ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Matematica
Corso di Laurea in Matematica

Teoria degli insiemi in una logica paraconsistente

Relatore:
Prof. Guido Gherardi

Correlatore
Prof. Piero Plazzi

Presentata da:
Michele Malpezzi

Sessione unica
Anno Accademico 2018/2019

Indice

Introduzione

L'attuale fondazione standard della matematica si basa su un pilastro di logica classica con l'aggiunta degli assiomi insiemistici di ZFC. Tali assiomi sono stati selezionati dopo decenni di lavoro in cui assiomi più *ingenui* e più potenti come l'assioma di Astrazione si sono rivelati paradossali. La teoria classica però non è completamente soddisfacente dal punto di vista logico, per esempio la *correttezza* di ZFC non è dimostrabile all'interno di essa. Per questo motivo vale la pena considerare anche logiche non classiche, in particolare, tenuto conto del Teorema di Incompletezza di Gödel, di logiche non necessariamente *consistenti*.
Inoltre resta un fatto: nonostante la contraddittorietà delle prime teorie, la fondazione insiemistica non è stata scartata. È possibile gestire diversamente i paradossi? Dobbiamo per forza scartare intere teorie in caso di contraddizione?
I logici si sono impegnati in tal senso definendo una gran varietà di logiche in grado di gestire le contraddizioni (in termini formali, la verità in ultimo di $A \wedge \neg A$) senza per questo essere banali (cioè senza *esplodere*, rendendo tutti gli enunciati derivabili). Tali logiche vengono chiamate paraconsistenti e si sono diramate in diversi filoni: logiche adattive, logiche dell'inconsistenza formale, logiche a più valori, logiche rilevanti e così via. In questo testo prenderemo in esame una particolare logica rilevante seguendo le orme di [7] e [9].
Con la giusta semantica e la giusta sintassi si può riuscire nell'intento. A titolo d'esempio: possiamo introdurre nuovi operatori di consistenza come nella logica C di da Costa [4], utilizzare particolari reticoli al posto della verità binaria [1], o nel caso delle logiche rilevanti, intendere $\rightarrow$ in maniera differente.
Le logiche così ottenute sono irrimediabilmente più *deboli* perché fondamentalmente in caso di contraddizione non sono in grado di derivare tutte le altre possibili sentenze. Però questa *debolezza* non è un male proprio perché ci permette di non dover ignorare intere teorie (o informazioni nei casi applicati alla realtà) in caso di contraddizione. Parleremo di *assurdità* se la contraddizione è sufficientemente profonda da non essere ammissibile, cioè una contraddizione effettivamente *esplosiva* come nel caso classico.
Nella logica presa in esame la *debolezza* si rivelerà inaspettatamente potente: saremo in grado di utilizzare con molta più leggerezza assiomi insiemistici paradossali. Sulla liceità epistemologica di questo approccio alla matematica *in sé* lasceremo libertà al lettore

che però può domandarsi: dobbiamo approcciarci all'infinito in maniera consistente per forza di cose? Infondo storicamente è sempre stato considerato fonte di contraddizioni. Sia chiaro che le applicazioni in campi più pragmatici come la teoria dei segnali, le basi di dati, l'intelligenza artificiale ecc. sono presenti e numerose.
Siamo interessati nel riscoprire l'assioma *naïve* per eccellenza, l'Assioma di Astrazione, rispetto ad una particolare logica rilevante per rivisitare la teoria degli insiemi sotto una diversa luce.
Come vedremo, l'assioma di Astrazione è sufficientemente potente da poter derivare da solo ZF (tolto l'Assioma di Buona Fondazione); si spingerà ben oltre presentandoci l'insieme di tutti gli insiemi (l'insieme universo) e l'insieme di tutti gli ordinali. Alcune domande rimarranno aperte, domande che se risolte potranno permetterci di definire i numeri cardinali e addirittura dimostrare l'esistenza di cardinali *inaccessibili* (come mostrato in [9]).

Capitolo 1

La logica

1.1 Sintassi

Il nostro obiettivo è indebolire l'operatore logico $\rightarrow$. Ricordiamo che $\rightarrow$ nella logica classica ha un comportamento apparentemente anomalo rispetto al nostro linguaggio. Infatti la traduzione di $A \rightarrow B$ in "Se A, quindi B" non rispecchia la nostra idea di correlazione quando fra A e B non intercorre alcun legame effettivo. Questo perché il connettivo $\rightarrow$ in senso classico è un connettivo vero-funzionale che rende vero l'enunciato condizionale unicamente in base ai valori di verità dell'antecedente e del conseguente a prescindere dal loro contenuto. Un caso limite è dato dalle contraddizioni che via Teorema di Deduzione implicano qualsiasi enunciato; l'implicazione trova un corrispettivo nella nozione di "derivabilità", per cui una teoria contenente una contraddizione deriva qualsiasi enunciato ed è pertanto *banale*. In questo modo però perdiamo la correlazione dei connettivi logici con i connettivi del linguaggio naturale.
Le logiche rilevanti cercano di mitigare questa discrepanza rispettando il cosiddetto *Principio di Rilevanza*. Questo è semplicemente un principio minimo sintattico che riavvicina di poco il linguaggio formale a quello naturale. Per una maggiore similarità bisogna ricorrere a strategie semantiche.
Il *Principio di Rilevanza* viene formulato in modo che sia possibile stabilire se tra due formule A e B esiste qualcosa in comune per cui abbia senso dire che "A implica B". Esprimiamo formalmente l'idea.
Sia L una logica di primo ordine, A, B *formule ben formate.*
Definiamo ora la *relazione di rilevanza fra A e B* come $Rel(A, B)$. Intuitivamente a livello proposizionale diremo che c'è *rilevanza* fra due formule quando queste condividono una variabile proposizionale in comune. I primi tre punti colgono questa idea.

- Vale $Rel(A, A)$.

- Se il linguaggio presenta un simbolo di uguaglianza $=$, se $s_1 = t_1, \ldots, s_n = t_n$ per s_i e t_i termini allora vale $Rel(A(s), A(s/t))$, con (s/t) sostituzione simultanea di ogni occorrenza di s_i con t_i.

- Chiamiamo *componenti fondamentali di una formula* A le sottoformule atomiche di A che non ricorrono sotto quantificazione e le sottoformule di A quantificate che non siano sotto il raggio d'azione di altri quantificatori. Cioè le *componenti fondamentali* avranno la forma $R(x, y)$ o $\forall x(C(x))$ o $\exists x(C(x))$. Diremo che vale $Rel(A, B)$ se esiste una *componente fondamentale di* A e una *componente fondamentale di* B per cui vale la *relazione di rilevanza*.

A livello proposizionale emerge una forma di transitività rispetto le *componenti fondamentali*, nel senso che se A e B condividono una variabile proposizionale ed è la stessa che condividono B e C allora A e C sono *rilevanti* fra loro. A livello predicativo dobbiamo imporre la transitività esplicitamente perché non direttamente derivabile a causa della arbitrarietà della scelta delle variabili vincolate e dalla possibilità di eliminare i quantificatori.

- Siano C_1, C_2, C_3 *componenti fondamentali* allora vale che se $Rel(C_1, C_2)$ e $Rel(C_2, C_3)$ allora $Rel(C_1, C_3)$.

Definiamo le regole che governano la *rilevanza* rispetto ai quantificatori.

- se $Rel(C, D)$ allora $Rel(Q_1x(C), Q_2x(D))$ con (Q_1, Q_2) uguale a $(\forall, \forall)$ o $(\forall, \exists)$ o $(\exists, \exists)$.

- $Rel(Q_1x_1(C(x)), Q_2x_2(D(x)))$ se e solo se $Rel(Q_1y_1(C(y_1)), Q_2y_2(D(y_2)))$.

- se $Rel(Q_1x(C(x)), Q_2x(D(x)))$ allora $Rel(C(x), D(x))$.

Infine è necessario estendere la nozione di *rilevanza* in modo che rispetti gli Assiomi minimi che governano i quantificatori.

- Vale $Rel(\forall x(C(x)), C(x/t))$ per t libero rispetto ad x.

- Vale $Rel(C(x/t), \exists x(C(x)))$ per t libero rispetto ad x.

- Vale $Rel(\forall x(C \to D), C \to \forall x(D))$ per x non libero in C.

- Vale $Rel(\forall x(C \to D), C \to \forall x(D))$ per x non libero in C.

Una osservazione importante è che Rel non è simmetrica (anche se lo era a livello proposizionale) e soprattutto considera *irrilevanti* fra loro $R(x, y)$ e $R(x, z)$. Ciò si può vedere perché ovviamente le due formule differiscono in una variabile individuale e non compare nessun quantificatore universale. Questo è coerente anche rispetto alla logica classica dato che si ha $R(x, y) \vdash R(x, z)$, ma per $y \neq z$ non si può avere $\vdash R(x, y) \to R(x, z)$ generalmente.

Definizione 1 (Principio di Rilevanza). Diremo che la logica L rispetta il *Principio di Rilevanza* quando nel caso $\vdash_L A \rightarrow B$ si ha necessariamente $Rel(A, B)$.
Condizione necessaria perché una logica sia detta *rilevante* è che rispetti il *Principio di Rilevanza.*

La condizione non è sufficiente: anche insiemi ristretti di assiomi classici possono rispettare il principio, una trattazione semantica è quindi necessaria.
Andiamo ora a definire precisamente il linguaggio e la logica che utilizzeremo nel corso del questo testo.

