"CUÁNTOS TROZOS LE FALTAN" – USO DE ESTRATEGIAS DE RESTA PARA LA COMPARACIÓN DE FRACCIONES

David M. Gómez[1], Orielle Cisternas[2], Mario Reyes[2], Pablo Dartnell[1]
Centro de Investigación Avanzada en Educación[1] (CIAE), Universidad de Chile
Departamento de Psicología[2], Facultad de Ciencias Sociales, Universidad de Chile

Resumen: La tarea matemática de comparación de fracciones engloba una multitud de procesos cognitivos y estrategias posibles de resolución. Estas estrategias no se limitan a aquéllas enseñadas en la escuela, sino que incluyen también varias desarrolladas espontáneamente por los estudiantes. Una de ellas es la de "razonamiento por gap", donde se evalúa indirectamente el tamaño de una fracción a partir del número de trozos que a ésta le falta para "completar el entero". Esta estrategia es matemáticamente incorrecta, pero permite obtener respuestas correctas en una gran cantidad de problemas de comparación de fracciones. En esta comunicación, presentamos datos preliminares de una muestra de adultos jóvenes (N=61) quienes contestaron un cuestionario de comparación mental de fracciones diseñado para evidenciar el uso de esta estrategia. Los resultados muestran que el desempeño es significativamente modulado por la utilidad del razonamiento por gap, sugiriendo que los participantes consideran esta dimensión al menos implícitamente. Discutimos implicancias de estos resultados para la enseñanza de las fracciones.

Fracciones, comparación, estrategias, cognición, aprendizaje

INTRODUCCIÓN

La enseñanza y aprendizaje de las fracciones, y de los números racionales más en general, es una empresa llena de dificultades. El hecho que muchos adultos, incluyendo futuros profesores (Depaepe et al., 2015; Olfos & Guzmán, 2011), carecen de un conocimiento sólido sobre fracciones, convierte esta situación en un círculo vicioso que requiere de múltiples esfuerzos para ser roto.

Un aspecto relevante en esta discusión es el desconocimiento existente sobre cómo la mente de los estudiantes conceptualiza y trabaja con fracciones. Ésta es una parte importante del llamado conocimiento del contenido matemático para la enseñanza, específicamente del conocimiento acerca del contenido y los estudiantes (Ball, Thames, & Phelps, 2008). Diversos estudios cualitativos y cuantitativos en Educación y Psicología han identificado una variedad de estrategias usadas por estudiantes para comparar fracciones mentalmente (e.g. Clarke & Roche, 2009; Gómez, Jiménez, Bobadilla, Reyes, & Dartnell, 2014; Pearn & Stephens, 2004; Stafylidou & Vosniadou, 2004). Las estrategias de cálculo mental y el conocimiento conceptual son una parte importante del conocimiento matemático, que debe ser considerado más allá del conocimiento y la fluidez que los estudiantes tengan sobre los algoritmos estándares para trabajo con fracciones (Forrester & Chinnappan, 2010).

Las estrategias de cálculo mental para las fracciones suelen estar íntimamente ligadas con la concepción de los estudiantes sobre estas últimas. En el nivel más bajo de conocimiento se encuentra la estrategia de identificar como la fracción más grande aquélla que tiene las componentes más grandes (e.g. Gómez et al., 2014; Stafylidou & Vosniadou, 2004). Esta estrategia surge naturalmente en estudiantes para quienes las fracciones no son más que dos números naturales puestos uno junto al otro, identificando la magnitud de la fracción con aquélla de sus componentes. Más adelante, tenemos la estrategia de *razonamiento vía gap*, donde el estudiante comprende que numerador y denominador se combinan para formar una nueva cantidad, pero trata esta relación como esencialmente aditiva en lugar de multiplicativa. Un ejemplo de esto es declarar que 2/3 es mayor que 3/5 porque a la primera "le falta sólo 1 trozo para completar el entero", mientras que a la segunda "le faltan 2 trozos" (Pearn & Stephens, 2004).

