

Pengembangan Algoritma untuk Menganalisis Frekuensi Pribadi Poros dengan Rotor Ganda

Amir Zaki Mubarak

*Jurusan Teknik Mesin, Fakultas Teknik, Universitas Syiah Kuala
Jl. Tgk. Syech Abdurrauf, No. 7, Darussalam, Banda Aceh 23111
E-mail: amir_zaki_mubarak@yahoo.com*

Abstract

Vibration analysis is very essential to be considered in designing a rotor shaft. By the development of computer technology, the vibration analysis of the rotor shaft can be simply performed by numeric method. The objective of this research is to develop an algorithm to determine the natural frequency of a rotor shaft of a dual rotor system. The equation of motion of the system is derived from the kinetic and potential energy. By applying Lagrange's equation and converting them into matrix form, the equations can be easily solved numerically. Through this approximation is developed computer program. The model is a rotor system built of a rotor shaft and two disks. The rotor shaft is numerically divided into several line elements. From the global matrices of the elements, it is resolved the eigen values of the system which are then converted into the natural frequencies. The validation of the program result with analytical calculation shows a very close result.

Keywords: dynamic characteristic, natural frequency, rotor, Lagrange's equation.

Daftar Notasi

- δ = vektor perpindahan nodal
- u = vektor perpindahan translasi arah sumbu X
- w = vektor perpindahan translasi arah sumbu Z
- θ = vektor perpindahan rotasi terhadap sumbu X
- ψ = vektor perpindahan rotasi terhadap sumbu Z
- T_D = Energi kinetik rotor
- m_d = massa rotor
- I_{dx} = momen inersia rotor dalam arah X.
- I_{dy} = momen inersia rotor dalam arah Y
- Ω = Kecepatan sudut
- N = fungsi perpindahan untuk balok dengan beban lentur.
- L = panjang poros
- T_S = Energi kinetik poros rotor
- ρ = massa jenis
- S = Luas penampang poros
- I = Luas momen inersia dari penampang poros
- U_S = Energi regangan poros
- E = Modulus elastisitas
- F_0 = Gaya aksial

1. Pendahuluan

Dalam perancangan sistem rotor sangat penting untuk memasukkan analisis dinamik sebagai pertimbangan. Hal ini dilakukan sebagai perawatan prediktif untuk mencegah kegagalan sistem sebelum umur pakainya habis. Berbagai analisis dinamik sistem rotor telah berkembang dalam aplikasinya di permesinan [1], [2]. Termasuk juga pengembangan

rotor untuk teknologi *flywheel* sebagai penyimpan energi dalam aplikasi teknik mesin [3], [4].

Diantara komponen-komponen utama sistem rotor, sering dijumpai kegagalan terjadi pada poros rotor dan bantalannya yang umumnya disebabkan oleh getaran sistem. Berbagai penelitian telah dilakukan untuk mengoptimalkan kinerja poros dan bantalan [5], [6], [7], [8]. Kegagalan pada poros rotor dapat dihindari dengan mengetahui frekuensi pribadinya. Dengan diketahuinya frekuensi pribadi sistem maka dapat diprediksikan kecepatan kritisnya yang merupakan daerah kerja yang memerlukan perhatian khusus dalam perancangan sebuah sistem rotor. Telah dikembangkan berbagai metode untuk analisis solusi kecepatan kritis secara efektif [9], [10].

Analisis karakteristik dinamik ini umumnya membutuhkan ketelitian dan waktu yang cukup lama. Seiring dengan kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi komputer maka analisis tersebut lebih mudah diselesaikan dengan metode numerik. Dengan metode numerik, solusi nilai eigen yang cukup besar untuk kasus getaran dapat diselesaikan dengan lebih mudah dengan bantuan komputer.

