



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO
Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto
Departamento de Engenharia de Minas
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mineral – PPGE



POROSIDADE DE SISTEMAS POLIDISPERSOS

DIOGO RODRIGUES PRADO

Ouro Preto – MG
setembro de 2015



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO
Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto
Departamento de Engenharia de Minas
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mineral – PPGEM

POROSIDADE DE SISTEMAS POLIDISPERSOS

AUTOR: DIOGO RODRIGUES PRADO

**Orientador: prof. JOSÉ AURÉLIO
MEDEIROS DA LUZ**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mineral da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte integrante dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mineral.

Área de concentração:
Tratamento de Minérios

Ouro Preto - MG
setembro de 2015.

P896p Prado, Diogo Rodrigues.
Porosidade de sistemas polidispersos [manuscrito] / Diogo Rodrigues
Prado. - 2015.
62f.: il.: color; grafis; tabs.

Orientador: Prof. Dr. José Aurélio Medeiros da Luz.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Engenharia de Minas. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mineral.

Área de Concentração: Tratamento de Minérios.

1. Porosidade. 2. Modelagem de processos. 3. Microestrutura. I. Luz, José Aurélio Medeiros da. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

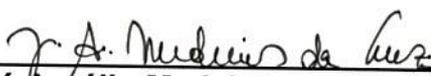
CDU: 622.73

Catálogo: www.sisbin.ufop.br

“POROSIDADE DE SISTEMAS POLIDISPERSOS”

AUTOR: DIOGO RODRIGUES PRADO

Esta dissertação foi apresentada em sessão pública e aprovada em 28 de setembro de 2015, pela Banca Examinadora composta pelos seguintes membros:



Prof. Dr. José Aurélio Medeiros da Luz (Orientador) – UFOP



Prof. Dr. Mário Luís Cabello Russo (Membro) – IFMG



Prof.ª Dr.ª Milene Sabino Lana (Membro) – UFOP

AGRADECIMENTOS

Agradeço minha noiva pelo carinho, incentivo e paciência.

Aos meus pais pelo apoio e confiança

Ao professor José Aurélio por compartilhar seu conhecimento, auxiliar na execução do trabalho e pela paciência.

Ao acadêmico Marcos Paulo Salomão Paracampos, pelo auxílio na execução da campanha experimental.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela concessão da bolsa de estudos

“Conhecimento não é aquilo que você sabe, mas
o que você faz com aquilo que você sabe”.

Aldous Huxley

RESUMO

A porosidade pode ser um parâmetro muito importante quando se trabalha com materiais granulares. Na filtração o valor de porosidade é um dos parâmetros que vai determinar a taxa de filtração, no estudo de rochas reservatórios é um dos parâmetros para determinação da quantidade estocada. Mas apesar de ser um parâmetro de grande utilidade em diversas áreas a determinação de seu valor na maioria das aplicações é cara, difícil ou até mesmo impossível. A proposta do trabalho é desenvolver relações entre a distribuição granulométrica e o valor de porosidade resultante para esse material. Para o desenvolvimento de modelos foram geradas distribuições granulométricas de esferas de vidro que poderiam ser adequadamente descritas pela equação de Weibull-Rosin-Rammler, então obteve-se vários valores de porosidade variando o valor do parâmetro de agudez da equação de Weibull-Rosin-Rammler. Com os resultados foi gerado um modelo utilizando regressão para equação que se julgava adequada e outros dois utilizando as técnicas de aprendizado de máquina (Bagging e Boosting), sendo que um dos modelos obteve aderência de 91,54 % aos dados experimentais. Com isso obteve-se um modelo que pode ser usado para descrever empacotamentos aleatórios com distribuição granulométrica próxima a equação de Weibull-Rosin-Rammler.

Palavras-Chave: Porosidade, modelagem, distribuição granulométrica

ABSTRACT

The porosity can be a very important parameter when working with granular materials. In filtration, the porosity value is one of important parameters that will determine the rate of filtration, the study of reservoir rocks is one of parameters to determine the quantity stored. In despite of being a useful parameter in several areas, the determination of its value in the most of applications is expensive, hard or even impossible. The purpose of this study is to develop relations between the particle size distribution and the porosity value for this material. To develop models were generated size distribution of glass spheres, could be adequately described by the Weibull-Rosin-Rammler equation, then many porosity values was obtained varying the value of the sharpness parameter of Weibull-Rosin-Rammler equation. With the results, a model using regression with the equation was thought appropriate was generated and other two models using machine-learning techniques (Bagging and Boosting), one of the models obtained 91.54% of adherence to the experimental data. Thus was obtained a model that can be used to describe random packing with sharp size distribution described by the Weibull-Rosin-Rammler equation.

Keywords: Porosity, modeling, size distribution

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Empacotamento de Apolônio em 2D.....	19
Figura 2 – Empacotamento de Apolônio em 3D.....	19
Figura 3 – Ábacos de Furnas	21
Figura 4 – Diagrama de empacotamento para um sistema de três componentes	26
Figura 5 – Porosidade inicial x tamanho de partícula.....	29
Figura 6 – Underfitting e Overfitting.....	32
Figura 7 – Árvore de decisão	33
Figura 8 – Regressão utilizando árvore de decisão	33
Figura 9 – Recipiente utilizado para aferição da porosidade e amostra de esférulas do tipo 1 (classe mais grossa).....	36
Figura 10 – Resultados dos Ensaios.....	42
Figura 11 - Resultado da regressão não linear	44
Figura 12 – Resultado da árvore de decisão <i>bagging</i>	44
Figura 13 – Resultado árvore de decisão <i>LSBoost</i>	45

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valores comuns de porosidade	18
Tabela 2 – Dado dos tipos de empacotamento para esferas idênticas	25
Tabela 3 – Índice de Hausner e escoabilidade.....	25
Tabela 4 – Tamanhos das esferas de vidro	35
Tabela 5 – Tamanho das Partículas.....	37
Tabela 6 – Divisão dos dados	40
Tabela 7 – Massa Específica das Esferas	42
Tabela 8- Parâmetros do ajuste	43

LISTA DE SÍMBOLOS

- d_{p1} – diâmetro da maior partícula [μm];
- d_{p2} – diâmetro da menor partícula [μm];
- f – fração volumétrica da partícula de maior diâmetro [-];
- M – massa de sólidos no leito [kg];
- n – agudez da distribuição [-];
- R – razão entre volumes proposto por Furnas [-];
- V_L – volume leito quando disposto em camadas [m^3];
- V_R – volume real do leito [m^3];
- V_S – volume de sólidos [m^3];
- V_t – volume total do leito [m^3];
- x - tamanho da partícula [μm];
- x^* - tamanho quando o passante acumulado corresponde a 0,6321 [μm];
- x_{max} - tamanho máximo de partícula da distribuição [μm]
- x^* - tamanho quando o passante acumulado corresponde a 0,6321 [μm];
- x_{50} - tamanho quando o passante acumulado corresponde a 0,5 [μm];
- y - passante acumulado [-];
- y_i – valor obtido pelo modelo [-];
- y^*_i – valor obtido experimentalmente [-];
- \bar{y} – Média dos valores obtidos experimentalmente [-];
- ϵ – porosidade [-];
- ϵ_m – porosidade inicial do leito [-];
- ρ_{ap} – massa específica aparente do leito [kg^1m^{-3}];
- ρ_m – massa específica aparente do leito formado somente pelas partículas maiores [kg^1m^{-3}];
- ρ_s – massa específica do sólido [kg^1m^{-3}];
- ΔV_s – variação do volume inicial de sólidos [-].

SUMÁRIO

Porosidade de Sistemas Polidispersos	1
1 Introdução	10
2 Objetivos e relevância	13
3 Revisão bibliográfica	14
3.1 Distribuição granulométrica	14
3.2 Porosidade	17
3.2.1 Previsão da porosidade	18
3.3 Aprendizado de máquina	30
3.3.1 <i>Overfitting</i> e <i>Underfitting</i>	31
3.3.2 Árvore de decisão	32
3.3.3 Aprendizado por Agrupamento (<i>Ensemble</i>)	34
3.3.3.1 <i>Bagging</i>	34
3.3.3.2 <i>Boosting</i>	34
4 Materiais e métodos	35
4.1 Materiais	35
4.2 Obtenção da distribuição granulométrica	37
4.3 Determinação da porosidade	38
4.4 Tratamento matemático dos dados	40
4.5 Modelos Porosidade x Agudez	40
5 Resultados e discussão	42
6 Conclusão	48
7 Sugestão para Trabalhos Futuros	49
8 Referências	50
Adendo I – dados dos ensaios	53
Adendo II – Resultados dos ensaios	60

1 INTRODUÇÃO

Muitas são as aplicações em que materiais granulares estão presentes, e algumas vezes o conhecimento do empacotamento desse material é importante, pois haverá espaços vazios entre as partículas, que podem ser desejados ou não.

Quando se utiliza esse tipo de material algumas características são importantes como a distribuição granulométrica, forma dos grãos e a porosidade. A distribuição granulométrica é importante, pois é uma forma de se expressar a dimensão das partículas presentes no material. A forma geralmente é representada pela esfericidade da partícula, segundo o conceito de WADELL (1932), que é a razão entre a área de uma esfera de igual volume ao da partícula e a área superficial da partícula. Já a porosidade é um número adimensional usado para representar a fração de espaços vazios em um leito empacotado, sendo, portanto, a relação entre volume de espaços vazios presente no empacotamento do material e o volume total ocupado pelo mesmo.

Dentre as aplicações onde o conhecimento do valor da porosidade é essencial, destaca-se aplicação no estudo de rochas reservatórios, determinando o potencial de concentração de água ou petróleo; na separação sólido-líquido, filtragem e espessamento; no estudo de física dos solos determinando a condutividade da água através dos poros; no manuseio de matéria-prima, tanto no estoque quanto no transporte e também secagem; processos pirometalúrgicos, aglomeração, sinterização e fabricação de coque (PÖTTKER; APPOLONI, 2000; ZOU; GAN; YU, 2011).

A Obtenção da distribuição granulométrica mesmo, em alguns casos não sendo uma tarefa simples, mas há métodos consagrados que fornecem a distribuição com grande precisão. Para a esfericidade também alguns métodos como a análise visual, e análise computacional de imagens. Já para a definição do valor da porosidade existem alguns métodos utilizados, mas em muitos casos devido à fragilidade da estrutura formada no empacotamento, a determinação desse parâmetro torna-se difícil, cara ou impossível.

No estudo da porosidade de tortas, resultantes de filtragem industrial, por exemplo, sua determinação pode vir a ser bastante complicada, pois quando se utilizam microscópios há grande probabilidade de as partículas da amostra sofrerem movimentação relativa, alterando sua porosidade. Também na tentativa de analisar a seção transversal do material o mesmo problema é detectado.

Uma alternativa para a análise da seção transversal é embutir esse material com resina, tomando os devidos cuidados para que todos os espaços sejam preenchidos e a movimentação do fluido não altere a estrutura original (SCHMIDT; LÖFFLER, 1990). Essa técnica de analisar uma superfície para determinar a porosidade volumétrica, ainda apresenta o problema de conversão entre a porosidade superficial e a volumétrica, pois são valores diferentes, como atesta, por exemplo, Massarani (MASSARANI, 2002).

Outro método é o emprego de absorção (atenuação) de raios-X ou raios gama (tomografia), o qual que é um método não destrutivo, preciso e rápido, além de permitir a análise ponto a ponto da porosidade, muito útil em casos de porosidade heterogênea (PÖTTKER; APPOLONI, 2000). Esse método, entretanto, tem como desvantagem a necessidade de equipamento preciso para detectar a intensidade do raio e a local da detecção, que também influencia o custo da análise.

Furnas e Anderegg foram precursores no estudo empacotamento de materiais particulados. o primeiro começou estudando a porosidade de leitos binários, variando a porcentagem de partículas maiores em relação as menores e também a relação de tamanho entres as maiores e menores (FURNAS, 1928). Já em outro estudo, FURNAS (1931) desenvolveu fórmulas matemáticas para definição de maior empacotamento. Nesse caso utilizou dados experimentais obtidos por ANDEREGG (1931) para validar seus resultados (FURNAS, 1931). ANDEREGG (1931) avaliou a porosidade de um sistema particulado utilizando argamassa (mistura de areia, cimento, rocha e água).

A porosidade é um fator determinante para as propriedades do material, pois influencia tanto na facilidade de trabalhar com o mesmo, quanto em sua posterior resistência mecânica (ANDEREGG, 1931).

Por seu turno, ZOU e colaboradores (2011) estudaram o comportamento de leitos formados tanto por partículas finas quanto grossas. Chegando à conclusão de que as forças que predominam sobre as partículas durante o empacotamento variam com o tamanho da partícula. Assim, partículas mais finas tendem a apresentar porosidade maior que as mais grossas.

Devido à dificuldade de obtenção desse parâmetro, surge a necessidade de desenvolvimento de métodos mais precisos, fáceis, e de custo mais baixo. Com isso o desenvolvimento de métodos indiretos de determinação da porosidade utilizando outros parâmetros, como, por exemplo, parâmetro de agudez da distribuição de Weibull-Rosin-Rammler torna-se particularmente vantajoso.

O presente trabalho teve como objetivo desenvolver métodos indiretos para obtenção da porosidade de sistemas dispersos (graneis). Pretendeu-se desenvolver uma correlação entre os parâmetros de equação de Weibull-Rosin-Rammler, modelo muito utilizado para descrever distribuição de tamanho, e a porosidade. Para isso foram gerados modelos utilizando diferentes técnicas, sendo que primeiramente foi feita regressão não linear, utilizando equações que se julgaram adequadas aos dados experimentais. A seguir, utilizando técnicas de aprendizado de máquina, foram gerados outros modelos. Por fim os modelos foram analisados e julgados quanto a sua capacidade de acurada descrição dos dados experimentais.

2 OBJETIVOS E RELEVÂNCIA

A porosidade é um parâmetro importante em tantas áreas e principalmente no trabalho com materiais granulares. Quando se trabalha com uma rocha porosa petrolífera, a porosidade dessa rocha é um dos parâmetros que determinam o potencial petrolífero da reserva. Na operação de filtros, a porosidade da torta vai ser umas das variáveis responsáveis por definir a taxa de filtração, como facilmente se depreende, a porosidade é parâmetro importante no âmbito de muitas outras instâncias da engenharia.

