Jurnal Natural
Vol. 14, No. 2, 39-41, September 2014
ISSN 1141-8513

REVIEW OF IRRATIONAL NUMBERS

Hafnani & Rahma Zuhra

Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Syiah Kuala, Darussalam, Banda Aceh

Abstract. Study of the set properties is simple and rarely investigated at the Department of Mathematics. This paper examines some set properties on the irrational numbers. The study is about the properties applying to the real numbers which are a complete ordered field. However, the results of this study show that those properties do not imply to the irrational numbers, but the ordered property. The prove of the irrational numberby some examples is demonstrated in this study.

Keywords: Real number, rational number, irrational number

Pendahuluan

Himpunan bilangan riil (dinotasikan dengan R) merupakan himpunan dari bilangan positif, negatif, dan nol. Salah satu sifat penting dari bilangan riil adalah bilangan ini dapat direpresentasikan dengan titik-titik yang dapat disusun menjadi sebuah garis lurus. Secara umum, himpunan bilangan riil dibagi menjadi dua himpunan bilangan yang saling lepas, yaitu himpunan bilangan rasional (dinotasikan dengan Q) dan himpunan bilangan irasional (dinotasikan denganQ′). Bilangan rasional itu sendiri adalah bilangan riil yang dapat dinyatakan sebagai pembagian dari dua buah bilangan bulat (dengan pembagi bukan nol). Sedangkan bilangan irasional adalah bilangan riil yang selain bilangan rasional. Bila dinyatakan dalam bentuk desimal, bilangan irasional merupakan bilangan desimal yang terus berjalan dan tak berulang. Contoh bilangan irasional adalah bilangan $\sqrt{2}$ yang hasilnya adalah 1,414213562... dan bilangan desimalnya akan terus berjalan. Bilangan $\sqrt{3}$, e dan πadalah contoh lain dari bilangan irasional.

Secara histori, bilangan irasional ditemukan pertama kali oleh seorang filosofi pitagoras yang bernama Hippasus (500 SM) ketika ia mengukur diagonal suatu persegi yang mempunyai sisi yang sama. Kedua sisi tersebut adalah satu. Dari pengukuran diagonal tersebut dia menemukan suatu bilangan, yaitu $\sqrt{2}$ yang tidak dapat diubah dalam bentuk pecahan. Sampai akhirnya, bilangan tersebut dinamakan dengan bilangan irasonal.

Dari keunikan bilangan ini penulis melalui tulisan ini ingin mengkaji sifat-sifat bilangan irasional dan menelusuri apakah sifat-sifat yang berlaku pada R

juga berlaku pada Q′.Sebagai formula dasar,beberapa sifat seperti sifat tidak terhitung Q′ dan kepadatan Q′ di R yang telah dijelaskan melalui tulisan[3,4], juga kembali akan dipaparkan pada tulisan ini sebagai teorema pendukung untuk membuktikan teorema-teorema lain. Sebagai tambahan, pembuktian beberapa contoh bilangan irasional, seperti hubungan antara bilangan prima dengan irasional dan pembuktian ekspresi $^{2}\log(7)$ merupakan bilangan irasional adalah bagian yang difokuskan pada tulisan ini. Adapun metode pembuktian yang digunakan adalahdengan cara tidak langsungdengan menggunakandefinisi bilangan irasional itu sendiri.

Landasan Teori

Bilangan riil mempunyai beberapa sifat. Sifat-sifat tersebut adalah Sifat Aljabar R, Sifat tak terhitung pada R, dan Kelengkapan R.

Sifat Aljabar R

Sifat-sifat aljabar dapat diterapkan untuk operasi penjumlahan dan perkalian pada himpunan bilangan asli (N), himpunan bilangan cacah (C), bilangan bulat (Z), bilangan rasional (Q), dan bilangan riil (R). Menurut tulisan [2] terdapat 12 sifat dari Aljabar untuk bilangan N, C, Z, Q, dan R. Tabel 1 memperlihatkan tabulasi dari keduabelas sifat aljabar terhadap keempat bilangan tersebut.

Tabel 1. Sifat-sifat operasi yang berlaku pada tiap himpunan bilangan

No	Sifat-sifat Operasi	Himpunan Bilangan				
		N	C	Z	Q	R
1	Identitas Penjumlahan (0), $0+a=a+0=a$	×	√	√	√	√
2	Identitas Perkalian (1), $1\cdot a=a\cdot 1=a$	√	√	√	√	√
3	Komutatif Penjumlahan $a+b=b+a$	√	√	√	√	√
4	Komutatif Perkalian $ab=ba$	√	√	√	√	√
5	Assosiatif Penjumlahan $(a+b)+c=a+(b+c)$	√	√	√	√	√
6	Assosiatif Perkalian $(ab)c=a(bc)$	√	√	√	√	√
7	Invers Penjumlahan $a+(-a)=0$	×	×	√	√	√
8	Invers Perkalian $a(1/a)=1$	×	×	×	√	√
9	Distributif Perkalian terhadap Penjumlahan $a(b+c)=ab+ac$	√	√	√	√	√
10	Tertutup terhadap Operasi Invers Penjumlahan $a+(-b)=0$	×	×	√	√	√
11	Tertutup terhadap Operasi Invers Perkalian $a(1/b)=1$	×	×	×	√	√
12	Tertutup terhadap Operasi Pangkat $a^b=c$	×	×	×	×	√

