Alma Mater Studiorum · Universitá di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

PERMUTAZIONI COME PRODOTTI DI CICLI

Tesi di Laurea in Algebra

Relatrice:
Chiar.ma Prof.ssa
MARILENA BARNABEI

Presentata da:
GIULIA BARTOLOTTI

IV Sessione
Anno Accademico 2018-2019

"La matematica é un motivo per andare avanti
e non fermarsi mai... perché ha un inizio: parte da 'zero',
ma non ha una fine: é infinita."
Vignesh R

Indice

Introduzione

Una permutazione è un modo di ordinare in successione oggetti distinti, come nell'anagramma di una parola.
Questo concetto è stato introdotto per la prima volta da Joseph-Louis Lagrange $(1736 - 1813)$ che studiò come le radici in una espressione razionale cambiano attraverso le permutazioni delle radici.
I suoi primi studi su questo argomento, che pubblicò su "Réflexions sur la résolution algébrique des equations" nel 1770 e "Leçons sur le calcul des fonctions" nel 1806, vennero ripresi da Evariste Galois $(1811 - 1832)$. Quest'ultimo, nonostante la giovane età, fu il primo matematico i cui studi dimostrarono chiaramente la comprensione del concetto di gruppo; nel 1830 pubblicò tre articoli, uno dei quali pose le fondamenta per la "Teoria di Galois".
Successivamente Augustin-Louis Cauchy $(1789 - 1857)$ recensì i documenti matematici di Galois e nel 1845 fornì una illustrazione molto chiara dei gruppi di permutazione.
In seguito, il matematico Arthur Cayley $(1821 - 1895)$ ha introdotto il concetto di un gruppo astratto, non identificando immediatamente se si trattasse di una raccolta di oggetti più ampia rispetto ai gruppi di permutazione noti; in un secondo tempo dimostrò, però, che i due concetti erano equivalenti nel caso finito con il "Teorema di Cayley".
Questo teorema venne ripreso da Camille Jordan $(1838 - 1922)$ nel suo libro "Traité des Substitutions et des Equations Algébriques" pubblicato nel 1870.
L'obiettivo della tesi è quello di fornire una conoscenza di base sulle permutazioni, in particolare sulle permutazioni come prodotti di cicli e riportare alcuni esempi che ne illustrino l'utilità nel calcolo combinatorio.
Nel primo capitolo, si introducono i primi concetti sulle permutazioni con i teoremi principali annessi. In seguito vengono definiti i Numeri di Stirling sia di primo sia di secondo tipo e i concetti delle funzioni generatrici e funzioni generatrici esponenziali.
Il secondo capitolo, invece, mostra l'importante relazione tra permutazioni cicliche e alberi.

Capitolo 1

Le permutazioni come prodotti di cicli

1.1 Scomposizione di permutazioni in cicli

Consideriamo le permutazioni come funzioni.

Definizione 1.1. Una *permutazione* di lunghezza n è una biiezione $f : (1, 2, ..., n) \to (1, 2, ..., n)$.

E' ben noto che l'insieme S_n delle permutazioni di lunghezza n dotato dell'usuale operazione di composizione tra funzioni è un gruppo, chiamato gruppo simmetrico di grado n.
Una permutazione $f \in S_n$ può essere rappresentata da una matrice $2 \times n$ la cui prima riga è $12...n$ e la seconda $f(1)f(2)...f(n)$ (notazione a due righe), oppure semplicemente dalla parola $f(1)f(2)...f(n)$ (notazione ad una riga).
Un altro metodo per rappresentare la permutazione di $1, 2, ..., n$ consiste nell'utilizzo di una matrice $n \times n$. Il metodo è associare a f la matrice M che ha come elementi $M_{i,j} = 1$ se $i = f(j)$, e 0 negli altri casi. La matrice risultante ha esattamente un elemento uguale a 1 in ogni colonna e in ogni riga, e viene chiamata 'matrice della permutazione'.

Esempio 1.2. 34152 è una permutazione di lunghezza 5 che può essere rappresentata come la matrice 2x5. Perciò la notazione a due righe è

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Osservazione 1.3. Per $n \geq 3$, il gruppo S_n non è commutativo, quindi in generale $fg \neq gf$.

Guardando l'esempio **??** possiamo vedere che f manda l'elemento 3 in 1 e poi 1 in 3, e la stessa cosa succede con 2 in 4, 4 in 5 e 5 in 2. Possiamo quindi scrivere la nostra permutazione in un terzo modo cioè $f = (13)(245)$e questa viene chiamata notazione ciclica di f.
Se i cicli sono disgiunti,essi commutano e chiaramente l'ordine non ha importanza. Perciò, spesso viene scritto l'elemento più grande del ciclo per primo, poi vengono scritti i cicli in ordine crescente partendo dal loro primo elemento.
Questa scrittura viene chiamata " Scrittura canonica dei cicli".

Esempio 1.4. La permutazione (312)(45)(8)(976) è scritta con la notazione canonica.

Definizione 1.5. Sia $f = f_1 f_2 ... f_n$ una permutazione. (f_i, f_j) è una *inversione* di f se per $i < j$ si ha $f_i > f_j$.

Esempio 1.6. La permutazione $\sigma = 23154$ ha tre inversioni: $(1, 3)$, $(2, 3)$, $(4, 5)$.

Definizione 1.7. Una *permutazione* viene chiamata *dispari* (o *pari*) se ha un numero di inversioni dispari (o pari).

Proposizione 1.8. *Una permutazione che consiste di un unico ciclo dispari è pari. Una permutazione che consiste di un unico ciclo pari è dispari.*

Dimostrazione. Procediamo per induzione sulla lunghezza n della nostra permutazione p. Per $n = 1$ e $n = 2$, la proposizione è ovviamente vera. Ora consideriamo $n \geq 3$ e il ciclo $(p_1 p_2 ... p_n)$.E' immediato verificare che $(p_1 p_2 .. p_n) = (p_1 p_2 ... p_{n-1})(p_{n-1} p_n)$. La moltiplicazione per $(p_{n-1} p_n)$ scambia gli ultimi due termini di $(p_1 p_2 ... p_n)$ e, perciò, incrementa il numero di inversioni di uno o decrementa di uno. Quindi cambia la parità del numero di inversioni. $\square$

1.2 Numero di cicli di una permutazione e numeri di Stirling

Definizione 1.9. Il numero di permutazioni di S_n con k cicli è chiamato *Numero di Stirling del primo tipo senza segno* e viene denotato con $c(n, k)$.

Iniziamo con le proprietà più semplici dei *numeri di Stirling del primo tipo senza segno.*

Proposizione 1.10. *$c(n, 0) = 0$ se $n \geq 1$, e $c(0, 0) = 1$. Per $n \geq 1$ e $k \geq 1$ i numeri di Stirling del primo tipo soddisfano*

$$c(n, k) = c(n-1, k-1) + (n-1)c(n-1, k).$$

Dimostrazione. Dimostriamo che la parte destra della nostra uguaglianza conta tutte le permutazioni di S_n con k cicli. Ci sono due possibili casi relativi alla posizione dell'elemento n.

1. L'elemento n può formare un ciclo da solo, quindi i restanti $n-1$ elementi devono formare $k-1$ cicli. Questo può accadere in $c(n-1, k-1)$ modi.

2. Se l'elemento n non costituisce da solo un unico ciclo, i restanti $n-1$ elementi devono formare k cicli e l'elemento n deve essere inserito in uno di essi. I k cicli possono essere formati in $c(n-1, k)$ modi possibili, successivamente l'elemento n può essere inserito in $n-1$ modi.

