

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

UN MODELLO GEOMETRICO DELLE MAPPE DI ORIENTAZIONI CORTICALI

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
GIOVANNA CITTI

Presentata da:
ANNALISA SCASSERRA

Sessione Unica
Anno Accademico 2018/2019

*Alla loro miseria volevano sfuggire,
e le stelle erano per essi troppo lontane.*

FRIEDRICH W. NIETZSCHE, *Così parlò Zarathustra*

Introduzione

Con l'espressione "Neurogeometria della visione" si fa riferimento a tutti gli studi che hanno contribuito e stanno contribuendo alla comprensione delle strutture delle connessioni neurali della corteccia visiva mediante la costruzione di modelli geometrici.

L'obiettivo di questa Tesi è quello di presentare un modello geometrico costruito sul gruppo $SE(2)$ delle rototraslazioni come soluzione al problema della modellizzazione della corteccia visiva e, in particolare, della minimizzazione delle lunghezze delle connessioni neurali.

A tale scopo ripercorreremo alcuni dei principali risultati di D. Hubel e T. Wiesel, T. Bonhoeffer e A. Grinvald, J. Petitot, G. Citti e A. Sarti.

L'elaborato è strutturato come segue.

Il Capitolo 1 consiste di una breve presentazione della corteccia cerebrale e in particolare dell'area deputata alla ricezione ed elaborazione degli input sensoriali visivi: la corteccia visiva primaria (V1).

Dopo aver descritto le tipologie di cellule che costituiscono la V1, vedremo l'architettura funzionale della corteccia visiva analizzando il problema della ridondanza dell'organizzazione corticale: introdurremo, quindi, l'oggetto di principale interesse della Tesi, ossia la struttura a *pinwheels*.

Proprio questa organizzazione ci indurrà a modellizzare la corteccia come un $\mathbb{R}^2 \times S^1$, in cui ogni punto è individuato dalle sue coordinate retiniche (x, y) e dalla sua preferenza di orientazione θ .

Nel Capitolo 2 introdurremo, invece, i principali strumenti matematici necessari alla formulazione del modello.

Daremo, perciò, le definizioni utili a caratterizzare il gruppo $SE(2)$ delle rototraslazioni.

L'obiettivo sarà quello di dotare $SE(2)$ di una distanza: a tale scopo daremo prima definizioni generali di metrica Riemanniana e Sub-Riemanniana e poi vedremo un sistema più diretto per definire distanze equivalenti su $SE(2)$.

Infine, nel Capitolo 3 presenteremo il modello di Scott D. Pauls in [8] per mappe di orientazioni corticali.

Tale modello prevede di costruire mappe da $SE(2)$ a valori nel foglio bidimensionale di corteccia che minimizzino la lunghezza delle connessioni neurali e la distorsione metrica, cioè assicurino vicinanza tra la geometria di $SE(2)$ e quella della corteccia.

Introdurremo, infine, un funzionale Energia: minimizzare tale funzionale equivarrà a soddisfare l'evidenza sperimentale e le richieste del modello, in particolare la corrispondenza tra vicinanza di punti in $SE(2)$ e vicinanza di neuroni nella corteccia.

Indice

Introduzione	i
1 La corteccia visiva	1
1.1 La corteccia cerebrale e il meccanismo della visione	1
1.2 Le cellule di V1	3
1.2.1 Le cellule semplici	4
1.3 L'architettura funzionale di V1	5
1.4 La struttura a <i>pinwheels</i>	8
2 Una metrica Riemanniana e Sub-Riemanniana in $SE(2)$	11
2.1 Gruppi di Lie e Spazi Tangenti	11
2.2 Il gruppo euclideo	14
2.3 Il gruppo $SE(2)$	15
2.4 Metrica Riemanniana e Sub-Riemanniana	19
2.5 Distanze in $SE(2)$	20
3 Un modello di pinwheels	26
3.1 Una mappa bi-Lipschitz	27
3.2 Un funzionale energia	28
Bibliografia	31

Capitolo 1

La corteccia visiva

In questo primo capitolo introduciamo le strutture basilari dell'architettura funzionale della corteccia visiva primaria.

L'idea principale è che il processo di elaborazione di informazioni visive attraverso le reti di neuroni sia strettamente collegato all'organizzazione e alla connettività dei neuroni nella corteccia. La presentazione è ispirata ai lavori di G. Sanguinetti in [1], D. Hubel e T. Wiesel in [2], J. Petitot in [3] e G. Citti, A. Sarti in [4].

1.1 La corteccia cerebrale e il meccanismo della visione

La **corteccia cerebrale** o **materia grigia** è il foglio esterno del tessuto neurale che si estende sui due emisferi cerebrali. Qui è localizzata la maggior parte dei **neuroni** associati a processi sensoriali o cognitivi. Il resto della corteccia cerebrale, detta **materia bianca**, è costituita da **assoni** che connettono i neuroni.

Un'usuale suddivisione della corteccia è la seguente:

- aree motorie;
- aree associative;

- aree sensitive.

Queste ultime sono quelle deputate alla ricezione degli input sensoriali. In particolare, è la **corteccia visiva** l'area della corteccia che riceve le informazioni ottiche dal **percorso visivo**.

Come funziona il meccanismo della visione?

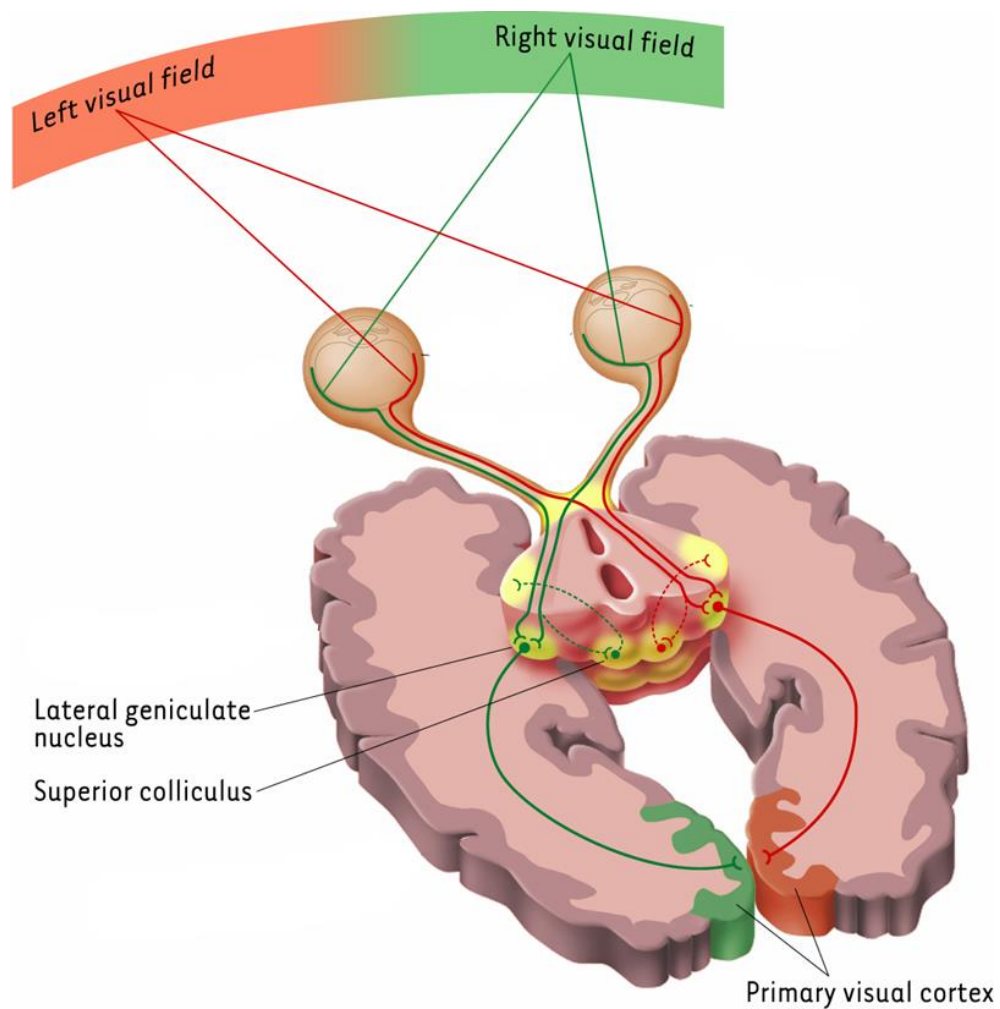


Figura 1.1: Percorso visivo

La luce entra nell'occhio e raggiunge la **retina**, un foglio di tessuto cerebrale sottile e curvo che si sviluppa nell'occhio fungendo da punto di partenza per il segnale visivo. Infatti, essa è ricoperta da migliaia di milioni di foto-

recettori che convertono la luce in segnali elettrici. A loro volta i segnali elettrici vengono trasmessi attraverso coppie di strati neurali: in particolare sono le **cellule gangliari** ad inviare l'output dalla retina sotto forma di potenziale d'azione. Tale trasmissione è resa possibile dagli assoni di queste cellule: essi costituiscono una delle principali strutture del sistema, cioè il **nervo ottico**.