Es importante notar que esta estrategia, si bien es matemáticamente incorrecta, lleva a la respuesta correcta en una cantidad importante de casos (como en el ejemplo descrito de comparar 2/3 y 3/5). De los 4.628.403 posibles pares de fracciones propias, irreducibles y distintas que se pueden armar con denominadores hasta 100, el razonamiento vía gap es capaz de responder correctamente cuál es la mayor en el 83% de los casos. A pesar de este número y de la detección de esta estrategia en estudios cualitativos, no tenemos conocimiento de cuál es su prevalencia en general: ¿es un problema suficientemente frecuente como para preocuparnos? En este estudio presentamos una primera respuesta a esta pregunta, evaluando las diferencias en desempeño en comparación de fracciones de una muestra de adultos jóvenes, donde los ítemes han sido seleccionados para poner en evidencia el razonamiento vía gap. Este trabajo podría proveer luces también para generar mejores métodos de evaluación del aprendizaje de fracciones, que permitan detectar la utilización de esta estrategia y así tener la chance de corregirla oportunamente.

METODOLOGÍA

Este trabajo forma parte de un proyecto más extenso sobre los sesgos y estrategias que adultos jóvenes muestran al trabajar con fracciones (Fondecyt 1160188). Este trabajo reporta hallazgos preliminares, con énfasis en el uso de la estrategia de razonamiento vía gap.

Los resultados aquí reportados provienen de una muestra de 61 adultos jóvenes reclutados en Santiago, Chile. Estos participantes dieron consentimiento informado antes de responder un cuestionario de comparación de fracciones presentado por computador, en el Laboratorio de Neurociencia y Cognición del CIAE. Este cuestionario fue programado y presentado utilizando el software libre OpenSesame (http://osdoc.cogsci.nl/), e incluía pares de fracciones donde el razonamiento vía gap llevaba a la respuesta correcta, incorrecta, o no era informativo (ejemplos en la Figura 1). En este reporte consideramos solamente los ítemes donde las fracciones tenían numeradores y denominadores distintos. La mitad de los participantes tenía que escoger, dentro de cada par, cuál era la fracción mayor, mientras que la otra mitad tenía que escoger la fracción menor.

23/59 *vs*. 11/53	43/90 *vs*. 21/68	13/46 *vs*. 33/73
(gap 36) (gap 42)	(gap 47) (gap 47)	(gap 33) (gap 40)

Figura 1: Ejemplos de ítemes del cuestionario de comparación de fracciones aplicado. Se subraya en cada ejemplo la fracción mayor. Izquierda: Ítem con gap que favorece elegir la respuesta correcta, pues la fracción mayor tiene el menor gap. Centro: Ítem con gap no informativo, donde ambas fracciones tienen el mismo gap. Derecha: Ítem con gap que dificulta elegir la respuesta correcta, pues la fracción mayor tiene el mayor gap.

Para el análisis, contrastamos los porcentajes de respuestas correctas en los tres tipos de ítemes descritos mediante un ANOVA a medidas repetidas. Inspeccionamos además si el patrón de resultados varía de acuerdo al nivel de conocimiento general de comparación de fracciones, separando a los participantes en cuatro cuartiles de desempeño (Q1-Q4, con aprox. 15 participantes en cada uno).

RESULTADOS

El desempeño general en la prueba fue de 73% (desviación estándar DE = 20%). El desempeño en ítemes donde el razonamiento por gap llevaba a la respuesta correcta fue de 78% (DE = 24%), en ítemes donde llevaba a la respuesta incorrecta fue de 52% (DE = 29%), y en ítemes donde el gap no era informativo fue de 60% (DE = 29%).

La Figura 2 muestra el desempeño en la prueba separado no solamente por la utilidad del razonamiento vía gap, sino que también agrupa a los participantes según su nivel de desempeño en la prueba completa: Q1 representa al 25% de participantes con menores puntajes, Q2 al 25% de participantes siguientes, hasta Q4 al 25% de participantes con más altos puntajes. Se observa allí directamente que todos los grupos, excepto el de menores puntajes (Q1), presentan mejor desempeño en ítemes donde el razonamiento por gap lleva a la respuesta correcta y peor desempeño en ítemes donde éste lleva a la respuesta incorrecta. Esto sugiere que todos estos participantes, incluyendo los de mejores puntajes, consideran la relación de gaps en su razonamiento. Es importante notar que no es posible inferir de nuestros datos si esta consideración ocurre explícita o implícitamente.