□

Teorema 1.11. *Per qualsiasi intero positivo n, si ha*

$$x(x+1)(x+2)...(x+n-1) = \sum_{k=0}^{n} c(n, k)x^k. \tag{1.1}$$

Dimostrazione. Poniamo

$$x(x-1)...(x+n-1) = F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b(n, k)x^k.$$

Dato che $F_n(x) = (x+n-1)F_{n-1}(x)$, avremo

$$\sum_{k=0}^{n} b(n, k)x^k = \sum_{k=1}^{n} b(n, k)x^{k+1} + (n-1)\sum_{k=0}^{n-1} b(n-1, k)x^k.$$

Da qui, definendo $b(n,0) = 0$ per $n > 0$ e $b(0,0) = 1$, deduciamo che

$$b(n,k) = b(n-1,k-1) + (n-1)b(n-1,k)$$

dal momento che

$$F_n(x) = (x+n-1)F_{n-1}(x),$$

cioè la successione $b(n,k)$ soddisfa la stessa ricorrenza della successione $c(n,k)$ con le stesse condizioni iniziali. □

Definizione 1.12. I *numeri di Stirling di primo tipo* sono definiti come

$$s(n,k) = (-1)^{n-k}c(n,k).$$

Corollario 1.13. *Per tutti gli interi positivi, si ha*

$$x(x-1)...(x-n+1) = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k. \tag{1.2}$$

In altre parole $s(n,k)$ è il coefficiente di x^k in $x(x-1)...(x-n+1) = (x)_n$.

Dimostrazione. Sostituendo $-x$ ad x nella formula (**??**) e poi moltiplicando entrambi i lati dell'uguaglianza per $(-1)^n$ si ottiene (**??**). □

Definizione 1.14. Il *numero di partizioni* di $\{1,2,...,n\}$ in k parti non vuote è denotato con $S(n,k)$. I numeri $S(n,k)$ sono chiamati *Numeri di Stirling di secondo tipo.*

Esempio 1.15. Il numero 4 ha sette partizioni in due parti non vuote cioè: $\{1,2,3\}\{4\}$,$\{1,2,4\}\{3\}$,$\{2,3,4\}\{1\}$,$\{1,2\}\{3,4\}$,$\{1,3\}\{2,4\}$ e $\{1,4\}\{2,3\}$. Quindi $S(4,2) = 7$.

Osservazione 1.16. Ovviamente $S(n,k) = 0$ se $n < k$. Poniamo $S(0,0) = 1$ per convenzione. Per $n \geq 1$ abbiamo $S(n,1) = S(n,n) = 1$.

Teorema 1.17. *Per tutti gli interi positivi* $k \leq n$

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k).$$

Dimostrazione. Possiamo ottenere una dimostrazione combinatoria considerando un elemento particolare, come il massimo n.
Se l'elemento forma un blocco singolo, i restanti $n-1$ elementi hanno $S(n-1,k-1)$ modi per completare la partizione. Questa partizione rappresenta il primo addendo del lato destro.
Se, d'altra parte, n non forma un blocco singolo, i restanti $n-1$ elementi devono formare una partizione con k blocchi in uno dei modi $S(n-1,k)$, quindi possiamo aggiungere n in uno qualsiasi dei k blocchi moltiplicando per il numero di possibilità. Questa partizione rappresenta il secondo termine a destra. □

Corollario 1.18. *Il numero di tutte le funzioni suriettive* $f : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., k\}$ *è* $k!S(n, k)$.

Dimostrazione. Una funzione suriettiva definisce una partizione di $\{1, 2, ..., n\}$: i blocchi sono gli elementi la cui immagine è lo stesso elemento $i \in \{1, 2, ..., k\}$. Pertanto i blocchi sono etichettati e sono esattamente k, da ciò segue la dimostrazione. □

Definizione 1.19. Il *fattoriale decrescente* $(x)_m$ è definito come segue

$$(x)_m = x(x - 1)(x - 2) \cdots (x - m + 1).$$

Corollario 1.20. *Per tutti i numeri reali* x, *e tutti i numeri interi non negativi* n,

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n, k)(x)_k.$$

Dimostrazione. Da entrambi i lati della nostra uguaglianza abbiamo polinomi in x di grado n. Dimostreremo che le due parti coincidono ogni volta che x assume un valore intero positivo.
Preso x un numero intero positivo, il lato sinistro è il numero di tutte le funzioni da $[n]$ ad $[x]$. Possiamo affermare che il lato destro è lo stesso, elencato in base alla cardinalità dell'immagine. Infatti, se l'immagine di tale funzione ha cardinalità k, allora ci sono $\begin{pmatrix} x \\ k \end{pmatrix}$ scelte possibili, quindi per il corollario **??** abbiamo $k!S(n, k)$ scelte per la funzione stessa. Visto che $(x)_k = k! \begin{pmatrix} x \\ k \end{pmatrix}$, la dimostrazione è conclusa. □

Teorema 1.21. *Sia* S *la matrice triangolare inferiore con righe e colonne "indicizzate" da* $\mathbb{N}$ *e con elementi* $S_{i,j} = S(i, j)$.*Sia* s *la matrice definita similmente, con i suoi elementi* $s_{i,j} = s(i, j)$.
Abbiamo

$$Ss = sS = I.$$

Dimostrazione. Consideriamo $A = (1, x, x^2, x^3, ...)$ e $B = (1, x, (x)_2, (x)_3, ...)$ basi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$ di tutti i polinomi con coefficienti reali.
Per il corollario **??**, i numeri $s(n, k)$ sono le coordinate degli elementi di B in base ad A, e vediamo che $S(n, k)$ sono le coordinate degli elementi di A in base a B.
In altre parole, s è la matrice di passaggio da A a B, e S è la matrice di passaggio da B ad A; perciò sono una l'inversa dell'altra. □

1.2.1 Funzioni generatrici dei Numeri di Stirling

Definizione 1.22. *La funzione generatrice* della successione (a_n) è la serie formale

$$a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + ... = \sum_{n\geq 0} a_n x^n.$$

Definizione 1.23. *La funzione generatrice esponenziale* di una sequenza $a_0, a_1, a_2, ...$ di numeri reali è una serie formale

$$A(x) = \sum a_n \frac{x^n}{n!}.$$

Definizione 1.24. *La funzione generatrice in due variabili dei numeri di Stirling di primo tipo* è

$$f(x,u) = \sum_{n\geq 0} \sum_{k=0}^{n} s(n,k) x^k \frac{u^n}{n!}.$$

Proposizione 1.25. $f(x,u) = (1+u)^x$.

Dimostrazione. Per la formula del binomio di Newton il coefficiente di u^n nella parte destra è $\begin{pmatrix} x \\ n \end{pmatrix}$. Nella parte sinistra, il coefficiente di u^n è

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{s(n,k)x^k}{n!} = \frac{(x)_n}{n!} = \begin{pmatrix} x \\ n \end{pmatrix}.$$

□

Corollario 1.26. *Siano k e n interi positivi, abbiamo*

$$ks(n,k) = \sum_{l=k-1}^{n-1} (-1)^{n-l-1} \frac{(n)_{n-l}}{n-l} \cdot s(l, k-1).$$

Dimostrazione. Dalla proposizione **??** abbiamo:

$$\sum_{n\geq 0} \sum_{k=0}^{n} s(n,k) x^k \frac{u^n}{n!} = f(x,u) = (1+u)^x = exp(xln(1+u))$$

da cui, derivando rispetto ad x:

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\sum_{k=1}^{n} ks(n,k)x^{k-1}\frac{u^n}{n!} &= \frac{\partial}{\partial x}f(x,u) = f(x,u)ln(1+u)\\ &= f(x,u)\sum_{l\geq 1}(-1)^{l+1}\frac{u^l}{l} =\\ &= \sum_{i\geq 0}\sum_{j=0}^{i} s(i,j)x^j\frac{u^i}{i!}\sum_{l\geq 1}(-1)^{l+1}\frac{u^l}{l}.\end{aligned}$$