A determinação do valor da porosidade *in situ* para o caso da rocha porosa é muito problemática, e, para o caso da torta, é bastante complicada devido a fragilidade da estrutura que se desfaz facilmente na manipulação.

Nesse contexto formas que possibilitem a obtenção de valores precisos e confiáveis para a porosidade são de grande utilidade. Então o desenvolvimento de correlações matemáticas e métodos indiretos são desejados por todos que necessitem do valor desse parâmetro.

Por isso, o objetivo geral do trabalho é criar métodos fáceis, precisos e de custo reduzido, para a determinação da porosidade.

Como objetivos específicos, o primeiro é obter uma correlação entre os parâmetros da distribuição de tamanhos de Weibull-Rosin-Rammler e a porosidade, continuando os estudos realizados por VALADARES e LUZ (2004). Já como um segundo objetivo pretende-se obter, utilizando inteligência artificial, modelos que descrevam a relação entre a distribuição granulométrica de um material e a porosidade.

3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

3.1 Distribuição granulométrica

Quando se trabalha com sistemas particulados polidispersos, por mais que existam vários métodos bem definidos de análise granulométrica, em alguns casos isso não é tarefa trivial (FRERY e colaboradores, 2012). Várias são as técnicas disponíveis, cada uma apresentando suas vantagens e desvantagens.

Mesmo com a escolha do método mais indicados para a aplicação desejada, em geral, as técnicas de análise granulométrica têm como resultado proporções pontuais de tamanhos, sendo normalmente necessárias funções contínuas. Nesse contexto surgiram vários modelos matemáticos que podem ser utilizados para realizar a transformação dos pontos obtidos experimentalmente em funções contínuas. Como ressalta Luz (LUZ, 2014), raramente, em sistemas minerais, ocorre adequada aderência estatística à distribuição normal de Gauss, pois, via de regra, há assimetria (*skewness*).

Alguns modelos utilizados com maior frequência são: distribuição log-normal, de Gates-Gaudin-Schumann, de Gaundin-Meloy, de Hill (logística modificada) e a de Weibull. Para efeito ilustrativo, a seguir replicam-se as equações listadas por Luz (LUZ, 2014).

Como exemplos de distribuições contínuas não truncadas (à direita), tem-se:

- Distribuição de Gauss (normal):

$$Y = p(0 \leq x \leq X) = \frac{1}{\sigma \times \sqrt{2 \times \pi}} \times \int_0^x \exp \left[-\frac{(x - \mu)^2}{2 \times \sigma^2} \right] \times dx \quad (1)$$

- Distribuição log-normal:

$$Y = p(0 \leq x \leq X) = \frac{1}{\sigma_g \times \sqrt{2 \times \pi}} \times \int_0^x \exp \left[-\frac{(\ln(x) - \mu_g)^2}{2 \times \sigma_g^2} \right] \times dx \quad (2)$$

Com:

$$\sigma_g = \frac{1}{2} \times [\ln(x_{84}) - \ln(x_{16})] \quad (3)$$

- Distribuição de Weibull:

$$Y = p(0 \leq x \leq X) = 1 - \exp \left[-\left(\frac{x - \delta}{x^*} \right)^n \right] \quad (4)$$

- Distribuição de Rosin-Rammler, ou de Rosin-Rammler-Sperling-Benett (caso especial da distribuição de Weibull para $\delta = 0$):

$$Y = p(0 \leq x \leq X) = 1 - \exp \left[-\left(\frac{x}{x^*} \right)^n \right] = 1 - \exp \left[\ln\left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{x}{x_{50}} \right)^n \right] \quad (5)$$

- Distribuição logística modificada (distribuição de Whiten):

$$Y = p(0 \leq x \leq X) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{x_{50}} \right)^{-\lambda}} \quad (6)$$

- Distribuição de Hill (equivalente à logística):

$$Y = p(0 \leq x \leq X) = \frac{x^a}{x^a + x_{50}^a} \quad (7)$$

Por seu turno, como exemplos de distribuições contínuas truncadas (à direita), podem ser citadas as seguintes distribuições:

- Distribuição de Rosin-Rammler truncada (bitolada com tamanho máximo x_{max}):

$$Y = p(0 \leq x \leq X < x_{max}) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{\left(\frac{x}{x_{max} - x} \right)^n}{x^*} \right) \right] = 1 - \exp \left[\ln \left(\frac{1}{2} \right) \times \left(\frac{\left(\frac{x}{x_{max} - x} \right)^n}{\left(\frac{x_{50}}{x_{max} - x_{50}} \right)^n} \right) \right] \quad (8)$$

- Distribuição de Harris:

$$Y = p(0 \leq x \leq X \leq x_{max}) = 1 - \left[1 - \left(\frac{x}{x_{max}} \right)^a \right]^b \quad (9)$$

- Distribuição de Gates-Gaudin-Schumann (caso especial da distribuição de Harris para o parâmetro $b = 1$):

$$Y = p(0 \leq x \leq X \leq x_{max}) = \left(\frac{x}{x_{max}} \right)^a \quad (10)$$

- Distribuição de Gaudin-Meloy (caso especial da distribuição de Harris para o parâmetro $a = 1$):

$$Y = p(0 \leq x \leq X \leq x_{max}) = 1 - \left[1 - \left(\frac{x}{x_{max}} \right) \right]^b \quad (11)$$

Entre os modelos que tem encontrado maior emprego na prática industrial em que há a ocorrência de graneis, na comparação com os diversos modelos, está o de Weibull (FRERY e colaboradores, 2012; KING, 2001; LUZ, 2014; SILVA e colaboradores, 2004).

Luz (LUZ, 2005) estudou o relacionamento entre o parâmetro n , descritor da agudez da distribuição estatística de Rosin-Rammler, e o parâmetro λ , seu correspondente na distribuição logística de Whiten-Hill. Os resultados mostraram que os dois parâmetros podem ser relacionados através da seguinte equação de conversão, obtida por análise de regressão não linear (empregando o pacote computacional Easyplot):

$$\lambda = a = 34,555 \times e^{-\left(\frac{3,9}{n^{0,5984}}\right)} \quad (12)$$

Segundo aquele autor, a equação anterior revelou excelente precisão, com todos os valores de diâmetro mediano testados. O coeficiente de regressão foi de 99,9 %. Com isso, torna-se possível converter sem grande perda de informação distribuições de Whiten ou de Hill (algebricamente idênticas) em distribuições de Rosin-Rammler, tornando mais geral os resultados obtidos para a previsão da porosidade.

3.2 Porosidade

A fração volumétrica de vazios presentes em uma amostra, conhecida como porosidade (equação (13)), é um parâmetro importante em várias aplicações. Essas aplicações variam desde filtragem, determinação de potencial petrolífero de rochas reservatório e até mesmo na flotação onde a porosidade da espuma interfere na vazão de polpa hidrofílica, que contamina a parte hidrofóbica.

$$\epsilon = \frac{V_t - V_s}{V_t} \quad (13)$$

Como a obtenção do valor da porosidade pode ser complexo e dependente de vários parâmetros, alguns autores descrevem as faixas de porosidade que diversos materiais comumente apresentam. Na Tabela 1 são apresentados alguns valores descritos por ENGLER (2010), GLOVER () e HEUBECK ().

Tabela 1 – Valores comuns de porosidade

Material	Faixa de porosidade
Areia e cascalho	20-50%
Areia não consolidada	35-45%
Silte	35-50%
Argila	33-60%
Sedimentos clásticos	3-30%
Calcário	<1-30%
Basalto	1-12%
Pedra-Pomes	< 87%
Rochas cristalinas fragmentadas	1-5%
Rochas cristalinas não fragmentadas	~1%
Depósitos de arenito	15-35%
Arenito compactado	5-15%
Dolomita	10-30%
Conglomerado	1-15%

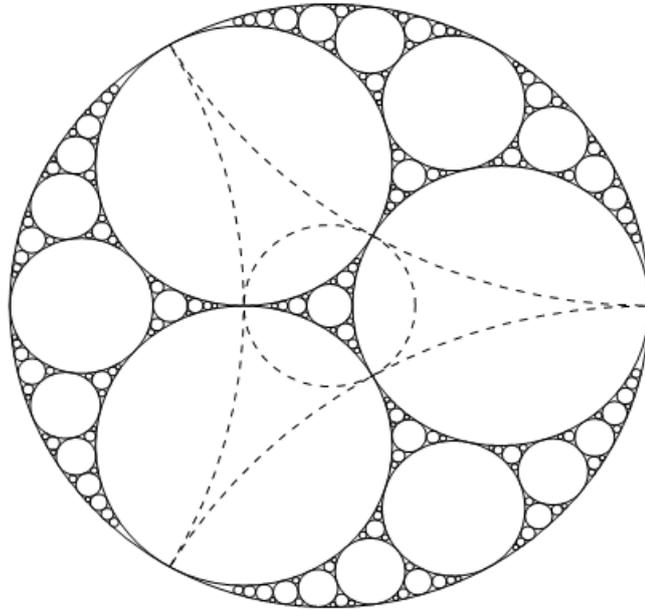
3.2.1 Previsão da porosidade

Quando se trata de previsão de porosidade de sistemas particulados um dos primeiros nomes a ser lembrado é o do matemático grego Apolônio, que concebeu o problema de determinar a porosidade final de sistema de esferas osculantes, com os interstícios preenchidos recorrentemente (de maneira fractal) por esferas osculantes menores.

Esse caso teórico de empacotamento é bastante estudado e é conhecido como empacotamento apoloniano. Abordando-se, por simplicidade, o problema em duas dimensões, esse empacotamento iniciar-se-ia com quatro círculos, sendo três de igual diâmetro, circunscritos por um círculo maior. Todos os quatro círculos são tangentes entre si. Então, segue-se adicionando círculos com o maior diâmetro possível tangente a outros três círculos. Assim, prossegue-se com essas adições formando um empacotamento conforme mostra a Figura 1. Naturalmente, por ser mais didático, prefere-se explicar o caso em duas dimensões, mas o empacotamento por ser feito analogamente em três dimensões, utilizando-se esferas. BORKOVEC; DE PARIS e PEIKERT (1994) utilizando um supercomputador,

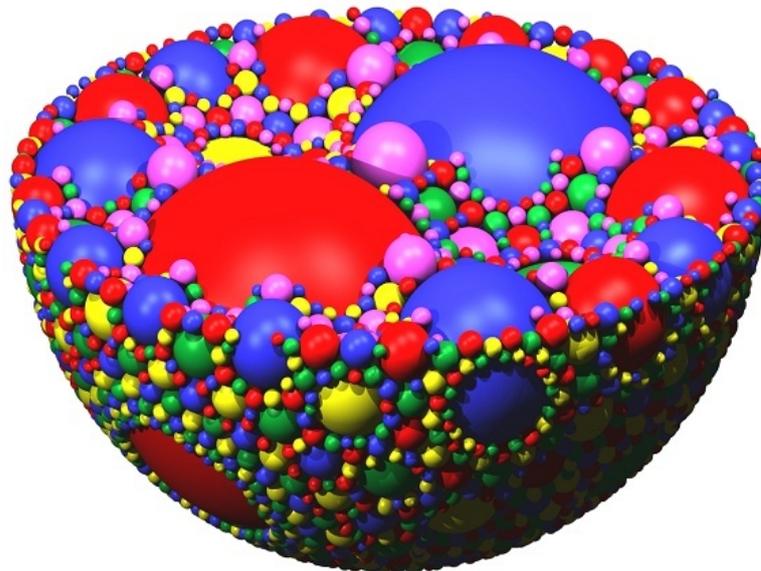
geraram um empacotamento apoloniano com 31.944.875.541.924 esferas. A Figura 2 apresenta parte do empacotamento gerado pelos autores.

Figura 1 – Empacotamento de Apolônio em 2D



Fonte: BORKOVEC e colaboradores (1994)

Figura 2 – Empacotamento de Apolônio em 3D



Fonte: BORKOVEC e colaboradores (1994)