Sifat Tak Terhitung pada R. Menurut tulisan [3,4], himpunan R adalah himpunan tak terhitung (*denumerable*), sedangkanQ merupakan himpunan terhitung (*numerable*). Berdasarkan sifat Gabungan Berhingga, setiap bilangan terhitung digabungkan dengan himpunan tak terhitung, maka akan menghasilkan himpunan tak terhitung. Dari definisi bilangan R, R = Q + Q′, dan sifat Gabungan Berhingga, maka diperoleh Q′ merupakan himpunan tak terhitung.

Kelengkapan R. Himpunan R dikatakan lengkap, karena R ada satu Aksioma Kelengkapan. Aksioma Kelengkapanadalah setiap himpunan bagian takkosong dari R yang terbatas di atas dan mempunyai supremum di R. Sifat kelengkapan ini tidak dimiliki oleh Q. Pada tulisan [4] diperlihatkan bahwa misalkan$A$= $\{r\in$ Q : $0 \le r< \sqrt{2}\}$. Himpunan A terbatas di atas oleh $\sqrt{2}$ dan mempunyai supremum $\sqrt{2}$. Namun bila dipandang A sebagai himpunan bagian Q, A tidak mempunyai supremum di Q.

Himpunan Q dikatakan "padat (*dense*)" di R jika ada satu bilangan rasional yang berada diantara dua bilangan riil sembarang. Akibat dari sifat kelengkapan R, maka Q′ juga "padat (*dense*)"di R. Pembuktian kedua sifat ini dapat dilihat pada tulisan [3,4].

Hasil dan Pembahasan

Sifat Aljabar Q′. Berdasarkan Tabel 1, kita dapat mengatakan bahwa hanya R dan Q yang merupakan lapangan. Jelas bahwa Q′ bukan lapangan, karena tidak mempunyai identitas terhadap operasi penjumlahan dan perkalian. Akan tetapi mereka mempunyai unsur invers dengan unsur identitas 0 dan 1 terhadapkedua operasi itu. Dengan kata lain, Q′ tidak tertutup terhadap operasi invers. Sifat tidak tertutup ini secara rinci dapat dijelaskan bahwa penjumlahan dan perkalian dua buah bilangan irasional tidak selalu menghasilkan bilangan irasional. Misalnya $\sqrt{2}$ + ($-\sqrt{2}$) = 0 dan $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$ = 2, sementara $\sqrt{2}$ dan $-\sqrt{2}$ adalah bilangan irasional, sedangkan 0 dan 2 bukan bilangan irasional.

Bilangan irasional dapat dihasilkan dari penjumlahan bilangan rasional dengan bilangan irasional. Hal ini dapat dibuktikan dengan kontradiksi. Misalkan x bilangan rasional dan y bilangan irasional. Asumsikan$x+y$ adalah bilangan rasional. Maka x dan $x+y$ dapat dinyatakan sebagai $x=m/n$ dan $x+y=p/q$, dengan $m, n, p, q\in$ Z dan $n\neq 0$, $q\neq 0$. Dengan demikian diperoleh $y=(pn-qm)/qn$. Karena sifat ketertutupan pada Z, sehingga $pn-qm$, $qn\in$ Z, $qn\neq 0$. Atau $x+y\in$ Q. Terjadi kontradiksi dengan asumsi. Jadi $x+y$ haruslah irasional.

Dengan cara serupa di atas dapat dibuktikan bahwa bilangan irasional dapat juga dihasilkan dari perkalian antara bilangan rasional yang tidak nol dan bilangan irasional.

Q′ Tidak Lengkap tetapi Padat di R. Sebelum membahas mengenai sifat kepadatan Q′ di R, akan diselidiki terlebih dahulu apakah sifat kelengkapan R diturunkan pada Q′. Asumsikan himpunan B = $\{b\in$ Q′: $0 \le b< 1\}$. Himpunan B tidak mempunyai supremum bila B dipandang sebagai himpunan bagian Q′, karena supremum B adalah 1 $\notin$ Q′. Jadi Q′ tidak lengkap.