- **Simboli**:
    1. Connettivi: $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$
    2. Quantificatori: $\forall, \exists$
    3. Ausiliari: $(,)$
    4. Variabili individuali: $x, y, z, \ldots$
    5. Costanti: $t, c_0, \ldots, c_n, \ldots$
    6. Simboli di relazione: $=, R_0, \ldots, R_n, \ldots$
    7. Simboli di funzione: $f_0, \ldots, f_n, \ldots$

- **Termini**:
    1. Ogni costante o variabile individuale è un termine.
    2. Se f è simbolo di funzione m-aria e $t_1, \ldots, t_m$ termini allora $f(t_1, \ldots, t_m)$ è un termine

- **Formule**:
    1. Sia R un simbolo di relazione m-aria e $t_1, \ldots, t_m$ termini allora $R(t_1, \ldots, t_m)$ è una formula
    2. Se A e B sono formule allora $(A \wedge B), (A \vee B), (\neg A), (A \rightarrow B)(A \leftrightarrow B)$ sono formule
    3. Se A è una formula e x una variabile individuale allora $(\exists x)(A)$ e $(\forall x)(A)$ sono formule.
    4. Nel seguito ci atterremo alle convenzioni usuali per quanto riguarda l'eliminazione delle parentesi.

- **Assiomi**:
    1. $A \rightarrow A$ *Identità*

2. $A \wedge B \to A$
3. $A \wedge B \to B$
4. $A \wedge (B \vee C) \to (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ *Distributività*
5. $(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$ *Transitività*
6. $(A \to B) \wedge (A \to C) \to (A \to B \wedge C)$
7. $(A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$ *Contrapposizione*
8. $\neg\neg A \to A$ *Doppia negazione*
9. $A \vee \neg A$ *Terzo escluso*
10. $(\forall x)(A) \to A(y/x)$ Per y libera rispetto ad x in A dove (y/x) indica la sostituzione di ogni occorrenza di x con y
11. $(\forall x)(A \to B) \to (A \to (\forall x)(B))$ Per x non libera in A
12. $(\forall x)(A \vee B) \to (A \vee (\forall x)(B))$ Per x non libera in A
13. $(A \to B) \to \neg(A \wedge \neg B)$
14. $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$
15. $(A \to B) \to ((C \to A) \to (C \to B))$

- **Regole d'inferenza**:
  1. $A, B \vdash A \wedge B$ *$\wedge -$ introduzione*
  2. $A, A \to B \vdash B$ *Modus ponens*
  3. $A, \neg B \vdash \neg(A \to B)$ *Controesempio*
  4. $(A \to B), (C \to D) \vdash (B \to C) \to (A \to D)$
  5. $A \vdash (\forall x)(A)$ *Generalizzazione*
  6. $x = y \vdash A(x) \to A(y)$ *Regola di Leibniz*

- **Meta-regole**:
  1. $$\frac{A \vdash B}{A \vee C \vdash B \vee C}$$
  2. Per x libero in A e B
  $$\frac{A \vdash B}{(\exists x)(A) \vdash (\exists x)(B)}$$

- **Condizionale entimematico**: Fissata una t costante nel linguaggio definiamo le seguenti regole sintattiche.
  1. $t \to A \vdash A$

2. $A \vdash t \to A$

Definiamo un nuovo simbolo in questa maniera: $A \mapsto B := A \wedge t \to B$ detto *condizionale entimematico*.

Vedasi [3] per una trattazione generale, [9] per gli assiomi, regole d'inferenza e meta-regole utilizzate, [8] per il condizionale entimematico.
Diamo alcune spiegazioni aggiuntive.

- Dimostriamo che la logica qui presentata (eccetto che per il condizionale entimematico) rispetta il *principio di rilevanza*.
  Preso un qualsiasi Assioma implicazionale in cui non occorre un quantificatore, basta notare che almeno una formula è preservata fra antecedente e conseguente. Presi gli Assiomi implicazionali in cui occorre una quantificazione, basta notare che sono casi gestiti nella definizione di *relazione di rilevanza*. La Regola 3 in realtà è una negazione quindi non va presa in esame. Nella Regola 4 basta notare che per ipotesi si ha già $Rel(A, B)$ e $Rel(C, D)$ e di conseguenza $Rel(B \to C, A \to D)$. Le Regola 6 è un caso già gestito nella definizione di *relazione di rilevanza*. Se il *principio di rilevanza* è rispettato per gli Assiomi e per le Regole d'inferenza, allora per induzione vale in tutta la logica. Il condizionale entimematico però richiede una maggiore discussione.

- Il principio di rilevanza invalida automaticamente alcune proprietà classiche. Se $(A \to (B \to A))$ fosse derivabile per B e A *irrilevanti* fra loro e A derivabile, allora per *modus ponens* sarebbe derivabile anche $B \to A$ in violazione del *principio di rilevanza*.
  Se A e B sono *irrilevanti* fra loro allora non è possibile derivare $A \wedge \neg A \to B$.
  L'importante *Teorema di Deduzione* della logica classica non vale più: prendendo A e C *irrilevanti* fra loro e $A, B \vdash C$ non è possibile derivare $B \vdash A \to C$.

- Questa logica è monotona. Supponiamo che $\vdash A \to B$, vorremmo dimostrare che allora $\vdash A \wedge C \to B$. Per vedere ciò constatiamo che grazie all'Assioma 2 si ha $\vdash A \wedge C \to A$. Utilizzando l'Assioma 5 si ha $\vdash ((A \wedge C \to A) \wedge (A \to B) \to (A \wedge C \to B)$. Infine grazie alla Regola 1 possiamo utilizzare *modus ponens* da cui segue la tesi.

- $\vee$-introduzione. Istanziamo l'Assioma 2 nella formula $\neg A \wedge \neg B \to \neg A$ che via contrapposizione e *modus ponens* (e eliminazione della doppia negazione) diventa $A \to A \vee B$. Altro importante teorema classico è $\vdash A(x/t) \to \exists x(A(x))$ (esistenzializzazione). La dimostrazione è analoga a quella classica.

- Alcuni simboli sono ridondanti: definiamo equivalenti $(\forall x)(A)$ e $\neg(\exists x)(\neg A)$, $A \wedge B$ e $\neg A \vee \neg B$, $A \leftrightarrow B$ e $(A \to B) \wedge (B \to A)$ analogamente al caso classico. Non possiamo definire l'implicazione sulla base di altri connettivi perché in questa logica ha un significato particolare, ciò sarà messo in luce dalla semantica.

- Nella Regola d'inferenza 6 stiamo utilizzando un simbolo di uguaglianza sul quale non sono dati Assiomi specifici: questo sarà il compito delle teorie di volta in volta definite. Per esempio in questo testo sarà l'uguaglianza fra insiemi che ci verrà definita dall'assioma di Estensionalità (due insiemi sono uguali se e solo se hanno gli stessi elementi). Come vedremo l'Assioma di Estensionalità assieme alle regole logiche ci garantiscono che $=$ sia effettivamente una relazione d'equivalenza.

- Il condizionale entimematico richiede diverse giustificazioni. *In primis* bisogna notare che quando comparirà $\mapsto$ (a partire da una qualche definizione), non staremo più maneggiando una logica completamente rilevante perché il *principio di rilevanza* sarà violato. Preso A senza occorrenze di t, $A \vdash t \to A$ non è rilevante! A quel punto non sarà più possibile rimuovere t dal linguaggio, cioè non maneggeremo più una logica rilevante in senso stretto.
  Dalle definizioni si evince che $A \to B \vdash A \mapsto B$ ma non il viceversa. Cioè $\mapsto$ può fungere da *indebolitore* della "rilevanza" permettendoci di andare un po' oltre; lo useremo per dare alcune definizioni più lassive altrimenti non consentite e da queste espandere la teoria.
  $A \vdash t \to A$ significa che t deriva tutte le sentenze vere. L'idea sottesa è che t debba essere visto come la congiunzione di tutte le verità. $A \wedge t \to B$ può essere interpretato come "A assieme a ciò che sappiamo deriva B". Il significato matematico di tutto ciò sarà più chiaro nel corso delle dimostrazioni.
  Se t è da intendersi come congiunzione di tutte le verità, ci aspettiamo almeno che t valga sempre. Infatti usando l'Assioma 1 si ha $\vdash t \to t$ e dalla Regola 1 del condizionale entimematico $t \to t \vdash t$.

Dimostriamo che $\mapsto$ non contrappone, certificandoci che $\mapsto$ non è equivalente ad una implicazione classica.

