

第14回 数学コンテスト 問題

近畿大学理工学部理学科数学コース主催¹

解答作成場所はどこでも自由です。但し、15:00 に再びこの場所（31 号館 4 階 401 教室）へ戻ってきて解答を提出してください。遅刻者は棄権と見なします。合計ポイントの高い者から順位をつけ、優秀者を表彰し賞品を贈呈します。グループによる解答は、解答に携わった人の名前を必ず解答用紙に漏れなく列挙してください。その際、合計ポイント x に対して、解答に携わった人数を n 人とするグループの得点は、

$$\frac{x}{\sqrt{n}}$$

となります。

問題は合計 9 問（A 問題 5 問と B 問題 4 問）あります。A 問題は高等学校卒業までに学ぶ知識で解答可能な問題、B 問題はそれより少し難しい数学が必要となるかもしれない問題です。この中から、合計 3 問を選択して解答してください。4 問以上の答案を提出した場合は、失格となる恐れがあります。問題番号の横に、正解に与えられるポイントが書かれていますが、選択した 3 問の合計ポイントが 100pt を上回っても構いません。また、出題者の期待を上回る極めて優れた解答があれば、採点者の判断によりボーナスポイントが与えられる可能性があることも念頭に置いて、解答に臨んでください。

注意事項

- 1 問ごとに新しい解答用紙を使用し、2 問を同じ用紙に書かないようにしてください。
- すべての解答用紙に名前を書いてください。
- 答案は、答えのみではなく、思考の手順がたどれる形で書いてください。
- 解答の読みやすさや明確さも採点の対象となります。
- 電卓・コンピュータ等の使用は禁止します。
- グループエントリーでない場合は参加者同士で相談してはいけません。
- 提出された解答用紙は返却しません。

それでは、数学を愛する者のフェアプレイ精神で、
果敢に挑んでください。

GOOD LUCK !!

¹2011 年 11 月 3 日 開催

A 問題

問題 A-1

45pt

正数 a, b, c, d が四面体の 4 つの面の面積となるための必要十分条件を, a, b, c, d に関する不等式を用いて表せ.

問題 A-2**30pt**

自然数 n に対して,

$$E_n = \int_0^\pi e^x \sin^n x \, dx$$

と定める. このとき,

$$[E_n] = n$$

を満たす n を求めよ. ただし, $[x]$ は実数 x を超えない最大の整数を表し, 自然対数の底 e と円周率 π の値に関して次の不等式

$$2.71 < e < 2.72, \quad 3.1 < \pi < 3.2$$

だけは用いてもよい.

問題 A-3**30pt**

将棋の用語に「千日手 (せんにちて)」というのがある。これは、同じ局面 (盤上の駒の配置, 手番, 対局者の持ち駒の種類と個数が全く同じである状態) が繰り返し現れ, 永遠に勝負がつかない (ように見える) 状態を意味する。このときは対局を中止し, 先手, 後手を入れ替えて初めからやり直しとなる (日本将棋連盟の規則では同じ局面が 4 度現れたときに千日手と判定するそうである)。将棋に千日手が存在するのは, 盤上の駒の数が減るばかりではなく, 持ち駒を打つことによって増えることもあるのが理由の 1 つと考えられる。

ここでは石取りゲームを考えよう。通常の石取りゲームでは, 競技者が石を取っていただけなので, 有限回取ることによって必ず石がなくなって勝負がついてしまう。しかし, 取った石を元に戻すルールを取り入れると, 石取りゲームでも千日手となるものが作れるのではないかと予想される。

問題に移る前に, 以後用いる「千日手」の概念をきちんと定義しておこう。このあと千日手とは, 各競技者が自分が負けないよう手を打った場合, いつまでも勝負がつかない状態を指すものとする (したがって, 競技者のいずれかがミスをすることによってのみ勝敗が決するわけである)。

問. すべての a, b の組 ($a = 1, 2, b = 1, 2$) に対して, 次のゲームが千日手に陥るかどうか決定せよ:

場に 5 個の石を置く。2 人の競技者は自分の手番が回ってきたときに, 場の石のうち 1 個以上 a 個以下を取るか, すでに取った石のうち 1 個以上 b 個以下を場に戻すか, いずれかの操作をしなければならない。場に石がなくなった時点で奇数個の石を持っている方を勝ちとする。なお, 手番は, 先手 - 後手 - 先手 - 後手 - ... のように, 2 人の競技者に交互に割り当てるものとする。

注. 解答には, 実際に千日手となる, またはならない理由 (証明) をできるだけ簡潔明瞭に述べること。

問題 A-4**20pt** m, n に関する等式

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = m^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

を満たす自然数の組 (n, m) を求める問題は, Lucas の問題として知られている. ①の解があるとなれば, n を 24 で割った余りは 0 または 1 であることを示せ.