Il nervo ottico trasmette il segnale visivo al **corpo genicolato laterale (LGN)** del talamo: esso funge da ponte tra gli organi di senso e le aree corticali deputate all'elaborazione sensoriale. Dall'LGN il segnale si dirige in varie direzioni, la più importante delle quali è la **corteccia visiva V1**.

1.2 Le cellule di V1

Il **campo recettore** di un neurone visivo, cioè di un neurone di V1, è l'area del campo visivo in cui la stimolazione influenza le reazioni neurali, cioè la regione della retina dove l'azione della luce altera l'attivazione del neurone: alcune di queste cellule corticali reagiscono alle macchie di luce/buio in diverse sotto-regioni del campo recettore, dette **zone ON/OFF**. La disposizione di queste aree può essere utilizzata per predire le reazioni delle cellule agli stimoli visivi.

Definiamo, dunque, il **profilo recettore RP** di un neurone come la funzione

$$\begin{aligned}\phi : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \phi(x, y)\end{aligned}$$

dove il dominio D è il campo recettore, (x, y) le coordinate sulla retina e $\phi(x, y)$ "misura la risposta" delle cellule: assume valori positivi per le zone ON e negativi per le zone OFF.

1.2.1 Le cellule semplici

Nell'area V1 esistono almeno tre tipi di cellule che sono sensibili al modo con cui le immagini sono orientate nei rispettivi campi recettivi della retina.

Le **cellule semplici** possiedono zone antagoniste eccitatorie ed inibitorie (ON/OFF) simili a quelle presenti nel corpo genicolato o nelle cellule gangliari, anche se più grandi; esse sono in grado di rilevare l'inclinazione di un'immagine posta in una certa zona del campo visivo.

Le **cellule complesse**, invece, rivelano la posizione di un oggetto indipendentemente dalla sua posizione nel campo visivo; rispondono, infatti, sia ad una linea orientata secondo una precisa direzione sia ad una linea con lo stesso orientamento ma in movimento. Esse non hanno le zone ON/OFF separate e costituiscono la maggioranza delle cellule di V1.

Un certo numero di cellule complesse è poi in connessione con altre cellule, dette **ipercomplesse**, poste fuori dell'area visiva primaria, capaci di una astrazione ancora maggiore e in grado di discernere angoli o spigoli.

La maggior parte delle cellule semplici di V1 è coinvolta, dal punto di vista funzionale, nel processo visivo come **rivelatore di orientazione**: la risposta di tali cellule allo stimolo è una misura dell'orientazione locale dello stimolo in un preciso punto della retina. L'angolo in corrispondenza del quale la risposta è massima è detto **preferenza di orientazione OP** del neurone.

Quando una cellula semplice percepisce il bordo di un'immagine la sua reazione è massima se l'orientazione dei suoi assi è allineata con il confine stesso. Tuttavia, un ampio insieme di cellule con orientazioni sub-ottimali risponde allo stimolo. Per questo motivo la corteccia visiva è dotata di un circuito neurale in grado di affinare la sintonizzazione dell'orientazione: mediante tale meccanismo, detto **soppressione non massimale**, l'output delle cellule con orientazione sub-ottimale è soppresso. Ciò consente solo al numero esiguo di cellule ottimamente orientate di codificare per l'orientazione al bordo.

Più precisamente, il bordo sarà rappresentato da una curva regolare $\gamma_{2D} = (x(t), y(t))$ e la selezione dell'orientazione da parte delle cellule semplici si

può formalizzare come il **sollevamento** ad uno spazio tridimensionale (C) di una curva in uno spazio bidimensionale (R). Possiamo assumere che il vettore tangente a γ_{2D} sia non nullo quasi dappertutto, così che sia possibile identificare un'orientazione $\theta(t) : D \subset \mathbb{R} \rightarrow S^1$ che prende valori in tutto il cerchio.

Questo significa che siamo in grado di parametrizzare la curva mediante lunghezza d'arco:

$$(\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = (\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t))).$$

Associando a ogni punto $(x(t), y(t))$ l'orientazione $\theta(t)$ possiamo descrivere la selezione dell'orientazione come il sollevamento della curva bidimensionale γ_{2D} ad una nuova curva $\gamma(t)$ nello spazio 3D:

$$(x(t), y(t)) \rightarrow (x(t), y(t), \theta(t))$$

$$\text{con } \theta = \arctan\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right).$$

1.3 L'architettura funzionale di V1

Con l'espressione **architettura funzionale** ci riferiamo all'organizzazione spaziale e alle connessioni tra i neuroni all'interno dell'area corticale. L'architettura funzionale della corteccia visiva primaria consiste di 3 strutture principali:

- **struttura stratificata:** la corteccia è costituita da 6 strati orizzontali e un certo numero di sottostrati; in particolare è il sottostrato 4C quello in cui arriva il maggior numero di assoni del LGN e dove è più alta la concentrazione di cellule orientate;
- **struttura retinotopica:** la **retinotopia** è una particolare tipologia di organizzazione topografica, per cui esiste una topologia che preserva la mappa dalla retina alla corteccia (ciò che è vicino nella retina lo è nella corteccia). Cioè se R è il piano con cui identifichiamo la struttura

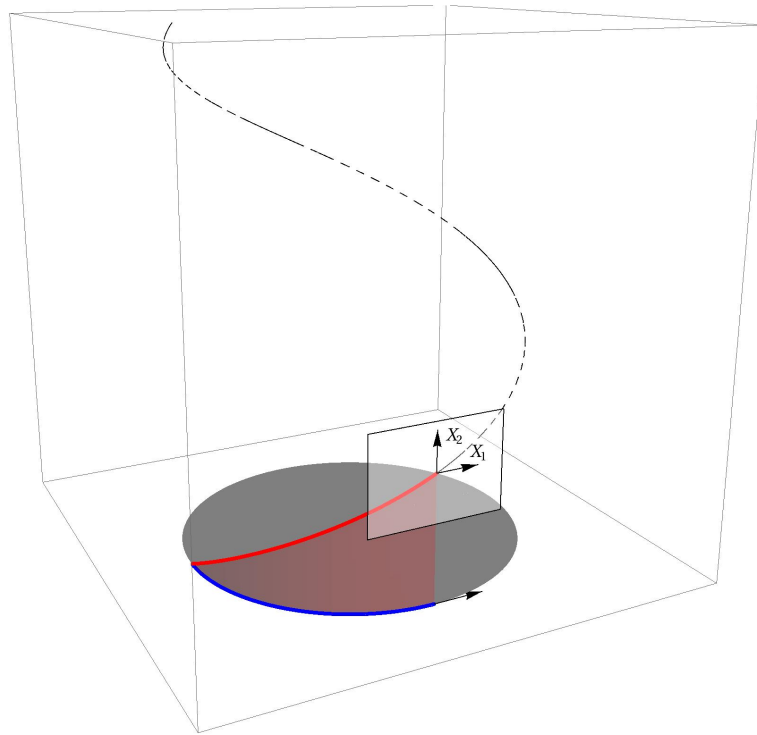


Figura 1.2: Sollevamento del bordo rappresentato dalla curva γ_{2D} (in blu) alla curva $\gamma(t)$ (in rosso) nello spazio 3D delle rototraslazioni.

retinica e C è il livello corticale, il segnale corticale è la mappa $q : R \rightarrow C$, che realizza un isomorfismo;

- **struttura ipercolonnare:** penetrando la corteccia perpendicolarmente e registrando gli RP delle cellule semplici si osserva come i loro OP ed altre caratteristiche come la dominanza oculare (la risposta è più rapida quando lo stimolo è presentato a un occhio piuttosto che all'altro) restino costanti a prescindere dalla profondità raggiunta. Una penetrazione tangenziale degli strati superficiali rivela, invece, che gli RP di cellule vicine coincidono fortemente, mentre l'OP varia con continuità generando la struttura ipercolonnare di orientazione.