Aplikasi metode elemen hingga untuk analisis dinamik sistem rotor juga telah dikembangkan dengan basis MATLAB. Telah dikembangkan program komputer berbasis MATLAB untuk menentukan frekuensi pribadi dan modus getar untuk sistem monorotor sederhana [11]. Penelitian ini bertujuan untuk melanjutkan pengembangan program komputer yang dijalankan dengan MATLAB untuk menentukan frekuensi pribadi poros dengan rotor ganda. Analisis ini hanya dibatasi untuk getaran

bebas tanpa redaman yang terjadi pada sistem rotor yang terdiri dari satu poros dengan dua rotor yang terletak pada poros rotor tersebut. Dalam hal ini frekuensi pribadi hanya dipengaruhi oleh kekakuan dan massa dari sistem yang dianalisis.

2. Dasar Teori Sistem Rotor

Persamaan gerak poros dan rotornya diperoleh dari energi kinetik dan energi potensial yang bekerja. Rotor diasumsikan kaku sehingga karakteristik dinamikanya hanya dipengaruhi oleh energi kinetik yang bekerja. Setiap nodal pada poros rotor memiliki empat derajat kebebasan yaitu perpindahan translasi u dan w serta perpindahan sudut θ dan ψ . Jika rotor terletak pada nodal, maka vektor perpindahan nodal δ pada pusat rotor adalah:

$$\delta = [u, w, \theta, \psi] \tag{1}$$

Dengan demikian energi kinetik yang terjadi pada rotor adalah:

$$T_D = \frac{1}{2} m_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{dy} \Omega^2 \tag{2}$$

Untuk pemodelan elemen hingga, persamaan Lagrange diterapkan pada persamaan tersebut sehingga diperoleh matrik inersia rotor.

Poros rotor dimodelkan sebagai batang lentur dengan potongan seragam. Setiap elemen terdiri dari dua nodal dengan empat perpindahan translasi dan empat perpindahan rotasi. Vektor perpindahan nodal pada poros rotor adalah:

$$\delta = [u_1, w_1, \theta_1, \psi_1, u_2, w_2, \theta_2, \psi_2] \tag{3}$$

Untuk penyelesaian dengan metode elemen hingga, maka

$$u = N_1(y) \delta u \tag{4}$$

$$w = N_2(y) \delta w \tag{5}$$

dimana fungsi perpindahan untuk balok dengan beban lentur adalah [12] :

$$N_1(y) = \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; -y + \frac{2y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; \frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \right] \tag{6}$$

$$N_2(y) = \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; -\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} \right] \tag{7}$$

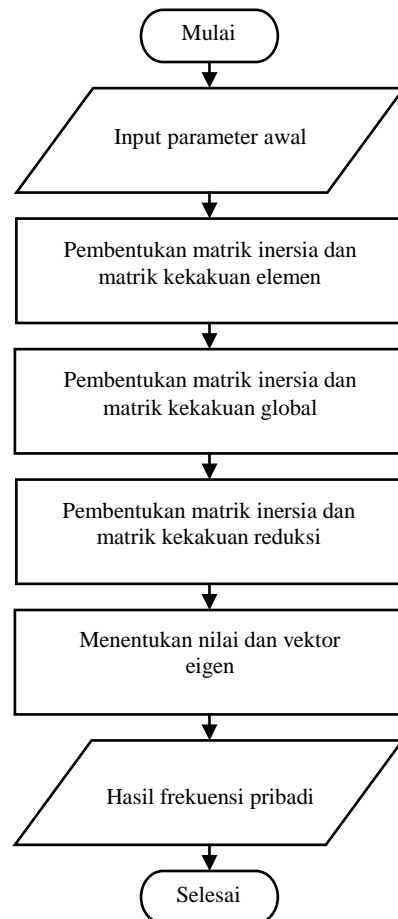
Energi kinetik yang terjadi pada poros rotor adalah:

$$T_s = \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^L (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy + \rho I L \Omega^2 \tag{8}$$

Sedangkan energi potensial diturunkan dari energi regangan poros [10], yaitu:

$$U_s = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy + \frac{F_0}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy \tag{9}$$

Penyelesaian dengan metode elemen hingga dilakukan dengan mensubstitusikan fungsi perpindahan poros persamaan (5), (6), (7), dan (8)) ke persamaan energi kinetik dan potensial poros dan mengintegalkannya. Dengan penerapan persamaan Lagrange pada hasil dari proses pengintegralan tersebut, maka diperoleh matrik inersia massa, matrik inersia rotasi dan matrik kekakuan poros rotor untuk sistem poros simetris dengan tanpa gaya aksial.



