第３回　数学コンテスト　問題

近畿大学理工学部数学物理学科数学コース主催

2000 **年** 10 **月** 28 **日開催**

- **問題は合計８問 (** A **問題４問と** B **問題４問) あります。この中から何問解いてもかまいません。**A **問題は高校数学の知識で解答可能です。ただし、**B **問題よりも** A **問題のほうが易しいとは限りません。各問題には**25 **ポイントが割り当てられています。**

- **出題者が採点して合計ポイントの高い者から順位をつけ、表彰及び賞品を贈呈します。もしも出題者の期待を上回る極めて優れた解答があれば、採点者の判断によりボーナスポイントが与えられる可能性があります。グループによる解答は、解答に携わった人の名前を必ず解答用紙に漏れなく列挙してください。その際、合計ポイント** x **に対して、解答に携わった人数を** n **人とするとグループの得点は、**

$$\frac{x}{\sqrt{n}}$$

  とします。

- **解答作成場所はどこでも自由です。参考書等の使用も自由です。午後４時ちょうどに再びこの場所（**31 **号館** 401 **教室）へ戻ってきて解答を提出してください。遅刻者は棄権と見なします。**

- **数学のプロフェッショナルへの質問は禁じます。**

それでは，数学を愛する者のフェアーな精神で、果敢に挑んでください。

GOOD LUCK !!

A1. ある本（数学書ではない）を読んでいた友人の X 氏は次のような文章に出会った：

「任意の正整数を取る．その数字の順序をでたらめに入れ替えてもう一つの整数を作る．大きい方から小さい方を引く．引き算の答の各桁の数字を足しあわせる．さらに，その答の各桁の数字を足しあわせる．足し算の答が 1 桁になるまでこれを続けると最終的な結果は必ず 9 になる．」

ここで言っていることは，次のようなことが常に成り立つという主張であろう：整数

$$A = 2758493871260897643$$

を取り，その数字の順序を入れ替え

$$B = 3187976043287582694$$

とする．これらの差

$$B - A = 429482172026685051$$

を取り，各桁の数字を全部加える：

$$4+2+9+4+8+2+1+7+2+0+2+6+6+8+5+0+5+1 = 72$$

これは 2 桁だからもう一度，各桁の数字を加える：

$$7+2=9$$

確かに 9 になった．ここで問題。

上の引用文で述べていることは本当に正しいだろうか．正しければ証明せよ．正しいとは限らなければ反例を挙げ，さらにどのような場合に正しいかを考察せよ．

ちなみに，上で引用した文章のあとには

「私はこの理由を説明できる数学者に会ったことがない．」

という一文が続いている，と X 氏は教えてくれた．それほど難しい問題なのか，それともこの本の著者が，実は数学者には一人も会ったことがないのか，皆さんはどう思われるかな？

A2. **インドの数学者ラマヌジャン**(Ramanujan)**の「天才ぶり」を示すエピソードに次の様なものがある。ラマヌジャンを見出したイギリスの有名な数学者ハーディ**(Hardy)**が病床にあったラマヌジャンを見舞いに行ったときの会話：**

ハーディ：私は No.1729 **のタクシーに乗ってきたが**,1729 **なんて数は何の変哲もない数だ …**
ラマヌジャン：いや, **それは非常に面白い数だ。なぜなら２つの立方数の和として２通りに表される最小の数だ！**
(**註：立方数とは自然数の立方**, **すなわち**, **３乗として表される数のこと。**)
そこで, **問題：**

(1) **ラマヌジャンの主張が正しい事を示せ。すなわち次の** (i), (ii)**を示せ。**

(i) **おのおのの組の数を加えると** 1729 **になるような２つの立方数の組を２つ見つけよ。すなわち**, **立方数の組** $(a_1^3, b_1^3), (a_2^3, b_2^3)$ **で**

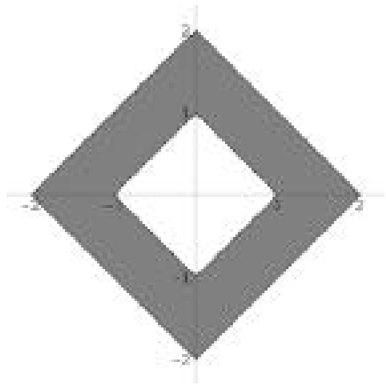
$$1729 = a_1^3 + b_1^3 = a_2^3 + b_2^3,\ a_1 \neq a_2$$

を満たすものを見つけ出せ。

(ii) 1729 **が２つの立方数の和として２通りに表される数のうち最小のものであることを示せ。**

(2) (1) **の** (ii) **で** 1729 **が上記の性質をもつ最小の自然数であることがわかったが**, **では**, **この性質をもつ２番目に小さい自然数は何か？**

A3. **ひとつの不等式から決まる領域をグラフ上に書くと、様々な形になっていることがわかる。また、グラフ上に描かれた複雑に見える領域が、工夫するとたった一つの不等式で書けることもある。**