La struttura ipercolonnare organizza le cellule corticali in colonne corrispondenti al parametro di orientazione: ad ogni posizione (x, y) sulla

retina è associato un insieme di cellule, detto **ipercolonna**, costituito da tutte le cellule sensibili a tutte le possibili orientazioni e centrate in (x, y) . Formalmente sopra ad ogni punto (x, y) della retina, è presente una intera ipercolonna di cellule, ciascuna individuata da una orientazione θ .

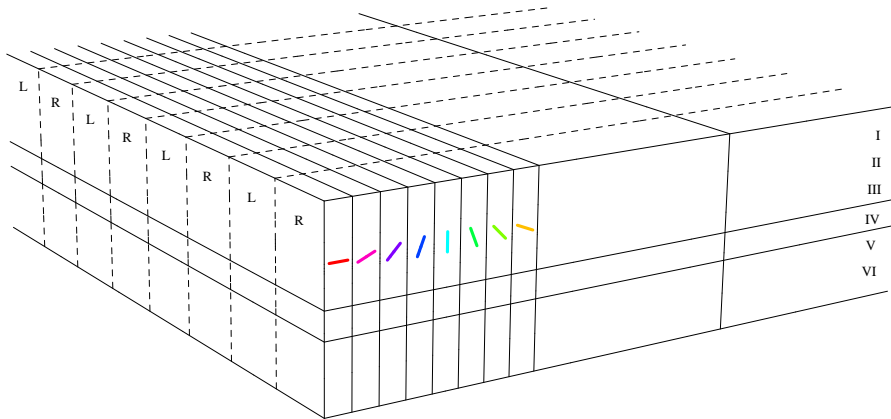


Figura 1.3: Una versione semplificata della struttura ipercolonnare: cellule appartenenti alla stessa colonna condividono simili RP, OP; ciascuna barra orientata colorata rappresenta una preferenza di orientazione.

Tali strutture evidenziano la ridondanza dell'organizzazione corticale: per ciascun punto (x, y) della retina esiste un intero insieme di neuroni in V1 che rispondono massimalmente a ogni possibile locale orientazione θ .

L'idea è la seguente:

- la posizione sulla retina prende valori (x, y) in \mathbb{R}^2 ;
- la preferenza di orientazione prende valore θ in S^1 .

Dunque il dominio della corteccia visiva può essere modellizzato localmente come $\mathbb{R}^2 \times S^1$, cioè ogni $(x, y, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1$ rappresenta una colonna di cellule nella corteccia associata ad una posizione (x, y) sulla retina e tutte sintonizzate sull'orientazione data dall'angolo θ .

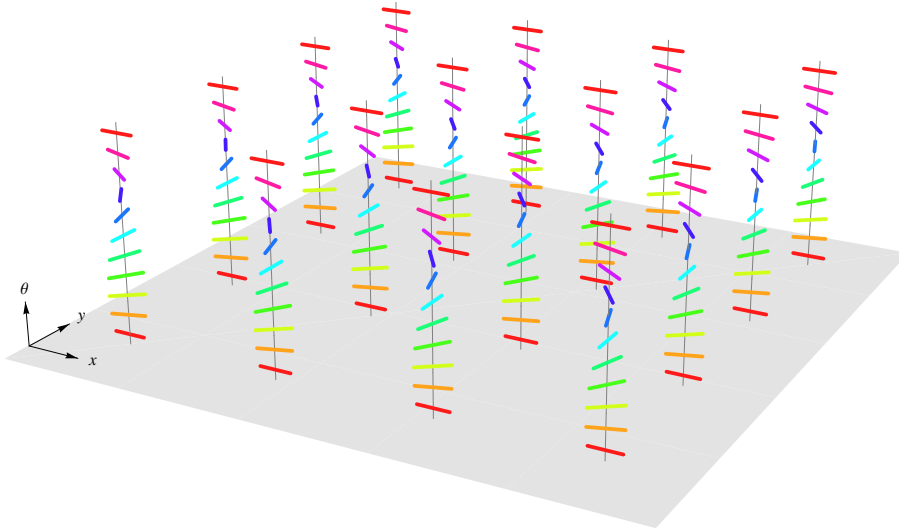


Figura 1.4: La corteccia visiva modellizzata come un insieme di ipercolonne: su ogni punto della retina $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ c'è un insieme di cellule che codificano per l'insieme delle orientazioni $\theta \in S^1$. Ogni barra rappresenta una possibile orientazione.

1.4 La struttura a *pinwheels*

L'osservazione che sorge spontanea a questo punto è la seguente: la corteccia visiva V1 è modellizzata come un $\mathbb{R}^2 \times S^1$, cioè uno spazio **3D** di posizioni e orientazioni, mentre la corteccia visiva è uno strato **2D**. Bisogna, quindi, affrontare un problema di riduzione dimensionale e ciò è reso possibile dalla ridondanza della corteccia, in particolare dalla quasi totale sovrapposizione dei campi recettori di neuroni vicini.

Il sistema visivo ha realizzato tale collasso dimensionale mediante la **struttura a pinwheels**.

Come abbiamo visto nella sezione precedente i neuroni vicini nella corteccia visiva hanno orientazioni preferenziali vicine. Attraverso la superficie corticale le OP cambiano gradualmente formando una mappa di orientazione.

Al fine di determinare il preciso layout del dominio di iso-orientazione

della corteccia nei primi anni '90 Bonhoeffer e Grinvald in [5] svilupparono le prime tecniche di *in-vivo intrinsic-signal optical imaging*: esse permettono di rivelare la mappa globale delle orientazioni tramite l'acquisizione di immagini di attività per la popolazione di cellule dagli strati superficiali della corteccia visiva primaria. Prima di allora le uniche tecniche di acquisizione erano registrazioni post-mortem di pochi neuroni (individuali) tramite micro-elettrodi. La tecnica implementata da Bonhoeffer e Grinvald consiste nell'acquisizione di immagini dalla corteccia esposta dell'animale, illuminata da raggi infrarossi, tramite video camera. La registrazione viene effettuata mentre l'animale è stimolato nella visione di griglie in movimento proiettate su uno schermo.

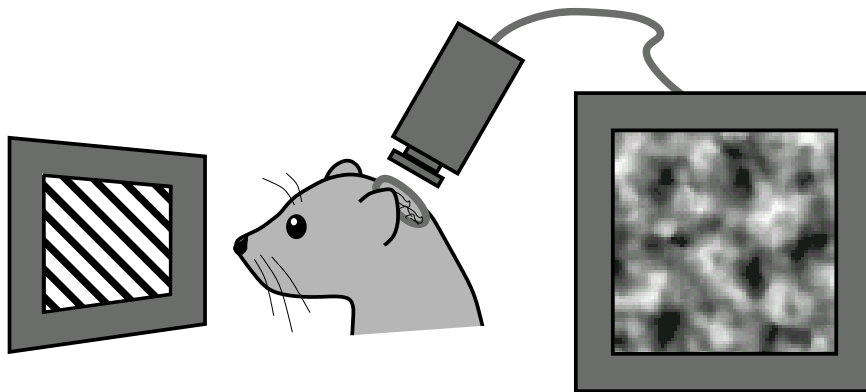


Figura 1.5: Immagine presa da [7]: tecniche di *optical imaging* di Bonhoeffer e Grinvald.

L'intensità delle immagini registrate dipende dall'attività neurale: le aree più scure corrispondono alle regioni in cui la risposta allo stimolo è massima.

Tutte le mappe di orientazione possono essere combinate usando scale di colori: ogni colore corrisponde ad un'orientazione preferita. Si evidenziano allora due strutture principali:

- zone "regolari" in cui il colore cambia gradualmente: esse corrispondono alle orientazioni delle ipercolonne registrate con gli elettrodi;

- punti singolari, attorno ai quali tutti i colori appaiono una e una sola volta.

Questi punti disposti come raggi di una ruota sono detti **pinwheels**: tutte le orientazioni si ottengono spostandosi radialmente in senso orario e antiorario attorno al centro (ciò non permette di distinguere cellule con contrasti opposti: le orientazioni registrate stanno nell'intervallo $[0, \pi)$).