Uguagliando il coefficiente di $x^{k-1}u^n/n!$ si ha

$$ks(n,k) = n!\sum_{i=k-1}^{n-1}(-1)^{n-i-1}\cdot s(i,k-1)\cdot\frac{1}{n-i}\cdot\frac{1}{i!}$$

come volevasi dimostrare. □

Corollario 1.27. *Per ogni k fissato, la funzione generatrice per i Numeri di Stirling di primo tipo è data da*

$$f_k(u) = \sum_{n=k}^{\infty} s(n,k)\frac{u^n}{n!} = \frac{[ln(1+u)]^k}{k!}.$$

Dimostrazione. Cambiando l'ordine nella sommatoria di $f(x,u)$, abbiamo

$$f(x,u) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{n=k}^{\infty} s(n,k)\frac{u^n}{n!}x^k = \sum_{k=0}^{n} f_k(u)x^k.$$

La dimostrazione segue ora dalla proposizione **??**, che fornisce

$$f(x,u) = (1+u)^x = exp[xln(1+u)] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{[ln(1+u)]^k}{k!}x^k.$$

□

Corollario 1.28. *Per ogni k fissato, la funzione generatrice esponenziale per i Numeri di Stirling di primo tipo senza segno è data da*

$$h_k(u) = \sum_{n=k}^{\infty} c(n,k)\frac{u^n}{n!} = \frac{[-ln(1-u)]^k}{k!}.$$

Corollario 1.29. *Per ogni k e n interi positivi, abbiamo*

$$s(n+1,k+1)=\sum_{m=k}^{n}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}s(n,m).$$

Dimostrazione. Differenziando la funzione generatrice $f_k(u)$, otteniamo

$$\begin{aligned}\sum_{n=k}^{\infty}s(n+1,k+1)\frac{u^n}{n!}&=\frac{(1+u)^{-1}[ln(1+u)]^k}{k!}=\\&=exp(-ln(1+u))\frac{[ln(1+u)]^k}{k!}=\\&=\sum_{m=k}^{\infty}\frac{(-1)^m[ln(1+u)]^m}{m!}\cdot\frac{[ln(1+u)]^k}{k!}=\\&=\sum_{m=k}^{\infty}\frac{(-1)^{m-k}[ln(1+u)]^m}{(m-k)!k!}.\end{aligned}$$

Per cui, considerando il corollario **??** e riformulando l'ultimo membro dell'espressione sopra indicata, si ottiene

$$\begin{aligned}\sum_{n=k}^{\infty}s(n+1,k+1)\frac{u^n}{n!}&=\sum_{m=k}^{\infty}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}\sum_{n=m}^{\infty}s(n,m)\frac{u^n}{n!}=\\&=\sum_{n=k}^{\infty}[\sum_{m=k}^{n}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}s(n,m)]\frac{u^n}{n!}\end{aligned}$$

e il risultato segue uguagliando i coefficienti di $\frac{u^n}{n!}$. □

1.3 Permutazioni coniugate

Ricordiamo che due permutazioni σ, $\pi \in S_n$ si dicono coniugate se esiste $\tau \in S_n$ tale che $\pi = \tau^{-1}\sigma\tau$.

Teorema 1.30. *Due permutazioni σ e π sono coniugate esattamente se e solo se hanno la stessa struttura ciclica.*

Dimostrazione. Ricordiamo che presi σ e π permutazioni di S_n, il prodotto $\sigma\pi$ è ottenuto applicando σ e successivamente applicando π.
Per prima cosa supponiamo che σ e π siano coniugate. Sia $(b_1 b_2 ... b_k)$ un ciclo di σ tale che $\sigma^i(b_1) = b_{i+1}$ per ogni indice $i \in 1, 2, ..., k-1$ e $\sigma^k(b_1) = b_1$.
Visto che $\pi = \tau^{-1}\sigma\tau$ abbiamo che $\pi^i = \tau^{-1}\sigma^i\tau$. Perciò $\pi^i(a_i) = (\tau^{-1}\sigma^i\tau)(a_i)$.
Poniamo $a_i = \tau^{-1}(b_i)$ per $i = 1, ..., k-1$.
Allora sarà

$$\pi^i(a_1) = (\tau^{-1}\sigma^i\tau)(a_1) = (\tau^{-1}\sigma^i)(b_1) = \tau^{-1}(b_{i+1}) = a_{i+1}, \text{ e } \pi^k(a_1) = a_1,$$

quindi $(a_1, ..., a_k)$ è un ciclo di π.
Perciò gli l cicli di σ sono in biiezione con gli l cicli di π. Abbiamo così dimostrato la parte del "solo se".
Ora supponiamo che σ e π siano dello stesso tipo.
Costruiamo una permutazione τ tale che $\tau^{-1}\sigma\tau = \pi$. Se $(b_1 b_2 ... b_k)$ è un ciclo di σ e $(c_1 c_2 ... c_k)$ un ciclo di π, dobbiamo scegliere τ in modo tale che $\tau^{-1}(b_i) = c_i$ per ogni $i \in 1, 2, ..., k$.
Abbiamo così definito τ^{-1} per tutti i k elementi. Per trovare τ^{-1} per gli altri $n-k$ elementi, bisogna procedere allo stesso modo per i cicli rimanenti. □

1.4 Lemma di Transizione

Sia $\sigma \in S_n$. Consideriamo la sua scrittura canonica in cicli; cancellando le parentesi otteniamo la scrittura in notazione in una riga di un'altra permutazione, che indicheremo con $f(\sigma)$.

Esempio 1.31. Se $\sigma = (412)(53)$ allora $f(\sigma) = 41253$.

Teorema 1.32 (Lemma di transizione)**.** *La funzione f sopra descritta è una corrispondenza biunivoca.*

Dimostrazione. Quello che dobbiamo verificare è che esiste, per ogni permutazione $\tau \in S_n$, esattamente una σ tale che $f(\sigma) = \tau$.
Sia $\tau = \tau_1\tau_2...\tau_n$. Il primo ciclo di σ inizia con l'elemento τ_1.
Se prendiamo σ scritta in forma canonica, ogni ciclo inizia con l'elemento più grande. Perciò, se $\tau_i > \tau_1$ significa che τ_i non può appartenere al primo ciclo di σ. Quindi se j è il più piccolo indice tale che $\tau_j > \tau_1$ significa che il primo ciclo dovrà finire al termine τ_{j-1}.
Il secondo ciclo di σ deve iniziare con l'elemento τ_j. Ovviamente il terzo ciclo dovrà iniziare con un elemento più a sinistra e più grande di τ_j, e così via.
La procedura si fermerà con il ciclo che partirà con l'elemento n-esimo.
Questo produce un algoritmo che consente di determinare la pre-immagine di τ. □

Esempio 1.33. $\tau = 2417635$. Abbiamo $\tau_1 = 2$. Il più piccolo j tale che $\tau_j > \tau_1$ è $j = 2$, quindi il secondo ciclo parte dalla seconda posizione. Dopo, l'elemento più a sinistra che sia più grande di 4 è 7, quindi il terzo ciclo parte con 7, allora otterremo la permutazione (2)(41)(7635).

Definizione 1.34. Sia $\tau = \tau_1\tau_2...\tau_n$ una permutazione. Possiamo definire τ_i come un *massimo locale da sinistra* se per ogni $k < i$ abbiamo $\tau_k < \tau_i$.

Corollario 1.35. *Il numero di permutazioni di S_n con esattamente k massimi locali da sinistra è $c(n, k)$.*

Dimostrazione. Ovvia, grazie al Lemma di transizione. □

1.4.1 Salite e discese

Definizione 1.36. Sia $\sigma = \sigma_1...\sigma_n \in S_n$. Una posizione i si dice *salita* di σ se $\sigma_i < \sigma_{i+1}$.

Esempio 1.37. La permutazione 3452167 ha una salita nelle posizioni $1, 2, 5$ e 6.