Teorema 1 ($\mapsto$ non contrappone). *Se $\Gamma \vdash B \mapsto A$, allora non è sempre derivabile $\Gamma \vdash \neg A \mapsto \neg B$*

Dimostrazione. Siano A e B formule *irrilevanti* fra loro.
Sia A premessa, allora $A \vdash t \to A$ e grazie all'Assioma 2 applicato all'Assioma 5 $A \vdash B \wedge t \to A$ (cioè $A \vdash B \mapsto A$). Supponiamo ora che valga la contrapposizione e ricaviamo una *assurdità*.
Supponiamo $(B \mapsto A) \vdash \neg A \mapsto \neg B$. Ma presi A e B *irrilevanti* fra loro allora anche $\neg A$ e $\neg B$ sono *irrilevanti* fra loro. Per il *principio di rilevanza* e *modus ponens*, se A fosse utilizzata nella dimostrazione che da $\neg A \wedge t$ implica $\neg B$, A e B condividerebbero una variabile proposizionale in comune. Ciò si vede per semplice induzione sul numero

di derivazioni. Ma A non ha nessuna variabile proposizionale in comune con B. Allora deve essere $A \vdash t \to \neg B$ cioè $A \vdash \neg B$. Cioè A deriva tutte le formule *irrilevanti* ad A, il ché è una *assurdità* perché in particolare esiste A come Assioma che per ogni B permette la derivazione $\vdash \neg B$. $\square$

1.2 Semantica

Diamo qui la costruzione semantica presentata in [6] sviluppata da Routley e Meyer. Presenteremo unicamente il livello proposizionale a scopo d'esempio dato che per tutto il resto del testo motiveremo le dimostrazioni sintatticamente.
Sia (V, O, K, R, *) una quintupla con: K un insieme non vuoto di elementi detti mondi, $O \subseteq K$ non vuoto con elementi detti *mondi regolari*, $V \in O$ mondo regolare, $R(x, y, z)$ relazione ternaria su K, $* : K \to K$ funzione tali che valgano le seguenti condizioni:

1. $a \leq b := (\exists x \in \ K)R(x, a, b)$
2. $a \leq a$ cioè $(\forall a \in K)(\exists x \in K)R(x, a, a)$
3. Se $a \leq b$ e $R(b, c, d)$ allora $R(a, c, d)$
4. $a = a^{**}$
5. Se $R(a, b, c)$ allora $R(a, c^*, b^*)$
6. Se $R(a, b, c)$ allora $(\exists x \in K)(R(a, b, x)$ e $R(a, x, c))$

Una *valutazione* v è una funzione che presa P variabile proposizionale e $a \in K$ mondo associa un elemento in $\{V, F\}$ (V detto vero, F detto falso) rispettando la seguente condizione:

1. Se $a \leq b$ e $v(P, a) = V$ allora $v(P, b) = V$.

In altri termini, v preserva l'ereditarietà della variabile proposizionale P. Estendiamo in maniera unica la valutazione v ad una *interpretazione* I sulle formule. Sia P una variabile proposizionale, A e B delle formule, $a, b, c \in K$:

1. $I(P, a) = v(P, a)$
2. $I(\neg A, a) = V$ se e solo se $I(A, a^*) = F$
3. $I(A \wedge B, a) = V$ se e solo se $I(A, a) = V$ e $I(B, a) = V$
4. $I(A \vee B, a) = V$ se e solo se $I(A, a) = V$ o $I(B, a) = V$

5. $I(A \to B, a) = V$ se e solo se per ogni $b, c \in K$ se $R(a, b, c)$ e $I(A, b) = V$ allora $I(B, c) = V$)

Quella qui presentata è una semantica simile a quella modale di Kripke ma in cui la relazione R è ternaria. Tale relazione può essere vista come una generalizzazione di quella di Kripke. Quando andremo a definire un modello che soddisfa queste condizioni dovremo decidere come si comporterà R, comportamenti diversi porteranno a logiche diverse. Per esempio se definiamo R tale che $R(a, a, a)$ valga sempre, allora se $(A \to B) \wedge A$ è vero in un mondo a, anche B è vero nel mondo a. Proprietà simili emergonono rendendo R simmetrica rispetto i primi due termini. Vedasi [6] per altri esempi. Una possibile interpretrazione rispetto al linguaggio naturale di $A \to B$ in cui valga $R(a, b, c)$ potrebbe essere: il segnale A generato nel sito b, attraverso il canale a, fa ricevere al sito c il segnale B.
Altra interpretazione di $R(a, b, c)$ potrebbe essere che la situazione b e la situazione c sono accessibili dalla situazione a, mentre V rappresenta la situazione che effettivamente avviene. Insomma, la definizione è sufficientemente generale da lasciare spazio a interpretazioni differenti, adattabili a seconda del problema.
Dalle proprietà elencate si evince che * può essere intesa come una dualità fra mondi.
Vedasi [6] e [3] per i teoremi di correttezza, completezza e decidibilità rispetto certi insiemi di Assiomi.
La trattazione che andremo a fare degli insiemi sarà di natura sintattica, ci basti sapere che esiste un modello su cui dare un fondamento semantico a ciò che facciamo.
Per quanto riguarda il condizionale entimematico è possibile dimostrare che si può aggiungere conservativamente alla nostra semantica [6].

Definizione 2. Sia L una logica e $L_\bullet$ una logica L con l'aggiunta del simbolo $\bullet$. Diciamo che l'aggiunta del simbolo $\bullet$ è *conservativa* se per ogni formula A che non contiene $\bullet$, se A è derivabile in $L_\bullet$ allora A è derivabile anche in L.

Il simbolo t è conservativo rispetto alla logica sopra presentata [3] se modifichiamo in questo modo l'interpretazione I:

- $I(t, a) = V$ se e solo se $a = V$

Intuitivamente ciò significa che t è vero unicamente nel mondo V, cioè il mondo delle verità. Utilizziamo un esempio. Rispetto alla interpretazione delle situazioni, la congiunzione delle verità è vera unicamente nella situazione V, ciò la situazione che si presenta realmente (rispetto alle altre possibili).
Anche con l'aggiunta di t continuano a valere i risultati di correttezza e completezza [2] [3].

Capitolo 2

Teoria degli insiemi

2.1 Assiomi e primi risultati

Assioma 1 (Astrazione). $x \in \{z : A(z)\} \leftrightarrow A(x)$

Assioma 2 (Estensionalità). $(\forall z)(z \in x \leftrightarrow z \in y) \leftrightarrow x = y$

Come anticipato, dimostriamo che il simbolo di relazione $=$ è effettivamente una relazione di equivalenza.

Teorema 2. *La relazione $=$ è riflessiva, simmetrica e transitiva.*

Dimostrazione.

1. (Riflessività): $x = x \leftrightarrow (\forall z)(z \in x \leftrightarrow z \in x)$ per Estensionalità.
2. (Simmetria): $x = y \leftrightarrow (\forall z)(z \in x \leftrightarrow z \in y) \leftrightarrow (\forall z)(z \in y \leftrightarrow z \in x). \leftrightarrow y = x$ infatti grazie agli Assiomi 2, 3 e 6 si ha che $\wedge$ commuta e utilizziamo questo fatto sulla definizione di $\leftrightarrow$.
3. (Transitività): $x = y \wedge y = k \leftrightarrow (\forall z)(z \in x \leftrightarrow z \in y) \wedge (\forall z)(z \in y \leftrightarrow z \in k) \rightarrow (\forall z)(z \in x \leftrightarrow z \in k) \leftrightarrow x = k$ applicando Estensionalità, Assioma 10 su z, transitività di $\leftrightarrow$, generalizzazione su z, Assioma 11 e di nuovo Estensionalità.

□

Bisogna notare che gli Assiomi appena dati non rispettano più le condizioni del *principio di rilevanza.* Il *principio di rilevanza* ha valore quando viene analizzata una logica, ma è talmente restrittivo che non permette di definire, per esempio, come debba essere inteso un simbolo di relazione. In generale il *principio di rilevanza* non permette la definizione di quelle relazioni necessarie ad una applicazione della logica. Dunque procederemo in questo modo: distinguiamo gli Assiomi logici da quelli non logici. Aggiungiamo alla *relazione di rilevanza* delle eccezioni per ogni Assioma non logico di modo che ci sia rilevanza fra antecedente e conseguente. In questo caso stiamo forzando che valga $Rel(x = y, \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y))$ e $Rel(x \in \{z : A(z)\}, A(x))$ e che Rel si comporti rispetto questi argomenti in modo simmetrico e transitivo.

L'Assioma di Astrazione definisce una corrispondenza fra *formule ben formate* ed insiemi. Ciò ci permetterà di dimostrare alcuni princìpi storicamente importanti come il Principio di Comprensione (nella sua forma senza restrizioni) e la Regola V di Frege. In particolare, il Principio di Comprensione è utile per garantire l'esistenza degli insiemi che andremo a definire, una volta dimostrato lo utilizzeremo senza menzionarne l'uso esplicitamente.
Come storicamente dimostrato da Russell, il Principio di Comprensione ha conseguenze paradossali in quanto l'Assioma di Astrazione è troppo permissivo. Per questo l'Assioma qui presentato è stato sostituito da quelli più deboli di ZFC. Però la logica qui utilizzata è più debole di quella classica e possiamo compensare questa debolezza ripristinando l'Assioma di Astrazione senza per questo avere una teoria *banale*.