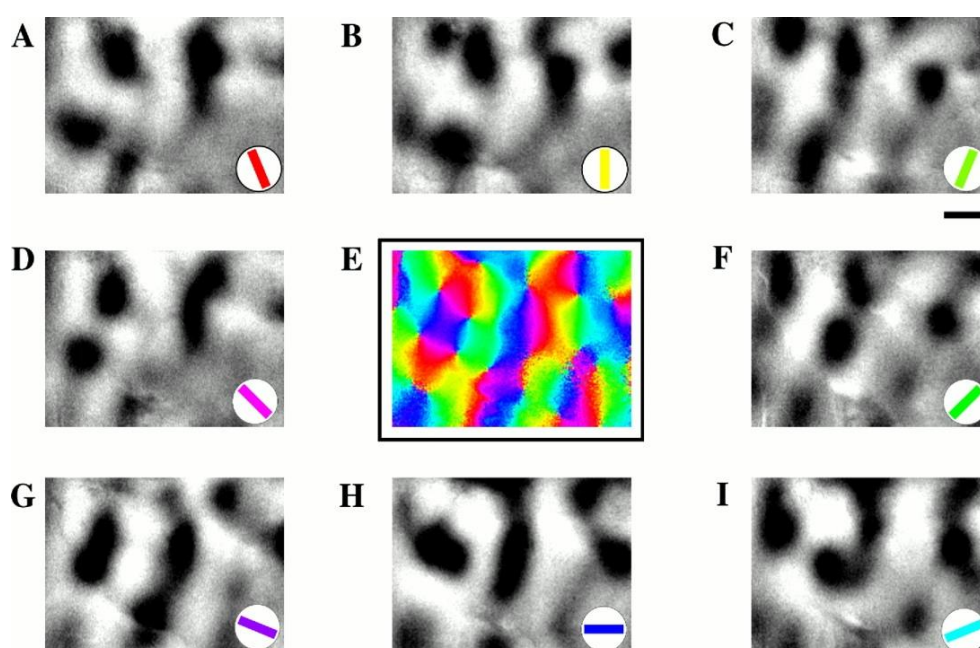


Figura 1.6: Immagine presa da [6]. Nell'angolo di ciascuna immagine una barra orientata colorata indica l'orientazione della griglia. I livelli di grigio dipendono dall'intensità della risposta allo stimolo: regioni più scure corrispondono a regioni dove la risposta neurale è massima. L'immagine centrale è ottenuta combinando le altre otto.

Capitolo 2

Una metrica Riemanniana e Sub-Riemanniana in $SE(2)$

Nel seguente capitolo introduciamo i principali strumenti matematici utili alla modellizzazione dello spazio corticale.

2.1 Gruppi di Lie e Spazi Tangenti

Definizione 1. Siano G un insieme e \cdot un'operazione interna su G :

$$G \longrightarrow G$$

$$(g_1, g_2) \longmapsto g_1 \cdot g_2.$$

Se \cdot soddisfa gli **assiomi di gruppo**

- **Proprietà associativa.** $\forall g_1, g_2, g_3 \in G (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$.
- **Elemento neutro.** $\exists e \in G$ tale che $\forall g \in G e \cdot g = g \cdot e = g$.
- **Elemento inverso.** $\forall g \in G \exists g^{-1} \in G$ tale che $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$.

diciamo che G è un **gruppo**.

Se vale anche la **proprietà commutativa**: $\forall g_1, g_2 \in G g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1$, G è detto **abeliano** o **commutativo**.

Vogliamo ora introdurre il concetto di Gruppo di Lie, la cui caratteristica principale è la continuità dell'operazione di gruppo.

Definizione 2. Un gruppo G è un **Gruppo di Lie** se

1. G ha struttura di varietà;
2. $\forall g_1, g_2 \in G$ l'operazione di gruppo

$$m : G \times G \longrightarrow G$$

$$(g_1, g_2) \longmapsto g_1 \cdot g_2$$

è una mappa differenziabile tra varietà;

3. $\forall g \in G$ l'inversa

$$i : G \longrightarrow G$$

$$g \longmapsto g^{-1}$$

è una mappa differenziabile tra varietà.

Definizione 3. Sia M una varietà e C una curva differenziabile su M , parametrizzata da $\gamma : I \rightarrow M$, con I sottointervallo di \mathbb{R} . In coordinate locali $x = (x_1, \dots, x_n)$, C è data da n funzioni differenziabili $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \dots, \gamma_n(s))$ di variabile reale s . In ogni punto $x = \gamma(s)$ di C definiamo l' **operatore differenziale**

$$\mathbf{X} = \dot{\gamma}(s) = \dot{\gamma}_1(s) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \dot{\gamma}_n(s) \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Definizione 4. $v_{\mathbf{X}} = (\dot{\gamma}_1, \dots, \dot{\gamma}_n)$ è il **vettore tangente** alla curva γ in x .

Definizione 5. Sia M una varietà e $x \in M$. Lo **spazio tangente** a M in x , indicato con $TM|_x$, è l'insieme di tutti i possibili vettori tangenti a tutte le possibili curve tangenti a M passanti per x . Il punto x è detto **punto base**.

Definizione 6. Sia $v_{\mathbf{X}}$ un campo vettoriale. Una **curva integrale** di $v_{\mathbf{X}}$ è una curva differenziabile parametrizzata $x = \gamma(s)$ il cui vettore tangente in ogni punto coincide con il valore di $v_{\mathbf{X}}$ nello stesso punto per ogni s :

$$\dot{\gamma}(s) = v_{\mathbf{X}}|_{\gamma(s)}.$$

Definizione 7. Siano \mathbf{X} e \mathbf{Y} due operatori differenziali.

La loro **parentesi di Lie** (o **commutatore**) è definita dalle azioni di \mathbf{X} e \mathbf{Y} sulle funzioni $f: M \rightarrow \mathbb{R}$

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]f = \mathbf{X}(\mathbf{Y}f) - \mathbf{Y}(\mathbf{X}f).$$

Osservazione 1. Poichè la parentesi di Lie è definita come la differenza ottenuta nell'applicare i due operatori in ordine inverso, essa costituisce una misura della loro *non-commutatività*: se \mathbf{X} e \mathbf{Y} commutano $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = 0$.

Se \mathbf{X} e \mathbf{Y} sono operatori del primo ordine:

$$\mathbf{X} = a_1 \partial_{x_1} + \dots + a_n \partial_{x_n}$$

$$\mathbf{Y} = b_1 \partial_{x_1} + \dots + b_n \partial_{x_n}$$

allora

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]f = (\mathbf{X}b_1 \partial_{x_1} + \dots + \mathbf{X}b_n \partial_{x_n} - \mathbf{Y}a_1 \partial_{x_1} - \dots - \mathbf{Y}a_n \partial_{x_n})f.$$

Definizione 8. Siano G un gruppo di Lie e \cdot l'operazione di gruppo. Per ogni elemento $g \in G$, il **trasporto sinistro** è l'applicazione

$$\begin{aligned} L_g : G &\longrightarrow G \\ h &\longmapsto g \cdot h. \end{aligned}$$

Definizione 9. Sia G gruppo di Lie e \mathbf{X} un operatore su G .

Diciamo che \mathbf{X} è **invariante a sinistra** se $\forall g \in G$

$$\mathbf{X}(f \circ L_g) = (\mathbf{X}f) \circ L_g.$$

Definizione 10. Sia G un gruppo di Lie. La sua **algebra di Lie** è lo spazio vettoriale di tutti i campi vettoriali invarianti a sinistra su G .

Definizione 11. Siano M una varietà differenziabile, $\Delta \subset TM$ un sottofibrato del suo fibrato tangente. Δ è detto **sottofibrato orizzontale** o **ammissibile**.

Definizione 12. Siano M una varietà differenziabile, $\Delta \subset TM$ sottofibrato orizzontale, $\Gamma(\Delta) = \{\mathbf{X} : \Delta \rightarrow M \text{ di classe } C^\infty\}$. Diciamo che Δ è **bracket generating** o, equivalentemente, vale la **condizione di Hörmander** se $\forall p \in M$

$$(\text{Lie}(\Gamma(\Delta)))_p = TM|_p$$

dove $\text{Lie}(\Gamma(\Delta))$ è l'algebra di Lie generata da $\Gamma(\Delta)$, ovvero la chiusura di $\Gamma(\Delta)$ rispetto alla bracket, $(\text{Lie}(\Gamma(\Delta)))_p = \{\mathbf{X}_p : \mathbf{X} \in \text{Lie}(\Gamma(\Delta))\}$ e $TM|_p$ è lo spazio tangente a M in p .