例えば、上図の灰色の領域は、 $|(2|x|+2|y|-3)|\leq 1$ **という不等式ひとつで記せてしまう。**

(1) **では、次の不等式が与える領域を図示しなさい。。**

(i) $|x|+|y|\leq 1$

(ii) $(|x|+2|y|-2)(2|x|+|y|-2)\leq 0$

(2) **次に、以下の図**A、B **の灰色の領域を、必要ならば絶対値と、多項式と１つの不等号を組み合わせて、ひとつの不等式に表しなさい。**

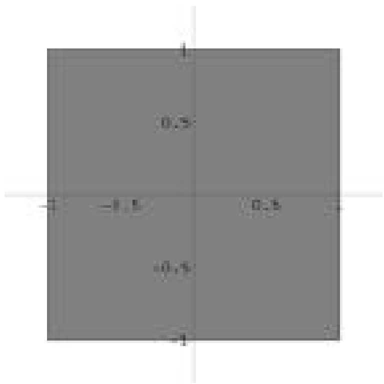


図 A

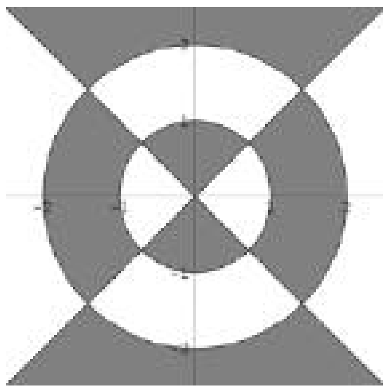


図 B

注意: **図** B **の上下は、無限に灰色の領域が続いているものとします。**

A4. **実数** x **に対して** $[x]$ **は** x **を越えない最大の整数を表すものとして、関数**

$$f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$$

を考える。

(1) n **を整数として**

$$\lim_{x \to n} f(x)$$

を求めなさい。

(2) $y = f(x)$ **のグラフを描きなさい。**

(3) n **を任意の整数とする。このとき自然数** k **および** $0 < \alpha \leq 1$ **である実数** α **に対して**

$$F(n, k, \alpha) = \int_{n-\alpha}^{n+k-\alpha} f(x)dx$$

を求めなさい。

B1. A_1A_2 **を長さ** 1 **の線分とする。**
A_1A_2 **の内分点から始まる、内分点の無限列について、いろんな場合を考えてみよう。**

(1) A_1A_2 **を** $1:2$ **に内分する点を** A_3,
A_2A_3 **を** $1:2$ **に内分する点を** A_4,
$\cdots$
$A_{n-1}A_n$ **を** $1:2$ **に内分する点を** A_{n+1} **とし、**
更にこのような操作を繰り返し、点列 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots$ **をつくる。**
このとき、

$$\lim_{n\to\infty} A_1A_n$$

の値を求めよ。

(2) A_1A_2 **を** $1:2$ **に内分する点を** A_3,
A_2A_3 **を** $1:3$ **に内分する点を** A_4,
$\cdots,$
$A_{n-1}A_n$ **を** $1:n$ **に内分する点を** A_{n+1} **とし、**
更にこのような操作を繰り返し、点列 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots$ **をつくる。**
このとき、

$$\lim_{n\to\infty} A_1A_n$$

の値を求めよ。

B2. **次の級数和を求めよ**.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1^3+2^3+\cdots+n^3}$

但し, **必要ならば** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ **を用いてもよい**.

B3. **4次元ベクトル空間** R^4 **の任意の単位ベクトル** $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ **があたえられたとき**, **それに直交する3つのベクトルを**

$$\begin{aligned}\vec{v_1} &= (-x_2, x_1, -x_4, x_3)\\ \vec{v_2} &= (-x_3, x_4, x_1, -x_2)\\ \vec{v_3} &= (-x_4, -x_3, x_2, x_1)\end{aligned}$$

と定める. **このとき**, $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ **は**, $\vec{v}$ **の選び方に依らずいつでも一次独立であること**, **すなわち**

$$\alpha\vec{v_1} + \beta\vec{v_2} + \gamma\vec{v_3} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \beta = \gamma = 0$$

が成り立つことを示せ.

B4. **4つの図（次ページ）の説明をします。最初に、図1のように** x y **座標平面に** x **座標もしくは** y **座標が整数であるような点のみを通る直線を引き、格子をつくります。この格子点にすべての自然数を対応させていくのですが、ここでは3通りの対応を考えます。まず、図2では、原点と** x **軸の正の部分を含む第一象限の下三角部分の格子点にのみ自然数を対応させます。座標** (x, y) **の格子点に対応する自然数を** $a(x, y)$ **と書くことにすると、図のようにここでは** $a(0,0) = 1,\ a(1,0) = 2,\ a(1,1) = 3,\ a(2,0) = 4, \ldots$ **というふうに対応させます。次に図3では、原点と** x **軸と** y **軸の正の部分を含む第一象限の格子点に自然数を対応させます。同様に** $b(x, y)$ **で 座標** (x, y) **に対応する自然数を表すならば、ここでは** $b(0,0) = 1,\ b(1,0) = 2,\ b(1,1) = 3,\ b(0,1) = 4,\ b(2,0) = 5, \ldots$ **というふうに対応させます。最後に図4では、すべての格子点に自然数を対応させます。同様に** $c(x, y)$ **で 座標** (x, y) **に対応させる自然数を表すと、** $c(0,0) = 1,\ c(1,0) = 2,\ c(1,1) = 3,\ c(0,1) = 4,\ c(-1,1) = 5, \ldots$ **というふうに対応させます。どの図も、これらの規則に従って無限に続いているものとします。**