Definizione 1.38. Sia $\sigma = \sigma_1 ... \sigma_n \in S_n$. Una posizione i si dice *discesa* di σ se $\sigma_i > \sigma_{i+1}$.

Quindi se vale per ogni i con $1 \leq i < n$, ogni posizione è una salita o discesa.

Definizione 1.39. Il numero di permutazioni di S_n con k salite è definito *Numero di Eulero* $A(n, k)$.
Questo è anche il numero di permutazioni di S_n con k discese.

Definizione 1.40. L'*eccedenza* di una permutazione $\sigma_1\sigma_2...\sigma_n$ è l'indice j tale che $\sigma_j > j$.

Dimostriamo ora un importante teorema:

Teorema 1.41. *Il numero di permutazioni di S_n con esattamente $k-1$ eccedenze è $A(n, k)$.*

Dimostrazione. La biiezione f del lemma **??** porta un insieme di permutazioni di S_n aventi k eccedenze deboli in un insieme di permutazioni di S_n con $k-1$ salite.
La definizione di eccedenza è data in termini di permutazioni come un qualcosa di ordine lineare, per questo possiamo vedere le eccedenze scritte in notazione ciclica nella permutazione.
Più precisamente consideriamo $\pi = (\sigma_1 \cdots \sigma_{i_1})(\sigma_{i_1+1} \cdots \sigma_{i_2}) \cdots (\sigma_{i_{j-1}+1} \cdots \sigma_{i_j})$ scritta in notazione ciclica canonica.
Applichiamo f a π, e contiamo le salite di $f(\pi)$. Vediamo che i è una salita per $f(\pi)$, cioè, $\sigma_i < \sigma_{i+1}$ se e solo se $i \neq n$ e $\sigma_i \leq \pi(\sigma_i)$.
Verifichiamo il "solo se": a meno che l'elemento i non sia l'ultimo del ciclo, abbiamo che $\pi(\sigma_i) = \sigma_{i+1}$ perchè ogni elemento del ciclo è mandato nell'elemento alla sua destra. Perciò $\sigma_i < \sigma_{i+1}$ implica $\sigma_i < \pi(\sigma_i)$.
Quando l'elemento i è l'ultimo del ciclo, abbiamo sempre $\sigma_i < \sigma_{i+1}$ per la proprietà canonica. In questo caso $\sigma_i < \pi(\sigma_i)$, dato che σ_i è mandato nel primo elemento del suo ciclo, che è più grande di σ_i (o uguale a σ_i se il ciclo contiene σ_i come unico elemento).
La dimostrazione del "se" è simile. Se abbiamo $\sigma_i \leq \pi(\sigma_i)$, l'elemento i non è l'ultimo del ciclo, o lo è. Nel primo caso, $\pi(\sigma_i) = \sigma_{i+1}$ e perciò $\sigma_i < \sigma_{i+1}$. Nell'ultimo caso $\pi(\sigma_i) = \sigma_i$ se il ciclo contiene σ_i come unico elemento, e $\sigma_i < \sigma_{i+1}$ altrimenti. Allora $\sigma_i \leq \pi(\sigma_i) < \sigma_{i+1}$.
Infatti, σ_i è più piccolo del primo elemento del suo ciclo, che è a sua volta più piccolo del primo elemento del ciclo successivo per la proprietà canonica.
Abbiamo visto che la biiezione f del lemma **??** trasforma le eccedenze deboli di π in n salite di $f(\pi)$.

Si conclude che il numero di permutazioni di S_n con k eccedenze deboli è lo stesso di permutazioni di S_n con $k-1$ salite. $\square$

Esempio 1.42. Preso $\pi = (32)(514)(76)$. Nella notazione ad una riga, $\pi = 4325176$. Questa permutazione ha 4 eccedenze deboli, esattamente 1, 2, 4 e 6. Se noi applichiamo f abbiamo $f(\pi) = 3251476$ e questa permutazione ha 3 salite, esattamente 2, 4 e 5.

1.5 Permutazioni con una struttura di cicli assegnata

Premettiamo alcuni risultati sulle funzioni generatrici esponenziali di successioni.

Teorema 1.43 (Formula prodotto)**.** *Sia $f(n)$ il numero di modi per costruire una certa struttura su un insieme di n elementi, e preso $g(n)$ il numero di modi per costruire un'altra struttura su un insieme di n elementi.*
Siano $F(x)$ e $G(x)$ le funzioni generatrici esponenziali delle sequenze $f(n)$ e $g(n)$ per $n = 0, 1, 2, ...$
Sia $h(n)$ il numero di modi di dividere un insieme di n elementi in due sottoinsiemi non vuoti e di mettere una struttura del primo tipo nel primo sottoinsieme e una struttura del secondo tipo nel secondo sottoinsieme.
Sia $H(x)$ la funzione generatrice esponenziale della sequenza $h(n)$ per $n = 0, 1, 2, ...,$ allora abbiamo

$$F(x)G(x) = H(x).$$

Dimostrazione. Il numero di modi di dividere un insieme di n elementi in un insieme di k elementi e il suo complementare e costruire su questi le strutture precedenti è ovviamente $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) f(k)g(n-k)$.
Sommando per tutti i k, otteniamo

$$h(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(k)g(n-k).$$

Quindi basta guardare qual è il coefficiente di $x^n/n!$ in $F(x)G(x)$

$$\begin{aligned} F(x)G(x) &= \sum_{n\geq 0} f(n)\frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{n\geq 0} g(n)\frac{x^n}{n!} = \\ &= \sum_{n\geq 0} x^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} f(k)g(n-k) = \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) f(k)g(n-k). \end{aligned}$$

□

Corollario 1.44. *Siano k,n interi positivi, con $k \leq n$. Per ogni $i \in [k]$, indichiamo con $f_i(n)$ il numero di modi di costruire una struttura da un*

insieme di n elementi, e sia $F_i(n)$ la funzione generatrice esponenziale della sequenza $f_i(n)$.
Per ultimo, sia $h(n)$ il numero di modi di dividere un insieme di n elementi in una lista ordinata di blocchi $(B_1, B_2, ..., B_k)$, e costruisco una struttura su B_i per ogni $i \in [k]$. Se $H(x)$ è la funzione generatrice esponenziale della sequenza $h(n)$, ottengo

$$H(x) = F_1(x)F_2(x)...F_k(x).$$

Teorema 1.45. *Sia K un campo di caratteristica zero e $f_i : \mathbb{N} \to K$ delle funzioni $1 \leq i \leq k$, definisco $h : \mathbb{N} \to K$ come*

$$h(n) = \sum f_1(|A_1|)f_2(|A_2|)...f_k(|A_k|),$$

dove la sommatoria varia su tutte le partizioni ordinate $(A_1, A_2, ...A_k)$ di $[n]$ in k parti. Siano $F_i(x)$ e $H(x)$ le funzioni generatrici esponenziali delle sequenze $f_i(n)$ e $h(n)$, abbiamo

$$H(x) = F_1(x)F_2(x)...F_n(x).$$

Teorema 1.46 (Formula esponenziale)**.** *Sia K un campo di caratteristica zero, e $f : \mathbb{Z}^+ \to K$ una funzione. Definisco $h : \mathbb{N} \to K$ come $h(0) = 1$ e*

$$h(n) = \sum f(|A_1|) \cdot f(|A_2|) \cdot \cdots \cdot f(|A_m|)$$

per $n > 0$, dove la sommatoria varia tra tutte le partizioni $(A_1, A_2, ..., A_m)$ di $[n]$. Siano $F(x)$ e $H(x)$ le funzioni generatrici esponenziali di sequenze $f(n)$ e $h(n)$. Allora avremo

$$H(x) = exp(F(x)).$$

In particolare, se $f(n)$ è il numero di modi per costruire una struttura di un certo tipo per insiemi di n elementi e $h(n)$ è il numero di modi di scegliere un'insieme di partizioni dell'insieme di n elementi, possiamo costruire una struttura dello stesso tipo per ciascuno dei blocchi.
Si prendono le partizioni dell'insieme di n elementi ciò significa che l'insieme dei blocchi non è ordinato quindi $\{1, 3\}$, $\{2, 4, 5\}$ e $\{2, 4, 5\}$, $\{1, 3\}$ sono considerati identici, e il blocco vuoto non è permesso.
Non c'è una restrizione nei numero di blocchi, a differenza del teorema **??** e del corollario **??**.
Questo è il motivo per cui escludiamo i blocchi vuoti; altrimenti il numero delle nostre partizioni sarebbe infinito.