Teorema 3 (Principio di Comprensione). $\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow A(x))$

Dimostrazione. Poniamo $y := \{x : A(x)\}$ allora applicando la generalizzazione all'Assioma di Astrazione si ha $\forall x(x \in y \leftrightarrow A(x))$. Per esistenzializzazione si ha la tesi. □

Teorema 4 (Regola V di Frege). $\{x : A(x)\} = \{x : B(x)\} \leftrightarrow \forall z(A(z) \leftrightarrow B(z))$

Dimostrazione. $\{x : A(x)\} = \{x : B(x)\} \leftrightarrow \forall z(z \in \{x : A(x)\} \leftrightarrow z \in \{x : B(x)\}) \leftrightarrow \forall z(A(z) \leftrightarrow B(z))$ direttamente dagli Assiomi. □

Andiamo ora a definire alcuni insiemi che utilizzeremo nel corso del testo.

Definizione 3. $R = \{x : x \notin x\}$ è detto *insieme di Russell.*
$V = \{x : \exists y(x \in y)\}$ è detto *insieme universo.*
$U = \{x : x = x\}$ è detto *doppio dell'insieme universo.*
$\emptyset = \{x : \forall y(x \in y)\}$ è detto *insieme vuoto.*

L'operatore di inclusione $\subseteq$ e l'Insieme Potenza sono definiti classicamente.

Definizione 4. Diremo che x è sottoinsieme di y attraverso la scrittura $x \subseteq y$ se $\forall z(z \in x \rightarrow z \in y)$.
Diremo che x è sottoinsieme proprio di y attraverso la scrittura $x \subset y$ se $x \subseteq y \wedge \exists z(z \in y \wedge z \notin x)$.
Sia x un insieme, chiameremo $P(x) := \{y : y \subseteq x\}$ l'Insieme Potenza di x.
Sia x un insieme, chiameremo $\overline{x} := \{y : y \notin x\}$ il complementare di x.

Definizione 5. Un insieme x è detto *inconsistente* se: $\exists a(a \in x \wedge a \notin x)$.

Dimostriamo ora una serie di proprietà basilari.

Proposizione 1. $\forall x \forall y (x \in y \vee x \notin y)$

Dimostrazione. Diretta conseguenza del terzo escluso è che $x \in y \vee x \notin y$ a cui applichiamo generalizzazione due volte. □

Nella seguente Proposizione dimostreremo la ovvia *inconsistenza* dell'insieme di Russell. Contemporaneamente daremo un esempio di dimostrazione per casi in questa logica: ci servirà la Meta-regola 1.

Proposizione 2. *R è inconsistente*

Dimostrazione. Grazie alla Proposizione 1 si ha $R \in R \vee R \notin R$.
$R \in R \vdash R \notin R$ grazie a *modus ponens* applicato a $R \in R \to R \notin R$.
$R \in R \vee R \notin R \vdash R \notin R$ utilizzando la Meta-regola 1.
$R \notin R \vdash R \in R$ grazie a *modus ponens* applicato a $R \notin R \to R \in R$.
$R \in R \vee R \notin R \vdash R \in R$ utilizzando la Meta-regola 1.
Utilizzando la Regola 1 si ha $\vdash R \in R \wedge R \notin R$ cioè R è *inconsistente*. □

Proposizione 3. $\forall a (\exists x (x \in a \wedge x \notin a) \leftrightarrow a \neq a)$

Dimostrazione. per il verso da sinistra a destra dimostriamo la contrapposta.

1. $a = a \leftrightarrow \forall z (z \in a \leftrightarrow z \in a)$ per Estensionalità
2. $\forall z (z \in a \leftrightarrow z \in a) \to (s \in a \leftrightarrow s \in a)$ per Assioma 10 per s libero per z.
3. $(s \in a \leftrightarrow s \in a) \to \neg(s \in a \wedge s \notin a)$ Per Assioma 13

Da qui il verso della tesi segue per transitività, contrapposizione, esistenzializzazione su s e generalizzazione su a.
Per l'altro verso:

1. $a \neq a \leftrightarrow \exists x (\neg(x \in a \leftrightarrow x \in a))$ per Estensionalità.
2. $\exists x (\neg(x \in a \leftrightarrow x \in a)) \to \exists x (\neg(\neg(x \in a \wedge x \notin a)))$ per Assioma 13
3. $\exists x (\neg(\neg(x \in a \wedge x \notin a)) \to \exists x (x \in a \wedge x \notin a)$ per Assioma 8

Per transitività segue il verso della tesi. □

Conseguenza diretta di questa Proposizione è che $R \neq R$. Proprio per questo motivo $\emptyset$ non è stato definito nel modo standard $\{x : x \neq x\}$ in quanto tutti gli insiemi *inconsistenti* sarebbero suoi membri, cioè non sarebbe un insieme vuoto come invece desideriamo. Per lo stesso motivo $R \notin \{x : x = x\}$. In realtà R è membro e contemporaneamente non è membro dell'insieme vuoto standard e dell'insieme universo standard, ciò in virtù della sua natura *inconsistente*. Da ciò ne deduciamo che gli insiemi *inconsistenti* possono avere una natura *esplosiva*: essi diventano membri di altri insiemi apparentemente *consistenti*.

Proposizione 4. $\forall x(x \in V)$

Dimostrazione. 1. $\forall x(x \in V \lor x \notin V)$ Proposizione 1

2. $\forall x(x \notin V \to x \in \overline{V})$ Astrazione

3. $\forall x(x \in \overline{V} \to \exists y(x \in y))$ Esistenzializzazione

4. ma allora dalla definizione di V si ha $x \in \overline{V} \to x \in V$ e per dimostrazione per casi applicata al passaggio 1 si ha la tesi.

□

Proposizione 5. $\forall x(x \notin \emptyset)$

Dimostrazione. $x \in \emptyset \to \forall y(x \in y) \to x \in \overline{\emptyset} \to x \notin \emptyset$, quindi la tesi vale per dimostrazione per casi applicata a $\forall x(x \in \emptyset \lor x \notin \emptyset)$ □

Rispetto all'insieme vuoto vale qualcosa di più forte. In una logica paraconsistente potrebbe comunque valere $\forall x(x \in \emptyset)$. Dimostriamo che l'insieme vuoto è effettivamente vuoto, pena una *assurdità*: $x \in \emptyset \to \forall y(x \in y) \to x \in \{z : A(z)\} \to A(x)$ utilizzando la definizione di $\emptyset$ e Astrazione. Cioè sarebbe derivabile qualsiasi $A(x)$ portandoci alla *banalità*. Dunque è una *assurdità*.
V e $\emptyset$ potrebbero essere visti come elementi rispettivamente massimali e minimali di un reticolo Booleano. Però preso un qualsiasi insieme *inconsistente* le proprietà $x \cup \overline{x} = V$ e $x \cap \overline{x} = \emptyset$ non sono consistenti, nel senso che anche la loro negazione è vera. Si prenda ad esempio R da cui deriva $R \in R \to R \notin R \to R \in \overline{R} \to R \in R \cap \overline{R}$. Dunque non sarebbe corretto considerarli come rispettivamente massimali e minimali.
Fortunatamente valgono le seguenti proprietà classiche.

Proposizione 6. $\forall x(x \subseteq V)$ *e* $\forall x(\emptyset \subseteq x)$

Dimostrazione. $z \in x \to \exists y(z \in y) \to z \in V$ per esistenzializzazione e successivamente per Astrazione. Cioè $x \subseteq V$.
Similmente $z \in \emptyset \to \forall y(z \in y) \to z \in x$ grazie all'Assioma 10. □

Proposizione 7. $V = \overline{\emptyset}$ *e* $\emptyset = \overline{V}$

Dimostrazione. Dalla Proposizione appena dimostrata si ha $\overline{\emptyset} \subseteq V$ e $\emptyset \subseteq \overline{V}$. Dimostriamo le inclusioni inverse.
$x \in \emptyset \to \forall y(x \in y) \to x \in \overline{V} \to x \notin V$, da cui per contrapposta $V \subseteq \overline{\emptyset}$.
$x \notin \emptyset \to \exists y(x \notin y) \to \exists y(x \in \overline{y}) \to x \in V$, da cui per contrapposta $\overline{V} \subseteq \emptyset$. □

2.2 I doppi degli insiemi

Che relazione intercorre fra U e V? Inoltre definito un insieme $\{x : A\}$ e considerata una tautologia T, che legame intercorre fra $\{x : A\}$ e $\{x : A \wedge T\}$? Come vedremo $\to$ non è sufficientemente permissivo per provare in generale che $V = U$ e che insiemi definiti a meno di una tautologia siano uguali. Però può venirci in aiuto $\mapsto$ e sostituendo alle precedenti definizioni $\mapsto$ a $\to$ vedremo che gli insiemi si comporteranno in maniera più ovvia.
Innanzitutto sappiamo che $\forall x(x \in V)$ e $\forall x(x \in U)$ ma ciò non è sufficiente per derivare $V = U$. Sicuramente U e V sono equiestensionali, ma non per questo identici. Intuitivamente possiamo comprenderne il motivo dal fatto che l'espressione $x = x$ e $\exists y(x \in y)$ veicolano due informazioni differenti.