Gambar 1. Diagram alir program.

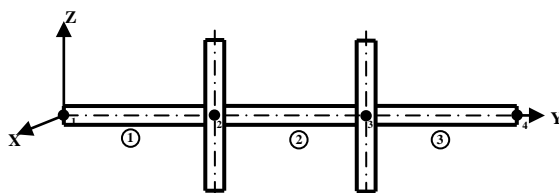
3. Pemodelan Sistem Rotor

Algoritma program disusun untuk menentukan frekuensi pribadi melalui beberapa tahapan yang meliputi pembentukan matrik elemen dan matrik global. Hasil berupa frekuensi pribadi diturunkan dari nilai eigen yang diperoleh. Gambar 1 mengilustrasikan diagram alir program.

Kasus yang dianalisis adalah poros dengan dua buah rotor yang masing-masing terletak pada jarak 0,13 m dan 0,27 m dari ujung poros. Adapun data-data poros dan rotor adalah:

1. Massa jenis poros (ρ_p) = 7800 kg/m³
2. Modulus elastisitas poros (E_p) = 2×10^{11} N/m²
3. Panjang poros (L_p) = 0,4 m
4. Diameter poros (d_p) = 0,02 m
5. Poisson ratio (ν) = 0,3
6. Diameter dalam rotor (d_1) = 0,02 m
7. Diameter luar rotor (d_2) = 0,3 m
8. Massa jenis rotor (ρ_d) = 7800 kg/m³

Sistem dianalisis untuk beberapa kasus dengan variasi ketebalan rotor (h). Dalam pemodelan, poros dimodelkan menjadi tiga elemen garis yang sama panjang dengan kondisi batas $u_1 = w_1 = u_4 = w_4 = 0$.



Gambar 2. Pemodelan elemen hingga.

4. Hasil dan Pembahasan

Algoritma program disusun berdasarkan metode elemen hingga sebagaimana dapat dilihat pada Gambar 1. Program disusun fleksibel untuk berbagai kasus poros dengan rotor ganda. Kasus yang dianalisis tergantung dari parameter awal yang dimasukkan ketika menjalankan program. Dalam makalah ini dianalisis kasus poros dengan dua rotor dengan dimensi dan berat yang sama. Analisis dilakukan pada empat kasus dengan perbedaan ketebalan rotor.

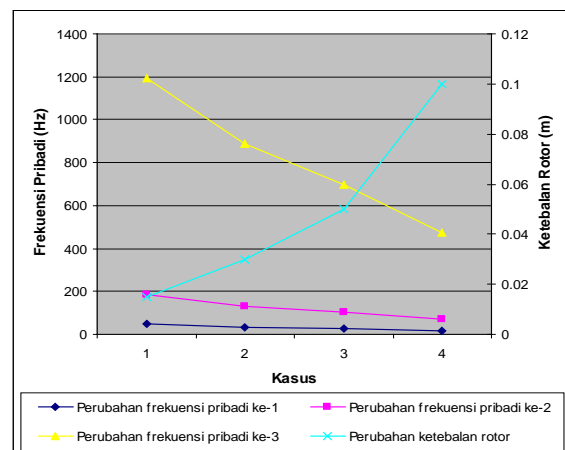
Sistem dianalisis untuk memperoleh frekuensi pribadi poros. Frekuensi pribadi yang diperoleh dari program dapat dilihat pada tabel 1. Dari tabel 1 dapat diketahui bahwa semakin tebal rotor semakin rendah frekuensi pribadi sistem. Hal ini dimungkinkan karena semakin tebal rotor berarti semakin besar massanya dimana massa mempunyai korelasi yang sangat kuat dengan frekuensi pribadi. Hal ini menunjukkan bahwa hasil dari program sejalan

dengan teori dasar getaran dimana bentuk kuadrat dari frekuensi pribadi berbanding terbalik dengan massa sistem.