(1) $0 \le x \le y$ **を満たす整数** x, y **に対して、** $a(x, y)$ **を** x **と** y **の多項式でなるべく簡単に表しなさい。**

(2) **正の整数** x, y **に対して、** $c(x, y)$ **を** $b(*, *)$ **と** x **と** y **の多項式でなるべく簡単に表しなさい。**

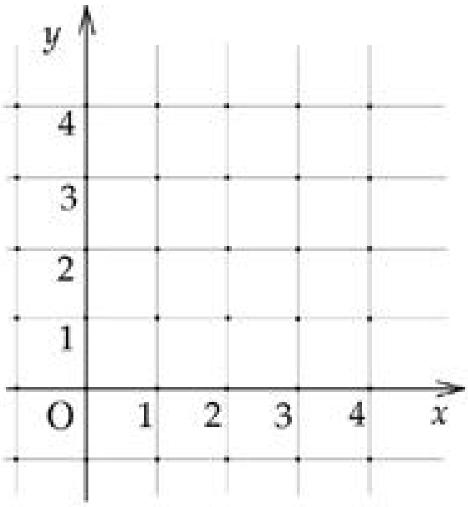

y
4
3
2
1
O
1
2
3
4
x

図　1

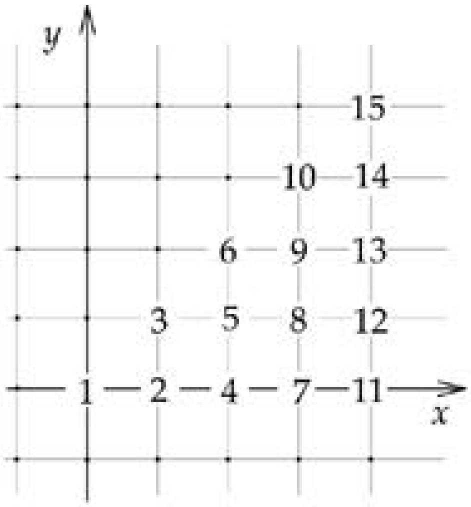

y
15
10
14
6
9
13
3
5
8
12
1
2
4
7
11
x

図　2

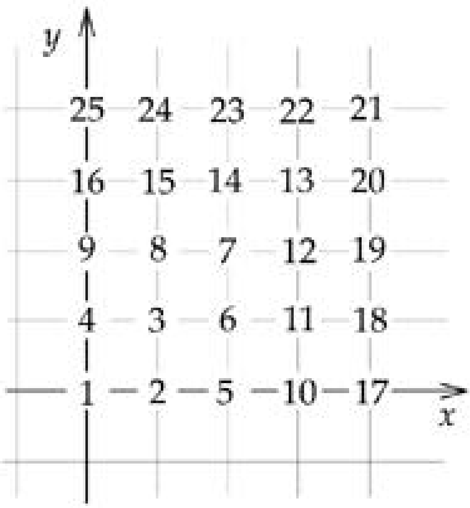

y
25 24 23 22 21
16 15 14 13 20
9 8 7 12 19
4 3 6 11 18
1 2 5 10 17
x

図　3

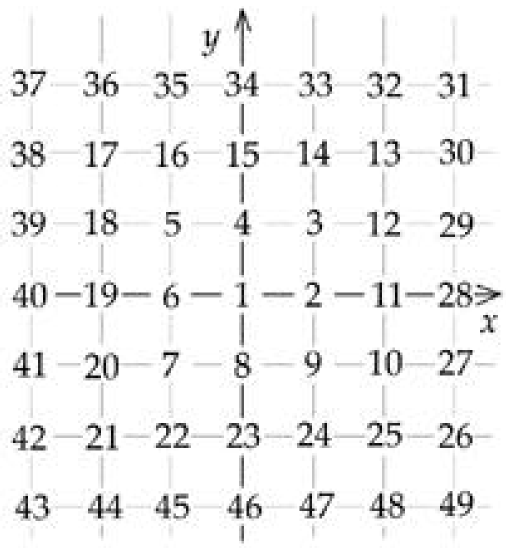

y
37 36 35 34 33 32 31
38 17 16 15 14 13 30
39 18 5 4 3 12 29
40 19 6 1 2 11 28
x
41 20 7 8 9 10 27
42 21 22 23 24 25 26
43 44 45 46 47 48 49

図　4