Proposizione 8. *In generale* $x = x \to \exists y(x \in y)$ *non è derivabile*

Dimostrazione. Per vedere ciò dimostriamo che fra le due formule non c'è *relazione di rilevanza.*
$x = x$ e $x \in y$ hanno sicuramente un simbolo di relazione differente, quindi esclusi gli Assiomi non logici non possono essere in *relazione di rilevanza.* Utilizzando Estensionalità però $x = x$ è in *relazione di rilevanza* con $\forall y(y \in x \leftrightarrow y \in x)$.
Utilizzando le proprietà della *relazione di rilevanza* $Rel(\forall y(y \in x \leftrightarrow y \in x), \exists y(x \in y))$ sse $Rel(y \in x \leftrightarrow y \in x, x \in y)$ sse $Rel(y \in x, x \in y)$. Ma in generale ciò non è valido perché sicuramente $\in$ non è simmetrico. □

Alla stessia maniera si può dimostrare ciò rispetto ai complementari di V e U, cioè $\emptyset$ e $\{x : x \neq x\}$.
Inoltre nonostante ci sia *rilevanza* fra i due membri di $\leftrightarrow$ nella formula $A \leftrightarrow A \wedge T$ per T tautologia, non è generalmente derivabile il verso da sinistra a destra. Si prenda ad esempio $a = a \leftrightarrow a = a \wedge (c \in c \to c \in c)$. Con gli Assiomi che abbiamo a disposizione l'unico modo di derivare il verso da sinistra a destra è attraverso l'Assioma 6, ma questo non può essere evocato dato che A e T possono essere *irrilevanti* fra loro.
Vediamo quindi come $\mapsto$ risolva la questione.

Definizione 6. $x \subseteq_{\mapsto} y$ se e solo se $\forall z(z \in x \mapsto z \in y)$.
$x \equiv y$ se e solo se $x \subseteq_{\mapsto} y \wedge y \subseteq_{\mapsto} x$

Viene immediatamente risolto il problema dei doppioni rispetto alle tautologie:

Proposizione 9. *Sia T una tautologia allora* $\{x : A\} \equiv \{x : A \wedge T\}$

Dimostrazione. Un verso della dimostrazione è ovvio: $\vdash A \wedge T \to A$ e di conseguenza $\vdash A \wedge T \mapsto A$.
Per l'altro verso: innanzitutto si ha che $\vdash A \wedge t \to A$, inoltre se T è una tautologia allora si ha $\vdash T$ e di conseguenza $\vdash t \to T$ per la Regola 2 del condizionale entimematico, cioè è derivabile anche $\vdash A \wedge t \to T$. Attraverso l'Assioma 6 si ha $\vdash A \mapsto A \wedge T$. □

Mostriamo ora che $V \equiv U$. Abbiamo già dimostrato che $\forall x(x \subseteq V)$ che è una condizione più forte di $\forall x(x \subseteq_{\mapsto} V)$.

Proposizione 10. $\forall x(x \subseteq_{\mapsto} U)$

Dimostrazione. Sia $a \in U$. Si ha $a = a \vdash t \to a = a$ per la Regola 2 del condizionale entimematico.
Allora $a = a \vdash a \in y \mapsto a = a$, da cui $a = a \vdash \forall x(x \in y \mapsto x = x)$ ma dato che $a = a$ è una tautologa in generale si ha $\vdash \forall x(x \in y \mapsto x = x)$ che significa $\vdash \forall x(x \in y \mapsto x \in U)$.
Applicando generalizzazione $\vdash \forall y(y \subseteq_{\mapsto} U)$. □

Dunque per l'Assioma 10 si ha contemporaneamente $U \subseteq_{\mapsto} V$ e $V \subseteq_{\mapsto} U$ cioè $U \equiv V$.
Potrebbe giungere la tentazione di riscrivere la Regola di Leibniz nel seguente modo $x \equiv y \vdash A(x) \to A(y)$. Sfortunatamente ciò ci porterebbe alla *banalità*. L'operatore $\mapsto$ ha sicuramente dei pregi che dovremo sfruttare in alcune occasioni, cioè quando l'operatore $\to$ sarà troppo restrittivo per le dimostrazioni che vorremmo fare. Ma comunque è necessario porre dei limiti all'utilizzo di $\mapsto$ a causa della sua potenza.

Definizione 7. $\bot := \forall x \forall y(x \in y)$ è detta *assurdità*.

Che sia effettivamente una *assurdità* è derivabile dal fatto che $\bot \to \forall y(a \in y) \to a \in \{z : A\} \to A(a)$ come nel caso dell'insieme vuoto $\emptyset$.
Consideriamo ora due tipi di insieme vuoto $\{z : \bot\}$ e $\{z : z \neq z\}$. Dalle definizioni si ha che $x \in U \leftrightarrow x \notin \{z : z \neq z\}$, cioè che $\{z : z \neq z\}$ è il complementare di U. Parimenti si ha:

Proposizione 11. $z \in V \leftrightarrow z \notin \{x : \bot\}$

Dimostrazione. $z \notin \{x : \bot\} \to z \in \overline{\{x : \bot\}} \to z \in V$.
Per il verso mancante consideriamo la contrapposta: $z \in \{x : \bot\} \to \forall x \forall y(x \in y) \to z \in \overline{V} \to z \notin V$. □

Teorema 5. *La regola* $x \equiv y \vdash A(x) \to A(y)$ *rende banale la logica in esame.*

Dimostrazione. Si ha $U \equiv V$. Si ha $R \neq R$: allora $U \equiv V \vdash R \notin U \to R \notin V \to R \in \{z : \perp\} \to \perp$. A causa di *modus ponens* ciò rende *banale* la nostra logica. $\square$

Sia A una *assurdità* e a un insieme qualsiasi, allora risulta evidente che nessun x possa appartenere a $x \in \{z : z \in a \wedge A\}$ per quanto già espresso rispetto $\perp$.
Rimane ancora un caso da analizzare. Sia C una contraddizione (nel senso che risultano derivabili contemporaneamente C e $\neg C$), consideriamo un insieme a qualsiasi e consideriamo $\{z : z \in a \wedge C\}$. Chi sono i membri di questo insieme? Sono contemporaneamenti tutti, alcuni e nessuno gli elementi di a. Un caso limite può essere $x \in \{z : C\}$ in cui risulta $\forall x(x \in \{z : C\} \wedge x \notin \{z : C\})$, cioè l'insieme si comporta come un *doppione* inconsistente di V. Abbiamo così un modo semplice per produrre *doppioni* inconsistenti di un insieme non necessariamente inconsistente. In particolare:

Definizione 8 (*Espansione di Routley*). Sia a un insieme, definiamo $R(a) = \{z : z \in a \wedge R \in R\}$ come l'espansione di Routley di un insieme.

2.3 Zermelo–Fraenkel, funzioni e coppie ordinate

Dimostriamo che gli assiomi di ZF sono derivabili. Unico Assioma di ZF che non potremo dimostrare è ovviamente l'Assioma di Buona Fondazione, infatti l'Assioma di Astrazione permette la costruzione di insiemi come R o V tali che $R \in R$ e $V \in V$, sicuramente non ben-fondati. Che l'Assioma della Scelta sia un teorema è invece ancora un problema aperto seppure siano state presentate alcune soluzioni [9]. Come mostrato in [9], l'Assioma della Scelta ci permetterebbe di costruire i numeri cardinali ma dato che il problema è ancora irrisolto, in questo testo cercheremo solamente di definire gli ordinali. Gli Assiomi di ZF sono per la maggiore giustificati in maniera ovvia dal Principio di Comprensione. Saremo più espliciti per quanto riguarda l'Assioma dell'Infinito.

Proposizione 12 (**Schema di specificazione**). $\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x \in a \wedge A(x))$ *per* A *formula ben formata e* a *insieme.*

Proposizione 13 (**Assioma della coppia**). $\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x = b \vee x = a)$ *per* a *e* b *insiemi.*

Proposizione 14 (**Insieme Potenza**). $\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x \subseteq a)$ *per* a *insieme.*

Proposizione 15 (**Assioma dell'Unione**). $\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow \exists z(z \in a \wedge x \in z)$ *per* a *famiglia di insiemi.*

Proposizione 16 (**Assioma dell'Intersezione**). $\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow \forall z(z \in a \to x \in z)$ *per* a *famiglia di insiemi.*

Per quanto riguarda l'Assioma dell'Infinito, diamo alcune spiegazioni aggiuntive. Come la seguente proposizione ci garantirà, sarà possibile dare definizioni circolari come ad esempio $k = \{x : x = k\}$, cioè $k = \{k\}$, cioè $k = \{k\} = \{\{k\}\} = \{\{\{\dots\}\}\}$, ossia k è un insieme non ben-fondato definito mediante una formula circolare.

Proposizione 17. $\exists y(y = \{x : A(x)\} \leftrightarrow \forall x(x \in y \leftrightarrow A(x)))$

Dimostrazione.
$y = \{x : A(x)\} \leftrightarrow \forall x(x \in y \leftrightarrow x \in \{x : A(x)\}) \leftrightarrow \forall x(x \in y \leftrightarrow A(x))$ grazie a Estensionalità e Astrazione. Applichiamo esistenzializzazione. $\square$

Proposizione 18 (Assioma dell'Infinito). $\exists i(i \neq \emptyset \wedge \forall x(x \in i \rightarrow \{x\} \in i))$

Dimostrazione. Grazie alla Proposizione 17 si ha che $\exists i(i = \{x : x \subseteq i\} \leftrightarrow \forall x(x \in i \leftrightarrow x \subseteq i)$. Ma $\emptyset \subseteq i$ e $i \subseteq i$, quindi i non è vuoto. Otteniamo $x \in i \rightarrow \{x\} \subseteq i \rightarrow \{x\} \in i$. $\square$

Possiamo quindi definire cosa sia una funzione.