2.2 Il gruppo euclideo

Definizione 13. Sia \mathbb{E} uno spazio euclideo. Chiamiamo **Gruppo Euclideo** di dimensione 2 e indichiamo con $E(2)$ il gruppo delle isometrie (euclidee) di \mathbb{E} , cioè delle trasformazioni dello spazio che preservano la distanza euclidea tra due qualsiasi punti (esempio: traslazioni, rotazioni, riflessioni).

Vediamo alcuni esempi delle definizioni date nella sezione precedente.

Esempio 1. Siano $\gamma(s) = (x(s), y(s)) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{Y}_1 = \partial_x$ e $\mathbf{Y}_2 = \partial_y$.

Determiniamo una curva integrale del campo a coefficienti costanti $\mathbf{Y} = a\mathbf{Y}_1 + b\mathbf{Y}_2$:

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = a \\ \dot{y}(s) = b \end{cases}$$

Cioè

$$\begin{cases} x(s) = as + x(0) \\ y(s) = bs + y(0) \end{cases}$$

Esempio 2. Siano $f = f(x, y)$ e $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2$ come sopra. Verifichiamo che \mathbf{Y}_1 e \mathbf{Y}_2 commutano. Per l'osservazione 1 si ha

$$[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2]f = 0$$

Esempio 3. Siano $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{X} = \partial_x$ e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

In questo caso, riprendendo le notazioni della definizione 8, $G = \mathbb{R}^2$, $\cdot = +$, $g = (x_0, y_0)$, $\forall h = (x, y) \in G$ $L_g(h) = g+h = (x_0, y_0) + (x, y) = (x+x_0, y+y_0)$. \mathbf{X} è invariante a sinistra, infatti

$$\partial_x(f(x+x_0, y+y_0)) = (\partial_x f)(x+x_0, y+y_0).$$

2.3 Il gruppo $SE(2)$

Definizione 14. Il **Gruppo delle Rototraslazioni** $SE(2)$ o **Gruppo Speciale Euclideo** è il sottogruppo di $E(2)$ delle isometrie dirette (moti rigidi) di \mathbb{E} , cioè $SE(2)$ è il gruppo delle rotazioni e traslazioni, dette anche rototraslazioni.

Come si caratterizza un generico elemento del gruppo $SE(2)$?

Se indichiamo con

- T_{x_1, y_1} la traslazione di vettore (x_1, y_1) ;
- \mathbf{R}_θ la matrice di rotazione di angolo θ

$$\mathbf{R}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

allora un generico elemento di $SE(2)$ è della forma

$$A_{x_1, y_1, \theta} = T_{x_1, y_1} \circ \mathbf{R}_\theta$$

e, assumendo che agisca prima la rotazione e poi la traslazione, applicando a un punto (x, y) dà

$$A_{x_1, y_1, \theta} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \mathbf{R}_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

L'insieme dei $g_1 = ((x_1, y_1), \theta_1)$ forma un gruppo con l'operazione indotta dalla composizione $A_{x_1, y_1, \theta_1} \circ A_{x_2, y_2, \theta_2}$.

Se $g_2 = ((x_2, y_2), \theta_2)$ otteniamo

$$g_1 \circ g_2 = ((x_1, y_1), \theta_1) +_R ((x_2, y_2), \theta_2) = \left(\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \mathbf{R}_{\theta_2} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right)^T, \theta_1 + \theta_2 \right).$$

Infatti,

$$\begin{aligned} (g_1 \circ g_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= (A_{x_1, y_1, \theta_1} \circ A_{x_2, y_2, \theta_2}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_{x_1, y_1, \theta_1} (A_{x_2, y_2, \theta_2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) \\ &= A_{x_1, y_1, \theta_1} \left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \mathbf{R}_{\theta_2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \mathbf{R}_{\theta_1} \left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \mathbf{R}_{\theta_2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \mathbf{R}_{\theta_1} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \mathbf{R}_{\theta_1} \mathbf{R}_{\theta_2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \mathbf{R}_{\theta_1} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) + \mathbf{R}_{\theta_1 + \theta_2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= A_{z, \theta_1 + \theta_2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dove $z \in \mathbb{R}^2$, $z = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \mathbf{R}_{\theta_1} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right)^T$.

Osservazione 2. Essendo indotta dalla legge di composizione, $+_R$ verifica gli assiomi delle operazioni di gruppo, in cui l'elemento inverso di $g_1 = ((x_1, y_1), \theta_1)$ è indotto dalla rototraslazione

$$A_{x_1, y_1, \theta_1}^{-1} = R_{\theta_1}^{-1} \circ T_{x_1, y_1}^{-1}$$

e l'elemento neutro è $e = ((0, 0), 0)$.

Scriviamo esplicitamente l'inverso $g_2 = ((x_2, y_2), \theta_2)$ di $g_1 = ((x_1, y_1), \theta_1)$: sappiamo che

$$\begin{aligned} g_2 \circ g_1 &= ((x_2, y_2), \theta_2) +_R ((x_1, y_1), \theta_1) = \left(\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \mathbf{R}_{\theta_2} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right)^T, \theta_1 + \theta_2 \right) \\ &= \left(\begin{pmatrix} x_2 + \cos \theta_2 x_1 - \sin \theta_2 y_1 \\ y_2 + \sin \theta_2 x_1 + \cos \theta_2 y_1 \end{pmatrix}^T, \theta_1 + \theta_2 \right). \end{aligned}$$

Affinchè g_2 sia l'inverso di g_1 deve essere

$$g_2 \circ g_1 = e$$

cioè

$$\left(\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \mathbf{R}_{\theta_2} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right)^T, \theta_1 + \theta_2 \right) = ((0, 0), 0).$$

Quindi

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \theta_1 + \theta_2 = 0 \\ \left(\begin{pmatrix} x_2 + \cos \theta_2 x_1 - \sin \theta_2 y_1 \\ y_2 + \sin \theta_2 x_1 + \cos \theta_2 y_1 \end{pmatrix} \right)^T = (0, 0) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \theta_2 = -\theta_1 \\ \left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right)^T = - \left(\begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right)^T \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \theta_2 = -\theta_1 \\ \left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right)^T = - \left(\begin{pmatrix} \cos(-\theta_1) & -\sin(-\theta_1) \\ \sin(-\theta_1) & \cos(-\theta_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right)^T \end{cases} \\ \Leftrightarrow & g_1^{-1} = g_2 = \left(\left(-\mathbf{R}_{-\theta_1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right)^T, -\theta_1 \right). \end{aligned}$$

Introduciamo ora i tre operatori differenziali $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ con cui lavoreremo nel seguito:

$$\mathbf{X}_1 = \cos \theta \partial_x + \sin \theta \partial_y, \quad \mathbf{X}_2 = \partial_\theta, \quad \mathbf{X}_3 = \sin \theta \partial_x - \cos \theta \partial_y.$$

Osservazione 3. È possibile ottenere \mathbf{X}_3 da \mathbf{X}_1 e \mathbf{X}_2 : è il commutatore di \mathbf{X}_1 e \mathbf{X}_2 .

Infatti, se $f = f(x, y, \theta)$, per l'osservazione 1 si ha

$$\begin{aligned} [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2]f &= (-\partial_\theta \cos \theta \partial_x - \partial_\theta \sin \theta \partial_y)f \\ &= (\sin \theta \partial_x - \cos \theta \partial_y)f = \mathbf{X}_3 f. \end{aligned}$$

Tali campi godono di alcune proprietà:

Esempio 4. $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ sono invarianti a sinistra rispetto alla legge di gruppo di $SE(2)$.

