CAUCHY: ¿INFINITESIMALES VERSUS LÍMITE O INFINITESIMALES Y LÍMITE?

Iván Medrano, Luis R. Pino-Fan
Universidad de Los Lagos

Resumen: En esta comunicación presentamos un estudio histórico-documental sobre la concepción de Cauchy de dos objetos matemáticos: los infinitesimales y el límite de una cantidad variable. Nuestra fuente de referencia es Cours D'Analyse, obra de dicho autor. Nuestro análisis e interpretación de las ideas expresadas por Cauchy con referencia a estos conceptos, considera la amplia red conceptual establecida por objetos matemáticos tales como infinito, números reales, continuo numérico, aproximación, función y recta real, en la emergencia del concepto de límite. Así mismo, consideramos la visión disciplinar y metodológica expresada y trabajada por el autor. Este análisis está orientado a la reconstrucción epistemológica del concepto de límite, para su posterior uso en la construcción de secuencias de tareas que faciliten su comprensión por parte de los estudiantes.

Variable, límite, infinitesimal, infinito, continuo

ANTECEDENTES

Considerando como standard la formalización del cálculo diferencial e integral desarrollada por Weirstrass, con el concurso de Cantor y Dedekind (Boyer, 2013) que significó el rechazo de los infinitesimales, la visión de los historiadores contemporáneos de las matemáticas con respecto al aporte de Cauchy a las concepciones modernas del cálculo y del análisis, revela una sorprendente falta de consenso (Tall y Katz, 2014). Algunos historiadores de la matemática, consideran a Cauchy un precursor del análisis desarrollado por Weirstrass (Grabiner, 1983, citado por Tall y Katz, 2014, p. 2). Para otros, encabezados por Robinson, creador del análisis no standard, Cauchy es un antecesor de esta teoría (Lakatos, 1987, p. 67). También está una tercera posición que considera su trabajo anclado en las concepciones de Newton y Leibniz (Schubring, 2005, citado por Tall y Katz, 2014, p. 2). Nuestro estudio se centra en el texto Cours D'Analyse de Cauchy (1821) y en el contexto matemático en que se desarrolla.

MARCO TEÓRICO

En este trabajo se considera como referente teórico el enfoque onto-semiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS). En el EOS la actividad matemática es modelada en términos de prácticas, configuraciones de objetos primarios y procesos que son activados por las prácticas (Godino & Batanero, 1994, p.334). Se consideran como objetos primarios: los problemas, los elementos lingüísticos, las definiciones, las proposiciones, los procedimientos y los argumentos. El término configuración se usa para designar un sistema de objetos primarios que están relacionados unos con otros. El objetivo de este trabajo es describir los objetos primarios con los cuales pueden construirse configuraciones, tanto del límite de una cantidad variable como de los infinitesimales.

EL "COURS D'ANALYSE" DE CAUCHY

En la introducción de su texto, Cauchy (1821) se refiere a las orientaciones generales de su obra, señalando entre ellas: "hablando de la continuidad de las funciones, yo no he podido dispensarme de hacer conocer las propiedades principales de las cantidades infinitesimales, propiedades que sirven de base al cálculo infinitesimal" (p. ii). Con esta primera precisión, el lector es advertido del rumbo y procedimientos que se usarán en el desarrollo de esta versión del cálculo infinitesimal. Continuando con el tratamiento que él hace de esta disciplina, el autor expresa: "...En cuanto a los métodos, yo he buscado dar todo el rigor que se exige en la geometría …" (Ibíd., p. iii). Se aprecia en esta declaración de principios, una búsqueda de rigor que sea similar a la lograda por la formalización axiomática deductiva de la geometría, pero ¿cuáles son los elementos básicos sobre los que se pretende construir este sistema formal? Más que dar una respuesta metodológica y teórica a esta interrogante, Cauchy muestra estos elementos en su propuesta de formalización del cálculo infinitesimal, ellos son: los conceptos de número y cantidad (considerados como conceptos diferentes).

Número y cantidad en Cauchy

Las definiciones de número y cantidad están dadas por:

> …Nosotros aplicamos siempre la denominación de números en el sentido empleado en aritmética, haciendo emerger los números de la medida absoluta de las magnitudes, y aplicaremos únicamente la denominación de cantidad a las cantidades reales positivas o negativas, es decir, a los números precedidos de signos + o -. De hecho, nosotros miramos las cantidades como destinadas a expresar los crecimientos o las disminuciones, de manera que una magnitud dada será simplemente representada por un número, si uno se limita a compararla con otra magnitud de la misma especie considerada como unidad; y por un número precedido de signo + o de signo -, si uno la considera como destinada principalmente a servir al crecimiento o la disminución de una cantidad fija de la misma especie… (Cauchy, 1821, p. 2)

Cauchy define el valor numérico de una cantidad, el valor absoluto de una cantidad, como:

> Nosotros llamaremos valor numérico de una cantidad al número que de hecho es la base, cantidades iguales aquellas que tienen el mismo signo con el mismo valor numérico y cantidades opuestas dos cantidades iguales en sus valores numéricos pero opuestas en sus signos. (Ibíd.)

