

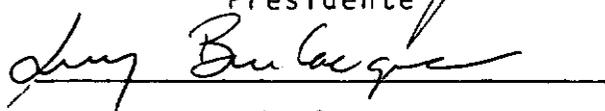
ELEMENTOS FINITOS PARA FLEXÃO DE
PLACAS COM CAMPO DE TENSÕES ASSUMIDO

Edison Castro Prates de Lima

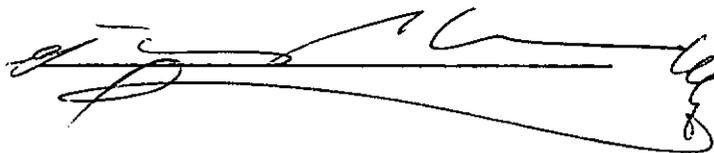
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JA-
NEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.)

Aprovada por:


Presidente







RIO DE JANEIRO
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL
NOVEMBRO DE 1972

A meus pais e
irmãos

AGRADECIMENTOS

Ao professor Paulo Alcântara Gomes, pela grande solicitude e atenciosa orientação prestada.

Ao professor Fernando Luiz Lobo B. Carneiro, pelo estímulo, compreensão e apoio dispensado em todas as etapas deste trabalho.

Ao Corpo Docente da COPPE, na pessoa de seu Diretor, professor Alberto Luiz Coimbra, pelo apoio e incentivo aos cursos de Pós-Graduação.

Ao professor Pablo Gaston Bignon pela amizade e sugestão do tema deste trabalho.

Ao professor José S. Gomes Franco da Escola de Engenharia da UFRGS, pelo exemplo e orientação no período de formação.

À Helena, pela confecção gráfica deste trabalho.

SINOPSE

No presente trabalho é apresentado o desenvolvimento de dois tipos de elementos finitos baseados no modelo híbrido de Pian para flexão de placas com um campo de tensões assumido: o primeiro, adotando a Teoria de Reissner para flexão de placas moderadamente espessas considerando o efeito da deformação devido ao esforço cortante, e o segundo, utilizando a Teoria Clássica para flexão de placas delgadas.

Desenvolve-se ainda, como uma variante do primeiro, um elemento para análise de "placas sandwich".

No apêndice são apresentadas as listagens das subrotinas em linguagem FORTRAN para os elementos analisados sendo possível, desta forma, a sua inclusão em qualquer programa automático destinado a análise de estruturas pelo método dos elementos finitos.

ABSTRACT

The development of two Hybrid Pian's formulation of the finite element method based on assumed stress distribution and applicable to plate-bending problem is presented. The former makes use of Reissner's theory for bending of "moderately thick" plates and the latter is based on the customary theory of thin elastic plates.

As an application of the first formulation an element for "sandwich plates" is developed.

Listing of FORTRAN subroutines were included in the APPENDIX. They can be used by any automatic program for structural analysis by finite element method.

Í N D I C E

I	- INTRODUÇÃO	1.
II	- TEOREMAS VARIACIONAIS DA TEORIA DA ELASTICIDADE ..	4.
	1 - Introdução	4.
	2 - Princípio da Energia Potencial Mínima	7.
	3 - Generalização do Princípio da Energia Potencial Mínima	9.
	4 - Princípio de Hellinger-Reissner	14.
III	- FORMULAÇÃO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA FLEXÃO DE PLACAS COM CAMPO DE TENSÕES ASSUMIDO	16.
	1 - Teoria de Reissner para Flexão de Placas	16.
	2 - Discretização do Funcional do Princípio de Hellinger-Reissner para utilização no Método dos Elementos Finitos	24.
	3 - Teoria Clássica para Flexão de Placas	34.
IV	- ELEMENTOS RETANGULARES PARA FLEXÃO DE PLACAS COM CAMPO DE TENSÕES ASSUMIDO	35.
	1 - Introdução	35.
	2 - Elemento Baseado na Teoria de Reissner para Fle xão de Placas	36.
	3 - Elemento Retangular para Flexão de Placas San dwich	44.
	4 - Elementos Baseados na Teoria Clássica para Fle xão de Placas	46.

4.1 - Elemento com Campo de Momentos Linear	47.
4.2 - Elemento com Campo de Momentos Quadrático.	53.
V - CONCLUSÕES	62.
APÊNDICE	64.
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	107.

SIMBOLOGIA

$\{ \}$	Matriz coluna
\underline{X}	O sinal - indica que X é uma matriz
\underline{X}^T	Matriz transposta da matriz \underline{X}
\bar{X}	O sinal - indica que X é uma quantidade prescrita
ν	Coefficiente de Poisson
E	Módulo de Young
G	Módulo de Elasticidade Transversal
D	Rigidez a flexão de uma placa
U	Energia de deformação por unidade de volume
Ω	Energia complementar por unidade de volume
λ_{ij} e λ_i	Multiplicadores de Lagrange
$\sigma_x, \sigma_y \dots$	Tensões
$\epsilon_x, \epsilon_y \dots$	Deformações
u, v, w	Deslocamentos
b_x, b_y, b_z	Componentes das forças de massa por unidade de volume
p_x, p_y, p_z	Componentes das forças externas por unidade de área
l, m, n	Cosenos diretores da normal ao contorno orientada para fora do mesmo.
S	Contorno
S_σ	O conjunto das direções dos pontos do contorno em que as condições estão prescritas em termos de forças
S_u	O conjunto das direções dos pontos do contorno em que as condições estão prescritas em termos de deslocamentos
$p(x,y)$	Carga por unidade de área

q_0	Carga uniformemente distribuída por unidade de área
h	Espessura de uma placa homogênea ou espessura do núcleo de uma placa sandwich
f	Espessura das faces de uma placa sandwich
M_x, M_y	Momentos fletores
M_{xy}	Momento de torção
Q_x, Q_y	Esforços cortantes

I - INTRODUÇÃO

O problema da flexão de placas tem sido abordado por, praticamente, todos os tipos de métodos de elementos finitos. Os primeiros elementos desenvolvidos compreendiam somente elementos retangulares, e as soluções obtidas pelo método dos deslocamentos (baseado no Princípio da Energia Potencial Mínima) convergiam para a solução exata, apesar de que as funções de interpolação não satisfizessem completamente as condições de compatibilidade na fronteira entre dois elementos. Entretanto, quando foram testados elementos triangulares tornou-se evidente que as funções de interpolação não compatíveis poderiam conduzir a resultados que nem sempre convergiam para a solução exata. Então, enquanto um determinado número de investigadores estiveram desenvolvendo modelos de deslocamento compatíveis para análise de placas, outros modelos começaram a ser testados. Pian (ref. 7,8,9) estendeu o modelo híbrido com campo de tensões assumido do estado plano de tensões para os problemas de flexão de placas, usando elementos retangulares. Serven e Taylor (ref. 21) aplicaram o mesmo método usando tanto elementos retangulares como elementos triangulares. Herrman (ref. 18) resolveu o problema da flexão de placas através de um método de elementos finitos baseado no princípio de Reissner. Finalmente Fraeijs de Venbeke (ref. 22) usou o método das forças para os problemas de flexão de placas.

Um outro ponto a ser mencionado consiste na inclusão do efeito da deformação devido ao esforço cortante na flexão de placas. Alguns trabalhos nesse sentido foram apresentados

em literatura recente, mas não tem sido objeto de estudos mais detalhados. Smith (ref. 16) incluiu o efeito da deformação devido ao esforço cortante no desenvolvimento de um elemento retangular para placas moderadamente espessas, utilizando a Teoria de Love e usando polinômios de interpolação do sétimo grau para assegurar a compatibilidade entre os elementos. Foram resolvidos 4 exemplos, sendo que para o caso de uma placa simplesmente apoiada com uma carga uniformemente distribuída por unidade de área e uma relação espessura/vão de 0,1 a análise deu um aumento para a flecha no centro da placa de 3,5% sobre o valor obtido pela Teoria Clássica para placas delgadas. A teoria de Reissner (ref. 12) dá um aumento de 4,4% para este caso.

Anderheggen (ref. 17) desenvolveu um elemento finito para flexão de placas baseado no Princípio da Energia Complementar. Uma formulação para dois campos é descrita, na qual as incógnitas do problema são parâmetros de tensões e de deslocamentos.

Devido a possibilidade de serem especificados ao longo do contorno tanto parâmetros de força como de deslocamentos, as anomalias encontradas na Teoria Clássica de Kirchhoff-Love (tais como forças concentradas nos cantos) não estão presentes. No entanto a energia de deformação devido ao cortante não foi incluída no desenvolvimento e os resultados fornecidos pelo elemento concordaram com os obtidos pela Teoria Clássica para placas delgadas. Herrman (ref. 18) incluiu os efeitos da deformação por esforço cortante empregando um princípio variacional misto. A análise é

aplicada a uma placa circular espessa simplesmente apoiada no bordo externo e submetida a um carregamento constituído por uma fôrça cortante uniformemente distribuída ao longo do contôrnio de um furo central. Os resultados apresentaram excelente concordância com a solução exata. Charles W. Pryor, Richard H. Barker e Daniel Frederick (ref 13) desenvolveram um elemento utilizando a Teoria de Reissner como guia para a formulação de funções de deslocamento associadas com deformações devido ao cortante tomadas como graus de liberdade do elemento. O elemento apresentou uma boa concordância com os resultados fornecidos pela teoria para vãrios exemplos.

No presente trabalho foram desenvolvidos dois tipos de elementos baseados no modelo híbrido de Pian para flexão de placas com um campo de tensões assumido: o primeiro adotando a Teoria de Reissner para flexão de placas moderadamente espessas considerando o efeito da deformação devido ao esforço cortante, e o segundo, utilizando a Teoria Clássica para placas delgadas. Desenvolveu-se ainda, como uma variante do primeiro tipo, um elemento para análise de placas sandwich. Para o desenvolvimento do elemento baseado na Teoria de Reissner seguiu-se o procedimento apresentado por Connor (ref. 5), ou seja, procedeu-se a especialização do Princípio de Hellinger-Reissner para o problema da flexão de placas. Posteriormente são adotadas as hipóteses da Teoria de Reissner para placas moderadamente espessas e finalmente, seguindo o desenvolvimento feito por Pian (ref. 7,8,9), obteve-se a formulação para os elementos híbridos com campo de tensões assumido.

II- TEOREMAS VARIACIONAIS DA TEORIA DA ELASTICIDADE

1 - Introdução

Neste capítulo será deduzido o Princípio de Hellinger-Reissner, a partir da generalização do Princípio da Mínima Energia Potencial para o problema de um corpo elástico em equilíbrio estático sob a ação de forças de massa e de condições prescritas ao longo do contorno, fazendo-se uso, para este fim, da Teoria da Elasticidade para pequenos deslocamentos, onde as componentes u, v e w do deslocamento de um ponto do corpo são supostas suficientemente pequenas em relação as dimensões do mesmo, de tal forma a justificar as equações linearizadas que governam o problema. Tais equações podem ser resumidas, utilizando-se um Sistema Cartesiano Ortogonal de Coordenadas (X, Y, Z) para definir o domínio V limitado pelo contorno S do corpo, como se acha exposto nas referências 4 e 5.

a) TENSÕES - O estado de tensões de um ponto interno do corpo fica definido pelas nove componentes do tensor das tensões:

$$\begin{array}{ccc}
 \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\
 \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\
 \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z
 \end{array} \quad (2.1.1)$$

que devem satisfazer as equações de equilíbrio

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial X} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial Y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial Z} + \bar{b}_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial X} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial Y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial Z} + \bar{b}_y = 0 \quad (2.1.2)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial X} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial Y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial Z} + \bar{b}_z = 0$$

e as relações

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

onde \bar{b}_x , \bar{b}_y e \bar{b}_z são as componentes das forças de massa por unidade de volume.

b) DEFORMAÇÕES - O estado de deformações do corpo é definido por seis componentes de deformação:

$$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz} \quad (2.1.3)$$

c) RELAÇÕES DEFORMAÇÕES - DESLOCAMENTOS - Para pequenos deslocamentos estas relações podem ser tomadas como lineares:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial X}, \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial Y}, \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial Z} \quad (2.1.4)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X}, \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial X}, \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial Y}$$

d) RELAÇÕES TENSÕES - DEFORMAÇÕES - Para o caso de materiais que seguem a lei de Hooke estas relações são dadas por:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)} \left[\epsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) \right]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)} \left[\epsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) \right]$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)} \left[\epsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) \right]$$

(2.1.5)

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}$$

$$\tau_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xz}$$

$$\tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{yz}$$

onde E e ν são constantes elásticas.

e) CONDIÇÕES DE CONTORNO - A região S do contorno do corpo pode ser dividida em duas partes: a parte S_σ em que as condições de contorno estão prescritas em termos de forças por unidade de superfície e a parte S_u em que as condições de contorno estão prescritas em termos de deslocamentos. Chamando-se de \bar{p}_x , \bar{p}_y e \bar{p}_z as componentes das forças externas prescritas, as condições mecânicas de contorno são dadas por: $p_x = \bar{p}_x$, $p_y = \bar{p}_y$, $p_z = \bar{p}_z$ em S_σ onde

$$p_x = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n$$

$$p_y = \tau_{xy} \ell + \sigma_y m + \tau_{yz} n \quad (2.1.6)$$

$$p_z = \tau_{xz} \ell + \tau_{yz} m + \sigma_z n$$

sendo ℓ , m e n os cosenos diretores da normal ao contorno orientada para fora do mesmo.

Chamando-se de \bar{u} , \bar{v} e \bar{w} as componentes dos deslocamentos prescritos, as condições cinemáticas de contorno são expressas por:

$$u = \bar{u}, v = \bar{v}, w = \bar{w} \text{ em } S_u$$

Estas relações, expressas nos cinco itens anteriores, constituem as chamadas equações de campo e as condições de contorno de um corpo elástico na Teoria da Elasticidade linear para pequenos deslocamentos.

2 - Princípio da Energia Potencial Mínima

Assumindo-se que:

- Seja possível construir uma função positiva definida $U(\epsilon_x, \epsilon_y, \dots, \gamma_{yz})$, chamada Energia de Deformação por unidade de volume, a partir das relações tensões-deformações dadas.
- As forças de massa $(\bar{p}_x, \bar{p}_y, \bar{p}_z)$, as forças de superfície $(\bar{p}_x, \bar{p}_y, \bar{p}_z)$ e os deslocamentos prescritos $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ perma

neçam inalterados durante a variação das grandezas não prescritas, de tal forma a poderem ser obtidas a partir das funções potenciais:

$$- \Phi = \bar{b}_x u + \bar{b}_y v + \bar{b}_z w$$

$$- \Psi = \bar{p}_x u + \bar{p}_y v + \bar{p}_z w$$

tornando-se então a primeira variação das funções Φ e Ψ dada por:

$$- \delta\Phi = \bar{b}_x \delta u + \bar{b}_y \delta v + \bar{b}_z \delta w$$

$$- \delta\Psi = \bar{p}_x \delta u + \bar{p}_y \delta v + \bar{p}_z \delta w$$

- c) As componentes das deformações satisfaçam as condições de compatibilidade, ou seja, possam ser derivadas a partir de u , v e w pelas relações deformações-deslocamentos.
- d) As componentes u , v e w dos deslocamentos satisfaçam as condições cinemáticas de contorno.

O princípio da Energia Potencial Mínima afirma que, satisfeitas as condições assumidas anteriormente, o estado de deformação real do corpo pode ser obtido pela minimização do funcional definido por:

$$\Pi = \int_V U(\epsilon_x, \epsilon_y, \dots, \gamma_{yz}) dV - \int_V (\bar{b}_x u + \bar{b}_y v + \bar{b}_z w) dV -$$

$$- \int_{S\sigma} (\bar{p}_x u + \bar{p}_y v + \bar{p}_z w) dS \quad (2.2.1)$$

3 - Generalização do Princípio da Energia Potencial Mínima

O princípio da Energia Potencial Mínima pode ser generalizado colocando-se as condições (3) e (4) dentro da expressão do funcional com o auxílio dos multiplicadores de Lagrange. Desta forma é possível escrever um funcional que admita variações arbitrárias dos três campos a ele associados (tensões, deformações e deslocamentos). Consideram-se agora variações contínuas arbitrarias do campo de deslocamentos que não respeitem as condições cinemáticas de contorno em Su e variações contínuas arbitrarias do campo de deformações que não satisfaçam as relações deformações-deslocamentos.

O funcional apresentará então a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Pi_G = & \int_V U(\epsilon) dV - \int_V (\bar{b}_x u + \bar{b}_y v + \bar{b}_z w) dV - \int_V \{ \lambda_{11} (\epsilon_x - \frac{\partial u}{\partial x}) + \\ & + \lambda_{22} (\epsilon_y - \frac{\partial v}{\partial y}) + \lambda_{33} (\epsilon_z - \frac{\partial w}{\partial z}) + \dots \} dV - \int_{S\sigma} (\bar{p}_x u + \bar{p}_y v + \\ & + \bar{p}_z w) dS - \int_{Su} \{ \lambda_1 (u - \bar{u}) + \lambda_2 (v - \bar{v}) + \lambda_3 (w - \bar{w}) \} dS \quad (2.3.1) \end{aligned}$$

onde λ_{ij} e λ_i são os multiplicadores de Lagrange. São consideradas somente variações simétricas de λ_{ij} e ϵ_{ij} , o que, em virtude da simetria das expressões $(\epsilon_x - \frac{\partial u}{\partial x})$, $(\epsilon_y - \frac{\partial v}{\partial y})$, ..., não destrói a generalidade do problema.

Fazendo-se a primeira variação do funcional (2.3.1)

obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 \delta \Pi_{G^a} = & \int_V \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial \epsilon_x} \delta \epsilon_x + \frac{\partial U}{\partial \epsilon_y} \delta \epsilon_y + \dots \right) - (\lambda_{11} \delta \epsilon_x + \lambda_{22} \delta \epsilon_y + \dots) - \right. \\
 & - (\delta \lambda_{11} \epsilon_x + \delta \lambda_{22} \epsilon_y + \dots) + (\lambda_{11} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \lambda_{22} \frac{\partial \delta v}{\partial y} + \dots) + \\
 & + (\delta \lambda_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + \delta \lambda_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + \dots) - (\delta u \bar{b}_x + \delta v \bar{b}_y + \delta w \bar{b}_z) \Big\} dV - \\
 & - \int_{S_\sigma} (\bar{p}_x \delta u + \bar{p}_y \delta v + \bar{p}_z \delta w) dS - \int_{S_u} \{ (\lambda_1 \delta u + \lambda_2 \delta v + \lambda_3 \delta w) + \\
 & + (\delta \lambda_1 u + \delta \lambda_2 v + \delta \lambda_3 w) - (\delta \lambda_1 \bar{u} + \delta \lambda_2 \bar{v} + \delta \lambda_3 \bar{w}) \} dS \quad (2.3.2)
 \end{aligned}$$

Integrando por partes e reagrupando os termos:

$$\begin{aligned}
 \delta \Pi_{G^a} = & \int_V \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial \epsilon_x} - \lambda_{11} \right) \delta \epsilon_x + \left(\frac{\partial U}{\partial \epsilon_y} - \lambda_{22} \right) \delta \epsilon_y + \dots \left(\frac{\partial U}{\partial \gamma_{yz}} - \lambda_{23} \right) \delta \gamma_{yz} - \right. \\
 & - \left(\frac{\partial \lambda_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \lambda_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \lambda_{31}}{\partial z} + \bar{b}_x \right) \delta u - \left(\frac{\partial \lambda_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \lambda_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \lambda_{32}}{\partial z} + \bar{b}_y \right) \delta v - \\
 & - \left(\frac{\partial \lambda_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \lambda_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \lambda_{33}}{\partial z} + \bar{b}_z \right) \delta w - \left(\epsilon_x - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \delta \lambda_{11} - \left(\epsilon_y - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \delta \lambda_{22} - \\
 & - \dots \left(\gamma_{yz} - \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \delta \lambda_{23} \Big\} dV - \int_{S_\sigma} \{ (\bar{p}_x - \ell \lambda_{11} - m \lambda_{21} - \\
 & - n \lambda_{31}) \delta u + (\bar{p}_y - \ell \lambda_{12} - m \lambda_{22} - n \lambda_{32}) \delta v + (\bar{p}_z - \ell \lambda_{13} - \\
 & - m \lambda_{23} - n \lambda_{33}) \delta w \} dS - \int_{S_u} \{ (\lambda_1 - \lambda_{11} \ell - \lambda_{21} m - \lambda_{31} n) \delta u +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (\lambda_2 - \lambda_{12} \ell - \lambda_{22} m - \lambda_{32} n) \delta v + (\lambda_3 - \lambda_{13} \ell - \lambda_{23} m - \lambda_{33} n) \delta w + \\
 & + (u - \bar{u}) \delta \lambda_1 + (v - \bar{v}) \delta \lambda_2 + (w - \bar{w}) \delta \lambda_3 \} dS = 0 \quad (2.3.3)
 \end{aligned}$$

