ \frac{1}{2}(v_{,x} - u_{,y}) \ w \ \theta_x \ \theta_y\}_i$$

$$\{u, v\}_4 \quad i=1, 2, 3 \quad (2.60)$$

Entre os deslocamentos nodais está incluída a rotação θ_z segundo a normal ao plano do elemento ($\theta_z = \frac{1}{2}(v_{,x} - u_{,y})$). Permutando-se convenientemente as colunas da matriz de rigidez $[k^e]$ e as linhas do vetor dos deslocamentos nodais $\{q^e\}$ e do vetor das forças nodais equivalentes $\{Q^e\}$ do elemento, pode-se escrever:

$$\begin{bmatrix} [k_{11}] & [k_{12}] \\ [k_{21}] & [k_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_1'\} \\ \{q_2'\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{Q_1'\} \\ \{Q_2'\} \end{Bmatrix} \quad (2.61)$$

onde $\{q'_1\}$ contêm os deslocamentos:

$$(u \ v \ w \ \theta_x \ \theta_y \ \theta_z)_i \quad i=1,2,3 \quad (2.62)$$

e $\{q'_2\}$ contêm os deslocamentos:

$$((u_{,x} + vv_{,y}) (v_{,y} + vu_{,x}) (u_{,y} + v_{,x}))_i \quad i=1,2,3 \quad (2.63)$$

$$(u \ v)_4$$

$\{Q'_1\}$ e $\{Q'_2\}$ são os vetores das forças nodais equivalentes, associados aos deslocamentos nodais $\{q'_1\}$ e $\{q'_2\}$ respectivamente.

Procede-se então a uma condensação da matriz de rigidez $[k^e]$ a fim de eliminar os deslocamentos descritos em (2.63).

A equação (2.61) é equivalente a:

$$\begin{aligned} [k_{11}] \{q'_1\} + [k_{12}] \{q'_2\} &= \{Q'_1\} \\ [k_{21}] \{q'_1\} + [k_{22}] \{q'_2\} &= \{Q'_2\} \end{aligned} \quad (2.64)$$

Explicitando na segunda equação de (2.64) o vetor $\{q'_2\}$ e introduzindo-se na primeira equação, resulta:

$$\begin{aligned} ([k_{11}] - [k_{12}] [k_{22}]^{-1} [k_{21}]) \{q'_1\} &= \\ = (\{Q'_1\} - [k_{12}] [k_{22}]^{-1} \{Q'_2\}) \end{aligned} \quad (2.65)$$

$$\text{ou} \quad [k^c] \{q_1^i\} = \{Q^c\} \quad (2.66)$$

onde

$$\begin{aligned} [k^c] &= [k_{11}] - [k_{12}] [k_{22}]^{-1} [k_{21}] \\ \{Q^c\} &= \{Q_1^i\} - [k_{12}] [k_{22}]^{-1} \{Q_2^i\} \end{aligned}$$

Com isto tem-se a matriz de rigidez condensada $[k^c]$ (18 x 18), relativamente aos deslocamentos nodais descritos em (2.62).

Assim o problema do sexto grau de liberdade fica eliminado e facilmente se obtém a matriz de rigidez do elemento em relação ao sistema global.

A obtenção da matriz de rigidez em relação aos deslocamentos nodais dados em (2.58), pode ser feita de forma indireta, obtendo-se inicialmente a matriz de rigidez com relação aos deslocamentos nodais

$$\begin{aligned} \{q_i\} &= \{u, v, u_{,x}, v_{,x}, u_{,y}, v_{,y}\}_i \quad i=1,2,3 \\ \{q_4\} &= \{u, v\}_4 \end{aligned} \quad (2.67)$$

Para isso adota-se o campo de deslocamentos definido por²:

$$\begin{aligned}
 u = & c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + c_3 \xi_3 + c_4 \xi_1 \xi_2 + c_5 \xi_2 \xi_3 + \\
 & + c_6 \xi_1 \xi_3 + c_7 (\xi_1 \xi_2^2 - \xi_1^2 \xi_2) + \\
 & + c_8 (\xi_2 \xi_3^2 - \xi_2^2 \xi_3) + c_9 (\xi_3 \xi_1^2 - \xi_3^2 \xi_1) + \\
 & + c_{10} \xi_1 \xi_2 \xi_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v = & c_{11} \xi_1 + c_{12} \xi_2 + c_{13} \xi_3 + c_{14} \xi_1 \xi_2 + \\
 & + c_{15} \xi_2 \xi_3 + c_{16} \xi_1 \xi_2 + c_{17} (\xi_1 \xi_2^2 - \xi_1^2 \xi_2) + \\
 & + c_{18} (\xi_2 \xi_3^2 - \xi_2^2 \xi_3) + c_{19} (\xi_3 \xi_1^2 - \xi_3^2 \xi_1) + \\
 & + c_{20} \xi_1 \xi_2 \xi_3
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

Obtida a matriz de rigidez $[k_1^m]$ e o vetor das forças nodais equivalentes $\{Q_1^m\}$ com relação aos deslocamentos nodais dados em (2.67), a matriz de rigidez $[k^m]$ e vetor das forças nodais equivalentes $\{Q^m\}$ com relação aos deslocamentos nodais descritos em (2.58) serão respectivamente:

$$[k^m] = ([L]^{-1})^t [k_1^m] [L]^{-1} \tag{2.69}$$

$$\{Q^m\} = ([L]^{-1})^t \{Q_1^m\} \tag{2.70}$$

sendo $[L]$ a matriz que relaciona os deslocamentos dados em (2.58) e em (2.67). A matriz $[L]^{-1}$ pode ser escrita como:

$$[L]^{-1} = \begin{bmatrix} [L^*]^{-1} & [0_1] & [0_1] & [0_3] \\ [0_1] & [L^*]^{-1} & [0_1] & [0_3] \\ [0_1] & [0_1] & [L^*]^{-1} & [0_3] \\ [0_2] & [0_2] & [0_2] & [I_2] \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

onde

- $[0_1]$ - matriz nula 6 x 6
- $[0_2]$ - matriz nula 2 x 6
- $[0_3]$ - matriz nula 6 x 2
- $[I_2]$ - matriz identidade de segunda ordem

$$[L^*]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-\nu^2} & -\frac{\nu}{1-\nu^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{1-\nu^2} & \frac{1}{1-\nu^2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

2.8 - Forças nodais equivalentes

No caso de cascas, os estados de carregamento de maior interesse prático são: peso próprio, carregamento normal à superfície do elemento e linearmente variável (pressão) e varia-

ção de temperatura. Os dois primeiros casos não oferecem nenhuma dificuldade em se obter o vetor das forças nodais equivalentes (ver Apêndice B). Serão feitas algumas considerações com relação ao terceiro caso.

Quando foi deduzida a expressão da energia potencial total, não se considerou a parcela correspondente à variação de temperatura. No caso em que esta exista, o vetor das forças nodais equivalentes do elemento dado em (1.14) passará a ser:

$$\{Q^e\} = ([N]^{-1})^t \left(\int_{D^e} [M]^t \{x\} dD + \int_{F^e} [M]^t \{p\} dF + \int_{D^e} [M]^t [D]^t \{\sigma_R\} dD \right) \quad (2.70)$$

onde $\{\sigma_R\}$ é o vetor que contém as tensões que surgem no elemento em consequência das deformações provenientes da variação de temperatura, admitindo-se que este tenha seus nós livres de se deslocarem.

Seja então um elemento triangular plano, submetido a uma variação linear de temperatura através de sua espessura, supondo que a temperatura seja constante em planos paralelos a sua superfície.

Sejam:

h	espessura do elemento
Δt_1	variação de temperatura da face inferior ($z = -h/2$)
Δt_2	variação de temperatura da face superior ($z = h/2$)
α_t	coeficiente de dilatação térmica
E, ν	módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson respectivamente
Δ	área do elemento

O problema será decomposto em dois: inicialmente seja o elemento submetido a uma variação de temperatura

$$\Delta t = \frac{\Delta t_1 + \Delta t_2}{2}$$

(fig. 2.12); em consequência surgirão tensões que serão dadas por:

$$\{\sigma_R\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \Delta t \\ \sigma_y \Delta t \\ \tau_{xy} \Delta t \end{Bmatrix} = \frac{E \alpha_t (\Delta t_1 + \Delta t_2)}{2(1 - \nu)} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.71)$$

Utilizando (2.70), chega-se ao vetor das forças nodais equivalentes $\{Q^m\}$ correspondente à variação de temperatura Δt . Para o elemento com seis deslocamentos nodais tem-se:

$$\{Q^m\} = \frac{E \alpha_t h (\Delta t_1 + \Delta t_2)}{2(1 - \nu)} \begin{Bmatrix} Y_{23} \\ x_{32} \\ Y_{31} \\ x_{13} \\ Y_{12} \\ x_{21} \end{Bmatrix} \quad (2.72)$$

sendo :

$$\begin{aligned} x_{ij} &= x_i - x_j \\ Y_{ij} &= Y_i - Y_j \end{aligned} \quad \begin{cases} i = 1, 2, 3 \\ j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

No caso do elemento com vinte graus de liberdade, o vetor das forças nodais equivalentes, com relação aos deslocamentos nodais dados em (2.67) será:

$$\{Q^m\} = \frac{E \alpha_t h (\Delta t_1 + \Delta t_2)}{24(1 - \nu)} \left\{ \begin{array}{l} 6Y_{23} \\ 6x_{32} \\ x_{21}Y_{21} + x_{13}Y_{31} \\ x_{13}^2 - x_{12}^2 \\ Y_{21}^2 - Y_{13}^2 \\ Y_{21}x_{12} + Y_{13}x_{13} \\ 6Y_{31} \\ 6x_{13} \\ x_{12}Y_{21} + x_{23}Y_{23} \\ x_{12}^2 - x_{23}^2 \\ Y_{23}^2 - Y_{12}^2 \\ Y_{12}x_{12} + Y_{23}x_{32} \\ 6Y_{12} \\ 6x_{21} \\ x_{32}Y_{23} + x_{31}Y_{31} \\ x_{23}^2 - x_{13}^2 \\ Y_{13}^2 - Y_{23}^2 \\ Y_{32}x_{32} + Y_{31}x_{13} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \quad (2.73)$$

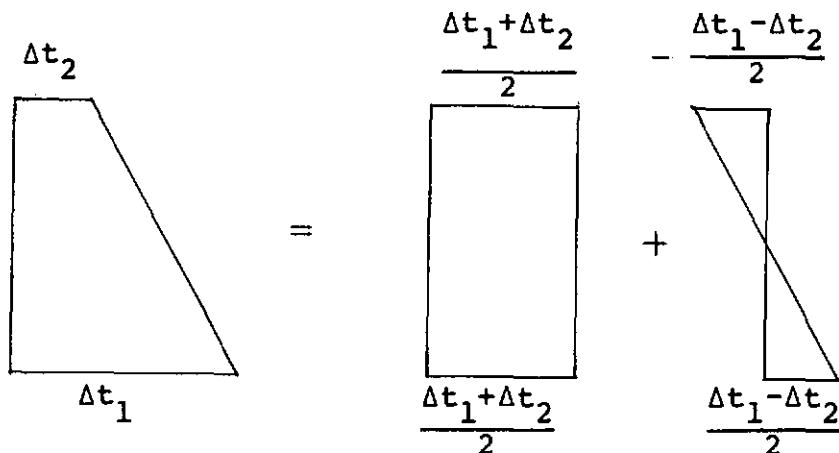


Fig. 2.12

Seja agora o elemento sujeito a uma variação linear de temperatura através de sua espessura, entre $-\frac{\Delta t_1 - \Delta t_2}{2}$ e $\frac{\Delta t_1 - \Delta t_2}{2}$ (fig. 2.12).

Tem-se assim o elemento submetido a um estado de flexão. Os momentos fletores correspondentes à deformação térmica serão dados por¹⁹:

$$\begin{Bmatrix} M_x^{\Delta t} \\ M_y^{\Delta t} \\ M_{xy}^{\Delta t} \end{Bmatrix} = \frac{\alpha_t h^2 (\Delta t_1 - \Delta t_2)}{24(1 - \nu)} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.74)$$

O vetor das forças nodais equivalentes $\{Q^f\}$ com relação aos deslocamentos nodais utilizados na equação (2.30) será:

$$\{Q^f\} = \frac{\alpha_t E h^2 (\Delta t_1 - \Delta t_2)}{288 \Delta (1 - \nu)} \left\{ \begin{array}{l} 2(-2a_1 + a_2 - 2a_3) \\ Y_{12}(3a_1 + a_2 - a_3) + Y_{31}(5a_1 + 3a_2 + a_3) \\ X_{21}(3a_1 + a_2 - a_3) + X_{13}(5a_1 + 3a_2 + a_3) \\ 2(-2a_1 - 2a_2 + a_3) \\ Y_{21}(3a_1 - a_2 + a_3) + Y_{32}(5a_1 + a_2 + 3a_3) \\ X_{12}(3a_1 - a_2 + a_3) + X_{23}(5a_1 + a_2 + 3a_3) \\ 2(4a_1 + a_2 + a_3) \\ Y_{32}(-a_1 + a_2 - 3a_3) + Y_{31}(-a_1 - 3a_2 + a_3) \\ X_{23}(-a_1 + a_2 - 3a_3) + X_{13}(-a_1 - 3a_2 + a_3) \end{array} \right\} \quad (2.75)$$

onde:

$$a_1 = Y_{31}Y_{23} + X_{13}X_{32}$$

$$a_2 = Y_{23}^2 + X_{32}^2$$

$$a_3 = Y_{31}^2 + X_{13}^2$$

X_{ij} e Y_{ij} ($i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3$) definidos como anteriormente

Com $\{Q^m\}$ e $\{Q^f\}$, obtem-se o vetor das forças nodais equivalentes do elemento, com relação aos deslocamentos descritos em 2.12, pa

ra uma variação de temperatura Δt_2 da face superior e Δt_1 da face inferior.

2.9 - Cálculo das tensões

Obtidos os deslocamentos dos nós da estrutura, por meio de uma transformação, tem-se os deslocamentos em relação ao sistema local do elemento.

Conhecidos u_i e v_i ($i = 1, 2, 3$) (fig. 2.13) o cálculo das tensões σ_x^m , σ_y^m e τ_{xy}^m (constantes para cada elemento) não oferece nenhuma dificuldade¹. Com os deslocamentos w_i , θ_{x_i} , θ_{y_i} ($i = 1, 2, 3$) (fig. 2.13) obtêm-se os momentos M'_{x_i} , M'_{y_i} e M'_{xy_i} ($i = 1, 2, 3$) nos nós do elemento.

Como torna-se difícil obter os momentos nos nós da estrutura pois em geral estes são não planares, uma solução do problema consiste em calcular a média aritmética dos momentos nos nós do elemento, e atribuir este valor ao seu centro de gravidade.

Representando por M'_x , M'_y e M'_{xy} os momentos no centro de gravidade do elemento então:

$$M'_x = (M'_{x_1} + M'_{x_2} + M'_{x_3})/3$$

$$M'_y = (M'_{y_1} + M'_{y_2} + M'_{y_3})/3$$

$$M'_{xy} = (M'_{xy_1} + M'_{xy_2} + M'_{xy_3})/3$$

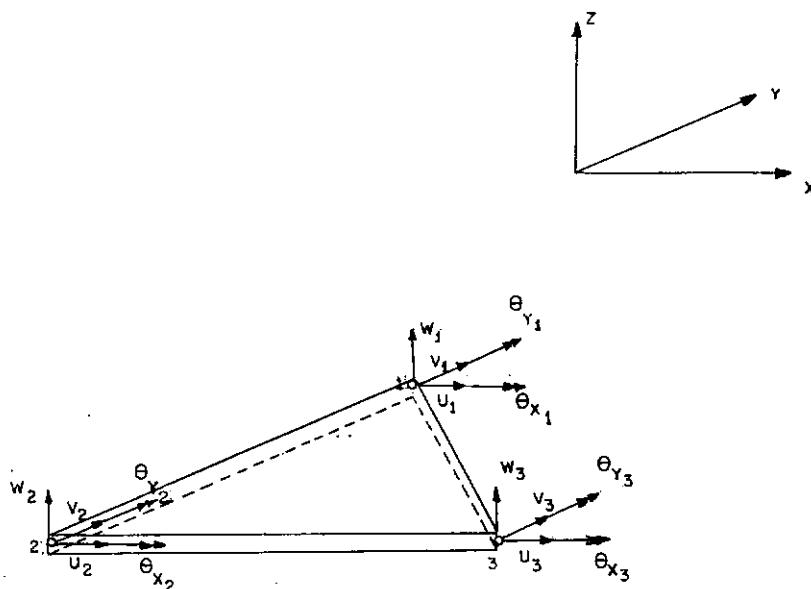


Fig. 2.13

Considerando como positivos os momentos indicados na figura 2.14, as tensões finais atribuídas nos centros de gravidade das faces superior e inferior do elemento serão dadas por:

Face superior: $z = h/2$

$$\sigma_x^1 = \sigma_x^m + 6 \frac{M_x}{h^2}$$

$$\sigma_Y^1 = \sigma_X^m + \frac{6M_Y}{h^2}$$

$$\sigma_{XY}^1 = \sigma_{XY}^m - \frac{6M_{XY}}{h^2}$$

(2.77)

Face inferior: $z = -h/2$

$$\sigma_X^2 = \sigma_X^m - \frac{6M_X}{h^2}$$

$$\sigma_Y^2 = \sigma_Y^m - \frac{6M_Y}{h^2}$$

$$\sigma_{XY}^2 = \sigma_{XY}^m + \frac{6M_{XY}}{h^2}$$

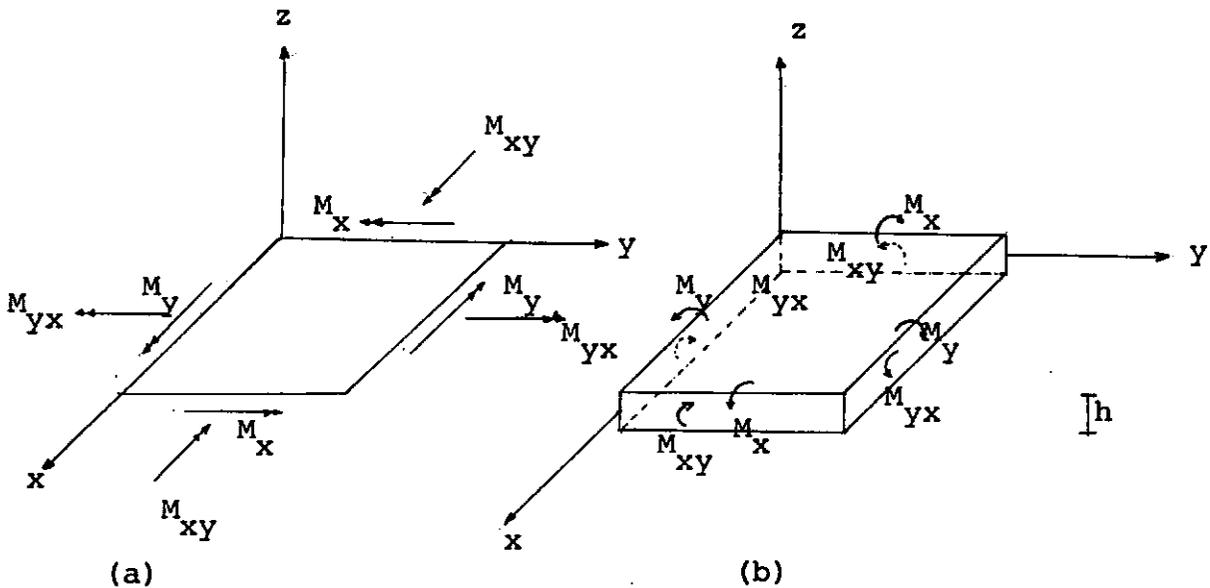


Fig. 2.14

2.10 - Apoios Elásticos

Muitas vezes as cascas são apoiadas sobre outras estruturas deformáveis. Se for conhecido o comportamento dessas estruturas para forças ou deslocamentos unitários, pode-se facilmente introduzir no cálculo da casca o efeito da deformabilidade dos apoios.

No caso por exemplo de cascas apoiadas sobre fundações tridimensionais, como é o caso das barragens abóbadas, a deformabilidade da fundação é muitas vezes representada pelos coeficientes de VOGT^{23,25,26}; por meio destes coeficientes é possível obter-se deslocamentos e rotações no centro de uma área retangular solicitada por forças ou momentos uniformemente distribuídos sobre a área ou ao longo do maior lado. No caso geral da superfície de intersecção da casca com a fundação não ser de forma retangular, define-se um retângulo equivalente de igual área.

Assim é formada a matriz de flexibilidade da fundação para a secção considerada da superfície de inserção da casca. Por inversão da matriz de flexibilidade, obtém-se a matriz de rigidez, cujos elementos introduzidos convenientemente na matriz de rigidez da estrutura, permitem levar em consideração a deformabilidade da fundação.

Outra técnica utilizada (conhecida como artifício de Vogt) consiste em prolongar a estrutura para o interior da fundação de forma tal que a deformabilidade desse acréscimo da estrutura reproduza a deformabilidade da fundação. Trata-se de uma técnica difícil e apresenta o inconveniente de aumentar o número de nós e elementos da estrutura. Não serão feitas considerações mais detalhadas sobre o assunto e caso haja interesse em se considerar apoios elásticos, a estruturação do programa elaborado é tal que permite facilmente a sua inclusão.

2.11 - Convergência

O elemento em estudo é não conforme e a convergência para a solução exata do problema só pode ser demonstrada "experimentalmente".

É intuitivo que com o refinamento da malha os erros devido a aproximação da superfície média da casca por uma superfície poliédrica e devido a não conformidade, tendem para zero.

Foi analisada uma casca cilíndrica apoiada em diafragmas sujeita apenas ao peso próprio (fig. 2.9), utilizando-se três malhas diferentes e comparando-se os resultados obtidos com a solução analítica²⁴.

Para formação da matriz de rigidez seguiu-se o procedimento descrito na terceira opção de 2.7. Na figura 2.15 são apresentadas as deflexões na seção média $\bar{y} = 0$, onde se pode observar a convergência para a "solução exata" com o refinamento da malha. Na tabela 2.2 são apresentados os valores das deflexões dos pontos A e B da referida estrutura para as malhas estudadas.

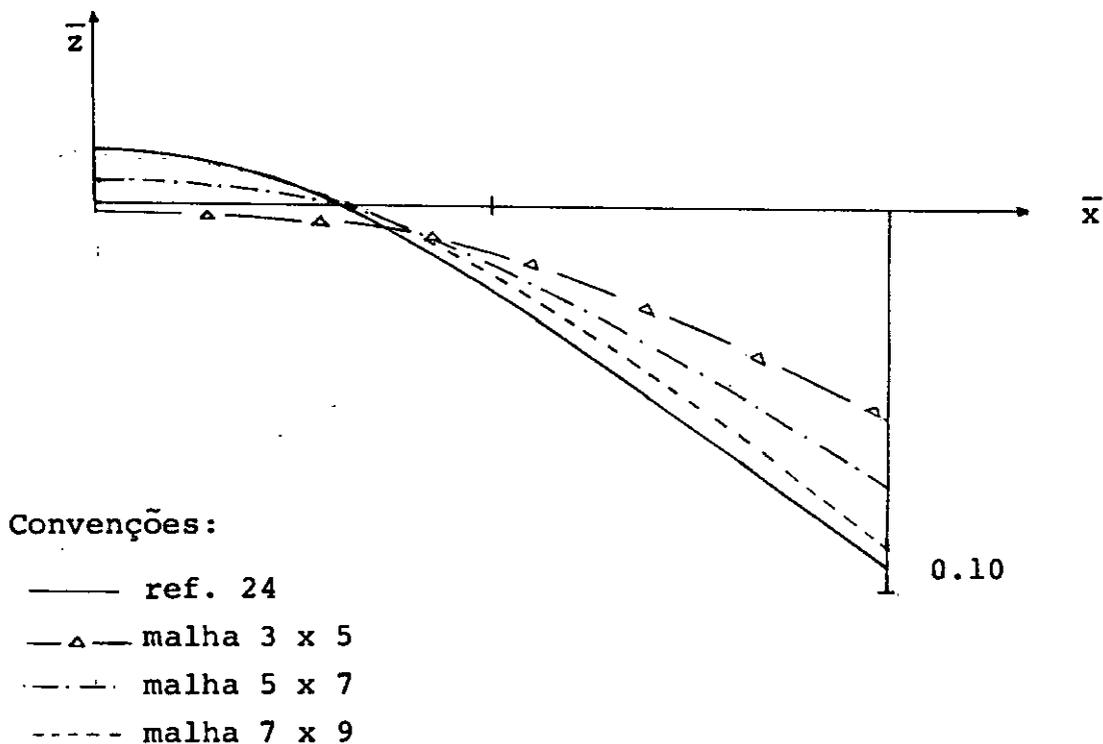


Fig. 2.15

Deflexões na seção média $\bar{y} = 0$

	Deflexão em A $\bar{w}(A)$	Deflexão em B $\bar{w}(B)$
Malha 3 x 5	-0.00228	-0.05577
Malha 5 x 7	0.00589	-0.07298
Malha 7 x 9	0.01372	-0.08824
ref. 24	0.01300	-0.09300

TABELA 2.2

CAPITULO III

PROGRAMA AUTOMÁTICO

3.1 - Considerações gerais sobre o programa elaborado

Foi elaborado um programa automático para um computador IBM/360 MODELO 40H em linguagem FORTRAN IV, funcionando com três opções para a formação da matriz de rigidez da estrutura e seguindo uma técnica diferente daquela existente na COPPE de autoria do Professor Alcebiades Vasconcellos Filho⁷.

Trata-se de um programa de grande capacidade, permitindo a análise de cascas e estruturas laminares, com no máximo 300 nós e 500 elementos.

3.2 - Subrotinas que compõem o programa

Subrotina DADÓS

Esta subrotina tem por finalidade ler e escrever informações relativas a estrutura.

Subrotina CARGA

A finalidade desta subrotina é ler e escrever informações relativas as cargas que atuam na estrutura.

Subrotina DEBLO

Esta subrotina define as partições; isto é, determina o nó inicial e o nó final de cada uma delas.

Subrotina TRANS

Esta subrotina tem por finalidade formar a matriz de transformação do sistema local do elemento para o sistema global de referência.

Subrotina MRTR3

Forma as matrizes de rigidez e tensão de um elemento triangular com seis deslocamentos nodais para estado plano de tensões (TRIM3).

Subrotina MRIT9

Forma as matrizes de rigidez e tensão de um elemento triangular com nove deslocamentos nodais para flexão de placas (T9).

Subrotina FORMA

A finalidade desta subrotina é formar a matriz de rigidez de um elemento triangular plano para análise de cascas e estruturas laminares, utilizando as matrizes de rigidez do TRIM3 e T9.

Subrotina FVTLN

Esta subrotina forma os vetores das forças nodais e equivalentes do elemento.

Subrotina TINVL

Forma o vetor das forças nodais equivalentes para um carregamento normal ao plano do elemento e lineamente variável.

Subrotina TINPP

Forma o vetor das forças nodais equivalentes para as forças de massa.

Subrotina TEMPE

Forma o vetor das forças nodais equivalentes para uma variação de temperatura uniforme em cada elemento e linearmente variável através de sua espessura.

Subrotina RIGES

Esta subrotina forma a matriz de rigidez da estrutura.

Subrotina DESPR

A finalidade desta subrotina é introduzir os deslocamentos prescritos.

Subrotina RESOL

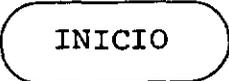
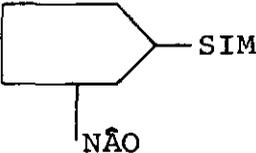
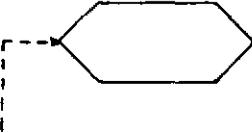
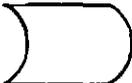
Esta subrotina tem por finalidade resolver o sistema de equações lineares obtido, utilizando o Método de Gauss.

Subrotina CTENS

A finalidade desta subrotina é calcular os momentos e as tensões nos elementos.

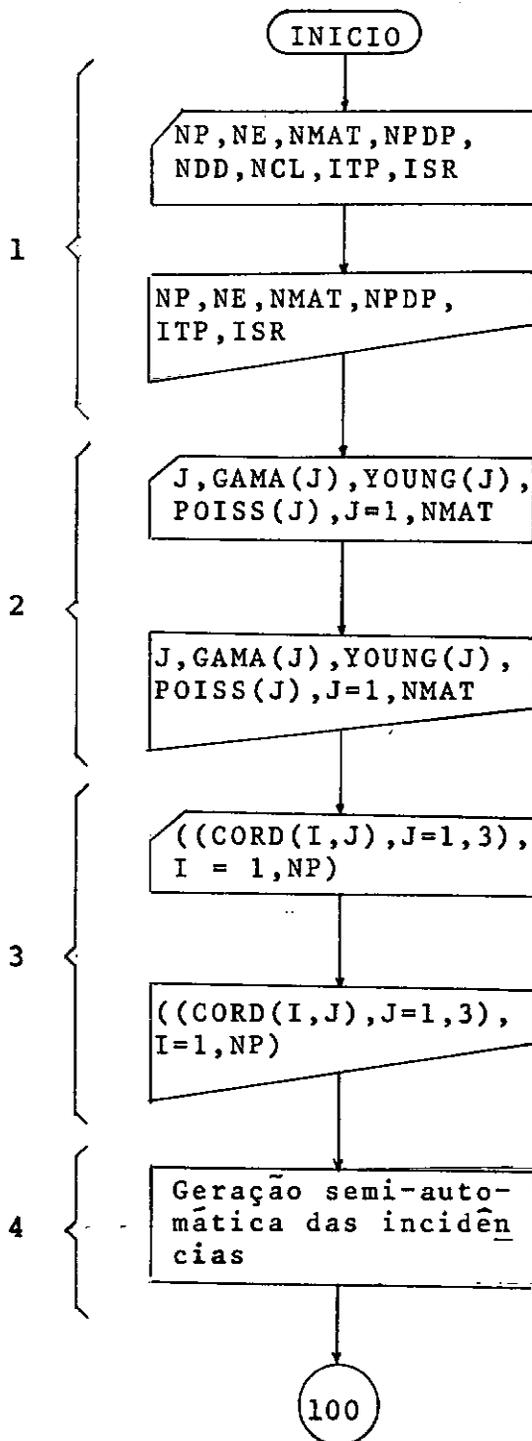
3.3 - Convenções adotadas

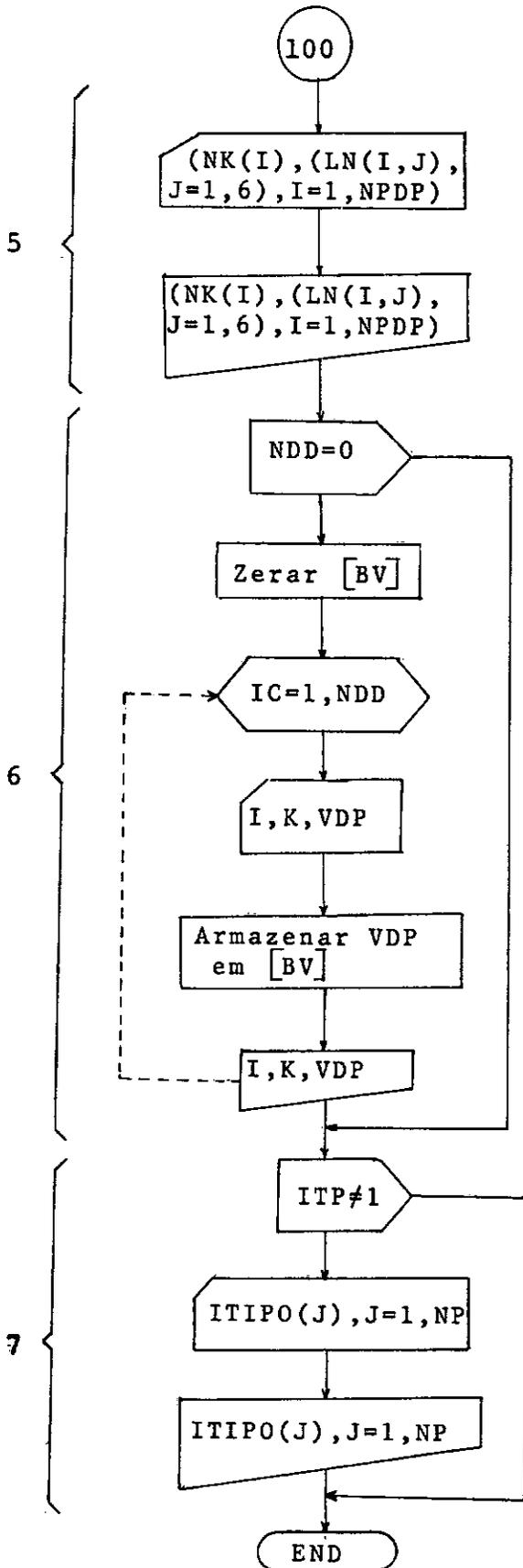
Serão adotadas as seguintes convenções nos diagramas de blocos:

	Início de um programa ou subrotina
	Entrada de dados (cartões)
	Impressão de títulos, dados ou resultados calculados
	Processamento de alguma operação ou cálculo escrito dentro do retângulo
	Chamada de subrotina
	Decisão a ser tomada
	Execução de um controle interativo
	Conexão entre dois pontos do diagrama que não podem ser ligados por uma linha (n é um número)
	Armazenar ou ler no disco magnético
	Término de um programa ou subrotina.

3.4 - Subrotina DADOS - ler e escrever informações relativas à estrutura

DIAGRAMA DE BLOCOS





Explicações referentes ao diagrama de blocos

1. Informações gerais sobre a estrutura

- NP - número de nós
- NE - número de elementos
- NMAT - número de materiais diferentes
- NPDP - número de nós com deslocamentos prescritos
- NDD - número total de direções com deslocamentos prescritos não nulos
- NCL - número de casos de carregamento excluindo o peso próprio
- ITP - variável que caracteriza o procedimento a ser adotado na formação da matriz de rigidez da estrutura (ver subrotina FORMA)
- ISR - variável que caracteriza o sistema de referência em relação ao qual serão fornecidos os deslocamentos prescritos (ver subrotina FORMA)

2. Características dos materiais

- GAMA - peso específico
- YOUNG - módulo de elasticidade
- POISS - coeficiente de Poisson

3. Coordenadas dos nós da estrutura em relação ao sistema global de referência

4. Geração semi-automática das incidências.

Dadas por exemplo, as incidências, espessuras e os números que caracterizam os materiais dos elementos 1 e 5 (fig. 3.1), as incidências do elemento N , $N=2,3,4$, serão obtidas somando-se uma unidade às incidências do elemento $N-1$. A espessura e o número que caracteriza o material do elemento N serão iguais as do elemento $N-1$.