Dimostrazione. Sia

$$h_k(n) = \sum f(|A_1|)f(|A_2|)\cdots f(|A_k|)$$

dove la sommatoria varia tra tutte le partizioni di $[n]$ in k blocchi, per un fissato k. Ora il numero di blocchi è fissato, allora possiamo usare il corollario **??** con $f(0) = 0$, tenendo a mente che in quel corollario l'insieme dei blocchi è ordinato. Avremo

$$h_k(n) = \frac{1}{k!}F(x)^k.$$

Sommando per tutti i k, otterremo il nostro risultato. □

Esempio 1.47. Sia $h(0) = 1$, e $h(n)$ il numero di modi per scegliere una partizione di un insieme di n elementi e quindi prendere un sottoinsieme di ciascun blocco. Abbiamo quindi

$$H(n) = \sum_{n\geq 0} h(n)\frac{x^n}{n!} = exp(exp(2x) - 1).$$

Dimostrazione. Sia $f(n)$ il numero di modi di scegliere un sottoinsieme di un insieme non vuoto. Si ha $f(n) = 2^n$ per $n > 0$ e $f(0) = 0$. Perciò la funzione generatrice esponenziale per la sequenza $f(n)$ è $F(x) = exp(2x) - 1$ e la dimostrazione segue per la formula esponenziale. □

Corollario 1.48 (Formula esponenziale, versione permutazione)**.** *Sia K un campo di caratteristica zero, e $f : \boldsymbol{Z}_+ \to K$ una funzione.*
Definisco una nuova funzione h attraverso

$$h(n) = \sum_{p\in S_n} f(|C_1|)f(|C_2|)\cdots f(|C_k|),$$

dove C_i sono i cicli di p, e $|C_i|$ denota la lunghezza di C_i. Siano $F(x)$ e $H(x)$ le funzioni generatrici esponenziali rispettivamente di f e di h. Allora

$$H(x) = exp(\sum_{n\geq 1} f(n)\frac{x^n}{n}).$$

Dimostrazione. Si noti la sottile differenza tra la sommatoria del corollario **??** e la sommatoria del teorema **??**.
Il primo è una sommatoria su tutti gli $n!$ elementi di S_n, il secondo è una sommatoria sull'insieme di partizioni di $[n]$.
Dato che un blocco di k elementi di una partizione forma $(k-1)!$ differenti cicli di k elementi, così una partizione con blocchi $B_1, B_2, ..., B_k$ dà origine a

$\prod_{i=1}^{k}(|B_i|-1)!$ permutazioni con cicli i blocchi B_i.
Perciò, il corollario **??** può essere riformulato come

$$h(n)=\sum_{B\in\prod_n} f(|B_1|)(|B_1|-1)!f(|B_2|)(|B_2|-1)!\cdots f(|B_k|)(|B_k|-1)!.$$

Quindi la formula esponenziale (applicata a $(n-1)!f(n)$ invece di $f(n)$) implica

$$H(x)=exp((n-1)!\cdot F(x))=exp(\sum_{n\geq 1} f(n)\frac{x^n}{n})$$

che era ciò che doveva essere dimostrato. □

La seguente applicazione del corollario **??** permette di contare le permutazioni che consistono solo di cicli di una certa lunghezza.

Teorema 1.49. *Preso C un insieme di interi positivi, e $g_C(n)$ il numero di permutazioni di S_n dove le lunghezze dei cicli sono elementi di C. Abbiamo*

$$G_C(x)=\sum_{n\geq 0} g_C(n)\frac{x^n}{n!}=exp(\sum_{n\in C}\frac{x^n}{n}).$$

Dimostrazione. Sia $f(n)=(n-1)!$ se $n\in C$, e sia $f(n)=0$ negli altri casi. Quindi f dà il numero di modi di ricoprire un insieme di n elementi attraverso cicli la cui lunghezza appartiene all'insieme C. Perciò $F(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\frac{x^n}{n!}=\sum_{n\in C}\frac{x^n}{n}$. La dimostrazione si conclude sfruttando la formula esponenziale. □

Vediamo ora alcuni esempi notevoli di applicazione del teorema **??**.

Definizione 1.50. *Un'involuzione* è una permutazione σ tale che $\sigma^{-1}=\sigma$, in altre parole $\sigma^2=1$.

E' facile vedere che ciò accade se e solo se tutti i cicli di σ hanno lunghezza 1 o 2. Si noti che i cicli composti di un solo elemento sono chiamati anche 'punti fissi'.

Esempio 1.51. Consideriamo $G_2(x)$, la funzione generatrice esponenziale dell'involuzione senza punti fissi. Avremo quindi $G_2(x)=exp(x^2/2)$.

Corollario 1.52. *Il numero di involuzioni senza punti fissi di lunghezza $2n$ è $h(n)=\frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}=1\cdot 3\cdots(2n-1)$.*

Dimostrazione. Dall'esempio precedente, dobbiamo solo calcolare il coefficiente $g_2(n)$ di $\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ in $G_2(x) = exp(x^2/2)$. Abbiamo

$$exp(x^2/2) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{2^n \cdot n!},$$

perciò

$$g_2(n) = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!} = 1 \cdot 3 \cdots (2n-1) = (2n-1)!!.$$

□

Il simbolo $(2n-1)!!$ indica '$(2n-1)$ semifattoriale', riferito al fatto che si fa il prodotto tra tutti gli interi dispari da 1 a $2n-1$. Si noti che $G_2(x)$ non contiene termini con esponente dispari. Questo ha perfettamente senso visto che le involuzioni senza punti fissi non hanno lunghezza dispari.
Nonostante ciò, preferiamo presentare la tecnica generale delle funzioni generatrici.
Ricordiamo che integrando l'identità $1/(1-x) = \sum_{n \geq 0} x^n$ otteniamo l'identità

$$-ln(1-x) = (ln(1-x))^{-1} = \sum_{n \geq 0} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}. \tag{1.3}$$

Il seguente esempio introduce una classe ampia di permutazioni.

Esempio 1.53. Sia $D(n)$ il numero di permutazioni di S_n senza punti fissi. Avremo $D(x) = \sum_{n \geq 0} D(n) \frac{x^n}{n!} = \frac{exp(-x)}{1-x}$.