As condições de estacionaridade do funcional serão

portanto:

em V

$$\lambda_{11} = \frac{\partial U}{\partial \epsilon_x}$$

$$\lambda_{22} = \frac{\partial U}{\partial \epsilon_y}$$

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial X}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial Y}$$

$$\frac{\partial \lambda_{11}}{\partial X} + \frac{\partial \lambda_{21}}{\partial Y} + \frac{\partial \lambda_{31}}{\partial Z} + \bar{b}_x = 0$$

$$\frac{\partial \lambda_{12}}{\partial X} + \frac{\partial \lambda_{22}}{\partial Y} + \frac{\partial \lambda_{32}}{\partial Z} + \bar{b}_y = 0$$

$$\frac{\partial \lambda_{13}}{\partial X} + \frac{\partial \lambda_{23}}{\partial Y} + \frac{\partial \lambda_{33}}{\partial Z} + \bar{b}_z = 0$$

em $S\sigma$

$$\bar{p}_x = \lambda_{11} \ell + \lambda_{21} m + \lambda_{31} n$$

$$\bar{p}_y = \lambda_{12} \ell + \lambda_{22} m + \lambda_{32} n$$

$$\bar{p}_z = \lambda_{13} \ell + \lambda_{23} m + \lambda_{33} n$$

em Su

$$\lambda_1 = \lambda_{11} \ell + \lambda_{21} m + \lambda_{31} n$$

$$\lambda_2 = \lambda_{12} \ell + \lambda_{22} m + \lambda_{32} n$$

$$\lambda_3 = \lambda_{13} \ell + \lambda_{23} m + \lambda_{33} n$$

$$\bar{u} = u$$

$$\bar{v} = v$$

$$\bar{w} = w$$

A primeira condição traduz o relacionamento do campo dos multiplicadores de Lagrange λ_{ij} com o campo de deformações ϵ_{ij} através das relações tensões-deformações do material; a segunda fornece a interrelação entre o campo de deslocamentos e o cam-

po de deformações; a terceira se constitui nas equações de equilíbrio; a quarta caracteriza as condições mecânicas de contorno em S_σ ; a quinta traduz o equilíbrio entre o campo vetorial λ_i e o campo tensorial λ_{ij} no contorno em S_u e a sexta se constitui nas condições cinemáticas de contorno em S_u . Pela análise das equações de campo e das condições de contorno obtidas observa-se que os multiplicadores de Lagrange λ_{ij} tem dimensão de tensão, não devendo estar relacionados com as deformações pelas relações tensões-deformações ou em equilíbrio com as forças exteriores aplicadas no contorno ou com as forças de massa. Analogamente observa-se que os multiplicadores λ_i tem a dimensão de força, sendo possível, portanto, escrever:

$$\sigma_{ij} = \lambda_{ij}$$

$$p_i = \lambda_i$$

Ficando o funcional Π_G com a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Pi_G = & \int_V \{U(\epsilon) - (\bar{b}_x u + \bar{b}_y v + \bar{b}_z w) - [(\epsilon_x - \frac{\partial u}{\partial X})\sigma_x + (\epsilon_y - \frac{\partial v}{\partial Y})\sigma_y + \dots]\} dV - \\ & - \int_{S_\sigma} (\bar{p}_x u + \bar{p}_y v + \bar{p}_z w) dS - \int_{S_u} \{(u - \bar{u})p_x + (v - \bar{v})p_y + (w - \bar{w})p_z\} dS \end{aligned}$$

(2.3.5)

Reagrupando-se os termos de outra maneira teremos:

$$\begin{aligned}
\Pi_G = & \int_V \{U(\epsilon) - (\epsilon_x \sigma_x + \epsilon_y \sigma_y + \dots) + (\sigma_x \frac{\partial u}{\partial X} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial Y} + \dots) - \\
& - (\bar{b}_x u + \bar{b}_y v + \bar{b}_z w)\} dV - \int_{S_\sigma} (\bar{p}_x u + \bar{p}_y v + \bar{p}_z w) dS - \\
& - \int_{S_u} \{(u-\bar{u})p_x + (v-\bar{v})p_y + (w-\bar{w})p_z\} dS \quad (2.3.6)
\end{aligned}$$

Ficando no funcional, como grandezas livres para variar, as tensões $(\sigma_x, \sigma_y, \dots)$, as deformações $(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \dots)$, os deslocamentos (u, v, w) e as forças externas que atuam em S_u (p_x, p_y, p_z) , não possuindo nenhuma condição adicional prescrita.

4 - Princípio de Hellinger-Reissner

Fazendo-se com que sejam satisfeitas relações do tipo:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \epsilon_x} - \sigma_x\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial \epsilon_y} - \sigma_y\right) = 0 \dots,$$

que aparecem quando se toma a primeira variação de (2.3.6), as deformações $(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \dots)$ não serão mais variáveis independentes e estarão relacionadas agora com as tensões, através das relações tensões-deformações

$$(\sigma_x = \frac{\partial U}{\partial \epsilon_x}, \quad \sigma_y = \frac{\partial U}{\partial \epsilon_y}, \quad \dots)$$

Definindo-se a grandeza Energia Complementar como:

$$\int_V \Omega \, dV = \int_V \{(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \dots) - U(\varepsilon)\} dV \quad (2.4.1)$$

onde Ω é a Energia Complementar por unidade de volume e substituindo-se as deformações por relações tensões-deformações, fica-se com a expressão (2.4.1) dada apenas em função de tensões.

Introduzindo o conceito de Energia Complementar em (2.3.6) e integrando-se por partes obtêm-se:

$$\begin{aligned} - \Pi_R = & \int_V \{ \Omega(\sigma) + \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial X} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial Y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial Z} + \bar{b}_x \right) u + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial X} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial Y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial Z} + \right. \\ & \left. + \bar{b}_y \right) v + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial X} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial Y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial Z} + \bar{b}_z \right) w \} dV - \int_{S_\sigma} \{ (p_x - \bar{p}_x) u + \\ & + (p_y - \bar{p}_y) v + (p_z - \bar{p}_z) w \} dS - \int_{S_u} \{ p_x \bar{u} + p_y \bar{v} + p_z \bar{w} \} dS \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Chegando-se, desta forma, a um funcional equivalente ao do Princípio de Hellinger-Reissner (ref. 4), onde as grandezas livres para variar são as tensões ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z \dots$), os deslocamentos (u, v, w) e as forças externas que atuam em S_u .

III - FORMULAÇÃO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA FLEXÃO DE PLACAS COM CAMPO DE TENSÕES ASSUMIDO

1 - Teoria de Reissner para Flexão de Placas

Neste capítulo será feito o desenvolvimento de uma formulação que permita a construção de elementos finitos para flexão de placas baseada nos trabalhos de Pian (ref.6a9).

Serão desenvolvidos, basicamente, dois tipos de elementos, o primeiro para flexão de placas delgadas segundo a teoria clássica (ref. 1), o segundo baseado na teoria de Reissner (ref. 12) para placas moderadamente espessas em que é levado em conta o efeito da deformação devido ao esforço cortante, obtendo-se, desta forma, resultados consistentes para esses esforços.

Considere-se o elemento de placa representado na figura 1 onde atuam as resultantes de tensões indicadas e a carga por unidade de área $\bar{p}(x,y)$ aplicada em sua superfície $z = h/2$,

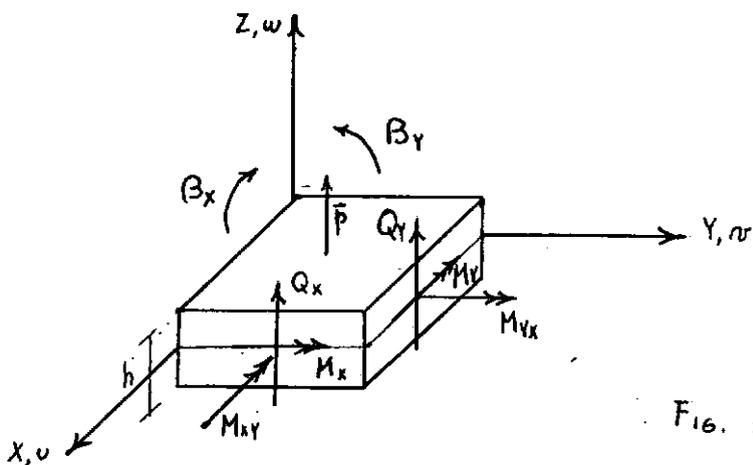


Fig. 1

e sendo as resultantes de tensões definidas por:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x Z \, dZ, \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y Z \, dZ, \quad M_{xy} = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} Z \, dZ$$

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \, dZ, \quad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} \, dZ \quad (3.1.1)$$

$$M_{xy} = M_{yx}$$

As quantidades Q_x e Q_y representam os esforços cor tantes (dimensão F/L), as quantidades M_x e M_y representam os mo mentos fletores (dimensão FL/L = F) e as quantidades $M_{xy} = M_{yx}$ re presentam os momentos de torção, por unidade de comprimento.

Na teoria da elasticidade para pequenos deslocamento s as deformações tem efeito negligenciável sobre as con dições de equilíbrio. Desta forma, as equações de equilíbrio são deduzida s supondo-se que a superfície média da placa deformada permaneça plana e escrevendo-se, simplesmente, a equação de equilíbrio das forças segundo o eixo Z e a equação de equilíbrio dos momento s segundo os eixos x e y e nestas últimas, desprezam-se o momento da carga p e os momentos devido a variação dos cortantes Q_x e Q_y . Obtêm-se desta maneira as equações:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial X} + \frac{\partial Q_y}{\partial Y} + \bar{p}(x,y) = 0$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial X} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial Y} - Q_x = 0$$
(3.1.2)

$$\frac{\partial M_y}{\partial Y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial X} - Q_y = 0$$

As condições de contorno para as faces da placa são adotadas: $\sigma_z = \bar{p}(x,y)$ para $Z = h/2$, $\sigma_z = 0$ para $Z = -h/2$ e $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ para $Z = \pm h/2$.

Assim como na teoria clássica para placas delgadas, assume-se que as tensões σ_x , σ_y e τ_{xy} variem linearmente ao longo da espessura da placa, obtendo-se finalmente por meio das equações (3.1.1).

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \left(\frac{12 M_x}{h^3}\right) Z \\ \sigma_y &= \left(\frac{12 M_y}{h^3}\right) Z \\ \tau_{xy} &= - \left(\frac{12 M_{xy}}{h^3}\right) Z\end{aligned}\tag{3.1.3}$$

Substituindo-se as equações (3.1.3) nas equações de equilíbrio (2.1.2) (desprezadas as forças de massa) e simplificando os resultados com o emprego das equações (3.1.2) e das condições de contorno (3.1.3) obtemos:

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= \frac{3Q_x}{2h} \left[1 - \left(\frac{2Z}{h}\right)^2\right] \\ \tau_{yz} &= \frac{3Q_y}{2h} \left[1 - \left(\frac{2Z}{h}\right)^2\right]\end{aligned}\tag{3.1.5}$$

$$\sigma_z = \frac{3\bar{p}}{4} \left[\frac{2}{3} + \frac{2Z}{h} - \frac{1}{3} \left(\frac{2Z}{h} \right)^3 \right]$$

A Energia Complementar, definida em 2.4, poderá ser expressa para um material homogêneo, isotrópico e hookeano em função das tensões como se segue:

$$\int_V \Omega(\sigma) dV = \frac{1}{2E} \int_V \left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu (\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) + 2(1 + \nu) (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \right] dV \quad (3.1.5)$$

Por intermédio de (3.1.3) e (3.1.4) poderemos exprimir (3.1.5) em função das resultantes de tensões (M_x , M_y , M_{xy} , Q_x , Q_y) para o caso de uma placa de material isotrópico, homogêneo e hookeano. Logo, integrando-se ao longo do eixo Z ter-se-á

$$\int_A \Omega(\sigma) dA = \frac{1}{2} \int_A \frac{12}{Eh^3} \left[(M_x + M_y)^2 + 2(1 + \nu)(M_{xy}^2 - M_x M_y) + \frac{(1 + \nu)h^2}{5} (Q_x^2 + Q_y^2) - \frac{\nu h^2 \bar{p}}{5} (M_x + M_y) \right] dA \quad (3.1.6)$$

Desprezando-se as forças de massa, o funcional (2.3.7) pode ser escrito particularizado para o problema em questão

$$\begin{aligned} -\Pi_R = & \int_A \Omega(\sigma) dA + \int_V \left\{ \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial X} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial Y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial Z} \right) u + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial X} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial Y} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial Z} \right) v + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial X} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial Y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial Z} \right) w \right\} dV - \int_{S\sigma} \left\{ (p_x - \bar{p}_x) u + \right. \end{aligned}$$

$$+ (p_y - \bar{p}_y)v + (p_z - \bar{p}_z)w \} dS - \int_{S_u} (p_x \bar{u} + p_y \bar{v} + p_z \bar{w}) dS \quad (3.1.7)$$

Substituindo-se (3.1.3), (3.1.4) e (2.1.6) em (3.1.7), sendo $\int_A \Omega(\sigma) dA$ dado por (3.1.6) obtem-se:

$$\begin{aligned} - \Pi_R = & \int_A \Omega(\sigma) dA + \int_A \left\{ \left(\frac{\partial M_x}{\partial X} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial Y} - Q_x \right) \int_Z \frac{12 Z u}{h^3} dZ + \left(\frac{\partial M_y}{\partial Y} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial M_{xy}}{\partial X} - Q_y \right) \int_Z \frac{12 Z v}{h^3} dZ + \left(\frac{\partial Q_x}{\partial X} + \frac{\partial Q_y}{\partial Y} + \bar{p} \right) \frac{3}{2h} \int_Z w \left(1 - \frac{4Z^2}{h^2} \right) dZ \right\} dA \\ & - \int_{S_u} \left\{ (M_x^\ell - M_{xy}^m) \int_Z \frac{12 Z \bar{u}}{h^3} dZ + (M_y^m - M_{xy}^\ell) \int_Z \frac{12 Z \bar{v}}{h^3} dZ + \right. \\ & \left. + (Q_x^\ell + Q_y^m) \int_Z \frac{3 \bar{w}}{2h} \left(1 - \frac{4Z^2}{h^2} \right) dZ \right\} dS - \int_{S_\sigma} \left\{ [(M_x^\ell - M_{xy}^m) - \right. \\ & \left. - (\bar{M}_x^\ell - \bar{M}_{xy}^m)] \int_Z \frac{12 Z u}{h^3} dZ + [(M_y^m - M_{xy}^\ell) - \right. \\ & \left. - (\bar{M}_y^m - \bar{M}_{xy}^\ell)] \int_Z \frac{12 Z v}{h^3} dZ + [(Q_x^\ell + Q_y^m) - \right. \\ & \left. - (\bar{Q}_x^\ell + \bar{Q}_y^m)] \frac{3}{2h} \int_Z w \left(1 - \frac{4Z^2}{h^2} \right) dZ \right\} dS \quad (3.1.8) \end{aligned}$$

Para ficar consistente com a distribuição linear assumida para as tensões σ_x , σ_y e τ_{xy} , assume-se que os deslocamentos u e v também variam linearmente, e que o deslocamento w permanece constante ao longo da espessura da placa.

$$u = - \beta_x Z$$

$$v = -\beta_y Z \quad (3.1.9)$$

$$w = w$$

Desta maneira resulta que:

$$\frac{12}{h^2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{uZ}{h} dZ = -\frac{12\beta_x}{h^2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{Z^2}{h} dZ = -\beta_x$$

$$\frac{12}{h^2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{vZ}{h} dZ = -\frac{12\beta_y}{h^2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{Z^2}{h} dZ = -\beta_y$$

$$\frac{3}{2h} \int_{-h/2}^{h/2} w \left(1 - \frac{4Z^2}{h^2}\right) dZ = w \quad (3.1.10)$$

$$\frac{12}{h^2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\bar{u}Z}{h} dZ = -\frac{12\bar{\beta}_x}{h^2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{Z^2}{h} dZ = -\bar{\beta}_x$$

$$\frac{12}{h^2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\bar{v}Z}{h} dZ = -\frac{12\bar{\beta}_y}{h^2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{Z^2}{h} dZ = -\bar{\beta}_y$$

$$\frac{3}{2h} \int_{-h/2}^{h/2} \left[1 - \frac{4Z^2}{h^2}\right] \bar{w} dZ = \bar{w}$$

Substituindo-se (3.1.10) em (3.1.8) pode-se escrever:

$$-\Pi_R = \int_A \Omega(\sigma) dA + \int_A \left\{ \left(\frac{\partial M_x}{\partial X} - \frac{\partial M_y}{\partial Y} - Q_x \right) (-\beta_x) + \left(\frac{\partial M_y}{\partial Y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial X} - Q_y \right) \right.$$

$$\begin{aligned}
& \cdot (-\beta_y) + \left(\frac{\partial Q_x}{\partial X} + \frac{\partial Q_y}{\partial Y} + \bar{p} \right) w \} dA - \int_{Su} \{ (M_x \ell - M_{xy} m) (-\bar{\beta}_x) + \\
& + (M_y m - M_{xy} \ell) (-\bar{\beta}_y) + (Q_x \ell + Q_y m) w \} dS - \int_{S\sigma} \{ [M_x \ell - M_{xy} m] - (\bar{M}_x \ell - \bar{M}_{xy} m) \} (-\bar{\beta}_x) \\
& + [(M_y m - M_{xy} \ell) - (\bar{M}_y m - \bar{M}_{xy} \ell)] (-\beta_y) + [(Q_x \ell + Q_y m) - \\
& - (\bar{Q}_x \ell + \bar{Q}_y m)] w \} dS \quad (3.1.11)
\end{aligned}$$

As quantidades sujeitas a variação em (3.1.11) são:

$M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y, \beta_x, \beta_y, w$.

As condições de estacionaridade para este funcional (ref. 4) se constituem nas equações de equilíbrio (3.1.2), nas relações entre os esforços resultantes e os deslocamentos,

$$M_x = - \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial X} + \nu \frac{\partial \beta_y}{\partial Y} \right) + \frac{\nu}{10(1-\nu)} h^2 \bar{p}$$

$$M_y = - \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial \beta_y}{\partial Y} + \nu \frac{\partial \beta_x}{\partial X} \right) + \frac{\nu}{10(1-\nu)} h^2 \bar{p}$$

$$M_{xy} = \frac{E h^3}{24(1+\nu)} \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial Y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial X} \right)$$

$$Q_x = \frac{5 E h^2}{12(1+\nu)} \left(\frac{\partial w}{\partial X} - \beta_x \right)$$

$$Q_y = \frac{5 E h^2}{12(1+\nu)} \left(\frac{\partial w}{\partial Y} - \beta_y \right)$$

nas condições cinemáticas de contorno,

$$\beta_x = \bar{\beta}_x$$

$$\beta_y = \bar{\beta}_y$$

$$w = \bar{w}$$

e nas condições mecânicas de contorno

$$M_x^\ell - M_{xy}^m = \bar{M}_x^\ell - \bar{M}_{xy}^m$$

$$M_y^m - M_{xy}^\ell = \bar{M}_y^m - \bar{M}_{xy}^\ell$$

$$Q_x^\ell + Q_y^m = \bar{Q}_x^\ell + \bar{Q}_y^m$$

Somando-se e subtraindo-se em (3.1.11) o termo:

$$\int_{S_u} \{ (M_x^\ell - M_{xy}^m) (-\bar{\beta}_x) + (M_y^m - M_{xy}^\ell) (-\bar{\beta}_y) + (Q_x^\ell + Q_y^m) \bar{w} \} dS$$

resulta:

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_R = & \int_A \Omega(\sigma) dA + \int_A \left\{ \left(\frac{\partial M_x}{\partial X} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial Y} - Q_x \right) (-\beta_x) + \left(\frac{\partial M_y}{\partial Y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial X} - Q_y \right) \right. \\ & \left. \cdot (-\beta_y) + \left(\frac{\partial Q_x}{\partial X} + \frac{\partial Q_y}{\partial Y} + \bar{p} \right) w \right\} dA - \int_{S=S_u+S_\sigma} \{ (M_x^\ell - M_{xy}^m) (-\beta_x) + \\ & + (M_y^m - M_{xy}^\ell) (-\beta_y) + (Q_x^\ell + Q_y^m) w \} dS + \int_{S_\sigma} \{ (\bar{M}_x^\ell - \\ & - \bar{M}_{xy}^m) (-\beta_x) + (\bar{M}_y^m - \bar{M}_{xy}^\ell) (-\beta_y) + (\bar{Q}_x^\ell + \bar{Q}_y^m) w \} dS + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{S_u} \{ (\bar{\beta}_x - \beta_x) (M_x^l - M_{xy}^m) + (\bar{\beta}_y - \beta_y) (M_y^m - M_{xy}^l) + \\
 & + (w - \bar{w}) (Q_x^l + Q_y^m) \} dS \quad (2.1.12)
 \end{aligned}$$

2 - Discretização do Funcional do Princípio de Hellinger-Reissner para a utilização no Método dos Elementos Finitos

Para ser possível a aplicação do Método dos Elementos Finitos devemos transformar (3.1.12) em uma forma discretizada sobre o domínio caracterizado pelo problema de contorno a ser estudado. Desta forma iremos escrever o funcional como uma soma

$$(\Pi_R = \sum_{ne} \Pi_R^e)$$

onde a contribuição de cada parcela será devida agora à aplicação de Π_R a um subdomínio (chamado elemento finito) caracterizado por um contorno $S = S_\sigma + S_u + S_I$ em que S_σ e S_u são as regiões do mesmo onde as condições prescritas estão expressas em termos de forças e deslocamentos respectivamente e S_I a parte do contorno comum com os outros elementos vizinhos.

$$\begin{aligned}
 -\Pi_R = & \sum_{ne} \left[\int_A \Omega(\sigma) dA + \int_A \left\{ \left(\frac{\partial M_x}{\partial X} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial Y} - Q_x \right) (-\beta_x) + \left(\frac{\partial M_y}{\partial Y} - \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\partial M_{xy}}{\partial X} - Q_y \right) (-\beta_y) + \left(\frac{\partial Q_x}{\partial X} + \frac{\partial Q_y}{\partial Y} + \bar{p} \right) w \right\} dA - \int_S \{ (M_x^l - \\
 & - M_{xy}^m) (-\beta_x) + (M_y^m - M_{xy}^l) (-\beta_y) + (Q_x^l + Q_y^m) w \} dS +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{S_\sigma} \{ (\bar{M}_x \ell - \bar{M}_{xy} m) (-\beta_x) + (\bar{M}_y m - \bar{M}_{xy} \ell) (-\beta_y) + (\bar{Q}_x \ell + \\
& + \bar{Q}_y m) w \} dS + \int_{S_u} \{ (\bar{\beta}_x - \beta_x) (M_x \ell - M_{xy} m) + (\bar{\beta}_y - \beta_y) \cdot \\
& \cdot (M_y m - M_{xy} \ell) + (w - \bar{w}) (Q_x \ell + Q_y m) \} dS] \quad (3.2.1)
\end{aligned}$$

A expressão (3.2.1) é o ponto de partida para vários modelos de Elementos Finitos Mixtos e Híbridos.