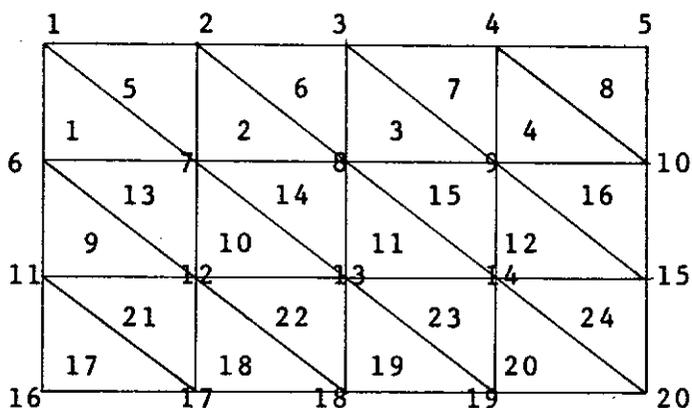


Fig. 3.1

Daí, se observa ser necessário uma numeração conveniente para os nós e elementos da estrutura.

5. Direções com deslocamentos prescritos

NK - variável cujos valores são os números dos nós que possuem deslocamentos prescritos em pelo menos uma direção.

LN - variável que caracteriza as direções com deslocamentos prescritos, podendo assumir os valores 0 ou 1.

LN(I,J)=0 - nó NK(I) não tem deslocamento prescrito na direção J

LN(I,J)=1 - nó NK(I) tem deslocamento prescrito na direção J

6. Nós com deslocamentos prescritos não nulos em pelo menos uma direção

I - número do nó

K - direção na qual se tem o deslocamento prescrito não nulo

VDP - valor do deslocamento

[BV] - matriz na qual serão armazenados os valores de VDP

7. Tipo do nó

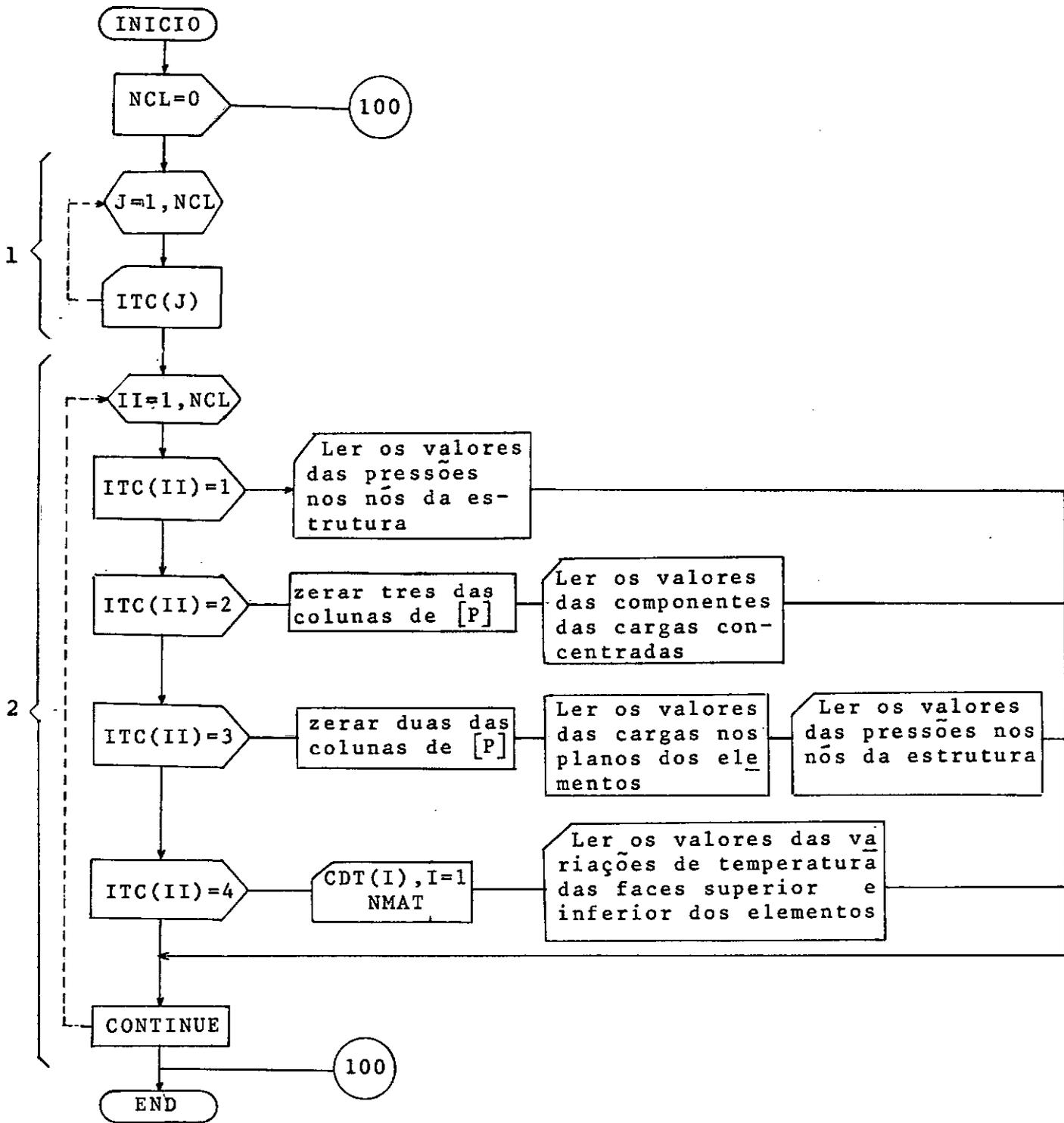
ITIPO - variável que caracteriza o tipo do nó, podendo assumir os valores 0 ou 1

ITIPO = 0 - nó I é não planar

ITIPO = 1 - nó I é planar

3.5 - Subrotina CARGA - ler e escrever informações sobre os carregamentos.

DIAGRAMA DE BLOCOS



Explicações referentes ao diagrama de blocos

1. ITC - variável que caracteriza o tipo de carregamento (ver quadro 3.1)

Os valores das cargas serão armazenados na matriz [P] do tipo 300 x 6; no quadro 3.1 está indicado o número de colunas que serão utilizadas para armazenar cada tipo de carregamento.

Valor de ITC	tipo de carregamento	Número de colunas de [P] que são utilizadas
1	carregamento normal ao plano do elemento e linearmente variável (pressão)	1
2	cargas concentradas	3
3	carregamento constante atuando em dois dos lados do elemento e outro linearmente variável, normal a seu plano	3
4	variação de temperatura uniforme em cada elemento e linearmente variável através de sua espessura	2

QUADRO 3.1

2. Comentários referentes aos diversos tipos de carregamento:

$$\underline{ITC = 1}$$

Deverão ser lidos os valores das pressões nos nós da estrutura.

ITC = 2

Deverão ser fornecidas as componentes das cargas con centradas nos n \tilde{o} s em que atuam, relativamente ao sistema no qual ser \tilde{a} o calculados os deslocamentos daquele n \tilde{o} .

ITC = 3

Inicialmente dever \tilde{a} o ser fornecidos os valores de f_x e f_y (fig. 3.2a) nos elementos em que atuam, tendo como referencial o sistema local do elemento. Em seguida dever \tilde{a} o ser lidos os valores das press \tilde{o} es nos n \tilde{o} s da estrutura.

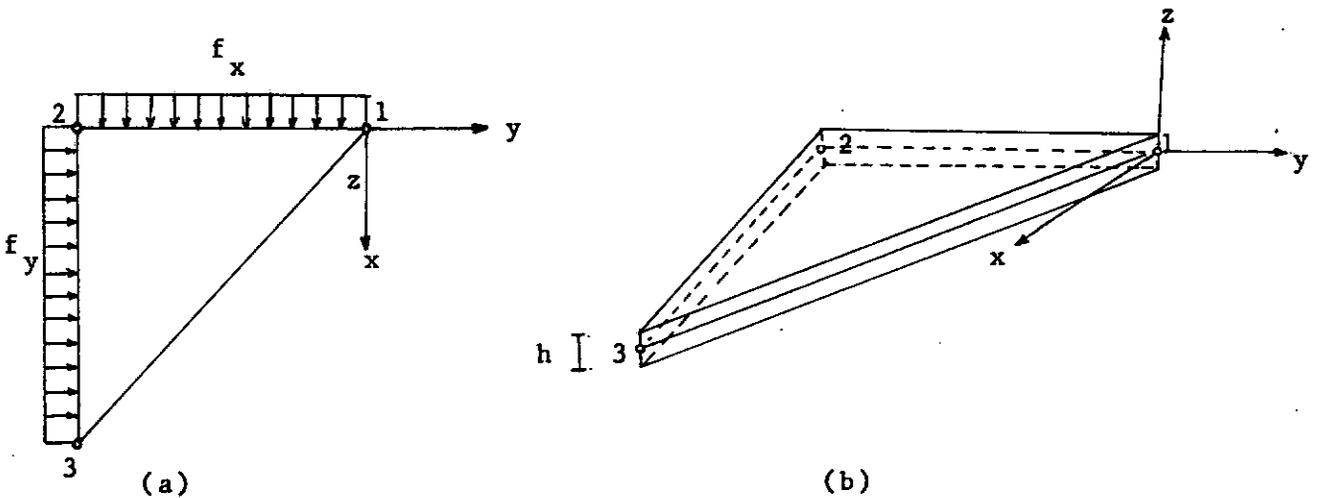


Fig. 3.2

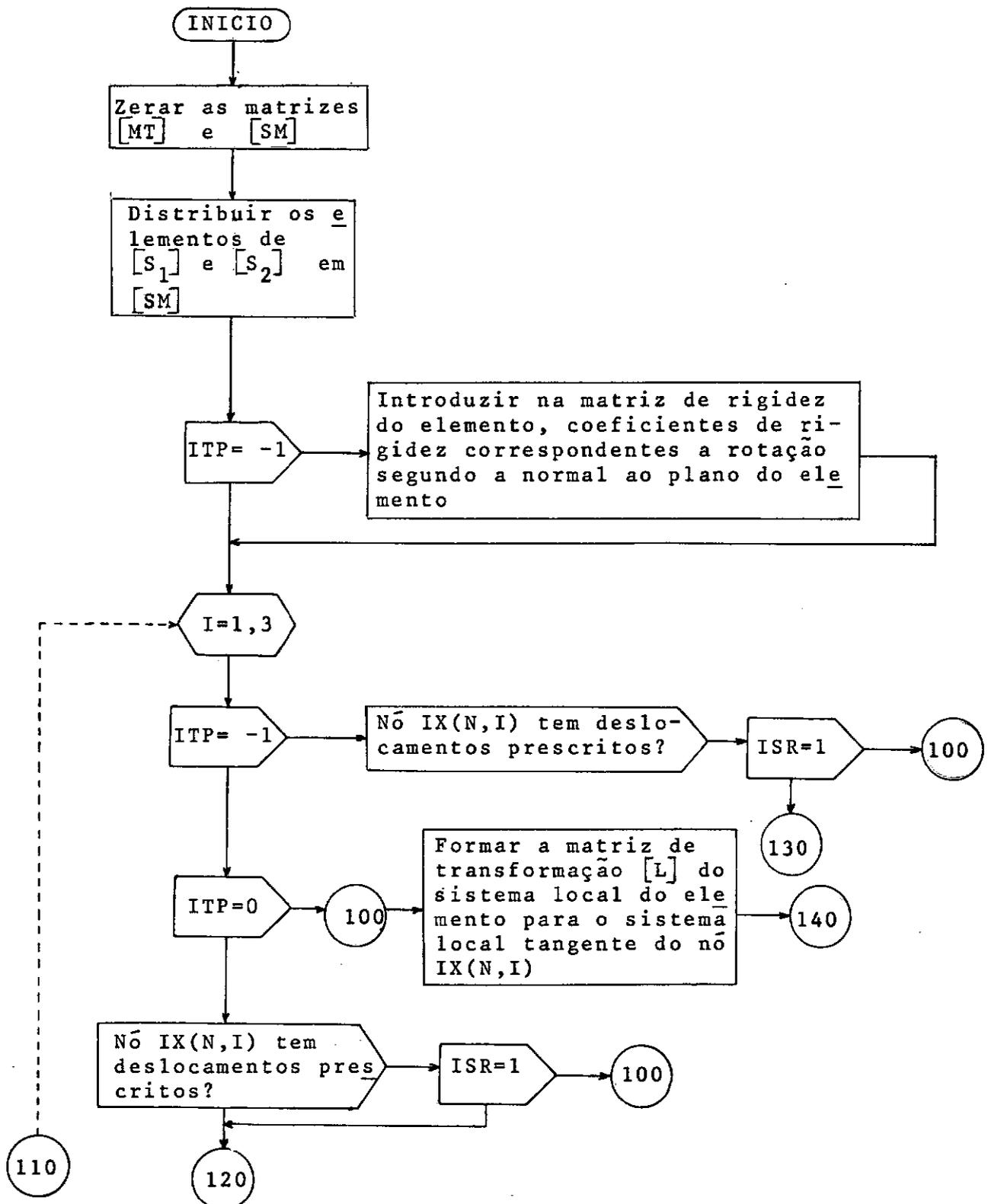
ITC = 4

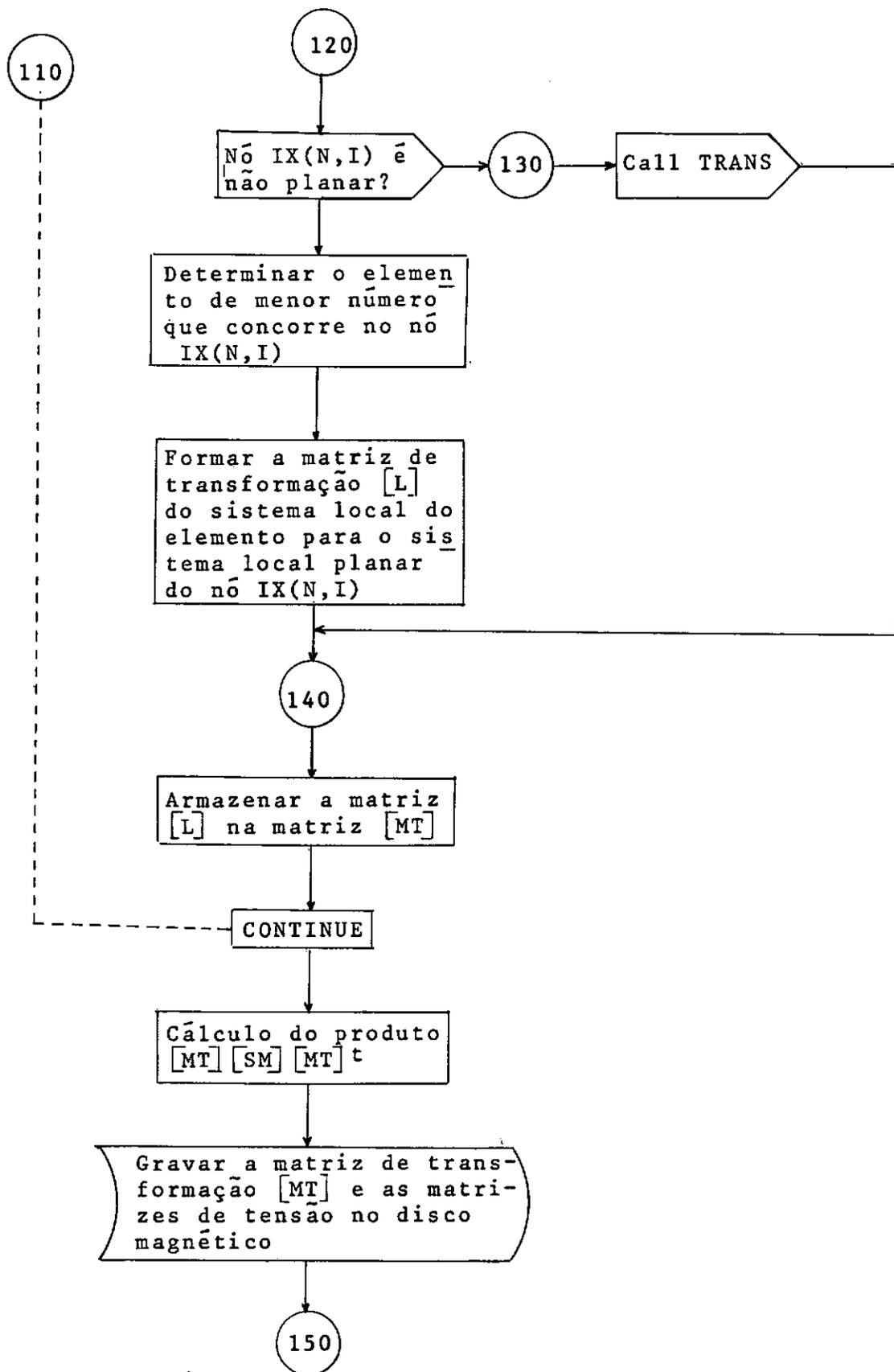
Ler os valores dos coeficientes de dilatação térmica (CDT) dos diferentes materiais e os valores das variações de temperatura das faces superior ($z = h/2$) e inferior ($z = -h/2$) para cada elemento (fig. 3.2b).

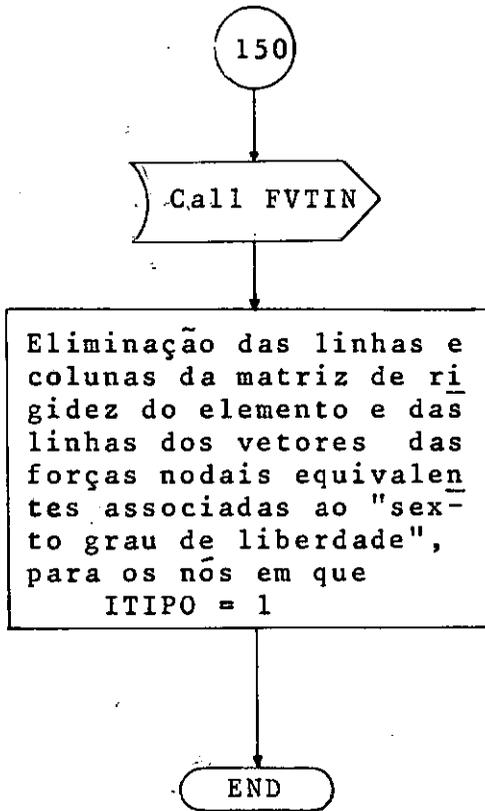
Observações:

- a) O número total de casos de carregamento não pode ser superior a três e devem ser tais que o número de colunas necessárias para armazená-los não exceda a seis;
- b) No caso em que $ITC = 3$ ou $ITC = 4$ o número total de elementos da estrutura não pode ser superior a 300 (número de linha da matriz [P]).
- c) Não se desejando analisar a estrutura submetida ao peso próprio, deve-se fazer $GAMA=0$. Atribuindo-se a GAMA um valor diferente de zero, a estrutura será calculada submetida ao peso próprio, podendo ainda considerar-se mais dois dos casos de carregamento dados no quadro 3.1.

3.6 - Subrotina FORMA - forma a matriz de rigidez de um elemento triangular plano para análise de cascas e estruturas laminares, utilizando as matrizes de rigidez do TRIM3 e T9.

DIAGRAMA DE BLOCOS





Explicações referentes a subrotina FORMA

Obtidas as matrizes de rigidez $[S_1]$ e $[S_2]$, correspondentes aos estados de membrana (TRIM3) e flexão (T9) respectivamente, a próxima etapa será formar a matriz de rigidez $[SM]$ para os dois estados atuando simultaneamente, seguindo para isso o esquema indicado na figura 2.6. A fim de evitar singularidade da matriz de rigidez da estrutura no caso de existirem nós planares, o programa elaborado funciona com três das cinco alternativas descritas na secção 2.7, dependendo do valor da variável ITP.

Seja N o número do elemento do qual se calcula a matriz de rigidez e $IX(N,1)$, $IX(N,2)$ e $IX(N,3)$ os seus nós.

Opções que podem ser utilizadas no programa:

1. $ITP = -1$

Serão introduzidos na matriz de rigidez do elemento, coeficientes de rigidez correspondentes a rotação segundo a normal a seu plano. Neste caso, se faz previamente $ITIPO = 0$ para todos os nós, isto significando que "para o programa" estes terão seis graus de liberdade e conseqüentemente não serão eliminadas linhas e colunas da matriz de rigidez; em seguida esta é transformada para o sistema global de referência sendo que para os nós com deslocamentos prescritos, o armazenamento poderá ser feito em relação ao sistema local tangente, devendo para isso a variável ISR assumir o valor 1. Caso o valor de ISR seja 0 o armazenamento será feito em relação ao sistema global.

2. $ITP = 0$

O armazenamento da matriz de rigidez em cada nó será feito em relação ao sistema local tangente, procedendo-se em seguida com a eliminação das linhas e colunas associadas ao "sexto grau de liberdade". Para isso a variável $ITIPO$ deverá assumir o valor 1 para todos os nós, pois desta forma serão eli

minadas as linhas e colunas de ordem seis, doze e dezoito da matriz de rigidez do elemento e as linhas de ordem seis, doze e dezoito dos vetores das forças nodais equivalentes.

3. ITP = 1

Para os nós não planares o armazenamento da matriz de rigidez será feito relativamente ao sistema global e para os nós planares em relação ao sistema local planar, eliminando-se neste último caso as linhas e colunas da matriz de rigidez e as linhas dos vetores das forças nodais equivalentes associadas ao "sexto grau de liberdade" (equações do tipo $0 = 0$). Com isto, tem-se nós com seis graus de liberdade (não planares) e nós com cinco graus de liberdade (planares).

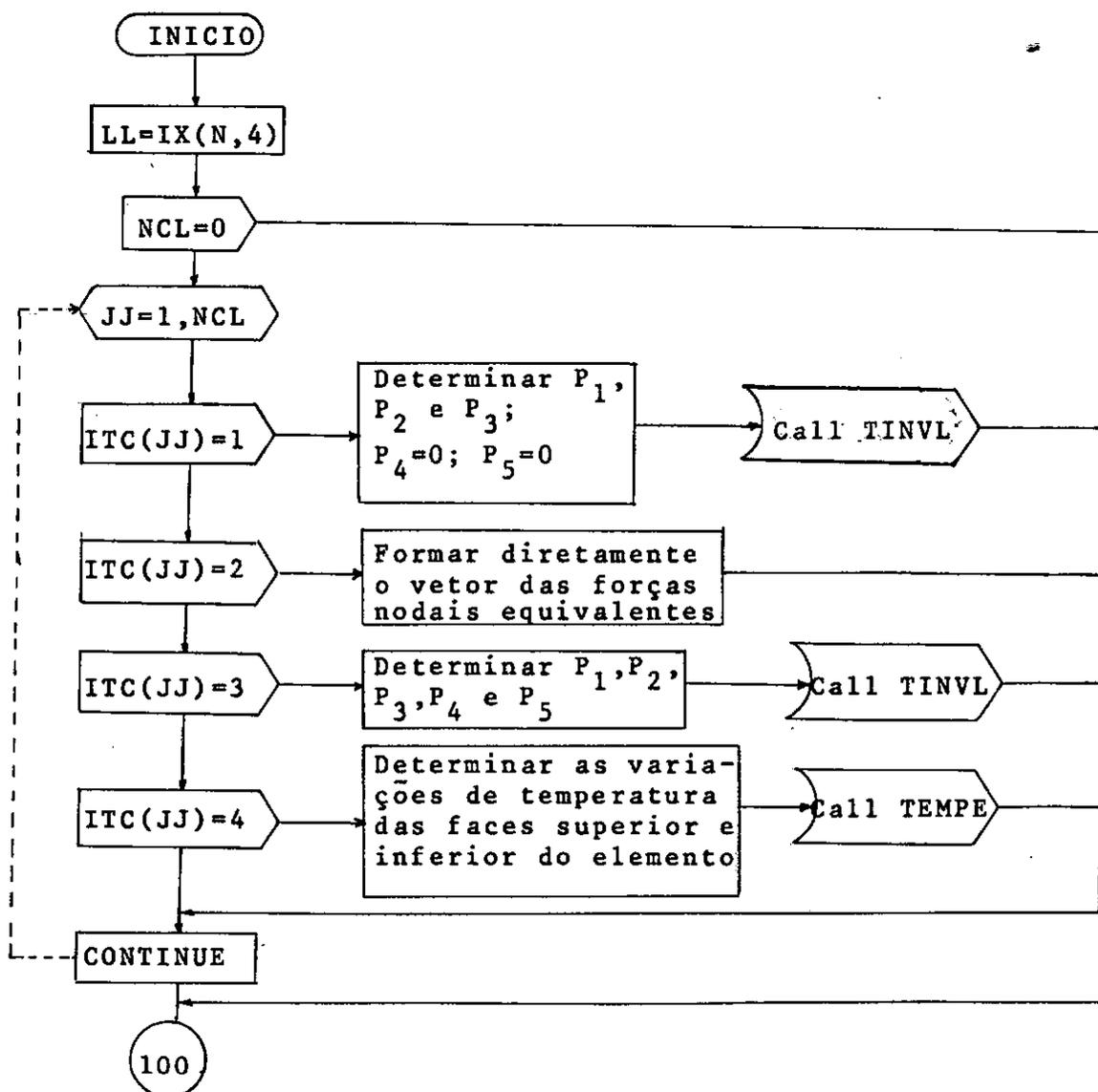
Para os nós com deslocamentos prescritos, é possível que o armazenamento da matriz de rigidez seja feito em relação ao sistema local tangente; para isso a variável ISR deverá assumir o valor 1. Caso $ISR = 0$, o armazenamento da matriz de rigidez para esses nós será feito em relação ao sistema global ou local planar, dependendo do valor de ITIPO para o nó considerado.

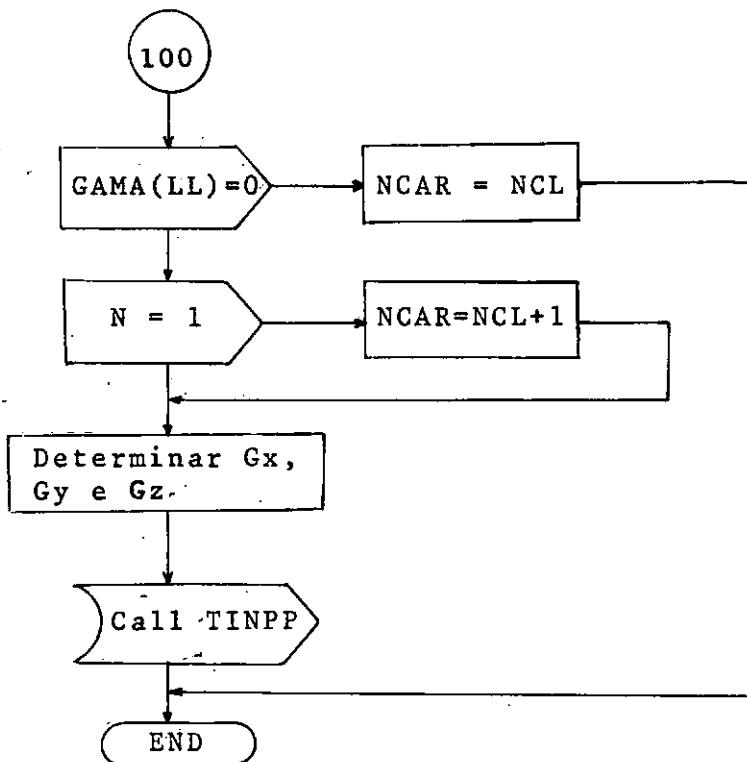
Antes de concluir, uma observação se faz necessária: a variável ITIPO só tem o significado descrito na subrotina DADOS (isto é, variável que caracteriza o tipo do nó), para

este caso ($ITP = 1$); nos outros dois casos ela é usada para "informar" ao computador se serão ou não eliminadas linhas e colunas da matriz de rigidez do elemento e linhas dos vetores das forças nodais equivalentes, não tendo o significado acima mencionado.

3.7 - Subrotina FVTIN - forma os vetores das forças nodais equivalentes do elemento.

DIAGRAMA DE BLOCOS





Explicações referentes a subrotina FVTIN

Através desta subrotina são formados os vetores das forças nodais equivalentes do elemento, podendo-se ter no máximo três casos de carregamento para a estrutura.

Seja N o elemento do qual se calculam as forças nodais equivalentes e $IX(N,4)$ o número que caracteriza seu material.

Se $NCL = 0$ (NCL - número de casos de carregamento excluindo o peso próprio), isto significa que a estrutura será analisada submetida apenas ao peso próprio, sendo calculados G_x , G_y e G_z , que são as componentes de $GAMA$ (peso específico) relativamente ao sistema local do elemento, obtendo-se a seguir o ve-

tor das forças nodais equivalentes através da subrotina TINPP. Neste caso $NCAR = 1$ sendo $NCAR$ o número total de casos de carregamento.

Se $NCL \neq 0$, obtêm-se os vetores das forças nodais e equivalentes, dependendo dos valores de ITC .

Se $ITC = 1$, determinam-se P_1 , P_2 e P_3 (valores das pressões nos nós 1, 2 e 3 do elemento N respectivamente), $P_4 = P_5 = 0$ (cargas atuando no plano do elemento). Em seguida através da subrotina TINVL obtêm-se o vetor das forças nodais equivalentes.

Se $ITC = 2$, as forças nodais equivalentes são obtidas imediatamente, uma vez que as componentes das cargas concentradas deverão ser fornecidas em relação ao sistema no qual serão calculados os deslocamentos do nó.

Se $ITC = 3$, determinam-se P_1 , P_2 e P_3 (pressão nos nós do elemento), P_4 e P_5 (cargas situadas no plano do elemento). Como no caso de $ITC = 1$, por meio da subrotina TINVL são calculadas as forças nodais equivalentes.

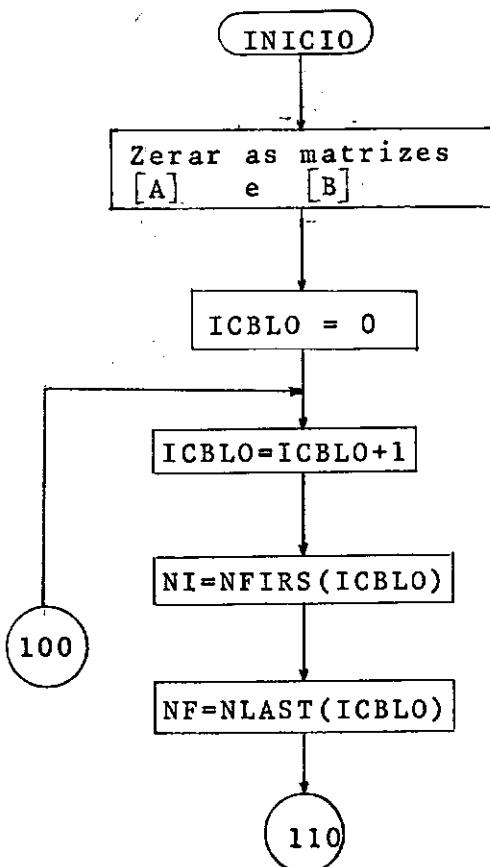
Se $ITC = 4$, determinam-se as variações de temperatura das faces superior ($z = h/2$) e inferior ($z = -h/2$) e através

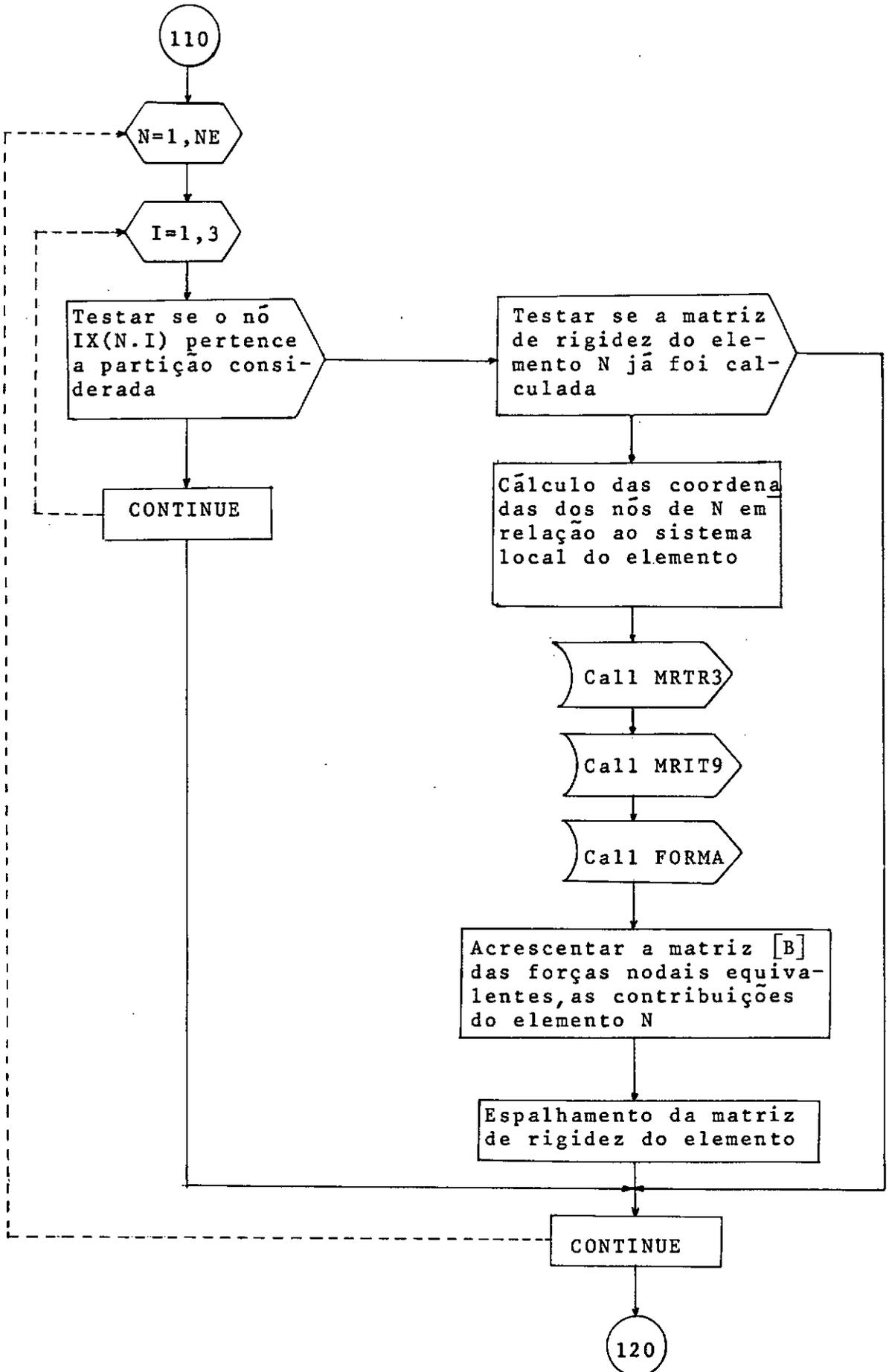
da subrotina TEMPE é calculado o vetor das forças nodais equivalentes.