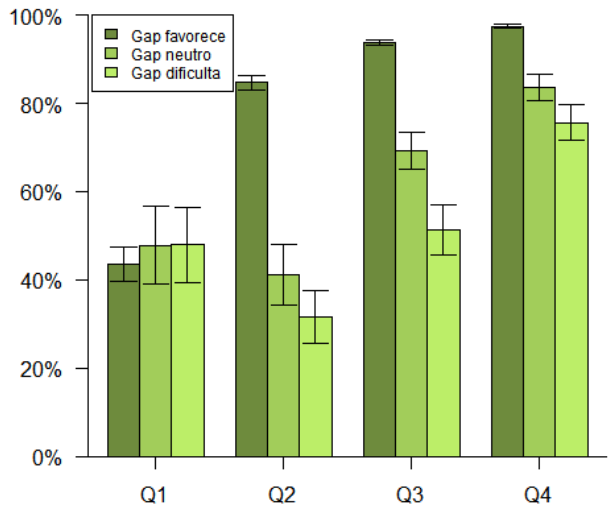

Figura 2: Desempeño en los tipos de ítemes de acuerdo a si la estrategia de razonamento vía gap favorece, dificulta, o no es informativo sobre la comparación del par de fracciones en cuestión.

DISCUSIÓN

El razonamiento por gap es una estrategia matemáticamente incorrecta para la comparación de fracciones, pero es intuitiva y simple de usar. Además, entrega la respuesta correcta en una alta proporción de los posibles ejercicios a los que los estudiantes se suelen ver enfrentados. En la medida que este razonamiento sea usado implícita o explícitamente por los estudiantes, esperamos observar mejor desempeño en ítemes donde el razonamiento por gap lleva a la respuesta correcta, y peor desempeño en aquéllos donde lleva a la respuesta incorrecta. En este trabajo presentamos una primera estimación del efecto del razonamiento por gap, a través de la presentación de ítemes donde el gap favorece, es neutro, o dificulta, obtener la respuesta correcta. Nuestros resultados evidencian que los ítemes donde el razonamiento por gap acierta son de hecho respondidos por adultos jóvenes con mayor éxito que los otros en todos los niveles de desempeño excepto el más bajo. Esto sugiere que la comparación de numeradores y denominadores a través de su sustracción (el gap) juega un rol en los cálculos mentales involucrados en la comparación de fracciones, afectando el desempeño general.

¿Cómo puede un docente trabajar con sus estudiantes sobre el razonamiento por gap? Una posibilidad consiste en visibilizar esta forma de pensar, enfatizando que es incorrecta ya que trabaja sobre la base de la resta de numerador y denominador, en lugar de hacerlo sobre su razón. Otra opción es la incorporación de ejercicios donde el gap es neutro o dificulta elegir la fracción mayor, poniendo atención a las razones esgrimidas por los estudiantes para tomar una u otra decisión. Todo esto está en línea con un mayor énfasis en la relación multiplicativa que toda fracción representa.

Agradecimientos

Este trabajo fue apoyado por los proyectos Fondecyt 1160188, PAI/Academia 79130029 y Fondo Basal FB0003.

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

Clarke, D. M., & Roche, A. (2009). Students' fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 72(1), 127-138.

Depaepe, F., Torbeyns, J., Vermeersch, N., Janssens, D., Janssen, R., et al. (2015). Teacher's content and pedagogical content knowledge on rational numbers: A comparison of prospective elementary and lower secondary school teachers. *Teaching and Teacher Education*, 47, 82-92.

Forrester, T., Chinnappan, M. (2010). The predominance of procedural knowledge in fractions. *Proceedings of the 33th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 185-192). Fremantle, WA, Australia: MERGA.

Gómez, D. M., Jiménez, A., Bobadilla, R., Reyes, C., & Dartnell, P. (2014). Exploring fraction comparison in school children. *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36*, Vol. 3 (pp. 185-192). Vancouver, Canada: PME.

Olfos A., R., & Guzmán R., I. (2011). Dificultades en el aprendizaje de las fracciones y el conocimiento del profesor. *XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática CIAEM-IACME*. Recife, Brasil.

Pearn, C., & Stephens, M. (2004). Why you have to probe to discover what Year 8 students really think about fractions. *Proceedings of the 27th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 430-437). Sydney, Australia: MERGA.

Stafylidou, S., Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction*, 14, 503-518.