Nos elementos híbridos são consideradas como variáveis independentes apenas os momentos M_x , M_y , M_{xy} e os deslocamentos β_x , β_y , w . O esforço cortante deverá satisfazer no interior do elemento as equações de equilíbrio.

$$\begin{aligned}
Q_x &= \frac{\partial M_x}{\partial X} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial Y} \\
Q_y &= \frac{\partial M_y}{\partial Y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial X}
\end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Sendo, portanto, o esforço cortante derivado dos momentos, as funções de interpolação podem ser escolhidas de tal forma, que seja também satisfeita a equação de equilíbrio segundo o eixo Z.

$$\frac{\partial Q_x}{\partial X} + \frac{\partial Q_y}{\partial Y} + \bar{p} = 0 \quad (3.2.3)$$

Por outro lado requer-se que sejam cumpridas as condições cinemáticas de contorno

$$\beta_x = \bar{\beta}_x$$

$$\beta_y = \bar{\beta}_y \quad \text{em Su} \quad (3.2.4)$$

$$w = \bar{w}$$

Desta forma (3.2.1) ficará reduzido a:

$$\begin{aligned} -\Pi_R = \sum_{ne} [& \int_A \Omega(\sigma) dA - \int_S \{ (M_x \ell - M_{xy} m) (-\beta_x) + (M_y m - M_{xy} \ell) \cdot \\ & \cdot (-\beta_y) + (Q_x \ell + Q_y m) w \} dS + \int_{S\sigma} \{ (\bar{M}_x \ell - \bar{M}_{xy} m) (-\beta_x) + \\ & + (\bar{M}_y m - \bar{M}_{xy} \ell) (-\beta_y) + (\bar{Q}_x \ell + \bar{Q}_y m) w \} dS] \quad (3.2.5) \end{aligned}$$

Adotando-se de agora em diante uma notação matricial pode-se escrever (3.2.5) com o seguinte aspecto:

$$-\Pi_R = \sum_{ne} \{ \int_A \Omega(\sigma) dA - \int_S \underline{\underline{I}}_B^T \underline{\underline{u}}_B dS + \int_{S\sigma} \bar{\underline{\underline{I}}}_B^T \underline{\underline{u}}_B dS \} \quad (3.2.6)$$

sendo:

$$\underline{\underline{I}}_B = \begin{Bmatrix} (M_x \ell - M_{xy} m) \\ (M_y m - M_{xy} \ell) \\ (Q_x \ell + Q_y m) \end{Bmatrix} \quad \underline{\underline{u}}_B = \begin{Bmatrix} -\beta_x \\ -\beta_y \\ w \end{Bmatrix}$$

$$\bar{\underline{T}}_B = \left\{ \begin{array}{l} (\bar{M}_{x\ell} - \bar{M}_{xy^m}) \\ (\bar{M}_{y^m} - \bar{M}_{xy\ell}) \\ (\bar{Q}_{x\ell} + \bar{Q}_{y^m}) \end{array} \right\} \quad (3.2.7)$$

onde o índice B indica que as variáveis são consideradas na fronteira do elemento. Nos modelos híbridos a distribuição de tensões é assumida no interior de cada elemento, enquanto que o campo de deslocamentos é requerido apenas ao longo do contorno, podendo ser expresso, por intermédio de adequadas funções de interpolação em termos de parâmetros nodais, em função de uma única coordenada S tomada sobre o mesmo.

As tensões assumidas são os momentos $\underline{M} = \{M_x, M_y, M_{xy}\}$, que podem ser expressos por polinômios completos em X e Y com coeficientes $\underline{\beta}$ a determinar.

Desta forma é possível escrever:

$$\underline{M} = \underline{P} \underline{\beta} + \underline{P}_p \quad (3.2.8)$$

e

$$\underline{Q} = \left\{ \begin{array}{l} Q_x \\ Q_y \end{array} \right\} = \underline{V} \underline{\beta} + \underline{V}_p$$

De tal forma que (3.2.2) e (3.2.3) sejam satisfeitas idênticamente no interior do elemento.

As parcelas $\underline{P} \underline{\beta}$ e $\underline{V} \underline{\beta}$ satisfazem a parte homogênea

de (3.2.2) e (3.2.3), ou seja para $\bar{p} \equiv 0$, enquanto \underline{P}_p e \underline{V}_p são soluções particulares dessas mesmas equações e que se anulam para $\bar{p} \equiv 0$.

Os esforços que atuam no contorno do elemento podem ser expressos mediante a particularização de \underline{Q} e \underline{M} para os seus diversos lados e são representados por

$$\underline{T}_B = \underline{R} \underline{\beta} + \underline{R}_p \quad (3.2.9)$$

Os correspondentes deslocamentos \underline{u}_B são expressos em termos de parâmetros nodais \underline{q} por intermédio de convenientes funções de interpolação

$$\underline{u}_B = \underline{L} \underline{q} \quad (3.2.10)$$

Os deslocamentos \underline{u}_B devem garantir a continuidade no contorno do elemento e satisfazer os valores prescritos em S_u :

$$\underline{u}_B = \bar{\underline{u}}_B \quad \text{em } S_u \quad (3.2.11)$$

A energia complementar (3.1.6) pode ser expressa matricialmente por:

$$\int_A \Omega(\sigma) dA = \int_A \frac{1}{2} (\underline{M}^T \underline{C}_1 \underline{M} + \underline{Q}^T \underline{C}_2 \underline{Q} + \underline{Z}^T \underline{M}) dA \quad (3.2.12)$$

onde

$$\underline{C}_1 = \begin{vmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{vmatrix} \left(\frac{12}{Eh^3} \right) \quad (3.2.13)$$

$$\underline{C}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \left(\frac{(1+\nu)}{5} h^2 \right) \left(\frac{12}{Eh^3} \right) \quad (3.2.14)$$

$$\underline{Z} = - \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \left(\frac{h^2 \nu \bar{p}}{5} \right) \left(\frac{12}{Eh^3} \right) \quad (3.2.15)$$

Fazendo-se a primeira variação de (3.2.6) obtêm-se

$$\begin{aligned} -\delta\Pi_R = & \sum_{ne} \{ \int_A \delta\Omega(\sigma) dA - \int_S (\underline{T}_B^T \delta\underline{u}_B + \delta\underline{T}_B^T \underline{u}_B) dS + \\ & + \int_{S\sigma} \bar{\underline{T}}_B^T \delta\underline{u}_B dS \} = 0 \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

Substituindo em (2.2.16) os valores de $\Omega(\sigma)$, \underline{M} , \underline{Q} , \underline{T}_B e \underline{u}_B pelas expressões (3.2.12), (3.2.8), (3.2.9) e (3.2.10) tem-se:

$$\int_A \delta\Omega(\sigma) dA = \int_A (\underline{M}^T \underline{C}_1 \delta\underline{M} + \underline{Q}^T \underline{C}_2 \delta\underline{Q} + \frac{1}{2} \underline{Z}^T \delta\underline{M}) = \underline{B}^T \int_A (\underline{P}^T \underline{C}_1 \underline{P} +$$

$$\begin{aligned}
& + \underline{V}^T \underline{C}_2 \underline{V}) \, dA \, \delta \underline{\beta} + \int_A (\underline{P}_p^T \underline{C}_1 \underline{P} + \underline{V}_p^T \underline{C}_2 \underline{V} + \frac{1}{2} \underline{Z}^T \underline{\ddot{P}}) \, dA \, \delta \underline{\beta} = \\
& = \underline{\beta}^T \underline{H} \, \delta \underline{\beta} + \underline{H}_p^T \, \delta \underline{\beta} = \delta \underline{\beta}^T \underline{H} \, \underline{\beta} + \delta \underline{\beta}^T \underline{H}_p \quad (3.2.17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_S (\underline{T}_B^T \delta \underline{u}_B + \delta \underline{T}_B^T \underline{u}_B) \, dS &= \int_S (\underline{\beta}^T \underline{R}^T + \underline{R}_p^T) \underline{L} \, \delta \underline{q} \, dS + \int_S \delta \underline{\beta}^T \underline{R}^T \underline{L} \underline{q} \, dS = \\
&= \underline{\beta}^T \int_S \underline{R}^T \underline{L} \, dS \, \delta \underline{q} + \int_S \underline{R}_p^T \underline{L} \, dS \, \delta \underline{q} + \delta \underline{\beta}^T \int_S \underline{R}^T \underline{L} \, dS \, \underline{q} = \\
&= \underline{\beta}^T \underline{G} \, \delta \underline{q} + \underline{G}_p \, \delta \underline{q} + \delta \underline{\beta}^T \underline{G} \, \underline{q} \quad (3.2.18)
\end{aligned}$$

ficando (2.2.16) com o seguinte aspecto:

$$\begin{aligned}
-\delta \Pi_R &= \sum_{ne} \{ \delta \underline{\beta}^T \underline{H} \, \underline{\beta} + \delta \underline{\beta}^T \underline{H}_p - \underline{\beta}^T \underline{G} \, \delta \underline{q} - \underline{G}_p \, \delta \underline{q} - \delta \underline{\beta}^T \underline{G} \, \underline{q} + \\
&+ \int_{S\sigma} \underline{T}_B^T \underline{L} \, dS \, \delta \underline{q} \} = 0
\end{aligned}$$

$$-\delta \Pi_R = \sum_{ne} \{ \delta \underline{\beta}^T (\underline{H} \underline{\beta} + \underline{H}_p - \underline{G} \underline{q}) + (\underline{S}^T - \underline{\beta}^T \underline{G}) \, \delta \underline{q} \} = 0 \quad (3.2.19)$$

onde

$$\underline{H} = \int_A (\underline{P}^T \underline{C}_1 \underline{P} + \underline{V}^T \underline{C}_2 \underline{V}) \, dA$$

$$\underline{H}_p = \int_A (\underline{P}_p^T \underline{C}_1 \underline{P}_p + \underline{V}_p^T \underline{C}_2 \underline{V}_p + \frac{1}{2} \underline{P}_p^T \underline{Z}) \, dA$$

$$\underline{G}_p = \int_S \underline{R}_p^T \underline{L} \, dS$$

$$\underline{G} = \int_S \underline{R}^T \underline{L} \, dS$$

$$\underline{S} = - \underline{G}_P^T + \int_{S_\sigma} \underline{L}^T \underline{T}_B \, dS$$

Sendo as variações $\delta \underline{\beta}^T$ e $\delta \underline{q}$ independentes, as expressões entre parênteses de (3.2.19) devem anular-se. Resulta um sistema de equações em que estão presentes como incógnitas parâmetros de força e de deslocamento. Mas se os parâmetros $\underline{\beta}$ forem restringidos ao nível do elemento, eles podem ser expressos em função dos deslocamentos nodais \underline{q} de cada elemento de modo a obter-se um sistema global de equações em que persistam como incógnitas apenas os deslocamentos nodais.

Considerando-se, desta maneira, os parâmetros $\underline{\beta}$ independentes para cada elemento pode-se escrever a partir de (3.2.19):

$$[\underline{H} \underline{\beta} + \underline{H}_P - \underline{G} \underline{q}] \text{ para o elemento } n = 0 \quad (3.2.20)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots, n_e$$

$$\sum_{n_e} \{- \underline{\beta}^T \underline{G} + \underline{S}^T\} = 0 \quad (3.2.21)$$

Isolando-se $\underline{\beta}$ em (3.2.20)

$$[\underline{\beta} = \underline{H}^{-1} (\underline{G} \underline{q} - \underline{H}_P)] \text{ para o elemento } n \quad (3.2.22)$$

Substituindo (3.2.22) em (3.2.21)

$$\sum_{ne} \{ - \underline{G}^T \underline{H}^{-1} (\underline{G} \underline{q} - \underline{H}_p) + \underline{S} \} = 0$$

$$\sum_{ne} (- \underline{K}^e \underline{q} + \underline{Q}^e) = 0$$

onde

$$\underline{K}^e = \underline{G}^T \underline{H}^{-1} \underline{G} \quad (3.2.23)$$

$$\underline{Q}^e = \underline{G}^T \underline{H}^{-1} \underline{H}_p + \underline{S} \quad (3.2.24)$$

Resultando, finalmente, um sistema de equações global abrangendo todo o domínio considerado do tipo:

$$\underline{K} \underline{q}^* = \underline{Q} \quad (3.2.25)$$

sendo

$$\underline{K} = \sum_{ne} \underline{K}^e \quad ; \quad \underline{Q} = \sum_{ne} \underline{Q}^e \quad e$$

q^* um vetor contendo como incógnitas os deslocamentos nodais do domínio considerado.

Como uma aplicação a formulação apresentada pode ser estendida para a análise de "placas sandwich", adotando-se para energia complementar a expressão abaixo fornecida na ref. 8.

$$\int_A \Omega \, dA = \frac{1}{2} \int_A \frac{2}{Efh^2} [(M_x + M_y)^2 + 2(1+\nu)(M_{xy}^2 - M_x M_y) + \frac{h^2 E_f}{2Gh} (Q_x^2 + Q_y^2)] \, dA \quad (3.2.26)$$

Válida para placas sandwich com a espessura das faces bem menor que a espessura do núcleo, ($f \ll h$)

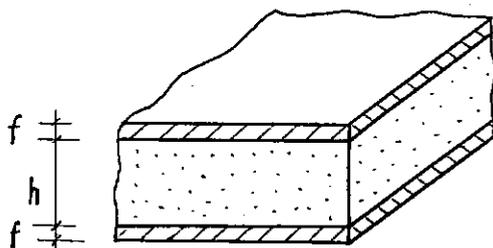


Fig. 2

sendo E o módulo de Young para o material das faces e G o módulo de rigidez transversal para o material do núcleo.

Desta forma as matrizes \underline{C}_1 , \underline{C}_2 e \underline{Z} serão dadas por

$$\underline{C}_1 = \begin{vmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{Efh^2} \end{pmatrix} \quad (3.2.27)$$

$$\underline{C}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \frac{h^2 Ef}{2Gh} & \frac{2}{Efh^2} \end{pmatrix} \quad (3.2.28)$$

$$\underline{Z} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.2.29)$$

permanecendo válidas as expressões (3.2.23), (3.2.24) e (3.2.25)

3) - Teoria Clássica para Flexão de Placas

A teoria de Reissner para Flexão de Placas pode ser particularizada para as hipóteses da Teoria Clássica, desprezando-se o efeito da deformação devido ao esforço cortante.

Desta forma a energia complementar será devida apenas a deformação por flexão, ou seja:

$$\int_A \Omega \, dA = \frac{1}{2} \int_A \frac{12}{Eh^3} \left[(M_x + M_y)^2 + 2(1+\nu)(M_{xy}^2 - M_x M_y) \right] dA \quad (3.2.30)$$

sendo nulas, portanto, as matrizes \underline{C}_2 e \underline{Z} .

Por outro lado as rotações β_x e β_y já não serão mais independentes da flecha w sendo dadas pelas derivadas de w em relação as direções X e Y .

A matriz \underline{u}_B que aparece em (3.2.7) ficará portanto

$$\underline{u}_B = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{\partial w}{\partial x} \\ -\frac{\partial w}{\partial y} \\ w \end{array} \right\} \quad (3.2.31)$$

permanecendo válidas as expressões (3.2.23), (3.2.24) e (3.2.25),

IV - ELEMENTOS RETANGULARES PARA FLEXÃO DE PLACAS COM CAMPO DE TENSÕES ASSUMIDO

1 - Introdução

A fim de que seja garantida a convergência para os resultados exatos a medida que as dimensões dos elementos diminuem, as funções de interpolação assumidas para as variáveis independentes do funcional devem satisfazer os critérios de convergência.

Para um dado elemento tem-se que $\phi = N \underline{\phi}^e$, onde ϕ é o vetor das variáveis independentes, N a matriz das funções de interpolação e $\underline{\phi}^e$ os parâmetros a determinar.

Os critérios de convergência podem ser enunciados como se segue:

CRITÉRIO 1 - As funções de interpolação adotadas devem ser tais que para uma adequada escolha dos parâmetros $\underline{\phi}^e$ possam ser obtidos quaisquer valores constantes de ϕ e suas derivadas que aparecem no funcional no limite quando as dimensões do elemento tendem a zero.

CRITÉRIO 2 - As funções de interpolação devem ser escolhidas de tal forma que na interface entre dois elementos as variáveis e suas derivadas até uma ordem menor que as derivadas que ocorrem no funcional sejam contínuas. Caso tal não seja observado será necessário adicionar integrais especiais ao longo do contorno

do elemento para garantir que a expressão $\Pi_R = \sum_{ne} \Pi_R^e$ seja válida e permaneça finita nessa região.

Para os modelos de elementos híbridos que se estão desenvolvendo, assume-se que os deslocamentos u_B são contínuos na fronteira entre dois elementos, ficando o funcional Π_R^e definido em cada elemento e satisfeitos deste modo os critérios de convergência.

2 - Elemento Baseado na Teoria de Reissner para Flexão de Placas

Será desenvolvido um elemento retangular com um campo quadrático de momentos assumido, baseado na Teoria de Reissner para Flexão de Placas abordada nos capítulos anteriores.

Sejam os esforços resultantes por unidade de comprimento, que atuam em uma placa com as direções positivas indicadas na fig. 3,

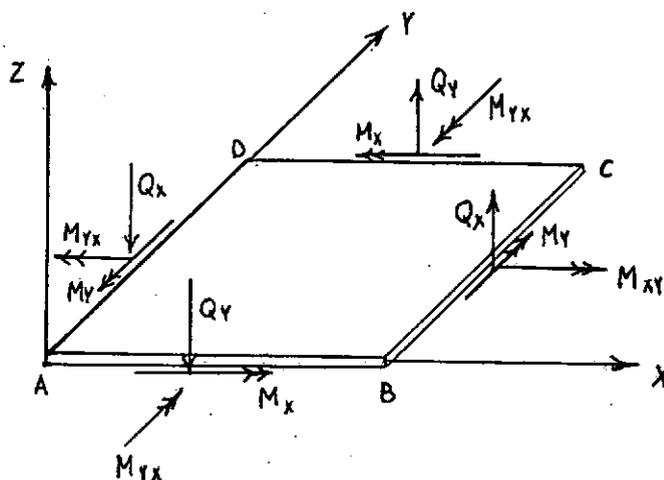


FIG. 3

expressos por polinômios completos do segundo grau em X e Y com parâmetros $\underline{\beta}$ a determinar. Adotam-se, portanto, as seguintes expressões para \underline{M} e \underline{Q} que devem satisfazer as equações de equilíbrio (3.1.2).

$$\underline{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \underline{P} \underline{\beta} + \underline{P}_p$$

$$\underline{Q} = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \underline{V} \underline{\beta} + \underline{V}_p$$

onde:

$$\underline{P} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & y & 0 & x & 0 & 0 & 0 & y^2 & 0 & x^2 & 0 & xy & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & y & 0 & 0 & 0 & x^2 & 0 & y^2 & 0 & xy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & y & x & 0 & 0 & xy & xy & 0 & 0 & x^2 & y^2 \end{vmatrix}$$

$$\underline{V} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & x & -x & y & 0 & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -y & y & 0 & x & -2x & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\beta} = \{\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3 \ \dots \ \beta_{17}\} \quad (4.2.1)$$

Os vetores \underline{P}_p e \underline{V}_p podem ser uma qualquer solução particular das equações de equilíbrio possuindo termos quadráticos como termos de mais alta ordem. Para um elemento submetido

a um carregamento uniforme $\bar{p}(x,y) = q_0$ pode ser adotada, por exemplo, a seguinte solução particular: $\underline{p}_p = \{0, 0, xy\}$ ($q_0/2$) e $\underline{v}_p = \{x, y\}$ ($-q_0/2$). Caso uma outra solução particular fosse adotada, por exemplo: $\underline{p}_p = \{x^2, 0, 0\}$ ($q_0/2$) e $\underline{v}_p = \{x, 0\}$ ($-q_0$) obter-se-iam idênticas expressões para o vetor de cargas consistentes do elemento (Q^e). Portanto este elemento permite que seja construído o vetor de cargas consistentes para um carregamento uniforme atuando sobre o mesmo. Para outros tipos de carregamento $\bar{p}(x,y)$ deve-se substituir o carregamento dado por outro estaticamente equivalente constituído por cargas concentradas aplicadas nos nós do elemento.