Definizione 9. $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$ è detta una *coppia ordinata.*
$a \times b := \{(x, y) : x \in a \wedge y \in b\}$ è detto prodotto cartesiano fra due insiemi a e b.
$R \subseteq a \times b$ è detta relazione sugli insiemi a e b.
Se f è una relazione su a e b diremo che è una funzione se:

1. $x \in a \vdash \exists y(y \in b \wedge (x, y) \in f)$

2. $(x, u) \in f, (x, v) \in f \vdash u = v$

$f^{-1} := \{(y, x) : (x, y) \in f\}$ è detta inversa di f.
La composizione di due funzioni f e g è definita come $f \circ g = \{(x, y) : \exists z[(x, z) \in g \wedge (z, y) \in f]\}$
L'immagine di a rispetto a f è definita come $f[a] = \{f(x) : x \in a\}$.
Una funzione f è *iniettiva* se e solo se $f(x) = f(y) \vdash x = y$
Una funzione f è *iniettiva contrapposta* se e solo se $x \neq y \vdash f(x) \neq f(y)$

Rispetto al caso classico ci sono almeno due differenze fondamentali da notare, una sulla definizione di funzione e l'altra sulla iniettività. Comunque sia è evidente che per il Principio di Comprensione vale:

Proposizione 19 (Assioma di Rimpiazzamento). *Sia f una funzione con dominio a, allora esiste l'insieme $f[a]$*

La definizione di funzione è data mediante il simbolo $\vdash$ perché più permissivo di $\rightarrow$. Le due definizioni di iniettività non sono equivalenti per il semplice fatto che il simbolo $\vdash$ non contrappone in generale. Dunque esistono due diversi modi per una funzione di esprimere l'iniettività. Il primo modo è utile per definire i numeri cardinali (come mostrato in [9]), mentre il secondo per poter ottenere un ordine per un insieme attraverso gli ordinali come mostrato nel prossimo capitolo.
Dimostriamo in conclusione una proprietà ovvia delle coppie ordinate ma dalla lunga dimostrazione.

Proposizione 20. $(a, b) = (c, d) \dashv\vdash a = c \wedge b = d$

Dimostrazione. La dimostrazione da destra a sinistra è semplice conseguenza della Regola di Leibniz.
Dimostriamo da sinistra a destra.

1. $(a, b) = (c, d)$ — Premessa
2. $\forall x(x \in \{\{a\}, \{a, b\}\} \leftrightarrow x \in \{\{c\}, \{c, d\}\})$ — 1, Estensionalità, Definizione 9
3. $\forall x(x = \{a\} \vee x = \{a, b\} \leftrightarrow x = \{c\} \vee x = \{c, d\})$ — 2, Astrazione
4. $\{a\} = \{a\} \rightarrow \{a\} = \{c\} \vee \{a\} = \{c, d\}$ — 3, Assioma 10
5. $\forall x(x \in \{a\} \leftrightarrow x \in \{c\}) \vee \forall x(x \in \{a\} \leftrightarrow x \in \{c, d\})$ — 4, Estensionalità
6. $\forall x(x = a \leftrightarrow x = c) \vee \forall x(x = a \leftrightarrow x = c \vee x = d)$ — 5, Astrazione
7. $\forall x(x = a \leftrightarrow x = c) \rightarrow (a = a \rightarrow a = c) \wedge \forall x(x = a \leftrightarrow x = c \vee x = d) \rightarrow (c = c \vee c = d \rightarrow c = a)$ — 6, Assioma 10
8. $a = a \vee c = c \vee c = d \rightarrow a = c$ — 7, Assioma 6
9. $a = a$ — Riflessività
10. $a = c$ — 8, 9, *modus ponens*

Ora proviamo che $b = c \vee b = d$ da cui dedurremo $b = a \vee b = d$.

1. $(a, b) = (c, d)$ — Premessa
2. $\{a, b\} = \{c\} \vee \{a, b\} = \{c, d\}$ — come nella derivazione precedente punti 1-4 sostituendo a x il termine $\{a, b\}$ e poi per transitività
3. $\forall x(x = a \vee x = b \leftrightarrow x = c) \vee \forall x(x = a \vee x = b \leftrightarrow x = c \vee x = d)$ — 3, Astrazione

4. $(b = a \lor b = b \leftrightarrow b = c) \lor (b = a \lor b = b \leftrightarrow b = c \lor b = d)$ — 4, Assioma 10
5. $b = c \to b = c \lor b = d$ — $\lor$-introduzione
6. $b = a \lor b = b \to b = c \lor b = d$ — 4, 5, Assioma 5 e 6
7. $b = b$ — Riflessività
8. $b = c \lor b = d$ — 6, 7, *modus ponens*

Mettendo assieme i due risultati:

1. $a = c \land (b = c \lor b = d)$ — Regola 1
2. $(a = c \land b = c) \lor (a = c \land b = d)$ — 1, Assioma 4
3. $a = c \land b = c \to a = b$ — Transitività
4. $b = a \lor b = d$ — 2, Assioma 6

Quindi concludiamo:

1. $(a, b) = (c, d)$ — Premessa
2. $a = c$ — Prima derivazione
3. $(a, b) = (a, d)$ — 1,2 Leibniz
4. $\forall x(x = \{a\} \lor x = \{a, b\} \leftrightarrow x = \{a\} \lor x = \{a, d\})$ — 3, Astrazione
5. $\{a, d\} = \{a, d\} \to \{a, d\} = \{a\} \lor \{a, d\} = \{a, b\}$ — 4, Assioma 10
6. $\forall x(x \in \{a\} \leftrightarrow x \in \{a, d\}) \lor \forall x(x \in \{a, d\} \leftrightarrow x \in \{a, b\})$ — 5, Estensionalità
7. $(x = a \to x = a \lor x = d) \lor (x = a \lor x = d \to x = a \lor x = b)$ — 6, Astrazione
8. $d = d \to d = a \lor d = b$ — 7, Assioma 10 ponendo $x = d$, Assioma 6
9. $d = d$ — Riflessività
10. $d = a \lor d = b$ — 8, 9, *modus ponens*
11. $(b = a \lor b = d) \land (d = a \lor d = b)$ — Risultati ottenuti, Regola 1
12. $(b = a \land a = d) \lor (b = a \land b = d) \lor (b = d \land d = a) \lor (b = d \land d = b)$ — 11, Assioma 4

Ognuno dei disgiunti implica $b = d$, quindi la tesi è dimostrata grazie a dimostrazione per casi. $\square$

Capitolo 3

Gli ordinali

Il problema principale per quanto riguarda i numeri ordinali è trovare una definizione sufficientemente appropiata da poter derivare le proprietà che ci interessano. Sfortunatamente questo è uno di quei casi in cui, per ora, una definizione soddisfacente mediante il connettivo $\to$ non è individuabile. Questo perché, come vedremo, senza l'ausilio di t le dimostrazioni richieste sarebbero difficoltose, se non impossibili in quanto *irrilevanti*.

Definizione 10. Sia a un insieme.
Diremo che è strettamente ordinato rispetto $\in$ se
$x, y, z \in a \mapsto x \notin x \wedge (x \in y \mapsto y \notin x) \wedge (y \in z \mapsto (x \in y \mapsto x \in z))$
Diremo che è totalmente (o linearmente) ordinato da $\subseteq$ se è strettamente ordinato e $x \in a \mapsto (y \in a \mapsto x \subseteq y \vee y \subseteq x)$,
Diremo che è ben-fondato (in simboli "$Wf(a)$") se $y \subseteq a \wedge \exists z(z \in y) \mapsto \exists z(z \in y \wedge \neg\exists x(x \in z \wedge x \in y))$.
Diremo che è ben-ordinato mediante (in simboli "$Wo(a)$") se è totalmente ordinato e ben-fondato.
Diremo che è transitivo (in simboli "$Tr(a)$") se $x \in a \to x \subseteq a$.
Diremo che è un ordinale (in simboli "$Ord(a)$") se vale la seguente definizione circolare:
$Ord(a) \leftrightarrow Tr(a) \wedge Wo(a) \wedge \forall x(Ord(x) \mapsto a \subseteq x \vee x \subseteq a) \wedge \forall x(x \in \alpha \to Ord(x))$.
Chiameremo $On := \{x : Ord(x)\}$ l'insieme di tutti gli ordinali.