実は, ①の解は $(1, 1)$ と $(24, 70)$ のみであることを Watson が 1918 年に証明している. Watson の証明は楕円関数を用いるもので, 現在では楕円関数を用いない証明も知られている.

問題 A-5

30pt

実数を成分とする 2 次正方行列 $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で, 等式

$$X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 2X + E = O$$

を満たすものをすべて求めよ. ただし, E, O はそれぞれ 2 次の単位行列, 零行列を表す.

B問題

問題 B-1

25pt

自然数 a, b, c が等式

$$a^2 + b^2 = c^2$$

を満たすとき, a, b, c をピタゴラス数という. 次のことが知られている.

定理

ピタゴラス数は, 2つの自然数 m, n ($m > n$) を用いて

$$a = 2mn, \quad b = m^2 - n^2, \quad c = m^2 + n^2$$

と表される自然数の組か, これらを一斉に定数倍して得られる自然数の組である.

では, 等式

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2 \quad \dots\dots ①$$

を満たす整数 a, b, c, d に対する類似の公式はあるだろうか.

問題. 等式①を満たす整数 a, b, c, d を3個の整数 l, m, n で表す, 上の定理と類似の命題を作れ.

問題 B-2

35pt

ふたつの図形 A, B が与えられたときに、「 A の中に B と合同な図形を互いに重ならないようにくつ入れることができるか」という「パッキング問題」とか「充填問題」と呼ばれる問題があります。この種の問題は日常生活においても、たとえば文化祭の準備でひとつの教室にたくさんの机を押し込むようなときに、しばしば現れます。ここでは、「 n 次元立方体」に「 n 次元球体」がどのくらい入るかを考えます。

n 次元空間に関わる言葉の準備

平面に x 軸と y 軸という直交座標軸を描くことで、平面上の点は 2 つの実数 (x 座標と y 座標) の組と同一視することができます。空間では、さらに z 軸を描くことができ、3 つの実数の組が点を定めます。その素直な一般化として、 n 次元空間 \mathbb{R}^n というものを、 n 個の実数の組全体からなる集合と定義しましょう。すなわち、

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

とします。三平方の定理を念頭に置くと、2 点間の距離は、平面においても空間においても、それらの座標の各成分の差の 2 乗を足し合わせたものの平方根として求められます。 n 次元空間においても素直に一般化して、2 点 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ に対し、それらの距離 $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$$

により定義することにします。

平面内の正方形、空間内の立方体の一般化として、 n 次元立方体 I^n を

$$I^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid -1 \leq x_i \leq 1 \ (i = 1, 2, \dots, n)\} \subset \mathbb{R}^n$$

により定義します。

最後に、平面内の円板、空間内の球体の一般化として、 n 次元球体を定義します。 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ と $r > 0$ に対し、中心 \mathbf{x} 、半径 r の n 次元球体 $B^n(\mathbf{x}, r)$ を

$$B^n(\mathbf{x}, r) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < r\} \subset \mathbb{R}^n$$

により定義します。

以上の定義のもとで、次の問題に答えてください。

問題. 自然数 n と正の実数 r に対し、整数 $N(n, r)$ を「 I^n に含まれる半径 r の n 次元球体たちで互いに交わらないもの」の個数の最大値と定義する。このとき、以下の 2 つの条件を同時に満たす 0 以上の実数 R を求めよ。

- (i) $0 < r < R$ であるような任意の数 r を固定し、次元 n をいろいろと動かすと、いくらでも大きな $N(n, r)$ が現れる。
- (ii) $r > R$ であるような任意の数 r を固定すると、 $N(n, r)$ は (次元 n によらない) ある一定の値を超えない。

問題 B-3

30pt

折り紙による作図に挑戦しましょう。

次に挙げる折り目作成の7つのルールに従って、道具を使わずに一度に1本の折り目(直線)を作るという動作に加えて、折り目が交わる場所に点を置くという動作を有限回繰り返すことを、ここでは「折る」ということにします。