Sendo necessário definir o campo de deslocamentos apenas na fronteira do elemento, tal pode ser feito de uma maneira mais simples a partir dos polinômios de interpolação de Hermite de primeira ordem para uma dimensão e de funções de interpolação lineares, de tal forma a assegurar a continuidade dos deslocamentos \underline{u}_B na fronteira exigida pelos critérios de convergência.

A matriz $\underline{u}_B = \underline{L} \underline{q}$ ficará portanto:

$$\underline{u}_B = \{-\beta_x, -\beta_y, w\}$$

(expressa para os quatro lados do elemento: AB, BC, CD e DA)

Os parâmetros nodais \underline{q} estão representados com o sentido positivo na fig. 4

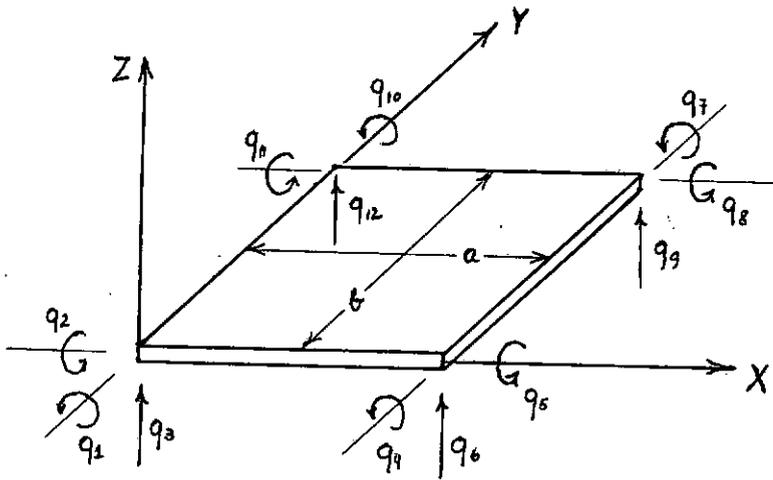


FIG. 4

sendo $\underline{q} = \{q_1, q_2, q_3, \dots, q_{12}\}$ onde a flecha w para o lado AB, por exemplo, será expresso por:

$$w^{AB} = q_3 H_{01}(x) + q_6 H_{02}(x) + q_1 H_{11}(x) + q_4 H_{12}(x) \quad (4.2.2)$$

$H_{01}(x)$, $H_{02}(x)$, $H_{11}(x)$ e $H_{12}(x)$ são os polinômios de interpolação de Hermite, ou seja:

$$H_{01}(x) = 1 - 3(x/a)^2 + 2(x/a)^3$$

$$H_{02}(x) = 3(x/a)^2 - 2(x/a)^3$$

$$H_{11}(x) = a[(x/a) - 2(x/a)^2 + (x/a)^3]$$

$$H_{12}(x) = -a[(x/a)^2 - (x/a)^3]$$

As rotações β_x e β_y serão expressas por funções de interpolação lineares. Para o lado AB tem-se

$$\beta_x = (1 - x/a)q_1 + (x/a) q_4$$

$$\beta_y = (1 - x/a)q_2 + (x/a) q_5$$

Ficando a matriz \underline{L} com o aspecto apresentado no quadro 1.

A matriz $\underline{I}_B = \underline{R} \underline{\beta} + \underline{R}_p$ particularizada para um elemento retangular \bar{e} é dada por:

$$\left\{ \begin{array}{c} M_{xy} \\ -M_y \\ -Q_y \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} M_y \\ -M_{xy} \\ Q_x \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} -M_{xy} \\ M_y \\ Q_y \end{array} \right\} \text{ e } \left\{ \begin{array}{c} -M_x \\ M_{xy} \\ -Q_x \end{array} \right\} \quad (4.2.4)$$

lado AB lado BC lado CD lado DA

Podendo, portanto, serem montadas as matrizes \underline{R} e \underline{R}_p como mostra o quadro 2:

Para determinação das matrizes $\underline{G} = \int_S \underline{R}^T \underline{L} dS$ e $\underline{G}_p = \int_S \underline{R}_p^T \underline{L} dS$ é necessário efetuar uma integração ao longo do contorno do elemento. Tal \bar{e} obtido por intermédio de uma soma de quatro integrais segundo os lados do elemento, ou seja:

$$\int_S = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA}$$

Os termos da matriz \underline{G} estão explicitados na sub-rotina GC cuja listagem encontra-se no APÊNDICE. A matriz \underline{G}_p está

indicada no quadro 3.

As matrizes $\underline{H} = \int_A (\underline{P}^T \underline{C}_1 \underline{P} + \underline{V}^T \underline{C}_2 \underline{V}) dA$ e $\underline{H}_p = \int_A (\underline{P}^T \underline{C}_1 \underline{P}_p + \underline{V}^T \underline{C}_2 \underline{V}_p + \frac{1}{2} \underline{P}^T \underline{Z}) dA$ são obtidas por integração ao longo da área do elemento tomando-se para \underline{C}_1 , \underline{C}_2 e \underline{Z} as matrizes apresentadas em (3.2.13), (3.2.14) e (3.2.15) estando \underline{H}_p dada no quadro 4 e \underline{H} explicitada nas sub-rotinas HMT e ISIBR apresentadas no APÊNDICE.

Considera-se, para simplificar, que na matriz $\underline{S} = \{-\underline{G}_p^T + \int_{S_0} \underline{L}^T \underline{\bar{T}}_B dS\}$ o vetor $\underline{\bar{T}}_B$ das cargas prescritas no contorno seja idênticamente nulo, ficando a matriz \underline{S} dada, simplesmente, por $\underline{S} = -\underline{G}_p^T$.

Foram obtidos, deste modo, todas as matrizes necessárias a montagem de $\underline{K}^e = \underline{G}^T \underline{H}^{-1} \underline{G}$ e $\underline{Q}^e = \underline{G}^T \underline{H}^{-1} \underline{H}_p - \underline{G}_p^T$ para cada elemento, o que é feito diretamente no computador, realizando os produtos matriciais indicados e a inversão da matriz \underline{H} .

EXEMPLOS NUMÉRICOS E RESULTADOS

O exemplo usado para testar a validade do procedimento descrito nas seções anteriores foi o de uma placa quadrada simplesmente apoiada, isotropa, homogênea, sob a ação de uma carga uniformemente distribuída q_0 por unidade de área.

As condições de contorno foram consideradas, anulando-se a flecha e a rotação na direção tangente aos lados da placa. A terceira condição, que requer a anulação do momento fletor normal ao contorno só pode ser satisfeita aproximadamente pelo elemento desenvolvido.

Para comparar os resultados com os obtidos pela teoria de Reissner (Ref. 13), calculou-se um parâmetro adimensional de flecha no centro da placa para várias relações entre espessura e vão. Estes resultados, que apresentam excelentes concordâncias com a teoria, estão apresentados na tabela a seguir em que colocaram-se também os resultados obtidos com um elemento baseado no método dos deslocamentos, desenvolvido por Charles W. Pryor, Richard M. Barker e Daniel Frederick (Ref. 13).

O aumento da deflexão devido ao efeito da deformação por esforço cortante para uma relação espessura/vão de 0,1 é da ordem de 4%. Para uma relação de 0,2 aumenta para 17%.

COEFICIENTE ADIMENSIONAL α PARA A
FLECHA NO CENTRO DA PLACA

$$w = \alpha \frac{q_0 a^4}{Eh^3}$$

E Módulo de Young

a Vão

h Espessura

h/a	VALORES DE 100 α					
	TEORIA CLÁSSICA	TEORIA DE REISSNER	ELEMENTO HÍBRIDO (3x3)	ELEMENTO HÍBRIDO (4x4)	ELEMENTO HÍBRIDO (6x6)	(Ref.13) (6x6)
0,01	4,437	4,439	4,445	4,441	4,439	4,423
0,05	4,437	4,486	4,490	4,487	4,486	4,469
0,10	4,437	4,632	4,636	4,634	4,633	4,612
0,15	4,437	4,876	4,883	4,881	4,878	4,852
0,20	4,437	5,217	5,230	5,225	5,221	5,186
0,25	4,437	5,656	5,676	5,668	5,662	5,617

(Devido a simetria foi calculado apenas um quarto da placa, como está indicado na Fig. 5 que mostra a malha 3 x 3.)

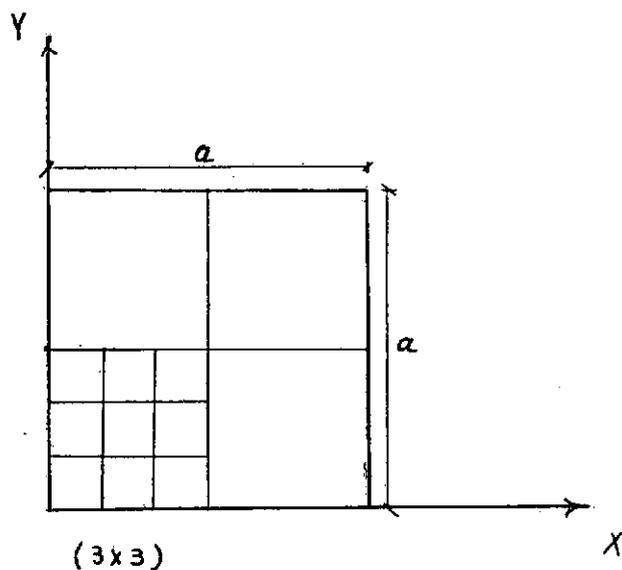


FIG. 5

3 - Elemento Retangular para Flexão de Placas Sandwich

Como uma aplicação do elemento desenvolvido na seção anterior, pode-se aproveitar a formulação apresentada para a análise de placas sandwich. Para tal é suficiente que seja adotada para a energia complementar a expressão fornecida em (3.2.26), o que na prática é feito simplesmente tomando-se para as matrizes \underline{C}_1 , \underline{C}_2 e \underline{Z} os valores dados em (3.2.27), (3.2.28) e (3.2.29). As demais matrizes são obtidas de maneira idêntica as do elemento anterior baseado na teoria de Reissner, resultando um elemento retangular para flexão de placas sandwich com um campo de momentos quadráticos M assumido, possuindo como parâmetros nodais as rotações β_x e β_y e a flecha w , tendo as primeiras uma variação linear e a segunda uma variação do 3º grau ao longo dos lados do elemento. A tabela e a figura 6 indicam os resultados de um coeficiente adimensional para a flecha no centro de uma placa sandwich quadrada simplesmente apoiada, com o parâmetro

$$\frac{a^2 Gh}{\pi^2 D} = 4$$

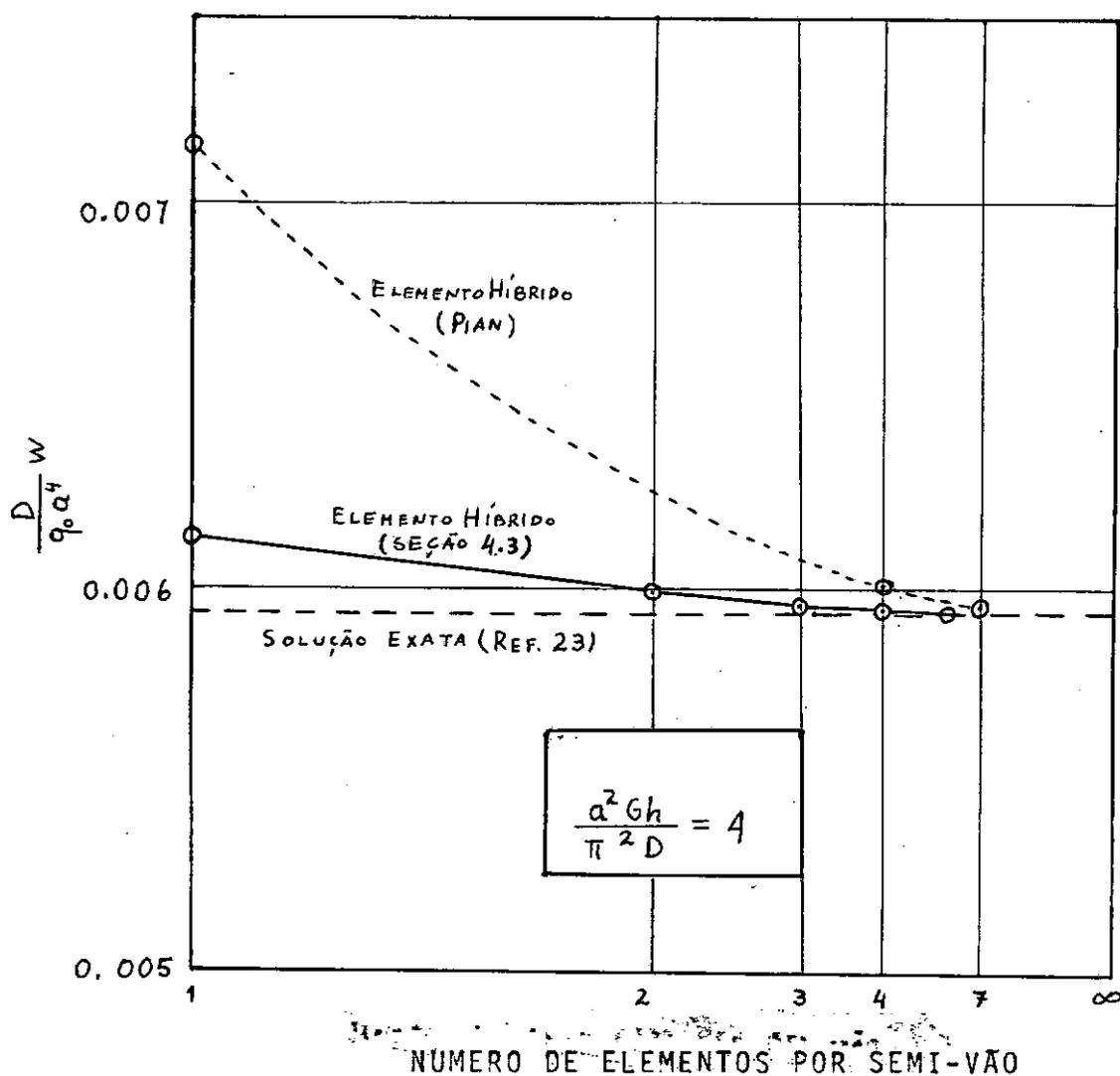
onde a é o vão da placa, G o módulo de rigidez transversal do núcleo, h a espessura do núcleo e D o módulo de rigidez a flexão da placa igual a $Efh^2/2(1-\nu^2)$, sendo E o módulo de Young do material das faces e f a espessura das mesmas.

Os resultados para diferentes malhas foram comparados com a solução analítica dada pela (Ref. 23) e com um elemento

semelhante porém com variação linear para flecha w ao longo dos lados, que foi desenvolvido por Pian (Ref. 8).

M A L H A	$\alpha_c = Dw/q_0 a^4$	$\beta_c = M_x/q_0 a^2$
(1 x 1)	0,00613	0,0526
(2 x 2)	0,00599	0,0494
(3 x 3)	0,00596	0,0485
(4 x 4)	0,00594	0,0482
(6 x 6)	0,00593	0,0480
EXATO Ref. (23)	0,00593	0,0479

Devido a simetria a malha refere-se somente a um quarto da placa.



4 - Elementos Baseados na Teoria Clássica para Flexão de Placas

Serão desenvolvidos dois tipos de elementos retangulares, baseados na Teoria Clássica para Flexão de Placas, em que é desprezado o efeito da deformação devido ao esforço cortante: o primeiro com um campo linear e o segundo com um campo quadrático de momentos assumido.

4.1 - Elemento com campo de momentos linear

Sejam os esforços resultantes por unidade de comprimento, que atuam em uma placa com as direções positivas indicadas na fig. 3, expressos por polinômios completos do primeiro grau em X e Y com parâmetros $\underline{\beta}$ a determinar. Adotam-se, portanto as seguintes expressões para \underline{M} e \underline{Q} que devem satisfazer as equações de equilíbrio (3.1.2).

$$\underline{M} = \underline{P} \underline{\beta} + \underline{P}_p$$

$$\underline{Q} = \underline{V} \underline{\beta} + \underline{V}_p$$

onde:

$$\underline{P} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & y & 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & y & x \end{vmatrix}$$

$$\underline{V} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\beta} = \{\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \dots \quad \beta_9\} \quad (4.4.1)$$

A solução particular (\underline{P}_p e \underline{V}_p) não é possível de ser obtida a partir de expressões lineares assumidas para os mo -

mentos, uma vez que a equação de equilíbrio (3.2.3) é de segunda ordem em relação aos mesmos. Desta forma \underline{P}_p , tendo termos no máximo de primeira ordem, ficaria indeterminada. Portanto deve-se ter $\bar{p}(x,y) = 0$, só sendo admissível para o elemento cargas concentradas nos nós, devendo-se consequentemente substituir o carregamento distribuído $\bar{p}(x,y)$ por outro constituído por cargas concentradas estáticamente equivalentes aplicadas nos nós.

A matriz \underline{T}_B , como já foi visto, assume o seguinte aspecto para um elemento retangular:

$$\left\{ \begin{array}{c} M_{xy} \\ -M_y \\ -Q_y \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} M_x \\ -M_{xy} \\ Q_x \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} -M_{xy} \\ M_y \\ Q_y \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} -M_x \\ M_{xy} \\ -Q_x \end{array} \right\} \quad (4.4.2)$$

lado AB lado BC lado CD lado DA

A matriz dos deslocamentos no contorno \underline{u}_B é dada para um elemento baseado na Teoria Clássica para Flexão de Placas por:

$$\underline{u}_B = \left\{ -\frac{\partial w}{\partial X}, -\frac{\partial w}{\partial Y}, w \right\}$$

particularizada para cada um dos lados do mesmo.

As matrizes \underline{G} e \underline{G}_p podem ser calculadas de dois modos diferentes: no primeiro a flecha w e as derivadas $\frac{\partial w}{\partial X}$ e $\frac{\partial w}{\partial Y}$ são consideradas separadamente, como foi apresentada no desenvolvimen

to dos elementos abordados nas seções anteriores; no segundo observa-se que na Teoria Clássica o momento torsor \bar{e} é estaticamente equivalente a um esforço cortante V_n distribuído ao longo do contorno. Desta forma teremos apenas o momento fletor e o esforço cortante V_n como esforços atuantes na fronteira do elemento correspondendo aos deslocamentos constituídos pela derivada normal ao lado ($\frac{\partial w}{\partial X}$ ou $\frac{\partial w}{\partial Y}$) e a flecha. Entretanto observa-se que desta maneira são introduzidas forças concentradas nos quatro cantos do elemento. Para o caso de lados ortogonais os seus módulos são iguais ao dobro do módulo do momento torsor atuante no canto considerado. O efeito destas forças deverá ser acrescentado às matrizes \underline{G} e \underline{G}_p .

Adotando-se daqui por diante este segundo modo de cálculo das matrizes \underline{G} e \underline{G}_p , fica-se agora com $\underline{T}_B = \underline{R} \underline{\beta} + \underline{R}_p$ dada por:

$$\left\{ \begin{array}{c} -M_y \\ -V_y \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} M_x \\ V_x \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} M_y \\ V_y \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} -M_x \\ -V_x \end{array} \right\} \quad (4.4.3)$$

lado AB lado BC lado CD lado DA

onde

$$V_x = Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial Y} \quad (4.4.4)$$

$$V_y = Q_y - \frac{\partial M_{xy}}{\partial X}$$

Podendo ser montada a matriz \underline{R} como está indicado no quadro 5. A matriz \underline{R}_p é identicamente nula devido a \underline{p}_p e \underline{v}_p também o serem.

As forças concentradas nos cantos do elemento serão dadas em módulo por:

$$\begin{aligned}
 |F_A| &= 2\beta_3 \\
 |F_B| &= -2\beta_3 - 2a\beta_9 \\
 |F_C| &= 2\beta_3 + 2b\beta_8 + 2a\beta_9 \\
 |F_D| &= -2\beta_3 - 2b\beta_8
 \end{aligned}
 \tag{4.4.5}$$

que multiplicadas pelos correspondentes valores de w resultam nos termos que devem ser adicionados à matriz \underline{G} .

Define-se o campo de deslocamentos na fronteira do elemento com o auxílio dos polinômios de interpolação de Hermite de primeira ordem a uma dimensão para a flecha w e com funções de interpolação lineares para a derivada normal ao contorno, assegurando-se desta forma a continuidade de deslocamentos na fronteira entre dois elementos.