Si noti che On è un insieme (e non una classe propria come nella teoria classica) grazie al Principio di Comprensione. Nostro obiettivo sarà dimostrare che On è esso stesso un ordinale, cioè:

Teorema 6 (Burali-Forti). $On \in On$

Da cui consegue l'omonimo paradosso:

Teorema 7. *$On \notin On$ e di conseguenza $On \neq On$.*

Dimostrazione. La dimostrazione è ovvia dalle proprietà degli ordinali ($On \in On \to On \notin On$). $\square$

Prima di affrontare tutti i dettagli per giungere al Teorema di Burali-Forti, spieghiamo perché facciamo ciò. Gli ordinali vengono classicamente introdotti per stabilire un buon-ordinamento su un insieme qualsiasi (e di conseguenza, per poter utilizzare l'induzione transfinita). L'esistenza di un buon-ordinamento per qualsiasi insieme in logica classica è equivalente all'Assioma della Scelta.In questo caso cercheremo di avvicinarci a qualcosa di simile, ma più debole. In particolare sfrutteremo la definizione di iniezione contrapposta per definire cosa sia un insieme ordinato rispetto agli ordinali e, attraverso la disuguaglianza $On \neq On$, constatare come tutti gli insiemi siano ordinabili rispetto agli ordinali. La dimostrazione fornita sarà puramente esistenziale e nulla ci dirà su come ottenere l'ordinamento.

Definizione 11. Un insieme indicizzato y_α è una coppia (y, α) con y insieme e α ordinale. L'insieme x è ordinato rispetto agli ordinali se esiste una iniezione contrapposta da x a On. Sia f tale iniezione contrapposta, allora si può riordinare x attraverso il seguente insieme $\{y_{f(y)} : y \in x\}$, cioè indicizzando i suoi elementi.

Teorema 8. *Esiste una iniezione contrapposta* $\Omega : V \to On$

Dimostrazione. Consideriamo $\Omega(x) = On$. Poiché $On \in On$, questa è una funzione costante con codominio On. Ma contemporaneamente si ha $On \neq On$ quindi deve valere $x \neq y \vdash \Omega(x) \neq \Omega(y)$ che è esattamente la definizione di iniezione contrapposta. Dunque $\Omega = \{x_{\Omega(x)} : x \in V\}$ è un ordine rispetto agli ordinali di V. $\square$

Ripetendo il medesimo ragionamento:

Teorema 9. *Ogni insieme può essere ordinato rispetto agli ordinali.*

3.1 On è un ordinale

Per prima cosa dimostriamo che esiste almeno un ordinale.

Proposizione 21. $\emptyset \in On$

Dimostrazione. $\emptyset \subseteq On$ dalla Proposizione 6.
$y \in On \mapsto y \subseteq \emptyset \vee \emptyset \subseteq y$ sempre dalla Proposizione 6 perché grazie alla costante t entimematica si ha $t \to \emptyset \subseteq y$.
Per la transitività ci appelliamo all'Assioma di Astrazione sulla Definizione 3: $x \in \emptyset \to \forall y(x \in y) \to x \in \{z : \forall k(k \in z \to k \in \emptyset\} \to \forall k(k \in x \to k \in \emptyset) \to x \subseteq \emptyset$.
Proviamo che vale l'ordinamento stretto. Supponiamo $x, y, z \in \emptyset$. $x \in \emptyset \to \forall k(x \in$

$k) \to x \in \overline{x} \to x \notin x$. Allo stesso modo $y \in \emptyset \to \forall k(y \in k) \to y \in \overline{x} \to y \notin x$ di modo che $x \in y \mapsto y \notin x$. Inoltre dato che $x \in \emptyset \to \forall k(x \in k)$ si deve avere $x \in y \mapsto (y \in z \mapsto (x \in z))$.
Proviamo che vale l'ordine totale. Dalla definizione di $\emptyset$ si ha $x \in \emptyset \to x \in \{z : z \subseteq y\} \to x \subseteq y$ allora sicuramente $x \in \emptyset \mapsto (y \in \emptyset \mapsto (x \subseteq y \vee y \subseteq x))$.
Proviamo che è ben-fondato. Sia $y \subseteq \emptyset$ tale che abbia almeno un elemento. Denominiamo tale elemento a, allora si deve avere grazie all'Assioma 13 che $a \in y \wedge (x \in y \to x \in \emptyset) \to a \in y \wedge (x \notin y \vee x \in \emptyset)$. Ma nuovamente $x \in \emptyset \to \forall y(x \in y) \to x \in \overline{a} \to x \notin a$. Cioè: $a \in y \wedge (x \in y \to x \in \emptyset) \to a \in y \wedge (x \notin y \vee x \notin a)$. Applicando generalizzazione su x e esistenzializzazione su a otteniamo $y \subseteq \emptyset \wedge \exists z(z \in y) \mapsto \exists z(z \in y \wedge \forall x(x \notin z \vee x \notin y)$ che è proprio la condizione di buona fondatezza.
A questo punto abbiamo che $\emptyset$ è sia ben-fondato che totalmente ordinato, cioè è ben-ordinato. Tutte le condizioni sono soddisfatte. □

Dimostriamo ora che On è transitivo.

Proposizione 22. $\alpha \in On \to \alpha \subseteq On$.

Dimostrazione. È una delle condizioni necessarie perché α sia un ordinale. □

Mostriamo ora che vale l'ordine stretto rispetto $\in$ su On.

Proposizione 23. *Siano $\alpha, \beta, \gamma \in On$ allora:*

- $\alpha \notin \alpha$
- $\alpha \in \beta \wedge \alpha \notin \alpha \to \beta \notin \alpha$
- $\gamma \in \beta \to (\alpha \in \gamma \to \alpha \in \beta)$

Dimostrazione.

- Mostriamo che anche nel caso $\alpha \in \alpha$ deve valere $\alpha \notin \alpha$

  1. $\alpha \in On \to \forall x(x \in \alpha \to x \notin x)$ — Ordine stretto di α
  2. $\forall x(x \in \alpha \to x \notin x) \to (\alpha \in \alpha \to \alpha \notin \alpha)$ — Assioma 10
  3. $(\alpha \in \alpha \to \alpha \notin \alpha) \to \alpha \notin \alpha \vee \alpha \notin \alpha$ — Assioma 13
  4. $\alpha \notin \alpha \vee \alpha \notin \alpha \to \alpha \notin \alpha$

  Applichiamo transitività.

- Dato che $\alpha \in On$ allora α è transitivo, la contrapposta della transitività è $\beta \nsubseteq \alpha \to \beta \notin \alpha$. Ma $\alpha \in \beta \wedge \alpha \notin \alpha \to \beta \nsubseteq \alpha$ perché α è un elemento in β ma non in α, cioè $\exists z(z \in \beta \wedge z \notin \alpha)$.

- Dato che $\beta \in On$ allora β è transitivo, cioè $\gamma \in \beta \to \gamma \subseteq \beta$. Quindi se $\alpha \in \gamma$ allora $\alpha \in \beta$, che è la tesi.

□

La precedente Proposizione assieme alla seguente ci dimostra che On è totalmente ordinato.

Proposizione 24. $\alpha \in On \to (\beta \in On \mapsto \alpha \subseteq \beta \vee \beta \subseteq \alpha)$

Dimostrazione. Direttamente dalla definizione di ordinale. □

Resta da dimostrare che On è ben fondato. Per fare ciò abbiamo bisogno di una proposizione preliminare. Dimostriamo che sottoinsiemi di un insieme ben-ordinato, sono ancora ben-ordinati.

Proposizione 25. $Wo(\alpha), \beta \subseteq \alpha \vdash Wo(\beta)$

Dimostrazione. Dato che ogni elemento di β è anche in α, si ha l'ordine stretto perché questo vale per ogni elemento di α.
Dimostriamo che l'ordine è lineare.

1. $\beta \subseteq \alpha$ Premessa
2. $x \in \beta \to x \in \alpha$ 1, Assioma 10
3. $y \in \beta \to y \in \alpha$ 1, Assioma 10
4. $(y \in \alpha \to x \subseteq y \vee y \subseteq x) \to (y \in \beta \to x \subseteq y \vee y \subseteq x)$ 3, Assioma 14
5. $(x \in \alpha \mapsto (y \in \alpha \mapsto (x \subseteq y \vee y \subseteq x)) \to (x \in \beta \mapsto (y \in \beta \mapsto (x \subseteq y \vee y \subseteq x))$ 1, 3, Regola 4
6. $x \in \alpha \mapsto (y \in \alpha \mapsto (x \subseteq y \vee y \subseteq x))$ α ordinale
7. $x \in \beta \mapsto (y \in \beta \mapsto (x \subseteq y \vee y \subseteq x))$ 5, 6 *modus ponens*

Ora dimostriamo la buona fondatezza.
Notiamo che grazie all'Assioma 14:

$$(x \in \beta \to x \in \alpha) \to ((x \in y \to x \in \beta) \to (x \in y \to x \in \alpha))$$

Cioè (1) $\beta \subseteq \alpha \to (y \subseteq \beta \to y \subseteq \alpha)$.
Notiamo che grazie agli Assiomi 2, 5 e 6 vale (2) $(A \to B) \vdash (A \wedge C) \to (B \wedge C)$.
Abbiamo quindi:

1. $\beta \subseteq \alpha$ Premessa

2. $\beta \subseteq \alpha \to (y \subseteq \beta \to y \subseteq \alpha)$ (1)

3. $y \subseteq \beta \to y \subseteq \alpha$ 1, 2, *modus ponens*

4. $y \subseteq \beta \wedge \exists z(z \in y) \to y \subseteq \alpha \wedge \exists z(z \in y)$ 3, (2)

5. $y \subseteq \alpha \wedge \exists z(z \in y) \mapsto \exists z(z \in y \wedge \forall x(x \notin y \vee x \notin z))$ α ordinale (buona fondatezza)

6. $y \subseteq \beta \wedge \exists z(z \in y) \mapsto \exists z(z \in y \wedge \forall x(x \notin y \vee x \notin z))$ 4,5, Assioma 5

$\square$

Cioè abbiamo dimostrato che sottoinsiemi di un ordinale sono ancora ben-ordinati.