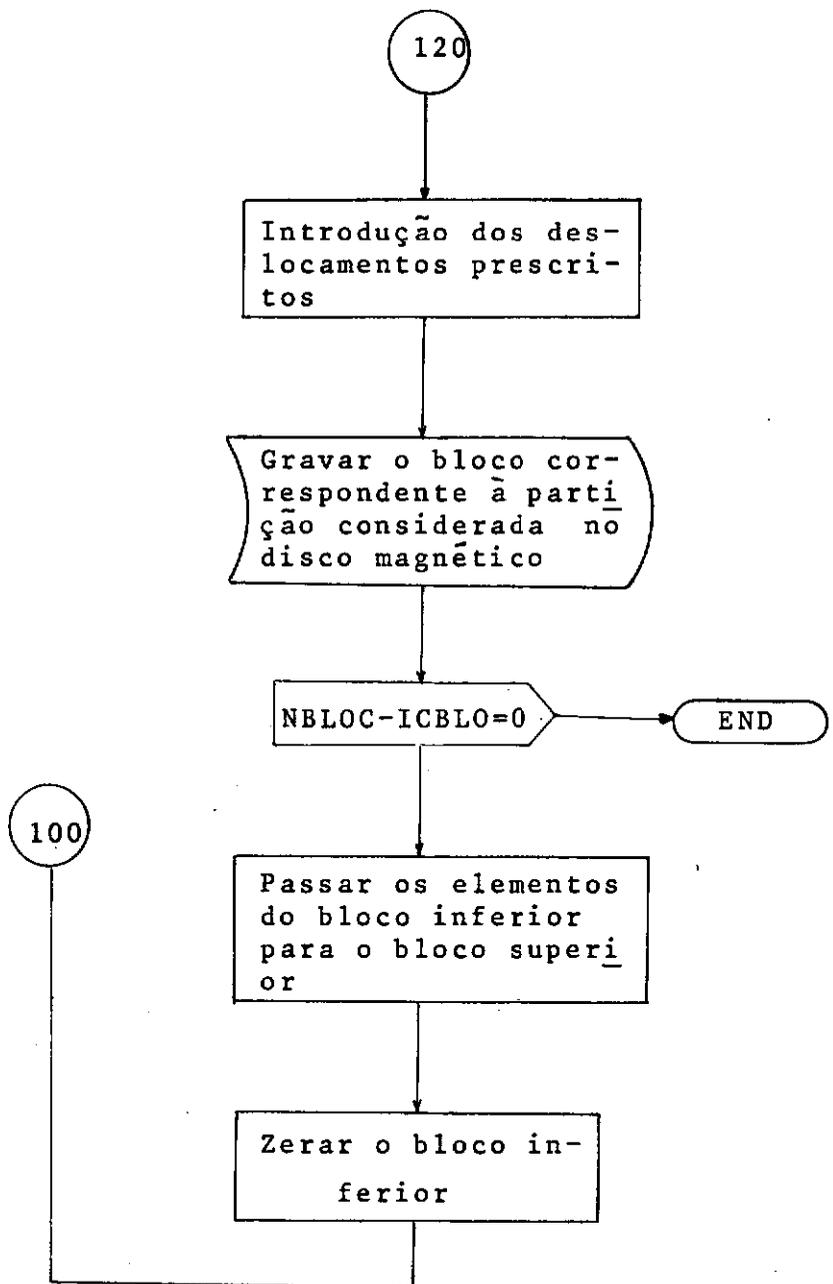
Ainda no caso em que $NCL \neq 0$, se $GAMA = 0$ a estrutura não será analisada submetida a peso próprio e $NCAR = NCL$. Se $GAMA \neq 0$, será acrescentado mais um caso de carregamento (o peso próprio) e $NCAR = NCL + 1$.

3.8 - Subrotina RIGES - Forma a matriz de rigidez da estrutura

DIAGRAMA DE BLOCOS







Notações

NI	Nó inicial da partição
NF	Nó final da partição
NBLOC	Número de partições (blocos)
ICBLO	Índice contador do número de blocos
IX(N,1), IX(N,2), IX(N,3)	Nós do elemento N

Explicações referentes a subrotina RIGES

A matriz de rigidez de uma estrutura, além de simétrica apresenta a característica de ter todos os seus elementos não nulos concentrados numa faixa da diagonal principal (fig. 3.3), daí só ser necessário armazenar os elementos da faixa superior (ou inferior).

Inicialmente, a estrutura é suposta dividida em partições (fig. 3.4); designando por MBAND a largura da banda (no máximo 80), a faixa superior da matriz de rigidez correspondente a cada partição será denominada bloco.

Seja $[A]$ uma matriz do tipo 160 x 80 e $[A_1]$ e $[A_2]$ submatrizes do tipo $m \times 80$ e $(160-m) \times 80$ respectivamente, sendo m função do número de nós da partição considerada ($0 < m \leq 80$).

$$[A] = \begin{bmatrix} [A_1] \\ \text{-----} \\ [A_2] \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} [A_1] \longrightarrow \text{bloco superior} \\ [A_2] \longrightarrow \text{bloco inferior} \end{array}$$

Em $[A_1]$ serão formados os blocos correspondentes as diversas partições; o número de nós de cada uma delas deverá ser tal que o bloco correspondente não ultrapasse 80 linhas.

Assim se $ITP = -1$, cada partição terá 13 nós; se $ITP = 0$ cada partição terá 16 nós e se $ITP = 1$ o número de nós de cada partição não pode ser fixado "a priori", pois neste ca-

so tem-se nós com cinco graus de liberdade e nós com seis graus de liberdade; a subrotina DEBLO tem por finalidade determinar o nó inicial e o nó final de cada partição.

A técnica utilizada na resolução do sistema de equações lineares para obtenção dos deslocamentos, requer que se tenha na memória principal do computador, simultaneamente dois blocos; este fato foi aproveitado para que os elementos comuns a duas partições não tivessem a matriz de rigidez calculada duas vezes, justificando assim a existência da matriz $[A_2]$. Seja então P_i uma partição genérica; o bloco correspondente a esta partição será armazenado em $[A_1]$. As contribuições dos elementos da partição P_i para a partição P_{i+1} serão armazenadas na matriz $[A_2]$. Uma vez obtido o bloco correspondente a partição P_i , é feita a introdução dos deslocamentos prescritos conforme técnica que será exposta adiante e depois gravado no disco magnético. Em seguida os elementos de $[A_2]$ são armazenados em $[A_1]$ (tem-se agora um novo m), zerando-se a matriz $[A_2]$. Passa-se então a partição P_{i+1} , calculando as matrizes de rigidez dos elementos desta partição que não pertencem a partição P_i . Este processo é repetido para todas as partições.

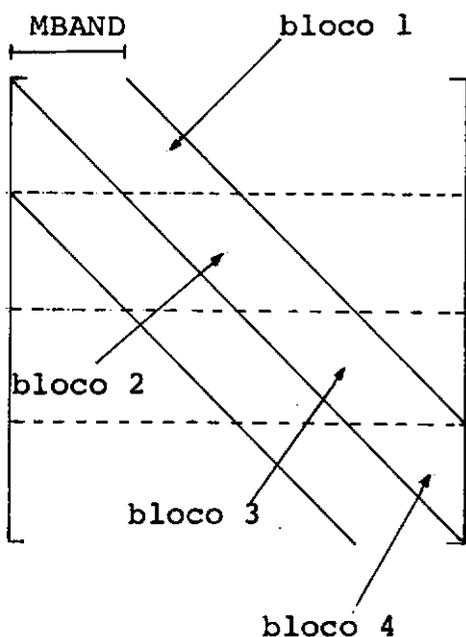


Fig. 3.3

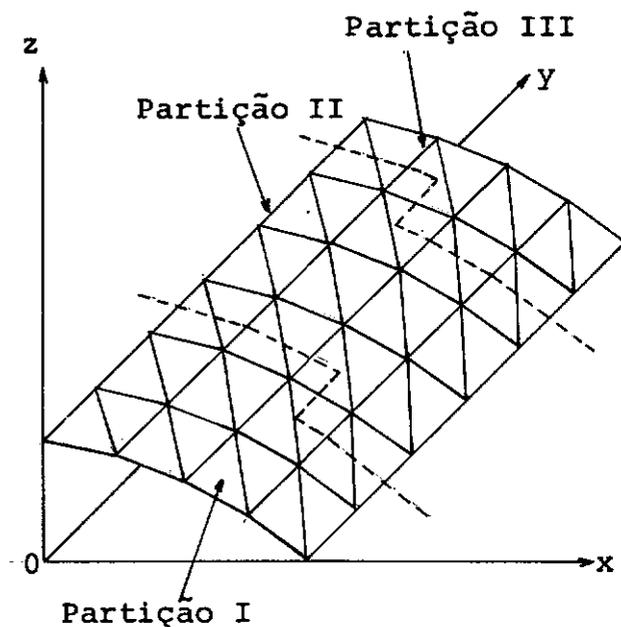


Fig. 3.4

Introdução dos deslocamentos prescritos:

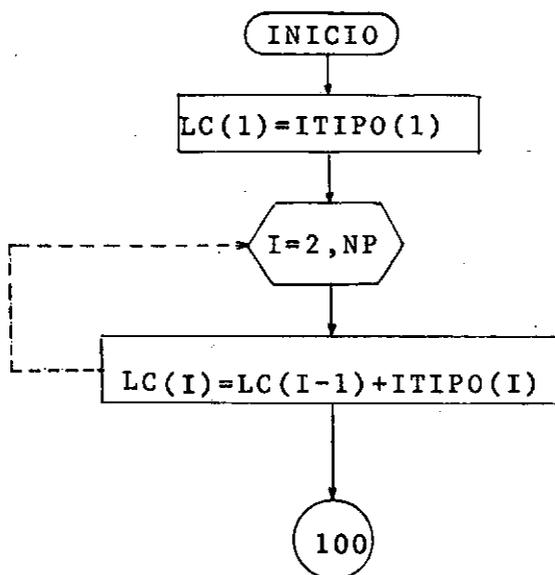
Dada uma estrutura, sempre são conhecidos os valores dos deslocamentos de alguns de seus nós (deslocamentos prescritos) e no mínimo devem ser em número suficiente para impedirem movimentos de corpo rígido.

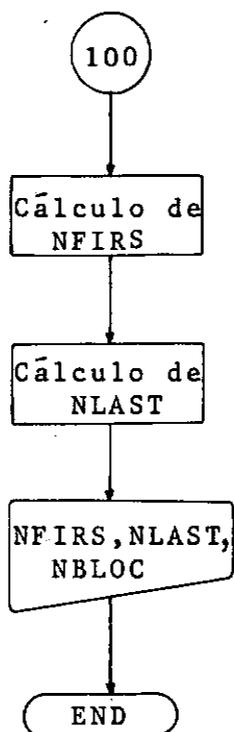
Com isso, são conhecidos os valores de algumas das incógnitas do problema, cuja introdução no sistema de equações é feita pela subrotina DESPR utilizando a seguinte técnica:

Seja δ_i o valor (conhecido) da incôgnita x_i ; inicialmente subtrai-se dos termos independentes de todas as equações, exceto da i -ésima equação, o produto do deslocamento prescrito pelo coeficiente da incôgnita x_i em cada equação. Em seguida zeram-se os elementos da i -ésima linha e i -ésima coluna da matriz de rigidez da estrutura, com exceção do elemento da diagonal principal o qual se faz igual a 1; por fim, substitui-se o termo independente da i -ésima equação por δ_i . Na maioria dos casos $\delta_i = 0$.

3.9 - Subrotina DEBLO - Determinação dos nós inicial e final de cada partição.

DIAGRAMA DE BLOCOS





Explicações referentes a subrotina DEBLO

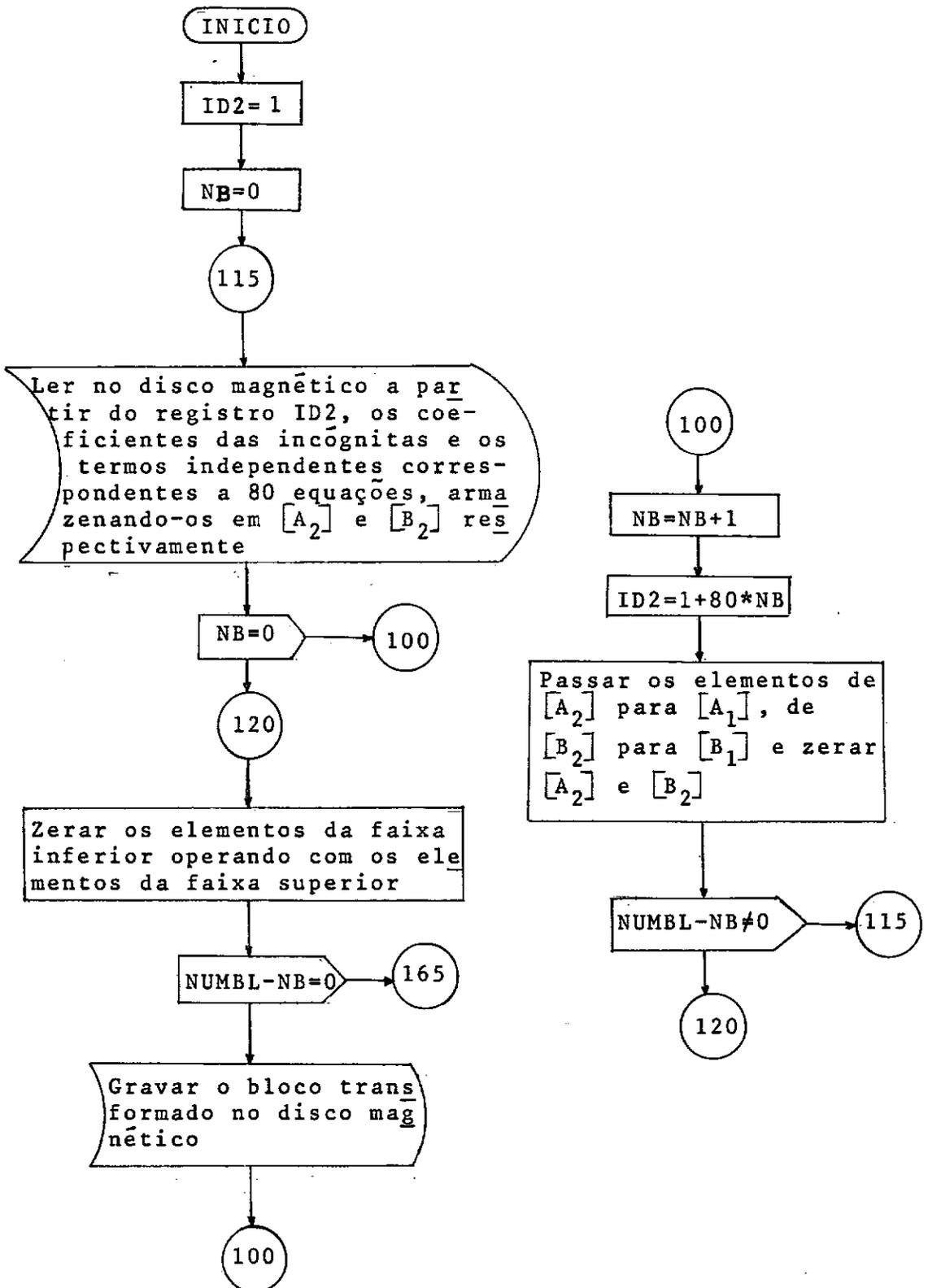
LC - Variável cujo valor para cada nó é o número de nós com cinco graus de liberdade até o nó considerado inclusive.

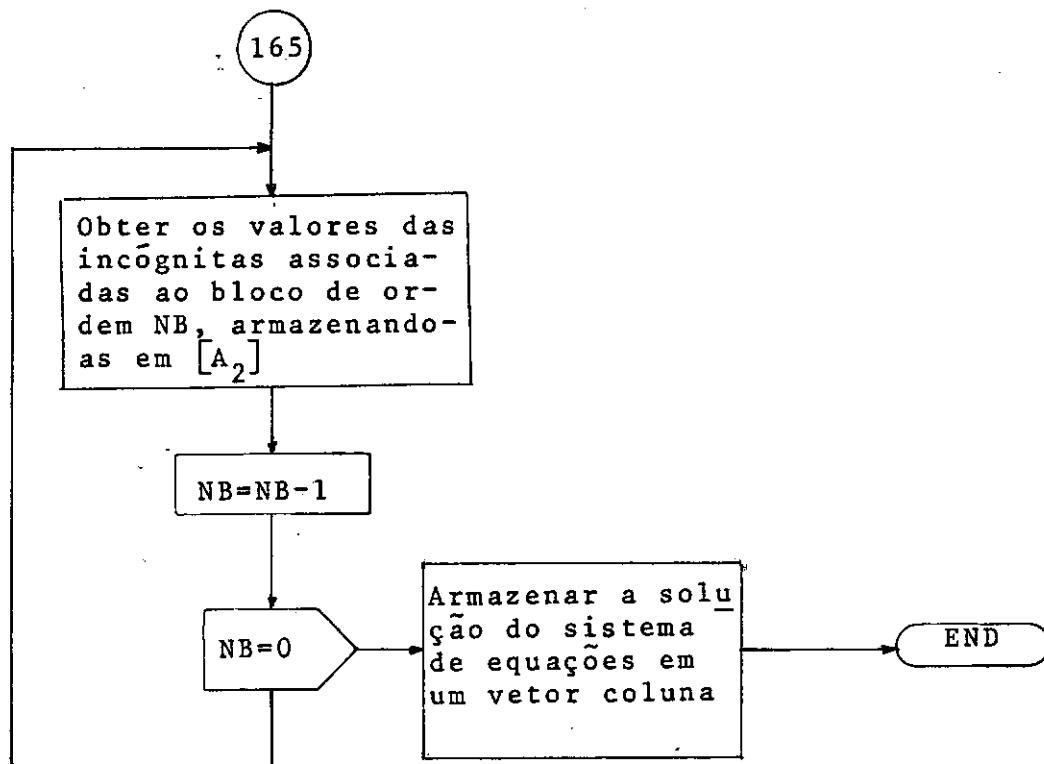
NFIRS - Nó inicial de cada partição.

NLAST - Nó final de cada partição.

NBLOC - Número de partições (blocos).

3.10 - Subrotina RESOL - Resolve o sistema de equações lineares utilizando o Método de Gauss.

DIAGRAMA DE BLOCOS



Explicações referentes a subrotina RESOL

Notações:

- ID2 Número do registro a partir do qual serão lidos os coeficientes das equações e os termos independentes no disco magnético
- NB Índice contador do número de blocos
- $[A_1]$ e $[A_2]$ Matrizes do tipo 80 x 80
- $[B_1]$ e $[B_2]$ Matrizes do tipo 80 x 3

Processo utilizado para a resolução do sistema de equações lineares:

Utilizou-se o método de Gauss para resolver o sistema de equações. Este método consiste em obter um sistema equivalente ao inicial, tendo porém a matriz dos coeficientes das incógnitas, todos os elementos de um mesmo lado de uma diagonal iguais a zero; isto é conseguido por meio de operações elementares com linhas. Entretanto no caso da matriz dos coeficientes apresentar a característica de ser uma matriz banda, o processo de transformação das equações pode ser feito de tal forma que se tenha na memória principal do computador um número de equações no mínimo igual a duas vezes a largura da banda (fig. 3.5); no programa elaborado trabalha-se com dois blocos de 80 linhas cada. Com esta técnica se consegue resolver sistemas com grande número de equações em computadores pequenos.

Como os elementos da faixa inferior da matriz de rigidez não foram armazenados (matriz simétrica), as operações elementares com linhas são aplicadas aos elementos da faixa superior, de tal forma que anulassem os elementos da faixa inferior.

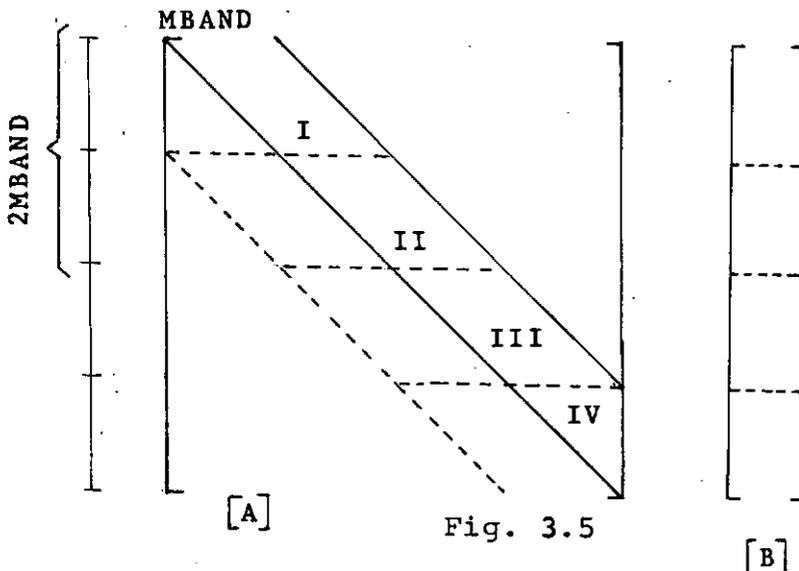


Fig. 3.5

Uma vez triangularizada a matriz dos coeficientes, obtêm-se facilmente os valores das incógnitas, armazenando-os em $[A_2]$. Porém é mais conveniente armazenar os deslocamentos em um vetor coluna, sendo utilizado para isso o seguinte artifício: quando foi dimensionada a matriz $[A]$, dimensionou-se anteriormente um vetor $\{DESNO\}$ com 160 linhas, no qual serão armazenados os deslocamentos (solução do sistema); como estes em geral são em número superior a 160, ao ultrapassar esse valor, o vetor $\{DESNO\}$ passará a utilizar a área reservada para a matriz $[A]$, conforme está esquematizado na figura 3.6, de tal forma que não destrua os valores das incógnitas que ainda não foram "armazenados em $\{DESNO\}$.

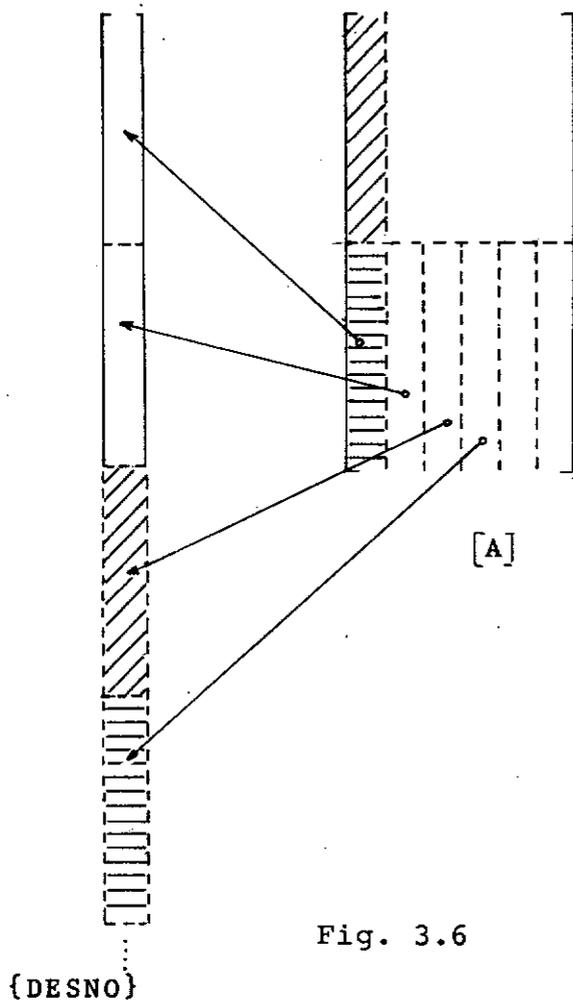
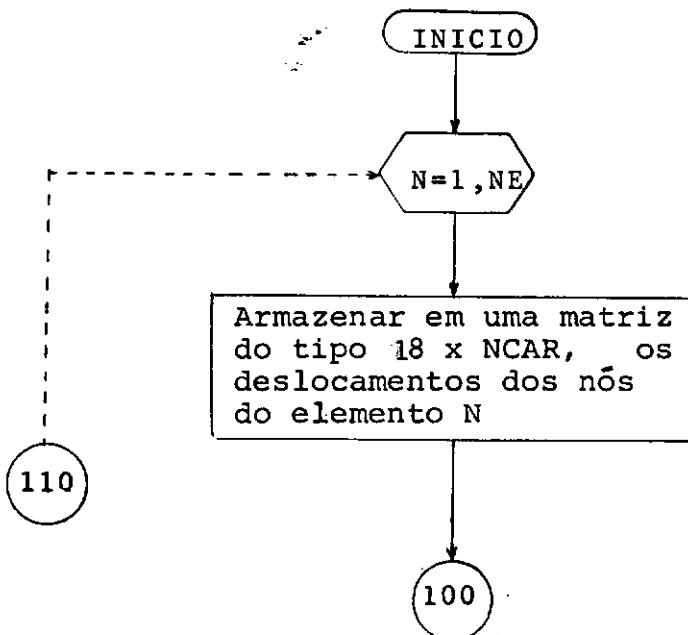


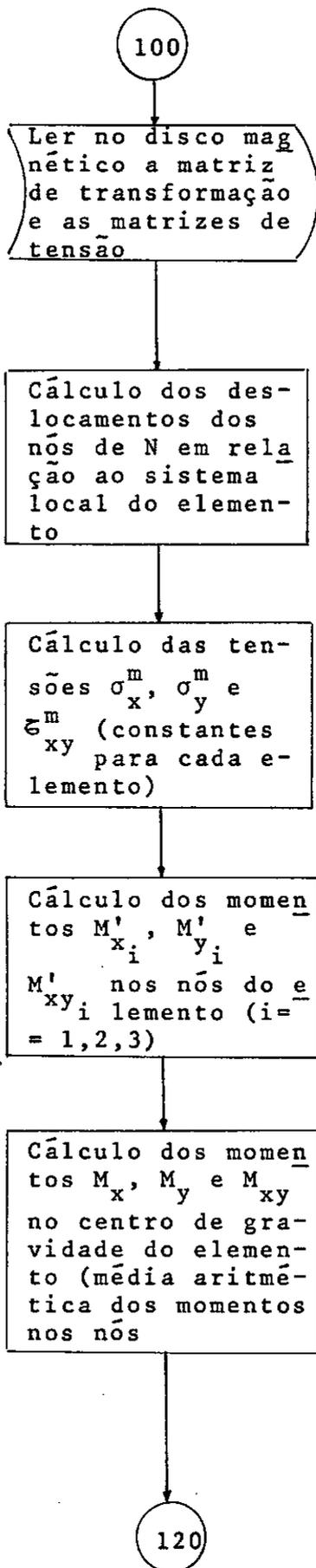
Fig. 3.6

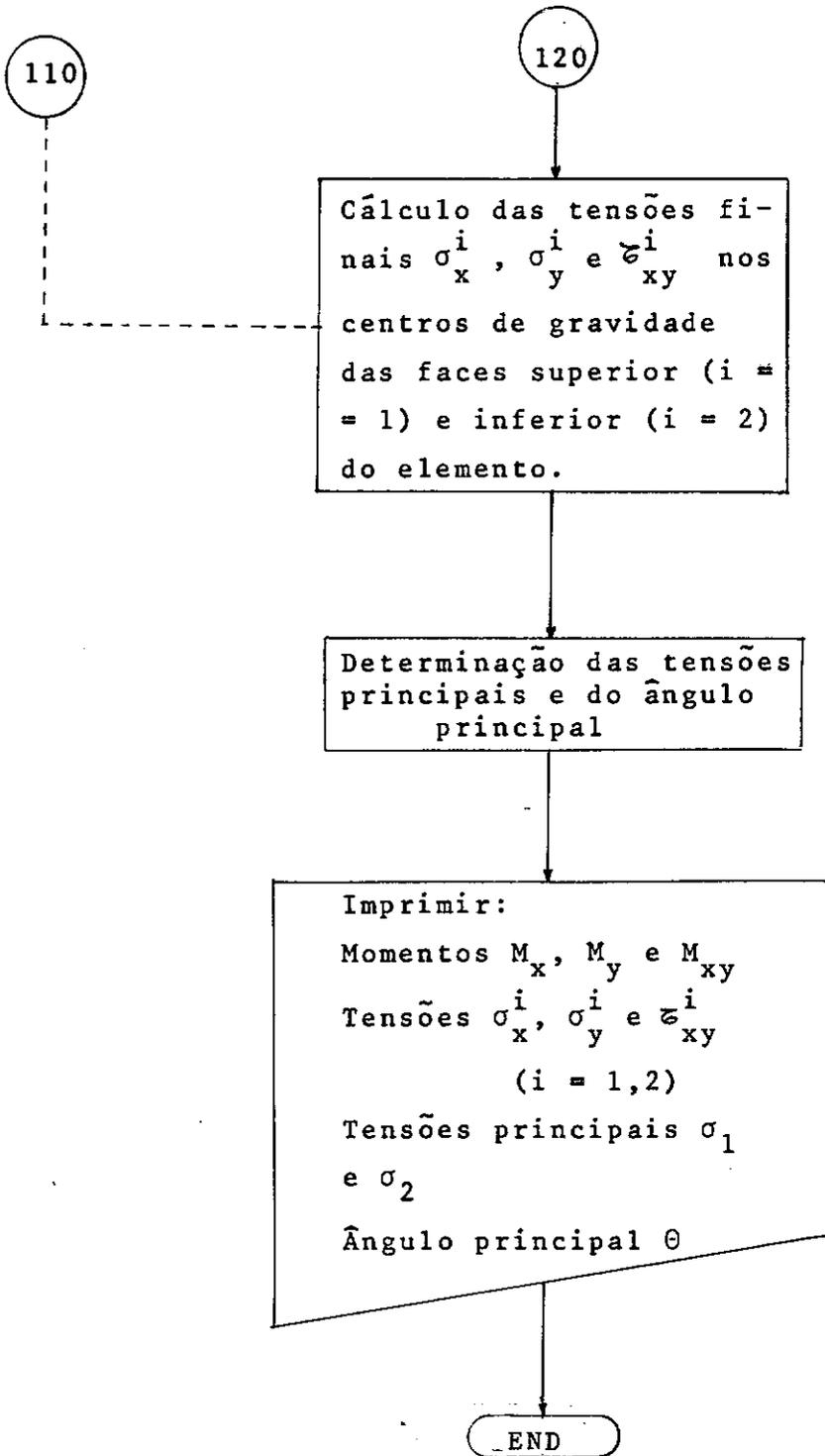
Observações:

- a) No caso de existir mais de um caso de carregamento (matriz $[B]$ com mais de uma coluna), a sequência de operações será aplicada simultaneamente a todas as colunas, o que torna o programa muito eficiente para vários casos de carregamento.
- b) A subdivisão de $[A]$ em submatrizes $[A_1]$ e $[A_2]$, foi feita apenas para facilitar a explanação, não se considerando no programa estas submatrizes (o mesmo se aplica a matriz $[B]$).

3.11 - Subrotina CTENS - Cálculo dos momentos e tensões que atuam nos elementos.

DIAGRAMA DE BLOCOS





O cálculo dos momentos e tensões que atuam nos elementos segue o mesmo procedimento descrito na secção 2.9, inclusive utilizando as mesmas notações, dispensando por conseguinte maiores detalhes.

3.12 - Comentários sobre as demais subrotinas

Serão feitas algumas considerações sobre as demais subrotinas uma vez que por serem bastante simples dispensam diagramas de blocos; elas têm, por finalidade, formar diretamente matrizes deduzidas neste ou em outros trabalhos sobre o assunto.

Subrotina TRANS

Forma a matriz de transformação do sistema local do elemento para o sistema global, utilizando as expressões deduzidas na secção 2.3.

Subrotina MRTR3

Forma as matrizes de rigidez e tensão de um elemento triangular plano com seis deslocamentos nodais, para estado plano de tensões. (Ver Apendix B).

Subrotina MRIT9

Forma as matrizes de rigidez e tensão de um elemento triangular plano com nove deslocamentos nodais para flexão de

104.

placas (ver Apêndice B).

Subrotina TINVL

Forma o vetor das forças nodais equivalentes para um carregamento normal ao plano do elemento e linearmente variável (ver Apêndice B).