A matriz $\underline{u}_B = \underline{L} \underline{q}$ ficará portanto:

$$\left\{ \begin{array}{c} -\frac{\partial w}{\partial Y} \\ w \end{array} \right\}_{\text{lado AB}}, \left\{ \begin{array}{c} -\frac{\partial w}{\partial X} \\ w \end{array} \right\}_{\text{lado BC}}, \left\{ \begin{array}{c} -\frac{\partial w}{\partial Y} \\ w \end{array} \right\}_{\text{lado CD}}, \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial w}{\partial X} \\ w \end{array} \right\}_{\text{lado DA}}
 \tag{4.4.6}$$

Os parâmetros nodais q estão representados com o sentido positivo na fig. 7

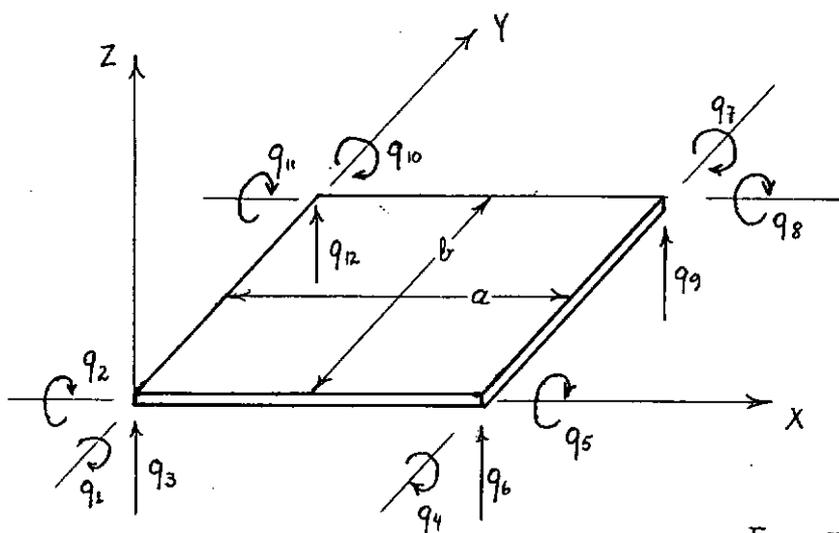


Fig. 7

(observa-se que os sentidos são diferentes dos apresentados na figura 4)

onde:

$$q = \{q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad \dots \quad q_{12}\} \quad (4.4.7)$$

Sendo, por exemplo, a flecha para o lado AB expressa por:

$$w^{AB} = q_3 H_{01}(x) + q_6 H_{02}(x) - q_1 H_{11}(x) - q_4 H_{12}(x)$$

onde $H_{01}(x)$, $H_{02}(x)$, $H_{11}(x)$ e $H_{12}(x)$ são os polinômios de interpolação de Hermite apresentados em (4.2.3).

A derivada normal ao lado AB deverá ser linear a fim de manter a continuidade de inclinação ao longo da fronteira entre dois elementos, ou seja:

$$\frac{\partial w^{AB}}{\partial n} = \frac{\partial w^{AB}}{\partial Y} = (1 - x/a) (-q_2) + (x/a) (-q_5)$$

Torna-se assim possível construir a matriz \underline{L} como está indicado no quadro 6 e a matriz $\underline{G} = \int_S \underline{R}^T \underline{L} dS$ que encontra-se explicitada na sub-rotina G9 do APENDICE onde já foram adicionados os termos devido a efeito das forças concentradas nos cantos do elemento.

A matriz $\underline{H} = \int_A \underline{P}^T \underline{C}_1 \underline{P} dA$ (quadro 7) é obtida por integração ao longo da área A do elemento, tomando-se para a matriz \underline{C}_1 a expressão dada em (3.2.13).

Para construção da matriz $\underline{K}^e = \underline{G}^T \underline{H}^{-1} \underline{G}$ é necessário a inversão da matriz \underline{H} . Tal poderia ser feito diretamente no computador mediante uma sub-rotina de inversão de matrizes da mesma forma como nos elementos desenvolvidos nas seções anteriores. Mas, considerando-se que do ponto de vista analítico a matriz \underline{H} para este elemento é de fácil inversão e que a inversão numérica sempre implica em uma maior perda de tempo de computação para a montagem da matriz \underline{K}^e , optou-se pela obtenção da inversa analiticamente, obtendo-se para \underline{H}^{-1} a matriz apresentada no qua -

dro 8.

Foram obtidas, portanto, as matrizes \underline{G} e \underline{H}^{-1} necessárias para montagem da matriz \underline{K}^e do elemento, o que é feito diretamente no computador.

4.2 - Elemento com campo de momentos quadrático

Os momentos são expressos neste elemento por polinômios completos do segundo grau em X e Y com parâmetros $\underline{\beta}$ a determinar de uma forma idêntica ao elemento baseado na Teoria de Reissner desenvolvido na seção 4.2.

Sendo portanto as matrizes \underline{P} , \underline{V} e $\underline{\beta}$ dadas em (4.2.1). Para as matrizes \underline{P}_p \underline{V}_p foi adotada a mesma solução particular da seção 4.2.

O campo de deslocamentos \underline{u}_B porém será tomado idêntico ao assumido para o elemento linear da seção 4.4.1, de forma que a matriz \underline{L} é a mesma que está apresentada no quadro 6.

A matriz $\underline{T}_B = \underline{R} \underline{\beta} + \underline{R}_p$ dos esforços atuantes na fronteira do elemento será construída de maneira análoga ao elemento linear, ou seja:

$$\left\{ \begin{array}{c} -M_y \\ -V_y \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} M_x \\ V_x \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} M_y \\ V_y \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} -M_x \\ -V_x \end{array} \right\} \quad (4.4.8)$$

lado AB lado BC lado CD lado DA

Obtendo-se a partir daí as matrizes \underline{R} e \underline{R}_p como em

contra-se indicado no quadro 9.

As forças concentradas nos cantos do elemento serão dadas em módulo por:

$$\begin{aligned}
 |F_A| &= 2\beta_3 \\
 |F_B| &= -2\beta_3 - 2a\beta_9 - 2a^2\beta_{16} \\
 |F_C| &= 2\beta_3 + 2b\beta_8 + 2a\beta_9 + 2ab\beta_{12} + 2ab\beta_{13} + \\
 &\quad + 2a^2\beta_{16} + 2b^2\beta_{17} \\
 |F_D| &= -2\beta_3 - 2b\beta_8 - 2b^2\beta_{17}
 \end{aligned} \tag{4.4.9}$$

que multiplicadas pelos correspondentes valores de w resultam nos termos que devem ser adicionados a matriz \underline{G} , e

$$\begin{aligned}
 |F_A| &= 0 \\
 |F_B| &= 0 \\
 |F_C| &= ab q_0 \\
 |F_D| &= 0
 \end{aligned} \tag{4.4.10}$$

que multiplicadas pelos correspondentes valores de w resultam nos termos que devem ser adicionados a matriz \underline{G}_p .

As matrizes \underline{G}_p e \underline{G} são obtidas por integração ao longo do contorno do elemento dos produtos matriciais $\underline{R}_p^T \underline{L}$ e $\underline{R} \underline{L}$. A primeira encontra-se indicada no quadro 10 e a segunda está explicitada na sub-rotina GU do APÊNDICE onde já foram adicionados

os termos devido ao efeito das forças concentradas nos cantos do elemento dados em (4.4.9).

Tomando-se para matriz \underline{C}_1 a expressão dada em (3.2.13), podem-se construir as matrizes $\underline{H} = \int_A \underline{P}^T \underline{C}_1 \underline{P} dA$ e $\underline{H}_p = \int_A \underline{P}^T \underline{C}_1 \underline{P}_p dA$ por integração ao longo da área A do elemento, encontrando-se esta última indicada no quadro 11.

Por razões análogas as apresentadas para o elemento linear, optou-se pela inversão analítica da matriz \underline{H} por um método de partição de matrizes. Para tal considerou-se a matriz \underline{H} dividida em quatro sub-matrizes;

$$\underline{H} \quad (17 \times 17) = \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \underline{H}_{11} \\ (11 \times 11) \end{array} & \begin{array}{c} \underline{H}_{12} \\ (11 \times 6) \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \underline{H}_{12}^T \\ (6 \times 11) \end{array} & \begin{array}{c} \underline{H}_{22} \\ (6 \times 6) \end{array} \end{array} \quad (4.4.11)$$

Fazendo-se a mesma divisão para a matriz \underline{H}^{-1} obter

se-á:

$$\underline{H}^{-1} \quad (17 \times 17) = \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \underline{B}_{11} \\ (11 \times 11) \end{array} & \begin{array}{c} \underline{B}_{12} \\ (11 \times 6) \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \underline{B}_{12}^T \\ (6 \times 11) \end{array} & \begin{array}{c} \underline{B}_{22} \\ (6 \times 6) \end{array} \end{array} \quad (4.4.12)$$

onde:

$$\underline{B}_{22} = (\underline{H}_{11} - \underline{H}_{12}^T \underline{H}_{11}^{-1} \underline{H}_{12})^{-1} \quad (4.4.13)$$

Obtendo-se a matriz inversa \underline{H}_{11}^{-1} analiticamente e efetuando-se as operações indicadas dentro do parêntese da expressão (4.4.13) resultará uma matriz em banda de fácil inversão. Obteve-se desta forma a sub-matriz \underline{B}_{22} . As demais sub-matrizes (\underline{B}_{11} e \underline{B}_{12}) são calculadas diretamente no computador mediante simples operações de multiplicação e adição matricial.

$$\begin{aligned} \underline{B}_{12} &= - \underline{H}_{11}^{-1} \underline{H}_{12} \underline{B}_{22} \\ \underline{B}_{11} &= \underline{H}_{11}^{-1} - \underline{B}_{12} (\underline{H}_{11}^{-1} \underline{H}_{12})^T \end{aligned} \quad (4.4.14)$$

A obtenção da inversa da matriz \underline{H} pelo processo indicado é feita pela sub-rotina \underline{H}_{11} do APÊNDICE

O vetor de cargas consistentes do elemento é dado por:

$$\underline{Q}^e = \underline{G}^T \underline{H}^{-1} \underline{H}_p + \underline{S}$$

onde:

$$\underline{S} = - \underline{G}_p^T + \int_{S_\sigma} \underline{L}^T \bar{\underline{T}}_B \, dS$$

Assumindo-se, para simplificar, que $\bar{\underline{T}}_B \equiv 0$, o vetor \underline{Q}^e ficará expresso por:

$$\underline{Q}^e = \underline{G}^T \underline{H}^{-1} \underline{H}_p - \underline{G}_p^T$$

Desta forma foram obtidas todas as matrizes necessárias para a montagem das matrizes \underline{K}^e e \underline{Q}^e o que é feito diretamente pelo computador.

EXEMPLOS NUMÉRICOS - RESULTADOS

Serão apresentados a seguir, dois tipos de placas retangulares que foram estudadas utilizando-se os elementos da secção 4.4. Os resultados são comparados com os obtidos pelo elemento retangular desenvolvido por Zienkiewicz (ref. 2) por possuir o mesmo número de deslocamentos nodais que os elementos híbridos apresentados e por estar igualmente baseado na Teoria Clássica da Flexão de Placas. Resultados numéricos com este elemento para vários casos de placas retangulares foram obtidos também na tese de D.Sc., COPPE, 1970 de Alcebíades Vasconcellos Filho (ref. 20).

PLACA 1:

- Tipo : Placa quadrada simplesmente apoiada nos quatro lados; isotrópica; homogênea; espessura constante.
- Carregamento : 1º - Carga uniformemente distribuída q_0 por unidade de área.
2º - Carga concentrada P no ponto A, centro da placa.

Placa analisada: Devido a simetria, foi analisada apenas um quarto da placa conforme indicado na figura 8. pa

ra a malha 4 x 4.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

E = Módulo de Young

ν = Coeficiente de Poisson (0.3)

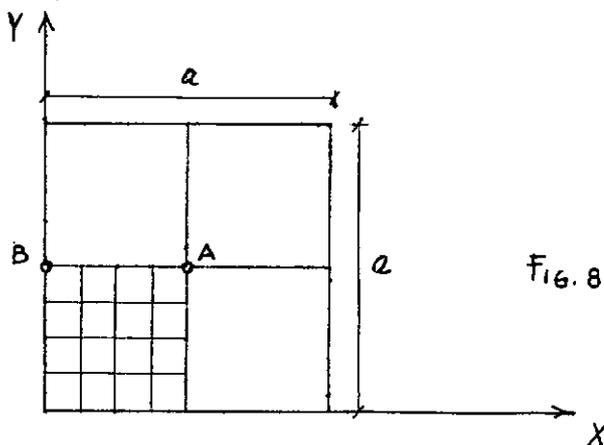


Fig. 8

Convergência : São calculados valores de coeficientes adimensionais para a flecha w e o momento fletor M_x no ponto central A para ambos os carregamentos.

CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA q_0

MALHA	COEFICIENTE $\alpha = w D/q_0 a^4$			
	HIBRIDO LINEAR	HIBRIDO QUADRÁTICO	ZIENKIEWICZ Ref. (2)	VASCONCELLOS Ref. (20)
1 x 1	0,002844	0,003906	0,003446	0,00506
2 x 2	0,003668	0,004052	0,003939	-
3 x 3	0,003890	0,004060	-	0,00418
4 x 4	0,003966	0,004062	0,004033	-
5 x 5	0,004001	0,004062	-	0,00411
6 x 6	0,004020	0,004062	0,004050	0,00409
EXATO Ref. (1)	0.004062			

MALHA	COEFICIENTE $\beta = M_x/a^2 q_0$		
	HIBRIDO LINEAR	HIBRIDO QUADRÁTICO	VASCONCELLOS Ref. (20)
1 x 1	0,04436	0,04905	0,0660
2 x 2	0,04795	0,04827	-
3 x 3	0,04783	0,04806	0,0497
4 x 4	0,04788	0,04798	-
5 x 5	0,04788	0,04795	0,0485
6 x 6	0,04788	0,04793	0,0484
EXATO Ref. (1)	0,0479		

CARGA CONCENTRADA P EM A

MALHA	COEFICIENTE $\alpha = w D/Pa^2$			
	HIBRIDO LINEAR	HIBRIDO QUADRÁTICO	ZIENKIEWICZ Ref. (2)	VASCONCELLOS Ref. (20)
1 x 1	0,01138	0,01045	0,01378	0,0138
2 x 2	0,01187	0,01138	0,01233	-
3 x 3	0,01175	0,01151	-	0,0120
4 x 4	0,01169	0,01155	0,01183	-
5 x 5	0,01166	0,01157	-	0,0118
6 x 6	0,01164	0,01158	0,01172	0,0117
EXATO Ref. (1)	0,01160			

MALHA	COEFICIENTE $\beta = M_x/P$		
	HIBRIDO LINEAR	HIBRIDO QUADRÁTICO	VASCONCELLOS Ref. (20)
1 x 1	0,177	0,213	0,228
2 x 2	0,239	0,289	-
3 x 3	0,278	0,331	0,337
4 x 4	0,307	0,361	-
5 x 5	0,330	0,384	0,389
6 x 6	0,349	0,403	0,408

PLACA 2:

Tipo : Placa quadrada engastada nos quatro lados; isótro-
pa; homogênea; espessura constante.

Carregamentos : 1º Carga uniformemente distribuída q_0 por unidade
de área.

2º Carga concentrada P no ponto A, centro da pla-
ca.

Placa analisada: Devido a simetria foi analisada apenas um quarto
da placa conforme indicado na figura 8. para
a malha 4 x 4.

Convergência : São calculados valores de coeficientes adimensio-
nais para a flecha em A e o momento fletor no pon-
to B, para ambos os carregamentos.

CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA q_0

MALHA	COEFICIENTE $\alpha = w D/q_0 a^4$			COEF. $\beta = M_x/qa^2$	
	HIBRIDO LINEAR	HIBRIDO QUADRÁTICO	ZIENKIEWICZ Ref. (2)	HIBRIDO LINEAR	HIBRIDO QUADRÁTICO
1 x 1	0,00211	0,00134	0,00148	-0,0177	-0,0481
2 x 2	0,00124	0,00124	0,00140	-0,0448	-0,0500
3 x 3	0,00127	0,00126	-	-0,0472	-0,0505
4 x 4	0,00126	0,00126	0,00130	-0,0498	-0,0508
5 x 5	0,00126	0,00126	-	-0,0498	-0,0509
6 x 6	0,00126	0,00126	0,00128	-0,0506	-0,0510
EXATO Ref. (1)		0,00126		- 0,0513	

CARGA CONCENTRADA P EM A

MALHA	COEFICIENTE $\alpha = w D/Pa^2$			COEF. $\beta = M_x/P$	
	HIBRIDO LINEAR	HIBRIDO QUADRÁTICO	ZIENKIEWICZ Ref. (2)	HIBRIDO LINEAR	HIBRIDO QUADRÁTICO
1 x 1	0,00844	0,00534	0,00592	-0,0709	-0,1448
2 x 2	0,00581	0,00535	0,00613	-0,1134	-0,1285
3 x 3	0,00578	0,00550	-	-0,1178	-0,1269
4 x 4	0,00569	0,00555	0,00580	-0,1237	-0,1261
5 x 5	0,00567	0,00557	-	-0,1226	-0,1258
6 x 6	0,00565	0,00559	0,00571	-0,1246	-0,1257
EXATO Ref. (1)		0,00560		-0,1257	

V - CONCLUSÕES

Os elementos desenvolvidos, através dos diversos resultados numéricos obtidos, demonstraram uma excelente concordância com as soluções teoricamente exatas.

Sendo a formulação dos mesmos feita em caráter bastante geral, torna-se possível o desenvolvimento de elementos com outras geometrias por exemplo, elementos triangulares, podendo desta forma serem abordados problemas com contornos irregulares e não suscetíveis de serem representados por uma malha retangular.

Uma outra característica dos elementos híbridos está na obtenção das tensões que atuam no seu interior. Uma vez que o campo de tensões, ao contrário dos elementos desenvolvidos pelo método dos deslocamentos, é assumido "a priori", torna-se possível conhecer as tensões em qualquer ponto do mesmo a partir dos parâmetros β determinados para cada elemento. Obtem-se assim os cinco esforços resultantes (M_x , M_y , M_{xy} , Q_x e Q_y) nos pontos em que se fizer necessário. Da mesma maneira é possível obterem-se as reações nos apoios da placa em estudo. As sub-rotinas que aparecem no APÊNDICE fornecem os esforços resultantes nos quatro cantos de cada elemento mas podem ser facilmente alteradas para fornecerem os esforços em qualquer outro ponto em que houver interesse.

Um outro aspecto que deve ser salientado diz respeito às funções de interpolação adotadas para os deslocamentos (β_x , β_y e w) do elemento. Como foi visto na teoria, estes deslo-

camentos sã serã necessãrios na fronteira, podendo portanto serem expressos por funções de interpolaçã de uma dimensã. Mas se forem adotadas funções de interpolaçã vãlidas para todõ o domĩnio do elemento serã possĩvel obterem-se matrizes de massa para os elementos e tornando possĩvel tambẽm a anãlise de problemas dinãmicos.

O estudo da convergẽcia dos elementos hĩbridos com campo de tensões assumido foge ao escopo do presente trabalho, podendo ser encontrado nas referẽncias (10 e 11).