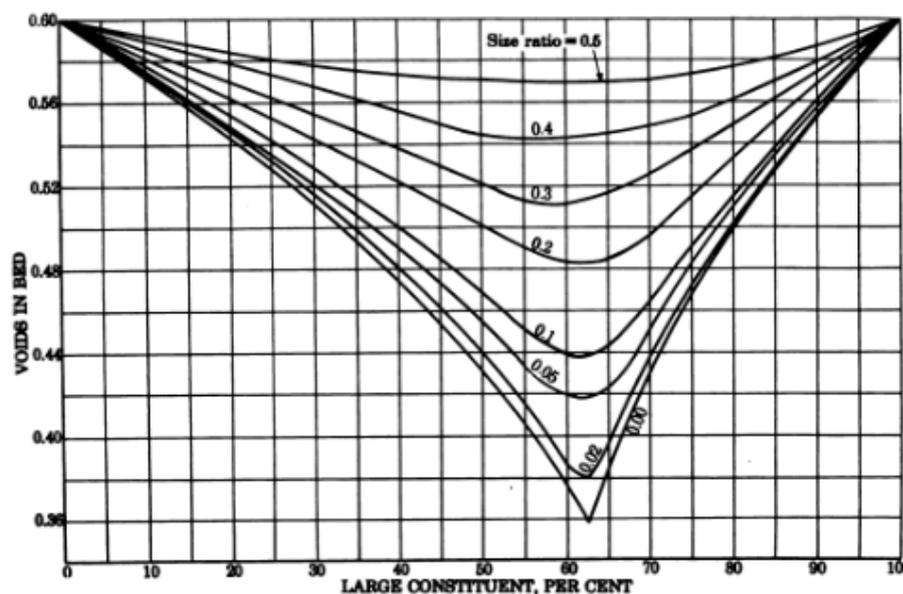
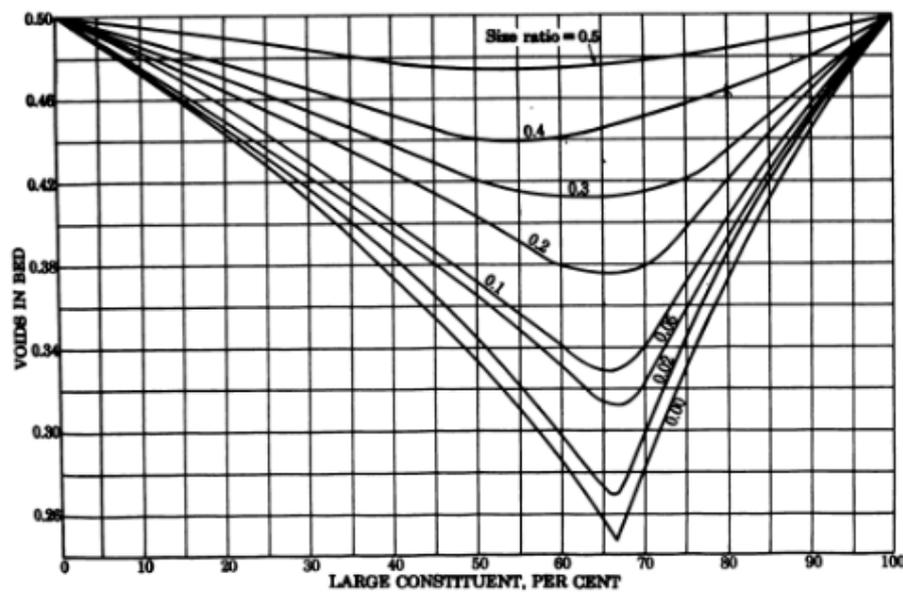
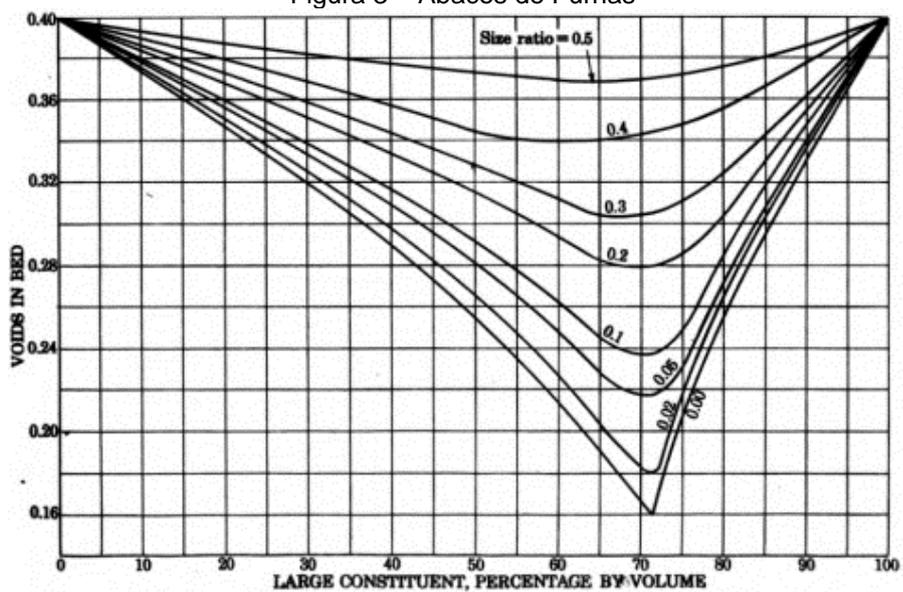
Outro pioneiro é Clifford Cook Furnas, com seu estudo sobre a porosidade de leitos binários. Nesse estudo, foram considerados sistemas binários, ou seja, leitos

compostos por partículas que apresentavam diâmetro maior (d_{p1}) e diâmetro menor (d_{p2}) (FURNAS, 1928).

FURNAS (1928) estudando leitos binários, gerou os ábacos apresentados na Figura 3, muito útil à época, devido a ausência de recursos tecnológicos que facilitassem os cálculos.

Nesse ábaco era feito o cruzamento de três parâmetros, porosidade, porcentagem da partícula maior e relação entre o tamanho da menor e da maior partícula. Os ábacos foram gerados considerando porosidades iniciais de 40, 50 e 60 %, essa escolha foi devido aos valores de porosidade que aquele autor conseguiu experimentalmente. Utilizando materiais particulados, ele conseguiu porosidade inicial mínima de 38,4% e máxima de 65,1%, e então gerou os gráficos para os valores escolhidos, para valores intermediários poderiam ser obtidos por interpolação dos três ábacos.

Figura 3 – Ábacos de Furnas



Fonte: (FURNAS, 1928)

Um fato a se destacar dos ábacos é que o autor não obteve os ábacos por meio unicamente de dados experimentais diretos. Ele realizou alguns experimentos e a partir desses experimentos fez algumas considerações e gerou os ábacos mostrados. Portanto, nem todos os resultados foram comprovados, mas sim estimados.

Uma característica dessas curvas, é que cada linha corresponde à porosidade decorrente de mescla binária com dada relação dimensional entre as duas classes de partículas. Ao se percorrer a extensão de uma linha, o valor da porosidade começa em um máximo, quando há somente partículas menores, vai decrescendo até um mínimo, conforme se aumenta a porcentagem de partículas maiores, sendo que depois volta a crescer até alcançar novamente o patamar máximo, quanto só há partículas maiores no leito.

Em outro estudo direcionado para previsão da porosidade de empacotamento de sistemas particulados quando o leito é formado por duas ou mais classes de tamanho, Furnas desenvolveu relações matemáticas envolvendo leitos de materiais fragmentados. Ele partiu da equação (14), obtida em estudo anterior, a qual fornece as condições para um leito binário apresentar maior densidade. Nessa equação f é a fração volumétrica das partículas mais grossas por volume de sólido, enquanto ϵ_m é fração de vazios no leito quando formado somente pelas partículas mais grossas (FURNAS, 1931).

$$f = \frac{1}{1 + \epsilon_m} \quad (14)$$

Com o objetivo de aproximar os estudos de casos reais, foram consideradas várias classes de tamanhos de partículas. A classe de maior tamanho deixava porcentagem de vazios (ϵ_m), a segunda maior classe era suficientemente pequena para ocupar esses espaços, a terceira classe ocupava os espaços deixados pela segunda e assim por diante, comportamento muito próximo do empacotamento de Apolônio, exceto pelo fato que Apolônio considerou partículas esféricas e Furnas não fez essa restrição. Furnas chegou à conclusão de que, a fração de volume ocupado por volume inicial de sólido (leito binário) pela primeira classe de partículas

será f , já para a segunda classe será $1 - f$, continuando para a próxima classe obtém-se $(1 - f)^2 / f$. Partindo disso, obteve-se que a fração de volume ocupado pelas classes segue a razão apresentada na equação (15).

$$R = \frac{1 - f}{f} \quad (15)$$

Finalmente chega-se à conclusão de que a variação volume total ocupado pelas partículas é igual à soma apresentada na equação (16), isso quando as partículas estão dispostas em camadas de igual diâmetro.

$$\Delta V_s = f + (1 - f) + (1 - f) \frac{1 - f}{f} + \dots \quad (16)$$

Substituindo a equação (14) na equação (16), obteve-se a equação (17), que fornece a variação volume total dos sólidos em função da porosidade inicial, sendo n o número de classes de tamanhos de partícula.

$$\Delta V_s = \frac{1 + \epsilon_m^1 + \epsilon_m^2 + \dots + \epsilon_m^{n-1}}{1 + \epsilon_i} \quad (17)$$

Assim, considerando o volume de sólido como unitário, o volume do leite pode ser determinado pela equação (18). Entretanto, como foi proposto, as partículas menores seriam suficientemente pequenas para ocupar os vazios deixados pelas partículas maiores, portanto o volume não devia se alterar. Com isso pode-se concluir que o volume do leite é determinado pelas partículas maiores. Chegando a equação (19) para o cálculo do volume real do leite.

$$V_L = \frac{\rho_s}{\rho_m} \Delta V_s \quad (18)$$

$$V_R = \frac{\rho_s}{\rho_m} f \quad (19)$$

Já a massa de material pode ser determinada pela equação (20), logo a pode-se determinar a massa específica aparente do leito pela equação (21).

$$M = \rho_s \Delta V_s \quad (20)$$

$$\rho_{ap} = \frac{\rho_m \Delta V_s}{f} \quad (21)$$

Logo, determinou-se a densidade máxima que o empacotamento pode atingir (FURNAS, 1931). De posse da massa específica aparente do leito e da massa específica real do material a porosidade pode ser facilmente encontrada. Esse método apresenta como limitações a necessidade de a dimensão da partícula da classe seguinte de tamanho ter a mesma ordem de grandeza do poro deixado pelas da classe anterior, além do volume ocupado pelas partículas ter que ser aproximadamente o volume dos poros.

SCOTT (1960), também realizou um excelente estudo sobre empacotamento utilizando esferas de aço com 3,175 mm de diâmetro. O problema maior que ele considerou na realização desse estudo, é minimizar o efeito parede, para que o empacotamento possa ser considerado aleatório. Um meio utilizado para minimizar o efeito parede é a utilização de recipientes esféricos durante a experimentação. Tal fato ocorre porque a esfera é a forma que apresenta menor área superficial por unidade de volume, diminuindo-se, desse modo, a influência da fronteira representada pelo contato com a parede do recipiente.

Um comportamento importante notado durante os experimentos, é que se as partículas forem cuidadosamente derramadas no recipiente, a porosidade possui um dado valor específico. Caso sejam gentilmente agitadas essa porosidade diminui, mas caso sejam vigorosamente agitadas há aumento na porosidade. Para o caso onde as partículas são cuidadosamente derramadas chama-se empacotamento frouxo, depois de levemente agitadas chama-se empacotamento denso. Os valores de porosidade encontrados por Scott para os dois casos foi 0,41 e 0,37, respectivamente (SCOTT, 1960).

XOLIN (2005) considerou o empacotamento de esferas monodispersas, e apresentou os tipos ordenados (periódicos) de empacotamento e as suas características, apresentados na Tabela 2. Os dados fornecidos foram número de coordenação, o qual é o número de contatos entre uma partícula e as que a circundam; Compactação, fração volumétrica de sólidos em um volume total; porosidade.

Tabela 2 – Dado dos tipos de empacotamento para esferas idênticas

Tipo de empacotamento	Número de coordenação	Compactação	Porosidade
Cúbico Face Centrada	12	0,740	0,260
Quadrático	10	0,708	0,302
Cúbico Centrado	8	0,680	0,320
Ortorrômico	8	0,605	0,395
Cúbico Simples	6	0,524	0,476
Diamante	4	0,340	0,660

Fonte: XOLIN (2005)

Os valores apresentados por XOLIN (2005) não coincidiram com os encontrados por SCOTT (1960), isso se deve ao fato de o empacotamento gerado por Scott ser aleatório ao contrário do ordenado proposto por Xolin, com isso cada partícula pode apresentar um número de coordenação diferente, dependendo da facilidade ou dificuldade de escoamento durante a formação do leito, em consequência porosidade distinta.

A acomodação das partículas pode ser dificultada ou facilitada devido ao comportamento reológico e atritos do sistema. Uma alternativa para descrever a escoabilidade e o empacotamento do material é por meio do índice de Hausner. Esse índice é calculado pela razão entre a massa específica compactada e massa específica aparente do material. Os valores do índice de Hausner comparado com a escoabilidade do material são apresentados na Tabela 3 (MILHOMEM; LUZ, 2015).

Tabela 3 – Índice de Hausner e escoabilidade

Índice de Hausner	Escoamento
--------------------------	-------------------

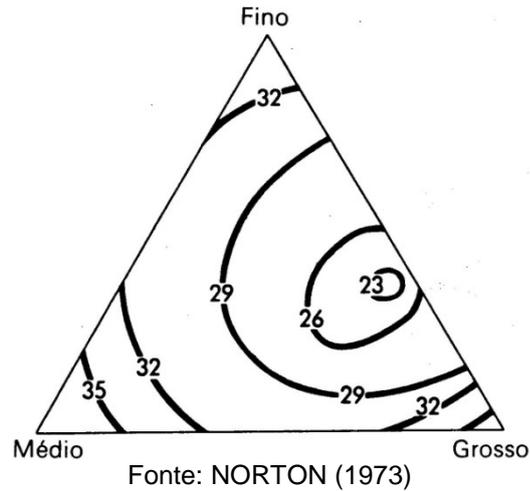
<1,25	Fácil
1,25 – 1,5	Moderado (necessita lubrificante)
>1,5	Difícil

Disso pode-se concluir que altos valores do índice de Hausner provavelmente resultarão leitos menos compactados e com maior porosidade.

NORTON (1973) levou a cabo um estudo da porosidade de misturas de partículas de tamanhos distintos, por causa da necessidade de se adicionar materiais fragmentados (sílica, feldspato) à argila durante produção de materiais cerâmicos, com o principal objetivo de evitar a contração de volume durante a secagem do produto. No caso de alguns artefatos cerâmicos também se necessita da maior quantidade material que não a argila, sendo que, para isso, se necessita de um melhor empacotamento.

Estudando o empacotamento de leitos binários, esse autor encontrou para o caso de partículas monodispersas, o valor de porosidade de 45 % que está entre os valores encontrados anteriormente por FURNAS (1928). Na continuidade desse estudo encontrou-se uma porosidade mínima de 25 % para o leito binário, um pouco abaixo ao encontrado por FURNAS (1928), que encontrou 26,6 %. Tentando adensar esse leito utilizaram-se três classes de tamanhos de partículas. Com isso foi gerado um diagrama ternário apresentando linhas de isovalores de porosidade em função da fração de volume de classe de tamanho (Figura 4). Os valores nas isolinhas correspondem ao valor de porosidade em porcentagem. Norton não informa a relação entre os tamanhos utilizados para as classes, parâmetro que certamente influencia nos resultados.

Figura 4 – Diagrama de empacotamento para um sistema de três componentes



Já para o caso de três classes de tamanho era esperado um melhor empacotamento, pois as partículas médias preencheriam os espaços deixados pelas grandes, enquanto as pequenas os espaços deixados pelas médias. De fato isso ocorreu, mas para as condições estudadas a alteração de valores foi de 25 % para 22 %, valor considerado pequeno e não justificaria a alteração de duas para três classes de tamanho durante a produção (NORTON, 1973).