Tabel 1. Frekuensi pribadi hasil dari program.

| Tebal Rotor | Frekuensi Pribadi ke-1 | Frekuensi Pribadi ke-2 | Frekuensi Pribadi ke-3 |
|-------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| 0.015 | 48.3392 | 185.7078 | 1192.283 |
| 0.03 | 34.5098 | 132.4278 | 886.8024 |
| 0.05 | 26.8346 | 102.9232 | 695.5169 |
| 0.1 | 19.0286 | 72.9436 | 476.6169 |

Gambar 3 mengilustrasikan pengaruh ketebalan rotor terhadap frekuensi pribadi sistem. Peningkatan ketebalan rotor sebesar 0.015 m dari 0.015 m menjadi 0.03 m menyebabkan penurunan frekuensi pribadi pertama sebesar 13.84 Hz dari 48.34 Hz menjadi 34.5 Hz. Hal yang sama juga terlihat ketika ketebalan rotor berubah 0.02 m dari 0.03 m menjadi 0.05 m. Frekuensi pribadi pertama turun 7.87 Hz dari 34.5 Hz menjadi 26.83 Hz. Trend yang sama terlihat pada semua frekuensi pribadi yang lain dimana peningkatan massa dalam jumlah yang kecil dapat menyebabkan penurunan frekuensi pribadi dalam jumlah yang signifikan. Hal ini merupakan faktor krusial yang harus dipertimbangkan dalam perancangan sistem rotor, terutama untuk sistem yang memerlukan frekuensi pribadi yang tinggi untuk mencegah terjadinya resonansi.



Gambar 3. Pengaruh perbedaan ketebalan rotor terhadap frekuensi pribadi.

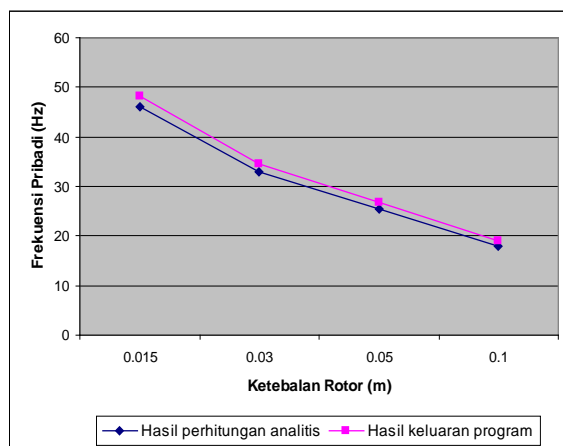
Algoritma program yang merupakan bentuk analisa numerik divalidasi dengan hasil perhitungan analitis. Tabel 2 menunjukkan hasil perhitungan analitis yang menunjukkan frekuensi pribadi sistem rotor untuk keempat kasus sistem rotor. Perhitungan dilakukan berdasarkan persamaan (2), (3) dan (9) dengan menerapkan Persamaan Lagrange yang meliputi proses pengintegralan yang berulang sehingga diperoleh persamaan gerak sistem. Proses ini menuntut waktu yang lama dengan ketelitian yang tinggi. Oleh sebab itu hanya frekuensi pribadi

pertama yang dihitung dalam perhitungan analitis untuk validasi hasil numerik keluaran program.