Proposizione 26. *On è ben-fondato.*

Dimostrazione. Consideriamo un qualsiasi $\theta \subseteq On$ non vuoto. Consideriamo un qualsiasi $\beta \in \theta$. Allora si presentano due casi: $\beta \cap \theta = \emptyset$ oppure $\beta \cap \theta \neq \emptyset$.

1. Nel primo caso si ha $\forall y(y \notin \beta \cap \theta)$ cioè $\forall y(y \notin \beta \vee y \notin \theta)$. Utilizzando allora t si ha
$$\theta \subseteq On \wedge \beta \in \theta \mapsto \beta \in \theta \wedge \forall y(y \notin \beta \vee y \notin \theta)$$
Per esistenzializzazione:
$$\theta \subseteq On \wedge \exists z(z \in \theta) \mapsto \exists z(z \in \theta \wedge \forall y(y \notin z \vee y \notin \theta))$$

2. Nel secondo caso $\exists y(y \in \beta \cap \theta)$ cioè $\exists y(y \in \beta \wedge y \in \theta)$. Dato che θ è un ordinale, allora è ben-fondato e a maggior ragione è ben-fondato $\beta \cap \theta$ perché sottoinsieme di θ (Proposizione 25). Riscrivendo il conseguente della buona fondatezza per $\beta \cap \theta \subseteq \theta$, eliminando il simbolo esistenziale con una costante γ otteniamo:
$$\gamma \in \theta \wedge \gamma \in \beta \wedge \forall y(y \notin \gamma \vee y \notin \beta \vee y \notin \theta) \qquad (*)$$
Dato $\beta \in On$ in quanto per ipotesi $\theta \subseteq On$ e che gli ordinali sono transitivi si ha: $\gamma \in \beta \to \gamma \subseteq \beta$ ed utilizzando la contrapposizione sulla definizione di $\subseteq$ si deve avere $y \notin \beta \to y \notin \gamma$. Utilizzando questo fatto possiamo eliminare $y \notin \beta$ nella disgiunzione ed utilizzando l'Assioma 2 possiamo eliminare $\gamma \in \beta$ nella congiunzione, riduciamo quindi la formula $(*)$ in:
$$\gamma \in \theta \wedge \forall y(y \notin \gamma \vee y \notin \theta)$$
Allora per esistenzializzazione:
$$\theta \subseteq On \wedge \exists z(z \in \theta) \mapsto \exists z(z \in \theta \wedge \forall y(y \notin z \vee y \notin \theta))$$

Per dimostrazione per casi abbiamo che $\vdash Wf(On)$ come desiderato. $\square$

Manca un'ultima semplice proprietà:

Proposizione 27. $y \in On \to y \subseteq On \vee On \subseteq y$

Dimostrazione. La dimostrazione è ovvia perché abbiamo già dimostrato che On è transitivo, cioè $y \in On \to y \subseteq On$. $\square$

A questo punto abbiamo dimostrato il Teorema di Burali-Forti e di conseguenza abbiamo dimostrato che On è un insieme inconsistente. In virtù della sua inconsistenza vale la pena notare una cosa, $On \in On$ è in contraddizione rispetto alla condizione di ben-fondatezza. In una logica paraconsistente ciò non stupisce. On è contemporaneamente ben-fondato e non ben-fondato. Come abbiamo visto, conseguenza di $On \neq On$ è che ogni insieme è ordinabile rispetto agli ordinali. Questo risultato non è però per forza equivalente al noto Teorema di Zermelo (ogni insieme è ben-ordinabile). Questo perché in virtù della sua natura inconsistente, On ordina rispetto agli ordinali anche insiemi non ben-fondati come V. Cioè quando un insieme è ben-ordinabile è anche ordinabile rispetto gli ordinali, ma quando è ordinabile rispetto agli ordinali non è detto che sia ben-ordinabile perché non ben-fondato. O meglio, in una logica paraconsistente dovremmo dimostrare che $\neg Wf(x) \vdash Wf(x)$ perché i due tipi di ordine siano equivalenti. Ad oggi non ci sono motivi di credere ciò, in contrasto con quanto espresso in [7].
Che struttura hanno gli ordinali? Possiamo immaginarceli come nella teoria classica? Un primo teorema ci suggerisce qualcosa. Dimostriamo che un ordinale α non è altro che l'insieme di tutti gli ordinali precedenti.

Proposizione 28. $\alpha = \{x : x \in On \wedge x \in \alpha\}$ *per* α *ordinale.*

Dimostrazione. Per ipotesi $\alpha \in On$, dato che On è transitivo si ha $\alpha \subseteq On$, da cui si ha $\beta \in \alpha \to \beta \in On$, inoltre ovviamente dall'Assioma 1 si ha $\beta \in \alpha \to \beta \in \alpha$. Cioè si ha $\beta \in \alpha \to \beta \in On \wedge \beta \in \alpha$. Il verso mancante è ovvio utilizzando l'Assioma 2. $\square$

Sfortunatamente le analogie classiche finiscono qui. Ad oggi, la logica in esame non è riuscita a produrre una dimostrazione (o una confutazione) della congettura:
Sia θ un insieme transitivo e ben-ordinato di ordinali, allora $\alpha, \beta \in On \to (\alpha \subseteq \theta \subseteq \beta \to \theta \in On)$.
Se ciò valesse, ogni insieme transitivo e ben-ordinato di ordinali sarebbe un ordinale, in quanto vale: $\emptyset \subseteq \theta \subseteq On$.
Senza questa congettura non è possibile dimostrare che per esempio $\alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}$ sia un ordinale. Questo perché non abbiamo garanzia che $y \in On \mapsto (\alpha^+ \subseteq y \vee y \subseteq \alpha^+)$.
Dunque un ordinale non può essere rigorosamente immaginato come una serie di punti successori e punti limite: la sua struttura intuitiva ci rimane celata. Sappiamo che esiste un elemento minimale $\emptyset$ e un elemento massimale On, ma non sappiamo cosa ci sia nel mezzo.

Conclusione

La logica utilizzata permette la costruzione di insiemi con proprietà *esotiche* dato che non siamo classicamente abituati a ragionare in termini di inconsistenza. Come mostrato, molte delle proprietà ricercate sono derivabili ma non per questo tutte. In primis, gli ordinali mantengono ancora una struttura misteriosa.
Inoltre rimane ancora una questione aperta: è l'Assioma della Scelta derivabile dagli assiomi? Tutti gli sforzi nel cercare di dimostrare ciò per ora si sono rivelati vani, o almeno incompleti.
In [9] è stata esplorata una via differente da quella del buon-ordine.
Scrivendo $\bigvee_{i=0}^{n} P_i$ intendiamo $P_0 \vee \cdots \vee P_n$. Se invece scrivessimo $\bigvee_{i=On}^{On} P_i$, scrittura intuitivamente consentita dal fatto che On è un ordinale, dato che $On = On$ e $On \neq On$ avremmo una scrittura contemporaneamente infinita e finita. Da ciò è possibile eliminare qualsiasi problema di cardinalità degli insiemi presi in esame, cioè sarebbe possibile dimostrare l'Assioma della Scelta non solo per il caso finito, ma per casi qualsiasi. Una critica che può essere mossa a questo approccio è che $\bigvee$ è un simbolo d'abbreviazione intuitivamente definito sui numeri naturali e non abbiamo motivo di credere che sia estendibile ad On e soprattutto è opinabile l'utilizzo di formule infinite in una logica non infinitaria.

Bibliografia

[1] Abe, J. M, Akama, S., Nakamatsu, K. (2015) *Introduction to annotated logics.* Berlin, Be: Springer.

[2] Asmus, Conrad, 'Restricted Arrow', Journal of Philosophical Logic, 38(4), 2009.

[3] Brady, R. (2006). *Universal Logic.* Stanford, California: CSLI.

[4] Carnielli, W., Coniglio, M. E. (2016) *Paraconsistent Logic: Consistency, Contradiction and Negation.* Berlin, Be: Springer.

[5] Dunn, J. Michael, and Greg Restall. 'Relevance logic', in Dov M. Gabbay and Franz Günthner, (eds.), *Handbook of Philosophical Logic*, 2nd Edition, volume 6, Kluwer, 2002, pp. 1–128

[6] Routley, R., Meyer, R. K., Plumwood, V., Brady, R. T. (1982) *Relevant logics and their rivals.* Ridgeview

[7] Weber, Z. (2010a). *Transfinite numbers in a paraconsistent set theory*, Review of symbolic logic

[8] Weber, Z. (2010b). *Extensionality and restriction in naive set theory.* Studia Logica 94(1), 87–104.

[9] Weber, Z. (2012). *Transfinite cardinals in paraconsistent set theory.* Review of Symbolic Logic