折り目作成の7つのルール：直線 k, ℓ と点 p, q があるとき、次のような折り目を作ることができる。

- k と ℓ が重なるような折り目。
- p と q が重なるような折り目。
- p と q の両方を通る折り目。
- p を通り ℓ に垂直な折り目。
- p を ℓ に乗せ、 q を通る折り目。
- p を k に乗せ、 ℓ に垂直な折り目。
- p を k に乗せ、 q を ℓ に乗せる折り目。

実は、これら7つのルールは最後のひとつのルールに集約することができます。

問題：点 $0, 1$ と実軸、虚軸が与えられた解答用紙を複素平面とみなします。次に与える方程式の解を頂点とする多角形を、「折る」ことによって作図してください。解答にはそれぞれ1枚の紙を使ってください。採点のため、得られた多角形の辺を定規と鉛筆を使って強調してください。

$$(1) z^7 + (\sqrt{3} - \sqrt{2} - 1)z^6 + (-\sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} + 3)z^5 + (\sqrt{6} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} - 3)z^4 \\ + (-\sqrt{6} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 3)z^3 + (\sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 3)z^2 + (-\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)z - 1 = 0$$

$$(2) z^4 + \frac{3}{4}z^2 + 1 = 0$$

$$(3) z^{11} + \frac{3}{4}z^9 + z^7 - z^4 - \frac{3}{4}z^2 - 1 = 0$$

次のページにヒントがあります。

2つのヒント

- 問題の3つの方程式のすべての解の絶対値は1である.
- 折り紙により3次方程式 $t^3 + at^2 + bt + c = 0$ を解くためのヒント
 点 $\left(\frac{c-a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ を直線 $x = -\frac{a+c}{2}$ に, 点 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ を直線 $y = -\frac{1}{2}$ にそれぞれ乗せる
 ような折り目 ℓ は, 焦点が $\left(\frac{c-a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ であり準線が $x = -\frac{a+c}{2}$ である放物線

$$\left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = 2c\left(x + \frac{a}{2}\right) \quad \dots\dots ①$$

と焦点が $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ であり準線が $y = -\frac{1}{2}$ である放物線

$$x^2 = 2y \quad \dots\dots ②$$

との共通接線である. ℓ の方程式を $y = px + q$ とすると, $t = p$ が3次方程式 $t^3 + at^2 + bt + c = 0$ の実数解となる.

実際, ℓ が ① と点 (x_1, y_1) で接するとき,

$$\left(y_1 - \frac{b}{2}\right)^2 = 2c\left(x_1 + \frac{a}{2}\right)$$

が成り立ち, ℓ の方程式は

$$y - y_1 = \frac{c}{y_1 - \frac{b}{2}}(x - x_1)$$

と表される. よって $p = \frac{c}{y_1 - \frac{b}{2}}$, $q = y_1 - \frac{c}{y_1 - \frac{b}{2}}x_1$ であり, $q = \frac{b}{2} + \frac{a}{2}p + \frac{c}{2p}$ を得る.

また, ℓ が ② と点 (x_2, y_2) で接するとき,

$$x_2^2 = 2y_2$$

が成り立ち, ℓ の方程式は

$$y - y_2 = x_2(x - x_2)$$

と表される. よって $q = -\frac{1}{2}p^2$ となるから, $p^3 + ap^2 + bp + c = 0$ を得る.

3次方程式 $t^3 + at^2 + bt + c = 0$ において $c = 0$ の場合を考えれば, 2次方程式の場合に帰着できる.

問題 B-4**45pt**

m, n を自然数とする．次の中から 1 つ選び，その積分値を求めよ．ただし，無差別級における「求める」の意味は各自考えて解答せよ．

【初級:10pt】 $\int_0^1 \left(\frac{\sin 3\pi x}{\sin \pi x} \right)^3 dx$

【中級:10pt】 $\int_0^1 \frac{\sin n\pi x}{\sin \pi x} dx$

【上級:30pt】 $\int_0^1 \left(\frac{\sin n\pi x}{\sin \pi x} \right)^3 dx$

【無差別級:45pt】 $\int_0^1 \left(\frac{\sin n\pi x}{\sin \pi x} \right)^m dx$

第 14 回数学コンテスト B-3 解答用紙

氏名:

小問番号:

