Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

UNO SPAZIO DI SOBOLEV CON LA PROPRIETÁ DI PICK COMPLETA

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
NICOLA ARCOZZI

Presentata da:
GIUSEPPE LAMBERTI

III Sessione
Anno Accademico 2018/2019

Introduzione

Questa tesi si pone come scopi lo studio dello spazio di Sobolev $W^{1,2}([0,1])$ e di una sua proprietà. Tale spazio prevede l'utilizzo della derivata debole che, per essere definita, utilizza la teoria integrale invece di limiti e rapporti incrementali. Le funzioni che ne fanno parte sono funzioni a quadrato sommabile con derivata debole a quadrato sommabile.

Gli spazi di Sobolev, molto spesso utilizzati per trovare le soluzioni a equazioni differenziali alle derivati parziali, verranno qui trattati diversamente. Si è infatti deciso di studiare questo particolare spazio, uno tra gli spazi di Sobolev ad essere uno spazio di Hilbert a nucleo riproducente, come tale e non come contenitore di soluzioni a problemi di altra natura.

Nel primo capitolo vengono introdotti gli strumenti utili allo sviluppo degli argomenti trattati nei capitoli successivi. Vi si trovano quindi le definizioni di spazio di Hilbert e spazio di Hilbert a nucleo riproducente, e i principali teoremi che riguardano tali oggetti.

Nel secondo capitolo viene introdotto il protagonista di questa tesi, ovvero lo spazio di Sobolev $W^{1,2}([0,1])$. Oltre alla definizione, vengono qui riportate alcune delle principali proprietà di tale spazio e ne viene calcolato il nucleo.

Nel terzo capitolo viene introdotta, con riferimento a [**ARSW**], una distanza sull'insieme $[0,1]$ indotta dallo spazio $W^{1,2}([0,1])$. In particolare tutto quello descritto nella Sezione 3.2 è originale.

Infine nel quarto capitolo viene dimostrato che lo spazio $W^{1,2}([0,1])$ ha la Proprietà di Pick Completa. In questo si è seguita la strategia adottata in [**AM**].

Indice

Introduzione **i**

1 Spazi di Hilbert e spazi di Hilbert a nucleo riproducente **1**

1.1 Prime definizioni e proprietà 1

1.2 Spazi di Hilbert a nucleo riproducente 5

2 Lo spazio di Sobolev $W^{1,2}$ **11**

2.1 Definizione e prime proprietà 11

2.2 $W^{1,2}$ come RKHS 12

3 La distanza δ **17**

3.1 Introduzione 17

3.2 Il caso $W^{1,2}([0,1])$ 18

4 Proprietà di Pick **23**

4.1 Problema di Pick, caso $n = 2$ 23

4.2 Dal problema di Pick alla proprietà di Pick 25

4.3 Proprietà di Pick completa 26

4.4 $W^{1,2}$ ha la proprietà di Pick completa 30

Bibliografia **33**

Capitolo 1

Spazi di Hilbert e spazi di Hilbert a nucleo riproducente

1.1 Prime definizioni e proprietà

Definizione 1.1. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$, un prodotto interno su V è una funzione $(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$ che soddisfa:

1. $(x, x) \geq 0$ e $(x, x) = 0$ se e solo se $x = 0$
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$
3. $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$
4. $(x, y) = \overline{(y, x)}$.

Definizione 1.2. Sia $x \in V$, definiamo la norma di x:

$$||x|| = (x, x)^{1/2}.$$

Definizione 1.3. Siano $x, y \in V$, definiamo la distanza tra x e y come:

$$d(x, y) = ||x - y||.$$

É semplice da verificare che la norma e la distanza sopra definite siano a tutti gli effetti una norma ed una distanza. A tal proposito è anche utile ricordare un risultato importante da cui segue la validità della disuguaglianza triangolare per la norma.

Lemma 1.1.1 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)**.**

$$|(x, y)| \leq ||x||\,||y||$$

Definizione 1.4. $x, y \in V$ si dicono ortogonali se $(x, y) = 0$. Se inoltre $||x|| = ||y|| = 1$, allora diciamo che i due vettori sono ortonormali.

Definizione 1.5. Sia H uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ dotato di un prodotto interno. Diciamo che H è uno spazio di Hilbert, se, dotato della distanza sopra definita, è uno spazio metrico completo.

Negli spazi di Hilbert si può quindi parlare di ortogonalità. L'esempio più semplice, che subito viene in mente, è quello di $\mathbb{C}^n$. Su questo spazio è possibile definire l'ortogonale di un qualunque sottospazio vettoriale M come l'insieme dei vettori ortogonali a M. Risulta poi vero che tale insieme sia un sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}^n$.
Ciò vale in generale in un qualunque spazio di Hilbert, con però qualche accorgimento.

Teorema 1.1.2 (delle Proiezioni)**.** *Sia H uno spazio di Hilbert, e M un suo sottospazio chiuso. Definiamo:*

$$M^{\perp} = \{x \in H : (x, y) = 0 \;\; \forall y \in M\}.$$

Allora ogni $x \in H$ può essere scritto come:

$$x = z + w \;\; con \; z \in M, w \in M^{\perp}$$

Un'altra proprietà che può essere estesa è il concetto di base ortonormale, ovvero l'idea che un qualunque elemento dello spazio possa essere scritto come una combinazione lineare di elementi con norma unitaria e ortogonali tra loro.
Negli spazi di Hilbert però si parla di sistema ortonormale completo, aggiungendo alle proprietà sopra citate la massimalità di una tale famiglia.

Definizione 1.6. Sia H uno spazio di Hilbert. Un sistema ortonormale completo è una famiglia S tale che:

1. $\forall p, q \in S \; ||p|| = ||q|| = 1$ e $(p, q) = 0$

2. se T è una famiglia con la proprietà (1) allora $T \subseteq S$

Teorema 1.1.3. *Sia H uno spazio di Hilbert. Allora esiste un sistema ortonormale completo.*

Vale inoltre una sorta di generalizzazione del teorema di Pitagora in dimensione non finita.

Teorema 1.1.4 (Identità di Parseval)**.** *Sia H uno spazio di Hilbert e sia $S = \{e_i\}_{i \in I}$ un sistema ortonormale completo, allora:*

$$y = \sum_{i \in I} (y, e_i) e_i$$

$$||y||^2 = \sum_{i \in I} |(y, e_i)|^2$$

Consideriamo ora l'insieme delle funzioni lineari e continue tra due spazi di Hilbert, con particolare attenzione allo spazio duale.

Definizione 1.7. Siano E_1, E_2 due spazi di Hilbert, indichiamo con

$$\mathcal{L}(E_1, E_2) = \Big\{ T : E_1 \to E_2 : \text{T è lineare e continuo} \Big\}.$$

In particolare, indichiamo con $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$, lo spazio duale di E.

Osservazione 1. E^* ha una naturale struttura di spazio di Banach, considerando la norma

$$||T||_{E^*} = \sup_{||x||_E \leq 1} |Tx|.$$

Teorema 1.1.5 (di Riesz)**.** *Per ogni $T \in H^*$ esiste ed è unico $y_T \in H$ tale che $T(x) = (x, y_T)$ per ogni $x \in H$. Inoltre $||y_T||_H = ||T||_{H^*}$*

Dimostrazione. Sia $N = \{x \in H : T(x) = 0\}$. Essendo T continuo, N è un sottospazio chiuso. Se $N = H$ allora $T(x) = 0 = (x, 0)$ per ogni $x \in H$ e quindi abbiamo la tesi.
Se $N \neq H$, allora, per il Teorema delle Proiezioni, esiste $x_0 \in N^{\perp}$ non nullo. Sia ora $y_T = T(x_0)||x_0||^{-2}x_0$, verifichiamo che y_T ha la proprietà cercata. Se $x \in N$, allora $T(x) = 0 = (x, y_T)$. Se invece $x = \alpha x_0$

$$T(x) = T(\alpha x_0) = \alpha T(x_0) = (\alpha x_0, T(x_0)||x_0||^{-2}x_0) = (x, y_T).$$

Le funzioni $T(\cdot)$ e $(\cdot, y_T)$ sono lineari e coincidono su N e su x_0, di conseguenza coincideranno sullo span di entrambi. Ma ogni $y \in H$ può essere scritto come somma di un elemento di N e dello span di x_0, infatti

$$y = \left(y - \frac{T(y)}{T(x_0)}x_0\right) + \frac{T(y)}{T(x_0)}x_0.$$

Da ciò segue che $T(x) = (x, y_T)$ per ogni $y \in H$.
Vediamo l'unicità. Se $T(x) = (x, y')$ allora

$$||y_T - y'||^2 = (y_T - y', y_T - y') = (y_T - y', y_T) - (y_T - y', y') = T(y_T - y') - T(y_T - y') = 0.$$

Vediamo infine che $||y_T|| = ||T||$. Basta osservare che

$$||T|| = \sup_{||x|| \leq 1} |T(x)| = \sup_{||x|| \leq 1} |(x, y_T)| \leq \sup_{||x|| \leq 1} ||x||\,||y_T|| = ||y_T||$$

e che

$$||T|| = \sup_{||x|| \leq 1} |T(x)| \geq \left|T\left(\frac{y_T}{||y_T||}\right)\right| = \left(y_T, \frac{y_T}{||y_T||}\right) = ||y_T||.$$

□

In dimensione finita si parla di matrici hermitiane. É possibile generalizzare tale concetto per operatori limitati qualunque definiti su spazi di Hilbert.

Definizione 1.8. Sia H uno spazio di Hilbert e sia $T \colon H \to H$ un operatore lineare limitato. Definiamo $T^* \colon H \to H$ come l'operatore che soddisfa

$$(Tx, y) = (x, T^*y) \quad \forall x, y \in H.$$

Esistenza e unicità di tale operatore seguono dal Teorema di Riesz. Inoltre si verifica facilmente che $||T|| = ||T^*||$.

Concludiamo la sezione con una serie di risultati utili a "creare" nuovi spazi di Hilbert da altri già noti. Per un maggior approfondimento si consulti [**RS**].

Definizione 1.9. Siano H_1, H_2 spazi di Hilbert, per ogni $f_1 \in H_1$ e $f_2 \in H_2$ definiamo

$$f_1 \otimes f_2 \colon H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}$$
$$< \psi_1, \psi_2 > \mapsto (f_1, \psi_1)(f_2, \psi_2)$$

che risulta essere una forma coniugato bilineare su $H_1 \times H_2$.

Definizione 1.10. Sia $\mathcal{E}$ l'insieme delle combinazioni lineari del tipo:

$$\mathcal{E} = \left\{ \lambda_1(f_1 \otimes f_2) + \lambda_2(g_1 \otimes g_2) : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, f_1, g_1 \in H_1, f_2, g_2 \in H_2 \right\}$$

munito del seguente prodotto scalare

$$(f_1 \otimes f_2, g_1 \otimes g_2)_{\mathcal{E}} = (f_1, g_1)_{H_1}(f_2, g_2)_{H_2}$$

esteso per bilinearità su tutto $\mathcal{E}$.

Definizione 1.11. Definiamo $H_1 \otimes H_2$ come il completamento di $\mathcal{E}$ rispetto al prodotto scalare $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{E}}$ sopra definito. $H_1 \otimes H_2$ è detto prodotto tensore di H_1 e H_2.

1.2 Spazi di Hilbert a nucleo riproducente

Definizione 1.12. Sia H uno spazio di Hilbert di funzioni $f : X \to \mathbb{C}$ dove X è un insieme qualunque, diciamo che H ha valutazione limitata nei punti, se:

$$\eta_x \colon H \to \mathbb{C}$$
$$f \mapsto f(x)$$

è limitata $\forall x \in H$.

Osservazione 2. Se η_x è limitata, allora $\eta_x \in H^*$, di conseguenza è possibile applicare il Teorema di Riesz. Esiste quindi ed è unico $k_x \in H$ tale che $\eta_x(f) = (f, k_x)$, ovvero $f(x) = (f, k_x)$.

Ciò ci porta alla seguente definizione.

Definizione 1.13. Uno spazio di Hilbert H è detto a nucleo riproducente (RKHS) se è uno spazio di funzioni $f : X \to \mathbb{C}$, con X insieme qualunque, tale che esista una famiglia $\{k_x\}_{x \in X}$ di funzioni di H con la proprietà:

$$f(x) = (f, k_x) \quad \forall f \in H.$$

La famiglia $\{k_x\}_{x \in X}$ è detta nucleo riproducente di H.

Osservazione 3. k_x è a sua volta una funzione di H, di conseguenza, se si considera η_ξ definita come sopra, si ha che $\eta_\xi(k_x) = k_x(\xi)$.
Ancora una volta, se si usa il Teorema di Riesz, si ha che esiste ed è unico k_ξ tale che $\eta_\xi(k_x) = (k_x, k_\xi)$, ovvero $k_x(\xi) = (k_x, k_\xi)$.

Ha quindi senso la seguente definizione.

Definizione 1.14. Se H è uno spazio di Hilbert a nucleo riproducente, la funzione nucleo di H è data da:

$$k(x, \xi) = (k_x, k_\xi).$$

É infine interessante notare un'altra proprietà degli spazi di Hilbert a nucleo riproducente.

Osservazione 4. Se H è un RKHS su un insieme X e f_n è una successione di funzioni che converge a f rispetto alla norma di H, allora la successione converge anche puntualmente, infatti $\forall x \in X$ si ha che

$$|f_n(x) - f(x)| = |(f_n - f, k_x)| \leq ||f_n - f||\,||k_x|| \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Un altro aspetto importante della teoria degli spazi di Hilbert a nucleo riproducente è lo studio dei Moltiplicatori.

Definizione 1.15. Sia H un RKHS su un insieme X, e sia $m : X \to \mathbb{C}$. Diciamo ch m è un moltiplicatore per H se l'applicazione:

$$\begin{aligned} M_m \colon H &\to H \\ f &\mapsto mf \end{aligned}$$

è limitata. Indichiamo con $Mult(H)$ l'insieme dei moltiplicatori di H.

Proposizione 1.2.1. *Siano H un RKHS su un insieme X con nucleo $\{k_x\}_{x \in X}$ e m un moltiplicatore. Allora*

$$M_m^* k_x = \overline{m(x)} k_x.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} (M_m^* k_x)(y) = (M_m^* k_x, k_y) = (k_x, M_m k_y) = \overline{(M_m k_y, k_x)} = \\ = \overline{(m k_y, k_x)} = \overline{m(x)}(k_x, k_y) = \overline{m(x)} k_x(y) \quad \forall y \in X. \end{aligned}$$

□

Corollario 1.2.2. *Nelle ipotesi della Proposizione* 1.2.1 *vale*

$$\sup_{x \in X} |m(x)| \leq ||M_m||$$

Dimostrazione. Si ha che $||M_m|| = ||M_m^*||$ e che

$$||M_m^*|| \geq \frac{||M_m^* k_x||}{||k_x||} = \frac{|m(x)| \, ||k_x||}{||k_x||} = |m(x)|,$$

da cui la tesi. □

Proposizione 1.2.3. *Sia m un moltiplicatore e siano $x, y \in X$. Se $||M_m|| \leq 1$ e $m(x) = 0$, allora*

$$|m(y)| \leq \sqrt{1 - \left| \left(\frac{k_x}{||k_x||}, \frac{k_y}{||k_y||} \right) \right|^2}.$$

Osservazione 5. Sia E uno spazio di Hilbert di dimensione s (finita o infinita). E può essere identificato con $\mathbb{C}^s$ se s è finito, o $\ell^2(\mathbb{N})$ in caso contrario. Se H è uno spazio di funzioni su X, allora lo spazio

$$H \otimes E$$

può essere visto come uno spazio di funzioni con dominio X a valori in E.

Un moltiplicatore da $H \otimes E_1$ a $H \otimes E_2$ non è altro che una funzione

$$\Phi : X \to \mathcal{L}(E_1, E_2)$$

con la proprietà

$$\Phi F \in H \otimes E_2 \qquad\qquad \forall F \in H \otimes E_1.$$

Vediamo ora qualche esempio di moltiplicatori.

Esempio 1.1 (Pochi moltiplicatori)**.** Prendiamo in considerazione lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale di $N \in \mathbb{N}$ fissato, $\mathbb{C}[z]_{\leq N}$. É un Hilbert, infatti può essere identificato con $\mathbb{C}^{N+1}$ dal quale eredita prodotto scalare e norma associata.
Mostriamo che è un RKHS.
Siano $z_0 \in \mathbb{C}$, $p(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$. Vogliamo trovare $q(z) = \sum_{n=0}^{N} b_n z^n$ tale che $p(z_0) = (p, q)$, ovvero:

$$a_0 + a_1 z_0 + \cdots + a_N z_0^N = a_0 \overline{b_0} + a_1 \overline{b_1} \cdots + a_N \overline{b_N}.$$

da cui segue che $\overline{b_n} = z_0^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Il nucleo è quindi formato da

$$q_{z_0} = \sum_{n=0}^{N} \overline{z_0}^n z^n.$$

Detto ciò, se $p \in \mathbb{C}[z]_{\leq N}$ è un moltiplicatore allora $pq \in \mathbb{C}[z]_{\leq N}$ qualunque sia q. Quindi $\deg(p) = 0$, ovvero p è costante.
Abbiamo mostrato che in tale spazio gli unici moltiplicatori sono le costanti.

Esempio 1.2 (Molti moltiplicatori)**.** Consideriamo lo spazio di Hardy

$$H^2(\mathbb{D}) = \left\{ f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ con } \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}) \right\},$$

dove $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Indicheremo semplicemente con H^2 l'insieme $H^2(\mathbb{D})$, laddove non ci sono equivoci.

Ci chiediamo ora se le funzioni di cui sopra hanno raggio di convergenza pari a 1. Mostriamo quindi la convergenza assoluta dei termini. Sia $0 \leq r < 1$, $z \leq r$ e $N < M$, abbiamo che

$$\left| \sum_{n=0}^{M} a_n z^n - \sum_{n=0}^{N} a_n z^n \right|^2 = \left| \sum_{n=N}^{M} a_n z^n \right|^2 \leq \sum_{n=N}^{M} |a_n z^n|^2 \leq \sum_{n=N}^{M} |a_n|^2 \sum_{n=N}^{M} |z|^{2n} \leq$$
$$\leq \sum_{n=N}^{M} |a_n|^2 \sum_{n=N}^{M} r^{2(n-N+N)} \leq \sum_{n=N}^{M} |a_n|^2 \frac{r^{2N}}{1-r^2} \to 0 \text{ per } N, M \to \infty.$$

Da ciò segue che $\left| \sum_{n=0}^{N} a_n z^n \right|$ coverge per il criterio di Cauchy, essendo $\mathbb{C}$ completo.

Consideriamo come prodotto interno quello che tale spazio eredita da $\ell^2(\mathbb{N})$, ovvero se $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ e $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ allora

$$(f, g)_{H^2} := \Big(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \Big)_{\ell^2}.$$

Tale spazio è un RKHS, infatti

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{\bar{z}^n} = \Big(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{\bar{z}^n\}_{n\in\mathbb{N}} \Big)_{\ell^2} =$$
$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n, \sum_{n=0}^{\infty} \bar{z}^n w^n \right)_{H^2} = (f, k_z)_{H^2},$$

dove $k_z(w) = \frac{1}{1-\bar{z}w}$.
Chi sono i moltiplicatori? Consideriamo l'insieme

$$H^\infty(\mathbb{D}) = \{ f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} : f \text{ olomorfa e limitata} \}.$$

Questo è l'insieme di tutti e soli i moltiplicatori per H^2.
Se infatti φ è un moltiplicatore per H^2, allora $\varphi f \in H^2$ qualunque sia $f \in H^2$,

di conseguenza, prendendo $f = 1$, si ha che $\varphi \in H^2$, e di conseguenza φ è olomorfa. Dal Corollario 1.2.2 segue che φ è anche limitata.
Il viceversa è più complicato e richiede l'utilizzo di una proprietà non banale di H^2, ovvero

$$(f, g)_{H^2} = \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{it})\overline{g(re^{it})}dt.$$

Supposto questo e presa $\varphi \in H^\infty$, si ha che qualunque sia $f \in H^2$

$$\begin{aligned}||\varphi f||^2_{H^2} &= \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})\varphi(re^{it})|^2 dt \leq \\ &\leq \sup_{|z|<1} |\varphi(z)|^2 \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})|^2 dt = \\ &= ||\varphi||^2_{H^\infty} ||f||^2_{H^2},\end{aligned}$$

ovvero $\varphi f \in H^2$ qualunque sia $f \in H^2$.
Rimane da dimostrare la proprietà utilizzata, per la quale si rimanda a [**AM**].

Capitolo 2

Lo spazio di Sobolev $W^{1,2}$

Questo capitolo è dedicato allo studio di alcune proprietà di un particolare spazio di Hilbert a nucleo riproducente, lo spazio di Sobolev $W^{1,2}$.

2.1 Definizione e prime proprietà

Definizione 2.1. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo. Definiamo lo spazio di Sobolev

$$W^{1,2}(I) = \left\{ f \in L^2(I) : \exists g \in L^2(I) \text{ tale che } \int_I f\varphi' = -\int_I g\varphi \;\; \forall \varphi \in C_c^1(I) \right\}.$$

Se $f \in W^{1,2}(I)$ allora diremo che f è derivabile debolmente su I e che la sua derivata debole è g.

Proposizione 2.1.1. *Lo spazio $W^{1,2}(I)$ con il seguente prodotto interno è uno spazio di Hilbert:*

$$(f, g) = \int_I (f(x)g(x) + f'(x)g'(x))\, dx$$

dove con f' e g' indichiamo rispettivamente la derivata debole di f e g.

Dimostrazione. La norma indotta dal prodotto interno è

$$||f||^2 = \int_I \left(f(x)^2 + f'(x)^2\right) dx.$$

Sia ora $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in $W^{1,2}(I)$. Da ciò segue che $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono successioni di Cauchy in $L^2(I)$, infatti:

$$||f_n - f_m||^2_{L^2} \leq ||f_n - f_m||^2_{L^2} + ||f'_n - f'_m||^2_{L^2} = ||f_n - f_m||^2_{W^{1,2}}.$$

Si ha quindi che f_n convergerà ad una qualche funzione f in $L^2(I)$, così come f'_n che convergerà ad una funzione g sempre in $L^2(I)$. Dimostriamo ora che g è la derivata debole di f

$$\int_I f_n(x)\varphi'(x)dx = -\int_I f'_n(x)\varphi(x)dx \ \ \forall\varphi \in C^1_c(I)$$

e quindi passando al limite,

$$\int_I f(x)\varphi'(x)dx = -\int_I g(x)\varphi(x)dx \ \ \forall\varphi \in C^1_c(I)$$

ovvero che $f' = g$.

A questo punto si arriva alla tesi, infatti

$$||f_n - f||^2_{W^{1,2}} = ||f_n - f||^2_{L^2} + ||f'_n - f'||^2_{L^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0 + 0 = 0.$$

□

Lo spazio qui definito coincide con un altro spazio ben noto, ovvero lo spazio H^1.

Definizione 2.2. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo. Definiamo lo spazio $H^1(I)$ come:

$$H^1(I) = \left\{\varphi \in L^2(I) : \sum_{-\infty}^{\infty}(1 + 4\pi n^2)|\widehat{\varphi}(n)|^2 \text{ converge}\right\}.$$

dove $\widehat{\varphi}(n)$ è il coefficiente di Fourier $\forall n \in \mathbb{N}$.

Per una dimostrazione di ciò, si consulti [**AF**].

2.2 $W^{1,2}$ come RKHS

Vogliamo calcolare ora il nucleo di $W^{1,2}([0,1])$ e utilizzare questo per dimostrare che le funzioni di tale spazio sono funzioni continue.

Proposizione 2.2.1. *Nello spazio di Sobolev $W^{1,2}([0,1])$ la funzione nucleo è data da:*

$$k(x,\xi) = \begin{cases} u(x)v(\xi) & \xi \leq x \\ u(\xi)v(x) & \xi \geq x \end{cases} \tag{2.1}$$

dove

$$u(x) = c_0 \cosh(1-x)$$

$$v(x) = c_0 \cosh(x)$$

$$c_0 = \sqrt{\sinh(1)^{-1}}$$

Dimostrazione. Calcoliamo

$$\int_0^1 \left(f(x)k(x,\xi) + f'(x)\frac{\partial}{\partial x}k(x,\xi) \right) dx. \tag{2.2}$$

Nell'intervallo $[0,\xi]$ abbiamo

$$\int_0^\xi \left(f(x)u(\xi)v(x) + f'(x)u(\xi)v'(x)\right) dx =$$

$$= u(\xi)\left[\int_0^\xi f(x)(v(x) - v''(x))dx + f(\xi)v'(\xi) - f(0)v'(0)\right].$$

mentre su $[\xi,1]$

$$\int_\xi^1 \left(f(x)u(x)v(\xi) + f'(x)u'(x)v(\xi)\right) dx =$$

$$= v(\xi)\left[\int_\xi^1 f(x)(u(x) - u''(x))dx + f(1)u'(1) - f(\xi)u'(\xi)\right].$$

Sommando queste due espressioni, utilizzando il fatto che $v'' = v$, $u'' = u$, $v'(0) = 0$, $u'(1) = 0$ e che

$$u(x)v'(x) - v(x)u'(x) \equiv 1,$$

abbiamo che (2.2) equivale a $f(y)$. □

Proposizione 2.2.2. *Sia $f \in W^{1,2}([0,1])$, allora f è continua.*

Osservazione 6. Con f continua si intende che esiste $\psi \in C([0,1])$ tale che $f = \psi$ quasi dappertutto.

Dimostrazione. Abbiamo che

$$|f(x+h) - f(x)| = |(f, k_{x+h}) - (f, k_x)| = |(f, k_{x+h} - k_x)|.$$

Per dimostrare la continuità di f basta quindi far vedere che per $h \to 0$ si ha che $||k_{x+h} - k_x|| \to 0$. Sappiamo che

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x} \text{ e che } \qquad (f, k_x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) \overline{\widehat{k_x}(n)} (1 + 4\pi^2 n^2)$$

da cui segue

$$\widehat{k_x}(n) = \frac{e^{-2\pi i n x}}{1 + 4\pi^2 n^2}.$$

A questo punto

$$\begin{aligned} ||k_{x+h} - k_x||^2 &= \sum_{-\infty}^{\infty} (1 + 4\pi n^2) |\widehat{k_{x+h} - k_x}(n)|^2 = \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} (1 + 4\pi n^2) \left| \frac{e^{-2\pi i n (x+h)} - e^{-2\pi i n x}}{1 + 4\pi^2 n^2} \right|^2 = \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{|e^{-2\pi i n h} - 1|^2}{1 + 4\pi n^2}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Fissato h, si ha che la serie converge. Inoltre, per $h \to 0$, risulta $|e^{-2\pi i n h} - 1|^2 \to 0$ qualunque sia $n \in \mathbb{N}$. Siano di conseguenza $\bar{n} \in \mathbb{N}$ e $\delta > 0$ tali che

$$\begin{aligned} &\sum_{|n| \geq \bar{n}} \frac{4}{1 + 4\pi n^2} \leq \epsilon, \\ &|e^{-2\pi i n h} - 1|^2 \leq \epsilon \qquad\qquad \text{per } n \leq \bar{n}, |h| \leq \delta. \end{aligned}$$

Fatta tale scelta, si ha che la (2.3) diventa

$$\sum_{|n| \geq \bar{n}} \frac{|e^{-2\pi i n h} - 1|^2}{1 + 4\pi n^2} + \sum_{|n| < \bar{n}} \frac{|e^{-2\pi i n h} - 1|^2}{1 + 4\pi n^2} \leq \epsilon + \epsilon \sum_{|n| < \bar{n}} \frac{1}{1 + 4\pi n^2} = \epsilon(1 + C).$$

Abbiamo quindi che se $h \to 0$ allora $||k_{x+h} - k_x||^2 \to 0$ da cui segue la tesi.

$\square$

Tale spazio ha una buona quantità di moltiplicatori.

Esempio 2.1. Consideriamo l'insieme

$$W^{1,\infty}([0,1]) = \Big\{ f \in L^\infty([0,1]) : \exists g \in L^\infty([0,1]) \text{ tale che}$$
$$\int_0^1 f\varphi' = -\int_0^1 g\varphi \ \ \forall \varphi \in C_c^1([0,1]) \Big\}.$$

Nello spazio di Sobolev $W^{1,2}([0,1])$ tutte le funzioni $W^{1,\infty}([0,1])$ sono moltiplicatori.
Presa $m \in W^{1,\infty}([0,1])$ e denotando

$$M_1 = \sup_{x\in[0,1]} |m(x)| \qquad\qquad M_2 = \sup_{x\in[0,1]} |m'(x)|$$

si ha che

$$\begin{aligned}
||mf||^2_{W^{1,2}} &= \int_0^1 \Big(m(x)^2 f(x)^2 + (m'(x)f(x) + m(x)f'(x))^2 \Big)\, dx \leq \\
&\leq C \int_0^1 \big(m(x)^2 f(x)^2 + m(x)^2 f'(x)^2 + m'(x)^2 f(x)^2 \big)\, dx \leq \\
&\leq C \int_0^1 \big(M_1 f(x)^2 + M_1^2 f'(x)^2 + M_2^2 f(x)^2 \big)\, dx \leq \\
&\leq C(M_1^2 + M_2^2) \int_0^1 \big(f(x)^2 + f'(x)^2 \big)\, dx = \\
&= C(M_1^2 + M_2^2)||f||^2_{W^{1,2}}.
\end{aligned}$$

Ciò vale qualunque sia $f \in W^{1,2}([0,1])$.

Tale insieme è però più piccolo dell'insieme dei moltiplicatori di $W^{1,2}$. Si veda a proposito [**MS**].

Capitolo 3

La distanza δ

3.1 Introduzione

Se H è un RKHS su X, vogliamo definire una metrica su X che rispecchi le proprietà delle funzioni di H. Un'idea è quella di considerare la distanza

$$\delta(x, y) = \sqrt{1 - \left| \left(\frac{k_x}{||k_x||}, \frac{k_y}{||k_y||} \right) \right|^2}. \tag{3.1}$$

Segue dalla definizione che questa distanza è normalizzata, ovvero assume valori compresi tra 0 e 1.

Tale scelta può essere motivata, ad esempio, dalla Proposizione 1.2.3 o anche dal fatto che la distanza $\delta(x, y)$ qui definita esprima

$$\delta(x, y) = \frac{\sup\{|f(y)| : f \in H, ||f|| = 1, f(x) = 0\}}{\sup\{|f(y)| : f \in H, ||f|| = 1\}}.$$

Oltre a ciò, $\delta(x, y)$ ci dice quanto i vettori $\hat{k_x}$ e $\hat{k_y}$ sono vicini all'essere paralleli. Infatti se θ è l'angolo tra i due, si ha che $\delta(x, y) = \sqrt{1 - \cos^2(\theta)} = |\sin(\theta)|$.

3.2 Il caso $W^{1,2}([0,1])$

Teorema 3.2.1. *Su $W^{1,2}([0,1])$ la distanza (3.1) diventa*

$$\delta(x,y) = \sqrt{1 - \frac{\cosh^2(1-\max(x,y))\cosh^2(\min(x,y))}{\cosh(x)\cosh(1-x)\cosh(y)\cosh(1-y)}}. \tag{3.2}$$

Dimostrazione. Siano $x, y \in [0,1]$. Prendiamo $0 \le y \le x \le 1$.

$$\begin{aligned}(k_x, k_y) &= \int_0^1 \left(k_x(\xi)k_y(\xi) + k_x'(\xi)k_y'(\xi)\right) d\xi = \\ &= u(x)v(y)\left[\int_0^y \left(v(\xi)^2 + v'(\xi)^2\right) d\xi\right] + u(x)v(y)\left[\int_y^x (v(\xi)u(\xi) + v'(\xi)u'(\xi))\, d\xi\right] + \\ &\qquad + u(x)v(y)\left[\int_x^1 \left(u(\xi)^2 + u'(\xi)^2\right) d\xi\right].\end{aligned} \tag{3.3}$$

Si osserva che

$$v(\xi)^2 + v'(\xi)^2 = c_0^2(\cosh(\xi)^2 + \sinh(\xi)^2) = c_0^2\cosh(2\xi),$$

e quindi una primitiva è

$$\frac{1}{2}c_0^2\sinh(2\xi).$$

In modo analogo si mostra che una primitiva di $u(\xi)^2 + u'(\xi)^2$ è

$$\frac{1}{2}c_0^2\sinh[2(1-\xi)].$$

Utilizzando le formule di somma del coseno iperbolico si mostra che

$$u(\xi)v(\xi) + u'(\xi)v'(\xi) = c_0^2\cosh(2\xi - 1),$$

una cui primitiva è

$$\frac{1}{2}c_0^2\sinh(2\xi - 1).$$

A questo punto, visto che $\sinh(0) = 0$ si ha che la (3.3) diventa

$$\frac{1}{2}c_0^2\Big\{u(x)u(y)\sinh(2y) + u(x)v(y)\Big[\sinh(2x-1) - \sinh(2y-1)\Big] + v(x)v(y)\sinh(2-2x)\Big\}. \tag{3.4}$$

Utilizzando il fatto che il seno iperbolico sia una funzione dispari, le sue formule di somma, considerando

$$\sinh(2x-1) = -\sinh(1-2x) = -\sinh(1-x+(-x)),$$

ricordando che

$$u'(x) = -\sinh(1-x),\ v'(x) = \sinh(x)$$

abbiamo:

$$\begin{aligned}
&\sinh(2x-1) - \sinh(2y-1) = \\
&= \sinh(1-y)\cosh(y) - \cosh(1-y)\sinh(y) - \sinh(1-x)\cosh(x) + \cosh(1-x)\sinh(x) = \\
&\qquad = \frac{1}{c_0^2}\Big(u(x)v'(x) + u'(x)v(x) - u'(y)v(y) - u(y)v'(y)\Big).
\end{aligned}$$

Usando questo ultimo risultato e le formule di duplicazione, la (3.4) diventa:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\Big\{2u(x)u(y)v'(y)v(y)+ \\
&\qquad + u(x)v(y)\Big[u(x)v'(x) + u'(x)v(x) - u'(y)v(y) - u(y)v'(y)\Big]+ \\
&\qquad\qquad - 2v(x)v(y)u(x)u'(x)\Big\} = u(x)v(y).
\end{aligned}$$

Abbiamo quindi mostrato che se $0 \le y \le x \le 1$, allora

$$(k_x, k_y) = u(x)v(y).$$

In modo analogo si prova che se $0 \le x \le y \le 1$, allora

$$(k_x, k_y) = u(y)v(x).$$

Vale quindi, in generale:

$$(k_x, k_y) = u(\max(x,y))v(\min(x,y)).$$

Calcoliamo ora $||k_x||$ e $||k_y||$:

$$\begin{aligned}||k_x||^2 &= u(x)^2\int_0^x \left(v(\xi)^2+v'(\xi)^2\right)d\xi + v(x)^2\int_x^1 \left(u(\xi)^2+u'(\xi)^2\right)d\xi =\\ &= \frac{1}{2}c_0^2u(x)^2\sinh(2x)+\frac{1}{2}c_0^2v(x)^2\sinh(2-2x) =\\ &= c_0^2\left(u(x)^2\frac{v'(x)}{c_0}\frac{v(x)}{c_0} - \frac{v(x)^2u'(x)u(x)}{c_0^2}\right) =\\ &= u(x)v(x)\Big(u(x)v'(x)-v(x)u'(x)\Big) =\\ &= u(x)v(x).\end{aligned}$$