Subrotina TINPP

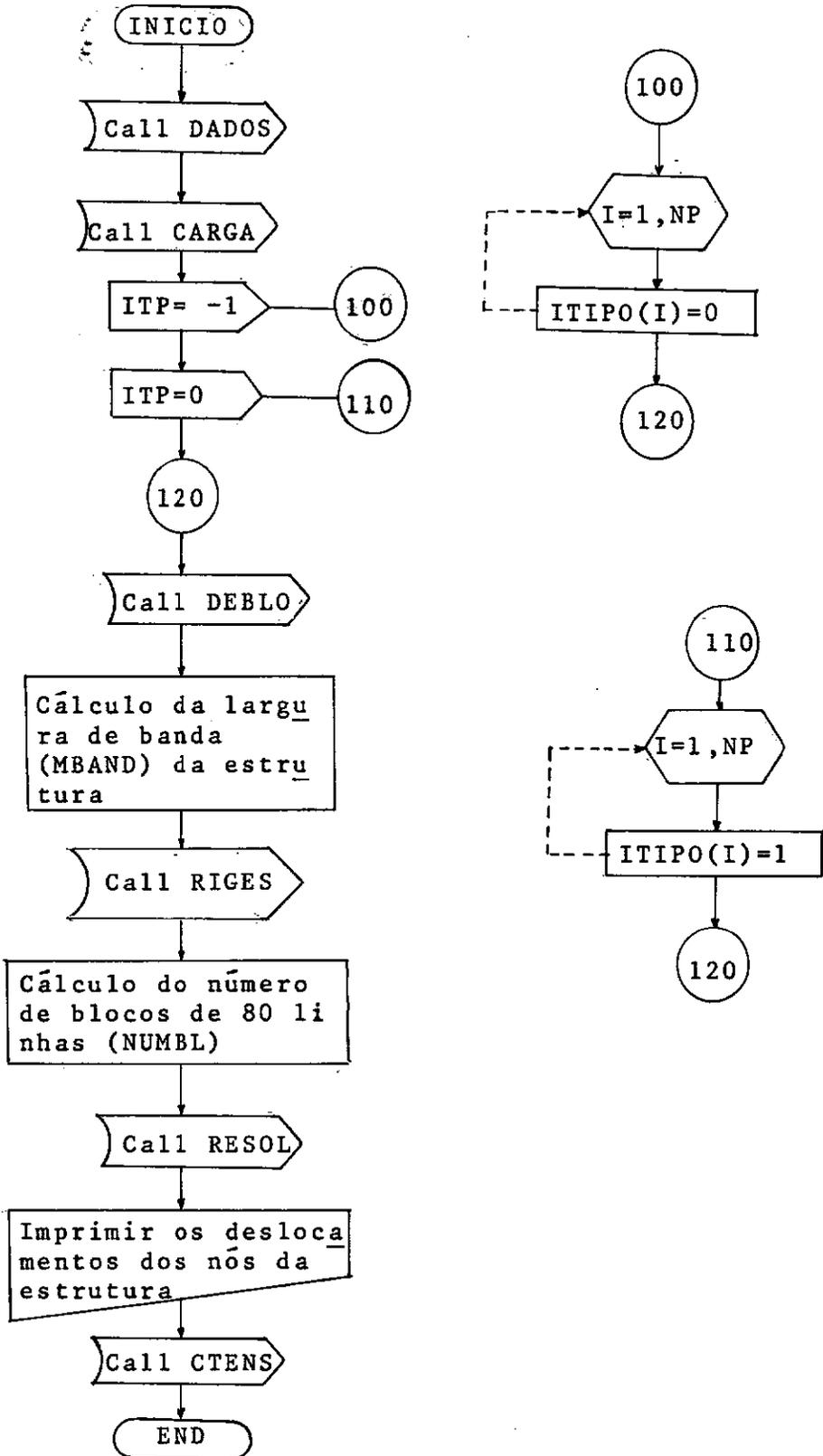
Forma o vetor das forças nodais equivalentes para as forças de massa (ver Apêndice B).

Subrotina TEMPE

Forma o vetor das forças nodais equivalentes para uma variação de temperatura uniforme em cada elemento e linearmente variável através de sua espessura (ver secção 2.8).

3.13 - Programa Principal

DIAGRAMA DE BLOCOS



O programa principal obedece a uma estruturação bastante simples e todas as explicações necessárias para seu entendimento já foram dadas anteriormente.

3.14 - Considerações finais

O programa elaborado foi testado com sucesso para várias estruturas, e idealizado de tal forma a permitir facilmente modificações tais como: considerações sobre apoios elásticos, casos de carregamento não previstos no quadro 3.1, introdução de novos elementos etc.

Pode também ser utilizado para análise de placas e de chapas submetidas a estado plano de tensões, entretanto para estes dois casos, a técnica por ele usada se torna muito sofisticada, sendo calculadas matrizes e realizadas operações desnecessárias ao problema.

Finalmente é apresentado um esquema (Fig. 3.7) constando de todas as subrotinas que compõem o programa, na ordem em que são chamadas.

PROGRAMA PRINCIPAL

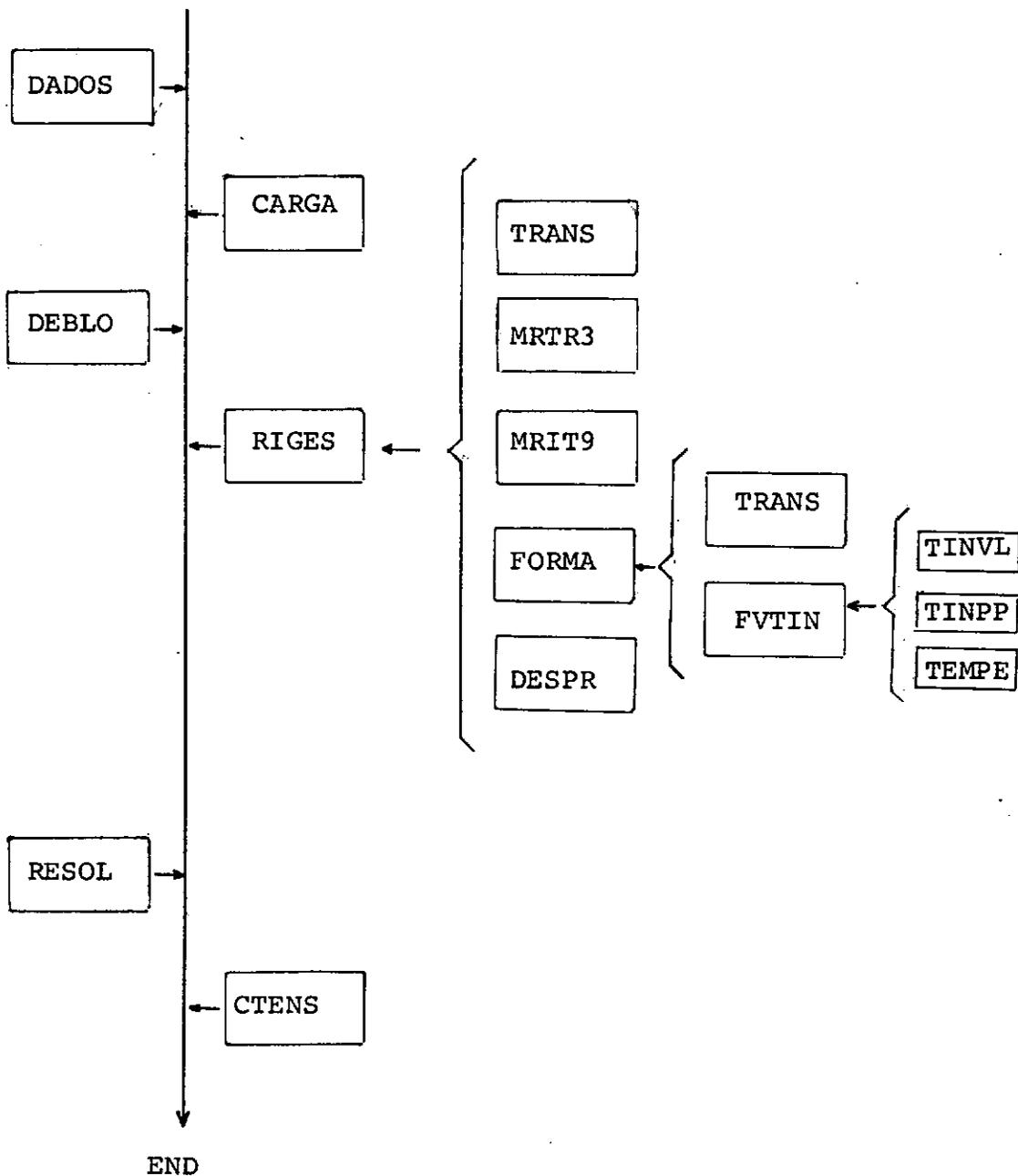


Fig. 3.7

CAPITULO IVAPLICAÇÕES E CONCLUSÕES4.1 - Aplicação

Exemplo 1:

Analisa-se uma casca cilíndrica, com suas extremidades apoiadas em diafragmas. São apresentados diagramas das de flexões, momentos fletores longitudinais e momentos fletores transversais na seção média e também um diagrama dos deslocamentos longitudinais do diafragma.

Características geométricas: (ver Fig. 4.1)

$$R = 7.62\text{m}$$

$$L = 15.24\text{m}$$

$$h = 0.0762\text{m (espessura)}$$

$$\theta = 40^{\circ}$$

Características do material:

$$E = 2\ 100\ 000\ \text{t/m}^2$$

$$\gamma = 5.78\text{t/m}^3$$

$$\nu = 0$$

Carregamento e processo utilizado para a resolução da estrutura:

A estrutura foi analisada submetida ao peso próprio; devido à simetria considerou-se apenas um quarto, sendo utilizada uma malha 7 x 9 (Fig. 4.2) e empregando-se três das opções descritas na secção 2.7, cada uma das quais caracterizada por um valor assumido pela variável ITP (ver subrotina FORMA página 79).

Resultados obtidos:

Da observação dos diagramas apresentados e do quadro 4.1, constata-se que os melhores resultados são obtidos com as opções caracterizadas por $ITP = -1$ e $ITP = +1$.

A técnica de considerar-se todos os nós com cinco graus de liberdade não conduziu a bons resultados neste caso devido ao fato da casca não ser suficientemente abatida e a malha não muito refinada para que seja possível a eliminação das equações de equilíbrio associadas à rotação segundo a normal em cada nó, sem alterar sensivelmente a solução do sistema. No quadro 4.1 são apresentadas as deflexões no centro (A) e no bordo (B), correspondentes aos diferentes valores de ITP.

ITP	DEFLEXÃO EM A (\bar{W}_A)	DEFLEXÃO EM B (\bar{W}_B)	REFERENCIAL
-1	-0.01372	0.08824	Global
0	-0.00910	0.08304	Local Tangente
1	-0.01122	0.09292	Local Planar
ref.24	-0.01300	0.09300	Global

QUADRO 4.1

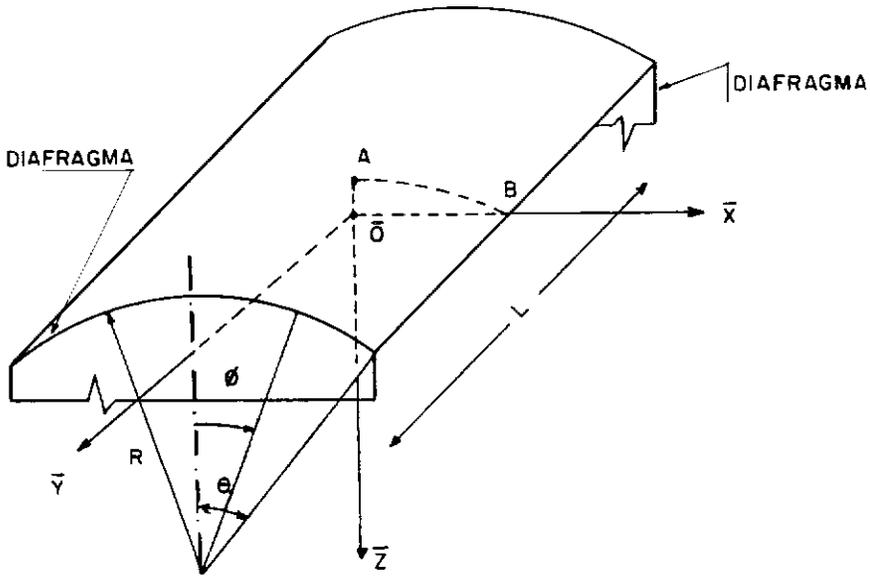


FIG. 4.1 CASCA CILÍNDRICA CIRCULAR

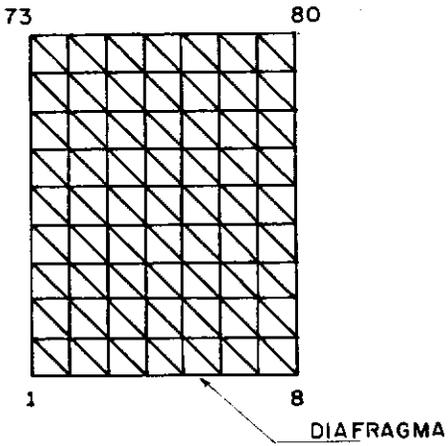


FIG. 4.2 MALHA UTILIZADA (7 x 9)

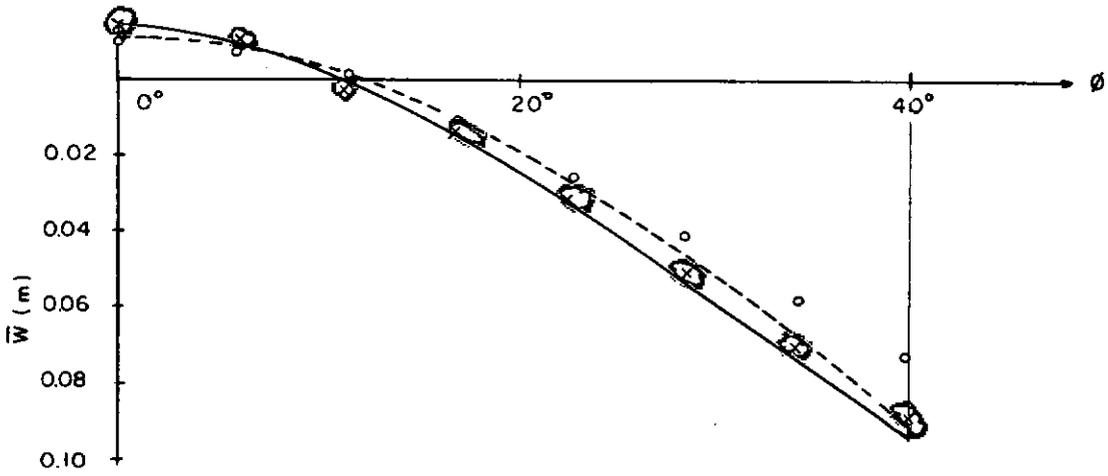


FIG. 4.3 DEFLEXÕES NA SEÇÃO MÉDIA $\bar{Y}=0$

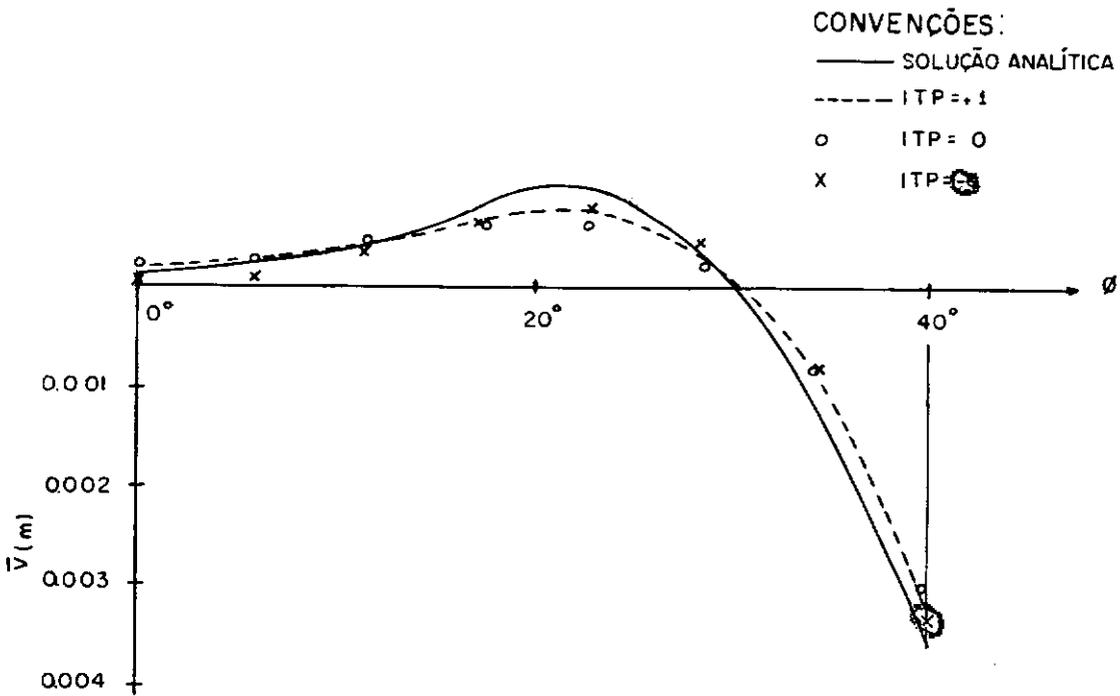


FIG. 4.4 DESLOCAMENTOS LONGITUDINAIS DO DIAFRAGMA

114.

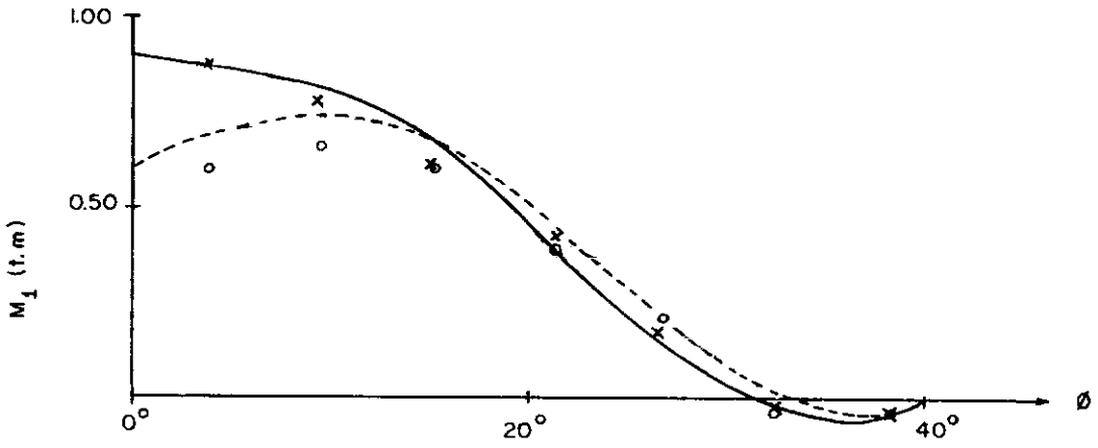


FIG. 4.5 MOMENTOS FLETORES TRANSVERSAIS NA SEÇÃO MÉDIA $\bar{y}=0$

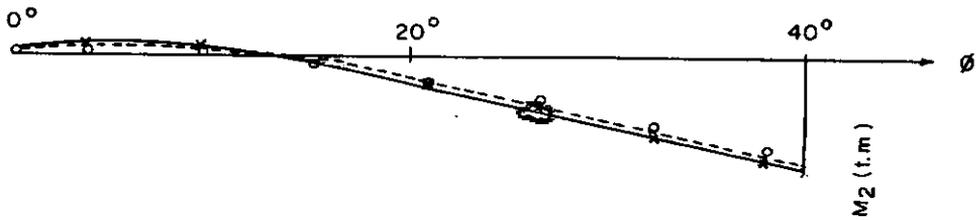


FIG. 4.6 MOMENTOS FLETORES LONGITUDINAIS NA SEÇÃO MÉDIA $\bar{y}=0$

Exemplo 2:

Analisa-se uma casca cilíndrica tendo seus quatro bordos engastados. Inicialmente, é apresentado um gráfico comparando-se a solução obtida com a proveniente da análise da estrutura com outros tipos de elementos finitos. Seguem-se diagramas através dos quais se pode observar o comportamento da casca, fazendo-se variar a flexa f (Fig. 4.7) e mantendo-se constante suas dimensões no plano $\bar{x} \bar{O} \bar{y}$.

Características geométricas:

$$a = 10.00\text{m}$$

$$h = 0.125\text{m}$$

valores de f (m)	valores de R (m)
0.512	100.0000
0.250	203.9550
0.105	477.5550
0.023	2202.6432

Características do material:

$$E = 450\,000\text{t/m}^2$$

$$\nu = 0.30$$

Carregamento e processo utilizado para a resolução da estrutura:

Devido à simetria em relação a dois dos eixos, analisou-se apenas um quarto, utilizando-se uma malha 11×11

116.

(144 nós e 242 elementos) a fim de comparar-se a solução obtida com a proveniente da análise empregando-se outros tipos de elementos finitos, considerou-se a estrutura submetida a uma pressão $p(t/m^2)$ uniforme ($p \in [0,0.20]$) sendo utilizadas as três opções disponíveis do programa.

No estudo referente ao comportamento da estrutura ao variar-se a flexa f , adotou-se a alternativa caracterizada por $ITP = -1$ e $p = 0.04t/m^2$

Resultados obtidos:

Conforme se pode observar na Fig. 4.10, a opção em que são considerados todos os nós com cinco graus de liberdade, conduziu a ótimos resultados comparados aos apresentados na referência 27. Nesta mesma figura mostra-se uma solução do problema baseada na análise não linear²⁷.

Dos diagramas apresentados nas figuras 4.12, 4.13 4.14 e 4.15, pode-se constatar uma grande influência do estado membranal no comportamento da estrutura, pois os resultados obtidos para $2a/f = 40$, por exemplo, conduziram a valores bem diferentes daqueles apresentados por uma placa de mesmas dimensões que a projeção da casca no plano $\bar{x} \bar{O} \bar{y}$. Outro fato a ser ressaltado é que ao diminuir-se f , as tensões de membrana em módulo, crescem até certo valor, e em seguida decrescem, passando a es-

trutura por uma "inversão" no seu comportamento, sendo possível que ocorra singularidade da solução analítica.

Sugere-se um estudo de cascas muito abatidas, a fim de que se possa avaliar a influência do estado de membrana no comportamento estrutural, bem como os fatores que contribuem para uma maior ou menor influência.

Na figura 4.17 tem-se o diagrama das tensões nas faces superior e inferior da casca, apenas para dois valores de f (extremos do intervalo analisado): $f = 0.512m$ e $f = 0.023m$

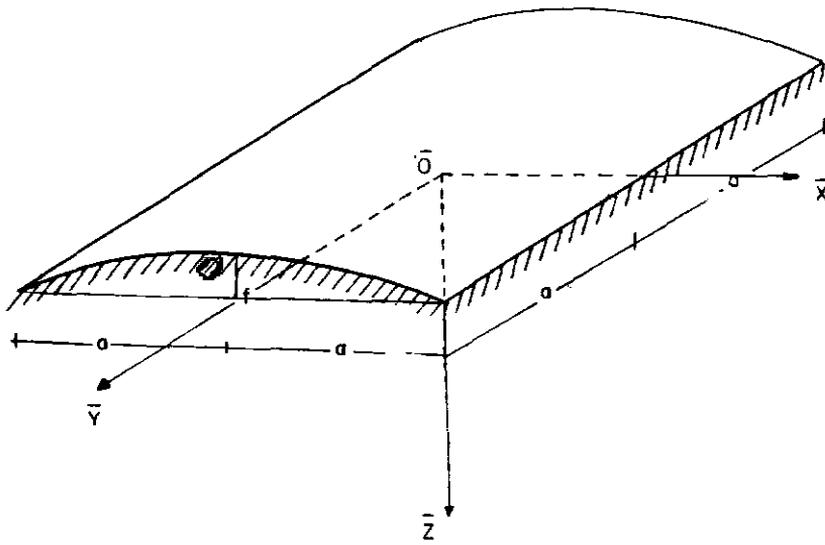


FIG. 47 CASCA CILÍNDRICA ENGASTADA

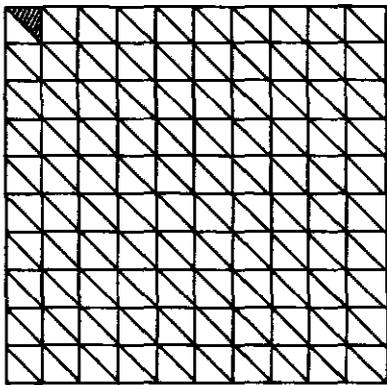
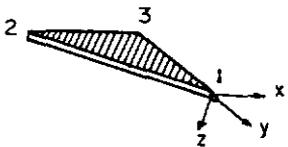


FIG 48 MALHA UTILIZADA

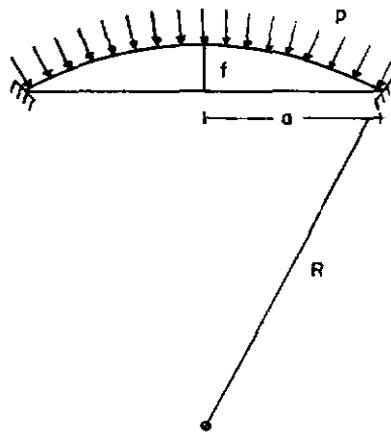


FIG. 4.9 SEÇÃO TRANSVERSAL DA CASCA

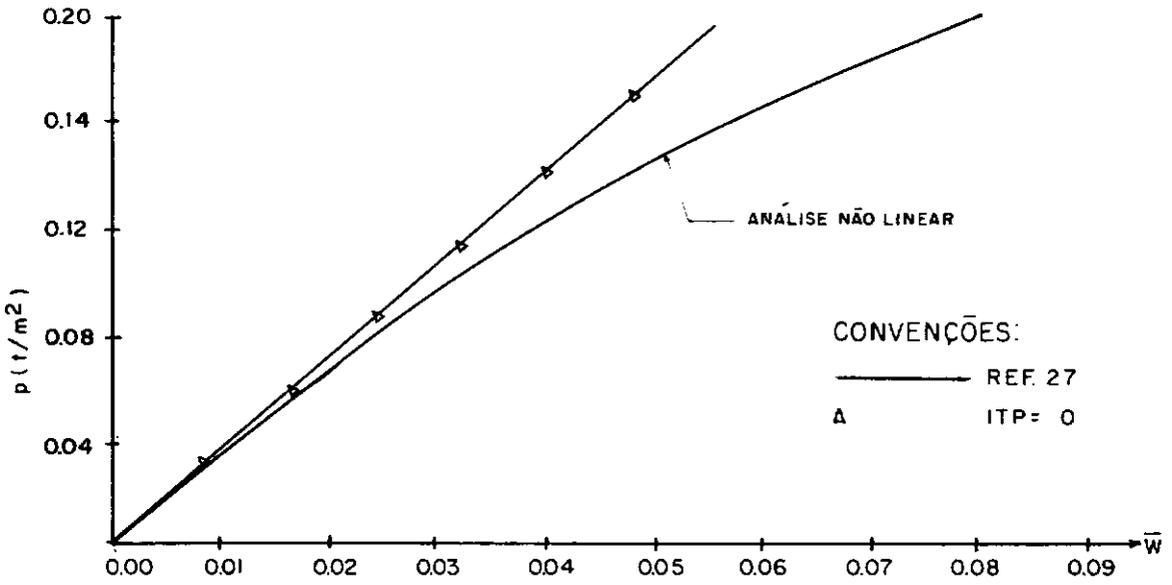


FIG. 4.10 DEFLEXÕES NO CENTRO EM FUNÇÃO DE p

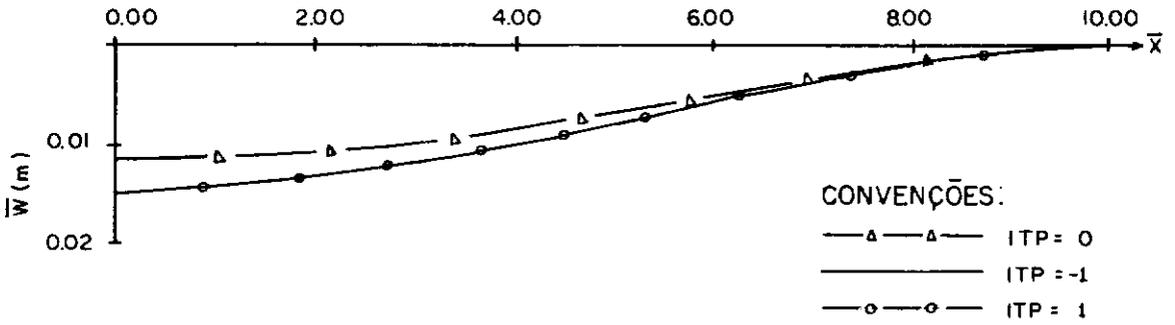


FIG. 4.11 DEFLEXÕES NA SEÇÃO MÉDIA $\bar{Y} = 0$

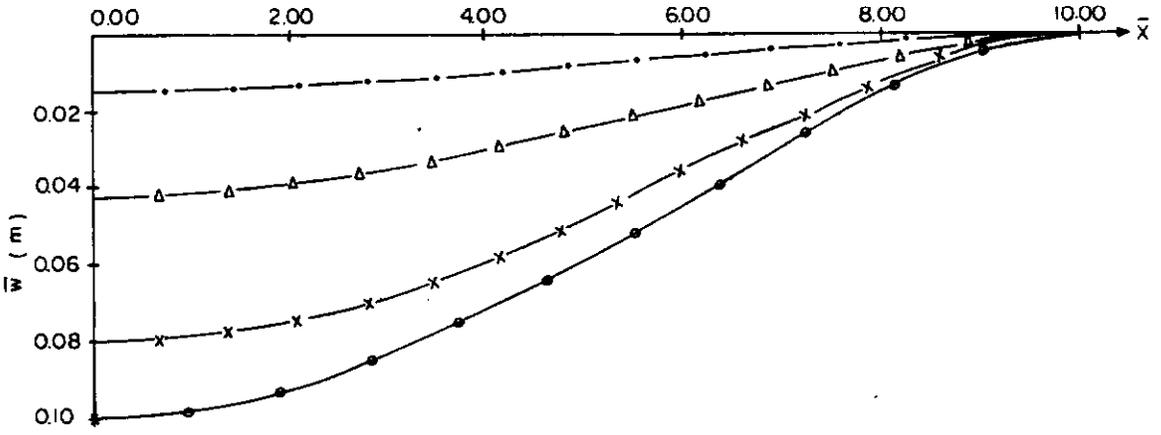


FIG. 4.12 DEFLEXÕES NA SEÇÃO MÉDIA $\bar{y} = 0$, VARIANDO-SE f .

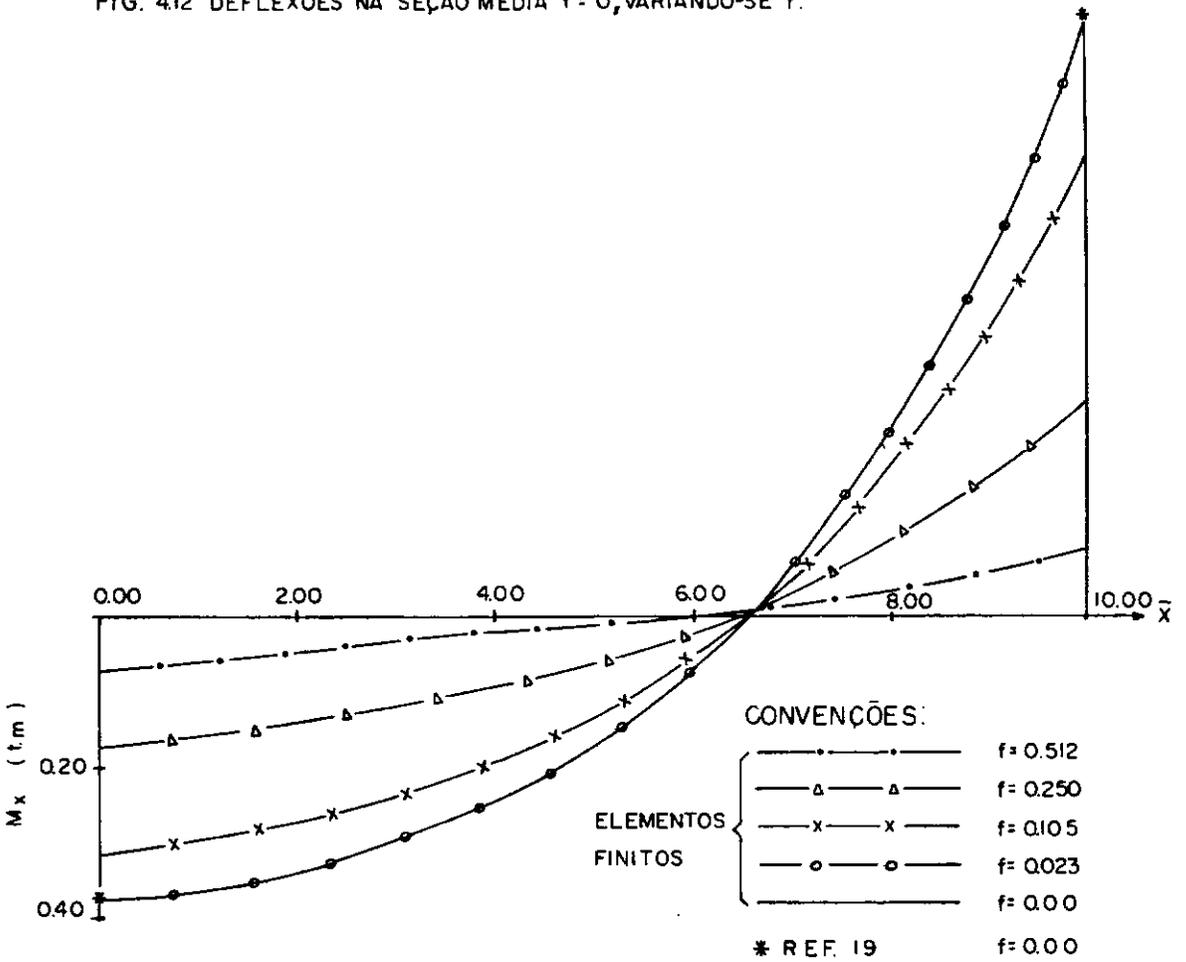


FIG. 4.13 MOMENTOS FLETORES TRANSVERSAIS NA SEÇÃO MÉDIA $\bar{y} = 0$

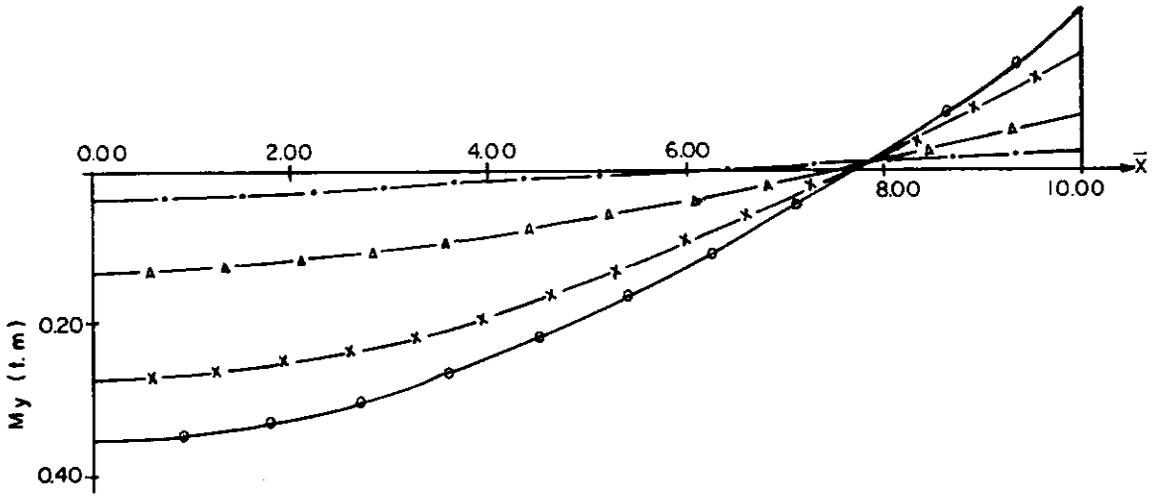


FIG. 4.14 MOMENTOS FLETORES LONGITUDINAIS NA SEÇÃO $\bar{y} = 0$

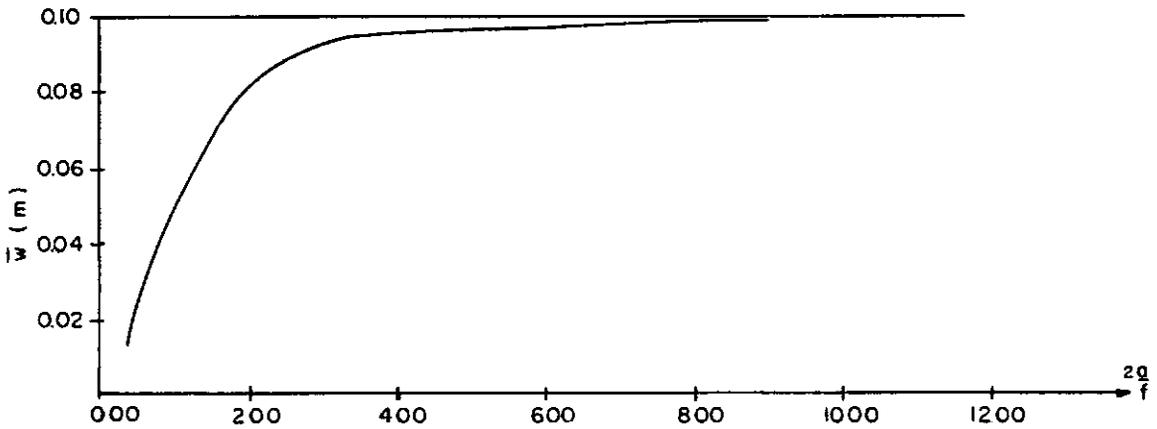


FIG. 4.15 DEFLEXÕES NO CENTRO ($\bar{x} = 0, \bar{y} = 0$), EM FUNÇÃO DE $2a/f$ ($a = 10.00, f = \text{VARIÁVEL}$)

L22.