Dire che \mathbf{X}_1 sia invariante a sinistra rispetto alla legge di gruppo di $SE(2)$ significa richiedere che $\forall g_1, g_2 \in SE(2)$

$$\mathbf{X}_1(f(g_1 \circ g_2)) = (\mathbf{X}_1 f)(g_1 \circ g_2)$$

cioè, se $g_1 = ((x_1, y_1), \theta_1)$ e $g_2 = ((x_2, y_2), \theta_2)$,

$$\mathbf{X}_1 \left[f \left(\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \mathbf{R}_\theta \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right)^T, \theta_1 + \theta_2 \right) \right] = (\mathbf{X}_1 f) \left(\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \mathbf{R}_\theta \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right)^T, \theta_1 + \theta_2 \right).$$

Infatti, se $f = f(x, y, \theta)$,

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1(f(g_1 \circ g_2)) &= (\cos \theta_2 \partial x_2 + \sin \theta_2 \partial y_2)(f(g_1 \circ g_2)) \\ &= \cos \theta_2 \cos \theta_1 \partial_x f(g_1 \circ g_2) + \cos \theta_2 \sin \theta_1 \partial_y f(g_1 \circ g_2) \\ &\quad - \sin \theta_2 \sin \theta_1 \partial_x f(g_1 \circ g_2) + \sin \theta_2 \cos \theta_1 \partial_y f(g_1 \circ g_2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{X}_1 f)((g_1 \circ g_2)) &= \cos(\theta_1 + \theta_2) \partial_x f(g_1 \circ g_2) + \sin(\theta_1 + \theta_2) \partial_y f(g_1 \circ g_2) \\ &= (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) \partial_x f(g_1 \circ g_2) \\ &\quad + (\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_1) \partial_y f(g_1 \circ g_2). \end{aligned}$$

Cioè le due quantità effettivamente coincidono,

Esempio 5. Il piano orizzontale $\Delta = \text{span}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$ è bracket generating (equivalentemente, è soddisfatta la condizione di Hörmander). Abbiamo, infatti, visto che

$$\dim(\text{span}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)) = 2 \quad \text{e} \quad \mathbf{X}_3 = [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2]$$

quindi $\mathbf{X}_3 \in \text{Lie}(\text{span}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2))$. Ma

$$3 \leq \dim(\text{Lie}(\text{span}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3))) \leq 3.$$

Perciò lo spazio tangente a $\mathbb{R}^2 \times S^1$ è generato dai due campi vettoriali \mathbf{X}_1 e \mathbf{X}_2 .

2.4 Metrica Riemanniana e Sub-Riemanniana

In questa sezione vogliamo introdurre una struttura metrica sulle varietà differenziabili, così da poter misurare la lunghezza dei vettori tangenti e indurre una distanza sulla varietà.

Su una varietà differenziabile si può indurre una metrica Riemanniana:

Definizione 15. *Sia M una varietà differenziabile.*

*Una **metrica Riemanniana** su M è data da un prodotto scalare su ogni spazio tangente a M ($TM|_p$) che dipende in modo C^∞ dal punto base p .*

*Una **varietà Riemanniana** è una varietà differenziabile dotata di una metrica Riemanniana.*

In coordinate locali $x = (x^1, \dots, x^d)$ tale metrica è rappresentata da una matrice simmetrica e definita positiva

$$(h_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,d}.$$

Siano $v = (v^1, \dots, v^d)$, $w = (w^1, \dots, w^d) \in TM|_p$, allora

- il prodotto scalare di v e w è

$$\langle v, w \rangle := h_{ij}(x(p))v^i w^j;$$

- la lunghezza di v è

$$\|v\| := \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Dunque, la scelta di una metrica coincide con la scelta della lunghezza di ogni vettore dello spazio tangente.

Definizione 16. *Siano M una varietà Riemanniana, $[a, b]$ un intervallo chiuso di \mathbb{R} , $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ una curva C^∞ .*

*La **lunghezza di γ** è definita da*

$$L(\gamma) := \int_a^b \left\| \frac{d\gamma}{dt}(t) \right\| dt.$$

Definizione 17. Siano M varietà Riemanniana, $g_1, g_2 \in M$, \mathcal{A} l'insieme dei cammini γ in M assolutamente continui che connettono g_1 e g_2 , possiamo definire una distanza su M come

$$d_R(g_1, g_2) = \inf_{\gamma \in \mathcal{A}} L(\gamma) = \inf_{\gamma \in \mathcal{A}} \left\{ \int_{\gamma} \left\| \frac{d\gamma}{dt}(t) \right\| dt \right\}. \quad (2.1)$$

Definizione 18. Sia (M, h) una varietà Riemanniana connessa e $\Delta \subset TM$ un sottofibrato del fibrato tangente, bracket generating. Se su Δ è definita una metrica, allora (M, h, Δ) è una **varietà sub-Riemanniana**.

Dotiamo tale varietà di una metrica distanza:

Definizione 19. Siano (M, h, Δ) una varietà Sub-Riemanniana e γ un cammino C^1 su M . γ si dice **ammissibile** se per ogni $p \in M$ $\gamma' \in \Delta_p$.

Definizione 20. Diciamo che la **condizione di connettività** in una varietà differenziabile M è soddisfatta se presi due qualsiasi punti g_1, g_2 è possibile connetterli con una curva ammissibile.

Teorema 1 (Teorema di Chow). Se la condizione di Hörmander è verificata allora è soddisfatta anche la condizione di connettività.

Per una dimostrazione del Teorema di Chow si veda [11].

Definizione 21. Siano (M, h, Δ) una varietà sub-Riemanniana, $g_1, g_2 \in M$ e \mathcal{A}_0 l'insieme dei cammini γ ammissibili che connettono g_1 e g_2 . Possiamo definire la **distanza di Carnot-Carathéodory /Sub-Riemanniana** su M :

$$d_{SR}(g_1, g_2) = \inf_{\gamma \in \mathcal{A}_0} \left\{ \int_{\gamma} \left\| \frac{d\gamma}{dt}(t) \right\| dt \right\}. \quad (2.2)$$

2.5 Distanze in $SE(2)$

Su $SE(2)$ è possibile definire distanze in modo più diretto.

Nella sezione 2.3 abbiamo visto che, dato un elemento $g_1 = ((x_1, y_1), \theta_1)$ di

$SE(2)$, il suo inverso è della forma

$$g_1^{-1} = \left(\left(-\mathbf{R}_{-\theta_1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right)^T, -\theta_1 \right).$$

Posto $|g_1|_{RT} = \|g_1\| = \|((x_1, y_1), \theta_1)\|$ e $\|\cdot\|$ norma fissata su \mathbb{R}^3 , è possibile definire la distanza tra g_1 e $g_2 = ((x_2, y_2), \theta_2) \in SE(2)$ nel seguente modo

$$d_{RT}(g_1, g_2) = \frac{1}{2} (|g_1^{-1} \circ g_2|_{RT}^2 + |g_2^{-1} \circ g_1|_{RT}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Calcoliamo esplicitamente $g_1^{-1} \circ g_2$ e $g_2^{-1} \circ g_1$:

$$\begin{aligned} g_1^{-1} \circ g_2 &= \left(\left(-\mathbf{R}_{-\theta_1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right)^T, -\theta_1 \right) +_R ((x_2, y_2), \theta_2) \\ &= \left(\left(-\mathbf{R}_{-\theta_1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \mathbf{R}_{-\theta_1} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right)^T, \theta_2 - \theta_1 \right) \\ &= \left(\left(\mathbf{R}_{-\theta_1} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \right)^T, \theta_2 - \theta_1 \right) \\ &= \left(\left(\begin{pmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \right)^T, \theta_2 - \theta_1 \right) \\ &= \left(\left(\begin{pmatrix} \cos \theta_1(x_2 - x_1) + \sin \theta_1(y_2 - y_1) \\ -\sin \theta_1(x_2 - x_1) + \cos \theta_1(y_2 - y_1) \end{pmatrix} \right)^T, \theta_2 - \theta_1 \right) \\ &= \left(((g_1^{-1} \circ g_2)_x, (g_1^{-1} \circ g_2)_y), (g_1^{-1} \circ g_2)_\theta \right) \end{aligned}$$

con $(g_1^{-1} \circ g_2)_x$ e $(g_1^{-1} \circ g_2)_y$ rispettivamente, prima e seconda componente del vettore di traslazione di $g_1^{-1} \circ g_2$ ed $(g_1^{-1} \circ g_2)_\theta$ angolo di rotazione, cioè

$$(g_1^{-1} \circ g_2)_x = -\cos \theta_1(x_1 - x_2) - \sin \theta_1(y_1 - y_2),$$

$$(g_1^{-1} \circ g_2)_y = \sin \theta_1(x_1 - x_2) - \cos \theta_1(y_1 - y_2),$$