De um modo geral alternativa para monitoramento industrial da porosidade em operações contínuas é a utilização de correlações matemáticas para a sua estimativa nos leitos particulados. A desvantagem desse método é a necessidade de controle e do conhecimento de outros parâmetros intervenientes. NETO e COURY (2006) compararam valores de porosidade obtidos por equações consagradas como a de Ergun, com aqueles obtidos pelo método descrito por Schmidt e Löffler, notaram grandes discrepância de valores. A equação de Ergun é uma generalização da equação de Kozeny-Karmann, em que a perda de carga devida à passagem de um fluido newtoniano através do leito particulado (LUZ, 2015), é dada em função de vários parâmetros, além da porosidade, sendo expressa por:

$$\frac{\Delta p}{L} = 150 \times \left[\frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} \right] \frac{\eta_f}{(\Psi \times d_p)^2} \times \left(\frac{Q_{vf}}{A} \right) + 1,75 \times \frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon^3} \times \frac{\rho_f}{\Psi \times d_p} \times \left(\frac{Q_{vf}}{A} \right)^2 \quad (22)$$

Onde:

- Δp – perda de pressão no leito fluidizado [Pa];

- A – área transversal do leito (filtro, reator, etc.) [m^2];
- ψ – esfericidade média das partículas [-];
- h_f – coeficiente de viscosidade dinâmica do fluido [$\text{Pa}\cdot\text{s}$];
- ε – porosidade do leito [-];
- L – espessura do leito fluidizado [m];
- d_p – diâmetro efetivo das partículas [m];
- Q_{vf} – vazão volumétrica de filtrado [m^3s^{-1}]

Em estudos recentes, utilizando materiais cuja distribuição granulométrica é adequadamente descrita pela distribuição de Weibull-Rosin-Rammler, VALADARES e LUZ (2004) obtiveram uma relação preliminar, entre o parâmetro de agudez da distribuição (n) e a porosidade, equação (23):

$$\varepsilon(n) = 0,476 \left[\frac{e^{\left(\frac{n}{1114,2}\right)} - 1}{e^{\left(\frac{n}{1114,2}\right)} - 0,9984} \right] \quad (23)$$

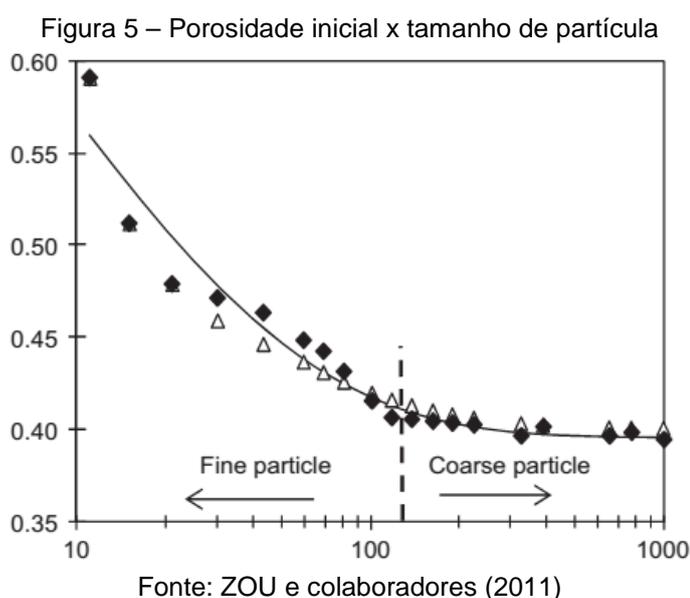
Entretanto a equação precedente possui característica indesejável, como já alertado pelos autores, explicável pelos conceitos da análise matemática. Ela é muito sujeita a imprecisão, devido aos pequenos valores do denominador (pequena mudança no parâmetro n acarreta grandes mudanças na porosidade prevista).

Fato notado durante a revisão é a discrepância entre valores para porosidade de sistemas monodispersos. Uma possível razão da discrepância entre os valores encontrados por Furnas, Scott e Norton, quando o leito está formado somente por um tamanho de partículas, é a forma das partículas. Pois, segundo BERNARDO; ORDOÑEZ e WIECHETECK (1997) quanto menor o coeficiente de esfericidade do material maior será o valor de porosidade para o leito empacotado ao acaso. Scott deixa claro o uso de esferas, enquanto Furnas utiliza material fragmentado, certamente com esfericidade menor. Somente Norton não deixa claro a forma das partículas por ele utilizadas. Com isso valida-se a afirmação, pois Scott foi o que encontrou o menor valor de porosidade, sendo possível Norton tenha utilizado partículas não tão esféricas quanto Scott, mas com esfericidade maior que a que Furnas utilizou quando encontrou 65,1 % para a porosidade. Ademais disso,

diferenças no coeficiente de atrito entre partículas podem levar a diferença no grau de empacotamento e, portanto, na porosidade resultante.

Em estudos mais recentes verificou-se que o empacotamento das partículas é devido principalmente a três fatores: distribuição granulométrica, forma da partícula e tamanho absoluto das partículas (ZOU e colaboradores, 2011). Vários são os estudos que analisaram essas características separadamente, ou comportamento alterando dois ou mais parâmetros.

Fato interessante de se notar é atuação de forças durante o empacotamento. Para o caso de partículas grossas (maior que $150\ \mu\text{m}$) as forças predominantes são as gravitacionais. Já em partículas finas, as forças interparticulares (forças de van der Waals/London) exercem ponderável influência. Devido a essas características a porosidade inicial de materiais finos tende a ser maior (ZOU e colaboradores, 2011). Pela Figura 5, que apresenta o tamanho (expresso em μm) no eixo X e porosidade no eixo Y, pode-se concluir que porosidade inicial tende a ser constante quando se trata de partículas grossas. Já quando parte para partículas mais finas esse valor tende a aumentar. Ou seja, quando as forças interparticulares se tornam predominantes, o empacotamento é mais complicado deixando mais espaços vazios no leito.



3.3 Aprendizado de máquina

O aprendizado de máquina é um método bastante utilizado para realizar classificação e regressão de elementos por meio de um computador. Hoje, com o aumento do poder de processamento dos computadores, o aprendizado de máquina pode ser usado em diversas áreas, como previsão do comportamento de clientes no uso de cartão de crédito e análise de risco no fornecimento de crédito, jogos, diagnóstico médico, pesquisa na web, filtro de spam, detecção de fraude e muitas outras (DOMINGOS, 2012; LUGER, 2008).

Muito estudos estão sendo realizados utilizando aprendizado de máquina para criar modelos e classificadores para diversas áreas e processos. ELNAGGAR e NOLLER (2009) utilizaram um método de aprendizado de máquina conhecido como árvore de decisão para classificação de salinidade de solos. Eles conseguiram precisão global de 99 %.

ZHANG e colaboradores (2008) também utilizaram árvore de decisão para analisar a contaminação do solo por cobre, tendo chegado à precisão 80,5 %. O método utilizado foi 29,3 % melhor que o método da krigagem, o qual é bastante utilizado em geoestatística quando se deseja aproximar ou interpolar dados.

CHATTERJEE e colaboradores (2008) utilizaram rede neurais, outro método de aprendizado de máquina, na análise de imagens de depósitos de minério de ferro. A classificação errada atingiu o nível de 2,4%, sendo uma precisão de classificação bem significativa.

O aprendizado ocorre através de treinamento, esse treinamento pode ser supervisionado ou não, sendo o método supervisionado o mais utilizado. Esse método funciona da seguinte forma; durante o treinamento são apresentados alguns exemplos ao algoritmo com a resposta esperada para o exemplo. Quando a resposta é um conjunto discreto de dados esse problema recebe o nome de classificação, mas quando é um conjunto contínuo é chamado regressão (REZENDE, 2003)

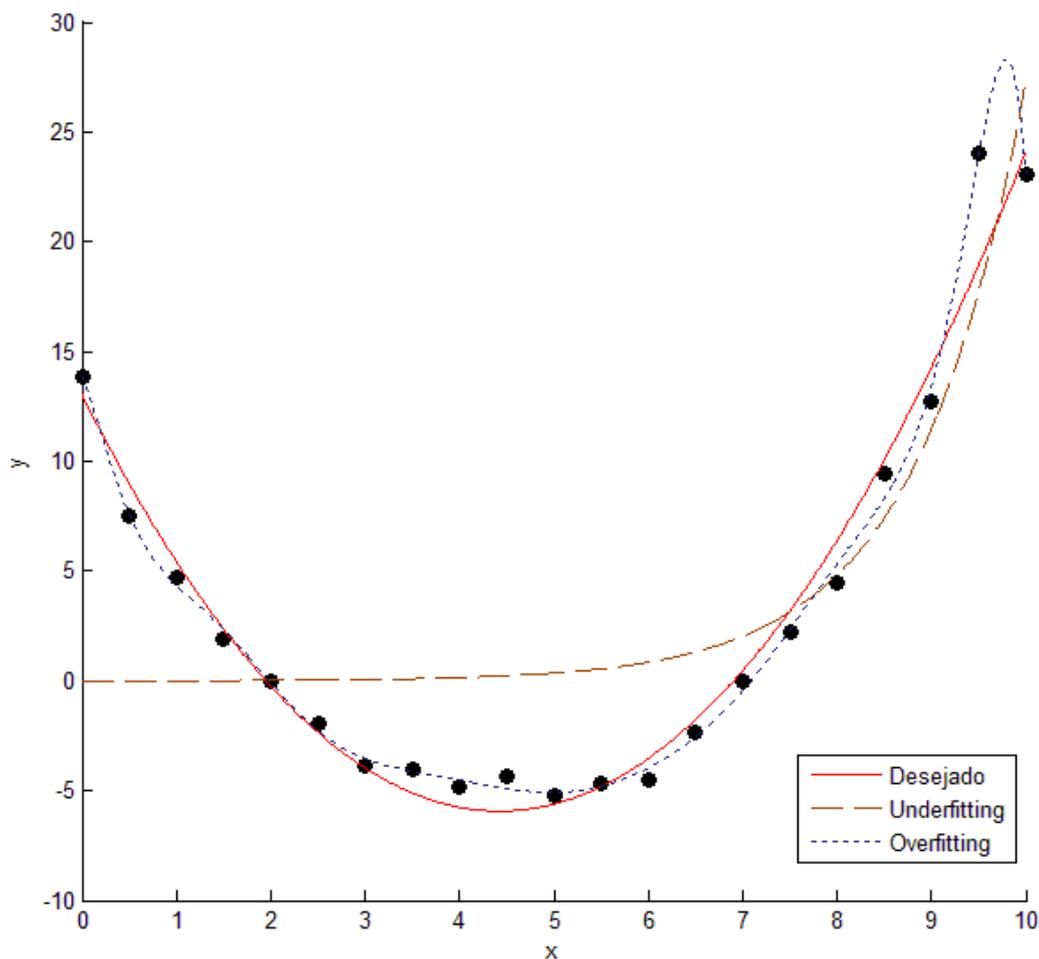
3.3.1 *Overfitting* e *Underfitting*

Um dos grandes problemas enfrentados quando se trabalha com aprendizado de máquina é o *overfitting* e o *underfitting*. O primeiro é quando o ajuste foi além do que realmente acontece, seria o mesmo que aplicar um polinômio de 5º grau quando na verdade um de 3º grau teria sido o ideal. Já o *underfitting* é o oposto: descreve-se menos do que deveria.

Uma forma de evitar esses problemas quando se gera um modelo é separando os dados disponíveis em 2 conjuntos, sendo o primeiro chamado de dados de treinamento e o segundo de teste ou validação. Isso é necessário para evitar que o algoritmo “decore” os dados de exemplos. Com isso treina-se o algoritmo com o primeiro conjunto. Então, a seguir, para se confirmar a eficiência do modelo apresenta-se o segundo conjunto (dados novos) ao algoritmo e analisam-se as respostas. Caso a porcentagem de acertos seja satisfatória, o modelo está validado e pronto para uso.

A Figura 6 mostra um exemplo de *underfitting* e *overfitting*.

Figura 6 – Underfitting e Overfitting

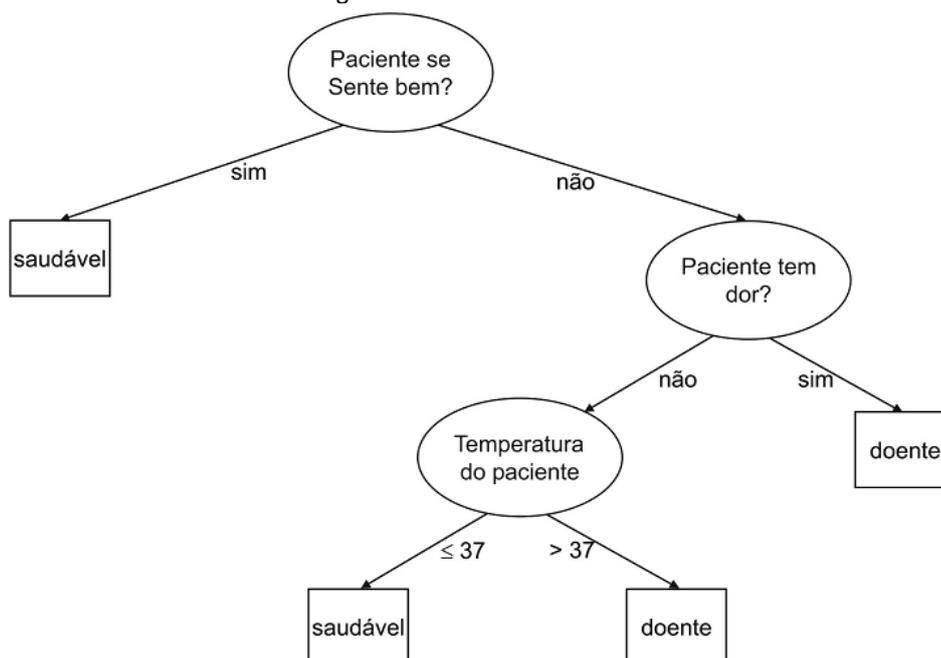


3.3.2 Árvore de decisão

Árvore de decisão é um método em aprendizado de máquina, tanto para classificação, quanto para regressão. Esse método consiste em se criar uma árvore com perguntas em seus nós de decisão, e – conforme as decisões são tomadas – novos nós de decisão são atingidos ou, por fim, um nó folha, que corresponde à resposta do algoritmo.

Um exemplo de árvore de decisão é mostrado na Figura 7. No exemplo o objetivo é determinar se o paciente está doente, então através de dados de treinamento que indica as características do paciente e qual seu estado, o algoritmo chega a uma árvore como a de modelo.