Dengan menggunakan sifat kepadatan Q′ di R, dapat ditunjukkan bahwa jika x dan y adalah bilangan riil dengan $x<y$, maka terdapat tak berhingga banyaknya bilangan irasional dalam interval $[x, y]$. Yaitu, jika $x, y \in$ R, maka terdapat $a_1 \in$ Q′ sedemikian sehingga $x<a_1<y$. Akibatnya interval $[x, y]$ mempunyai partisi interval $[x, a_1]$ dan $[a_1, y]$. Sifat (teorema) kepadatan ini dikenakan kembali pada kedua subinterval ini, sehingga partisi interval $[x, y]$ menjadi $[x, a_2]$, $[a_2, a_1]$, $[a_1, a_3]$ dan $[a_3, y]$ untuk $a_1, a_2, a_3 \in$ Q′. Proses ini diulang untuk memperoleh $a_i \in$ Q′ untuk $i \in$N. Hal yang sama juga berlaku untuk bilangan rasional, yaitu terdapat tak berhingga banyaknya bilangan rasional dalam interval $[x, y]$. Namun mengingat bahwa Q merupakan himpunan terhitung sedangkan Q′ merupakan himpunan tak terhitung, secara intuitif bilangan irasional lebih banyak daripada bilangan rasional. Atau dapat dikatakan bahwa Q′ lebih “padat” daripada Q.

Contoh Pembuktian Beberapa Bilangan Irasional

Secara umum untuk menunjukkan sebuah bilangan adalah irasional dengan pembuktian tidak langsung. Disini hanya mengambil dua contoh anggota Q′.

Contoh 1. Jika p adalah bilangan prima, maka $\sqrt{p}$ adalah bilangan irasional.

Bukti: Andaikan $\sqrt{p}$ adalah rasional. Karena itu dapat ditulis $\sqrt{p}=m/n$ dengan $m, n\in$ Z, $n\neq 0$, dan m dan n tidak mempunyai faktor pembagi bersama selain 1. Diperoleh $p= (m/n)^2$ atau $pn^2=m^2$. Jadi m^2 adalah kelipatan p. Karena p adalah bilangan prima, sehingga m juga kelipatan p atau $m=kp$ untuk suatu $k\in$ Z. Akibatnya $pn^2=k^2p^2$ atau $n^2=k^2p$. Jadi n^2 adalah kelipatan p dan dengan alasan sama seperti sebelumnya, n juga kelipatan p. Dengan demikian m dan n adalah kelipatan p. Hal ini bertentangan dengan m dan n tidak mempunyai faktor pembagi bersama selain 1. Jadi haruslah $\sqrt{p}$ adalah bilangan irasional.■

Contoh 2. Bilangan ${}^2\log 7$ adalah bilangan irasional.
Bukti: Andaikan ${}^2\log 7$ adalah rasional. Jadi dapat ditulis sebagai ${}^2\log 7 =m/n$ atau $7 = 2^{m/n}$ dengan$m$, $n\in$ Z, $n\neq 0$, dan m dan n tidak mempunyai faktor pembagi bersama selain 1.
Dari persamaan $7 = 2^{m/n}$, jelas bahwa ruas kiri merupakan bilangan bulat ganjil, maka ruas kanan juga harus demikian (tepatnya 7). Sebelumnya, untuk membuat ruas kanan menjadi bilangan bulat maka m haruslah kelipatan dari n, misal $m = kn$ untuk suatu $k\in$ Z. Akibatnya $2^{m/n}=2^{kn/n}= 2^k$. Jika $k = 0$, maka $2^0= 1$; sedangkan 1 tidak sama dengan 7. Jika $k\geq 1$, maka ruas kanan merupakan bilangan bulat genap. Padahal ruas kiri merupakan bilangan bulat ganjil. Jadi ${}^2\log 7$ adalah bilangan irasional.■

Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan di atas, dapat disimpulkan bahwa sifat-sifat Q′ adalah sebagai berikut:

1. bukan lapangan, karena tidak mempunyai unsur identitas terhadap operasi penjumlahan dan perkalian;
2. merupakan himpunan tak terhitung;
3. himpunan yang tidak lengkap (tidak mempunyai Aksioma Kelengkapan);
4. lebih “padat” daripada Q disepanjang garis bilangan riil.

Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Dr. Marwan dan Dr.Siti Rusdiana atas bantuan dan arahannya.

Referensi

1. D. F. Belding and K. J. Mitchel, 1991, *Foundation of Analysis*, Prentice-Hall, Inc., New York.
2. I.M. Tirta, 2005, *Pengantar Dasar Matematika*, http://elearning.unej.ac.id/courses/CL7309/document/SlidePDM.pdf?cidReq=CL56f7, Tanggal akses 2 Agustus 2008.
3. R. G. Bartle and D. R. Sherbert, 2000, *Introduction to Real Analysis*, edisi ke-3, John Wiley and Son. Inc., New York.
4. S.R. Lay, 2005, *Analysis with an Introduction to Proof*, Prentice-Hall, Inc., New York.