$$(g_1^{-1} \circ g_2)_\theta = \theta_2 - \theta_1.$$

Similmente,

$$g_2^{-1} \circ g_1 = \left(\left(-\mathbf{R}_{-\theta_2} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right)^T, -\theta_2 \right) +_R ((x_1, y_1), \theta_1)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\left(-\mathbf{R}_{-\theta_2} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \mathbf{R}_{-\theta_2} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right)^T, \theta_1 - \theta_2 \right) \\
&= \left(\left(\mathbf{R}_{-\theta_2} \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix} \right)^T, \theta_1 - \theta_2 \right) \\
&= \left(\left(\begin{pmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 \\ -\sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix} \right)^T, \theta_1 - \theta_2 \right) \\
&= \left(\begin{pmatrix} \cos \theta_2(x_1 - x_2) + \sin \theta_2(y_1 - y_2) \\ -\sin \theta_2(x_1 - x_2) + \cos \theta_2(y_1 - y_2) \end{pmatrix}^T, \theta_1 - \theta_2 \right) \\
&= \left((g_2^{-1} \circ g_1)_x, (g_2^{-1} \circ g_1)_y, (g_2^{-1} \circ g_1)_\theta \right)
\end{aligned}$$

con $(g_2^{-1} \circ g_1)_x$ e $(g_2^{-1} \circ g_1)_y$ rispettivamente, prima e seconda componente del vettore di traslazione di $g_2^{-1} \circ g_1$ ed $(g_2^{-1} \circ g_1)_\theta$ angolo di rotazione, cioè

$$\begin{aligned}
(g_2^{-1} \circ g_1)_x &= \cos \theta_2(x_1 - x_2) + \sin \theta_2(y_1 - y_2), \\
(g_2^{-1} \circ g_1)_y &= -\sin \theta_2(x_1 - x_2) + \cos \theta_2(y_1 - y_2), \\
(g_2^{-1} \circ g_1)_\theta &= \theta_1 - \theta_2 = -(g_1^{-1} \circ g_2)_\theta.
\end{aligned}$$

Osservazione 4. Osserviamo che, poichè θ_1 e θ_2 sono angoli, per esprimere la distanza come norma della differenza associamo a ciascun angolo il vettore unitario corrispondente:

$$\begin{aligned}
\theta_1 &\longrightarrow v_1 = (\cos \theta_1, \sin \theta_1), \\
\theta_2 &\longrightarrow v_2 = (\cos \theta_2, \sin \theta_2).
\end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned}
|v_1 - v_2|^2 &= (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)^2 + (\sin \theta_1 - \sin \theta_2)^2 \\
&= (\cos \theta_1)^2 - 2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + (\cos \theta_2)^2 \\
&\quad + (\sin \theta_1)^2 - 2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 + (\sin \theta_2)^2 \\
&= 2 - 2(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) \\
&= 2(1 - \cos(\theta_2 - \theta_1)).
\end{aligned}$$

Scelte tre costanti a_1, a_2, a_3 e posto

$$|g_1|_{RT_1} = \|g_1\| = \|((x_1, y_1), \theta_1)\| = (a_1^2 x_1^2 + a_2^2 y_1^2 + 2a_3^2(1 - \cos \theta_1))^{\frac{1}{2}}$$

avremo

$$\begin{aligned} |g_1^{-1} \circ g_2|_{RT_1} &= \|g_1^{-1} \circ g_2\| = \left\| \left((g_1^{-1} \circ g_2)_x, (g_1^{-1} \circ g_2)_y, (g_1^{-1} \circ g_2)_\theta \right) \right\| \\ &= (a_1^2 (g_1^{-1} \circ g_2)_x^2 + a_2^2 (g_1^{-1} \circ g_2)_y^2 + 2a_3^2(1 - \cos (g_1^{-1} \circ g_2)_\theta))^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |g_2^{-1} \circ g_1|_{RT_1} &= \|g_2^{-1} \circ g_1\| = \left\| \left((g_2^{-1} \circ g_1)_x, (g_2^{-1} \circ g_1)_y, (g_2^{-1} \circ g_1)_\theta \right) \right\| \\ &= (a_1^2 (g_2^{-1} \circ g_1)_x^2 + a_2^2 (g_2^{-1} \circ g_1)_y^2 + 2a_3^2(1 - \cos (g_2^{-1} \circ g_1)_\theta))^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Allora definiamo una prima metrica:

$$\begin{aligned} d_{RT_1}(g_1, g_2) &= \frac{1}{2} (|g_1^{-1} \circ g_2|_{RT_1}^2 + |g_2^{-1} \circ g_1|_{RT_1}^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} (a_1^2 (g_1^{-1} \circ g_2)_x^2 + a_2^2 (g_1^{-1} \circ g_2)_y^2 + 2a_3^2(1 - \cos (g_1^{-1} \circ g_2)_\theta) \\ &\quad + a_1^2 (g_2^{-1} \circ g_1)_x^2 + a_2^2 (g_2^{-1} \circ g_1)_y^2 + 2a_3^2(1 - \cos (g_2^{-1} \circ g_1)_\theta))^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left(a_1^2 \left((g_1^{-1} \circ g_2)_x^2 + (g_2^{-1} \circ g_1)_x^2 \right) + a_2^2 \left((g_1^{-1} \circ g_2)_y^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (g_2^{-1} \circ g_1)_y^2 \right) + 4a_3^2(1 - \cos (g_1^{-1} \circ g_2)_\theta) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left(a_1^2 \left((\cos \theta_1(x_1 - x_2) + \sin \theta_1(y_1 - y_2))^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\cos \theta_2(x_1 - x_2) + \sin \theta_2(y_1 - y_2))^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + a_2^2 \left((\sin \theta_1(x_1 - x_2) - \cos \theta_1(y_1 - y_2))^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (-\sin \theta_2(x_1 - x_2) + \cos \theta_2(y_1 - y_2))^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + 4a_3^2(1 - \cos(\theta_2 - \theta_1)) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Scegliendo, invece,

$$|g_1|_{RT_2} = \|g_1\| = \|((x_1, y_1), \theta_1)\| = (a_1^2 x_1^2 + a_2^2 |y_1| + 2a_3^2(1 - \cos \theta_1))^{\frac{1}{2}}$$

dove, nel termine con il coefficiente a_2^2 , $|\cdot|$ è il valore assoluto euclideo, avremo

$$\begin{aligned} |g_1^{-1} \circ g_2|_{RT_2} &= \|g_1^{-1} \circ g_2\| = \left\| \left((g_1^{-1} \circ g_2)_x, (g_1^{-1} \circ g_2)_y, (g_1^{-1} \circ g_2)_\theta \right) \right\| \\ &= \left(a_1^2 (g_1^{-1} \circ g_2)_x^2 + a_2^2 |(g_1^{-1} \circ g_2)_y| + 2a_3^2 (1 - \cos (g_1^{-1} \circ g_2)_\theta) \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |g_2^{-1} \circ g_1|_{RT_2} &= \|g_2^{-1} \circ g_1\| = \left\| \left((g_2^{-1} \circ g_1)_x, (g_2^{-1} \circ g_1)_y, (g_2^{-1} \circ g_1)_\theta \right) \right\| \\ &= \left(a_1^2 (g_2^{-1} \circ g_1)_x^2 + a_2^2 |(g_2^{-1} \circ g_1)_y| + 2a_3^2 (1 - \cos (g_2^{-1} \circ g_1)_\theta) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Quindi introduciamo una seconda metrica:

$$\begin{aligned} d_{RT_2}(g_1, g_2) &= \frac{1}{2} \left(|g_1^{-1} \circ g_2|_{RT_2}^2 + |g_2^{-1} \circ g_1|_{RT_2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left(a_1^2 (g_1^{-1} \circ g_2)_x^2 + a_2^2 |(g_1^{-1} \circ g_2)_y| + 2a_3^2 (1 - \cos (g_1^{-1} \circ g_2)_\theta) \right. \\ &\quad \left. + a_1^2 (g_2^{-1} \circ g_1)_x^2 + a_2^2 |(g_2^{-1} \circ g_1)_y| + 2a_3^2 (1 - \cos (g_2^{-1} \circ g_1)_\theta) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left(a_1^2 \left((g_1^{-1} \circ g_2)_x^2 + (g_2^{-1} \circ g_1)_x^2 \right) + a_2^2 \left(|(g_1^{-1} \circ g_2)_y| \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + |(g_2^{-1} \circ g_1)_y| \right) + 4a_3^2 (1 - \cos (g_1^{-1} \circ g_2)_\theta) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left(a_1^2 \left((\cos \theta_1 (x_1 - x_2) + \sin \theta_1 (y_1 - y_2))^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\cos \theta_2 (x_1 - x_2) + \sin \theta_2 (y_1 - y_2))^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + a_2^2 \left(|\sin \theta_1 (x_1 - x_2) - \cos \theta_1 (y_1 - y_2)| \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + |-\sin \theta_2 (x_1 - x_2) + \cos \theta_2 (y_1 - y_2)| \right) \right. \\ &\quad \left. + 4a_3^2 (1 - \cos (\theta_2 - \theta_1)) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

É possibile dimostrare che d_{RT_1}, d_{RT_2} siano equivalenti, rispettivamente, a d_R, d_{SR} .