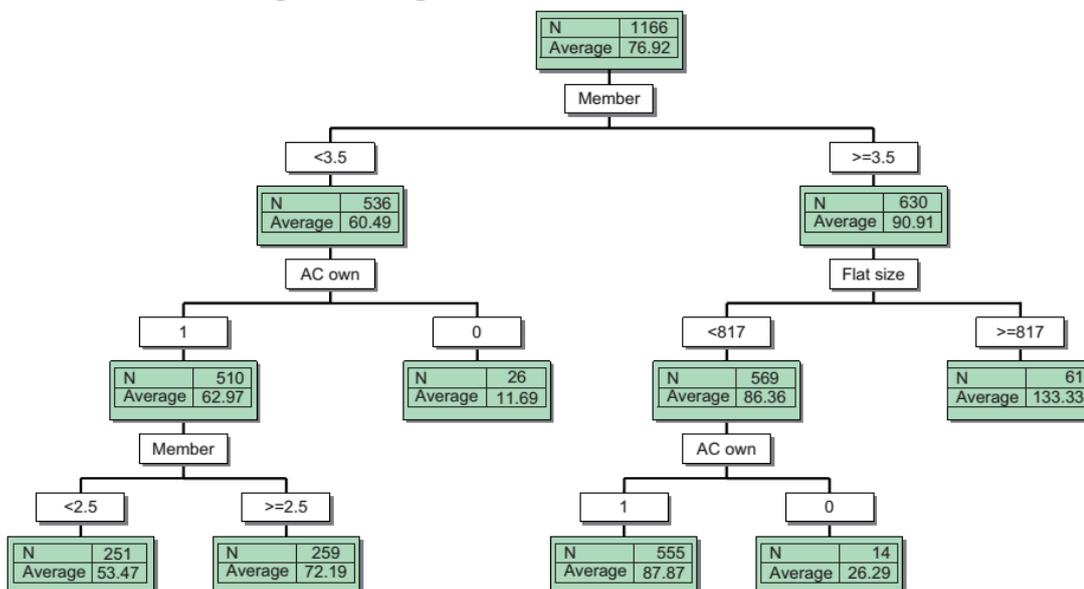
Figura 7 – Árvore de decisão



Fonte: REZENDE (2003)

O caso mostrado é um exemplo de classificação. Já para o caso de regressão, os dados são quebrados em vários segmentos, mas em vez de valores discretos nos nós de decisão, a pergunta é: se o valor da característica é maior ou menor que determinado valor. A Figura 8 é um exemplo de regressão utilizando árvore de decisão.

Figura 8 – Regressão utilizando árvore de decisão



Fonte: TSO e YAU (2007)

Uma grande vantagem de árvores de decisão sobre outras técnicas de aprendizado de máquina é o fato que ela gera modelos com regras interpretáveis ou lógicas, além permitir características contínuas e discretas (TSO; YAU, 2007).

Para melhorar o desempenho do modelo técnicas conhecidas como aprendizado por agrupamento são utilizadas.

3.3.3 Aprendizado por Agrupamento (*Ensemble*)

Para se obter uma árvore de decisão simples, utiliza-se os dados de treinamento e gera-se a menor árvore de decisão que for consistente com os dados. Já utilizando o aprendizado por agrupamento, são gerados conjuntos com os dados de treinamento. Uma árvore de decisão é gerada com cada conjunto obtido, sendo a classificação definida em conjunto pelas árvores; ou seja, a árvore de decisão final é a combinação de várias árvores geradas.

3.3.3.1 *Bagging*

Bagging ou *bootstrap aggregating* é um método de aprendizado por agrupamento que consiste na criação de amostras do conjunto de treinamento. Ou seja, ao invés de um conjunto de treinamento, são criados vários deles por amostragem do conjunto original, e para cada amostra uma árvore de decisão é criada. A Melhor árvore é gerada pela combinação de todas as árvores geradas (DIETTERICH, 2000)

3.3.3.2 *Boosting*

A técnica de reforço (*boosting*) consiste em um método iterativo de criação de árvore, em cada iteração é determinado um peso para cada exemplo classificado. O peso para classificações erradas é aumentado fazendo com que o algoritmo em cada iteração busque melhorar a resposta para a classificação errada da iteração anterior.

4 MATERIAIS E MÉTODOS

4.1 Materiais

Para a formação do leito particulado foram escolhidas esferulas de vidro. Naturalmente, o primeiro motivo pela escolha é forma. A forma esférica permite que o empacotamento resultante seja mais reprodutível e o menor, para a partir dos resultados conseguir estimar para outras formas.

O vidro foi escolhido pois existem vários diâmetros de esferas vendidas comercialmente com um custo mais baixo que outros materiais. Poderia ser utilizado outro material, como plástico ou isopor, os quais têm custo mais baixo. Contudo, como a ideia inicial era de que o material ficasse submerso em água, esses materiais poderiam flutuar e alterar o valor da porosidade.

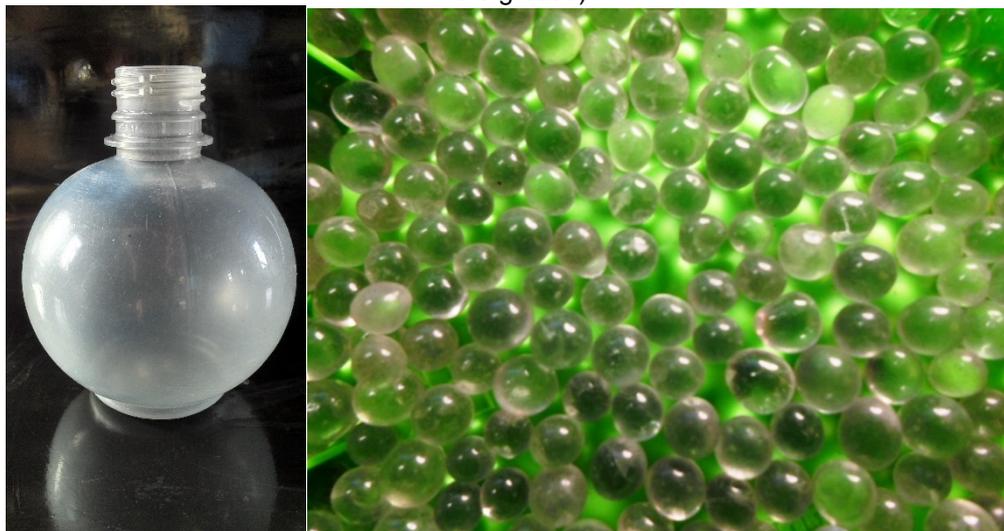
Foram adquiridos 5 sacos de 25 kg de esferas com tamanho nominal conforme apresentado na Tabela 4.

Tabela 4 – Tamanhos das esferas de vidro

Tipo	Tamanho nominal (μm)
1	3000 – 4500
2	1000 – 1500
3	212 – 600
4	106 – 212
5	75-150

A forma do recipiente pode ter grande importância, pois o efeito parede pode ter grande influência na acomodação das partículas, por isso foi escolhido o recipiente da Figura 9. O recipiente foi o com forma mais próxima de uma esfera, pois a esfera é a forma espacial com menor área e, portanto, a com menor influência do efeito parede. O volume total do recipiente é de 350 ml.

Figura 9 – Recipiente utilizado para aferição da porosidade e amostra de esférulas do tipo 1 (classe mais grossa)



Para determinação da massa específica das esferas foi utilizado picnômetro a hélio da Quantachrome, modelo Ultrapyc 1200e. O valor da massa específica é necessário, pois devido à dificuldade de medição de volume, preferiu-se quantificar a massa e, então, converter seu valor para volume.

Foram utilizadas peneiras seguindo com abertura seguindo a série Tyler para obter esferas com faixa granulométrica bitolada. Após o peneiramento, o material foi dividido em 14 classes conforme mostrado na Tabela 5. Cada classe apresenta tamanho médio correspondendo à média entre o valor da abertura da peneira superior e o daquela sobre a qual o material ficou retido.

Tabela 5 – Tamanho das Partículas

Classe	Peneiras (μm)	Tamanho médio (μm)
1	53-37	45
2	75-53	64
3	106-75	90,5
4	150-106	128
5	212-150	181
6	300-212	256
7	425-300	362,5
8	590-425	507,5
9	840-590	715
10	1190-840	1015
11	1680-1190	1435
12	2380-1680	2030
13	3350-2380	2865
14	4760-3350	4055

4.2 Obtenção da distribuição granulométrica

O objetivo foi analisar a porosidade de materiais particulados, em especial aqueles com distribuição granulométrica adequadamente descrita pela distribuição de Weibull-Rosin-Rammler (equação **Erro! Fonte de referência não encontrada.**). Porém, para essa equação, o tamanho máximo de partícula necessário para criar um leito particulado descrito pela distribuição a rigor seria infinito, cuja aproximação pode ser materializada com grânulos de grandes dimensões (os quais não eram disponíveis no âmbito desta pesquisa). Ademais disso usualmente as distribuições granulométricas são limitadas (truncadas) à direita. Assim, optou-se pela equação truncada (equação (24)).

$$y = 1 - \exp \left[\ln \left(\frac{1}{2} \right) x \left(\frac{\left(\frac{x}{x_{max} - x} \right)}{\left(\frac{x_{50}}{x_{max} - x_{50}} \right)} \right)^n \right] \quad (24)$$

Definiu-se, para os parâmetros x_{50} e x_{max} , os valores 362,5 μm e 4055 μm , respectivamente. O segundo valor foi escolhido por ser esse o maior tamanho médio

das classes granulométricas obtidas, enquanto que o primeiro, por ser o valor de uma classe granulométrica central disponível.

Para determinação da quantidade de esferas de cada classe, foi utilizado um algoritmo computacional. Os primeiros valores obtidos pelo algoritmo são as frações de cada classe, esse valor é calculado substituindo x na equação pelo valor do tamanho médio da primeira classe. Com isso, é obtida a fração mássica da primeira classe. Em seguida substitui-se o x pelo tamanho médio da segunda classe, o valor de y obtido é então subtraído pelo valor de y obtido da classe anterior, isso é repetido até completar todas as classes. Terminado todas as classes incrementa-se o valor de n e refaz-se o processo. Repete-se até que todos valores de n seja utilizados. Os valores utilizados de n variam de 0,5 a 3 em incrementos de 0,125.

Com a fração mássica de cada classe, multiplica-se esse valor pelo valor de massa total utilizado no ensaio, obtendo o valor mássico de cada classe. A massa total utilizada por ensaio foi determinada após vários ensaios preliminares verificando qual a massa que produzia resultados com menores variações. O valor escolhido foi de 0,450 kg.

4.3 Determinação da porosidade

Vários foram os ensaios preliminares para determinação da metodologia utilizada para aferição da porosidade, primeiro tentou-se graduar o recipiente para determinar o volume do leito visualmente. Mas o método mostrou-se ineficiente pois a variação de volume era pequena, necessitando-se espaçamento muito pequeno entre as marcas da escala para leitura dos valores, o que se mostrou inviável.

Então, tentou-se preencher o recipiente com água e aplicar vibração no recipiente utilizando-se uma mesa vibratória. Com isso, planejava-se gerar um empacotamento mais denso e ainda expulsar bolhas de ar eventualmente presentes nos interstícios entre as partículas. Mas esse método também se mostrou ineficiente pois era visível a segregação do material, enquanto as partículas menores se dirigiam para o fundo as maiores atingiam o topo, como decorrência da vibração. A segregação é indesejável pois como deseja obter o valor da porosidade para mistura das

partículas o resultado é diferente do esperado. A razão de utilizar água é que pesando o recipiente preenchido com água e as partículas, o volume de vazios seria o mesmo volume que aquele preenchido por água.

Outra tentativa foi a aplicação de vibração sem a utilização de água, sendo que, também nesse caso, a segregação também foi notada.

Por fim determinou-se a seguinte metodologia: primeiramente separavam-se as massas de cada uma das classes para resultar uma determinada agudez (n). Todas as massas eram agrupadas e homogeneizadas e, após isso, despejadas dentro do recipiente. O recipiente era tampado e invertido vinte vezes. Então o recipiente com a amostra era colocado em cima da bancada e, com leves batidas e utilizando um bastão de vidro, o topo do leito era regularizado (planificado). Utilizando-se uma caneta para transparências de retroprojeção, de ponta fina, marcava-se o topo do leito. Repetia-se o processo desde a inversão até a marcação do topo do leito por mais 3 vezes.

O recipiente é esvaziado e limpo. Então tarava-se a balança para se descontar a massa do recipiente, preenche-se o recipiente com água até a primeira marca feita com a caneta e anotava-se o valor da massa de água. Repete-se o processo para as outras três marcas. Todo o processo era repetido para resultar todos os valores de agudez, n .

Para determinar a porosidade, como demonstrado pela equação (13), é necessário o volume total do leito e o volume de sólido. O volume total é o mesmo que o volume de água, como se tem a massa do volume de água e a massa específica da água é conhecida, determina-se com facilidade o volume total.

O volume de sólido também é facilmente determinado pois conhece-se a massa utilizada de cada classe e sua respectiva massa específica foi determinada utilizando o picnômetro a gás. Com esses volumes determinados a porosidade também pode ser determinada. Como a marcação do nível do leito foi realizada por 4 vezes para cada valor de n , foram obtidos 4 valores de porosidade para cada valor de n .

4.4 Tratamento matemático dos dados

O primeiro passo do tratamento de dados foi a busca de valores aberrantes (*outliers*). Utilizou-se o método Z-Score e considerou-se o valor de 2 desvios-padrão para o dado ser selecionado como aberrante.

Para evitar *overfitting* e *underfitting* na utilização de métodos de aprendizado de máquina os dados obtidos foram divididos em dois conjuntos um para treinamento do algoritmo e outro para teste dos dados. Os dados foram divididos conforme a Tabela 6.

Tabela 6 – Divisão dos dados

Dados de Treinamento	Dados de Teste
Valores de n	Valores de n
0,500	0,625
0,750	0,875
1,000	1,125
1,250	1,375
1,500	1,625
1,750	1,875
2,000	2,125
2,250	2,375
2,500	2,625
2,750	2,875
3,000	

4.5 Modelos Porosidade x Agudez

Foram criados três modelos relacionando porosidade com parâmetro de agudez da equação, e cada um utilizando uma técnica diferente. Para comparar a eficiência dos modelos foi utilizado o coeficiente de determinação (R^2) calculado conforme a equação (25). Para o cálculo foi utilizado somente os dados de teste, pois para os modelos que utilizam aprendizado de máquina o uso dos dados de treinamento poderia fornecer um valor mais alto de R^2 , apesar de não representar um ganho real, isso devido à possibilidade de o algoritmo decorar os dados.

$$R^2 = 1 - \frac{SS_E}{SS_T} = 1 - \frac{\sum(y_i - y_i^*)^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2} \quad (25)$$

O primeiro modelo foi obtido pelo método de regressão tradicional. Para realizar a regressão foi utilizado o toolbox CFTOOL do Matlab[®]. Para encontrar a melhor equação que se ajustasse aos dados várias foram testadas.