Dimostrazione. In questo caso, scegliamo C come insieme di tutti gli interi maggiori di uno. Quindi avremo

$$D(x) = G_C(x) = exp(\sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{n}) = exp((ln(1-x))^{-1} - x) = \frac{exp(-x)}{1-x}.$$

□

Corollario 1.54. *Sia $D(n)$ il numero di permutazioni senza punti fissi di S_n. Avremo*

$$D(n) = n! \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{1}{i!}.$$

Notare che da questa formula, abbiamo $(D(n)/n!) \to \frac{1}{e}$, così più di un terzo di tutte le permutazioni saranno permutazioni senza punti fissi.
Vediamo, quindi, l'esempio seguente:

Esempio 1.55. Preso C l'insieme di tutti gli interi positivi dispari. Abbiamo, quindi, $G_c(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

Dimostrazione. Dal teorema **??**, dobbiamo calcolare

$$G_C(x) = exp(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \cdots) = exp(\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}).$$

Ora vediamo che, guardando la derivata, abbiamo

$$(\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!})' = \sum_{n\geq 0} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}.$$

Perciò,

$$\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}(ln(1-x)^{-1} + ln(1+x)),$$

e così

$$G_C(x) = exp(\frac{1}{2}(ln(1-x))^{-1} + ln(1+x)) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}},$$

che era ciò che volevamo dimostrare. □

Corollario 1.56. *Per tutti gli interi positivi* n*, il numero di permutazioni di lunghezza* $2n$ *che hanno solo cicli dispari è* $ODD(2n) = (1{\cdot}3{\cdot}5 \cdots (2n-1))^2 = (2n-1)!!^2$*. Similmente, il numero di permutazioni di lunghezza* $2n+1$ *con solo cicli dispari è* $ODD(2n+1) = (1{\cdot}3{\cdot}5 \cdots (2n-1))^2(2n+1) = (2n-1)!!^2(2n+1)$*.*

Dimostrazione. Utilizzando il risultato del precedente esempio, tutto ciò che dobbiamo trovare è il coefficiente di $x^m/m!$ in $G_C(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. Moltiplicando sia numeratore che denominatore per $\sqrt{1+x}$, abbiamo

$$G(x) = \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Dal teorema binomiale, abbiamo che

$$\begin{aligned}(1-x^2)^{-1/2} &= \sum_{m\geq 0} (-1)^m \binom{-1/2}{m} x^{2m} = \\ &= \sum_{m\geq 0} (-1)^m \frac{(-1/2)\cdot(-3/2)\cdots(-(2m-1)/2)}{m!} x^{2m} \\ &= \sum_{m\geq 0} \frac{(2m-1)!!}{m!\cdot 2^m} x^{2m}.\end{aligned}$$

Notare che $(1-x^2)^{-1/2}$ non ha termini di grado dispari.
Si vede che il coefficiente di $g_C(2m)$ di $x^{2m}/(2m)!$ nella nostra funzione generatrice $G_C(x) = (1+x)\sum_{m\geq 0} \frac{(2m-1)!!}{m!\cdot 2^m} x^{2m}$ è

$$(2m)! \cdot \frac{(2m-1)!!}{m! \cdot 2^m} = (2m-1)!!^2,$$

mentre il coefficiente $g_C(2m+1)$ di $x^{2m+1}/(2m+1)!$ è

$$\frac{(2m+1)!}{m!} \cdot \frac{(2m-1)!!}{2^m} = (2m-1)!!^2(2m+1),$$

dimostrando le nostre affermazioni. □

Una naturale controparte delle permutazioni con soli cicli di lunghezza dispari sono le permutazioni di lunghezza n con solo cicli di lunghezza pari.

Esempio 1.57. Sia C l'insieme di tutti gli interi positivi pari.
Abbiamo, quindi, $G_C(x) = \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}$.

Dimostrazione. Il teorema **??** implica

$$G_C(x) = exp(\sum_{n\geq 1} \frac{x^{2n}}{2n}).$$

Notare che l'argomento della funzione esponenziale nella parte destra è molto simile a (**??**), con x^2 che gioca il ruolo di x. Perciò,

$$G_C(x) = exp(\frac{1}{2}(ln(1-x^2))^{-1}) = \sqrt{\frac{1}{1-x^2}},$$

come volevasi dimostrare. □

Corollario 1.58. *Per tutti gli interi positivi m, il numero di* $(2m)-$*permutazioni che hanno solo cicli pari è* $EVEN(2m) = (2m-1)!!^2$

Dimostrazione. Utilizzando il risultato dell'esempio precedente, tutto ciò che dobbiamo trovare è il coefficiente di $x^{2m}/(2m)!$ in $\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}$. Abbiamo già calcolato questa serie di potenze e abbiamo visto che il coefficiente di $x^{2m}/(2m)!$ era davvero $(2m-1)!!^2$. □

Osserviamo che da qui segue ODD$(2m)$ =EVEN$(2m)$ per tutti gli interi positivi m.

Capitolo 2

Trasposizioni e grafi

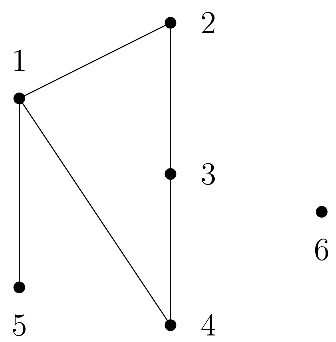
Ricordiamo che le trasposizioni, cioè i cicli di lunghezza 2, generano mediante prodotto tutte le permutazioni.
Mentre la scrittura di una permutazione come prodotto di cicli disgiunti è essenzialmente unica, ci sono molti modi di scriverla come prodotto di trasposizioni non necessariamente disgiunte.
Vogliamo determinare il numero di questi modi, quando si utilizzi il minimo numero possibile di trasposizioni.
Innanzitutto, possiamo determinare un criterio che permette di decidere quando il prodotto di $n-1$ trasposizioni è un ciclo di lunghezza n.

Proposizione 2.1. *Siano $t_1, t_2, ..., t_q$ trasposizioni di S_n. Associamo ad esse un grafo $G(t_1, t_2, ..., t_q)$ con insieme dei vertici $\{1, 2, ..., n\}$ e q lati nel modo seguente: due vertici a, b sono adiacenti nel grafo se esiste un indice i per cui $t_i = (a, b)$.*
Viceversa, dato un grafo con n vertici numerati da 1 ad n e q lati, ad esso possiamo associare un insieme di q trasposizioni di S_n, e quindi $q!$ permutazioni, non necessariamente tutte distinte, ottenute moltiplicando le q trasposizioni, ordinate in tutti i modi possibili.

Esempio 2.2. Consideriamo le 5 trasposizioni di S_6:

$$t_1 = (1, 2),\ t_2 = (1, 4),\ t_3 = (1, 5),\ t_4 = (2, 3),\ t_5 = (3, 4).$$

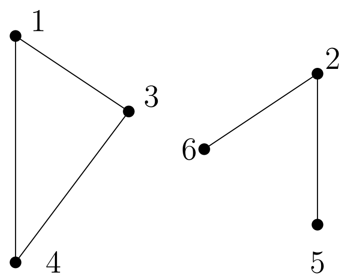
Il grafo $G(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)$ è:



Esempio 2.3. Se invece

$$t_1 = (1,3),\ t_2 = (1,4),\ t_3 = (2,5),\ t_4 = (2,6),\ t_5 = (3,4),$$

il grafo $G(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)$ è:



Ricordiamo che un albero è un grafo connesso e privo di circuiti. Di conseguenza, un albero con n vertici ha $n-1$ lati.

Teorema 2.4. *Siano $t_1, t_2, ..., t_{n-1}$ trasposizioni distinte di S_n. Il prodotto $\sigma = t_1 t_2 \cdots t_{n-1}$ è una permutazione ciclica se e solo se il grafo $G(t_1, t_2, ..., t_{n-1})$ è un albero.*

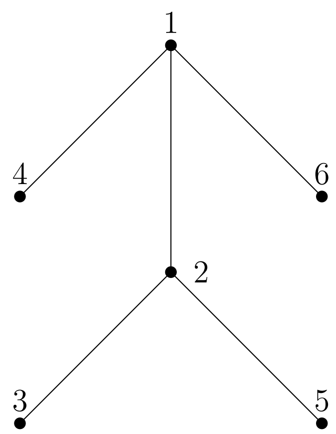
Dimostrazione. Supponiamo che σ sia un ciclo.
Allora, per ogni $a = 2, ..., n-1$ esiste un intero k per cui $\sigma^k(1) = a$. Questo implica che nel grafo esiste un cammino, cioè una sequenza di lati ciascuno adiacente al successivo, che collega 1 ad a, quindi il grafo è connesso. Dato che G ha $n-1$ lati, esso è un albero.
Viceversa, supponiamo che il grafo $G(t_1, t_2, ..., t_{n-1})$ sia un albero, e proviamo che la permutazione σ è un ciclo procedendo per induzione su n. Per $n = 2$ l'affermazione è banalmente verificata.
Supponiamo ora che essa sia vera per l'intero $n-1$. Consideriamo una foglia a, cioè un vertice incidente con un solo lato, del grafo $G(t_1, t_2, ..., t_{n-1})$.