Per quest'ultimo conto sono tornati utili i risultati precedentemente ottenuti. Da qui arriviamo alla formulazione della distanza δ voluta:

$$\delta(x,y)=\sqrt{1-\frac{u(\max(x,y))^2\,v(\min(x,y))^2}{u(x)v(x)u(y)v(y)}},$$

da cui segue la (3.2). □

Corollario 3.2.2. *Per $h\to 0$ la distanza (3.2) tra x e $x+h$ è pari a*

$$\delta(x,x+h)\sim\sqrt{\frac{|h|\sinh(1)}{\cosh(1-x)\cosh(x)}}. \tag{3.5}$$

Dimostrazione. Basta sostituire nella (3.2) $x+h$ ($h>0$) al posto di y e usare lo sviluppo di Taylor al primo ordine, ottenendo così

$$\sqrt{\frac{h\sinh(1)}{\cosh(1-x)\cosh(x)}}.$$

Se invece si considera $x+h$ con $h<0$, allora si ottiene

$$\sqrt{\frac{-h\sinh(1)}{\cosh(1-x)\cosh(x)}}.$$

Mettendo insieme i due risultati otteniamo la tesi. □

Il grafico in Figura 3.1 è quello della funzione δ vista come funzione di due variabili, mentre quelli in Figura 3.2 sono grafici della funzione descritta in (3.5) a x fissato.

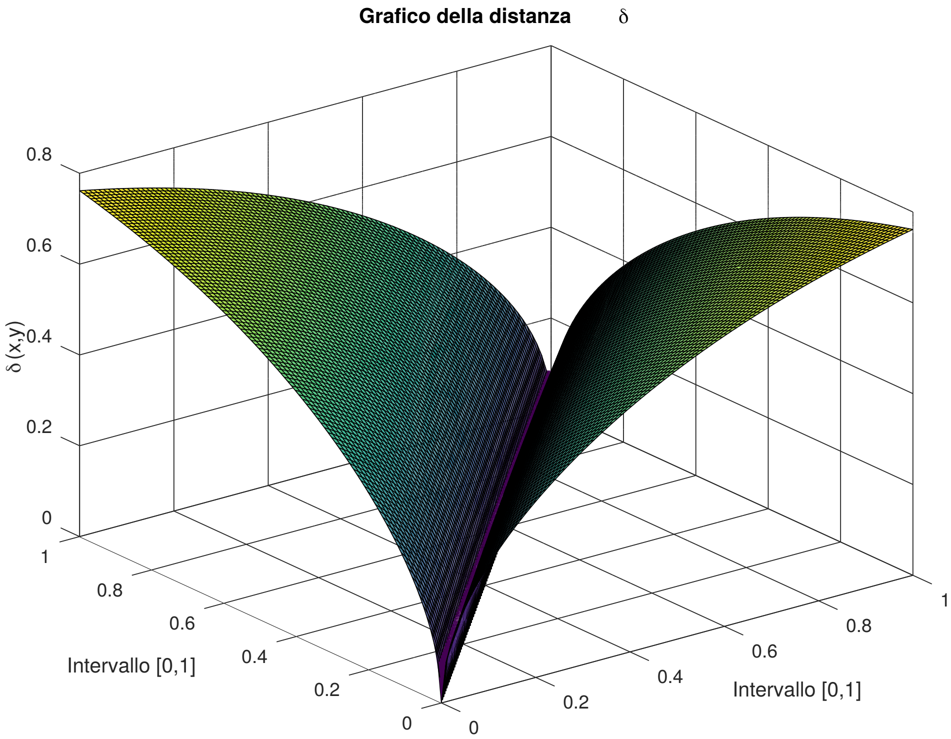

Figura 3.1: La distanza δ.

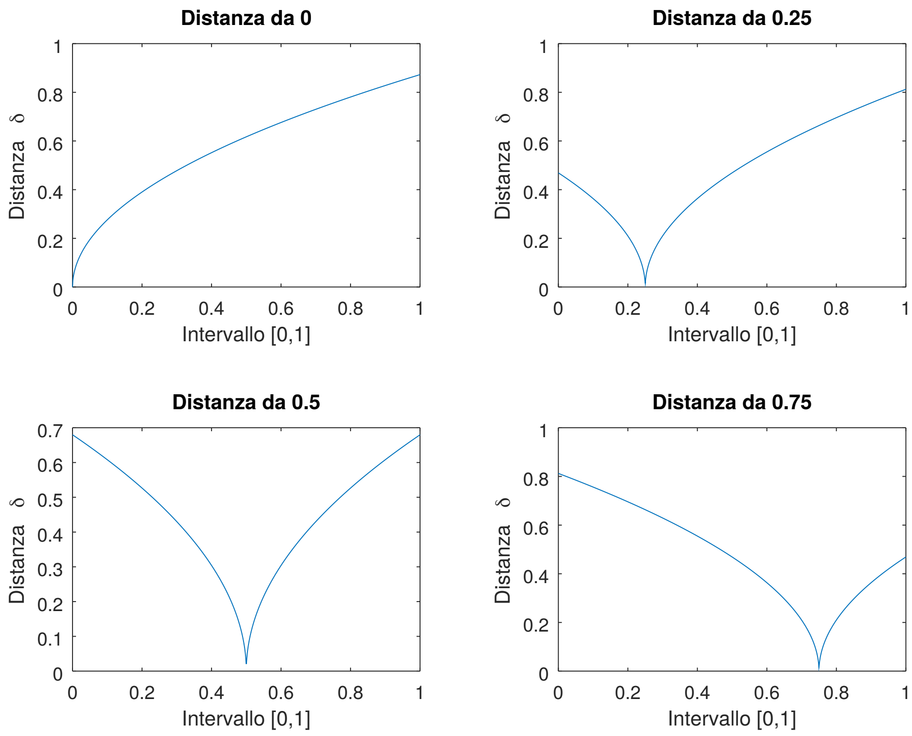

Figura 3.2: La distanza δ nella versione "infinitesimale" al variare di x fissato.

Capitolo 4

Proprietà di Pick

Il problema di Pick originale è quello di determinare, dati n punti $z_1, \dots, z_n$ nell'insieme $\mathbb{D}$ e n numeri complessi $a_1, \dots, a_n$, sotto quali ipotesi esiste una funzione olomorfa $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ tale che

$$\phi(z_i) = a_i, \qquad n = 1, \dots, n. \tag{4.1}$$

Una condizione necessaria e sufficiente è stata data da G. Pick nel 1916, in un articolo pubblicato nei *Mathematische Annalen*. Il problema posto non è di semplice risoluzione, per quanto la sua formulazione lo sia.
Intenzione di questo capitolo non è quella di riproporre la risoluzione data da Pick, ma di mostrare che tale proprietà (o comunque una sua variante) è propria anche dello spazio $W^{1,2}$.

4.1 Problema di Pick, caso $n = 2$

Può essere interessante, oltre che utile, iniziare il discorso risolvendo una versione "semplificata" del problema di Pick, ovvero trattando il caso $n = 2$.
La soluzione risulta essere una conseguenza del seguente lemma.

Lemma 4.1.1 (di Schwarz). *Sia $f : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$ una funzione olomorfa tale che $f(0) = 0$, allora valgono:*

- $|f(z)| \leq |z| \; \forall z \in \mathbb{D}$

- $|f'(0)| \leq 1$.

Inoltre se esiste $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ *tale che* $|f(z_0)| = |z_0|$ *oppure* $|f'(0)| = 1$, *allora*

$$f(z) = az \qquad |a| = 1.$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & \text{se } z \neq 0 \\ f'(0) & \text{se } z = 0. \end{cases}$$

Tale funzione è olomorfa su $\mathbb{D}$, possiamo quindi utilizzare il Principio del massimo. Sulla circonferenza $|z| = r < 1$, abbiamo che $|g(z)| \leq \frac{1}{r}$ da cui segue che $|g(z)| \leq \frac{1}{r}$ se $|z| \leq r$. Se facciamo tendere r a 1, otteniamo che $|g(z)| \leq 1 \; \forall z \in \mathbb{D}$, ovvero, per come è definita g,

$$\begin{aligned} &|f(z)| \leq |z| \qquad \forall z \in \mathbb{D} \\ &|f'(0)| \leq 1. \end{aligned}$$

Se esiste z_0 tale che $|f(z_0)| = |z_0|$ oppure $|f'(0)| = 1$, che significa $g(z_0) = 1$, allora, sempre per il Principio del massimo, $g(z)$ è costante e di conseguenza

$$f(z) = az \qquad \text{con } |a| = 1.$$

□

Generalizziamo ora il lemma, non chiedendo per forza che f fissi lo 0.

Lemma 4.1.2. *Sia* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *olomorfa, allora* $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{D}$

$$\left| \frac{f(z_2) - f(z_1)}{1 - \overline{f(z_1)} f(z_2)} \right| \leq \left| \frac{z_2 - z_1}{1 - \overline{z_1} z_2} \right| \tag{4.2}$$

e qualunque sia $z \in \mathbb{D}$

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Dimostrazione. Fissiamo z_1 e consideriamo le trasformazioni di Möbius

$$M(z) = \frac{z_1 - z}{1 - \overline{z_1} z} \qquad \varphi(z) = \frac{f(z_1) - z}{1 - \overline{f(z_1)} z},$$

che risultano essere invertibili. Inoltre l'applicazione $\varphi \circ f \circ M^{-1}$ manda $\mathbb{D}$ in se stesso e fissa 0, in quanto $M(z_1) = 0$. Possiamo quindi applicare il lemma di Schwarz, da cui segue che

$$\left|\varphi(f(M^{-1}(z)))\right| = \left|\frac{f(z_1) - f(M^{-1}(z))}{1 - \overline{f(z_1)} f(M^{-1}(z))}\right| \leq |z|.$$

Sia ora $z_2 = M^{-1}(z)$, abbiamo quindi

$$\left|\frac{f(z_2) - f(z_1)}{1 - \overline{f(z_1)} z_2}\right| \leq \left|\frac{z_2 - z_1}{1 - \overline{z_1} z}\right|.$$

Rimane da provare la seconda disuguaglianza, che può essere ottenuta facilmente moltiplicando a destra e a sinistra della (4.2) per $\left|\frac{1}{z_2 - z_1}\right|$ e facendo tendere z_2 a z_1. □

4.2 Dal problema di Pick alla proprietà di Pick

Il problema originario, quindi, chiede sotto quali condizioni esiste una funzione di H^∞ con norma minore di 1. Come abbiamo già visto, H^∞ è lo spazio dei moltiplicatori di H^2. Ciò ci porta a considerare altri spazi di Hilbert a nucleo riproducente e i loro moltiplicatori.

Dato un RKHS H su un insieme X, dati $x_1, \ldots, x_n \in X$ e $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{D}$, ci chiediamo se esiste $m \in Mult(H)$ con $||m|| \leq 1$ tale che

$$m(x_i) = a_i, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{4.3}$$

Osservazione 7. Supponiamo ora che un tale m esista e vediamo cosa ciò implica.

Sia $M_m : H \to H$ il relativo operatore di moltiplicazione e supponiamo

$||M_m|| \leq 1$ (ciò implica $||m|| \leq 1$). Sappiamo che $||M_m^*|| = ||M_m|| \leq 1$, di conseguenza se mi restringo a $span\{k_{x_1}, \dots, k_{x_n}\}$ ottengo

$$\left\| M_m^* \sum_{i=1}^{n} c_i k_{x_i} \right\|^2 \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} c_i k_{x_i} \right\|^2. \tag{4.4}$$

Sappiamo che $M_m^* k_{x_i} = \overline{m(x_i)} k_{x_i} = \overline{a_i} k_{x_i}$, di conseguenza

$$\left\| M_m^* \sum_{i=1}^{n} c_i k_{x_i} \right\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^{n} c_i \overline{a_i} k_{x_i} \right\|^2 = \sum_{i+j=n} c_i \overline{c_j} a_i \overline{a_j} k_{x_i}(x_j)$$

e in modo analogo

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} c_i k_{x_i} \right\|^2 = \sum_{i+j=n} c_i \overline{c_j} k_{x_i}(x_j).$$

A questo punto la (4.4) diventa

$$\sum_{i+j=n} c_i \overline{c_j} k_{x_i}(x_j)(1 - a_i \overline{a_j}) \geq 0,$$

ovvero

$$[(1 - a_i \overline{a_j}) k_{x_i}(x_j)]_{i,j=1}^{n} \geq 0. \tag{4.5}$$

Ricapitolando, abbiamo mostrato che, se esiste un moltiplicatore m come richiesto, allora vale la (4.5). Tale condizione risulta quindi essere necessaria all'esistenza di m. Ciò ci porta alla seguente definizione.

Definizione 4.1. Sia H un RKHS su un insieme X, diciamo che H ha la proprietà di Pick se la condizione (4.5) è sufficiente all'esistenza di $m \in Mult(H)$ come nella (4.3).

4.3 Proprietà di Pick completa

Vogliamo ora estendere la proprietà descritta nella sezione precedente, sostituendo ai valori $a_1, \dots, a_n$ delle matrici, o meglio degli operatori.

Siano E_1 e E_2 spazi di Hilbert di dimensione, rispettivamente, t e s, e consideriamo lo spazio $\mathcal{L}(E_1, E_2)$. Se t ed s sono entrambi finiti, gli operatori sono in realtà matrici $M_{s\times t}$; in caso contrario possiamo sempre visualizzarle come matrici infinite, ma queste devono essere tali da rappresentare degli operatori limitati. A questo punto, invece che dei numeri complessi $a_1, \ldots, a_n$, scegliamo degli operatori $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$.

Se H è un RKHS, il problema sta ora nel trovare un moltiplicatore interpolante, $\Phi \in Mult(H \otimes E_1, H \otimes E_2)$ con $||\Phi|| \leq 1$ tale che

$$\Phi(x_i) = A_i, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{4.6}$$

Anche considerando degli operatori si ha che una condizione necessaria all'esistenza di Φ è che la matrice

$$\big[(I_{E_2} - A_i A_j^*) k_{x_i}(x_j)\big]_{i,j=1}^n \tag{4.7}$$

sia semidefinita positiva. (Per una dimostrazione si consulti [**AM**]).