De lo expuesto, se establece que el concepto de número tiene su raíz en la consideración de la medida de una magnitud, entendiéndose la medida como una relación de comparación entre la magnitud dada y otra de la misma especie, escogida como unidad o fuente de referencia, y una vez establecida esta comparación, permanece fija (i.e., tiene un carácter estático). Por lo que se puede inferir, hasta aquí, el concepto de *número* en Cauchy está relacionado con el continuo geométrico de la geometría euclidiana. En cambio, el concepto de *cantidad*, está relacionado con el continuo numérico. También se vislumbra el significado de una cantidad como instrumento para cambiar otra cantidad dada, al referirse a ella como destinada al crecimiento o decrecimiento de una cantidad fija de una misma especie, es decir el concepto de cantidad tiene un carácter dinámico. El concepto de cantidad variable es un importantísimo elemento operacional para la construcción del cálculo que desarrolla Cauchy: "Se denominará cantidad variable a aquella que uno considera que recibe sucesivamente numerosos valores diferentes unos de los otro". (Ibíd., p. 4)

Con base en la definición de cantidad variable, se introducen los conceptos de límite e infinitesimal:

> Cuando los valores sucesivos atribuidos a una misma variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que se termina por diferir de él tan poco como uno lo quiera, este último valor es llamado el límite de todos los otros. (Ibíd., p. 4)

En esta definición de límite hay dos aspectos ligados entre sí, los cuales necesitan precisarse: a) valores sucesivos atribuidos a una misma variable; y b) aproximación indefinida a un valor fijo. La siguiente definición que introduce Cauchy es la de infinitesimal o cantidad infinitamente pequeña:

> Cuando los valores numéricos sucesivos de una misma variable decrecen indefinidamente, de manera que sean menores que todo número dado, esta variable se denomina un infinitesimal o una cantidad infinitamente pequeña. Una variable de esta especie tiene a cero por límite. (Ibíd.)

Una definición matemática actual usa la forma lógica de equivalencia "sí y sólo sí". La descripción anterior de Cauchy de una cantidad variable como infinitesimal, tiene la forma lógica de una implicación o condicional lógico: *si* el valor absoluto de una cantidad variable decrece de tal manera que es menor que cualquier número positivo dado *entonces* la cantidad variable es un infinitesimal. Posteriormente, para trabajar con los infinitesimales, Cauchy necesita considerarlos como existentes en sí, y por lo tanto, caracterizarlos adecuadamente. ¿Si designamos una cantidad variable como infinitesimal, entonces el conjunto de sus valores absolutos decrece de tal manera que es menor que cualquier número positivo dado? Cauchy (Ibíd.), responde la cuestión con la siguiente afirmación: "…Sea α una cantidad infinitesimal, es decir una variable cuyo valor numérico decrece indefinidamente…" (p. 27). Por lo tanto, una cantidad variable es un infinitesimal, sí y sólo sí su valor numérico decrece indefinidamente de manera que converge hacia el límite cero. Cauchy (Ibíd.) precisa lo que debe entenderse por un decrecimiento constante y un decrecimiento indefinido:

> La superficie de un polígono regular circunscrito a un círculo dado decrece constantemente, a medida que el número de sus lados aumente, pero no indefinidamente, puesto que ello tiene por límite la superficie del círculo. De la misma manera, una variable, que admite por valores sucesivos solamente los diferentes términos de la sucesión: 2/1,3/2,4/3,5/4,6/5…, decrece constantemente, pero no indefinidamente, puesto que sus valores sucesivos convergen hacia el límite 1. …. una variable, que asume por valores sucesivos los diferentes términos de la sucesión: 1/4,1/3,1/6,1/5,1/8,1/7…, no decrece constantemente, porque la diferencia entre dos términos consecutivos de esta sucesión es alternadamente positiva y negativa; … ella decrece indefinidamente, porque su valor terminará por estar debajo de todo número dado. (p. 27)