Eliminando da G il vertice a ed il lato ad esso incidente, che corrisponde ad una certa trasposizione $t_k = (a, b)$, otteniamo un altro albero G' con $n-1$ vertici e $n-2$ lati, che, per ipotesi di induzione, corrisponde ad una permutazione ciclica τ di S_{n-1}. Dato che a è una foglia di G, tra le trasposizioni $t_1, t_2, ..., t_{n-1}$ solo t_k contiene a. Questo significa che il prodotto τt_k è un ciclo di lunghezza n. $\square$

Esempio 2.5. Consideriamo le 5 trasposizioni di S_6:

$$t_1 = (1,2),\ t_2 = (1,4),\ t_3 = (1,6),\ t_4 = (2,3),\ t_5 = (2,5).$$

Il grafo $G(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)$ è un albero:



e il prodotto

$$t_1t_2t_3t_4t_5 = 3\ 4\ 5\ 6\ 2\ 1 = (135246)$$

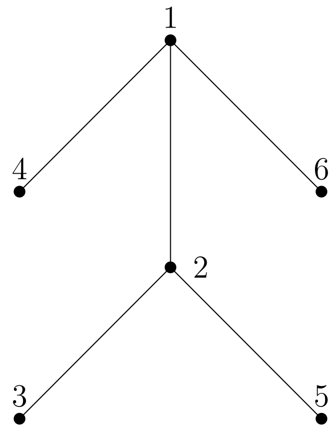
è un ciclo.

Corollario 2.6. *Siano $t_1, t_2, ..., t_{n-1}$ trasposizioni distinte di S_n. Se il prodotto $t_1t_2 \cdots t_{n-1}$ è una permutazione ciclica, allora anche il prodotto $t_{\tau(1)}t_{\tau(2)}...t_{\tau(n-1)}$ è una permutazione ciclica per ogni permutazione τ degli indici.*

Esempio 2.7. Riprendiamo le trasposizioni dell'esempio precedente:

$$t_1 = (1,2),\ t_2 = (1,4),\ t_3 = (1,6),\ t_4 = (2,3),\ t_5 = (2,5).$$

Il grafo associato è l'albero



Moltiplicando le trasposizioni in un ordine differente, otteniamo ad esempio il ciclo

$$t_3t_2t_4t_5t_1 = 6\ 3\ 5\ 2\ 1\ 4 = (164235).$$

Per proseguire le nostre considerazioni, occorre conoscere il numero di alberi distinti con n vertici etichettati $1, 2, ..., n$.

Teorema 2.8 (Teorema di Cayley)**.** *Per ogni intero $n \geq 2$, il numero di alberi con insieme dei vertici $[n] = \{1, 2, ..., n\}$ è n^{n-2}.*

Dimostrazione. Indichiamo con T_n il numero di alberi con insieme dei vertici $[n]$. Contiamo in due modi diversi il numero di sequenze di lati che possono essere aggiunti al grafo vuoto per ottenere un albero con radice, cioè con un vertice selezionato. Un modo per costruire una di queste sequenze è scegliere uno dei T_n alberi con n vertici, selezionare uno dei suoi vertici come radice (n scelte), e scegliere una delle possibili $(n-1)!$ sequenze in cui aggiungere i suoi lati. In totale, quindi, avremo $n!\ T_n$ scelte possibili.
Un altro modo è quello di aggiungere un lato alla volta al grafo vuoto, e contare il numero di scelte disponibili ad ogni passo.
Supponiamo di aver già scelto $n-k$ lati. Il grafo ottenuto a questo stadio è certamente privo di circuiti, ma non necessariamente connesso: sarà quindi una unione di k alberi, ciascuno con una radice. A questo punto ci sono $n(k-1)$ scelte possibili per il prossimo lato: il suo primo vertice v può essere uno qualsiasi degli n vertici disponibili, e l'altro la radice r di uno qualunque degli alberi che non contengono il vertice scelto ($k-1$ scelte). Dopo l'aggiunta del lato (v, r), otterremo una unione di $k-1$ alberi: l'albero che conteneva v e quello che conteneva r, che prima erano disgiunti, costituiscono ora un unico albero. Scegliamo come sua radice quella dell'albero che conteneva v.
Moltiplicando il numero di scelte che abbiamo al primo passo, al secondo,

ecc., otteniamo che il numero totale di scelte è

$$\prod_{k=2}^{n} n(k-1) = n^{n-1}(n-1)! = n^{n-2}n!.$$

Uguagliando le due quantità ottenute, abbiamo la tesi. □

Teorema 2.9. *Il numero di modi di scrivere una data permutazione ciclica di S_n come prodotto di $n-1$ trasposizioni è n^{n-2}.*

Dimostrazione. Senza perdita di generalità, dimostriamo l'asserto per il ciclo $(12...n)$. Vogliamo stabilire una biiezione tra l'insieme degli alberi il cui insieme dei vertici è $[n]$ e l'insieme delle $(n-1)-$ple $(t_1, t_2, ..., t_{n-1})$ di trasposizioni tali che $t_1 t_2 ... t_{n-1} = (12...n)$.
Sia allora T un albero con insieme dei vertici $[n]$. Per ogni vertice $i = 2, 3, ..., n$ esisterà in T un cammino da 1 ad i il cui ultimo lato sarà del tipo (a, i). Indichiamo con s_i la trasposizione $(a\ i)$, e poniamo $\tau = s_2 s_3 ... s_n$. Per il teorema **??**, τ è una permutazione ciclica.
Definiamo poi un'altra permutazione π ponendo per ogni $k = 1, 2, ..., n$,

$$\pi(k) = \tau^{k-1}(1).$$

Si verifica facilmente che $\pi\tau\pi^{-1} = (12...n)$.
Se per ogni i poniamo

$$t_i = \pi s_i \pi^{-1},$$

abbiamo che:

- $t_2, t_3, .., t_n$ sono trasposizioni;
- $t_2 t_3 ... t_n = \pi\tau\pi^{-1} = (12...n)$.

Abbiamo così definito una funzione Φ che associa all'albero T una $(n-1)-$pla $(t_2, t_3, ..., t_n)$ di trasposizioni tali che

$$t_2 t_3 ... t_n = (12...n).$$

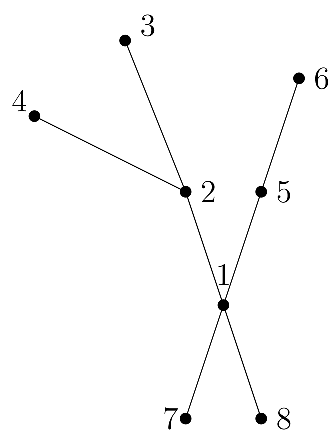
Dobbiamo ora provare che la mappa Φ è una biiezione.
Per far questo, osserviamo che, dato un albero T con insieme dei vertici $[n]$, ad esso vengono associate da Φ una $(n-1)-$pla di trasposizioni $(t_2, t_3, ..., t_n)$ tale che $t_1 t_2 ... t_{n-1} = (12...n)$ ed una permutazione π definita in precedenza. Notiamo che T è precisamente l'albero $G(s_2, s_3, ..., s_n)$ associato all'insieme di trasposizioni $\{s_2, s_3, ..., s_n\}$ con $s_i = \pi^{-1} t_i \pi$.
Questo significa che, se modifichiamo i nomi dei vertici T secondo la permutazione π^{-1}, otteniamo l'albero associato a $\{t_2, t_3, ..., t_n\}$. Di conseguenza, la

mappa Φ è iniettiva.
Data ora una $(n-1)-$pla di trasposizioni $(t_2 t_3 ... t_n)$ tale che $t_1 t_2 ... t_{n-1} = (12...n)$, consideriamo l'albero $G(t_2, t_3, ..., t_n)$. Per ogni $i = 2, 3, ..., n$, sia x_i l'estremo del lato t_i più lontano dal vertice 1 in G. Definiamo una permutazione ξ in S_n ponendo

$$\xi(1) = 1, \ \xi(x_i) = i \ per \ i = 2, 3, ..., n.$$

Se indichiamo con T l'albero ottenuto da G applicando ai suoi vertici la permutazione ξ, abbiamo che $\Phi(T) = (t_2, t_3, ..., t_n)$.
Infatti, è sufficiente osservare che la permutazione ξ coincide con la permutazione π associata a T, dato che i lati di T corrispondono alle trasposizioni $\xi^{-1} t_i \xi$. □