O segundo e o terceiro método utilizaram aprendizado de máquina para encontrar o melhor modelo para os dados. Para um foi utilizado a técnica *bagging* e para o outro foi utilizado a técnica *LSBoost*. O Primeiro realiza os procedimentos conforme explicado na revisão bibliográfica. Já o segundo utiliza a técnica *boosting* e tem como objetivo minimizar o erro quadrático médio (*least squares boosting*).

Para gerar os modelos utilizando as duas técnicas foi utilizado a ferramenta *Fitensemble* do Matlab[®], um dos parâmetros necessários para rodar o algoritmo é a quantidade de árvores geradas. Para se gerarem modelos melhores, um algoritmo foi incrementando esse parâmetro de 1 à 2000, tendo sido armazenado aquele que resultou o maior R^2 .

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

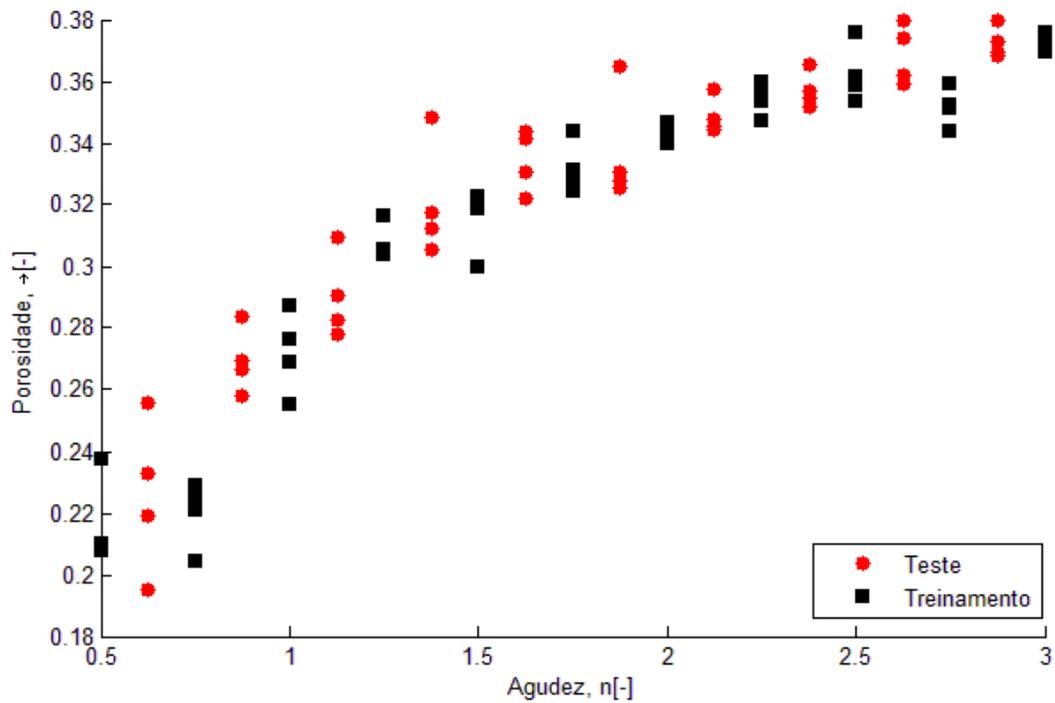
Os primeiros resultados obtidos foram as massas específicas das esferas, após análise no picnômetro a gás os resultados obtidos estão apresentados na Tabela 7.

Tabela 7 – Massa Específica das Esferas

Classe	Massa Específica			
	Medida 1 (g/cm ³)	Massa Específica Medida 2 (g/cm ³)	Massa Específica Medida 3 (g/cm ³)	Massa Específica Média (g/cm ³)
1	2,4954	2,4917	2,4894	2,4922
2	2,4967	2,4940	2,4925	2,4944
3	2,5050	2,5015	2,5005	2,5023
4	2,5068	2,5052	2,5032	2,5051
5	2,5002	2,4986	2,4973	2,4987
6	2,5151	2,5138	2,5122	2,5137
7	2,5125	2,5116	2,5101	2,5114
8	2,5100	2,5090	2,5083	2,5091
9	2,5085	2,5073	2,5065	2,5074
10	2,5031	2,5024	2,5004	2,5020
11	2,5056	2,5050	2,5043	2,5050
12	2,4998	2,4991	2,4986	2,4992
13	2,4968	2,4949	2,4939	2,4952
14	2,5039	2,5001	2,4976	2,5005

Para os ensaios de porosidade foram obtidos 84 valores de porosidade para 21 valores de n . Na Figura 10 são apresentados os resultados dos ensaios, os dados com marcador quadrado na cor preta são aqueles que foram utilizados para treinamento, enquanto os círculos de cor vermelha são os de teste.

Figura 10 – Resultados dos Ensaios



Analisando-se os dados para a presença de valores aberrantes, vê-se que nenhum dado ultrapassou o valor de 2 desvios-padrão (portanto nenhum dado foi excluído).

Com os dados em mãos, várias foram as equações que foram implementadas no CFTOOL para analisar o R^2 resultante. Por fim escolheu-se a equação (26).

$$\varepsilon = a * \left(1 - e^{-\left(\frac{n}{b}\right)^c}\right) + d \quad (26)$$

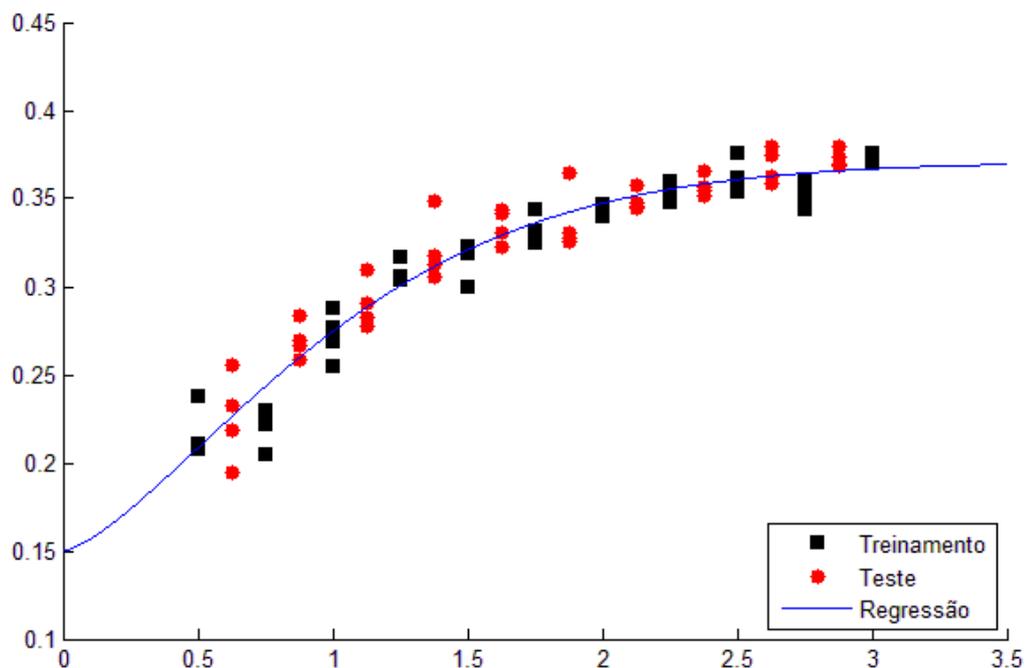
Após o ajuste os valores obtidos para os parâmetros a, b, c e d são apresentados na Tabela 8. Para esses valores a aderência foi de 91,55%, ou seja, o valor de $R^2=0,9155$.

Tabela 8- Parâmetros do ajuste

Parâmetro	Valor
A	0,2209
B	1,1410
C	1,4370
D	0,1499

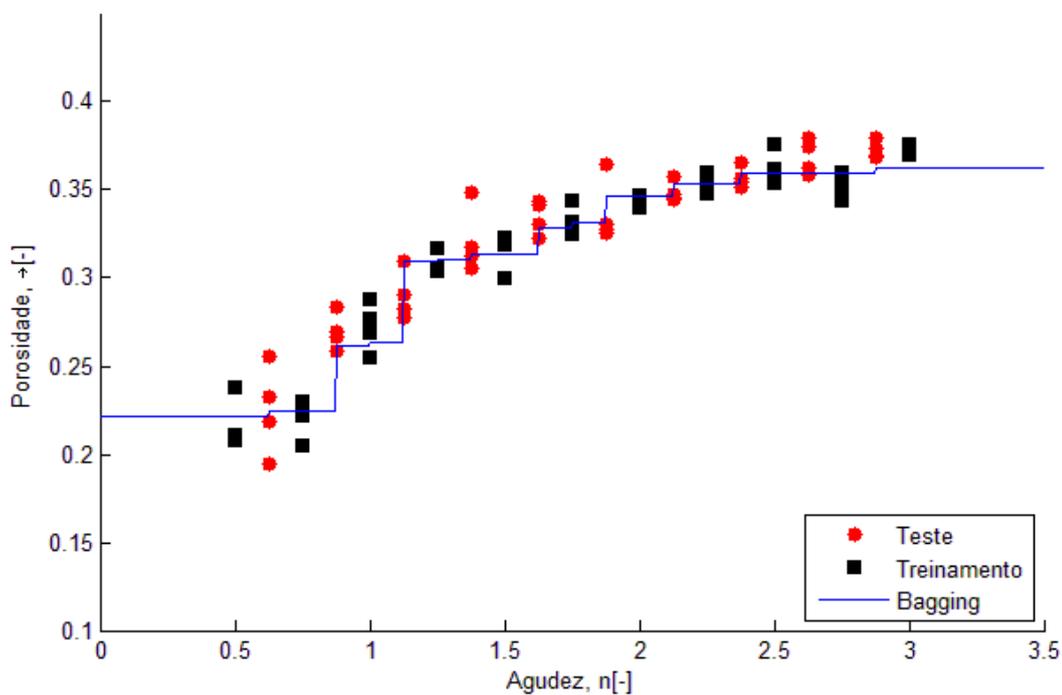
A Figura 11 demonstra graficamente os resultados obtidos pelo primeiro método.

Figura 11 - Resultado da regressão não linear



Partindo para o segundo modelo, foi utilizada a técnica *bagging* com árvore de decisão. A aderência desse modelo foi ligeiramente pior, atingindo o valor de 89,29%, ou seja, $R^2=0,8929$. A Figura 12 apresenta o modelo gerado.

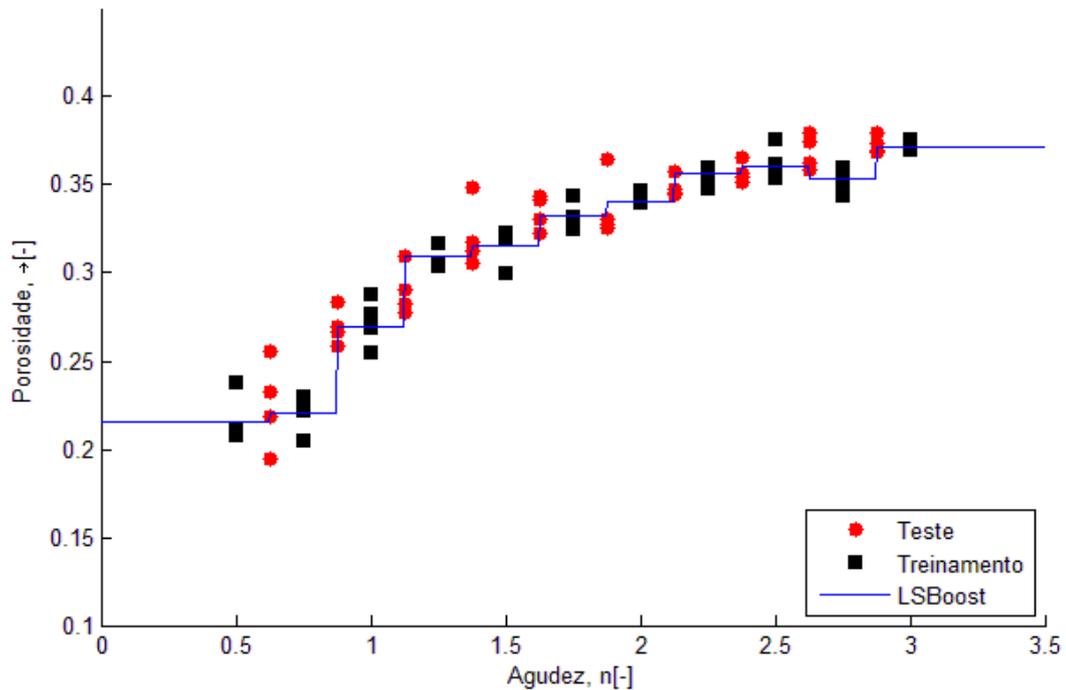
Figura 12 – Resultado da árvore de decisão *bagging*



Esse modelo foi o melhor obtido variando a quantidade de árvores de 1 a 2000, e o melhor valor de R^2 foi obtido com 30 árvores.

No terceiro modelo aplicando a técnica *LSBoost* o melhor valor de R^2 foi encontrado com 42 árvores, apresentando um ligeiro aumento de aderência em relação ao modelo *Bagging*, mas continuando inferior ao primeiro modelo. O valor obtido para R^2 foi de 0,8974. A Figura 13 demonstra graficamente o modelo obtido.

Figura 13 – Resultado árvore de decisão *LSBoost*



O primeiro modelo foi claramente melhor que outros dois, apesar de as aderências dos modelos aos dados do conjunto de teste serem muito próximas. Essa afirmação torna-se evidente na análise gráfica. O primeiro apresenta uma variação contínua, enquanto os outros apresentam vários degraus, ou seja, para vários valores de agudez de Rosin-Rammler (n) o valor de porosidade resultante será o mesmo.