A P E N D I C E

QUADRO 1 MATRIZ L

LADO AB

$$\begin{bmatrix} -(1-\xi) & 0 & 0 & -\xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1-\xi) & 0 & 0 & -\xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (\xi-2\xi^2+\xi^3)a & 0 & (1-3\xi^2+2\xi^3) & (-\xi^2+\xi^3)a & 0 & (3\xi^2-2\xi^3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

LADO BC

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -(1-\eta) & 0 & 0 & -\eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(1-\eta) & 0 & 0 & -\eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\eta-2\eta^2+\eta^3)b & (1-3\eta^2+2\eta^3) & 0 & (-\eta^2+\eta^3)b & (3\eta^2-2\eta^3) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

LADO CD

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\xi & 0 & 0 & -(1-\xi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\xi & 0 & 0 & -(1-\xi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-\xi^2+\xi^3)a & 0 & (3\xi^2-2\xi^3) & (\xi-2\xi^2+\xi^3)a & 0 & (1-3\xi^2+2\xi^3) \end{bmatrix}$$

LADO DA

$$\begin{bmatrix} -(1-\eta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta & 0 & 0 \\ 0 & -(1-\eta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta & 0 \\ 0 & (\eta-2\eta^2+\eta^3)b & (1-3\eta^2+2\eta^3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-\eta^2+\eta^3)b & (3\eta^2-2\eta^3) \end{bmatrix}$$

onde $\xi = x/a$ e $\eta = y/b$

QUADRO 2 MATRIZ R

LADO AB

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x^2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x & 2x & 0 \end{bmatrix}$$

LADO BC

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & y & 0 & a & 0 & 0 & 0 & y^2 & 0 & a^2 & 0 & ay & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y & -a & 0 & 0 & -ay & -ay & 0 & 0 & -a^2 & -y^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & a & -a & y & 0 & 0 & -2y \end{bmatrix}$$

LADO CD

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b & -x & 0 & 0 & -xb & -xb & 0 & 0 & -x^2 & -b^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & b & 0 & 0 & 0 & x^2 & 0 & b^2 & 0 & xb & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -b & b & 0 & x & -2x & 0 \end{bmatrix}$$

LADO DA

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y & 0 & 2y \end{bmatrix}$$

MATRIZ R_p

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Lado AB

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{ay\bar{p}}{2} \\ -\frac{a\bar{p}}{2} \end{Bmatrix}$$

Lado BC

$$\begin{Bmatrix} -\frac{xb\bar{p}}{2} \\ 0 \\ -\frac{b\bar{p}}{2} \end{Bmatrix}$$

Lado CD

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Lado DA

QUADRO 3 MATRIZ G_p

$$\left[\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{ab^2\bar{p}}{24} & -\frac{ab\bar{p}}{4} & \frac{5a^2b\bar{p}}{24} & \frac{5ab^2\bar{p}}{24} & -\frac{ab\bar{p}}{2} & \frac{a^2b\bar{p}}{24} & 0 & -\frac{ab\bar{p}}{4} \end{array} \right]$$

QUADRO 4 MATRIZ H_p

$$H_p = \int_A P^T C_1 P_P dA + \int_A V^T C_2 V_P dA + \int_A \frac{1}{2} P^T Z dA$$

$$\int_A P^T C_1 P_P dA$$

$$\left\{ 0 \quad 0 \quad \frac{a^2b^2}{4} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{a^2b^3}{6} \quad \frac{a^3b^2}{6} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{a^3b^3}{9} \quad \frac{a^3b^3}{9} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{a^4b^2}{8} \quad \frac{a^2b^4}{8} \right\} (1+\nu) \frac{12\bar{p}}{Eh^3}$$

$$\int_A V^T C_2 V_P dA$$

$$\left\{ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{a^2b}{2} \quad \frac{ab^2}{2} \quad -\frac{a^2b}{2} \quad -\frac{ab^2}{2} \quad 0 \quad 0 \quad \left(\frac{a^3b}{3} - \frac{ab^3}{3} \right) - \left(-\frac{a^3b}{3} + \frac{ab^3}{3} \right) \quad \frac{a^2b^2}{4} \quad \frac{a^2b^2}{4} \right.$$

$$\left. -\frac{a^2b^2}{2} \quad -\frac{a^2b^2}{2} \right\} \left(-\frac{\bar{p}(1+\nu)h^2}{10} \right) \left(\frac{12}{Eh^3} \right)$$

$$\int_A \frac{1}{2} \underline{z}^T \underline{P} \, dA$$

$$\left\{ ab \quad ab \quad 0 \quad \frac{ab^2}{2} \quad \frac{a^2b}{2} \quad \frac{a^2b}{2} \quad \frac{ab^2}{2} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{ab^3}{3} \quad \frac{a^3b}{3} \quad \frac{a^3b}{3} \quad \frac{ab^3}{3} \quad \frac{a^2b^2}{4} \quad \frac{a^2b^2}{4} \quad 0 \quad 0 \right\} \left(-\frac{h^2 \bar{v} \bar{p}}{10} \right) \left(\frac{12}{Eh^3} \right)$$

QUADRO 5 MATRIZ R

LADO AB

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & -x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

LADO BC

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & y & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

LADO CD

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

LADO DA

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

QUADRO 6 MATRIZ L

LADO AB

$$\begin{bmatrix} 0 & (1-\xi) & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (-\xi+2\xi^2-\xi^3)a & 0 & (1-3\xi^2+2\xi^3) & (\xi^2-\xi^3)a & 0 & (3\xi^2-2\xi^3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

LADO BC

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & (1-n) & 0 & 0 & n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-n+2n^2-n^3)b & (1-3n^2+2n^3) & 0 & (n^2-n^3)b & (3n^2+2n^3) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

LADO CD

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & (1-\xi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\xi^2-\xi^3)a & 0 & (3\xi^2-2\xi^3) & (-\xi+2\xi^2-\xi^3)a & 0 & (1-3\xi^2+2\xi^3) \end{bmatrix}$$

LADO DA

$$\begin{bmatrix} (1-n) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & (-n+2n^2-n^3)b & (1-3n^2+2n^3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (n^2-n^3)b & (3n^2-2n^3) \end{bmatrix}$$

QUADRO 7 MATRIZ H

ab	-vab	0	$\frac{ab^2}{2}$	$-\frac{va^2b}{2}$	$\frac{a^2b}{2}$	$-\frac{vab^2}{2}$	0	0
	ab	0	$-\frac{vab^2}{2}$	$\frac{a^2b}{2}$	$-\frac{va^2b}{2}$	$\frac{ab^2}{2}$	0	0
		Λab	0	0	0	0	$\frac{\Lambda ab^2}{2}$	$\frac{\Lambda a^2b}{2}$
			$\frac{ab^3}{3}$	$-\frac{va^2b^2}{4}$	$\frac{a^2b^2}{4}$	$-\frac{vab^3}{3}$	0	0
	S I M É T R I C O			$\frac{a^3b}{3}$	$-\frac{va^3b}{3}$	$\frac{a^2b^2}{4}$	0	0
				$\frac{a^3b}{3}$	$-\frac{va^2b^2}{4}$	0	0	0
					$\frac{a^2b^3}{3}$	0	0	0
						$\frac{\Lambda ab^3}{3}$	$\frac{\Lambda a^2b^2}{4}$	0
							$\frac{\Lambda a^3b}{3}$	0

onde $\Lambda = 2(1+v)$

$\frac{12}{Eh^3}$

QUADRO 8 MATRIZ H^{-1}

$\frac{7}{kab}$	$\frac{7v}{kab}$	0	$-\frac{6}{kab^2}$	$-\frac{6v}{ka^2b}$	$-\frac{6}{ka^2b}$	$-\frac{6v}{kab^2}$	0	0
	$\frac{7}{kab}$	0	$-\frac{6v}{kab^2}$	$-\frac{6}{ka^2b}$	$-\frac{6v}{ka^2b}$	$-\frac{6}{kab^2}$	0	0
		$\frac{7}{\Lambda ab}$	0	0	0	0	$-\frac{6}{\Lambda ab^2}$	$-\frac{6}{\Lambda a^2b}$
			$\frac{12}{kab^3}$	0	0	$\frac{12v}{kab^3}$	0	0
				$\frac{12}{ka^3b}$	$\frac{12v}{ka^3b}$	0	0	0
					$\frac{12}{ka^3b}$	0	0	0
						$\frac{12}{kab^3}$	0	0
							$\frac{12}{\Lambda ab^3}$	0
								$\frac{12}{\Lambda a^3b}$

S I M É T R I C O

$\frac{Eh^3}{12}$

onde $\Lambda = 2(1+v)$ e $k = (1-v^2)$

QUADRO 9 MATRIZ R

LADO AB

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & -x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x & 4x \end{bmatrix}$$

LADO BC

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & y & 0 & a & 0 & 0 & 0 & y^2 & 0 & a^2 & 0 & ay & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2a & y & 0 & -4y \end{bmatrix}$$

LADO CD

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & b & 0 & 0 & 0 & x^2 & 0 & b^2 & 0 & bx & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2b & 0 & 0 & x & -4x \end{bmatrix}$$

LADO DA

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y & 0 & 4y \end{bmatrix}$$

QUADRO 9 MATRIZ R_p

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Lado AB

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -a\bar{p} \end{Bmatrix}$$

Lado BC

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -b\bar{p} \end{Bmatrix}$$

Lado CD

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Lado DA

QUADRO 10 MATRIZ G_p

$$\left[\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{ab^2\bar{p}}{12} & -\frac{ab\bar{p}}{2} & -\frac{a^2b\bar{p}}{12} & -\frac{ab^2\bar{p}}{12} & -ab\bar{p} & \frac{a^2b\bar{p}}{12} & 0 & -\frac{ab\bar{p}}{2} \end{array} \right]$$

QUADRO 11 MATRIZ H_p

A matriz H_p é idêntica a matriz $f_A P^T C_1 P_p$ da do QUADRO 4.

LISTAGEM DAS SUB-ROTINAS EM LINGUAGEM FROTRAN

Relacionam-se a seguir as sub-rotinas referentes aos elementos desenvolvidos nos capítulos anteriores.

As sub-rotinas de nomes HIBR9, H9, G9 e TENS9 referem-se ao elemento linear apresentado na seção 4.1; as de nomes HIBR8, H11, GU e TENS5 referem-se ao elemento quadrático da seção 4.2; as de nomes HMT, GC, HIBR1, HFGF, ISIBR e TENS2 referem-se ao elemento de placa sandwich e ao elemento baseado na teoria de Reissner.

INFORMAÇÕES GERAIS SÔBRE PARÂMETROS DE
ENTRADA E SAÍDA DAS SUB-ROTINAS

- XE - Coordenadas dos nós dos elementos
- EE - Módulo de Young
- TU - Coeficiente de Poisson
- TH - Espessura do elemento homogêneo ou espessura das faces de um elemento de placa sandwich
- SE - Matriz \underline{K}^e
- T - Vetor \underline{Q}^e
- NCD - Índice 0 ou 1 (0 se o elemento não possui carga uniformemente distribuída, 1 se o elemento possui carga uniformemente distribuída q_0)
- QC - Valor da carga q_0
- G - Matriz \underline{G}
- BETA - Vetor $\underline{\beta}$
- P - Vetor dos termos independentes do sistema global de equações

- S - Matriz das equações do sistema global
- NE - Número de elementos da malha
- NNPE - Número de nós por elemento
- NEL - Incidência dos nós para cada elemento
- NA - Número do nó que possui um deslocamento prescrito
- NNDP - Número de nós com deslocamentos prescritos
- IA - Direções prescritas para cada um dos nós relacionados em NA
- X - Abscissas dos nós da malha
- Y - Ordenadas dos nós da malha
- H - Matriz \underline{H}
- HF - Matriz \underline{H}_p
- GF - Matriz \underline{G}_p
- IS - Índice 0 ou 1 (0 para o elemento de placa sandwich, 1 para o elemento baseado na teoria de Reissner)
- GCS - Módulo de elasticidade transversal G do material do núcleo de uma placa sandwich
- HCS - Espessura h do núcleo de uma placa sandwich

```

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
  SUBROUTINE H18R9 (XE,EE,TU,TH,SE,QC,T;NCD)
  DIMENSION XE(8,2),SE(12,12),H(9,9),G(9,12),GH(12,9),T(12)
C
C   MONTAGEM DAS MATRIZES KE E QE
C
  N=9
  CALL H9 (XE,TU,H)
  E=EE*TH**3/12.
  DO 10 I=1,N
  DO 10 J=1,N
10  H(I,J)=H(I,J)*E
  CALL G9(XE,G)
  DO 11 I=1,12
  DO 11 J=1,N
  GH(I,J)=0.
  DO 11 KK=1,N
11  GH(I,J)=GH(I,J)+G(KK,I)*H(KK,J)
  DO 12 I=1,12
  DO 12 J=1,12
  SE(I,J)=0.
  DO 12 KK=1,N
12  SE(I,J)=SE(I,J)+GH(I,KK)*G(KK,J)
  DO 17 I=1,12
17  T(I)=0.
  IF(NCD) 21,2I,22
22  AL=XE(2,1)-XE(1,1)
  BL=XE(3,2)-XE(2,2)
  T(3)=QC*AL*BL*0.25
  T(6)=T(3)
  T(9)=T(3)
  T(12)=T(3)
  WRITE(5,200)
200 FORMAT(//' VETOR DE CARGA DO ELEMENTO '///)
  WRITE(5,210) (T(I),I=1,12)
210 FORMAT(6E15.7)
  21 CONTINUE
  RETURN
  END
// DUP
*STORE      WS UA H18R9      DEC3
// FOR
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
*LIST SOURCE PROGRAM
  SUBROUTINE H9 (XE,TU,H)
  DIMENSION XE(8,2),H(9,9)

```

```

C
C   CALCULO DA MATRIZ INVERSA DE H
C
C   AL E BL  LADOS A E B DO ELEMENTO
C

```

```

D=1.-TU**2
V=2.*(1.+TU)
AL=XE(2,1)-XE(1,1)
BL=XE(3,2)-XE(2,2)
A=AL*BL
B=AL**2*BL
C=AL*BL**2
P=AL**3*BL
R=BL**3*AL

```

```

DO 3 I=1,9
DO 3 J=1,9

```

```

3  H(I,J)=0.
   H(1,1)=7./(D*A)
   H(1,2)=H(1,1)*TU
   H(1,4)=-6./(D*C)
   H(1,5)=-6.*TU/(D*B)
   H(1,6)=-6./(D*B)
   H(1,7)=-6.*TU/(D*C)
   H(2,2)=H(1,1)
   H(2,4)=H(1,7)
   H(2,5)=H(1,6)
   H(2,6)=H(1,5)
   H(2,7)=H(1,4)
   H(3,3)=7./(V*A)
   H(3,3)=-6./(V*C)
   H(3,9)=-6./(V*B)
   H(4,4)=12./(D*R)
   H(4,7)=H(4,4)*TU
   H(5,5)=12./(D*P)
   H(5,6)=H(5,5)*TU
   H(6,6)=H(5,5)
   H(7,7)=H(4,4)
   H(8,8)=12./(V*R)
   H(9,9)=12./(V*P)
DO 11 I=1,9
DO 11 J=1,9
11 H(J,I)=H(I,J)
   RETURN
   END

```

```

// DUP
*STORE      WS  UA  H9
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION

```

OEC3

```

SUBROUTINE G7 (XE,G)
DIMENSION XE(8,2),G(9,12)

```

```

CALCULO DA MATRIZ G

```

```

AL E BL LADOS A E B DO ELEMENTO

```

```

AL=XE(2,1)-XE(1,1)

```

```

BL=XE(3,2)-XE(2,2)

```

```

A=AL/6.

```

```

B=BL/6.

```

```

A2=AL*AL/6.

```

```

B2=BL*BL/6.

```

```

DO 10 I=1,9

```

```

DO 10 J=1,12

```

```

10 G(I,J)=0.

```

```

G(1,1)=-B*3.

```

```

G(1,4)=B*3.

```

```

G(1,7)=G(1,4)

```

```

G(1,10)=G(1,1)

```

```

G(2,2)=-A*3.

```

```

G(2,5)=G(2,2)

```

```

G(2,8)=-G(2,2)

```

```

G(2,11)=G(2,8)

```

```

G(3,3)=2.

```

```

G(3,6)=-2.

```

```

G(3,9)=2.

```

```

G(3,12)=-2.

```

```

G(4,1)=-B2

```

```

G(4,4)=B2

```

```

G(4,7)=G(4,4)*2.

```

```

G(4,10)=-G(4,7)

```

```

G(5,2)=-A2

```

```

G(5,5)=G(5,2)*2.

```

```

G(5,8)=-G(5,5)

```

```

G(5,11)=-G(5,2)

```

```

G(6,2)=B2/2.

```

```

G(6,3)=-B*3.

```

```

G(6,4)=AL*BL/2.

```

```

G(6,5)=-G(6,2)

```

```

G(6,6)=-G(6,3)

```

```

G(6,7)=G(6,4)

```

```

G(6,8)=G(6,2)

```

```

G(6,9)=G(6,6)

```

```

G(6,11)=G(6,5)

```

```

G(6,12)=G(6,3)

```

```

G(7,1)=A2/2.

```

```

G(7,3)=-A*3.

```

```

G(7,4)=-G(7,1)

```

```

G(7,6)=G(7,3)

```

```

G(7,7)=G(7,1)
G(7,8)=AL*BL/2.
G(7,9)=-G(7,6)
G(7,10)=G(7,4)
G(7,11)=G(7,8)
G(7,12)=G(7,9)
G(8,2)=G(4,1)
G(8,3)=BL
G(8,5)=G(4,4)
G(8,6)=-BL
G(8,8)=G(8,2)
G(8,9)=G(8,3)
G(8,11)=G(8,5)
G(8,12)=G(8,6)
G(9,1)=G(5,2)
G(9,3)=AL
G(9,4)=G(5,11)
G(9,6)=-AL
G(9,7)=G(9,1)
G(9,9)=G(9,3)
G(9,10)=G(9,4)
G(9,12)=-AL
RETURN
END

```

```

// DUP
*STORE WS UA G9 DEC3
// FOR
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
*LIST SOURCE PROGRAM,
SUBROUTINE TEN59(XE,EE,TU,TH,BETA,P,NEL,NE,NNPE,X,Y,S,NCD,QC,NA,
*IA,NNDP)
DIMENSION XE(8,2),H(9,9),BETA(9),G(9,12),P(150),Q(12),
*NEL(100,4),X(100),Y(100),S(150,33),V(20),XL(5),YL(5),Z(9),NO(4),
*NA(40),IA(40,3)
C
C CALCULO DOS PARAMETROS BETA, DOS ESFORÇOS RESULTANTES E
C DAS REACOES DE APOIO
C
C AL E BL LADOS A E B DO ELEMENTO
C
WRITE(5,105)
105 FORMAT(////10X'ESFORÇOS RESULTANTES'////' ELEM NO '9X'MX'13X'M
*'13X'MXY'12X'QX'13X'QY'/)
DO 800 KJ=1,NE
DO 18 I=1,NNPE
J=NEL(KJ,1)
NO(I)=J
XE(I,1)=X(J)
XE(I,2)=Y(J)

```

```

Q(3*I-2)=P(3*J-2)
Q(3*I-1)=P(3*J-1)
Q(3*I)=P(3*J)
18 CONTINUE
CALL H9(XE,TU,M)
E=EE*TH**3/12.
DO 36 I=1,9
DO 36 J=1,9
36 H(I,J)=H(I,J)*E
CALL G9(XE,G)
DO 31 I=1,9
Z(I)=0.
DO 31 KK=1,12
31 Z(I)=Z(I)+G(I,KK)*Q(KK)
DO 34 I=1,9
BETA(I)=0.
DO 34 KK=1,9
34 BETA(I)=BETA(I)+H(I,KK)*Z(KK)
DO 22 I=1,9
22 S(KJ,I)=BETA(I)
A=XE(2,1)-XE(1,1)
B=XE(3,2)-XE(2,2)
XL(1)=0.
XL(2)=A
XL(3)=A
XL(4)=0.
YL(1)=0.
YL(2)=0.
YL(3)=B
YL(4)=B
DO 41 I=1,4
V(5*I-4)=BETA(1)+BETA(4)*YL(I)+BETA(6)*XL(I)
V(5*I-3)=BETA(2)+BETA(5)*XL(I)+BETA(7)*YL(I)
V(5*I-2)=BETA(3)+BETA(8)*YL(I)+BETA(9)*XL(I)
V(5*I-1)=BETA(6)-BETA(8)
V(5*I)=BETA(7)-BETA(9)
41 CONTINUE
DO 58 I=1,4
WRITE(5,106) KJ,NO(I),V(5*I-4),V(5*I-3),V(5*I-2),V(5*I-1),V(5*I)
106 FORMAT(2X, I3, 4X, I3, 3X, 5E15.4)
58 CONTINUE
800 CONTINUE
WRITE(5,120)
120 FORMAT(///10X' REACOES DE APOIO'///' ELEM NO '9X'VX'13X'VY'
*/)
DO 2 I=1,NE
DO 2 IV=1,NNOP
DO 2 J=1,NNPE
IF(IA(IV)-NEL(I,J)) 2,3,2
3 IF(IA(IV,3)) 2,4,2

```

```

4 VX=S(1,6)-2.*S(1,8)
  VY=S(1,7)-2.*S(1,9)
  WRITE(5,121) I,NA(IV),VX,VY
121 FORMAT(2X,13,4X,13,3X,2E15.7)
2 CONTINUE
  WRITE(5,100)
100 FORMAT(///' VALORES DOS PARAMETROS BETA PARA CADA ELEMENTO'//
*' ELEMENTO          BETA 1  A          BETA 9  '/')
  DO 29 KJ=1,NE
  WRITE(5,101) KJ,(S(KJ,I),I=1,9)
101 FORMAT(4X,13,5X,9E12.4)
29 CONTINUE
  RETURN
  END

```

```
// DUP
```

```
*STORE      WS  UA  TENS9          OECS
```

```
// FOR
```

```
*LIST SOURCE PROGRAM
```

```
*ONE WORD INTEGERS
```

```
*EXTENDED PRECISION
```

```

  SUBROUTINE HIBR8 (XE,EE,TU,TH,SE,QC,T,NCD)
  DIMENSION XE(8,2),SE(12,12),H(17,17),G(17,12),GH(12,17),T(12),
  CHF(17),GF(12)

```

```

C
C  MONTAGEM DAS MATRIZES KE E QE
C

```

```

N=17
CALL H11(XE,EE,TU,TH,H,HF,GF,NCD,QC)
CALL GU (XE,G)
DO 11 I=1,12
DO 11 J=1,N
GH(I,J)=0.
DO 11 KK=1,N
11 GH(I,J)=GH(I,J)+G(KK,I)*H(KK,J)
DO 12 I=1,12
DO 12 J=1,12
SE(I,J)=0.
DO 12 KK=1,N
12 SE(I,J)=SE(I,J)+GH(I,KK)*G(KK,J)
IF(NCD) 21,21,9
21 CONTINUE
DO 27 I=1,12
27 T(I)=0.
GO TO 23
9 DO 17 I=1,12
T(I)=0.
DO 16 KK=1,N
16 T(I)=T(I)+GH(I,KK)*HF(KK)
17 T(I)=T(I)+GF(I)
WRITE(5,200)

```

```

200 FORMAT(// ' VETOR DE CARGA DO ELEMENTO '//)
WRITE(5,210) (F(I),I=1,12)
210 FORMAT(6E15.7)
23 CONTINUE
RETURN
END

```

```

// DUP
*STORE      WS  UA  HIBRS      .  DEC3
// FOR
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
*LIST SOURCE PROGRAM
SUBROUTINE H11(XE,EE,TU,TH,H,HF,GF,NCD,OC)
DIMENSION XE(8,2),H(17,17),F(6,6),S(11,6),HF(17),GF(12)

```

```

C
C   CALCULO DA MATRIZ INVERSA DE H
C
C   AL E BL LADOS A E B DO ELEMENTO
C

```

```

D=1.-TU**2
V=2.*(1.+TU)
AL=XE(2,1)-XE(1,1)
BL=XE(3,2)-XE(2,2)
A=AL*BL
B=AL**2*BL
C=AL*BL**2
P=AL**3*BL
R=BL**3*AL

```

```

C
C   MATRIZ H11
C

```

```

DO 3 I=1,17
DO 3 J=1,17
3 H(I,J)=0.
H(1,1)=(12.-5.*TU*TU)/(D*A)
H(1,2)=(7.*TU)/(D*A)
H(1,4)=- (36.-30.*TU*TU)/(D*C)
H(1,5)=-6.*TU/(D*B)
H(1,6)=-6./(D*B)
H(1,7)=-6.*TU/(D*C)
H(2,2)=H(1,1)
H(2,4)=H(1,7)
H(2,5)=- (36.-30.*TU*TU)/(D*B)
H(2,6)=H(1,5)
H(2,7)=-6./(D*C)
H(3,3)=7./(V*A)
H(3,8)=-6./(V*C)
H(3,9)=-6./(V*B)
H(4,4)=(192.-180.*TU*TU)/(D*R)
H(4,7)=(12.*TU)/(D*R)

```

```

H(5,5)=(192.-180.*TU*TU)/(D*P)
H(5,6)=(12.*TU)/(D*P)
H(6,6)=12./(D*P)
H(7,7)=12./(D*R)
H(8,8)=12./(V*R)
H(9,9)=12./(V*P)
H(1,10)=30./R
H(2,11)=30./P
H(4,10)=-180./(BL*R)
H(5,11)=-180./(P*AL)
H(10,10)=180./(R*BL**2)
H(11,11)=180./(P*AL**2)
DO 11 I=1,11
DO 11 J=1,11
11 H(J,I)=H(I,J)
DO 4 I=1,6
DO 4 J=1,6
4 F(I,J)=0.
VB=V*B*C/144.
VA=P*AL*AL*D/180.+VB
VC=R*BL*BL*D/180.+VB
DET=VA*VC-VB*VB
F(1,1)=VC/DET
F(1,2)=-VB/DET
F(2,1)=F(1,2)
F(2,2)=VA/DET
F(3,3)=144./(B*C*D)
F(3,4)=F(3,3)*TU
F(4,3)=F(3,4)
F(4,4)=F(3,3)
F(5,5)=180./(V*AL**5*BL)
F(6,6)=180./(V*AL*BL**5)
DO 5 I=1,11
DO 5 J=1,6
5 S(I,J)=0.
S(1,1)=-AL*AL/6.
S(1,2)=-BL*BL*TU/6.
S(1,3)=-AL*BL/4.
S(2,1)=-AL*AL*TU/6.
S(2,2)=-BL*BL/6.
S(2,4)=-AL*BL/4.
S(3,1)=S(2,4)
S(3,2)=S(2,4)
S(4,2)=BL*TU
S(4,3)=AL/2.
S(5,1)=AL*TU
S(5,4)=BL/2.
S(6,1)=AL
S(6,3)=S(5,4)
S(7,2)=BL

```

```

S(7,4)=S(4,3)
S(8,1)=S(4,3)
S(8,2)=S(4,3)
S(9,1)=S(5,4)
S(9,2)=S(5,4)
S(10,2)=-TU
S(11,1)=-TU
S(3,5)=-AL*AL/6.
S(3,6)=-BL*BL/6.
S(8,6)=BL
S(9,5)=AL
DO 6 I=1,11
DO 6 J=1,6
L=J+11
H(I,L)=0.
DO 9 KK=1,6
9 H(I,L)=H(I,L)-S(I,KK)*F(KK,J)
6 H(L,I)=H(I,L)
DO 7 I=1,11
DO 7 J=1,11
DO 7 KK=1,6
L=KK+11
7 H(I,J)=H(I,J)-H(I,L)*S(J,KK)
DO 8 I=1,6
M=I+11
DO 8 J=1,6
L=J+11
8 H(M,L)=F(I,J)
E=EE*TH**3/12.
DO 10 I=1,17
DO 10 J=1,17
10 H(I,J)=H(I,J)*E
C
C   CALCULO DA MATRIZ HP
C
C   CALCULO DA MATRIZ GP
C
DO 42 I=1,17
42 HF(I)=0.
DO 15 I=1,12
15 GF(I)=0.
IF(NCD) 52,52,17
17 CONTINUE
EIV=QC*(1.+TU)*12./(EE*TH**3)
HF(3)=A*A*EIV*0.25
HF(8)=A*A*BL*EIV/6.
HF(9)=A*A*AL*EIV/6.
HF(12)=A**3*EIV/9.
HF(13)=HF(12)
HF(16)=P*A*EIV/8.

```

```

HF(17)=R*A*EIV/8.
GF(5)=-C*QC/12.
GF(6)=A*QC/2.
GF(7)=B*QC/12.
GF(8)=-GF(5)
GF(10)=-GF(7)
GF(12)=GF(6)

```

```
52 CONTINUE
```

```
RETURN
```

```
END
```

```
// DUP
```

```
*STORE WS UA H11 OEC3
```

```
// FOR
```

```
*LIST SOURCE PROGRAM
```

```
*ONE WORD INTEGERS
```

```
*EXTENDED PRECISION
```

```
SUBROUTINE GU (XE,G)
```

```
DIMENSION XE(8,2),G(17,12)
```

```
C
```

```
C CALCULO DA MATRIZ G
```

```
C
```

```
C AL E BL LADOS A E B DO ELEMENTO
```

```
C
```

```
AL=XE(2,1)-XE(1,1)
```

```
BL=XE(3,2)-XE(2,2)
```

```
A=AL/6.
```

```
B=BL/6.
```

```
A2=AL*AL/6.
```

```
B2=BL*BL/6.
```

```
DO 10 I=1,17
```

```
DO 10 J=1,12
```

```
10 G(I,J)=0.
```

```
G(1,1)=-B*3.
```

```
G(1,4)=B*3.
```

```
G(1,7)=G(1,4)
```

```
G(1,10)=G(1,1)
```

```
G(2,2)=-A*3.
```

```
G(2,5)=G(2,2)
```

```
G(2,8)=-G(2,2)
```

```
G(2,11)=G(2,8)
```

```
G(3,3)=2.
```

```
G(3,6)=-2.
```

```
G(3,9)=2.
```

```
G(3,12)=-2.
```

```
G(4,1)=-B2
```

```
G(4,4)=B2
```

```
G(4,7)=G(4,4)*2.
```

```
G(4,10)=-G(4,7)
```

```
G(5,2)=-A2
```

```
G(5,5)=G(5,2)*2.
```

$G(5,8)=-G(5,5)$
 $G(5,11)=-G(5,2)$
 $G(6,2)=B^2/2.$
 $G(6,3)=-B^3.$
 $G(6,4)=AL*BL/2.$
 $G(6,5)=-G(6,2)$
 $G(6,6)=-G(6,3)$
 $G(6,7)=G(6,4)$
 $G(6,8)=G(6,2)$
 $G(6,9)=G(6,6)$
 $G(6,11)=G(6,5)$
 $G(6,12)=G(6,3)$
 $G(7,1)=A^2/2.$
 $G(7,3)=-A^3.$
 $G(7,4)=-G(7,1)$
 $G(7,6)=G(7,3)$
 $G(7,7)=G(7,1)$
 $G(7,8)=AL*BL/2.$
 $G(7,9)=-G(7,6)$
 $G(7,10)=G(7,4)$
 $G(7,11)=G(7,8)$
 $G(7,12)=G(7,9)$
 $G(8,2)=G(4,1)$
 $G(8,3)=2L$
 $G(8,5)=G(4,4)$
 $G(8,6)=-BL$
 $G(8,8)=G(8,2)$
 $G(8,9)=G(8,3)$
 $G(8,11)=G(8,6)$
 $G(8,12)=G(8,6)$
 $G(9,1)=G(5,2)$
 $G(9,3)=AL$
 $G(9,4)=G(5,11)$
 $G(9,6)=-AL$
 $G(9,7)=G(9,1)$
 $G(9,9)=G(9,3)$
 $G(9,10)=G(9,4)$
 $G(9,12)=-AL$
 $C=AL**3/12.$
 $D=BL**3/12.$
 $AB=AL*AL*BL/6.$
 $BA=BL*BL*AL/6.$
 $G(10,1)=-D$
 $G(10,4)=D$
 $G(10,7)=G(10,4)*3.$
 $G(10,10)=-G(10,7)$
 $G(11,2)=-C$
 $G(11,5)=G(11,2)*3.$
 $G(11,8)=-G(11,5)$
 $G(11,11)=-G(11,2)$

```

G(12,4)=AB*3.
G(12,7)=AB*2.
G(12,9)=AL*BL
G(12,10)=AB
G(12,12)=-G(12,9)
G(13,5)=BA
G(13,6)=G(12,12)
G(13,8)=BA*2.
G(13,9)=G(12,9)
G(13,11)=BA*3.
G(14,2)=BL**3/30.
G(14,3)=-3.*BL*BL/20.
G(14,4)=BA
G(14,5)=-G(14,2)
G(14,6)=-G(14,3)
G(14,7)=BA*2.
G(14,8)=BL**3./20.
G(14,9)=7.*BL*BL/20.
G(14,11)=-G(14,8)
G(14,12)=-G(14,9)
G(15,1)=AL**3/30.
G(15,3)=-3.*AL*AL/20.
G(15,4)=-AL**3/20.
G(15,6)=-7.*AL*AL/20.
G(15,7)=-G(15,4)
G(15,8)=AB*2.
G(15,9)=-G(15,6)
G(15,10)=-G(15,1)
G(15,11)=AB
G(15,12)=-G(15,3)
G(16,1)=-2.*AL**3/15.
G(16,3)=3.*AL**2/5.
G(16,4)=AL**3/5.
G(16,6)=-3.*AL**2/5.
G(16,7)=-G(16,4)
G(16,9)=-G(16,6)
G(16,10)=-G(16,1)
G(16,12)=-G(16,3)
G(17,2)=-2.*BL**3/15.
G(17,3)=3.*BL**2/5.
G(17,5)=2.*BL**3/15.
G(17,6)=-G(17,3)
G(17,8)=-BL**3/5.
G(17,9)=3.*BL**2/5.
G(17,11)=-G(17,8)
G(17,12)=-G(17,9)
RETURN
END

```

```
// DUP
*STORE
```

```
WS UA GU
```

```
OEC3
```

```

// FOR
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
*LIST SOURCE PROGRAM
**
SUBROUTINE TENS5(XE,EE,TU,TH,BETA,P,NEL,NE,NNPE,X,Y,S,NCD,QC,
C      NNDP,NA,IA)
DIMENSION XE(8,2),H(17,17),BETA(17),G(17,12),P(147),Q(12),
*NEL(50,4),X(50),Y(50),S(147,27),V(20),XL(5),YL(5),Z(17),NO(4),
*HF(17),GF(12),NA(40),IA(40,3)

C
C      CALCULO DOS PARAMETROS BETA, DOS ESFORCOS RESULTANTES E
C      DAS REACOES DE APOIO
C
C      AL E BL LADOS A E B DO ELEMENTO
C
WRITE(5,105)
105 FORMAT(////10X'ESFORCOS RESULTANTES'////' ELEM NO '9X'MX'13X'M
*Y'13X'MXY'12X'QX'13X'QY'/)
N=17
KK1=1
DO 800 KJ=1,NE
DO 18 I=1,NNPE
J=NEL(KJ,I)
NO(I)=J
XE(I,1)=X(J)
XE(I,2)=Y(J)
Q(3*I-2)=P(3*J-2)
Q(3*I-1)=P(3*J-1)
Q(3*I)=P(3*J)
18 CONTINUE
CALL H11(XE,EE,TU,TH,H,HF,GF,NCD,QC)
CALL G0 (XE,G)
DO 31 I=1,N
Z(I)=0.
DO 31 KK=1,12
31 Z(I)=Z(I)+G(I,KK)*Q(KK)
IF(NCD) 51,51,52
52 DO 53 I=1,N
53 Z(I)=Z(I)-HF(I)
51 CONTINUE
DO 34 I=1,N
BETA(I)=0.
DO 34 KK=1,N
34 BETA(I)=BETA(I)+H(I,KK)*Z(KK)
DO 22 I=1,N
22 S(KJ,I)=BETA(I)
A=XE(2,1)-XE(1,1)
B=XE(3,2)-XE(2,2)
XL(1)=0.

```

```

XL(2)=A
XL(3)=A
XL(4)=0.
XL(5)=A/2.
YL(1)=0.
YL(2)=0.
YL(3)=B
YL(4)=B
YL(5)=B/2.
DO 41 I=1,4
V(5*I-4)=BETA(1)+BETA(4)*YL(I)+BETA(6)*XL(I)+BETA(10)*YL(I)**2+
CBETA(12)*XL(I)**2+BETA(14)*XL(I)*YL(I)
V(5*I-3)=BETA(2)+BETA(5)*XL(I)+BETA(7)*YL(I)+BETA(11)*XL(I)**2+
CBETA(15)*XL(I)*YL(I)+BETA(13)*YL(I)**2
V(5*I-2)=BETA(3)+BETA(8)*YL(I)+BETA(9)*XL(I)+(BETA(12)+BETA(13))
C*XL(I)*YL(I)+BETA(16)*XL(I)**2+BETA(17)*YL(I)**2
V(5*I-1)=BETA(6)-BETA(8)+XL(I)*BETA(12)-XL(I)*BETA(13)+YL(I)*
CBETA(14)-2.*YL(I)*BETA(17)
V(5*I)=BETA(7)-BETA(9)+YL(I)*BETA(13)-YL(I)*BETA(12)+XL(I)*
CBETA(15)-2.*XL(I)*BETA(16)
41 CONTINUE
DO 58 I=1,4
WRITE(5,106) KJ,NO(I),V(5*I-4),V(5*I-3),V(5*I-2),V(5*I-1),V(5*I)
106 FORMAT(2X,I3,4X,I3,3X,5E15.4)
58 CONTINUE
800 CONTINUE
WRITE(5,120)
120 FORMAT(///10X'REACOES DE APOIO'///' ELEM NO '9X'VX'13X'VY'
*/)
DO 2 I=1,NE
DO 2 IV=1,NNDP
DO 2 J=1,NNPE
IF(NA(IV)-NEL(I,J)) 2,3,2
3 IF(IA(IV,3)) 2,4,2
4 VX=S(I,6)-2.*S(I,8)-2.*S(I,13)*XL(J)+YL(J)*S(I,14)-4.*YL(J)*S(I,17
C)
VY=S(I,7)-2.*S(I,9)-2.*YL(J)*S(I,12)+XL(J)*S(I,15)-4.*XL(J)*
CS(I,16)
WRITE(5,121) I,NA(IV),VX,VY
121 FORMAT(2X,I3,4X,I3,3X,2E15.7)
2 CONTINUE
RETURN.
END

// DUP
*STORE WS UA TENS5 DEC3
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*EXTENDED PRECISION
*ONE WORD INTEGERS
SUBROUTINE HMT(XE,TU,H)

```

```
DIMENSION XE(8,2),H(17,17)
```

```
CALCULO DA MATRIZ H (PARCELA DEVIDO A FLEXAO)
```

```
AL E BL LADDS A E B DO ELEMENTO
```

```
AL=XE(2,1)-XE(1,1)
```

```
BL=XE(3,2)-XE(2,2)
```

```
A2=AL*AL*BL/2.
```

```
B2=AL*BL*BL/2.
```

```
A3=AL**3*BL/3.
```

```
B3=AL*BL**3/3.
```

```
V=(1.+TU)*2.
```

```
AB=(AL*BL)**2/4.
```

```
N=17
```

```
DO 2 I=1,N
```

```
DO 2 J=1,N
```

```
2 H(I,J)=0.
```

```
H(1,1)=AL*BL
```

```
H(1,2)=-H(1,1)*TU
```

```
H(2,2)=H(1,1)
```

```
H(3,3)=H(1,1)*V
```

```
H(1,4)=B2
```

```
H(2,4)=-H(1,4)*TU
```

```
H(2,5)=A2
```

```
H(1,5)=-H(2,5)*TU
```

```
H(1,6)=H(2,5)
```

```
H(2,6)=H(1,5)
```

```
H(1,7)=H(2,4)
```

```
H(2,7)=H(1,4)
```

```
H(3,8)=B2*V
```

```
H(3,9)=A2*V
```

```
H(4,4)=B3
```

```
H(4,5)=-AB*TU
```

```
H(4,6)=A3
```

```
H(4,7)=-H(4,4)*TU
```

```
H(5,5)=A3
```

```
H(5,6)=-H(5,5)*TU
```

```
H(5,7)=AB
```

```
H(6,6)=H(5,5)
```

```
H(6,7)=H(4,5)
```

```
H(7,7)=H(4,4)
```

```
H(8,8)=B3*V
```

```
H(8,9)=AB*V
```

```
H(9,9)=A3*V
```

```
H(1,10)=B3
```

```
H(2,10)=-B3*TU
```

```
H(1,11)=-A3*TU
```

```
H(2,11)=A3
```

```
H(1,12)=A3
```

$H(2,12)=H(1,11)$
 $H(1,13)=H(2,10)$
 $H(2,13)=H(1,10)$
 $H(1,14)=AB$
 $H(2,14)=-AB*TU$
 $H(1,15)=H(2,14)$
 $H(2,15)=AB$
 $H(3,12)=AB*V$
 $H(3,13)=AB*V$
 $A6=AL**3*BL**2/6.$
 $B6=AL**2*BL**3/6.$
 $A4=AL**4*BL/4.$
 $B4=AL*BL**4/4.$
 $A5=AL**5*BL/5.$
 $B5=AL*BL**5/5.$
 $A9=(AL*BL)**3/9.$
 $A8=AL**4*BL**2/8.$
 $B8=AL**2*BL**4/8.$
 $H(4,10)=B4$
 $H(4,11)=-A6*TU$
 $H(4,12)=A6$
 $H(4,13)=-B4*TU$
 $H(4,14)=B6$
 $H(4,15)=-B6*TU$
 $H(5,10)=-B6*TU$
 $H(5,11)=A4$
 $H(5,12)=-A4*TU$
 $H(5,13)=B6$
 $H(5,14)=-A6*TU$
 $H(5,15)=A6$
 $H(6,10)=B6$
 $H(6,11)=-A4*TU$
 $H(6,12)=A4$
 $H(6,13)=-B6*TU$
 $H(6,14)=A6$
 $H(6,15)=-A6*TU$
 $H(7,10)=-B4*TU$
 $H(7,11)=A6$
 $H(7,12)=-A6*TU$
 $H(7,13)=B4$
 $H(7,14)=-B6*TU$
 $H(7,15)=B6$
 $H(8,12)=B6*V$
 $H(8,13)=H(8,12)$
 $H(9,12)=A6*V$
 $H(9,13)=H(9,12)$
 $H(10,10)=B5$
 $H(10,11)=-A9*TU$
 $H(10,12)=A9$
 $H(10,13)=-B5*TU$

```

H(10,14)=B8
H(10,15)=-B8*TU
H(11,11)=A5
H(11,12)=-A5*TU
H(11,13)=A9
H(11,14)=-A8*TU
H(11,15)=A8
H(12,12)=A5+V*A9
H(12,13)=-A9*TU+V*A9
H(12,14)=A8
H(12,15)=-A8*TU
H(13,13)=B5+A9*V
H(13,14)=-B8*TU
H(13,15)=B8
H(14,14)=A9
H(14,15)=-A9*TU
H(15,15)=A9
H(3,16)=A3*V
H(3,17)=B3*V
H(8,16)=A6*V
H(8,17)=B4*V
H(9,16)=A4*V
H(9,17)=B6*V
H(12,16)=A8*V
H(12,17)=B8*V
H(13,16)=A8*V
H(13,17)=B8*V
H(16,16)=A5*V
H(16,17)=A9*V
H(17,17)=B5*V
DO 3 I=1,N
DO 3 J=1,N
3 H(J,I)=H(I,J)
RETURN
END

// DUP
*STORE      WS  UA  HMT          OEC3
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
**
SUBROUTINE GC (XE,G)
DIMENSION XE(8,2),G(17,12)
C
C  CALCULO DA MATRIZ G
C
C  AL E BL  LADOS A E B DO ELEMENTO
C
AL=XE(2,1)-XE(1,1)

```

```

BL=XE(3,2)-XE(2,2)
A=AL/6.
B=BL/6.
A2=AL*AL/6.
B2=BL*BL/6.
DO 10 I=1,17
DO 10 J=1,12
10 G(I,J)=0.
G(1,1)= B*3.
G(1,4)=-B*3.
G(1,7)= G(1,4)
G(1,10)=G(1,1)
G(2,2)= A*3.
G(2,5)=G(2,2)
G(2,8)=-G(2,2)
G(2,11)=G(2,8)
G(3,1)=G(2,8)
G(3,2)=G(1,7)
G(3,4)=G(3,1)
G(3,5)=G(1,10)
G(3,7)=G(2,2)
G(3,8)=G(3,5)
G(3,10)=G(3,7)
G(3,11)=G(3,2)
G(4,1)= B2
G(4,4)=-B2
G(4,7)= G(4,4)*2.
G(4,10)=-G(4,7)
G(5,2)= A2
G(5,5)=G(5,2)*2.
G(5,8)=-G(5,5)
G(5,11)=-G(5,2)
G(6,2)=-B2/2.
G(6,3)=-B*3.
G(6,4)=-AL*BL/2.
G(6,5)=-G(6,2)
G(6,6)=-G(6,3)
G(6,7)=G(6,4)
G(6,8)=G(6,2)
G(6,9)=G(6,6)
G(6,21)=G(6,5)
G(6,12)=G(6,3)
G(7,1)=-A2/2.
G(7,3)=-A*3.
G(7,4)=-G(7,1)
G(7,6)=G(7,3)
G(7,7)=G(7,1)
G(7,8)=-AL*BL/2.
G(7,9)=-G(7,6)
G(7,10)=G(7,4)