Vale, infatti, il seguente Teorema:

Teorema 2. *La distanza definita in 2.3 è localmente equivalente alla distanza 2.1 (caso Riemanniano) e quella definita in 2.4 alla distanza 2.2 (caso Sub-Riemanniano).*

Una dimostrazione di questo Teorema si può trovare in [12].

Capitolo 3

Un modello di pinwheels

In questo capitolo presentiamo un modello di Scott D. Pauls in [8] di mappe di orientazioni.

Per farlo consideriamo i sottoinsiemi discreti $\hat{\Pi}$ e \hat{C} , rispettivamente di $\mathbb{R}^2 \times S^1$ e del foglio di corteccia C ; quindi creiamo una mappa di riduzione dimensionale $f : \hat{\Pi} \rightarrow \hat{C}$ che sia C^∞ e minimizzi la lunghezza delle connessioni. Il metodo adottato da Scott D. Pauls in [8] prevede di dotare Π e C di alcune metriche, individuando una mappa che minimizzi la distorsione metrica, cioè che assicuri vicinanza tra la geometria della rete di connessioni nella corteccia e la geometria dello spazio dei parametri Π .

Stiamo, quindi, ipotizzando che l'architettura della corteccia sia organizzata in modo da minimizzare le connessioni fra i neuroni.

Affinchè le mappe di orientazioni che intendiamo costruire siano verosimili, cioè rispettino l'evidenza sperimentale, richiediamo che la metrica d_Π su Π verifichi le seguenti proprietà:

- sia invariante nel gruppo delle rototraslazioni: ciò è motivato dall'abilità di V1 di processare bene gli stimoli anche quando questi si presentano “modificati”;
- sia degenera, cioè $\exists g_1, g_2 \in \Pi$ tali che $d_\Pi(g_1, g_2) = 0$;

- le palle metriche esibiscono un'anisotropia dovuta alla connessione preferenziale di neuroni con parametri simili.

3.1 Una mappa bi-Lipschitz

Come abbiamo visto finora, V1 codifica le informazioni da uno spazio di parametri di dimensione 3 ad un foglio di corteccia, cioè una struttura bidimensionale. Dunque, il problema fondamentale da affrontare per creare le mappe di orientazioni è essenzialmente un problema di riduzione di dimensionalità.

Una seconda problematica a cui il modello deve trovare una soluzione è la minimizzazione della lunghezza delle connessioni tra i neuroni.

Tale richiesta si traduce in due distinte condizioni sulle mappe di orientazioni:

- posizioni prossime nella corteccia corrispondano a valori vicini dei parametri (*smoothness condition*);
- valori vicini dei parametri vengano mappati in punti della corteccia poco distanti (*Cowey condition*).

Formalizziamo tali idee in termini di metriche su Π e C : la i. diventa una condizione di co-Lipschitzianità sulla f :

$$Ld_{\pi}(g_1, g_2) \leq d_C(f(g_1), f(g_2)) \quad (1)$$

con L costante.

La ii., invece, può essere espressa come una condizione di Lipschitzianità sulla f :

$$d_C(f(g_1), f(g_2)) \leq L'd_{\pi}(g_1, g_2) \quad (2)$$

con L' costante.

Non è detto che una mappa bi-Lipschitz su Π e C esista, perciò lavoriamo su loro sottoinsiemi discreti $\hat{\Pi}$ e \hat{C} .

Chiamiamo $f : \hat{\Pi} \rightarrow \hat{C}$ **mappa corticale**.

Osservazione 5. Potrebbe accadere che

- mappe corticali che soddisfano (1) abbiano aree corticali distanti a cui corrispondono valori dei parametri vicini;
- mappe che soddisfano (2) mandino valori dei parametri distanti in aree corticali vicine.

Inoltre, poichè le *pinwheels* si concretizzano in corrispondenze tra valori dei parametri abbastanza distanti e aree corticali vicine, una f con tali singolarità soddisfa (2) per L' vicino a 1, ma viola (1) per L vicino a 1.

A questo punto abbiamo tutti gli strumenti per descrivere le connessioni neurali tra due neuroni in \hat{C} .

La distanza fra due neuroni è descritta dalla lunghezza delle connessioni neurali che li connettono. Da questo punto di vista le distanze Riemanniana e Sub-Riemanniana definite in 2.1 e 2.2 sono un ottimo modello, mentre 2.3 e 2.4 rappresentano approssimazioni molto efficaci dal punto di vista del calcolo.

La lunghezza totale delle connessioni corticali è

$$\sum_{f(g_1), f(g_2) \in \hat{C}} d_C(f(g_1), f(g_2)) = \sum_{g_1, g_2 \in \hat{\Pi}} d_C(f(g_1), f(g_2)) \stackrel{(2)}{\leq} \sum_{g_1, g_2 \in \hat{\Pi}} L' d_{\Pi}(g_1, g_2).$$

Ciò, con L' il più piccolo possibile, garantisce la minima lunghezza delle connessioni corticali.

3.2 Un funzionale energia

A questo punto, data $f : \hat{\Pi} \rightarrow \hat{C}$ mappa corticale, l'obiettivo è quello di misurarne la deformazione: cioè stimare quanto, dati due punti $g_1, g_2 \in \hat{\Pi}$ vicini, i corrispondenti valori $f(g_1), f(g_2)$ nella corteccia si mantengano a breve distanza.

Per farlo introduciamo il seguente funzionale:

$$E(f) = \left(\sum_{g_1, g_2 \in \hat{\Gamma}} (d_{\Pi}(g_1, g_2) - d_C(f(g_1), f(g_2)))^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$E(f)$ altro non è che un'energia L^2 .

Osserviamo che minimizzare tale norma significa minimizzare la differenza tra il valore della distanza tra due aree corticali e la misura della distanza tra i valori dei corrispondenti parametri. Affinchè ciò avvenga, per quanto visto nella sezione precedente, le costanti di Lipschitzianità L e L' devono essere il più possibile vicine a 1: in questo modo sono soddisfatte le condizioni i. (*smoothness condition*) e ii. (*Cowey condition*).

Bibliografia

- [1] G. Sanguinetti, *Invariant models of vision between phenomenology, image statistics and neurosciences*, Tesi, Università di Montevideo, 2011.
- [2] D. Hubel, *Eye, Brain, and Vision* (Scientific American Library, No 22), W. H. Freeman, Maggio 1995.
- [3] J. Petitot, *Neurogeometrie de la Vision Modeles, Mathematiques et Physiques des Architectures Fonctionnelles*, Ecole Polytechnique, 2008.
- [4] G. Citti, A. Sarti, *A cortical based model of perceptual completion in the roto-translation space*, Journal of Mathematical Imaging and Vision, 24(3):307-326, Maggio 2006.
- [5] A. Grinvald, D. Shoham, A. Shmuel, D. Glaser, I. Vanzetta, E. Shoyerman, *In-vivo optical imaging of cortical architecture and dynamics. Modern Techniques in Neuroscience Research* U. Windhorst and H. Johansson Springer, 893-969, 1999.
- [6] M. Crair, E. Ruthazer, D. Gillespie, M. Stryke, *Ocular dominance peaks at pinwheel center singularities of the orientation map in cat visual cortex*, J Neurophysiol, 77(6):3381-3385, Giugno 1997.
- [7] R. Miikkulainen, J. Bednar, Y. Choe, J Sirosh, *Computational Maps in the Visual Cortex*, Springer, 2005.
- [8] S. D. Pauls, *Cortical feature maps via geometric models*, in “Journal of Physiology - Paris” 103, 46-51, 2009.

-
- [9] J. Jost, *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, Springer, Verlag Berlin Heidelberg, 2008.
- [10] E. Le Donne, *Lecture notes on sub-Riemannian geometry*.
- [11] G. Citti, L. Grafakos, C. Pérez, A. Sarti, X. Zhong, *Harmonic and Geometric Analysis*, Birkhäuser Basel, 2015.
- [12] A. Nagel, E. M. Stein, S. Wainger, *Balls and metrics defined by vector fields I: Basic properties Acta Math* 155, 103-147, 1985.