A outro fato a se considerar a respeito dos modelos, segundo (AGUIAR e WERKEMA (1996)) quando se tem mais de um dado para um mesmo valor de x , devido a variabilidade de y o valor máximo que R^2 pode atingir é calculado pela equação (27).

$$R_{max}^2 = \frac{\sum_1^p \sum_1^m (y_{ij} - \bar{y})^2 - \sum_1^p \sum_1^m (y_{ij} - \bar{y}_i)^2}{\sum_1^p \sum_1^m (y_{ij} - \bar{y})^2} \quad (27)$$

Na equação p é o quantidade de variações de x , m quantidade de valores de y para cada valor de x e \bar{y}_i é a média do valor de y para um mesmo valor de x .

Aplicando-se a equação aos dados obtidos experimentalmente, o resultado obtido foi de 95,93 %, com isso o resultado foi muito próximo do máximo que se podia alcançar.

6 CONCLUSÃO

O trabalho buscou a criação de modelos relacionando porosidade e distribuição granulométrica, nessa tentativa obtiveram-se três modelos. Um dos modelos merece destaque, pois conseguiu uma boa aderência aos dados apesar da variabilidade dos resultados de porosidade.

A variabilidade dos valores foi devida principalmente à falta de meios eficientes e precisos para a medida da porosidade. Mas, mesmo com esses problemas, conseguiu-se minimizar a variabilidade dos resultados atingindo-se bons resultados.

Os dois modelos que foram gerados utilizando técnicas de aprendizado de máquina se mostraram pouco eficiente, principalmente na extrapolação dos limites obtidos nos ensaios. Uma alternativa para se utilizar aprendizado de máquina nos modelos seria a utilização de outra técnica que não árvore de decisão.

Portanto o primeiro modelo, isto é a equação de regressão não linear, pode ser utilizado para previsão do valor da porosidade de sistemas polidispersos esferoidais densificados (e que sejam razoavelmente descritos por distribuição de Rosin-Rammler ou logística de Hill), sem a utilização de métodos complexos e/ou de alto custo. Com isso facilita-se melhor controle e o entendimento de processos, nas diversas aplicações onde esse parâmetro exerce influência.

7 SUGESTÃO PARA TRABALHOS FUTUROS

Como sugestão para trabalhos futuros, recomenda-se gerar distribuições granulométricas descritas pela distribuição de Harris (ou seus casos especiais), buscando a generalização da equação aqui encontrada e permitindo, portanto, a previsão da porosidade de sistemas granulares mais genéricos.

Também, é de extrema pertinência analisar a porosidade de sistemas não esféricos e com isso verificar a aderência aos modelos desenvolvidos ou mesmo a aplicação de fatores de correção conforme a variação da esfericidade das partículas.

Um outro ponto que ainda pode ser abordado, em especial para sistemas com granulação fina, onde os fenômenos ligados às forças de van der Waals possuem relevância, é o estudo da influência isolada do tamanho mediano da distribuição de Weibull-Rosin-Rammler (x_{50}) na porosidade, com isso alterando-se o tamanho das partículas presentes no sistema, mas mantendo-se o valor da agudez. Com esses resultados pode-se então aperfeiçoar os modelos ora obtidos.

8 REFERÊNCIAS

AGUIAR, S.; WERKEMA, C. **Análise de Regressão: Como Entender o Relacionamento entre as Variáveis**. WERKEMA EDITORA, 1996. ISBN 9788598582061.

ANDEREGG, F. O. Grading Aggregates - II. - The Application of Mathematical Formulas to Mortars. **Industrial & Engineering Chemistry**, v. 23, n. 9, p. 1058-1064, 1931/09/01 1931.

BERNARDO, L.; ORDOÑEZ, F. R. M.; WIECHETECK, G. K. **Determinação experimental da porosidade e do coeficiente de esfericidade de carvão antracitoso utilizado na filtração** Congresso Brasileiro de Engenharia Sanitária e Ambiental, 19ª Feira Internacional de Tecnologias de Saneamento Ambiental. Foz do Iguaçu - Brasil: Associação Brasileira de Engenharia Sanitária e Ambiental 1997.

BORKOVEC, M.; DE PARIS, W.; PEIKERT, R. THE FRACTAL DIMENSION OF THE APOLLONIAN SPHERE PACKING. **Fractals**, v. 02, n. 04, p. 521-526, 1994.

CHATTERJEE, S. *et alii*. Rock-type classification of an iron ore deposit using digital image analysis technique. **International Journal of Mining and Mineral Engineering**, v. 1, n. 1, p. 22-46, 2008.

DIETTERICH, T. Ensemble Methods in Machine Learning. In: (Ed.). **Multiple Classifier Systems**: Springer Berlin Heidelberg, v.1857, 2000. cap. 1, p.1-15. (Lecture Notes in Computer Science). ISBN 978-3-540-67704-8.

DOMINGOS, P. A few useful things to know about machine learning. **Commun. ACM**, v. 55, n. 10, p. 78-87, 2012.

ELNAGGAR, A.; NOLLER, J. Application of Remote-sensing Data and Decision-Tree Analysis to Mapping Salt-Affected Soils over Large Areas. **Remote Sensing**, v. 2, n. 1, p. 151, 2009.

ENGLER, T. W. Porosity. In: (Ed.). **Fluid Flow in Porous Media**: The New Mexico Institute of Mining and Technology, 2010.

FRERY, A. *et alii*. Stochastic particle packing with specified granulometry and porosity. **Granular Matter**, v. 14, n. 1, p. 27-36, 01/02 2012.

FURNAS, C. C. **The relations between specific volume, voids, and size composition in systems of broken solids of mixed sizes**. Washington, D.C.: U.S. Dept. of Commerce, Bureau of Mines, 1928.

_____. Grading Aggregates - I. - Mathematical Relations for Beds of Broken Solids of Maximum Density. **Industrial & Engineering Chemistry**, v. 23, n. 9, p. 1052-1058, 1931/09/01 1931.

GLOVER, P. W. J. Porosity. In: (Ed.). **Pétrophysique**. Québec: Université Laval

HEUBECK, C. **Packing, Porosity, and Permeability**. Berlin: Institut für Geologische Wissenschaften/Freie Universität Berlin, 59 p.

KING, R. P. **Modeling and Simulation of Mineral Processing Systems**. Butterworth-Heinemann, 2001.

LUGER, G. F. **Artificial Intelligence: Structures and Strategies for Complex Problem Solving**. 6th ed. Addison-Wesley, 2008. ISBN 13: 978-0-321-54589-3.

LUZ, J. A. M. Conversibilidade entre distribuições probabilísticas usadas em modelos de hidrociclones. **Rem: Revista Escola de Minas**, v. 58, p. 89-93, 2005.

_____. **Fracionamento Granulométrico de Sistemas Particulados**. Ouro Preto: DEMIN/UFOP, 2014. 130 p.

_____. **Processos químicos de base mineral**. Ouro Preto: DEMIN/UFOP, 2015. 100 p.

MASSARANI, G. **Fluidodinâmica em Sistemas Particulados**. 2ª ed. Rio de Janeiro: E-PAPERS, 2002. 152 p.

MILHOMEM, F. O.; LUZ, J. A. M. Experimentos simples para estudo de graneis. **Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias** v. (artigo submetido), 2015.

NETO, O. G. S.; COURY, J. R. **Porosidades de tortas: resultados experimentais versus resultados estimados pelas correlações encontradas na literatura** Congreso Interamericano de Ingeniería Sanitaria y Ambiental. Punta del Este - Uruguay: Asociación Interamericana de Ingeniería Sanitaria y Ambiental. Sección Uruguay. 2006.

NORTON, F. H. **Introdução à Tecnologia Cerâmica**. São Paulo: Ed. Edgar Blücher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1973.

PÖTTKER, W. E.; APPOLONI, C. R. **Medida da porosidade de materiais amorfos por transmissão de raios gama**. INAC 2000 - V ENAN 2000.

REZENDE, S. O. **Sistemas inteligentes: fundamentos e aplicações**. Manole, 2003. ISBN 9788520416839.

SCHMIDT, E.; LÖFFLER, F. Preparation of dust cakes for microscopic examination. **Powder Technology**, v. 60, n. 2, p. 173-177, 2// 1990.

SCOTT, G. D. Packing of Spheres: Packing of Equal Spheres. **Nature**, v. 188, n. 4754, p. 908-909, 12/10/print 1960.

SILVA, E. M. D. *et alii*. Comparação de modelos matemáticos para o traçado de curvas granulométricas. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, v. 39, p. 363-370, 2004.

TSO, G. K. F.; YAU, K. K. W. Predicting electricity energy consumption: A comparison of regression analysis, decision tree and neural networks. **Energy**, v. 32, n. 9, p. 1761-1768, 9// 2007.

VALADARES, T. N.; LUZ, J. A. M. **Porosidade de Sistemas Polidispersos Compactados.** XX Encontro Nacional de Tratamento de Minérios e Metalurgia Extrativa - ENTMMME. Florianópolis: 235-242 p. 2004.

WADELL, H. Volume, Shape, and Roundness of Rock Particles. **The Journal of Geology**, v. 40, n. 5, p. 443-451, 1932.

XOLIN, E. **Etude des propriétés physiques et mécaniques de matériaux granulaires cohésifs: applications aux meules abrasives à liant vitreux.** 2005. 198 (docteur). L'institut National des Sciences Appliquées de Lyon, Lyon, France.

ZHANG, X. *et alii.* Assessing soil Cu content and anthropogenic influences using decision tree analysis. **Environmental Pollution**, v. 156, n. 3, p. 1260-1267, 12// 2008.

ZOU, R. P.; GAN, M. L.; YU, A. B. Prediction of the porosity of multi-component mixtures of cohesive and non-cohesive particles. **Chemical Engineering Science**, v. 66, n. 20, p. 4711-4721, 10/15/ 2011.

ADENDO I – DADOS DOS ENSAIOS

n	Classe	Retido acumulado [-]	Retido simples [-]	Massa (g)
0,5	1	0,208915462	0,208915462	94,01
0,5	2	0,244324842	0,03540938	15,93
0,5	3	0,284119903	0,039795061	17,91
0,5	4	0,329276519	0,045156616	20,32
0,5	5	0,380089246	0,050812727	22,87
0,5	6	0,436884887	0,056795641	25,56
0,5	7	0,5	0,063115113	28,40
0,5	8	0,566878133	0,066878133	30,10
0,5	9	0,640684962	0,073806829	33,21
0,5	10	0,721485657	0,080800694	36,36
0,5	11	0,805479922	0,083994265	37,80
0,5	12	0,890842857	0,085362935	38,41
0,5	13	0,967696477	0,07685362	34,58
0,5	14	1	0,032303523	14,54
0,625	1	0,16364368	0,16364368	73,64
0,625	2	0,200179011	0,036535331	16,44
0,625	3	0,2431039	0,042924889	19,32
0,625	4	0,293885391	0,050781491	22,85
0,625	5	0,353249947	0,059364556	26,71
0,625	6	0,421829035	0,068579088	30,86
0,625	7	0,5	0,078170965	35,18
0,625	8	0,583995825	0,083995825	37,80
0,625	9	0,676424195	0,09242837	41,59
0,625	10	0,774544054	0,098119859	44,15
0,625	11	0,868622339	0,094078285	42,34
0,625	12	0,948255547	0,079633208	35,83
0,625	13	0,994027453	0,045771906	20,60
0,625	14	1	0,005972547	2,69
0,75	1	0,127389083	0,127389083	57,33
0,75	2	0,163139412	0,035750329	16,09
0,75	3	0,207135205	0,043995793	19,80
0,75	4	0,26153182	0,054396616	24,48
0,75	5	0,327778794	0,066246973	29,81
0,75	6	0,407089867	0,079311073	35,69
0,75	7	0,5	0,092910133	41,81
0,75	8	0,601212705	0,101212705	45,55
0,75	9	0,711716625	0,110503919	49,73
0,75	10	0,823761639	0,112045014	50,42
0,75	11	0,919235296	0,095473657	42,96
0,75	12	0,980926959	0,061691663	27,76

0,75	13	0,999518534	0,018591575	8,37
0,75	14	1	0,000481466	0,22
0,875	1	0,098691146	0,098691146	44,41
0,875	2	0,132381301	0,033690155	15,16
0,875	3	0,175859703	0,043478402	19,57
0,875	4	0,232137544	0,056277841	25,33
0,875	5	0,303692625	0,071555081	32,20
0,875	6	0,392677801	0,088985176	40,04
0,875	7	0,5	0,107322199	48,29
0,875	8	0,618494934	0,118494934	53,32
0,875	9	0,746177926	0,127682992	57,46
0,875	10	0,867731993	0,121554067	54,70
0,875	11	0,955815412	0,088083419	39,64
0,875	12	0,994977729	0,039162318	17,62
0,875	13	0,999988749	0,00501102	2,25
0,875	14	1	1,13E-05	0,01
1	1	0,076175351	0,076175351	34,28
1	2	0,107048849	0,030873498	13,89
1	3	0,148857029	0,041808179	18,81
1	4	0,205575483	0,056718455	25,52
1	5	0,280990497	0,075415013	33,94
1	6	0,378601488	0,097610992	43,92
1	7	0,5	0,121398512	54,63
1	8	0,63580662	0,13580662	61,11
1	9	0,779412984	0,143606364	64,62
1	10	0,905332492	0,125919508	56,66
1	11	0,979081642	0,07374915	33,19
1	12	0,99915652	0,020074877	9,03
1	13	0,999999959	0,000843439	0,38
1	14	1	4,15E-08	0,00
1,125	1	0,058629019	0,058629019	26,38
1,125	2	0,086321544	0,027692525	12,46
1,125	3	0,125680704	0,039359159	17,71
1,125	4	0,18168525	0,056004547	25,20
1,125	5	0,259656562	0,077971312	35,09
1,125	6	0,364867921	0,105211359	47,35
1,125	7	0,5	0,135132079	60,81
1,125	8	0,653109953	0,153109953	68,90
1,125	9	0,811030368	1,58E-01	71,06
1,125	10	0,93588914	1,25E-01	56,19
1,125	11	0,991721724	0,055832584	25,12
1,125	12	0,999922353	0,008200629	3,69
1,125	13	1	7,76E-05	0,03
1,125	14	1	9,71E-12	0,00