```

$G(7,11)=G(7,8)$
 $G(7,12)=G(7,9)$
 $G(8,2)=-B2/2.$
 $G(8,3)=BL/2.$
 $G(8,5)=-G(8,2)$
 $G(8,6)=-G(8,3)$
 $G(8,7)=-G(6,4)$
 $G(8,8)=5.*BL*BL/12.$
 $G(8,9)=G(8,6)$
 $G(8,10)=G(8,7)$
 $G(8,11)=-G(8,8)$
 $G(8,12)=-G(8,9)$
 $G(9,1)=G(7,1)$
 $G(9,3)=-G(7,3)$
 $G(9,4)=-5.*AL*AL/12.$
 $G(9,5)=G(8,7)$
 $G(9,6)=G(9,3)$
 $G(9,7)=-G(9,4)$
 $G(9,8)=G(9,5)$
 $G(9,9)=-G(9,6)$
 $G(9,10)=-G(9,1)$
 $G(9,12)=G(9,9)$
 $C=AL**3/12.$
 $D=BL**3/12.$
 $AB=AL*AL*BL/6.$
 $BA=BL*BL*AL/6.$
 $G(10,1)=0$
 $G(10,4)=-D$
 $G(10,7)=G(10,4)*3.$
 $G(10,10)=-G(10,7)$
 $G(11,2)=C$
 $G(11,5)=G(11,2)*3.$
 $G(11,8)=-G(11,5)$
 $G(11,11)=-G(11,2)$
 $G(12,4)=-AB*3.$
 $G(12,5)=AL*BL*BL/4.$
 $G(12,6)=G(8,7)$
 $G(12,7)=-AB/2.$
 $G(12,8)=G(12,5)$
 $G(12,10)=-G(12,7)$
 $G(12,12)=-G(12,6)$
 $G(13,5)=BA/2.$
 $G(13,6)=G(7,11)$
 $G(13,7)=AL*AL*BL/4.$
 $G(13,8)=-G(13,5)$
 $G(13,10)=G(13,7)$
 $G(13,11)=-BA*3.$
 $G(13,12)=-G(13,6)$
 $G(14,2)=-BL**3/30.$
 $G(14,3)=-3.*BL*BL/20.$

```

G(14,4)=-BA
G(14,5)=-G(14,2)
G(14,6)=-G(14,3)
G(14,7)=-BA*2.
G(14,8)=-BL**3./20.
G(14,9)=7.*BL*BL/20.
G(14,11)=-G(14,8)
G(14,12)=-G(14,9)
G(15,1)=-AL**3/30.
G(15,3)=-3.*AL*AL/20.
G(15,4)= AL**3/20.
G(15,6)=-7.*AL*AL/20.
G(15,7)=-G(15,4)
G(15,8)=-AB*2.
G(15,9)=-G(15,6)
G(15,10)=-G(15,1)
G(15,11)=-AB
G(15,12)=-G(15,3)
G(16,1)=-C/5.
G(16,3)=3.*AL*AL/10.
G(16,4)=-7.*AL**3/20.
G(16,5)=AB*3.
G(16,6)=7.*AL*AL/10.
G(16,7)=-G(16,4)
G(16,8)=G(16,5)
G(16,9)=-G(16,6)
G(16,10)=-G(16,1)
G(16,12)=-G(16,3)
G(17,2)=-D/5.
G(17,3)=3.*BL*BL/10.
G(17,5)=-G(17,2)
G(17,6)=-G(17,3)
G(17,7)=BA*3.
G(17,8)=7.*BL**3/20.
G(17,9)=-7.*BL*BL/10.
G(17,10)=G(17,7)
G(17,11)=-G(17,8)
G(17,12)=-G(17,9)

```

RETURN

END

// DUP

*STORE WS UA GC DEC3

// FOR

*LIST SOURCE PROGRAM

*ONE WORD INTEGERS

*EXTENDED PRECISION

SUBROUTINE HIBR1 (XE,EE,TU,TH,SE,OC,T,NCD,IS,GCS,HCS,KK1)
 DIMENSION XE(8,2),SE(12,12),H(17,17),G(17,12),GH(12,17),T(12),
 CHF(17),GF(12)

C

```

C      MONTAGEM DAS MATRIZES KE E QE
C
      N=17
      CALL HFGF(XE,EE,TU,TH,HF,GF,NCD,QC,IS,GCS,HCS)
      CALL ISIBR(XE,EE,TU,TH,H,NCD,QC,IS,GCS,HCS)
      WRITE(711,'KK1) ((H(I,J);J=1,N),I=1,N)
      CALL GC(XE,G)
      DO 11 I=1,12
      DO 11 J=1,N
      GH(I,J)=0.
      DO 11 KK=1,N
11  GH(I,J)=GH(I,J)+G(KK,I)*H(KK,J)
      DO 12 I=1,12
      DO 12 J=1,12
      SE(I,J)=0.
      DO 12 KK=1,N
12  SE(I,J)=SE(I,J)+GH(I,KK)*G(KK,J)
      IF(NCD) 21,21,9
21  CONTINUE
      DO 27 I=1,12
27  T(I)=0.
      GO TO 23
      9 DO 17 I=1,12
      T(I)=0.
      DO 16 KK=1,N
16  T(I)=T(I)+GH(I,KK)*HF(KK)
17  T(I)=T(I)+GF(I)
      WRITE(5,200)
200 FORMAT(//'  VETOR DE CARGA DO ELEMENTO '///)
      WRITE(5,210) (T(I),I=1,12)
210 FORMAT(6E15.7)
23  CONTINUE
      RETURN
      END

// DUP
*STORE      WS  UA  HIBR1          OEC3
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*EXTENDED PRECISION
*ONE WORD INTEGERS
**
      SUBROUTINE HFGF(XE,EE,TU,TH,HF,GF,NCD,QC,IS,GCS,HCS)
      DIMENSION HF(17),GF(12),XE(8,2)

C      CALCULO DA MATRIZ HP
C      CALCULO DA MATRIZ GP
C
C      AL E BL  LADOS A E B DO ELEMENTO
C
      N=17

```

```

AL=XE(2,1)-XE(1,1)
BL=XE(3,2)-XE(2,2)
C4=AL*BL
C5=AL*AL*BL
C6=AL*BL*BL
C7=AL**3*BL
C8=AL*BL**3
IF(IS) 33,22,33
22 U=-QC*EE*TH*HCS/(4.*GCS)
EIV=2./(EE*TH*HCS*HCS)
GO TO 44
33 U=-QC*(1.+TU)*TH*TH*0.1
EIV=12./(EE*TH**3)
EPL=TH*TH*TU*QC*0.1
44 CONTINUE
DO 91 I=1,N
91 HF(1)=0.
DO 92 I=1,12
92 GF(I)=0.
IF(NCD) 52,52,17
17 CONTINUE
HF(3)=C4*C4*QC*(1.+TU)*0.25
HF(6)=C5*0.5*U
HF(7)=C6*0.5*U
HF(8)=C4*C4*BL*QC*(1.+TU)/6.-C5*0.5*U
HF(9)=C4*C4*AL*QC*(1.+TU)/6.-C6*0.5*U
HF(12)=C4**3*QC*(1.+TU)/9.+(C7-C8)*U/3.
HF(13)=C4**3*QC*(1.+TU)/9.+(C8-C7)*U/3.
HF(14)=C4*C4*U/4.
HF(15)=C4*C4*U/4.
HF(16)=C7*C4*QC*(1.+TU)/8.-C4*C4*U/2.
HF(17)=C8*C4*QC*(1.+TU)/8.-C4*C4*U/2.
GF(5)=-C6*QC/24.
GF(6)=C4*QC/4.
GF(7)=-5.*C5*QC/24.
GF(8)=-5.*C6*QC/24.
GF(9)= C4*QC/2.
GF(10)=-C5*QC/24.
GF(12)=C4*QC/4.
IF(IS) 6,6,8
8 CONTINUE
HF(1)=HF(1)-EPL*C4
HF(2)=HF(2)-EPL*C4
HF(4)=HF(4)-EPL*C6/2.
HF(5)=HF(5)-EPL*C5/2.
HF(6)=HF(6)-EPL*C5/2.
HF(7)=HF(7)-EPL*C6/2.
HF(10)=HF(10)-EPL*C8/3.
HF(11)=HF(11)-EPL*C7/3.
HF(12)=HF(12)-EPL*C7/3.

```

```

HF(13)=HF(13)-EPL*C8/3.
HF(14)=HF(14)-EPL*C4*C4/4.
HF(15)=HF(15)-EPL*C4*C4/4.
6 CONTINUE
DO 7 I=1,N
7 HF(I)=HF(I)*EIV
52 CONTINUE
RETURN
END

// DUP
*STORE      WS  UA  HFGF          GEC3
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*EXTENDED PRECISION
*ONE WORD INTEGERS
SUBROUTINE ISIBR(XE,EE,TU,TH,H,NGD,GC,IS,GCS,HCS)
DIMENSION XE(8,2),H(17,17),LU(17),MU(17),F(17,17),HF(17)

C
C CALCULO DA MATRIZ H (PARCELA DEVIDO AO CORTANTE)
C
C CALCULO DA MATRIZ INVERSA DE H
C
C AL E BL LADOS A E B DO ELEMENTO
C
N=17
CALL HMT(XE,TU,H)
DO 41 I=1,N
DO 41 J=1,N
41 F(I,J)=0.
AL=XE(2,1)-XE(1,1)
BL=XE(3,2)-XE(2,2)
C4=AL*BL
C5=AL*AL*BL
C6=AL*BL*BL
C7=AL**3*BL
C8=AL*GL**3
F(6,6)=C4
F(6,8)=-F(6,6)
F(7,7)=F(6,6)
F(7,9)=-F(6,6)
F(8,8)=F(6,6)
F(9,9)=F(6,6)
F(6,12)=C5*0.5
F(6,13)=-F(6,12)
F(6,14)=C6*0.5
F(7,12)=-F(6,14)
F(7,13)=F(6,14)
F(7,15)=F(6,12)
F(8,12)=F(6,13)
F(8,13)=F(6,12)

```

```

F(8,14)=F(7,12)
F(9,12)=F(7,13)
F(9,13)=F(7,12)
F(9,15)=F(6,13)
F(12,12)=(C7+C8)/3.
F(12,13)=-F(12,12)
F(12,14)=C4**2/4.
F(12,15)=-F(12,14)
F(13,13)=F(12,12)
F(13,14)=F(12,15)
F(13,15)=F(12,14)
F(14,14)=C8/3.
F(15,15)=C7/3.
F(6,17)=-C6
F(7,16)=-C5
F(8,17)=C6
F(9,16)=C5
F(12,16)=C4*C4/2.
F(12,17)=-F(12,16)
F(13,16)=F(12,17)
F(13,17)=F(12,16)
F(14,17)=-2.*C8/3.
F(15,16)=-2.*C7/3.
F(16,16)=4.*C7/3.
F(17,17)=4.*C8/3.
DO 45 I=1,N
DO 45 J=1,N
45 F(J,I)=F(I,J)
IF(IS) 33,22,33
22 PZ=HCS*EE*TH/(2.*GCS)
E=EE*TH*HCS*HCS/2.
GO TO 44
33 PZ=(1.+TU)*TH*TH*0.2
E=EE*TH**3/12.
44 CONTINUE
DO 42 I=1,N
DO 42 J=1,N
F(I,J)=F(I,J)*PZ
H(I,J)=H(I,J)+F(I,J)
42 F(I,J)=H(I,J)
CALL EMINV(H,N,DET,LU,MU)
DO 32 I=1,N
DO 37 J=1,N
HF(J)=0.
DO 37 KK=1,N
37 HF(J)=HF(J)-F(I,KK)*H(KK,J)
HF(I)=1.+HF(I)
DO 38 L=1,N
38 F(I,L)=HF(L)
32 CONTINUE

```

```

DO 25 I=1,N
HF(I)=0.
DO 25 J=1,N
25 HF(I)=HF(I)+ABS(F(I,J))
VAR=HF(1)
DO 26 I=1,N
IF(HF(I)-VAR) 26,26,28
28 VAR=HF(I)
26 CONTINUE
IF(0.00001-VAR) 86,86,88
86 CONTINUE
WRITE(5,659) VAR
659 FORMAT(///' NORMA DA MATRIZ ERRO ='E15.7//)
88 CONTINUE
DO 36 I=1,N
DO 36 J=1,N
36 H(I,J)=H(I,J)*E
RETURN
END

// DUP
*STORE WS UA ISIBR OEC3
// FOR
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
*LIST SOURCE PROGRAM
SUBROUTINE TENS2(XE,EE,TU,TH,BETA,P,NEL,NE,NNPE,X,Y,S,NCD,QC,IS,
CGCS,HCS,ANNDP)
DIMENSION XE(8,2),H(17,17),BETA(17),G(17,12),P(147),Q(12),
*NEL(50,4),X(50),Y(50),S(147,27),V(20),XL(5),YL(5),Z(17),NO(4),
*HF(17),GF(12)

C
C CALCULO DOS PARAMATROS BETA E DOS ESFORCOS RESULTANTES
C
C AL E BL LADOS A E B DO ELEMENTO.
C
WRITE(5,105)
105 FORMAT(////10X'ESFORCOS RESULTANTES'////' ELEM NO '9X'MX'13X'M
*'Y'13X'MXY'12X'QX'13X'QY'//)
N=17
KK1=1
DO 800 KJ=1,NE
DO 180 I=1,NNPE
J=NEL(KJ,I)
NO(I)=J
XE(I,1)=X(J)
XE(I,2)=Y(J)
Q(3*I-2)=P(3*J-2)
Q(3*I-1)=P(3*J-1)
Q(3*I)=P(3*J)
18 CONTINUE

```

```

      IF(KJ-1) 242,241,242
241 CONTINUE
      CALL HFGF(XE,FF,TU,TH,HF,GF,NCD,OC,IS,GCS,HCS)
      READ(711'KK1)((H(I,J),J=1,N),I=1,N)
      CALL GC(XE,G)
242 CONTINUE
      DO 31 I=1,N
        Z(I)=0.
        DO 31 KK=1,12
          31 Z(I)=Z(I)+G(I,KK)*Q(KK)
          IF(NCD) 51,51,52
          52 DO 53 I=1,N
            53 Z(I)=Z(I)-HF(I)
          51 CONTINUE
          DO 34 I=1,N
            BETA(I)=0.
            DO 34 KK=1,N
          34 BETA(I)=BETA(I)+H(I,KK)*Z(KK)
            DO 22 I=1,N
          22 S(KJ,I)=BETA(I)
            A=XE(2,1)-XE(1,1)
            B=XE(3,2)-XE(2,2)
            XL(1)=0.
            XL(2)=A
            XL(3)=A
            XL(4)=0.
            XL(5)=A/2.
            YL(1)=0.
            YL(2)=0.
            YL(3)=B
            YL(4)=B
            YL(5)=B/2.
            DO 41 I=1,4
              V(5*I-4)=BETA(1)+BETA(4)*YL(I)+BETA(6)*XL(I)+BETA(10)*YL(I)**2+
              CBETA(12)*XL(I)**2+BETA(14)*XL(I)*YL(I)
              V(5*I-3)=BETA(2)+BETA(5)*XL(I)+BETA(7)*YL(I)+BETA(11)*XL(I)**2+
              CBETA(15)*XL(I)*YL(I)+BETA(13)*YL(I)**2
              V(5*I-2)=BETA(3)+BETA(8)*YL(I)+BETA(9)*XL(I)+(BETA(12)+BETA(13))
              C*XL(I)*YL(I)+BETA(16)*XL(I)**2+BETA(17)*YL(I)**2
              V(5*I-1)=BETA(6)-BETA(8)+XL(I)*BETA(12)-XL(I)*BETA(13)+YL(I)*
              CBETA(14)-2.*YL(I)*BETA(17)
              V(5*I)=BETA(7)-BETA(9)+YL(I)*BETA(13)-YL(I)*BETA(12)+XL(I)*
              CBETA(15)-2.*XL(I)*BETA(16)
            41 CONTINUE
            DO 58 I=1,4
              WRITE(5,106) KJ,NO(I),V(5*I-4),V(5*I-3),V(5*I-2),V(5*I-1),V(5*I)
106 FORMAT(2X,I3,4X,I3,3X,5E15.4)
          58 CONTINUE
        800 CONTINUE
        WRITE(5,100)

```

```
100 FORMAT(// ' VALORES DOS PARAMETROS BETA PARA CADA ELEMENTO' //  
* ' ELEMENTO          BETA 1   A          BETA 17 ' //)  
DO 29 KJ=1,NE  
WRITE(5,101) KJ, (S(KJ,I), I=1,9)  
101 FORMAT(4X, I3, 5X, 9E12.4)  
WRITE(5,301) (S(KJ,I), I=10,17)  
301 FORMAT(12X, 8E12.4)  
29 CONTINUE  
RETURN  
END
```

```
// DUP  
#STORE      WS  UA  TENS2          DEC3
```

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 . Timoshenko, S.P. and Woinowski-Krieger, S. - Theory of Plates and Shells - McGraw-Hill Kogakusha, 1959.
- 2 . Zienkiewicz, O.C. - The Finite Element Method in Engineering Science - McGraw-Hill, 1971.
- 3 . Langhaar, H.L. - Energy Method in Applied Mechanics - John Wiley and Sons, Inc., 1962 .
- 4 . Washizu, K. - Variational Methods in Elasticity and Plasticity - Pergamon Press, 1968.
- 5 . Tottenham, H. and Brebbia, C. - Finite Element Techniques in Structural Mechanics - Southampton University Press 1970.
- 6 . Pian, T.H. and Tong, P. - Basis of Finite Element Methods for Solid Continua - International Journal for numerical Methods in Engineering, Vol. 1, Nº 1, 1969.
- 7 . Pian, T.H.H. - Element Stiffness Matrices for Boundary Compatibility and Prescribed Boundary Stresses - Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics - Affd1-TR-66-80,457-427 (1965).
- 8 . Pian, T.H.H. and Tong, P. - Rationalization in Deriving Element Stiffness Matrix by Assumed Stress Approach - 2nd Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics Wright Patterson Air Force Base, Ohio, 1968.

- 9 . Pian, T.H.H. - Plate Bending Analysis Using Assumed Stress Methods - Lecture Notes for the Special Summer Program 1.59S on Finite Element Methods in Solid Mechanics, School of Engineering M.I.T. 24-28 June, 1968.
10. Tong, P. and Pian, T.H.H. - A variational Principle and the Convergence of a Finite Element Method Based on Assumed Stress Distribution - Int. J. Solids Structures, Vol. 5, 1969.
11. Tong, P. and Pian, T.H.H. - Bounds to the Influence Coefficients by the Assumed Stress Method. Int. J. Solids Structures, Vol. 6, 1970.
12. Reissner, E. - The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates - Journal of Applied Mechanics, Vol 12, 1945.
13. Charles W. Pryor, Richard M. Barker and Daniel Frederick - Finite Element Bending Analysis of Reissner Plates - J. of the Engineering Mechanics Division Asce, December, 1970.
14. Charley, T.G. and Langhaar, H.L. - Transverse Shearing Stress in Rectangular Plates - J. of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 94 NO EM1, Proc. Paper 5795, February, 1968
15. Salerno, V.L. and Goldberg, M.A. - Effect of Shear Deformation on the Bending of Rectangular Plates - Journal of Applied Mechanics, Vol 27, 1960

16. Smith, I.M. - A finite Element Analysis for Moderately Thick Rectangular Plates in Bending - Int. J. of The Mechanical Sciences, Vol 10, 1968.
17. Anderheggen, E. - Finite Element Plate Bending Equilibrium Analysis - Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 95 Nº EM4, Proc. Paper 6715, August, 1969.
18. Herrman, L.R. - A Bending Analysis for Plates - Proc. I Conference on Matrix Method in Structural Mechanics, Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.
19. Clough, R.W. and Felippa, C.A. - A Refined Quadrilateral Element for Analysis of Plate Bending - Proc. II Conf. on the Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Patterson AFB, Ohio, 1968.
20. Vasconcellos, A. - O Método dos Elementos Finitos: Fundamentos Teóricos - Automatização - Aplicações a Problemas de Placas e de Elasticidade Plana. Tese de D.Sc. , COPPE, 1970.
21. Serven, R.T. and Taylor, P.R. - The Finite Element Method for Flexure of Slabs when Stress Distributions are Assumed - Proc. Instn. Civ. Engrs., 34, 153-170 (1966)
22. Fraeijs de Veubeke, B. and Sander, G. - An Equilibrium Model for Plate Bending - Int. Jnl. Solids & Structures, 4, 447-468, 1968.

23. Plantema, F.J.- Sandwich Construction - John Wiley and Sons,
1966.