Tabel 2. Frekuensi pribadi hasil perhitungan analitis.

| Tebal Rotor | Frekuensi Pribadi (rad/s) | Frekuensi Pribadi (Hz) |
|-------------|---------------------------|------------------------|
| 0.015 | 289.562997 | 46.0668404 |
| 0.03 | 206.429285 | 32.8410226 |
| 0.05 | 160.266382 | 25.4969244 |
| 0.1 | 112.981274 | 17.9742936 |

Validasi hasil program dengan perhitungan analitis, sebagaimana dapat dilihat pada Gambar 4, menunjukkan hasil yang konsisten untuk semua kasus. Grafik frekuensi pribadi hasil analisis program dan hasil perhitungan hampir sejajar dan berhimpit. Grafik memperlihatkan bahwa hasil keluaran program secara konsisten lebih tinggi dari hasil analitis untuk semua kasus. Dari grafik juga dapat dilihat bahwa semakin tebal rotor selisih antara keduanya semakin kecil dimana untuk rotor dengan ketebalan 0.015 m selisihnya adalah 2.27 Hz, sedangkan pada ketebalan 0.1 m selisihnya hanya 1.05 Hz. Dengan demikian dari grafik dapat disimpulkan bahwa hasil yang diperoleh dari analisis program mendekati hasil perhitungan analitis dan hasil yang lebih akurat diperoleh pada sistem dengan rotor yang lebih tebal.



Gambar 4. Komparasi Frekuensi pribadi hasil program dengan perhitungan analitis.

5. Kesimpulan

Penggunaan program berbasis MATLAB cukup efektif untuk menganalisa frekuensi pribadi sistem poros dengan rotor ganda.

Dari hasil analisis diketahui bahwa massa rotor mempunyai korelasi dengan frekuensi pribadi sistem, dimana perubahan kecil pada massa rotor dapat menyebabkan perubahan yang cukup besar terhadap frekuensi pribadi sistem. Untuk itu sangat penting untuk mempertimbangkan karakteristik dinamik dalam perancangan sistem rotor.

Daftar Pustaka

- [1] Thelen, RF, dkk, 2007, Testing of A 3 MW High Speed Generator and Turbine Drive for A Hybrid Vehicle Propulsion System, *Proceedings of GT2007, ASME Turbo Expo 2007: Power for Land, Sea and Air*, Montreal, Canada, 14-17 Mei.
- [2] Murphy, BT, dkk, 2001, Rotordynamics design and test results for a model scale compulsator rotor, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol 37, no 1.
- [3] Hawkins, LA, Murphy, BT dan kajs, J, 2002, Shock and Vibration Testing of an Amb Supported Energy Storage Flywheel, *8th International Symposium on Magnetic Bearings*, Zurich, Switzerland.
- [4] Hearn, CS, dkk, 2007, Low Cost Flywheel Energy Storage for a Fuel Cell Powered Transit Bus, *Vehicle Power and Propulsion Conference*, 9-12 Sept., VPPC 2007, IEEE.
- [5] Murphy, BT dan Lorenz, JA, 2009, Simplified Morton Effect Analysis for Synchronous Spiral Instability, *Proceedings of PWR2009, ASME Power*, 21-23 Juli, Albuquerque, New Mexico.
- [6] Fleming, DP, 2006, Transient Response of Rotor on Rolling Element Bearings with Clearance, *7th IFToMM Conference on Rotor Dynamics*, Vienna, Austria, 25-28 September.
- [7] Hawkins, LA, Murphy, BT dan kajs, J, 2000, Analysis and Testing of a Magnetic Bearing Energy Storage Flywheel with Gain-Scheduled, Mimo Control, *ASME Turbo Expo, IGTI*,
- [8] Pichot, MA, dkk, 2001, Active magnetic bearings for energy storage systems for combat vehicles, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol 37, no 1.
- [9] Nelson, F.C., 2007, Rotor Dynamic without Equations, *International Journal of Comadem*, Vol 10 No 3, Juli, pp 2-10
- [10] Lelanne. M, dan Ferraris. G, 1990, Rotordynamics Prediction in Engineering, John Wiley and Sons, England.
- [11] Mubarak, AZ, Balia, FN dan Akhyar, 2007, Aplikasi Metode Elemen Hingga untuk Menentukan Frekuensi Pribadi dan Modus Getar Poros Rotor, *SNTTM VI*, Banda Aceh,.
- [12] Harsokoesoemo. D, dan Brojonegoro. SS, Metode Elemen Hingga, Jurusan Teknik Mesin ITB, Bandung,