1,25	1	0,045025703	0,045025703	20,26
1,25	2	0,069450808	0,024425105	10,99
1,25	3	0,105886191	0,036435383	16,40
1,25	4	0,160285871	0,05439968	24,48
1,25	5	0,23966275	0,079376879	35,72
1,25	6	0,351482524	0,111819774	50,32
1,25	7	0,5	0,148517476	66,83
1,25	8	0,670365358	0,170365358	76,66
1,25	9	0,840659174	0,170293816	76,63
1,25	10	0,959292336	0,118633161	53,38
1,25	11	0,997376702	0,038084367	17,14
1,25	12	0,999996801	0,002620098	1,18
1,25	13	1	3,20E-06	0,00
1,25	14	1	0	0,00
1,375	1	0,034520743	3,45E-02	15,53
1,375	2	0,05577631	2,13E-02	9,57
1,375	3	0,089049237	0,033272927	14,97
1,375	4	0,141185894	0,052136657	23,46
1,375	5	0,220971214	0,07978532	35,90
1,375	6	0,338449267	0,117478052	52,87
1,375	7	0,5	0,161550733	72,70
1,375	8	0,687531695	0,187531695	84,39
1,375	9	0,867967397	0,180435702	81,20
1,375	10	0,976022294	0,108054897	48,62
1,375	11	0,999368872	0,023346578	10,51
1,375	12	0,999999955	6,31E-04	0,28
1,375	13	1	4,50E-08	0,00
1,375	14	1	0	0,00
1,5	1	0,026432752	0,026432752	11,89
1,5	2	0,044729359	0,018296608	8,23
1,5	3	0,074776819	0,03004746	13,52
1,5	4	0,124191144	0,049414325	22,24
1,5	5	0,203536517	0,079345373	35,71
1,5	6	0,325770758	0,122234241	55,01
1,5	7	0,5	0,174229242	78,40
1,5	8	0,704566493	0,204566493	92,05
1,5	9	0,892680551	0,188114058	84,65
1,5	10	0,987060012	0,094379461	42,47
1,5	11	0,999892088	0,012832076	5,77
1,5	12	1	0,000107912	0,05
1,5	13	1	1,50E-10	0,00
1,5	14	1	0	0,00
1,625	1	0,02021987	0,02021987	9,10
1,625	2	0,035828745	0,015608875	7,02

1,625	3	0,06271274	0,026883995	12,10
1,625	4	0,109110474	0,046397734	20,88
1,625	5	0,187307557	0,078197082	35,19
1,625	6	0,313448351	0,126140795	56,76
1,625	7	0,5	0,186551649	83,95
1,625	8	0,721426217	0,221426217	99,64
1,625	9	0,914598903	0,193172686	86,93
1,625	10	0,993693748	0,079094845	35,59
1,625	11	0,999987918	6,29E-03	2,83
1,625	12	1	1,21E-05	0,01
1,625	13	1	7,36E-14	0,00
1,625	14	1	0	0,00
1,75	1	0,015455697	0,015455697	6,96
1,75	2	0,02867262	0,013216923	5,95
1,75	3	0,052539491	0,023866871	10,74
1,75	4	0,095759843	0,043220352	19,45
1,75	5	0,172229236	0,076469392	34,41
1,75	6	0,301482246	0,129253011	58,16
1,75	7	0,5	0,198517754	89,33
1,75	8	0,738066588	0,238066588	107,13
1,75	9	0,933611432	0,195544844	88,00
1,75	10	0,997271038	0,063659606	28,65
1,75	11	0,9999992	0,002728162	1,23
1,75	12	1	8,00E-07	0,00
1,75	13	1	0	0,00
1,75	14	1	0	0,00
1,875	1	0,011807284	0,011807284	5,31
1,875	2	0,02292878	1,11E-02	5,00
1,875	3	0,043977678	2,10E-02	9,47
1,875	4	0,083965056	4,00E-02	17,99
1,875	5	0,158243883	0,074278827	33,43
1,875	6	0,289871582	0,131627699	59,23
1,875	7	0,5	0,210128418	94,56
1,875	8	0,75444292	0,25444292	114,50
1,875	9	0,949704565	0,195261645	87,87
1,875	10	0,998971796	0,04926723	22,17
1,875	11	0,99999972	0,001028177	0,46
1,875	12	1	2,77E-08	0,00
1,875	13	1	0	0,00
1,875	14	1	0	0,00
2	1	0,009016158	0,009016158	4,06
2	2	0,018324708	0,00930855	4,19
2	3	0,036783922	0,018459215	8,31
2	4	0,073563447	0,036779524	16,55

2	5	0,145292453	0,071729007	32,28
2	6	0,278614535	0,133322082	59,99
2	7	0,5	0,221385465	99,62
2	8	0,770510513	0,270510513	121,73
2	9	0,962964056	0,192453544	86,60
2	10	0,999670335	0,036706279	16,52
2	11	1	0,000329665	0,15
2	12	1	4,27E-10	0,00
2	13	1	0	0,00
2	14	1	0	0,00
2,125	1	0,006882528	0,006882528	3,10
2,125	2	0,014638197	0,007755669	3,49
2,125	3	0,030747928	0,016109732	7,25
2,125	4	0,064404761	0,033656833	15,15
2,125	5	0,133315515	0,068910754	31,01
2,125	6	0,267708408	0,134392892	60,48
2,125	7	0,5	0,232291592	104,53
2,125	8	0,786225061	0,286225061	128,80
2,125	9	0,97356893	0,187343868	84,30
2,125	10	0,999912423	0,026343493	11,85
2,125	11	1	8,76E-05	0,04
2,125	12	1	2,42E-12	0,00
2,125	13	1	0,00E+00	0,00
2,125	14	1	0,00E+00	0,00
2,25	1	0,005252473	0,005252473	2,36
2,25	2	0,011688909	0,006436436	2,90
2,25	3	0,025689163	0,014000254	6,30
2,25	4	0,056351436	0,030662274	13,80
2,25	5	0,12225406	0,065902623	29,66
2,25	6	0,257149718	0,134895658	60,70
2,25	7	0,5	0,242850282	109,28
2,25	8	0,801543107	0,301543107	135,69
2,25	9	0,981777407	0,1802343	81,11
2,25	10	0,999981314	0,018203906	8,19
2,25	11	1	1,87E-05	0,01
2,25	12	1	4,00E-15	0,00
2,25	13	1	0	0,00
2,25	14	1	0	0,00
2,375	1	0,0040077	0,0040077	1,80
2,375	2	0,009331025	0,005323324	2,40
2,375	3	0,021453456	0,012122431	5,46
2,375	4	0,049278451	0,027824995	12,52
2,375	5	0,112050142	6,28E-02	28,25
2,375	6	0,246934279	1,35E-01	60,70

2,375	7	0,5	2,53E-01	113,88
2,375	8	0,816422504	0,316422504	142,39
2,375	9	0,987905866	0,171483362	77,17
2,375	10	0,999996912	0,012091046	5,44
2,375	11	1	3,09E-06	0,00
2,375	12	1	0	0,00
2,375	13	1	0	0,00
2,375	14	1	0	0,00
2,5	1	0,003057471	0,003057471	1,38
2,5	2	0,00744698	0,004389509	1,98
2,5	3	0,017909716	0,010462736	4,71
2,5	4	0,043072876	0,02516316	11,32
2,5	5	0,102647388	0,059574511	26,81
2,5	6	0,237057282	0,134409894	60,48
2,5	7	0,5	0,262942718	118,32
2,5	8	0,830822907	0,330822907	148,87
2,5	9	0,992303087	0,16148018	72,67
2,5	10	0,99999621	0,007696534	3,46
2,5	11	1	3,79E-07	0,00
2,5	12	1	0	0,00
2,5	13	1	0	0,00
2,5	14	1	0	0,00
2,625	1	0,002332277	0,002332277	1,05
2,625	2	0,005942205	0,003609927	1,62
2,625	3	0,014946865	0,00900466	4,05
2,625	4	0,03763323	0,022686365	10,21
2,625	5	0,09399137	0,05635814	25,36
2,625	6	0,227513366	0,133521996	60,08
2,625	7	0,5	0,272486634	122,62
2,625	8	0,844706266	0,344706266	155,12
2,625	9	0,995322968	0,150616702	67,78
2,625	10	0,99999967	0,004676999	2,10
2,625	11	1	3,29E-08	0,00
2,625	12	1	0	0,00
2,625	13	1	0	0,00
2,625	14	1	0	0,00
2,75	1	0,001778937	0,001778937	0,80
2,75	2	0,004740766	0,002961829	1,33
2,75	3	0,01247105	0,007730284	3,48
2,75	4	0,032868712	0,020397662	9,18
2,75	5	0,086029891	0,05316118	23,92
2,75	6	0,218296691	0,1322668	59,52
2,75	7	0,5	0,281703309	126,77
2,75	8	0,858037327	0,358037327	161,12

2,75	9	0,997299278	0,13926195	62,67
2,75	10	0,999999998	0,002700721	1,22
2,75	11	1	1,90E-09	0,00
2,75	12	1	0	0,00
2,75	13	1	0	0,00
2,75	14	1	0	0,00
2,875	1	0,00135679	0,00135679	0,61
2,875	2	0,003781781	0,002424991	1,09
2,875	3	0,010403164	0,006621384	2,98
2,875	4	0,028698378	0,018295214	8,23
2,875	5	0,078713176	0,050014798	22,51
2,875	6	0,209401003	0,130687827	58,81
2,875	7	0,5	0,290598997	130,77
2,875	8	0,870784118	3,71E-01	166,85
2,875	9	0,998525724	1,28E-01	57,48
2,875	10	1	1,47E-03	0,66
2,875	11	1	6,89E-11	0,00
2,875	12	1	0	0,00
2,875	13	1	0	0,00
2,875	14	1	0	0,00
3	1	0,001034767	0,001034767	0,47
3	2	0,00301649	0,001981723	0,89
3	3	0,008676657	0,005660168	2,55
3	4	0,025050298	0,016373641	7,37
3	5	0,071993987	0,046943689	21,12
3	6	0,200819691	0,128825704	57,97
3	7	0,5	0,299180309	134,63
3	8	0,882918416	0,382918416	172,31
3	9	0,99924357	0,116325155	52,35
3	10	1	0,00075643	0,34
3	11	1	1,44E-12	0,00
3	12	1	0	0,00
3	13	1	0	0,00
3	14	1	0	0,00

ADENDO II – RESULTADOS DOS ENSAIOS

n	Volume de material [mL]	Volume total ocupado pelas partículas [mL]				Porosidade [-]				Média	Desvio padrão	z-score			
0,5	179,77	226,87	227,63	226,91	235,82	0,2076	0,2102	0,2077	0,2377	0,2158	0,0146	-0,5618	-0,3808	-0,5522	1,4948
0,625	179,66	241,45	234,13	230,01	223,17	0,2559	0,2327	0,2189	0,1950	0,2256	0,0255	1,1881	0,2761	-0,2628	-1,2013
0,75	179,55	231,79	232,90	230,49	225,62	0,2254	0,2291	0,2210	0,2042	0,2199	0,0110	0,4975	0,8336	0,0998	-1,4309
0,875	179,44	250,46	245,56	244,69	241,85	0,2836	0,2693	0,2667	0,2581	0,2694	0,0106	1,3379	-0,0115	-0,2568	-1,0696
1	179,34	240,71	245,19	247,72	251,60	0,2550	0,2686	0,2761	0,2872	0,2717	0,0135	-1,2368	-0,2308	0,3213	1,1463
1,125	179,24	259,56	248,24	249,74	252,60	0,3095	0,2780	0,2823	0,2904	0,2900	0,0139	1,3932	-0,8662	-0,5550	0,0280
1,25	179,14	262,08	257,97	257,62	257,22	0,3165	0,3056	0,3046	0,3036	0,3076	0,0060	1,4857	-0,3302	-0,4876	-0,6679
1,375	179,05	257,76	260,40	262,23	274,85	0,3054	0,3124	0,3172	0,3486	0,3209	0,0191	-0,8134	-0,4443	-0,1928	1,4505
1,5	178,96	255,62	262,54	263,34	264,17	0,2999	0,3184	0,3204	0,3226	0,3153	0,0104	-1,4795	0,2923	0,4911	0,6961
1,625	178,87	272,60	271,51	263,88	267,18	0,3438	0,3412	0,3221	0,3305	0,3344	0,0100	0,9402	0,6769	-1,2270	-0,3902
1,75	178,79	264,51	266,40	267,30	272,39	0,3241	0,3289	0,3311	0,3436	0,3319	0,0083	-0,9416	-0,3665	-0,0955	1,4036
1,875	178,71	281,33	266,91	265,73	264,83	0,3648	0,3304	0,3275	0,3252	0,3370	0,0187	1,4900	-0,3496	-0,5089	-0,6315
2	178,64	270,53	271,98	272,79	273,44	0,3397	0,3432	0,3451	0,3467	0,3437	0,0030	-1,3213	-0,1598	0,4837	0,9973
2,125	178,57	272,28	272,92	273,76	277,91	0,3442	0,3457	0,3477	0,3575	0,3488	0,0060	-0,7686	-0,5112	-0,1752	1,4551
2,25	178,50	273,41	276,01	276,88	278,76	0,3471	0,3533	0,3553	0,3597	0,3538	0,0052	-1,2894	-0,1086	0,2816	1,1164
2,375	178,44	277,36	276,55	275,33	281,07	0,3567	0,3548	0,3519	0,3651	0,3571	0,0057	-0,0818	-0,4127	-0,9148	1,4093
2,5	178,38	285,79	275,92	278,12	279,23	0,3758	0,3535	0,3586	0,3612	0,3623	0,0096	1,4146	-0,9161	-0,3823	-0,1161
2,625	178,32	284,92	287,59	278,17	279,56	0,3741	0,3799	0,3589	0,3621	0,3688	0,0099	0,5397	1,1265	-0,9940	-0,6721
2,75	178,27	271,57	274,76	275,34	278,25	0,3436	0,3512	0,3526	0,3593	0,3517	0,0065	-1,2522	-0,0729	0,1386	1,1864
2,875	178,22	287,28	284,25	282,58	282,05	0,3796	0,3730	0,3693	0,3681	0,3725	0,0052	1,3732	0,0958	-0,6200	-0,8490
3	178,17	283,25	285,44	282,46	283,31	0,3710	0,3758	0,3692	0,3711	0,3718	0,0028	-0,2838	1,4281	-0,9078	-0,2365