En la concepción de límite de una variable se pueden distinguir dos niveles de significación: El primero geométrico y de carácter topológico, al ser representados geométricamente, la sucesión de valores que asume la variable, en una recta dirigida por los puntos que tienen por coordenadas los valores de dicha sucesión, se acumularán en torno de un punto fijo que tiene por coordenada el valor fijo 'límite de la variable'. El punto fijo es denominado en topología punto de acumulación (Rudin, 1966, p. 40). El segundo nivel, analítico, caracterizado por el conjunto de valores absolutos de las diferencias entre los valores que asume la variable y el valor fijo (límite de la variable), representa un proceso de decrecimiento indefinido. Interpretamos, coincidiendo con Tall y Katz (2014), que la definición de límite de Cauchy describe un proceso, pero dicho proceso es un proceso de variación de cantidades dadas por una sucesión, y dirigido a un valor fijo finito o un valor infinito. El decrecimiento y crecimiento indefinido, son casos particulares de este proceso. Basándonos en la definición de estos procesos, interpretamos la definición de límite de Cauchy (para el caso finito): el valor L, finito, es un límite de la variable x, cuando esta asume el conjunto de valores dados por una sucesión, sí y sólo sí para todo real positivo μ: $|L-x|< \mu$, para todos los valores que asume x, menos un número finito de ellos. Relacionando la definición de infinitesimal con esta formulación de la definición de límite, es fácil establecer la siguiente equivalencia: sea x una variable que asume los valores dados por una sucesión, L una cantidad fija. u=L-x, otra variable, u es un infinitesimal sí y sólo sí L es límite de la variable x. Esta equivalencia se usa particularmente en la exposición de la continuidad. La definición de límite de Cauchy tiene una diferencia con la definición de Weirstrass: Cauchy admite la existencia de varios (infinitos) valores límites de una función f(x), cuando la variable independiente x se aproxima a un valor fijo dado p; mientras que en la concepción de Weirstrass se contempla la unicidad del límite. La explicación de esta diferencia, a nuestro entender, se encuentra en la definición de número real utilizada por Cauchy. Para él, un número real es el límite de una sucesión de números racionales. Posteriormente, con el trabajo de Cantor, se concibe un número real como una clase de equivalencia formada por infinitas sucesiones de números racionales que tienen como límite el número real. Lo anterior, aplicado al siguiente teorema (Rudin, 1966, p. 85), constituye para nosotros la explicación de la diferencia conceptual entre la definición de Cauchy y la de Weirstrass: "Sea $f: E \subseteq R \to R, p$ punto de acumulación de E. El $\lim_{x\to p} f(x) = q$ sí y sólo sí $\lim_{n\to\infty} f(p_n) = q$ para toda sucesión $\{p_n\}$ en E, tal que $p_n \neq p$, $\lim_{n\to\infty} p_n = p$". Para Cauchy dos sucesiones cualesquiera (de números racionales) con términos diferentes convergiendo a un mismo límite, son consideradas como diferentes, y las sucesiones imágenes determinadas por la función pueden converger a valores diferentes. En cambio, con la definición de número real dada por Cantor, para que el conjunto de sucesiones imágenes tengan límite, es necesario la convergencia de todas ellas a un mismo número real.

CONCLUSIONES

En relación al análisis expuesto, estimamos que hay razones fundamentadas para establecer en la exposición de Cauchy, una integración consistente de dos concepciones frecuentemente presentadas como antagónicas: los infinitesimales y el límite de una variable. Así mismo, su presentación del cálculo infinitesimal está fuertemente condicionada por el contexto matemático imperante en su época, expresado por: las nociones de número real, función, infinito, continuo, las relaciones entre la geometría euclidiana y la cartesiana, y la visión disciplinar del álgebra. También es importante destacar, en los ejemplos de límite y en el uso de sucesiones, una intuición geométrica de carácter topológico (punto de acumulación) de la noción de límite. Aspectos relevantes que se deberían rescatar para su enseñanza son: la dimensión geométrica intuitiva, la concepción fuertemente intuitiva de los infinitesimales y el continuo numérico. Además, estos aspectos potencian la presentación de visiones alternativas, pre-formales, pero consistentes de la noción de límite, que al permitir varias representaciones del concepto pueden facilitar su comprensión y dominio por parte del estudiante.

Agradecimientos: Trabajo desarrollado en el marco del proyecto de investigación FONDECYT N°11150014.

Referencias

Boyer, C. (2013). *Historia de la matemática*. (M. Martínez.Trad.). Madrid, España: Alianza Editorial.

Cauchy, A. (1821). *Cours D'Analyse de L'École Royale Polytechnique.* Chez Debure fréres, Libraries du Roi et de la Bibliothéque du Roi.

Godino J.D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques,*14(3), 325-355.

Lakatos, I. (1987). *Matemáticas, ciencia y epistemología.* Madrid, España: Alianza Editorial.

Rudin,W. (1966). *Principios de análisis.* Madrid,España: Ediciones del Castillo.

Tall, D., & Katz, M. (2014). A cognitive analysis of Cauchy's conceptions of function, continuity, limit, and infinitesimal, with implications for teaching the calculus. *Educational Studies in Mathematics, 86*(1), 97-124.