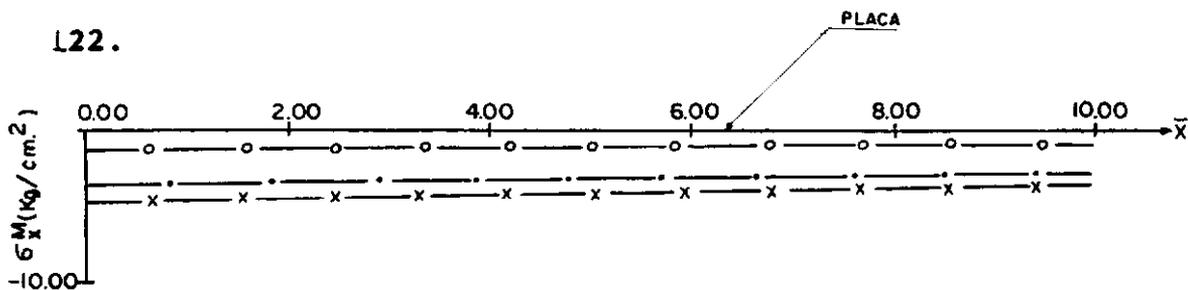


FIG. 4.16 TENSÕES DE MEMBRANA (σ_x^M) NA SEÇÃO $\bar{y}=0$ (SISTEMA LOCAL DO ELEMENTO)

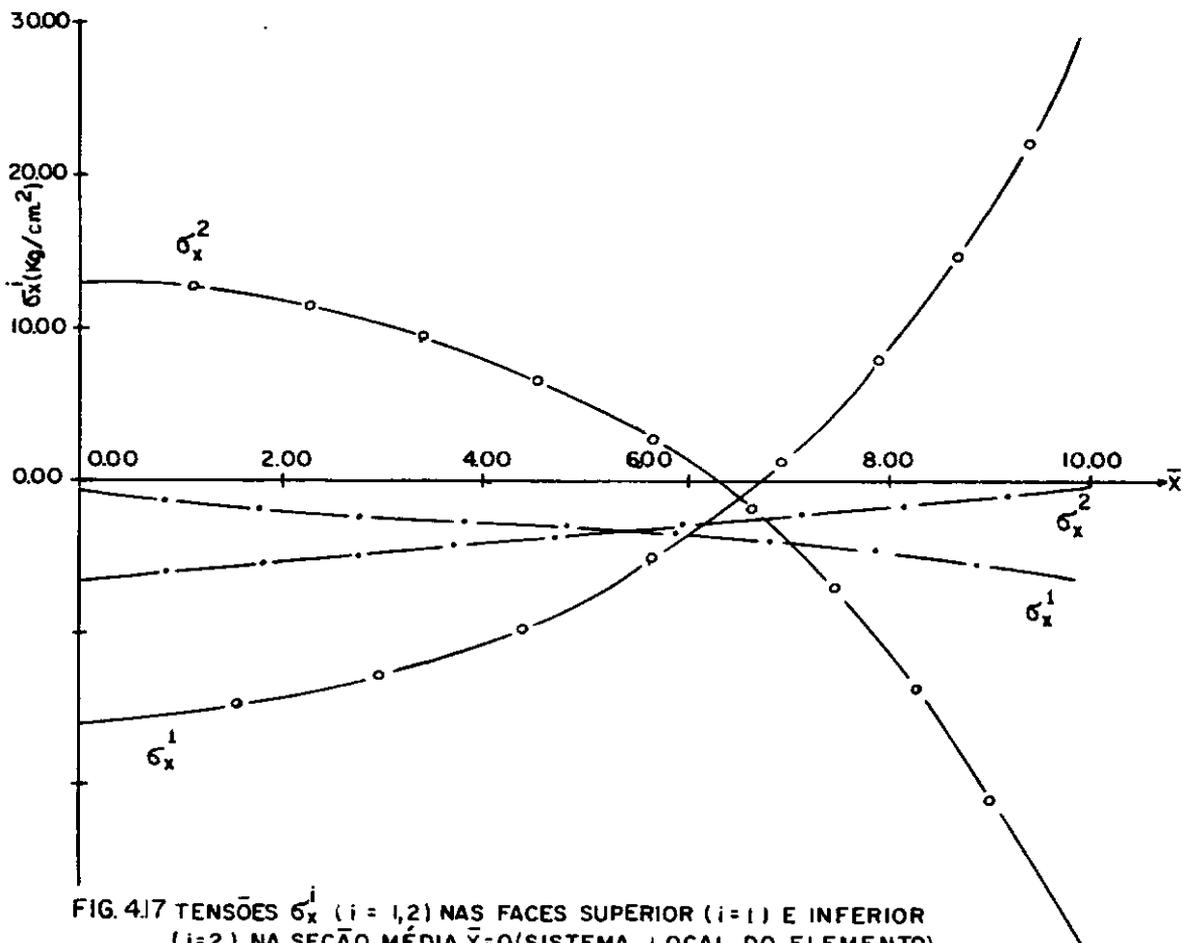


FIG. 4.17 TENSÕES σ_x^i ($i = 1, 2$) NAS FACES SUPERIOR ($i=1$) E INFERIOR ($i=2$), NA SEÇÃO MÉDIA $\bar{y}=0$ (SISTEMA LOCAL DO ELEMENTO)

Exemplo 3:

Monumento ROTARY e LIONS situado na Av. Nelson
D'Avila - São José dos Campos - São Paulo

Analisa-se uma estrutura laminar, que pode ser considerada como ideal para o elemento em estudo. Salienta-se o fato de que as teorias existentes sobre "Folded Plates", não se aplicam neste caso, e sua resolução só é possível pelo Método dos Elementos Finitos ou por meio de um modelo experimental.

Características geométricas:

A estrutura é formada da associação de 12 triângulos retângulos isósceles, cujos catetos medem 2.00m e a hipotenusa 2.83m; sua espessura é constante e igual a 0.15m. Na Fig. 4.18 são apresentadas duas projeções e uma vista e na Fig. 4.19, tem-se uma perspectiva do monumento.

Características do material:

(Concreto armado)

$$E = 2 \cdot 100\,000 \text{ t/m}^2$$

$$\nu = 0.30$$

$$\gamma = 2.40 \text{ t/m}^3$$

Carregamento e processo utilizado para resolução da estrutura:

A estrutura foi analisada submetida apenas ao peso próprio, utilizando-se uma malha com 125 nós e 192 elementos (Fig. 4.20), empregando-se na sua resolução a técnica descrita na primeira opção da secção 2.7.

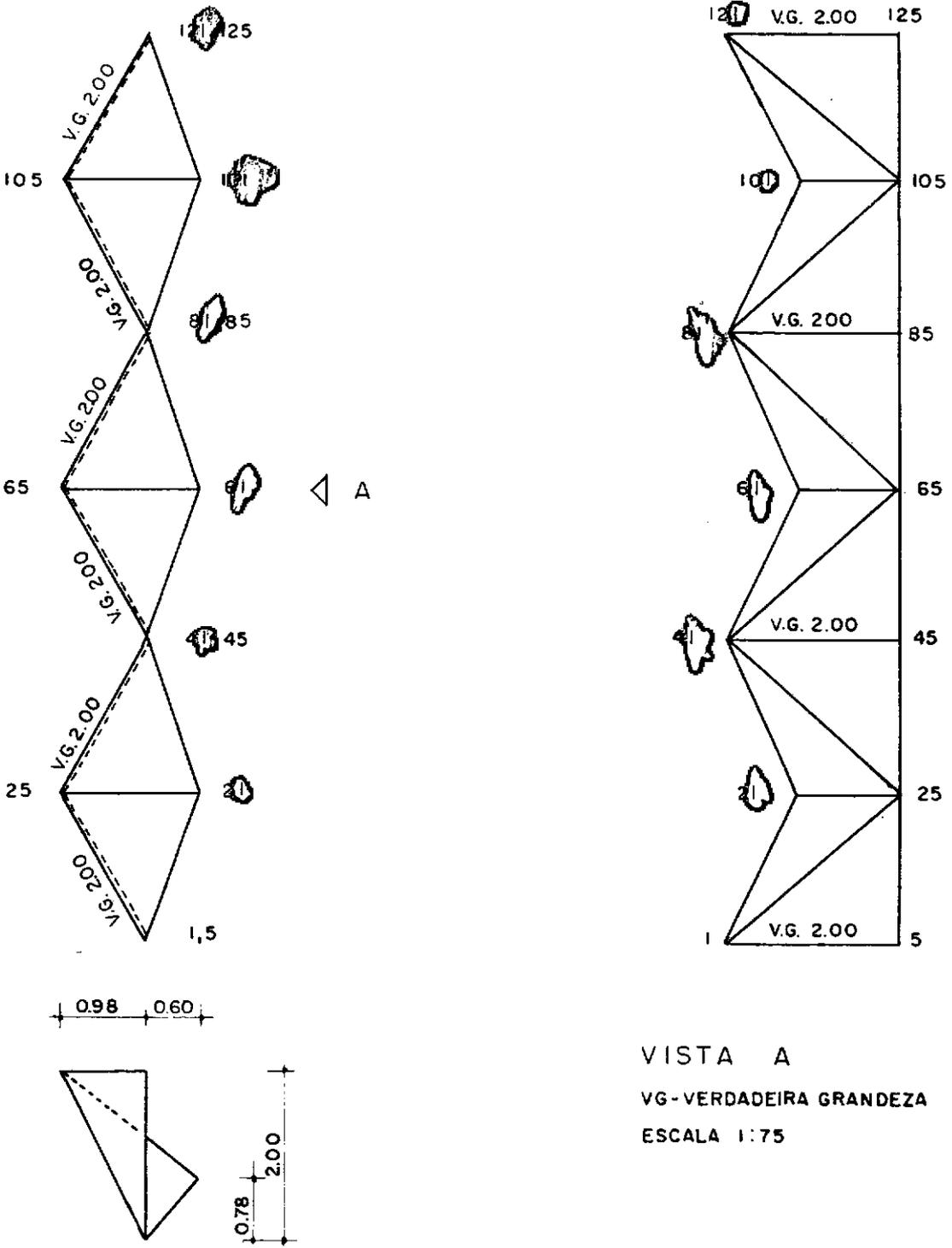
Resultados obtidos:

Na impossibilidade de comparar-se os resultados obtidos com uma solução do problema por outro método, serão apresentados três diagramas com a finalidade de mostrarem o comportamento estrutural; são eles:

a) Projeção dos nós 5, 25, 45, 65, 85, 105 e 125 sobre o plano $\bar{y} \bar{O} \bar{z}$, antes e depois da estrutura deformar-se (Fig. 4.22). Na fig. 4.21 representa-se o sistema global de referência $\bar{x} \bar{O} \bar{y} \bar{z}$.

b) Diagramas dos momentos fletores longitudinais ao longo das seções I-I e II-II (Fig. 4.23 e 4.24). Deve ser ressaltado o fato de que estes diagramas foram incluídos apenas para dar uma idéia de suas configurações, pois os valores dos momentos foram obtidos no centro de gravidade de cada elemento, obrigando assim uma extrapolação (linha tracejada), nas vizinhanças das arestas comuns a dois elementos. Para um estudo mais ri

goroso seria necessário um refinamento da malha, o que não há interesse no caso, desde que não serão feitas comparações entre resultados.



VISTA A
 VG-VERDADEIRA GRANDEZA
 ESCALA 1:75

FIG. 4.18 MONUMENTO ROTARY E LIONS
 SÃO JOSÉ DOS CAMPOS-SÃO PAULO

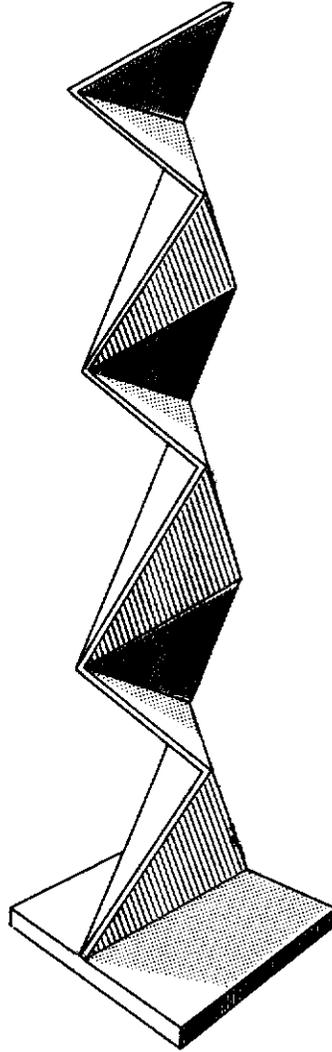


FIG. 4.19 PERSPECTIVA

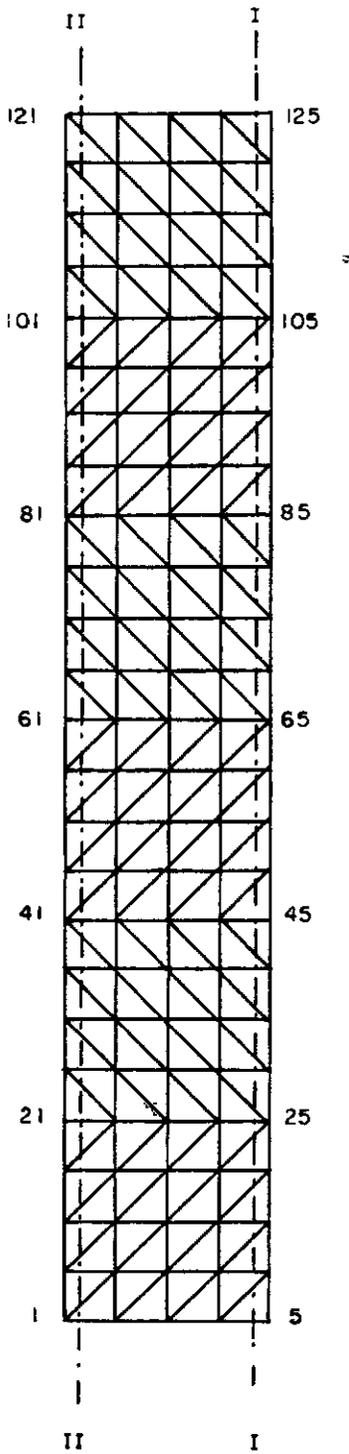


FIG.420 MALHA (SUPERFÍCIE DESENVOLVIDA)

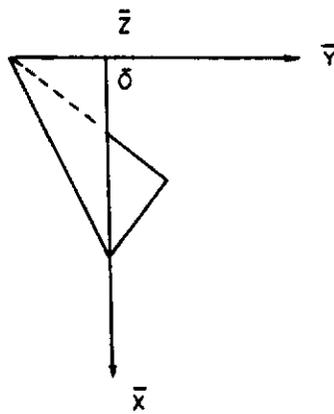


FIG. 4.21 SISTEMA GLOBAL DE REFERÊNCIA

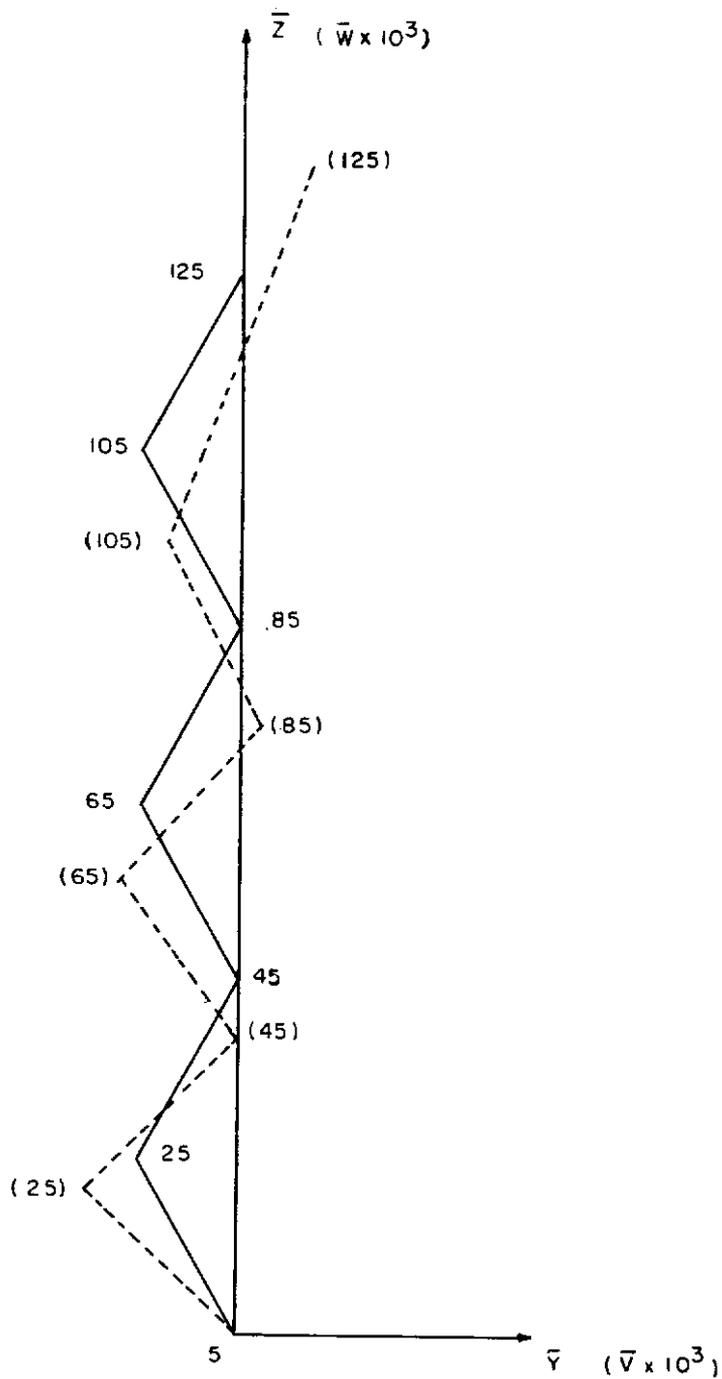


FIG. 4.22 N-NÚMERO DO NÓ (N= 5, 25, 45, 85, 105, 125)
 (N)- PROJEÇÃO DO NÓ NO PLANO $\bar{Y} \bar{O} \bar{Z}$ (APÓS A DEFORMAÇÃO DA ESTRUTURA)
 ESCALA 1:75

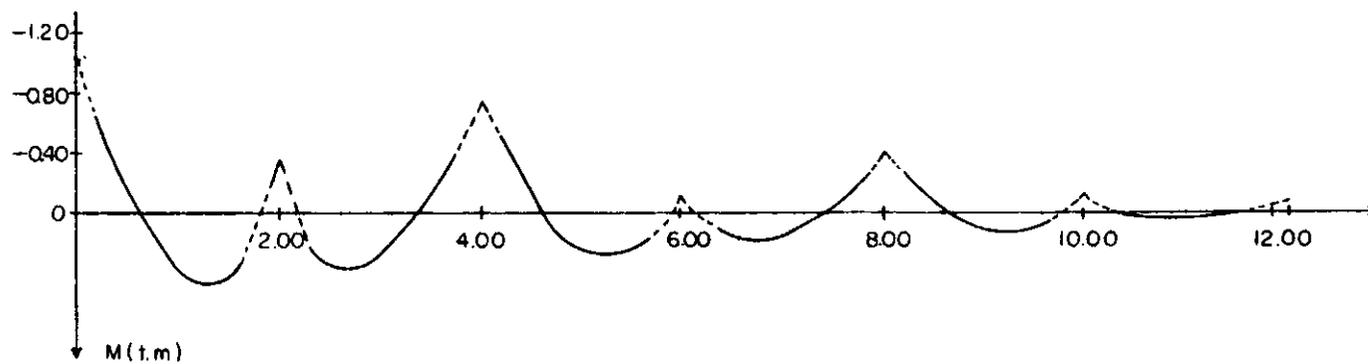


FIG. 4.23 MOMENTOS FLETORES LONGITUDINAIS NA SEÇÃO I-I

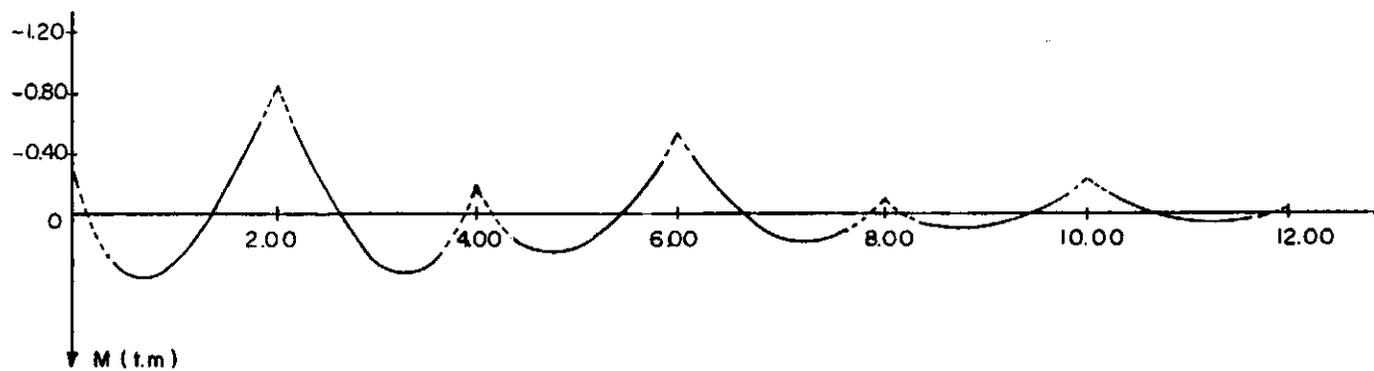


FIG. 4.24 MOMENTOS FLETORES LONGITUDINAIS NA SEÇÃO II-II

Exemplo 4:

Por fim, analisa-se um parabolóide hiperbólico simplesmente apoiado em seus quatro bordos, apresentando-se o diagrama das deflexões ao longo do eixo $\bar{O} x'$ (Fig. 4.25).

Características geométricas:

$$L = 12.92\text{m}$$

$$d = 1.305\text{m}$$

$$h = 0.25\text{m}$$

Características do material:

$$E = 500\,000\text{t/m}^2$$

$$\nu = 0.39$$

Carregamento e processo utilizado para análise da estrutura:

A estrutura foi analisada submetida a um carregamento uniforme, normal à sua superfície, igual a 1t/m^2 . Considerou-se uma malha com 75 nós e 121 elementos (Fig. 4.26), sendo utilizada a opção caracterizada por $\text{ITP} = -1$.

Resultados obtidos:

Na Fig. 4.27 são apresentadas as deflexões ao longo do eixo $\bar{O} x'$, comparando-se com a solução analítica³⁰. Trata

132.

-se de uma estrutura ideal para terceira opção descrita em 2.7, sendo difícil analisá-la através do primeiro procedimento da referida secção, uma vez que não se tem nitidamente nós planos e nós não planares.

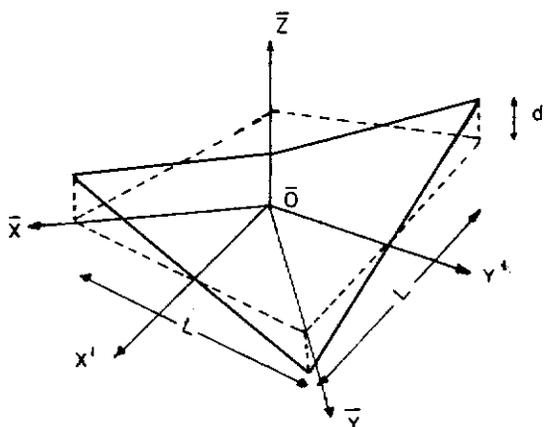


FIG. 4.25 PARABOLÓIDE HIPERBÓLICO

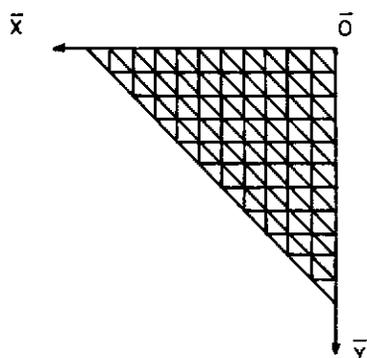
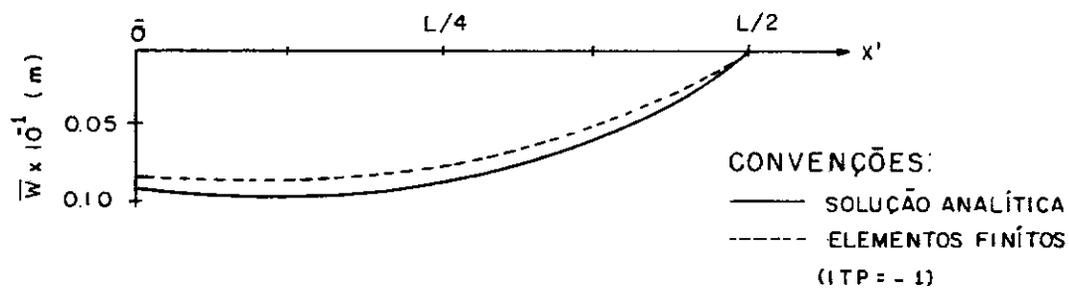


FIG. 4.26 MALHA UTILIZADA

FIG. 4.27 DEFLEXÕES AO LONGO DO EIXO $\bar{O}x'$

4.2 - Conclusões

Além das conclusões e sugestões apresentadas nos capítulos anteriores e neste, algumas considerações em caráter de conclusão serão expostas a seguir, resultantes de uma análise da teoria desenvolvida no Capítulo II, associada aos resultados práticos obtidos na secção 4.1.

1. O Elemento estudado, embora possa ser usado para resolução de qualquer tipo de casca (desde que tenha espessura pequena comparada com o raio de curvatura) e estruturas laminares, é recomendado para cascas que não apresentam simetria de revolução e estruturas laminares de forma geométrica irregular, pois caso contrário, como por exemplo as estruturas indicadas na Fig. 4.28, existem outros elementos, baseados em idealizações estruturais diferentes daquela descrita na secção 2.2, os quais se adaptam melhor a estes tipos de problemas.

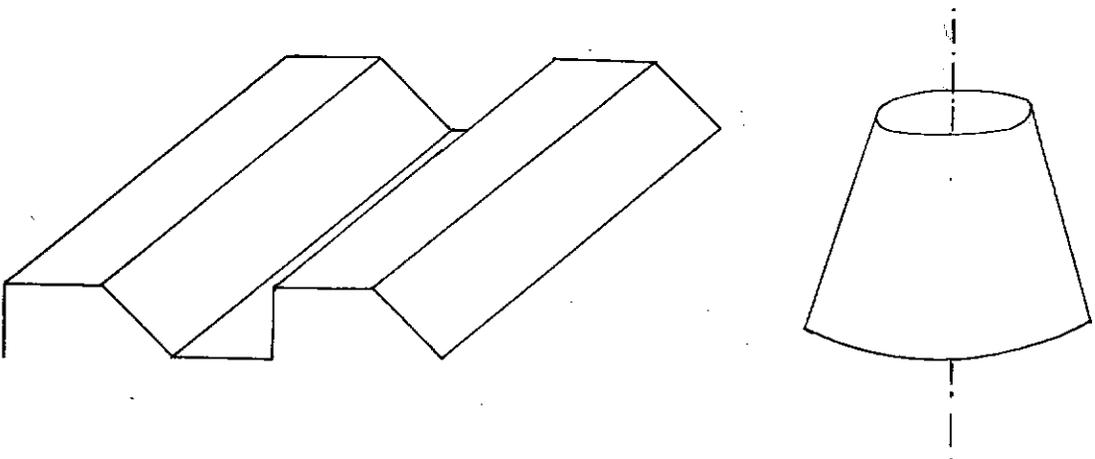


Fig. 4.28

2. Só se consegue bons resultados com malha de muitos elementos; vários fatores contribuem para isso; no caso das cascas, além da não conformidade (que também existe para as estruturas laminares), a curvatura não é levada em consideração; vale também ressaltar que os elementos utilizados para representar o comportamento de membrana e flexão são pouco refinados. Entretanto não se justifica em face das aproximações feitas, associações de elementos triangulares planos muito refinados, conservando grande número de graus de liberdade. Sugere-se que seja feito um estudo detalhado do elemento apresentado na quinta opção da secção 2.7, pois tendo-se em vista o fato de que o estado de membrana influi de forma considerável em certos tipos de cascas, a associação descrita na referida opção poderá ser vantajosa^{5,33}.

3. Das três alternativas para formação da matriz de rigidez, não é possível dizer-se "a priori", qual a melhor, uma vez que vai depender do tipo da estrutura a ser analisada.

ITP = -1: recomenda-se para cascas, podendo-se usar também para resolução de estruturas laminares, sendo que para estas últimas, o número de equações do sistema a ser resolvido é maior que o obtido através de outra opção.

ITP = 0: é aconselhado apenas para cascas muito abatidas, (utilizando-se malhas refinadas), não podendo-se usar para estruturas laminares, pois estas não possuem plano tangente

136.

à superfície média em todos os seus pontos. Deve-se observar que este procedimento conduz a um sistema de equações lineares com menor número de equações que o obtido através das outras duas alternativas, reduzindo assim o tempo computacional.

ITP = + 1: é especialmente recomendado para estruturas em que existam nitidamente nós planares e nós não planares (estruturas laminares), podendo-se também empregar na resolução de cascas; entretanto para cascas muito abatidas, esta técnica poderá conduzir a uma matriz de rigidez e vetor das forças nodais com algumas linhas tendo seus elementos bem próximos de zero, podendo acarretar problemas de ordem computacional, na resolução do sistema de equações lineares.

Isto acontece quando da idealização estrutural se tem por exemplo uma casca muito abatida, com nós não planares tendo plano tangente à superfície média, paralelo a um dos planos definido por dois dos eixos coordenados do sistema global de referência.

A P P E N D I X

APÊNDICE ANOTAÇÕES UTILIZADAS NO DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

$[]$	Matriz quadrada
$\{ \}$	Vetor coluna
$[B]^t$	Matriz transposta de $[B]$
$[B]^{-1}$	Matriz inversa de $[B]$
$\{u\}$	Vetor que contém os deslocamentos de um ponto genérico
$[M]$	Matriz que define o campo de deslocamento assumido
$\{q^e\}$	Vetor dos deslocamentos nodais do elemento e
$\{q\}$	Vetor que reúne as componentes de deslocamentos de todos os nós da estrutura
$[A^e]$	Matriz que relaciona $\{q^e\}$ com $\{q\}$
$\{\sigma\}$	Vetor que contém as componentes das tensões em um ponto genérico do elemento
$\{\epsilon\}$	Vetor que contém as componentes das deformações de um ponto genérico do elemento
$\{X\}$	Vetor que contém as componentes das forças de massa
$\{p\}$	Vetor que contém as componentes das forças atuando na fronteira do elemento
U^e	Energia de deformação do elemento
$[H]$	Matriz de elasticidade
$[D]$	Operador diferencial que relaciona $\{\epsilon\}$ com $\{u\}$

$[K^e]$	Matriz de rigidez do elemento
π^e	Energia potencial total do elemento
$\{Q^e\}$	Vetor das forças nodais equivalentes do elemento
π	Energia potencial total da estrutura
$[K]$	Matriz de rigidez da estrutura
$\{Q\}$	Vetor das forças nodais equivalentes da estrutura
$\{\bar{X}_i\}$	Vetor que contém as coordenadas do nó i do elemento, em relação ao sistema global de referência
$\{X_i\}$	Vetor que contém as coordenadas do nó i em relação ao sistema local do elemento.
$[L], [L^*], [MT]$	Matrizes de transformação
$\{\ell_x\}, \{\ell_y\}, \{\ell_z\}$	Vetores que contém os cossenos diretores dos eixos O_x, O_y e O_z respectivamente, em relação ao sistema global
Δ	Área do elemento
$\{q_i\}$	Vetor que contém os deslocamentos do nó i do elemento
Índice superior m	- refere-se ao estado de membrana
Índice superior f	- refere-se ao estado de flexão
h	Espessura do elemento
ν	Coefficiente de Poisson
(ξ_1, ξ_2, ξ_3)	Coordenadas naturais
E	Módulo de elasticidade
$\{\ell_x^*\}, \{\ell_y^*\}, \{\ell_z^*\}$	Vetores que contém os cossenos diretores dos eixos O^*x^*, O^*y^* e O^*z^* respectivamente, em relação ao sistema global

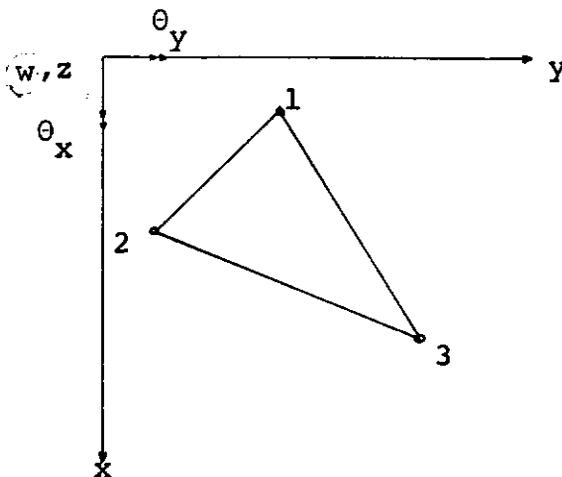
Δt_1	Variação de temperatura da face inferior do elemento
Δt_2	Variação de temperatura da face superior do elemento
α_t	Coefficiente de dilatação térmica
$M_x^{\Delta t}, M_y^{\Delta t}, M_{xy}^{\Delta t}$	Momentos que surgem no elemento em consequência da variação de temperatura
$\sigma_x^{\Delta t}, \sigma_y^{\Delta t}, \epsilon_{xy}^{\Delta t}$	Tensões que surgem no elemento em consequência da variação de temperatura
$\sigma_x^1, \sigma_y^1, \epsilon_{xy}^1$	Tensões no centro de gravidade da face superior do elemento
$\sigma_x^2, \sigma_y^2, \epsilon_{xy}^2$	Tensões no centro de gravidade da face inferior do elemento
$M_{x_i}^1, M_{y_i}^1, M_{xy_i}^1$ (i=1,2,3)	Momentos nos nós do elemento
M_x, M_y, M_{xy}	Momentos no centro de gravidade do elemento

APÊNDICE B

MATRIZ DE RIGIDEZ E VETOR DAS FORÇAS NODAIS EQUIVALENTES DE UM ELEMENTO TRIANGULAR PARA FLEXÃO DE PLACAS COM NOVE DESLOCAMENTOS NODAIS E TAMBÉM DE UM ELEMENTO TRIANGULAR PARA ESTADO PLANO DE TENSÕES, COM SEIS DESLOCAMENTOS NODAIS.

Seja o elemento indicado na figura B.1. Os deslocamentos nodais para o nó i ($i = 1, 2, 3$) são:

$$\{q_i\} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i \\ \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i \end{Bmatrix} \quad (\text{B.1})$$



$$\begin{cases} \theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} \\ \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x} \end{cases}$$

Fig. B.1

Considerando o campo de deslocamentos assumido para w como definido em 2.27, e utilizando a formulação descrita no Capítulo I, obtêm-se a matriz de rigidez $[K^f]$ do elemento. Porém, acha-se mais conveniente em vez de explicitar os elementos de $[K^f]$, exprimi-la como produto das matrizes $[R]$, $[L]$ e $[L]^t$:

$$[K^f] = [L]^t [R] [L]$$

onde $[R]$ é a matriz de rigidez com relação aos "deslocamentos generalizados" e $[L]$ é uma matriz de transformação dada por:

$$[L] = \begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & x_{21}/2 & y_{21}/2 & 0 & x_{12}/2 & y_{12}/2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -x_{23}/2 & -y_{23}/2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -x_{31}/2 & -y_{13}/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{13}/2 & y_{13}/2 \\
 -1 & -x_{21}/2 & -y_{21}/2 & 1 & x_{12}/2 & y_{12}/2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & x_{23}/2 & y_{23}/2 & 1 & x_{23}/2 & y_{23}/2 \\
 1 & -x_{13}/2 & -y_{13}/2 & 0 & 0 & 0 & -1 & -x_{13}/2 & -y_{13}/2
 \end{bmatrix} \quad (B.2)$$

Seja $[H^*]$ uma matriz simétrica tendo por elementos

$$h_{11}^* = [y_{23}^2 (y_{23}^2 + vx_{32}^2) + x_{32}^2 (x_{32}^2 + vy_{23}^2) + 2x_{32}^2 y_{23}^2 (1 - v)] D_1$$

$$h_{12}^* = [y_{23}^2 (y_{31}^2 + vx_{13}^2) + x_{32}^2 (x_{13}^2 + vy_{31}^2) + 2x_{13} y_{31} x_{32} y_{23} (1 - v)] D_1$$

$$h_{13}^* = [2y_{23}^2 (y_{31} y_{23} + vx_{13} x_{32}) + 2x_{32}^2 (x_{13} x_{32} + vy_{31} y_{23}) + 2x_{32} y_{23} (x_{13} y_{23} + x_{32} y_{31}) (1 - v)] D_1$$

$$h_{22}^* = [y_{31}^2 (y_{31}^2 + vx_{13}^2) + x_{13}^2 (x_{13}^2 + vy_{31}^2) + 2x_{13}^2 y_{31}^2 (1 - v)] D_1$$

$$h_{23}^* = [2y_{31}^2 (y_{31} y_{23} + vx_{13} x_{32}) + 2x_{13}^2 (x_{13} x_{32} + vy_{31} y_{23}) + 2x_{13} y_{31} (x_{13} y_{23} + x_{32} y_{31}) (1 - v)] D_1$$

$$h_{33}^* = [4y_{31} y_{23} (y_{31} y_{23} + vx_{13} x_{32}) + 4x_{13} x_{32} (x_{13} x_{32} + vy_{31} y_{23}) + 2(x_{13} y_{23} + x_{32} y_{31})^2 (1 - v)] D_1$$

$$h_{21}^* = h_{12}^*$$

$$h_{31}^* = h_{13}^*$$

$$h_{32}^* = h_{23}^*$$

sendo
$$D_1 = \frac{E h^3}{192(1-\nu^2)\Delta^4}$$

A matriz $[R]_{9 \times 9}$ é uma matriz simétrica, cujos elementos podem ser expressos em funções dos elementos de $[H^*]$.

$$R_{44} = h_{33}^*$$

$$R_{45} = R_{54} = -\Delta (2h_{23}^* + h_{33}^*)$$

$$R_{46} = R_{64} = -\Delta (2h_{13}^* + h_{33}^*)$$

$$R_{47} = R_{74} = 2\Delta (h_{23}^* - h_{13}^*)/3$$

$$R_{48} = R_{84} = 2\Delta (h_{13}^* + h_{33}^*)/3$$

$$R_{49} = R_{94} = -2\Delta (h_{23}^* + h_{33}^*)/3$$

$$R_{55} = \Delta (4h_{22}^* + 4h_{23}^* + h_{33}^*)$$

$$R_{56} = R_{65} = \Delta (4h_{12}^* + 2h_{13}^* + 2h_{23}^* + h_{33}^*)$$

$$R_{57} = R_{75} = 2\Delta (2h_{12}^* + h_{13}^* - 2h_{22}^* - h_{23}^*)/3$$

$$R_{58} = R_{85} = -2\Delta (2h_{12}^* + h_{13}^* + 2h_{23}^* + h_{33}^*)/3$$

$$R_{59} = R_{95} = 2\Delta (2h_{22}^* + 3h_{23}^* + h_{33}^*)/3$$

$$R_{66} = \Delta (4h_{11}^* + 4h_{13}^* + h_{33}^*)$$

$$R_{67} = R_{76} = 2\Delta (2h_{11}^* + h_{13}^* - 2h_{12}^* - h_{23}^*)/3$$

$$R_{68} = R_{86} = -2\Delta (2h_{11}^* + 3h_{13}^* + h_{33}^*)/3$$

$$R_{69} = R_{96} = 2\Delta (2h_{12}^* + h_{23}^* + 2h_{13}^* + h_{33}^*)/3$$

$$R_{77} = 2\Delta (h_{11}^* - h_{13}^* + h_{22}^* - h_{23}^* + h_{33}^* - h_{12}^*)/3$$

$$R_{78} = R_{87} = 2\Delta (h_{33}^* + 2h_{23}^* - h_{12}^* - h_{13}^* - h_{11}^*)/3$$

$$R_{79} = R_{97} = 2\Delta (h_{33}^* - h_{23}^* - h_{22}^* + 2h_{13}^* - h_{12}^*)/3$$

$$R_{88} = 2\Delta (h_{11}^* + 3h_{12}^* + 3h_{13}^* + 9h_{22}^* + 9h_{23}^* + 3h_{33}^*)/3$$

$$R_{89} = R_{98} = -2\Delta (5h_{12}^* + 2h_{23}^* + 2h_{13}^* + h_{33}^*)/3$$

$$R_{99} = 2\Delta (9h_{11}^* + 3h_{12}^* + 9h_{13}^* + h_{22}^* + 3h_{23}^* + 3h_{33}^*)/3$$

Os demais elementos da matriz $[R]$ são todos nulos.

O vetor das forças nodais equivalentes do elemento, pode ser obtido através da equação 2.70. Para um carregamento normal a seu plano e linearmente variável, representando por p_1 , p_2 e p_3 as pressões nos nós 1, 2 e 3 (fig. B.1) respectivamente, tem-se:

$$\{Q^f\} = \frac{\Delta}{360} \left\{ \begin{array}{l} 4(16p_1 + 7p_2 + 7p_3) \\ 7p_1(x_{23} - 2x_{13}) + p_2(5x_{23} - 8x_{13}) + p_3(3x_{23} - 8x_{13}) \\ 7p_1(y_{23} - 2y_{13}) + p_2(5y_{23} - 8y_{13}) + p_3(3y_{23} - 8y_{13}) \\ 4(7p_1 + 16p_2 + 7p_3) \\ p_1(5x_{13} - 8x_{23}) + 7p_2(x_{13} - 2x_{23}) + p_3(3x_{13} - 8x_{23}) \\ p_1(5y_{13} - 8y_{23}) + 7p_2(y_{13} - 2y_{23}) + p_3(3y_{13} - 8y_{23}) \\ (7p_1 + 7p_2 + 16p_3) \\ p_1(3x_{23} + 5x_{13}) + p_2(5x_{23} + 3x_{13}) + 7p_3(x_{23} + x_{13}) \\ p_1(3y_{23} + 5y_{13}) + p_2(5y_{23} + 3y_{13}) + 7p_3(y_{23} + y_{13}) \end{array} \right\} \quad (B.3)$$

148.

Seja γ_z a componente do peso específico γ segundo o eixo $O_z(xOyz - \text{sistema local do elemento})$. O vetor das forças nodais equivalentes para o peso próprio será dado por:

$$\{Q^f\} = \frac{\Delta\gamma_z h}{24} \left\{ \begin{array}{c} 8 \\ x_{23} - 2x_{13} \\ y_{23} - 2y_{13} \\ 8 \\ x_{13} - 2x_{23} \\ y_{13} - 2y_{23} \\ 8 \\ x_{23} + x_{13} \\ y_{23} + y_{13} \end{array} \right\} \quad (\text{B.4})$$

No Capítulo II, considerou-se como deslocamentos nodais do nó i ($i = 1, 2, 3$), os seguintes parâmetros:

$$\{q_i\} = \left\{ \begin{array}{c} w_i \\ \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \end{array} \right\} \quad (\text{B.5})$$

Para se obter a matriz de rigidez e o vetor das forças nodais equivalentes do elemento com relação aos deslocamentos

mentos nodais dados em (B.5), é necessário uma transformação definida por:

$$\begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i \\ \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i \end{Bmatrix} \quad (i=1,2,3) \quad (\text{B.6})$$

Considere-se agora o elemento indicado na figura B.2.

$$\{q^m\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

The diagram shows a triangular element with three nodes labeled 1, 2, and 3. Node 1 is at the top vertex, node 2 is at the bottom-left vertex, and node 3 is at the bottom-right vertex. A coordinate system is defined with the horizontal axis labeled $x(u)$ pointing to the right and the vertical axis labeled $y(v)$ pointing downwards. At each node, there are two displacement vectors: a horizontal vector u_i and a vertical vector v_i . Specifically, at node 1, u_1 points right and v_1 points down; at node 2, u_2 points right and v_2 points down; at node 3, u_3 points right and v_3 points down.

Fig. B.2

Adotado o campo de deslocamentos, para u e v como descrito na seção 2.5, a matriz de rigidez $[k^m]_{6 \times 6}$ com relação aos deslocamentos dados em B.7 será:

$$k_{11}^m = h(d_{11}y_{23}^2 + d_{33}x_{32}^2)/4\Delta$$

$$k_{12}^m = h(d_{11}y_{23}y_{31} + d_{33}x_{32}x_{13})/4\Delta$$

$$k_{13}^m = h(d_{11}y_{23}y_{12} + d_{33}x_{32}x_{21})/4\Delta$$

$$k_{14}^m = h(d_{33}x_{32}y_{23} + d_{21}x_{32}y_{23})/4\Delta$$

$$k_{15}^m = h(d_{33}x_{32}y_{31} + d_{21}x_{13}y_{23})/4\Delta$$

$$k_{16}^m = h(d_{33}x_{32}y_{12} + d_{21}x_{21}y_{23})/4\Delta$$

$$k_{22}^m = h(d_{11}y_{31}^2 + d_{33}x_{13}^2)/4\Delta$$

$$k_{23}^m = h(d_{11}y_{31}y_{12} + d_{33}x_{13}x_{21})/4\Delta$$

$$k_{24}^m = h(d_{33}x_{13}y_{23} + d_{21}x_{32}y_{31})/4\Delta$$

$$k_{25}^m = h(d_{33}x_{13}y_{31} + d_{21}x_{13}y_{31})/4\Delta$$

$$k_{26}^m = h(d_{33}x_{13}y_{12} + d_{21}x_{21}y_{31})/4\Delta$$

$$k_{33}^m = h(d_{11}y_{12}^2 + d_{33}x_{21}^2)/4\Delta$$

$$k_{34}^m = h(d_{33}x_{21}y_{23} + d_{21}x_{32}y_{12})/4\Delta$$

$$k_{35}^m = h(d_{33}x_{21}y_{31} + d_{21}x_{13}y_{12})/4\Delta$$

$$k_{36}^m = h(d_{33}x_{21}y_{12} + d_{21}x_{21}y_{12})/4\Delta$$

$$k_{44}^m = h(d_{33}y_{23}^2 + d_{22}x_{32}^2)/4\Delta$$

$$k_{45}^m = h(d_{33}y_{23}y_{31} + d_{22}x_{32}x_{13})/4\Delta$$

$$k_{46}^m = h(d_{33}y_{23}y_{12} + d_{22}x_{32}x_{21})/4\Delta$$

$$k_{55}^m = h(d_{33}y_{31}^2 + d_{22}x_{13}^2)/4\Delta$$

$$k_{56}^m = h(d_{33}y_{31}y_{12} + d_{22}x_{13}x_{21})/4\Delta$$

$$k_{66}^m = h(d_{33}y_{12}^2 + d_{22}x_{21}^2)/4\Delta$$

sendo

$$d_{11} = d_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}$$

$$d_{12} = d_{21} = \frac{E\nu}{1-\nu^2}$$

$$d_{33} = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$k_{ij}^m = k_{ji}^m \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Sendo γ_x e γ_y as componentes de γ segundo os eixos Ox e Oy respectivamente, o vetor das forças nodais equivalentes para o peso próprio será dado por:

$$\{Q^m\} = \frac{\Delta h}{3} \left\{ \begin{array}{c} \gamma_x \\ \gamma_x \\ \gamma_x \\ \gamma_y \\ \gamma_y \\ \gamma_y \end{array} \right\} \quad (B.8)$$

APÊNDICE CMANUAL DE ENTRADA DO PROGRAMA

Número de ordem	Número de cartões	Variável	formato
1	1	Título	45 colunas
2	1	NP, NE, NMAT, NPDP, NDD, NCL, ITP, ISR	8I10
3	NMAT	J, GAMA (J), POISS (J), YOUNG (J)	I10, 2F10.2 F10.0
4	NP	I, CORD (I, 1) CORD (I, 2), CORD (I, 3)	I10, 3F10.4
5	Variável (no máximo NE)	M, IX (M, 1), IX (M, 2), IX (M, 3), IX (M, 4), THICK (M)	5I10, F10.4
6	NPDP	NK (I), LN (I, 1), LN (I, 2), LN (I, 3), LN (I, 4), LN (I, 5), LN (I, 6)	7I5
7	NDD	I, K, VDP	2I5, F10.4
8	$\frac{NP}{16}$ ou $\frac{NP}{16} + 1$	ITIPO (I)	16I5
9	1	ITC (J)	3I10
10	$\frac{NP}{8}$ ou $\frac{NP}{8} + 1$	P (J, K)	8F10.2
11	1	NPCC	I10
12	NPCC	J, P (J, K), P (J, K+1), P (J, K+2)	I10, 3F10.2
13	1	NEC	I10
14	NEC	J, P (J, K), P (J, K+1)	I10, 2F10.2

(continua)

(continuação)

Número de ordem	Número de cartões	Variável	Formato
15	$\frac{NP}{8}$ ou $\frac{NP}{8} + 1$	P(I, K+2)	8F10.2
16	1 ou 2	CDT(I)	8F10.5
17	$\frac{NE}{8}$ ou $\frac{NE}{8} + 1$	P(N,K), P(N, K+1)	8F10.2

Comentários e Explicações

1. Título com no máximo 45 caracteres alfanuméricos

2. Informações gerais sobre a estrutura

NP - número de nós

NE - número de elemento

NMAT - número de materiais diferentes

NPDP - número de nós com deslocamentos prescritos

NDD - número de direções com deslocamentos prescritos não nulos

NCL - número de casos de carregamento excluindo o peso próprio

ITP - variável que caracteriza o procedimento a ser adotado na formação da matriz de rigidez, podendo assumir os valores -1, 0 ou 1 (ver subrotina FORMA), dependendo da

estrutura a ser analisada. Será apresentado a seguir, um quadro com os diferentes valores de ITP, e o tipo de estrutura recomendável para cada valor.

valor de ITP	estrutura recomendada
-1	casca
0	casca muito abatida
1	estruturas laminares

ISR - Variável que caracteriza o sistema em relação ao qual serão fornecidos os deslocamentos prescritos (ver subrotina FORMA), podendo assumir os valores 0 ou 1.

3. Características dos materiais

J número que caracteriza o material

GAMA peso específico

POISS coeficiente de Poisson

YOUNG módulo de elasticidade

4. Coordenadas dos nós da estrutura

I número do nó

CORD(I,1),CORD(I,2),CORD(I,3) - coordenadas do nó I em relação ao sistema global de referência.

5. Incidências, materiais e espessura dos elementos

M número do elemento

IX(M,1), IX(M,2) e IX(M,3) - números dos nós do elemento M

IX(M,4) número que caracteriza o material do elemento M

A geração das incidências pode ser de forma semi-automática (ver subrotina DADOS).

6. NK - variável indexada cujos valores são os números dos nós que possuem deslocamentos prescritos em pelo menos uma direção

LN - variável indexada que caracteriza as direções com deslocamentos prescritos.

LN(I,J) = 1 - nó NK(I) tem deslocamento prescrito na direção J

LN(I,J) = 0 - nó XIK(I) não tem deslocamento prescrito na direção J

7. Nós com deslocamentos prescritos não nulos em pelo menos uma direção

I número do nó

K direção na qual se tem o deslocamento prescrito não nulo

VDP valor do deslocamento prescrito

8. Tipo do nó

ITIPO variável indexada que caracteriza o "tipo" do nó

ITIPO(I)=1 - nó I é planar

ITIPO(I)=0 - nó I é não planar

9. Informações gerais sobre os carregamentos

ITC variável indexada que caracteriza o tipo de carregamento (ver quadro 3.1)

10. Carregamento normal ao plano do elemento e linearmente variável

$P(J,K)$ valor da pressão no nó J ; K é o número da coluna da matriz $[P]_{300 \times 6}$, na qual serão armazenados os valores das pressões nos nós, sendo gerado automaticamente pelo computador

11. 12. Cargas concentradas

NPCC - número de nós com cargas concentradas

J número do nó

$P(J,K), P(J,K+1), P(J+2)$ componentes da carga concentrada que atua em J , relativamente ao sistema de coordenadas em relação ao qual serão calculados os deslocamentos do nó J .

13.14.15. Carregamento constante em dois dos lados do elemento e outro linearmente variável, atuando normal a seu plano.

NEC - número de elementos com carregamento uniforme atuando em seus lados

J - número do elemento

$P(J,K)$ - valor de f_x (ver fig. 3.2a)

$P(J,K+1)$ valor de f_y (ver fig. 3.2a)

$P(I,K+2)$ - valor da pressão no nó I.

- 16.17. Variação de temperatura uniforme em cada elemento e linearmente variável através de sua espessura
- $CDT(I)$ - coeficiente de dilatação térmica do material I
- $P(N,K), P(N,K+1)$ - variação de temperatura das faces superior ($z=h/2$) e inferior ($z=-h/2$) respectivamente, do elemento (fig.3.2b).

Observações:

a)

variável	valor máximo
NP	300
NE	500
NMAT	10
NPDP	100
NCL	3

- b) No caso de se ter cargas atuando no plano do elemento ou variação de temperatura, o número de elementos não pode ser superior a 300.
- c) Os casos de carregamento devem ser escolhidos de tal forma que o número de colunas necessárias para armazená-los não exceda a seis (ver quadro 3.1).
- d) Se $ITP = -1$ ou $ITP = 0$, os valores da variável ITIPO não devem ser fornecidos, pois nestes dois casos ela não tem o sig.

nificado descrito no item 8, sendo seus valores gerados "convenientemente" pelo computador.

- e) Se for atribuído a GAMA o valor zero, a estrutura não será analisada submetida ao peso próprio; caso contrário, este será considerado como um caso de carregamento, podendo-se ainda ter mais dois dos casos descritos no quadro 3.1.
- f) Devido a generalidade do programa, torna-se impossível ser feita uma geração automática para obtenção das coordenadas dos nós da estrutura. Recomenda-se que para cada caso particular seja feito um programa para a obtenção de tais coordenadas, devendo a saída ser em cartões perfurados no FORMATO adequado para serem usados como dados de entrada do programa elaborado. Esta técnica foi utilizada com sucesso pelo autor, para análise dos exemplos apresentados no Capítulo IV.
- g) No caso de utilizar-se a geração semi-automática de incidências, deve-se fornecer as características do último elemento.


```

130 FORMAT(6X,'PROPRIEDADE',9X,'PESD ESPECIFICO',7X,'MODULO DE ELASTIC
*IDADE',7X,'COEFICIENTE DE POISSON',//)
WRITE(5,135) (J,GAMA(J),YOUNG(J),POISS(J),J=1,NMAT)
135 FORMAT(10X,I2,18X,F6.2,22X,F9.0,21X,F7.4)
READ(8,140) (I,CORD(I,1),CORD(I,2),CORD(I,3),I=1,NP)
140 FORMAT(I10,3F10.4)
WRITE(5,145)
145 FORMAT(/41X,'COORDENADAS DOS NOS',//10X,'NO',15X,'X',20X,'Y',20X,
*'Z')
WRITE(5,150) (I,CORD(I,1),CORD(I,2),CORD(I,3),I=1,NP)
150 FORMAT(9X,I3,9X,F9.3,10X,F11.3,10X,F11.3)
WRITE(5,155)
155 FORMAT(/7X,'ELEMENTO',17X,'NUMERO DOS NOS',14X,'PROPRIEDADE',9X,
*ESPESSURA',//)
N=0
160 READ(8,165) M,(IX(M,I),I=1,4),THICK(M)
165 FORMAT(5I5,F10.4)
170 N=N+1
IF(M-N)185,185,175
175 DO 180 I=1,3
180 IX(N,I)=IX(N-1,I)+1
IX(N,4)=IX(N-1,4)
THICK(N)=THICK(N-1)
185 WRITE(5,190) N,(IX(N,I),I=1,4),THICK(N)
190 FORMAT(9X,I3,13X,I3,9X,I3,9X,I3,13X,I2,16X,F4.2)
IF(N-M)170,195,195
195 IF(N-NE)160,200,200
200 READ(8,205) (NK(I),(LN(I,J),J=1,6),I=1,NPDP)
205 FORMAT(7I5)
WRITE(5,210)
210 FORMAT(/10X,'DESLOCAMENTOS PRESCRITOS',//10X,'NO',6X,'DIRECAO 1',
*6X,'DIRECAO 2',6X,'DIRECAO 3',6X,'DIRECAO 4',6X,'DIRECAO 5',6X,'DI
*RECAO 6')
WRITE(5,215) (NK(I),(LN(I,J),J=1,6),I=1,NPDP)
215 FORMAT(9X,I3,9X,I1,14X,I1,14X,I1,14X,I1,14X,I1,14X,I1)
IF(NDD)220,260,220
220 DO 225 I=1,NPDP
DO 225 J=1,6
225 BV(I,J)=0.
WRITE(5,230)
230 FORMAT(/10X,'NOS COM DESLOCAMENTOS PRESCRITOS NAO NULOS EM PELO M
*ENOS UMA DIRECAO',//10X,'NUMERO DO NO',10X,'DIRECAO',10X,'VALOR DO
* DESLOCAMENTO')
DO 255 IC=1,NDD
READ(8,235) I,K,VDP
235 FORMAT(2I5,F10.4)
WRITE(5,240) I,K,VDP
240 FORMAT(14X,I3,18X,I1,18X,F8.4)
DO 250 J=1,NPDP
IF(I-NK(J))250,245,250

```

```
245 BV(J,K)=VDP
    GO TO 255
250 CONTINUE
255 CONTINUE
260 IF(ITP-1)285,280,285
280 READ(8,265) (ITIPD(I),I=1,NP)
265 FORMAT(16I5)
    WRITE(5,270)
270 FORMAT(//10X,'NO',7X,'TIPO DO NO',17X,'NO',7X,'TIPO DO NO',//)
    WRITE(5,275) (I,ITIPD(I),I=1,NP)
275 FORMAT(9X,I3,12X,I1,20X,I3,11X,I1)
285 RETURN
    END
```

```
/*
//LKED.SYSLMOD DD DSN=CASC05(DADOS),UNIT=2314,
// VOL=SER=LIX001,DCB=BLKSIZE=1024,
// SPACE=(1024,(120,90,6)),DISP=(NEW,KEEP),LABEL=RETPD=30
```

```

//STEP2 EXEC FORTGCL
//FORT.SYSIN DD *
  SUBROUTINE CARGA(P)
    REAL L(18,18)
    DIMENSION P(300,6)
    COMMON NP,NE,NPDP,NGLN,MBAND,NUMBL,AREA,NCAR,NCL,ITP,ITC(4),GAMA(1
*0),POISS(10),YOUNG(10),B(160,3),THICK(500),DESNO(160),A(160,80),CO
*RD(300,3),IX(500,4),NK(100),LN(100,6),ISR,NDD,BV(100,6),ID1,ID2,ID
*3,CDT(10)
C
C *****
C ESTA SUBROTINA LE E ESCRIVE INFORMACOES SOBRE O CARREGAMENTO DA
C ESTRUTURA
C *****
C
  WRITE(5,285)
285 FORMAT(/ /10X,'INFORMACOES SOBRE O CARREGAMENTO',/)
  IF(NCL)300,295,300
295 WRITE(5,155)
155 FORMAT(/ /10X,'A ESTRUTURA SERA CALCULADA SUBMETIDA APENAS AO PESO
*PROPRIO',/)
  GO TO 160
300 READ(8,305) (ITC(J),J=1,NCL)
305 FORMAT(4I10)
  K=1
  DO 150 II=1,NCL
  IF(ITC(II)-1)110,105,110
C  PRESSAO
105 READ(8,205) (P(J,K),J=1,NP)
205 FORMAT(8F10.2)
  WRITE(5,210) II
210 FORMAT(10X,'CARREGAMENTO NO.*****',I4,/ /10X,'CARREGAMENTO LIN
*EARMENTE VARIAVEL',/ /10X,'NO',16X,'VALOR',18X,'NO',16X,'VALOR')
  WRITE(5,215) (J,P(J,K),J=1,NP)
215 FORMAT(9X,I3,15X,F6.2,16X,I3,15X,F6.2)
  K=K+1
  GO TO 150
110 IF(ITC(II)-2)125,115,125
C  CARGAS CONCENTRADAS
115 K1=K
  K2=K+2
  DO 100 I=1,NP
  DO 100 J=K1,K2
100 P(I,J)=0.
  READ(8,220) NPCC
220 FORMAT(I10)
  WRITE(5,225) II
225 FORMAT(/ /10X,'CARREGAMENTO NO.*****',I4,/ /10X,'CARGAS CONCENT
*RADAS',/ /10X,'NO',10X,'FORCA X',10X,'FORCA Y',10X,'FORCA Z')
  DO 120 IC=1,NPCC

```

```

      READ(8,230) J,P(J,K),P(J,K+1),P(J,K+2)
230  FORMAT(I10,3F10.2)
      WRITE(5,235) J,P(J,K),P(J,K+1),P(J,K+2)
235  FORMAT(9X,I3,10X,F6.2,11X,F6.2,11X,F6.2)
120  CONTINUE
      K=K+3
      GO TO 150
125  IF(ITC(II)-3)200,130,200
C    PRESSAO E TAMBEM CARGAS ATUANDO NO PLANO DO ELEMENTO
130  K1=K+1
      DO 135 I=1,NE
      DO 135 J=K,K1
135  P(I,J)=0.
      READ(8,245) NEC
245  FORMAT(I10)
      WRITE(5,250) II
250  FORMAT(/10X,'CARREGAMENTO NO.*****',I4,/10X,'CARREGAMENTO C
*ONSTANTE NO PLANO DO ELEMENTO',/10X,'ELEMENTO',I3X,'FX',I3X,'FY')
      DO 265 IC=1,NEC
      READ(8,255) J,P(J,K),P(J,K+1)
      WRITE(5,260) J,P(J,K),P(J,K+1)
255  FORMAT(I10,2F10.2)
260  FORMAT(12X,I3,14X,F6.2,9X,F6.2)
265  CONTINUE
      WRITE(5,290)
-----
290  FORMAT(/10X,'CARREGAMENTO LINEARMENTE VARIÁVEL',/10X,'NO',I6X,'V
*ALOR',I8X,'NO',I6X,'VALOR')
      READ(8,275) (P(J,K+2),J=1,NP)
275  FORMAT(8F10.2)
      WRITE(5,280) (J,P(J,K+2),J=1,NP)
280  FORMAT(9X,I3,15X,F6.2,16X,I3,15X,F6.2)
      K=K+3
200  IF(ITC(II)-4)150,310,150
C    VARIACAO DE TEMPERATURA
310  READ(8,145) (CDT(I),I=1,NMAT)
145  FORMAT(8F10.6)
      READ(8,315) (P(N,K),P(N,K+1),N=1,NE)
315  FORMAT(8F10.2)
      WRITE(5,185) II
185  FORMAT(/10X,'CARREGAMENTO NO.*****',I4,/10X,'VARIACAO DE TE
*MPERATURA',/10X,'ELEMENTO',I3X,'FACE SUPERIOR',I3X,'FACE INFERIOR
*')
      WRITE(5,195) (N,P(N,K),P(N,K+1),N=1,NE)
195  FORMAT(13X,I3,16X,F5.2,18X,F5.2)
      WRITE(5,190)
190  FORMAT(/10X,'PROPRIEDADE',I3X,'COEFICIENTE DE DILATAÇÃO TERMICA')
      WRITE(5,180) (I,CDT(I),I=1,NMAT)
180  FORMAT(14X,I2,26X,F8.6)
      K=K+2
150  CONTINUE

```

164.

160 RETURN
END

/*
//LKED.SYSLMOD DD DSN=CASC05(CARGA),UNIT=2314,
// VOL=SER=LIXD01,DISP=(OLD,KEEP)

```

//STEP3 EXEC FORTGCL
//FORT.SYSIN DD *
  SUBROUTINE DEBLO(NFIRS,NLAST,LC,ITIPO,NBLOC)
  DIMENSION NFIRS(25),NLAST(25),LC(300),ITIPO(300)
  COMMON NP,NE,NPDP,NGLN,MBAND,NUMBL,AREA,NCAR,NCL,ITP,ITC(4),GAMA(1
*0),POISS(10),YOUNG(10),B(160,3),THICK(500),DESNO(160),A(160,80),CO
*RD(300,3),IX(500,4),NK(100),LN(100,6),ISR,NDD,BV(100,6),ID1,ID2,ID
*3,CDT(10)
C
C *****
C  ESTA SUBROTINA CALCULA O NUMERO DE BLOCOS E TAMBEM O PRIMEIRO E
C  ULTIMO NO DE CADA BLOCO
C  *****
C
  LC(1)=ITIPO(1)
  DO 100 I=2,NP
100  LC(I)=LC(I-1)+ITIPO(I)
  NBLOC=1
  DO 135 I=1,NP
  IF(NBLOC-1)110,105,110
105  II=6*I-LC(I)-80
  GO TO 115
110  K=NLAST(NBLOC-1)
  II=6*I-LC(I)-6*K+LC(K)-80
115  IE(II)135,120,125
120  NLAST(NBLOC)=I
  GO TO 130
125  NLAST(NBLOC)=I-1
130  NBLOC=NBLOC+1
135  CONTINUE
  IF(NLAST(NBLOC-1)-NP)145,140,145
140  NBLOC=NBLOC-1
  GO TO 150
145  NLAST(NBLOC)=NP
150  NFIRS(1)=1
  IF(NBLOC-1)155,165,155
155  DO 160 I=2,NBLOC
160  NFIRS(I)=NLAST(I-1)+1
165  WRITE(5,170) NBLOC
170  FORMAT(//10X,'NUMERO DE BLOCOS',I5,/)
  WRITE(5,175)
175  FORMAT(//10X,'BLOCO NUMERO',10X,'PRIMEIRO NO',10X,'ULTIMO NO',/)
  WRITE(5,180) (I,NFIRS(I),NLAST(I),I=1,NBLOC)
180  FORMAT(15X,I2,18X,I3,18X,I3)
  RETURN
  END
/*
//LKED.SYSLMOD DD DSN=CASC05(DEBLO),UNIT=2314,
// VOL=SER=LIX001,DISP=(OLD,KEEP)

```



```

//STEP4 EXEC FORTGCL
//FORT.SYSIN DD *
  SUBROUTINE RIGES(LC,ITIPO,NLAST,NFIRS,NBLOC,KP,KR,P)
  REAL L(18,18)
  DIMENSION NFIRS(25),NLAST(25),S1(6,6),S2(9,9),S(18,18),TENS1(3,6),
  *TENS2(9,9),ITIPO(300),KP(6),KR(9),LM(3),LC(300),C1(18,3),LJ(3),X(3
  *,3),P(300,6),X1(3,3),X2(3,3)
  COMMON NP,NE,NPDP,NGLN,MBAND,NUMBL,AREA,NCAR,NCL,ITP,ITC(4),GAMA(1
  *0),POISS(10),YOUNG(10),B(160,3),THICK(500),DESNO(160),A(160,80),CO
  *RD(300,3),IX(500,4),NK(100),LN(100,6),ISR,NDD,BV(100,6),ID1,ID2,ID
  *3,CDT(10)

C
C *****
C ESTA SUBROTINA TEM POR FINALIDADE FORMAR A MATRIZ DE RIGIDEZ DA
C ESTRUTURA
C *****
C
  DO 100 I=1,160
  DO 100 K=1,3
  B(I,K)=0.
  DO 100 J=1,80
100 A(I,J)=0.
  I2=0
  ICBLO=0
110 ICBLO=ICBLO+1
  IF(ICBLO-1)120,115,120
115 KS=0
  GO TO 125
120 NFA=NLAST(ICBLO-1)
  KS=6*NFA-LC(NFA)
125 ID2=KS+1
  NI=NFIRS(ICBLO)
  NF=NLAST(ICBLO)
  DO 165 N=1,NE
  DO 135 I=1,3
C VERIFICAR SE O NO ENCONTRA-SE NA PARTICAO CONSIDERADA
  IF(IX(N,I)-NI)135,130,130
130 IF(IX(N,I)-NF)140,140,135
135 CONTINUE
  GO TO 165
C TESTAR SE A MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO JA FOI CALCULADA
140 I1=N
  IF(N-I2)165,165,145
C CALCULO DAS COORDENADAS DOS NOS DO ELEMENTO EM RELACAO AO SISTEMA
C LOCAL
145 CALL TRANS(L,N,X1)
  DO 190 I=1,3
  DO 190 J=1,3
190 X2(J,I)=X1(J,I)-X1(J,1)
  DO 225 I=1,3

```

```

DO 225 J=1,3
X(I,J)=0.
DO 225 K=1,3
225 X(I,J)=X(I,J)+L(K,I)*X2(K,J)
X12=X(1,1)-X(1,2)
X13=X(1,1)-X(1,3)
X32=X(1,3)-X(1,2)
Y12=X(2,1)-X(2,2)
Y31=X(2,3)-X(2,1)
Y23=X(2,2)-X(2,3)
Y13=-Y31
X23=-X32
C   CALCULO DA MATRIZ DE RIGIDEZ
CALL MRTR3(N,C,E,TH,S1,X12,X13,Y12,Y13,TENS1)
CALL MRIT9(N,S2,C,E,TH,X13,Y13,X32,Y23,Y31,X23,TENS2)
CALL FORMA(S1,S2,S,KR,KP,ITIPO,C1,N,X13,X32,Y31,Y23,P,TH,TENS1,TEN
* S2)
C   ESPALHAMENTO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO NA MATRIZ DE RIGIDEZ
C   DA ESTRUTURA
N4=0
DO 170 I=1,3
KI=IX(N,I)
N1=6*KI-LC(KI)-5+ITIPO(KI)
N2=5-ITIPO(KI)+N1
DO 170 N3=N1,N2
N4=N4+1
NN=N3-KS
DO 170 JJ=1,NCAR
B(NN,JJ)=B(NN,JJ)+C1(N4,JJ)
170 CONTINUE
DO 150 I=1,3
KI=IX(N,I)
150 LM(I)=6*KI-LC(KI)-6+ITIPO(KI)
IX1=IX(N,1)
IX2=IX(N,2)
LJ(1)=0
LJ(2)=6-ITIPO(IX1)
LJ(3)=12-ITIPO(IX1)-ITIPO(IX2)
DO 160 I=1,3
KI=IX(N,I)
N1=6-ITIPO(KI)
DO 160 K1=1,N1
II=LM(I)+K1-KS
KK=LJ(1)+K1
DO 160 J=1,3
KJ=IX(N,J)
N2=6-ITIPO(KJ)
DO 160 K2=1,N2
JJ=LM(J)+K2-II+1-KS
LL=LJ(J)+K2

```

```

      IF(JJ)160,160,155
155 A(II,JJ)=A(II,JJ)+S(KK,LL)
160 CONTINUE
165 CONTINUE
      I2=I1
      NLIN=6*Nf-6*NI-LC(Nf)+LC(NI)-ITIPO(NI)+6
      IF(NBLOC-ICBLO)210,215,210
210 NF1=NLAST(ICBLO+1)
      GO TO 220
215 NF1=Nf
220 DO 260 M=NI,NF1
      IF(M-NP)230,230,260
230 DO 260 I=1,NPDP
      IF(NK(I)-M)260,235,260
235 NK1=6*M-LC(M)+ITIPO(M)-6
      IF(ITIPO(M)-1)245,240,245
240 J1=5
      GO TO 250
245 J1=6
250 DO 800 K=1,J1
      J=NK1-KS+K
      IF(LN(I,K)-1)800,255,800
255 IF(NDD)280,285,280
285 VD=0.
      GO TO 290
-----
280 VD=BV(I,K)
C   INTRODUCAO DOS DESLOCAMENTOS PRESCRITOS
290 CALL DESPR(J,VD)
800 CONTINUE
260 CONTINUE
C   GRAVAR A MATRIZ DE RIGIDEZ NO DISCO MAGNETICO
      WRITE(20*ID2)((B(N,J),J=1,3),(A(N,M),M=1,80),N=1,NLIN)
      IF(NBLOC-ICBLO)195,200,195
195 NI1=NFIRS(ICBLO+1)
      NF1=NLAST(ICBLO+1)
      NLINI=6*NF1-6*NI1-LC(NF1)+LC(NI1)-ITIPO(NI1)+6
C   PASSAR OS ELEMENTOS DO BLOCO INFERIOR PARA O SUPERIOR
      DO 175 K=1,NLINI
      NI=NLIN+K
      DO 205 J=1,NCAR
205 B(K,J)=B(NI,J)
      DO 175 M=1,80
      A(K,M)=A(NI,M)
175 CONTINUE
C   ZERAR O BLOCO INFERIOR
      NI=NLINI+1
      DO 180 K=NI,160
      DO 180 J=1,NCAR
      B(K,J)=0.
      DO 180 M=1,80

```

```
A(K,M)=0.  
180 CONTINUE  
GO TO 110  
200 RETURN  
END
```

```
/*  
//LKED.SYSLMDD DD DSN=CASC05(RIGES),UNIT=2314,  
// VOL=SER=LIX001,DISP=(OLD,KEEP)
```



```

//STEP5 EXEC FORTGCL
//FORT.SYSIN DD *
  SUBROUTINE TRANS(L,N,X1)
    REAL L(18,18)
    DIMENSION X1(3,3)
    COMMON NP,NE,NPDP,NGLN,MBAND,NUMBL,AREA,NCAR,NCL,ITP,ITC(4),GAMA(1
*0),POISS(10),YOUNG(10),B(160,3),THICK(500),DESNO(160),A(160,80),CO
*RD(300,3),IX(500,4),NK(100),LN(100,6),ISR,NDD,BV(100,6),ID1,ID2,IO
*3,CDT(10)
C
C *****
C ESTA SUBROTINA FORMA A MATRIZ DE TRANSFORMACAO DO SISTEMA LOCAL
C DO ELEMENTO PARA O SISTEMA GLOBAL
C *****
C
  DO 200 I=1,3
    JJ=IX(N,I)
    X1(1,I)=CORD(JJ,1)
    X1(2,I)=CORD(JJ,2)
200  X1(3,I)=CORD(JJ,3)
    Y32=X1(2,3)-X1(2,2)
    Z12=X1(3,1)-X1(3,2)
    Z32=X1(3,3)-X1(3,2)
    Y12=X1(2,1)-X1(2,2)
    X12=X1(1,1)-X1(1,2)
    X32=X1(1,3)-X1(1,2)
    DO 210 I=1,6
    DO 210 J=1,6
210  L(I,J)=0.
    AREA=0.50*SQRT((Y32*Z12-Z32*Y12)**2+(Z32*X12-X32*Z12)**2+(X32*Y12-
*X12*Y32)**2)
    AREA=ABS(AREA)
    S23=SQRT(X32**2+Y32**2+Z32**2)
    L(1,1)=X32/S23
    L(2,1)=Y32/S23
    L(3,1)=Z32/S23
    L(1,3)=(Y32*Z12-Z32*Y12)/(2.*AREA)
    L(2,3)=(Z32*X12-X32*Z12)/(2.*AREA)
    L(3,3)=(X32*Y12-X12*Y32)/(2.*AREA)
    L(1,2)=L(2,3)*L(3,1)-L(3,3)*L(2,1)
    L(2,2)=L(1,1)*L(3,3)-L(1,3)*L(3,1)
    L(3,2)=L(1,3)*L(2,1)-L(1,1)*L(2,3)
    DO 220 I=1,3
    DO 220 J=1,3
220  L(I+3,J+3)=L(I,J)
    RETURN
  END
/*
//LKED.SYSLMOD DD DSN=CASC05(TRANS),UNIT=2314,
// VOL=SER=LIX001,DISP=(OLD,KEEP)

```

```

//STEP6 EXEC FORTGCL
//FORT.SYSIN DD *
  SUBROUTINE MRTR3(N,C,E,TH,RIG,X12,X13,Y12,Y13,DB)
  DIMENSION B1(3,6),D(3,3),DB(3,6),RIG(6,6)
  COMMON NP,NE,NPDP,NGLN,MBAND,NUMBL,AREA,NCAR,NCL,ITP,ITC(4),GAMA(1
*0),POISS(10),YOUNG(10),B(160,3),THICK(500),DESN0(160),A(160,80),CO
*RD(300,3),IX(500,4),NK(100),LN(100,6),ISR,NDD,BV(100,6),ID1,ID2,ID
*3,CDT(10)
C
C *****
C ESTA SUBROTINA FORMA A MATRIZ DE RIGIDEZ E DE TENSÃO DE UM ELEMEN-
C TO TRIANGULAR PARA ESTADO PLANO DE TENSOES COM SEIS DESLOCAMENTOS
C NDDAIS
C *****
C
  A2=1./(2.*AREA)
  B1(1,1)=(Y13-Y12)*A2
  B1(1,2)=0.
  B1(1,3)=-Y13*A2
  B1(1,4)=0.
  B1(1,5)=Y12*A2
  B1(1,6)=0.
  B1(2,1)=0.
  B1(2,2)=(X12-X13)*A2
  B1(2,3)=0.
  B1(2,4)=X13*A2
  B1(2,5)=0.
  B1(2,6)=-X12*A2
  B1(3,1)=B1(2,2)
  B1(3,2)=B1(1,1)
  B1(3,3)=B1(2,4)
  B1(3,4)=B1(1,3)
  B1(3,5)=B1(2,6)
  B1(3,6)=B1(1,5)
C
  MATRIZ DE ELASTICIDADE
  L=IX(N,4)
  C=POISS(L)
  E=YOUNG(L)
  TH=THICK(N)
  R=E/(1.-C**2)
  D(1,1)=R
  D(1,2)=C*R
  D(1,3)=0.
  D(2,1)=D(1,2)
  D(2,2)=D(1,1)
  D(2,3)=0.
  D(3,1)=D(1,3)
  D(3,2)=D(2,3)
  D(3,3)=(R*(1.-C))/2.
C
  MATRIZ DE TENSÃO

```

172.

```
      DO 100 I=1,3
      DO 100 J=1,6
      DB(I,J)=0.
      DO 100 K=1,3
100   DB(I,J)=DB(I,J)+D(I,K)*B1(K,J)
      DO 115 I=1,6
      DO 115 J=1,6
      RIG(I,J)=0.
      DO 115 K=1,3
115   RIG(I,J)=RIG(I,J)+B1(K,I)*DB(K,J)
      DO 120 I=1,6
      DO 120 J=1,6
120   RIG(I,J)=TH*AREA*RIG(I,J)
      RETURN
      END
/*
//LKED.SYSLMOD DD DSN=CASC05(MRTR3),UNIT=2314,
// VOL=SER=LIX001,DISP=(OLD,KEEP)
```

```
//STEP7 EXEC FORTGCL
```

```
//FORT.SYSIN DD *
```

```
  SUBROUTINE MRIT9(N,RIG,C,E,TH,X13,Y13,X32,Y23,Y31,X23,S)
  DIMENSION H(3,3),T(9,9),FI(9,9),U(9,9),SK(9,9),RIG(9,9),D(3,3),DT(
*3,3),S(9,9)
  COMMON NP,NE,NPDP,NGLN,MBAND,NUMBL,AREA,NCAR,NCL,ITP,ITC(4),GAMA(1
*0),POISS(10),YOUNG(10),B(160,3),THICK(500),DESN0(160),A(160,80),CO
*RD(300,3),IX(500,4),NK(100),LN(100,6),ISR,NDD,BV(100,6),ID1,ID2,ID
*3,CDT(10)
```

```
*****
ESTA SUBROTINA FORMA A MATRIZ DE RIGIDEZ E DE TENSÃO DE UM ELEMEN-
TO TRIANGULAR PARA FLEXÃO DE PLACAS COM NOVE DESLOCAMENTOS NODAIS
*****
```

```
A1=4.*AREA**2
T(1,1)=Y23**2/A1
T(1,2)=Y31**2/A1
T(1,3)=2.*Y31*Y23/A1
T(2,1)=X32**2/A1
T(2,2)=X13**2/A1
T(2,3)=2.*X13*X32/A1
T(3,1)=2.*X32*Y23/A1
T(3,2)=2.*X13*Y31/A1
T(3,3)=2.*(X13*Y23+X32*Y31)/A1
```

```
MATRIZ DE ELASTICIDADE
```

```
A2=(E*TH**3)/(12.*(1.-C**2))
D(1,1)=A2
D(1,2)=C*A2
D(1,3)=0.
D(2,1)=D(1,2)
D(2,2)=A2
D(2,3)=0.
D(3,1)=D(1,3)
D(3,2)=D(2,3)
D(3,3)=A2*(1.-C)/2.
```

```
CALCULO DA MATRIZ D*T
```

```
DO 100 I=1,3
DO 100 J=1,3
DT(I,J)=0.
DO 100 K=1,3
100 DT(I,J)=DT(I,J)+D(I,K)*T(K,J)
```

```
CALCULO DA MATRIZ T'*D*T
```

```
DO 110 I=1,3
DO 110 J=1,3
H(I,J)=0.
DO 110 K=1,3
110 H(I,J)=H(I,J)+T(K,I)*DT(K,J)
```

```
FORMACAO DA MATRIZ DE TENSÃO
```

```
X21=X23-X13
```

174.

```
Y21=Y23-Y13
DO 115 J=1,9
DO 115 I=1,9
115 FI(I,J)=0.
FI(1,6)=2.
FI(2,5)=2.
FI(3,6)=1.
FI(3,5)=1.
FI(3,4)=-1.
DO 120 K=1,2
DO 120 I=1,3
IJ=3*K+I
DO 120 J=1,6
120 FI(IJ,J)=FI(I,J)
FI(1,9)=6.
FI(2,7)=-2.
FI(2,9)=2.
FI(3,7)=2.
FI(3,9)=4.
FI(4,7)=2.
FI(4,8)=-2.
FI(5,8)=-6.
FI(6,7)=-2.
FI(6,8)=-4.
FI(7,9)=-6.
FI(8,8)=6.
FI(9,8)=2.
FI(9,9)=-2.
DO 125 IK=1,3
J1=3*(IK-1)
DO 125 I=1,3
DO 125 J=1,9
I1=J1+I
T(I1,J)=0.
DO 125 K=1,3
K1=J1+K
125 T(I1,J)=T(I1,J)+DT(I,K)*FI(K1,J)
DO 130 I=1,9
DO 130 J=1,9
130 U(I,J)=0.
U(1,1)=1.
U(2,4)=1.
U(3,7)=1.
U(4,2)=Y21/2.
U(4,3)=-X21/2.
U(4,5)=-U(4,2)
U(4,6)=-U(4,3)
U(5,5)=-Y23/2.
U(5,6)=X23/2.
U(5,8)=-U(5,5)
```

```

U(5,9)=-U(5,6)
U(6,2)=-Y13/2.
U(6,3)=X13/2.
U(6,8)=-U(6,2)
U(6,9)=-U(6,3)
U(7,1)=-1.
U(7,2)=-U(4,2)
U(7,3)=-U(4,3)
U(7,4)=1.
U(7,5)=U(4,5)
U(7,6)=U(4,6)
U(8,4)=-1.
U(8,5)=-U(5,5)
U(8,6)=-U(5,6)
U(8,7)=1.
U(8,8)=U(8,5)
U(8,9)=U(8,6)
U(9,1)=1.
U(9,2)=U(6,2)
U(9,3)=U(6,3)
U(9,7)=-1.
U(9,8)=U(9,2)
U(9,9)=U(9,3)
DO 135 I=1,9
DO 135 J=1,9
S(I,J)=0.
DO 135 K=1,9
135 S(I,J)=S(I,J)+T(I,K)*U(K,J)
DO 330 I=1,9
DO 330 J=1,9
330 RIG(I,J)=0.
RIG(4,4)=H(3,3)*AREA
RIG(4,5)=-AREA*(2.*H(3,2)+H(3,3))
RIG(4,6)=-AREA*(2.*H(3,1)+H(3,3))
RIG(4,7)=(2.*AREA*(H(3,2)-H(3,1)))/3.
RIG(4,8)=(2.*AREA*(H(3,1)+H(3,3)))/3.
RIG(4,9)=(2.*AREA*(H(3,2)+H(3,3)))/3.
RIG(4,9)=-RIG(4,9)
RIG(5,5)=AREA*(4.*H(2,2)+4.*H(2,3)+H(3,3))
RIG(5,6)=AREA*(4.*H(2,1)+2.*H(3,1)+2.*H(2,3)+H(3,3))
RIG(5,7)=(2.*AREA*(2.*H(2,1)+H(3,1)-2.*H(2,2)-H(3,2)))/3.
RIG(5,8)=(2.*AREA*(2.*H(2,1)+H(3,1)+2.*H(2,3)+H(3,3)))/3.
RIG(5,8)=-RIG(5,8)
RIG(5,9)=(2.*AREA*(2.*H(2,2)+H(3,2)+2.*H(2,3)+H(3,3)))/3.
RIG(6,6)=AREA*(4.*H(1,1)+4.*H(1,3)+H(3,3))
RIG(6,7)=(2.*AREA*(2.*H(1,1)+H(3,1)-2.*H(1,2)-H(3,2)))/3.
RIG(6,8)=- (2.*AREA*(2.*H(1,1)+H(3,1)+2.*H(1,3)+H(3,3)))/3.
RIG(6,9)=(2.*AREA*(2.*H(1,2)+H(3,2)+2.*H(1,3)+H(3,3)))/3.
RIG(7,7)=(2.*AREA*(H(1,1)-H(1,3)+H(2,2)-H(2,3)+H(3,3)-H(1,2)))/3.
RIG(7,8)=(2.*AREA*(H(3,3)+2.*H(3,2)-H(1,2)-H(1,3)-H(1,1)))/3.

```

176.



```
RIG(7,9)=(2.*AREA*(H(3,3)-H(2,3)-H(2,2)+2.*H(1,3)-H(1,2)))/3.
RIG(8,8)=(2.*AREA*(H(1,1)+3.*H(1,2)+3.*H(1,3)+9.*H(2,2)+9.*H(2,3)+
*3.*H(3,3)))/3.
RIG(8,9)=(2.*AREA*(-5.*H(1,2)-2.*H(2,3)-2.*H(1,3)-H(3,3)))/3.
RIG(9,9)=(2.*AREA*(9.*H(1,1)+3.*H(1,2)+9.*H(1,3)+H(2,2)+3.*H(2,3)+
*3.*H(3,3)))/3.
DO 340 I=1,9
DO 340 J=1,9
340 RIG(J,I)=RIG(I,J)
DO 390 I=1,9
DO 390 J=1,9
SK(I,J)=0.
DO 390 K=1,9
390 SK(I,J)=RIG(I,K)*U(K,J)+SK(I,J)
DO 400 I=1,9
DO 400 J=1,9
RIG(I,J)=0.
DO 400 K=1,9
400 RIG(I,J)=U(K,I)*SK(K,J)+RIG(I,J)
RETURN
END
/*
//LKED.SYSLMOD DD DSN=CASC05(MRIT9),UNIT=2314,
// VOL=SER=LIX001,DISP=(OLD,KEEP)
```

```

//STEP8 EXEC FORTGCL
//FORT.SYSIN DD *
  SUBROUTINE FORMA(S1,S2,SM,KR,KP,ITIPO,C1,N,X13,X32,Y31,Y23,P,TH,TE
*NS1,TENS2)
  REAL L(18,18),MT(18,18),L1(6,6),L2(6,6)
  DIMENSION S(18,18),SM(18,18),S1(6,6),S2(9,9),KP(6),KR(9),ITIPO(300
*),C1(18,3),X(3,3),X2(3,3),P(300,6),TENS1(3,6),TENS2(9,9),X1(3,3)
  COMMON NP,NE,NPDP,NGLN,MBAND,NUMBL,AREA,NCAR,NCL,ITP,ITC(4),GAMA(1
*0),POISS(10),YOUNG(10),B(160,3),THICK(500),DESNO(160),A(160,80),CO
*RD(300,3),IX(500,4),NK(100),LN(100,6),ISR,NDD,BV(100,6),ID1,ID2,ID
*3,CDT(10)

  *****
  ESTA SUBROTINA TEM POR FINALIDADE FORMAR A MATRIZ DE RIGIDEZ DO
  ELEMENTO DE CASCA
  *****

  DO 100 I=1,18
  DO 100 J=1,18
  MT(I,J)=0.
  S(I,J)=0.
100 SM(I,J)=0.
  DISTRIBUIR OS ELEMENTOS DE S1 E S2 EM SM
  DO 105 K=1,6
  M=KP(K)
  DO 105 I=1,6
  J=KP(I)
105 SM(M,J)=S1(K,I)
  DO 110 K=1,9
  M=KR(K)
  DO 110 I=1,9
  J=KR(I)
110 SM(M,J)=S2(K,I)
  IF(ITP)400,450,450
  INTRODUCAO DOS COEFICIENTES DE RIGIDEZ ASSOCIADOS A ROTACAO SEGUN-
  DO A NORMAL AO PLANO DO ELEMENTO
400 ALFA=0.001
  KK=IX(N,4)
  R2=ALFA*YOUNG(KK)*TH*AREA
  R1=-0.50*R2
  SM(6,6)=R2
  SM(6,12)=R1
  SM(6,18)=R1
  SM(12,6)=R1
  SM(12,12)=R2
  SM(12,18)=R1
  SM(18,6)=R1
  SM(18,12)=R1
  SM(18,18)=R2
450 DO 115 I=1,3

```

178.

```
      IF(ITP)800,120,830
800 DO 810 J=1,NPDP
      IF(IX(N,I)-NK(J))810,820,810
810 CONTINUE
      GO TO 130
820 IF(ISR)120,130,120
830 DO 840 J=1,NPDP
      IF(IX(N,I)-NK(J))840,865,840
840 CONTINUE
      GO TO 145
865 IF(ISR)120,145,120
145 KK=IX(N,I)
      IF(ITIPO(KK)-1)130,135,130
130 CALL TRANS(L,N,X1)
      A1=L(3,1)
      A2=L(3,2)
      A3=L(3,3)
      GO TO 175
```

C FORMACAO DA MATRIZ DE TRANSFORMACAO DO SISTEMA LOCAL DO ELEMENTO
C PARA O SISTEMA LOCAL TANGENTE

```
120 NEL=0
      DO 325 II=1,6
      DO 325 JJ=1,6
325 L1(II,JJ)=0.
      ALFA1=0.
      ALFA2=0.
      ALFA3=0.
      CALL TRANS(L,N,X1)
      DO 326 I1=1,6
      DO 326 J1=1,6
326 L2(I1,J1)=L(I1,J1)
      A1=L2(3,1)
      A2=L2(3,2)
      A3=L2(3,3)
      DO 330 J=1,NE
      DO 330 K=1,3
      IF(IX(J,K)-IX(N,I))330,335,330
335 NEL=NEL+1
      DO 340 II=1,3
      JJ=IX(J,II)
      X2(1,II)=CORD(JJ,1)
      X2(2,II)=CORD(JJ,2)
340 X2(3,II)=CORD(JJ,3)
      X12=X2(1,1)-X2(1,2)
      Y12=X2(2,1)-X2(2,2)
      Z12=X2(3,1)-X2(3,2)
      X32=X2(1,3)-X2(1,2)
      Y32=X2(2,3)-X2(2,2)
      Z32=X2(3,3)-X2(3,2)
      ALFA1=ALFA1+((Y32*Z12-Y12*Z32)/(2.*AREA))
```

```

ALFA2=ALFA2+((Z32*X12-X32*Z12)/(2.*AREA))
ALFA3=ALFA3+(X32*Y12-X12*Y32)/(2.*AREA)
330 CONTINUE
ALFA1=ALFA1/NEL
ALFA2=ALFA2/NEL
ALFA3=ALFA3/NEL
XMOD=SQRT(ALFA1**2+ALFA2**2+ALFA3**2)
ALFA1=ALFA1/XMOD
ALFA2=ALFA2/XMOD
ALFA3=ALFA3/XMOD
IF(ABS(ALFA1)-0.01)345,345,350
345 ALFA1=0.
IF(ABS(ALFA2)-0.01)355,355,360
360 L1(1,1)=1.
L1(2,2)=ALFA3
L1(3,2)=-ALFA2
L1(1,3)=ALFA1
L1(2,3)=ALFA2
L1(3,3)=ALFA3
GO TO 365
355 L1(1,1)=1.
L1(2,2)=1.
L1(3,3)=1.
GO TO 365
350 R1=SQRT(ALFA1**2/(ALFA1**2+ALFA2**2))
IF(ABS(ALFA2)-0.01)412,412,414
412 Z1=0.
Z2=1.
GO TO 419
414 Z1=(ALFA2/ALFA1)*R1
Z2=-R1
IF(ALFA1*ALFA2)418,418,419
418 Z1=-Z1
Z2=-Z2
419 L(1,1)=Z1
L(2,1)=Z2
L(1,2)=-ALFA3*Z2
L(2,2)=ALFA3*Z1
L(3,2)=ALFA1*Z2-ALFA2*Z1
L(1,3)=ALFA1
L(2,3)=ALFA2
L(3,3)=ALFA3
365 DO 370 II=1,3
DO 370 JJ=1,3
370 L(II+3, JJ+3)=L(II, JJ)
DO 375 II=1,6
DO 375 JJ=1,6
L(II, JJ)=0.
DO 375 KK=1,6
375 L(II, JJ)=L(II, JJ)+L1(KK, II)*L2(KK, JJ)

```

```

GO TO 175
C   FORMACAO DA MATRIZ DE TRANSFORMACAO DO SISTEMA LOCAL DO ELEMENTO
C   PARA O SISTEMA LOCAL PLANAR
135 DO 140 J=1,NE
    DO 140 K=1,3
    IF(IX(J,K)-IX(N,I))140,150,140
140 CONTINUE
150 J2=IX(N,1)
    DO 155 I1=2,3
    I3=I1-1
    DO 155 I2=1,3
    J1=IX(J,I1)
155 X2(I2,I3)=CORD(J1,I2)-CORD(J2,I2)
    CALL TRANS(L,N,X1)
    A1=L(3,1)
    A2=L(3,2)
    A3=L(3,3)
    DO 160 I1=1,3
    DO 160 J1=1,2
    X(I1,J1)=0.
    DO 160 K1=1,3
160 X(I1,J1)=X(I1,J1)+L(K1,I1)*X2(K1,J1)
    A32=X(1,2)-X(1,1)
    B32=X(2,2)-X(2,1)
    S32=SQRT(A32**2+B32**2)
    DO 165 I1=1,6
    DO 165 J1=1,6
165 L(I1,J1)=0.
    L(1,1)=A32/S32
    L(1,2)=B32/S32
    L(2,1)=-B32/S32
    L(2,2)=A32/S32
    L(3,3)=1.
    DO 170 I1=1,3
    DO 170 J1=1,3
170 L(I1+3,J1+3)=L(I1,J1)
C   ARMAZENAR OS ELEMENTOS DA MATRIZ L NA MATRIZ MT
175 DO 315 II=1,6
    DO 315 JJ=1,6
    IJ=6*(I-1)+II
    IK=6*(I-1)+JJ
315 MT(IJ,IK)=L(II,JJ)
115 CONTINUE
C   CALCULO DO PRODUTO MT.SM.MT'
DO 185 I1=1,18
DO 185 J1=1,18
S(I1,J1)=0.
DO 185 K1=1,18
185 S(I1,J1)=S(I1,J1)+MT(I1,K1)*SM(K1,J1)
DO 190 I1=1,18

```

```

DO 190 J1=1,18
SM(I1,J1)=0.
DO 190 K1=1,18
190 SM(I1,J1)=SM(I1,J1)+S(I1,K1)*MT(J1,K1)
ID3=3*N-2
C GRAVAR A MATRIZ DE TRANSFORMACAO E AS MATRIZES DE TENSAO NO DISCO
C MAGNETICO
WRITE(30,ID3) ((MT(I,J),J=1,18),I=1,18),((TENS1(I,J),J=1,6),I=1,3)
*,((TENS2(I,J),J=1,9),I=1,9)
Y13=-Y31
X23=-X32
C FORMACAO DO VETOR DOS TERMOS INDEPENDENTES
CALL FVTIN(N,TH,X13,Y13,X23,Y23,C1,MT,P,A1,A2,A3)
C ELIMINACAO DAS LINHAS E COLUNAS DA MATRIZ DE RIGIDEZ E DAS LINHAS
C DO VETOR DAS FORCAS NODAIS EQUIVALENTES,CORRESPONDENTES AO SEXTO
C GRAU DE LIBERDADE APENAS PARA OS NOS EM QUE ITIPO=1
KK1=IX(N,1)
KK2=IX(N,2)
IF(ITIPO(KK1)-1)210,215,210
215 IF(ITIPO(KK2)-1)220,225,220
225 IC=0
GO TO 230
220 IC=1
230 I1=11+IC
J1=16+IC
DO 235 JJ=6,11
DO 235 II=1,18
235 SM(II,JJ)=SM(II,JJ+1)
DO 240 JJ=11,J1
KK=JJ+2-IC
DO 240 II=1,18
240 SM(II,JJ)=SM(II,KK)
DO 245 JJ=1,J1
DO 245 II=6,11
245 SM(II,JJ)=SM(II+1,JJ)
DO 250 JJ=1,J1
DO 250 II=11,J1
KK=II+2-IC
250 SM(II,JJ)=SM(KK,JJ)
DO 275 II=6,10
DO 275 JJ=1,NCAR
275 C1(II,JJ)=C1(II+1,JJ)
ICC=6+IC
II=10+ICC
DO 290 II=11,I1
JJ=II+2-IC
DO 290 JK=1,NCAR
290 C1(II,JK)=C1(JJ,JK)
GO TO 260
210 IF(ITIPO(KK2)-1)260,255,260

```

182.

```
255 DO 265 JJ=12,17
    DO 265 II=1,18
265 SM(II,JJ)=SM(II,JJ+1)
    DO 270 JJ=1,17
    DO 270 II=12,17
270 SM(II,JJ)=SM(II+1,JJ)
    DO 295 II=12,17
    DO 295 JJ=1,NCAR
295 C1(II,JJ)=C1(II+1,JJ)
260 RETURN
    END
```

```
/*
//LKED.SYSLMOD DD DSN=CASC05(FORMA),UNIT=2314,
// VOL=SER=LIX001,DISP=(OLD,KEEP)
```

```

//STEP9 EXEC FORTGCL
//FORT.SYSIN DD *
  SUBROUTINE DESPR(N,VD)
    COMMON NP,NE,NPDP,NGLN,MBAND,NUMBL,AREA,NCAR,NCL,ITP,ITC(4),GAMA(1
*0),POISS(10),YOUNG(10),B(160,3),THICK(500),DESNO(160),A(160,80),CO
*RD(300,3),IX(500,4),NK(100),LN(100,6),ISR,NDD,BV(100,6),ID1,ID2,ID
*3,CDT(10)
C
C *****
C ESTA SUBROTINA TEM POR FINALIDADE INTRODUIZIR OS DESLOCAMENTOS
C PRESCRITOS
C *****
C
  ND2=160
  DO 150 M=2,MBAND
  K=N-M+1
  IF(K)135,135,130
130 DO 155 J=1,NCAR
155 B(K,J)=B(K,J)-A(K,M)*VD
  A(K,M)=0.
135 K=N+M-1
  IF(ND2-K)150,140,140
140 DO 160 J=1,NCAR
160 B(K,J)=B(K,J)-A(N,M)*VD
  A(N,M)=0.
-----
150 CONTINUE
  A(N,1)=1.
  DO 165 J=1,NCAR
165 B(N,J)=VD
  RETURN
  END
/*
//LKED.SYSLMOD DD DSN=CASC05(DESPR),UNIT=2314,
// VOL=SER=LIX001,DISP=(OLD,KEEP)

```

184.



```
//STEP10 EXEC FORTGCL
//FORT.SYSIN DD *
SUBROUTINE FVTIN(N,TH,X13,Y13,X23,Y23,C1,L,P,A1,A2,A3)
REAL L(18,18)
DIMENSION C1(18,3),C2(18),P(300,6)
COMMON NP,NE,NPDP,NGLN,MBAND,NUMBL,AREA,NCAR,NCL,ITP,ITC(4),GAMA(1
*0),POISS(10),YOUNG(10),B(160,3),THICK(500),DESNO(160),A(160,80),CO
*RD(300,3),IX(500,4),NK(100),LN(100,6),ISR,NDD,BV(100,6),ID1,ID2,ID
*3,CDT(10)

C
C *****
C ESTA SUBROTINA FORMA OS VETORES DAS FORÇAS NODAIS EQUIVALENTES DO
C ELEMENTO
C *****
C
DO 200 KK=1,18
DO 200 MM=1,3
200 C1(KK,MM)=0.
J1=IX(N,1)
J2=IX(N,2)
J3=IX(N,3)
M=1
K=1
LL=IX(N,4)
IF(NCL)215,330,215
215 DO 240 JJ=1,NCL
IF(ITC(JJ)-1)245,250,245
C
PRESSAO
250 P1=P(J1,K)
P2=P(J2,K)
P3=P(J3,K)
P4=0.
P5=0.
S12=0.
S23=0.
CALL TINVL(P1,P2,P3,P4,P5,X13,Y13,X23,Y23,S12,S23,L,C2)
DO 255 KK=1,18
255 C1(KK,M)=C2(KK)
M=M+1
K=K+1
GO TO 240
245 IF(ITC(JJ)-2)260,265,260
C
CARGAS CONCENTRADAS
265 IF(N-1)315,320,315
320 C1(1,M)=P(J1,K)
C1(2,M)=P(J1,K+1)
C1(3,M)=P(J1,K+2)
C1(7,M)=P(J2,K)
C1(8,M)=P(J2,K+1)
C1(9,M)=P(J2,K+2)
```

```

C1(13,M)=P(J3,K)
C1(14,M)=P(J3,K+1)
C1(15,M)=P(J3,K+2)
GO TO 125
315 N1=N-1
DO 100 J=1,N1
DO 100 I=1,3
IF(IX(J,I)-J1)100,105,100
100 CONTINUE
C1(1,M)=P(J1,K)
C1(2,M)=P(J1,K+1)
C1(3,M)=P(J1,K+2)
105 DO 110 J=1,N1
DO 110 I=1,3
IF(IX(J,I)-J2)110,115,110
110 CONTINUE
C1(7,M)=P(J2,K)
C1(8,M)=P(J2,K+1)
C1(9,M)=P(J2,K+2)
115 DO 120 J=1,N1
DO 120 I=1,3
IF(IX(J,I)-J3)120,125,120
120 CONTINUE
C1(13,M)=P(J3,K)
C1(14,M)=P(J3,K+1)
C1(15,M)=P(J3,K+2)
125 K=K+3
M=M+1
GO TO 240
260 IF(ITC(JJ)-3)280,270,280
C PRESSAO E TAMBEM CARGAS ATUANDO NO PLANO DO ELEMENTO
270 P1=P(J1,K+2)
P2=P(J2,K+2)
P3=P(J3,K+2)
X12=X13-X23
Y12=Y13-Y23
S12=SQRT(X12**2+Y12**2)
S23=SQRT(X23**2+Y23**2)
P4=P(N,K)
P5=P(N,K+1)
CALL TINVL(P1,P2,P3,P4,P5,X13,Y13,X23,Y23,S12,S23,L,C2)
DO 275 KK=1,18
275 C1(KK,M)=C2(KK)
M=M+1
K=K+3
280 IF(ITC(JJ)-4)240,285,240
C VARIACAO DE TEMPERATURA
285 DELT1=P(N,K)
DELT2=P(N,K+1)
CALL TEMPE(N,TH,DELT1,DELT2,X13,Y13,X23,Y23,L,C2)

```

186.

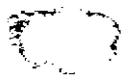
```
      DO 130 KK=1,18
130  C1(KK,M)=C2(KK)
      M=M+1
      K=K+2
240  CONTINUE
330  IF(GAMA(LL))380,310,380
380  IF(N-1)340,335,340
335  NCAR=NCL+1
340  GX=GAMA(LL)*A1
      GY=GAMA(LL)*A2
      GZ=GAMA(LL)*A3
      CALL TINPP(GX,GY,GZ,X13,X23,Y13,Y23,TH,C2,L)
      DO 230 KK=1,18
230  C1(KK,M)=C2(KK)
      GO TO 345
310  NCAR=NCL
345  RETURN
      END
```

```
/*
//LKED.SYSLMOD DD DSN=CASC05(FVTIN),UNIT=2314,
// VOL=SER=LIX001,DISP=(OLD,KEEP)
```

```

//STEP11 EXEC FORTGCL
//FORT.SYSIN DD *
  SUBROUTINE TINPP(GX,GY,GZ,X13,X23,Y13,Y23,TH,C2,L)
  REAL L(18,18)
  DIMENSION C2(18),Q(18)
  COMMON NP,NE,NPDP,NGLN,MBAND,NUMBL,AREA,NCAR,NCL,ITP,ITC(4),GAMA(1
*0),POISS(10),YOUNG(10),B(160,3),THICK(500),DESNO(160),A(160,80),CO
*RD(300,3),IX(500,4),NK(100),LN(100,6),ISR,NDD,BV(100,6),ID1,ID2,ID
*3,CDT(10)
C
C *****
C ESTA SUBROTINA FORMA O VETOR DAS CARGAS NODAIS EQUIVALENTES PARA
C AS FORCAS DE MASSA
C *****
C
  A1=(AREA*TH*GZ)/24.
  Q(1)=(AREA*TH*GX)/3.
  Q(2)=(AREA*TH*GY)/3.
  Q(3)=(AREA*TH*GZ)/3.
  Q(4)=(Y23-2.*Y13)*A1
  Q(5)=(2.*X13-X23)*A1
  Q(6)=0.
  Q(7)=Q(1)
  Q(8)=Q(2)
  Q(9)=Q(3)
  Q(10)=(Y13-2.*Y23)*A1
  Q(11)=(2.*X23-X13)*A1
  Q(12)=0.
  Q(13)=Q(1)
  Q(14)=Q(2)
  Q(15)=Q(3)
  Q(16)=(Y23+Y13)*A1
  Q(17)=- (X23+X13)*A1
  Q(18)=0.
  DO 100 I=1,18
  C2(I)=0.
  DO 100 K=1,18
  100 C2(I)=C2(I)+L(I,K)*Q(K)
  RETURN
  END
/*
//LKED.SYSLMOD DD DSN=CASC05(TINPP),UNIT=2314,
// VOL=SER=LIX001,DISP=(OLD,KEEP)

```



```

//STEP12 EXEC FORTGCL
//FORT.SYSIN DD *
  SUBROUTINE TINVL(P1,P2,P3,P4,P5,X13,Y13,X23,Y23,S12,S23,L,C2)
  REAL L(18,18)
  DIMENSION Q(18),C2(18)
  COMMON NP,NE,NPDP,NGLN,MBAND,NUMBL,AREA,NCAR,NCL,ITP,ITC(4),GAMA(1
*0),POISS(10),YOUNG(10),B(160,3),THICK(500),DESNO(160),A(160,80),CO
*RD(300,3),IX(500,4),NK(100),LN(100,6),ISR,NDD,BV(100,6),ID1,ID2,ID
*3,CDT(10)

C
C *****
C ESTA SUBROTINA FORMA O VETOR DAS FORÇAS NODAIS EQUIVALENTES PARA
C UM CARREGAMENTO NORMAL AO PLANO DO ELEMENTO E LINEARMENTE VARIÁVEL
C *****
C
  R=AREA/180.
  S=AREA/360.
  T=-AREA/360.
  DO 100 I=1,18
100 Q(I)=0.
  Q(3)=R*(32.*P1+14.*P2+14.*P3)
  Q(4)=S*(P1*(7.*Y23-14.*Y13)+P2*(5.*Y23-8.*Y13)+P3*(3.*Y23-8.*Y13))
  Q(5)=T*(P1*(7.*X23-14.*X13)+P2*(5.*X23-8.*X13)+P3*(3.*X23-8.*X13))
  Q(9)=R*(14.*P1+32.*P2+14.*P3)
  Q(10)=S*(P1*(5.*Y13-8.*Y23)+P2*(7.*Y13-14.*Y23)+P3*(3.*Y13-8.*Y23))
  *)
  Q(11)=T*(P1*(5.*X13-8.*X23)+P2*(7.*X13-14.*X23)+P3*(3.*X13-8.*X23))
  *)
  Q(15)=R*(14.*P1+14.*P2+32.*P3)
  Q(16)=S*(P1*(3.*Y23+5.*Y13)+P2*(5.*Y23+3.*Y13)+P3*(7.*Y23+7.*Y13))
  Q(17)=T*(P1*(3.*X23+5.*X13)+P2*(5.*X23+3.*X13)+P3*(7.*X23+7.*X13))
  Q(1)=P4*S12/2.
  Q(7)=Q(1)
  Q(8)=P5*S23/2.
  Q(14)=Q(8)
  DO 110 I=1,18
  C2(I)=0.
  DO 110 K=1,18
110 C2(I)=C2(I)+L(I,K)*Q(K)
  RETURN
  END

/*
//LKED.SYSLMOD DD DSN=CASC05(TINV),UNIT=2314,
// VOL=SER=LIX001,DISP=(OLD,KEEP)

```

```

//STEP13 EXEC FORTGCL
//FORT.SYSIN DD *
  SUBROUTINE TEMPE(N,TH,DELT1,DELT2,X13,Y13,X23,Y23,L,C2)
  REAL L(18,18)
  DIMENSION Q(18),C2(18)
  COMMON NP,NE,NPDP,NGLN,MBAND,NUMBL,AREA,NCAR,NCL,ITP,ITC(4),GAMA(1
*0),POISS(10),YOUNG(10),B(160,3),THICK(500),DESNO(160),A(160,80),CO
*RD(300,3),IX(500,4),NK(100),LN(100,6),ISR,NDD,BV(100,6),ID1,ID2,ID
*3,CDT(10)

  *****
  ESTA SUBROTINA CALCULA O VETOR DAS FORÇAS NODAIS EQUIVALENTES
  PARA UMA VARIACAO LINEAR DE TEMPERATURA ATRAVES DA ESPESSURA DO
  ELEMENTO
  *****

  KK=IX(N,4)
  CM=(YOUNG(KK)*CDT(KK)*THICK(N)*(DELT1-DELT2))/(2.*(1.-POISS(KK)))
  CF=(YOUNG(KK)*CDT(KK)*THICK(N)**2*(DELT1-DELT2))/(288.*AREA*(1.-PO
*ISS(KK)))
  A1=-CF*(X13*X23+Y13*Y23)
  A2=CF*(Y23**2+X23**2)
  A3=CF*(Y13**2+X13**2)
  Q(1)=CM*Y23
  Q(2)=-CM*X23
  Q(3)=2.*(-2.*A1+A2-2.*A3)
  Q(4)=(Y13-Y23)*(3.*A1+A2-A3)-Y13*(5.*A1+3.*A2+A3)
  Q(5)=(X23-X13)*(3.*A1+A2-A3)+X13*(5.*A1+3.*A2+A3)
  Q(6)=0.
  Q(7)=-CM*Y13
  Q(8)=CM*X13
  Q(9)=2.*(-2.*A1-2.*A2+A3)
  Q(10)=(Y23-Y13)*(3.*A1-A2+A3)-Y23*(5.*A1+A2+3.*A3)
  Q(11)=(X13-X23)*(3.*A1-A2+A3)+X23*(5.*A1+A2+3.*A3)
  Q(12)=0.
  Q(13)=CM*(Y13-Y23)
  Q(14)=CM*(X23-X13)
  Q(15)=2.*(4.*A1+A2+A3)
  Q(16)=-Y23*(-A1+A2-3.*A3)-Y13*(-A1-3.*A2+A3)
  Q(17)=X23*(-A1+A2-3.*A3)+X13*(-A1-3.*A2+A3)
  Q(18)=0.
  DO 100 I=1,18
  C2(I)=0.
  DO 100 K=1,18
  100 C2(I)=C2(I)+L(I,K)*Q(K)
  RETURN
  END

/*
//LKED.SYSLMOD DD DSN=CASC05(TEMPE),UNIT=2314,
// VOL=SER=LIX001,DISP=(OLD,KEEP)

```

190.

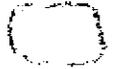
```
//STEP14 EXEC FORTGCL
//FORT.SYSIN DD *
SUBROUTINE RESOL
COMMON NP,NE,NPDP,NGLN,MBAND,NUMBL,AREA,NCAR,NCL,ITP,ITC(4),GAMA(1
*0),POISS(10),YOUNG(10),B(160,3),THICK(500),DESNO(160),A(160,80),CO
*RD(300,3),IX(500,4),NK(100),LN(100,6),ISR,NDD,BV(100,6),ID1,ID2,ID
*3,CDT(10)

C
C *****
C ESTA SUBROTINA RESOLVE SISTEMAS DE EQUACOES LINEARES PELO METODO
C DE GAUSS
C *****
C
NB1=NUMBL-1
MM=MBAND
ND=80
NN=80
NL=NN+1
NH=2*NN
IT=0
NB=0
ID2=1
GO TO 115
100 NB=NB+1
ID2=1+80*NB
DO 110 N=1,NN
NM=N+NN
DO 105 II=1,NCAR
B(N,II)=B(NM,II)
105 B(NM,II)=0.
DO 110 M=1,MM
A(N,M)=A(NM,M)
110 A(NM,M)=0.
IF(NUMBL-NB)115,120,115
C LEITURA DO BLOCO NO DISCO MAGNETICO
115 READ(20*ID2)((B(N,II),II=1,3),(A(N,M),M=1,80),N=NL,NH)
IF(NB)120,100,120
C TRIANGULARIZACAO DA MATRIZ DE RIGIDEZ
120 DO 155 N=1,NN
IF(A(N,1))125,155,125
125 DO 130 II=1,NCAR
130 B(N,II)=B(N,II)/A(N,1)
DO 150 L=2,MM
IF(A(N,L))135,150,135
135 C=A(N,L)/A(N,1)
I=N+L-1
J=0
DO 140 K=L,MM
J=J+1
140 A(I,J)=A(I,J)-C*A(N,K)
```

```

      DO 145 II=1,NCAR
145  B(I,II)=B(I,II)-A(N,L)*B(N,II)
      A(N,L)=C
150  CONTINUE
155  CONTINUE
      IF(NUMBL-NB)160,165,160
160  ID1=1+(NB-1)*40
C     GRAVAR NO DISCO MAGNETICO O BLOCO TRANSFORMADO
      WRITE(10*ID1) ((B(N,II),II=1,NCAR),(A(N,M),M=2,MM),N=1,NN)
      GO TO 100
C     OBTENCAO DOS VALORES DAS INCOGNITAS
165  NB1=NB1-1
      IK=1+NB1*40
      DO 180 M=1,NN
      N=NN+1-M
      DO 170 K=2,MM
      L=N+K-1
      DO 170 II=1,NCAR
170  B(N,II)=B(N,II)-A(N,K)*B(L,II)
      NM=N+NN
      DO 175 IA=1,NCAR
175  B(NM,IA)=B(N,IA)
      DO 180 IR=1,NCAR
      NI=IR*NUMBL-IT
180  A(NM,NI)=B(N,IR)
      NB=NB-1
      IT=IT+1
      IF(NB)185,190,185
185  ID1=IK
      READ(10*ID1) ((B(N,II),II=1,NCAR),(A(N,M),M=2,MM),N=1,NN)
      GO TO 165
C     ARMAZENAR OS VALORES DAS INCOGNITAS EM UM VETOR COLUNA
190  K=0
      I=NUMBL*NCAR
      DO 195 J=1,I
      DO 195 N=1,NN
      NM=N+NN
      K=K+1
195  DESNO(K)=A(NM,J)
      RETURN
      END
/*
//LKED.SYSLMOD DD DSN=CASC05(RESOL),UNIT=2314,
// VOL=SER=LIX001,DISP=(OLD,KEEP)
// *

```



```

//STEP15 EXEC FORTGCL
//FORT.SYSIN DD *
  SUBROUTINE CTENS(ITIPO,KP,KR,LC)
    REAL MT(18,18)
    DIMENSION DES1(18,3),ITIPO(300),DES2(18,3),TENS1(3,6),TENS2(9,9),K
    *P(6),KR(9),D1(6,3),D2(9,3),XM(9,3),XT(3,3),SIGMA(6,3),LC(300),XX(4
    *),YY(4),XY(4),VETOR(2000,3)
    COMMON NP,NE,NPDP,NGLN,MBAND,NUMBL,AREA,NCAR,NCL,ITP,ITC(4),GAMA(1
    *0),POISS(10),YOUNG(10),B(160,3),THICK(500),DESNO(160),A(160,80),CO
    *RD(300,3),IX(500,4),NK(100),LN(100,6),ISR,NDD,BV(100,6),ID1,ID2,ID
    *3,CDT(10)
    EQUIVALENCE(A(160,80),VETOR(2000,3))

    *****
    ESTA SUBROTINA CALCULA OS MOMENTOS E TENSOES NO CENTRO DE GRAVI-
    DADE DE CADA ELEMENTO
    *****

C
C
C
C
C
  KKK=1
  DO 300 N=1,NE
    TH=THICK(N)
    DO 120 K=1,NCAR
      DES1(6,K)=0.
      DES1(12,K)=0.
      DES1(18,K)=0.
      J=0
      DO 120 I=1,3
        IJ=IX(N,I)
        N1=6*IJ-LC(IJ)-5+ITIPO(IJ)+(K-1)*80*NUMBL
        N2=N1+4
        N3=N1+5
        IF(ITIPO(IJ)-1)110,100,110
100 DO 105 II=N1,N2
          J=J+1
105 DES2(J,K)=DESNO(II)
          GO TO 120
110 DO 115 II=N1,N3
          J=J+1
115 DES2(J,K)=DESNO(II)
120 CONTINUE
        I1=IX(N,1)
        I2=IX(N,2)
        I3=IX(N,3)
        IF(ITIPO(I1)-1)175,125,175
125 IF(ITIPO(I2)-1)135,130,135
130 L1=0
          GO TO 140
135 L1=1
140 IF(ITIPO(I3)-1)150,145,150
145 M1=0

```

```

      GO TO 155
150 M1=1
155 DO 160 I=1,5
      DO 160 K=1,NCAR
160 DES1(I,K)=DES2(I,K)
      J1=10+L1
      DO 165 I=6,J1
      DO 165 K=1,NCAR
165 DES1(I+1,K)=DES2(I,K)
      J1=11+L1
      J2=15+M1+L1
      DO 170 I=J1,J2
      M=I+2-L1
      DO 170 K=1,NCAR
170 DES1(M,K)=DES2(I,K)
      GO TO 235
175 IF(ITIPO(I2)-1)210,180,210
180 IF(ITIPO(I3)-1)190,185,190
185 J1=16
      GO TO 195
190 J1=17
195 DO 200 I=1,11
      DO 200 K=1,NCAR
200 DES1(I,K)=DES2(I,K)
      DO 205 I=12,J1
      DO 205 K=1,NCAR
205 DES1(I+1,K)=DES2(I,K)
      GO TO 235
210 IF(ITIPO(I3)-1)220,215,220
215 J1=17
      GO TO 225
220 J1=18
225 DO 230 I=1,J1
      DO 230 K=1,NCAR
230 DES1(I,K)=DES2(I,K)
235 ID3=3*N-2
      READ(30,ID3) ((MT(I,J),J=1,18),I=1,18),((TENS1(I,J),J=1,6),I=1,3),
      *((TENS2(I,J),J=1,9),I=1,9)
      DO 240 I=1,18
      DO 240 J=1,NCAR
      DES2(I,J)=0.
      DO 240 K=1,18
240 DES2(I,J)=DES2(I,J)+MT(K,I)*DES1(K,J)
      DO 245 I=1,6
      J=KP(I)
      DO 245 K=1,NCAR
245 D1(I,K)=DES2(J,K)
      DO 250 I=1,9
      J=KR(I)
      DO 250 K=1,NCAR

```

```

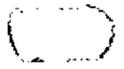
250 D2(I,K)=DES2(J,K)
DO 255 I=1,9
DO 255 J=1,NCAR
XM(I,J)=0.
DO 255 K=1,9
255 XM(I,J)=XM(I,J)+TENS2(I,K)*D2(K,J)
DO 260 I=1,3
DO 260 J=1,NCAR
XT(I,J)=0.
DO 260 K=1,6
260 XT(I,J)=XT(I,J)+TENS1(I,K)*D1(K,J)
C  CALCULO DOS MOMENTOS NO CENTRO DE GRAVIDADE DO ELEMENTO
DO 265 I=1,NCAR
XX(I)=(XM(1,I)+XM(4,I)+XM(7,I))/3.
YY(I)=(XM(2,I)+XM(5,I)+XM(8,I))/3.
265 XY(I)=(XM(3,I)+XM(6,I)+XM(9,I))/3.
C  CALCULO DAS TENSDES
DO 270 I=1,NCAR
SIGMA(1,I)=XT(1,I)+(6.*XX(I)/TH**2)
SIGMA(2,I)=XT(2,I)+(6.*YY(I)/TH**2)
SIGMA(3,I)=XT(3,I)-(6.*XY(I)/TH**2)
SIGMA(4,I)=XT(1,I)-(6.*XX(I)/TH**2)
SIGMA(5,I)=XT(2,I)-(6.*YY(I)/TH**2)
270 SIGMA(6,I)=XT(3,I)+(6.*XY(I)/TH**2)
-----
DO 320 J=1,NCAR
II=KKK
VETOR(II,1)=XX(J)
VETOR(II+1,1)=YY(J)
VETOR(II+2,1)=XY(J)
VETOR(II,2)=SIGMA(1,J)
VETOR(II+1,2)=SIGMA(2,J)
VETOR(II+2,2)=SIGMA(3,J)
VETOR(II,3)=SIGMA(4,J)
VETOR(II+1,3)=SIGMA(5,J)
VETOR(II+2,3)=SIGMA(6,J)
KKK=II+3
320 CONTINUE
300 CONTINUE
DO 325 J=1,NCAR
WRITE(5,330) J
330 FORMAT(//20X,'CARREGAMENTO NO.*****',I3)
WRITE(5,275)
275 FORMAT(//7X,'ELEMENTO',12X,'MOMENTO X',10X,'MOMENTO Y',10X,'MOMENT
*O XY')
DO 335 N=1,NE
I1=3*(N-1)*NCAR+3*J-2
I2=I1+2
WRITE(5,350) N,(VETOR(I,1),I=I1,I2)
350 FORMAT(9X,I3,12X,E14.7,6X,E14.7,6X,E14.7)
335 CONTINUE

```

```

WRITE(5,285)
285 FORMAT(/50X,'TENSOES NA FACE Z=+H/2',/5X,' ELEMENTO ',10X,'TEN
*SAO X',12X,'TENSAO Y',12X,'TENSAO XY',12X,'SIGMA 1',12X,'SIGMA 2',
*11X,'ALFA')
DO 340 N=1,NE
I1=3*(N-1)*NCAR+3*J-2
I2=I1+2
AX1=(VETOR(I1,2)+VETOR(I1+1,2))/2.
AX2=SQRT(((VETOR(I1,2)-VETOR(I1+1,2))/2.)*2+VETOR(I1+2,2)**2)
TP1=AX1+AX2
TP2=AX1-AX2
ALFA2=ATAN((VETOR(I1+1,2)-VETOR(I1,2))/VETOR(I1+2,2))
APR=(360.*ALFA2)/6.2832
WRITE(5,280) N,(VETOR(I,2),I=I1,I2),TP1,TP2,APR
280 FORMAT(9X,I3,12X,E14.7,6X,E14.7,6X,E14.7,6X,E14.7,6X,E14.7,5X,F6.2
*)
340 CONTINUE
WRITE(5,290)
290 FORMAT(/50X,'TENSOES NA FACE Z=-H/2',/5X,' ELEMENTO ',10X,'TEN
*SAO X',12X,'TENSAO Y',12X,'TENSAO XY',12X,'SIGMA 1',12X,'SIGMA 2',
*11X,'ALFA')
DO 345 N=1,NE
I1=3*(N-1)*NCAR+3*J-2
I2=I1+2
AX1=(VETOR(I1,3)+VETOR(I1+1,3))/2.
AX2=SQRT(((VETOR(I1,3)-VETOR(I1+1,3))/2.)*2+VETOR(I1+2,3)**2)
TP1=AX1+AX2
TP2=AX1-AX2
ALFA2=ATAN((VETOR(I1+1,3)-VETOR(I1,3))/VETOR(I1+2,3))
APR=(360.*ALFA2)/6.2832
WRITE(5,280) N,(VETOR(I,3),I=I1,I2),TP1,TP2,APR
345 CONTINUE
325 CONTINUE
RETURN
END
/*
//LKED.SYSLMOD DD DSN=CASC05(CTENS),UNIT=2314,
// VOL=SER=LIX001,DISP=(OLD,KEEP)

```



```

//STEP16 EXEC FORTGCL,PARM.LKED='XREF,LIST,LET,OVLY'
//FORT.SYSIN DD *
  DIMENSION LC(300),ITIPO(300),NFIRS(25),NLAST(25),KP(6),KR(9),P(300
*,6)
  COMMON NP,NE,NPDP,NGLN,MBAND,NUMBL,AREA,NCAR,NCL,ITP,ITC(4),GAMA(1
*0),POISS(10),YOUNG(10),B(160,3),THICK(500),DESN0(160),A(160,80),CO
*RD(300,3),IX(500,4),NK(100),LN(100,6),ISR,NDD,BV(100,6),ID1,ID2,ID
*3,CDT(10)
  DATA KP/1,2,7,8,13,14/,KR/3,4,5,9,10,11,15,16,17/
  DEFINE FILE 10(1000,166,U,ID1),20(1800,83,U,ID2),30(1500,141,U,ID3
*)
C
C *****
C   PROGRAMA PRINCIPAL
C *****
C
  CALL DADOS(ITIPO)
  CALL CARGA(P)
  IF(ITP)100,110,120
100 DO 105 I=1,NP
105 ITIPO(I)=0
  GO TO 120
110 DO 115 I=1,NP
115 ITIPO(I)=1
120 CALL DEBLO(NFIRS,NLAST,LC,ITIPO,NBLOC) -----
C   CALCULO DA LARGURA DE BANDA
  JK=0
  DO 145 N=1,NE
  DO 145 I=1,3
  DO 145 J=1,3
  I1=IX(N,I)
  J1=IX(N,J)
  IF(J1-I1)125,145,130
125 IC=J1
  J1=I1
  I1=IC
130 KK=6*J1-6*I1-LC(J1)+LC(I1)+6-ITIPO(I1)
  IF(KK-JK)140,140,135
135 JK=KK
140 CONTINUE
145 CONTINUE
  MBAND=JK
  WRITE(5,150) MBAND
150 FORMAT(//10X,'LARGURA DA BANDA',I10,/)
C   CALCULO DO NUMERO DE BLOCOS DE 80 EQUACOES
  NEQ=6*NP-LC(NP)
  NUMBL=NEQ/80
  IF(80*NUMBL-NEQ)155,160,155
155 NUMBL=NUMBL+1

```

```

160 CALL RESOL
C   IMPRESSAO DOS DESLOCAMENTOS
   DO 190 IC=1,NCAR
   WRITE(5,165) IC
165 FORMAT(/30X,'CARREGAMENTO NO.*****',I3,//1X,'NO',6
 *X,'DESLOCAMENTO X',6X,'DESLOCAMENTO Y',6X,'DESLOCAMENTO Z',8X,'ROT
 *ACAO X',8X,'ROTACAO Y',8X,'ROTACAO Z',//)
   DO 190 N=1,NP
   N1=6*N-LC(N)-5+ITIPO(N)+(IC-1)*80*NUMBL
   N2=N1+4
   N3=N1+5
   IF(ITIPO(N)-1)180,170,180
170 WRITE(5,175) N,(DESNO(J),J=N1,N2)
175 FORMAT(I3,4E20.7,E17.7)
   GO TO 190
180 WRITE(5,185) N,(DESNO(J),J=N1,N3)
185 FORMAT(I3,4E20.7,2E17.7)
190 CONTINUE
   CALL CTENS(ITIPO,KP,KR,LC)
   CALL EXIT
   END

```

/*

```

//LKED.SYSLIB DD DSN=SYS1.FORTLIB,DISP=SHR
// DD DSN=CASC05,DISP=OLD,UNIT=2314,VOL=SER=LIX001
//LKED.SYSLMOD DD DSN=CASC06(MAIN),DISP=(NEW,KEEP,DELETE),
// VOL=SER=LIX001,UNIT=2314,SPACE=(1024,(50,50,1)),LABEL=RETPD=30,
// DCB=BLKSIZE=1024

```

//LKED.SYSIN DD *

```

INSERT MAIN,TRANS
OVERLAY UM
INSERT CTENS,RESOL
INSERT DEBLO,CARGA,DADOS
OVERLAY UM
INSERT RIGES
OVERLAY DOIS
OVERLAY DOIS
INSERT DESPR,MRIT9,MRTR3
INSERT FORMA,FVTIN
INSERT TINVL,TINPP,TEMPE
ENTRY MAIN
NAME MAIN(R)

```

/*

```

//GO.FT10F001 DD DSN=&&RS1,UNIT=SYSDA,SPACE=(664,(1000,1),RLSE)
//GO.FT20F001 DD DSN=&&RT2,UNIT=SYSDA,SPACE=(332,(1800,1),RLSE)
//GO.FT30F001 DD DSN=&&XX3,UNIT=SYSDA,SPACE=(564,(1500,1),RLSE)

```

BIBLIOGRAFIA

1. ZIENKIEWICZ, O.C. - "The Finite Element Method in Engineering Science", McGraw-Hill, London, 1971
2. HOLAND, I and BELL, K. - "Finite Element Methods in Stress Analysis", Tapir, 1970
3. ZIENKIEWICZ, O.C. and CHANDRAKANT, J.P. - "Analysis of three Dimensional thin-walled Structures", Proc. Am. Soc. Civ. Eng., August, 1970
4. CLOUGH, R.W. and JOHNSON, C.P. - "A Finite Element Approximation for the Analysis of thin Shells", J. Solid and Struct., 4, 43-60, 1968
5. CLOUGH, R.W. - "NATO Advanced Study Institute on Finite Element Methods in Continuum Mechanics", Lisbon, September, 1971
6. ZIENKIEWICZ, O.C. and PAREKH, C.J. - "Finite Element Analysis of Arbitrary thin Shell Structures and Space Frames", University of Wales, Swansea
7. VASCONCELLOS FILHO, A. - "O Método dos Elementos Finitos: Fundamentos Teóricos, Automatização - Aplicações a problemas de Placas e de Elasticidade Plana", Tese de D.Sc., COPPE, 1970

8. ARGYRIS, J.H. - "Energy Theorems and Structural Analysis", Aircraft Eng., 1954
9. TURNER, CLOUGH, MARTIN, TOPP, - "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures", J. Aeronaut. Sci. 19, nº 8, 1952
10. PRZEMIENIECKI, J.S. - "Theory of Matrix Structural Analysis" McGraw-Hill, 1968
11. GELFAND, I.M., FOMIN, S.V. - "Calculus of Variations", Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1963
12. ELSGOLTZ, L. - "Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional", Editorial Mir, Moscú, 1969
13. KREIDER, KULLER, OSTBERG, PERKINS, - "An Introduction to Linear Analysis", Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Massachusetts, USA, 1966
14. TOTTENHAM, H. and BREBBIA, C. - "Finite Element Techniques in Structural Mechanics", Published by Stress Analysis Publishers, Southampton, England, 1970
15. ARANTES E OLIVEIRA, E.R. - "Tendências Actuais do Cálculo Estatico de Estruturas", 2as. Jornadas Luso-Brasileiras de Engenharia Civil, Agosto, 1967
16. ARANTES E OLIVEIRA, E.R. - "Completeness and Convergence in the Finite Element Method", Proceedings of the 2nd Conference on Matrix Methods in Structural Analysis, Dayton, Ohio, 1968

17. ARANTES E OLIVEIRA, E.R. - "Optimization of Finite Element Solutions" - Proceeding of 3rd Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1971
18. ARANTES E OLIVEIRA, E.R., TAVARES, A.S. - "Quatro Anos de Atividade no Campo da Mecânica Estrutural", 3as. Jornadas Luso-Brasileiras de Engenharia Civil, Lourenço Marques, Luanda, Julho, 1971
19. TIMOSHENKO, S. and WOINOWSKY-KRIEGER, S. - "Theory of Plates and Shells", McGraw-Hill, 1959
20. TIMOSHENKO, S. and GERE, J.M. - "Theory of Elastic Stability" McGraw-Hill, 1961
21. VENANCIO FILHO, F. - "O Método dos Elementos Finitos", Curso dado na COPPE em setembro de 1971
22. ARANTES E OLIVEIRA, E.R. - "Formulação Básica do Método dos Elementos Finitos", 2as. Jornadas Luso-Brasileiras de Engenharia Civil, Agosto, 1967
23. PEDRO, J.O. - "Curso 127, Laboratório Nacional de Engenharia Civil de Lisboa"
24. SCORDELIS, A.C. and LO, K.S. - "Computer Analysis of Cylindrical Shells", J. Am. Concr. Inst., 61, May, 1964
25. U.S.B.R. (United States Bureau of Reclamation), Treatise on Dams, Colorado 1956

26. LNEC (Laboratório Nacional de Engenharia Civil de Lisboa),
Dimensionamento de barragens abóbada por a-
justamento dos deslocamentos radiais entre
arcos e consolas. Solicitações estáticas.
Relatório interno, Divisão de Estudos Espe-
ciais, 1968
27. RODRIGUEZ, L. - "Finite Element Nonlinear Analysis for Pla-
tes and Shallow Shells", Ph.D. Thesis, Dept.
of Civil Engineering, Massachusetts Institu-
te of Technology, Sept. 1968
28. FLÜGGE, W. - "Stresses in Shells", Springer-Verlag, Third
Printing, 1966
29. UTKU, S. - "Stiffness Matrices for Thin Triangular Elements
of Nonzero Gaussian Curvature", AIAA Journal
vol. 5, nº 9, Sept. 1967
30. PECKNOLD, D.A. and SCHNOBRICH, W.C. - "Finite Element Analy-
sis of Skewed Shallow Shells", Proc. Am. Soc.
Civ. Eng., April, 1969
31. LINDBERG, G.M.; OLSON, M.D. and COWPER, G.R. - "New Develop-
ments in the Finite Element Analysis of
Shells", Structures and Materials Laborato-
ry, National Aeronautical Establishment,
Ottawa, Canada, January, 1970

32. WILSON, E.L. - "Analysis of Axisymmetric Solid", Division of Structural Engineering and Structural Mechanics, University of California, February, 1967
33. CARR, A.J. - "A Refined Finite Element Analysis of Thin Shell Structures, Including Dynamic Loading" SEL Report N^o 67-9, University of California, Berkeley, 1967.