Esempio 2.10. Consideriamo l'albero T:



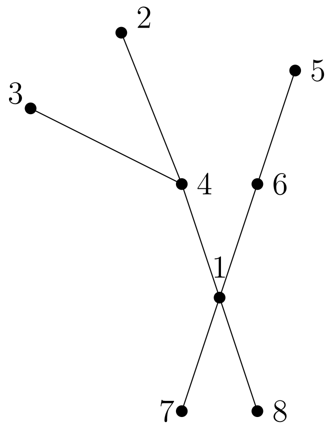
La mappa associa a T le trasposizioni

$$t_2 = (14), \ t_3 = (24), \ t_4 = (34), \ t_5 = (16), \ t_6 = (56), \ t_7 = (17), \ t_8 = (18),$$

e la permutazione

$$\pi = 1\ 3\ 4\ 2\ 6\ 5\ 7\ 8, \ \ con \ \pi^{-1} = 1\ 4\ 2\ 3\ 6\ 5\ 7\ 8.$$

L'albero $G(t_2, t_3, ..., t_8)$ è



ed è ottenuto da T permutando le etichette dei vertici secondo π^{-1}.

Bibliografia

[1] Miklós Bóna, Combinatorics of Permutations, *World scientist publishing Co. Pte. Ltd, second edition* 2006

[2] Miklós Bóna, A walk through combinatorics, *World scientist, River Edge NY* 2002

[3] Paul Moszkowski, A solution to a problem of Dénes: a bijection between trees and factorizations of cycle permutations, *European journal of combinatorics, vol.*10 *issue* 1, 1989, *pg.* $13 - 16$

[4] Biggs Norman L., The roots of combinatorics, *Historia mathematica* 6, 1979, *pg.* $109 - 136$

[5] Biggs Norman L., Permutation groups and combinatorial structures, *Cambridge University press*, 1979

[6] Dénes, The representation of a permutation as the product of a minimal number of transposition, and its connection with the theory of graphs, *Communications of the mathematical institute of the Hungarian Academy of Sciences* 4, 1959, *pg.* $63 - 70$

Ringraziamenti

Ringrazio la professoressa Marilena Barnabei per la disponibilità, la pazienza e la gentilezza che ha dimostrato, durante tutto questo percorso, a tratti difficile ma comunque entusiasmante.

Ringrazio la mia amica, nonchè ”tutor personale”, Flavia perchè è anche grazie a te se mi sto finalmente laureando. Hai preso a cuore la mia tesi, l'hai corretta e mi hai incoraggiato a non mollare. E in più, in questi anni, mi sei sempre stata vicino a lezione per una risata, una partita a carte o per passarmi gli appunti pre−esame. Dovrei farti una statua!

Ringrazio i miei genitori, mio fratello e Giorgia, ora finalmente mia cognata. Sono stati la colonna portante di tutta la mia vita e di questo lungo, soprattutto tortuoso, percorso universitario. E li ringrazio per ciò che hanno fatto, dato e trasmesso a me in questi anni. Tenacia, grinta, determinazione e curiosità sono solo alcune delle tante cose che mi avete passato. Se oggi sono qui e sono ciò che sono è merito vostro. Non potrò mai ringraziarvi abbastanza, soprattutto per il lavoro che avete fatto in queste settimane.

Ringrazio le mie zie e i miei cugini vicini e lontani. Mi avete sostenuta, consigliata e incoraggiata. Grazie, veramente, dal profondo.

Ringrazio, anche, i miei meravigliosi vicini di casa: Ada, Franco, il parmense Fabio e la san benedettese Chiara; grazie a voi so già cosa mi aspetta nel futuro, ma soprattutto grazie a voi questo non mi spaventa. Ho dei fantastici consiglieri. E ho amato come sia stato tutto in famiglia: le ansie, le attese e soprattutto i traguardi non erano più di una sola persona, ma le abbiamo vissute tutti insieme.
Ringrazio Stefania, Andrea e Valentina. So che non è stato facile sopportarmi in questi anni, ma vi ringrazio per averlo fatto. Ci ha cambiati la mia università (anche solo il distacco), ma abbiamo saputo guardare sempre i momenti positivi ed è grazie a Vale che ho capito di aver scelto la giusta

università.

Un ringraziamento particolare va a Bella, il cane più paziente che io conosca. E chi dice che la pet terapy non funziona, significa che non ha mai incontrato questo cane. Il mio pasticcino dolce.

Ringrazio tutti i miei amici. Mi hanno dato tanto. Ma soprattutto voglio ringraziare Alice, Rebeca, Serena, Sarah, Claudia, Michela, Giorgia, Martina e Angela. Sappiate che questi anni senza di voi sarebbero stati parecchio brutti. Grazie per avermi fatto ridere, divertire, studiare e soprattutto commuovere con i vostri gesti e le vostre parole. E, soprattutto, sappiate che Bologna è stata ciò che è stata solo grazie a voi, altrimenti solo una noia mortale.

Un ringraziamento speciale, che viene dal profondo del mio cuore, lo voglio fare ad una ragazza che mi è stata vicina e ha avuto tanta pazienza con me. Alla mia coinquilina, alla mia Bari. Ti ringrazio per avermi sopportata e supportata in questi anni, per avermi convinta a studiare quelle volte che non avevo voglia. Ti ringrazio per aver amato con me il Natale, per le mille migliaia di colazioni che mi hai preparato, per avermi insegnato a mettere la cintura dietro, ma soprattutto per essere un'amica sincera. Sei fonte di ispirazione per me e un modello da seguire. Ti voglio bene!

E per ultimo, ma non per importanza. Un ringraziamento gigantesco va ad Alessandro. Sei stata la persona più vicina a me, oltre alla mia famiglia. Hai sopportato i miei mille sbalzi d'umore, i miei continui cambi di idea sull'univerisità. Mi sei stato vicino quando venivo sconfitta e quando vincevo festeggiavi con me. Hai saputo incoraggiarmi come nessuno ha mai fatto. Hai cercato di aiutarmi anche se, lo sappiamo, tu e la matematica vivete in mondi diversi. Nonostante questo volevi far parte del mio mondo e lo apprezzo molto. Mi hai fatto provare per la prima volta cosa significa essere un'insegnante e spiegarti è stata la cosa più divertente che io abbia mai fatto, oltre ad essere la più bella. Grazie a te ho capito che la strada che sto percorrendo è quella giusta. Ti ringrazio per aver sempre creduto in me, anche quando non ci credevo neanche io; e soprattutto se qualcuno non ci credeva facevi in modo di farlo ricredere. Ti ringrazio per essermi stato vicino anche se lontana da te, per avermi fatto sorridere e rilassare quando ero in tensione e stressata. Sono orgogliosa di stare al tuo fianco. Ti amo, da sempre.