Osservazione 8. La matrice (4.7) è una matrice $n \times n$ con gli elementi che sono funzioni di $\mathcal{L}(E_2)$. Dire che è semidefinita positiva, significa chiedere che, qualunque siano $v_1, \ldots, v_n$ vettori in E_2, si ha

$$\sum_{i,j=1}^{n} ((I_{E_2} - A_i A_j^*) v_j, v_i) k_{x_i}(x_j) \geq 0.$$

Ciò ci porta alle due seguenti definizioni.

Definizione 4.2. Sia H un RKHS su un insieme X con nucleo $\{k_x\}_{x\in X}$, diciamo che H ha la Proprietà di Pick $M_{s\times t}$ se qualunque siano $x_1, \ldots, x_n \in X$ e $A_1, \ldots, A_n$ matrici $s \times t$ tali che

$$\big[(I - A_i A_j^*) k_{x_i}(x_j)\big]_{i,j=1}^n \geq 0,$$

allora esiste Φ nella palla unitaria chiusa di

$$Mult(H \otimes \mathbb{C}^t, H \otimes \mathbb{C}^s)$$

tale che $\Phi(x_i) = A_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Definizione 4.3. Sia H un RKHS su un insieme X con nucleo $\{k_x\}_{x\in X}$, diciamo che H ha la proprietà di Pick completa se ha la proprietà di Pick $M_{s\times t}$ qualunque siano s e t naturali.

Queste ultime definizioni possono sembrare ad un primo sguardo ulteriori complicazioni fatte al solo fine di voler generalizzare il più possibile la proprietà studiata. Così non è, in quanto la proprietà di Pick completa è molto più semplice da caratterizzare delle altre due prima definite.
Per fare ciò abbiamo però bisogno di introdurre un tipo di prodotto tra matrici diverso da quello classico e una proprietà che alcuni nuclei di RKHS possono avere.

Definizione 4.4. Siano A, B matrici $n \times n$, il prodotto di Schur tra A e B è definito come

$$(A \cdot B)_{ij} = A_{ij}B_{ij}$$

Teorema 4.3.1 (del prodotto di Schur)**.** *Se A e B sono due matrici $n \times n$ semidefinite positive, allora anche $A \cdot B$ lo è.*

Definizione 4.5. Un nucleo $\{k_x\}_{x\in X}$ di un RKHS H su un insieme X è detto irriducibile se

1. Qualunque siano $x, y \in X$ distinti si ha che k_x e k_y sono linearmente indipendenti.
2. Qualunque siano $x, y \in X$, $k(x, y)$ non è mai zero.

Teorema 4.3.2 (di McCullough-Quiggin)**.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché un RKHS con nucleo k irriducibile abbia la proprietà di Pick completa è che, per ogni insieme finito $\{x_1, \ldots, x_n\}$ di n distinti elementi di X, la matrice $(n-1) \times (n-1)$*

$$F_n = \left[1 - \frac{k_{in}k_{nj}}{k_{ij}k_{nn}}\right]_{i,j=1}^{n-1} \tag{4.8}$$

dove $k_{ij} = k_{x_i}(x_j)$, sia semidefinita positiva.

Per una dimostrazione si consulti [**AM**].
Da questo teorema segue un'altra caratterizzazione che sarà quella poi utilizzata per mostrare (spoiler alert!) che $W^{1,2}$ ha la proprietà di Pick completa.

Teorema 4.3.3. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un RKHS con nucleo k irriducibile abbia la proprietà di Pick completa è che, per ogni insieme di punti distinti $x_1, \ldots, x_n \in X$, la matrice*

$$L_n = \left[\frac{1}{k_{ij}}\right]_{i,j=1}^{n}$$

abbia esattamente un autovalore positivo (contando la molteplicità).

Per dimostrare ciò abbiamo bisogno del seguente lemma.

Lemma 4.3.4. *Una qualunque matrice simmetrica che può essere decomposta come*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix}$$

con C invertibile è congruente a

$$\begin{pmatrix} A - BC^{-1}B^* & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Dimostrazione. Segue dal fatto che

$$\begin{pmatrix} I & -BC^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -C^{-1}B^* & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BC^{-1}B^* & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

□

Dimostrazione del Teorema 4.3.3. Per il Lemma 4.3.4, la matrice L_n è congruente a

$$\left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{k_{ij}} - \frac{k_{nn}}{k_{in}k_{nj}} & 0 \\ & \\ \hline 0 & \frac{1}{k_{nn}} \end{array}\right). \tag{4.9}$$

Il blocco in alto a sinistra è il prodotto di Schur di F_n con la matrice di rango 1 definita negativa

$$-\frac{k_{nn}}{k_{in}k_{nj}},$$

da ciò segue che L_n ha un autovalore positivo se e solo se F_n è semidefinita positiva. □

4.4 $W^{1,2}$ ha la proprietà di Pick completa

Il nucleo di $W^{1,2}$ per come definito in (2.1) è un nucleo irriducibile. Abbiamo ora tutti gli strumenti, o quasi, per dimostrare che $W^{1,2}([0,1])$ ha la proprietà di Pick completa, ci manca infatti un ultimo lemma.

Lemma 4.4.1. *Sia A una matrice $n \times n$ autoaggiunta, con tutti gli elementi della diagonale positivi. Supponiamo inoltre che*

$$\operatorname{sign}(\det[A_{ij}]_{i,j=1}^{k}) = (-1)^{k+1}, \qquad 1 \leq k \leq n. \tag{4.10}$$

Allora A ha esattamente un autovalore positivo.

Dimostrazione. Procediamo per induzione su n. Se $n = 1$, la tesi è ovvia, supponiamo quindi sia vera per $n-1$.

Indichiamo con A_{n-1} la sottomatrice principale di A.
Consideriamo $\det(A)$ come una funzione di a_{nn}. Se n è dispari, allora per la (4.10), il determinante di A crescerà al diminuire di a_{nn}. Visto che il determinante di A è positivo, A rimarrà invertibile per a_{nn} che tende a $-\infty$. Si ha quindi sviluppando il determinante

$$\det(A) = a_{nn}\det(A_{n-1}) + \ldots > 0$$

Quando a_{nn} è abbastanza negativo, il contributo di $a_{1n}, \ldots, a_{n-1n}$ diventa pressoché nullo, di conseguenza la matrice in cui tali valori sono zero (e di conseguenza anche $a_{n1}, \ldots, a_{nn-1}$, essendo la matrice simmetrica) è congruente alla matrice di partenza. Ciò significa che il numero di autovalori negativi, positivi e nulli non cambia. Essendo a_{nn} a questo punto negativo, e avendo operato solo trasformazioni su A che hanno esclusivamente cambiato ultima riga e colonna e conservato l'inerzia, abbiamo che la matrice finale ha un autovalore negativo in più rispetto alla matrice A_{n-1}. Da ciò segue che, se per ipotesi induttiva A_{n-1} ha un solo autovalore positivo, per A vale lo stesso.

Se n è pari, facendo sempre tendere a_{nn} a $-\infty$ si ha che il determinate rimane negativo. A questo punto si può ripetere l'argomento precedente. □

Teorema 4.4.2. *Lo spazio di Sobolev* $W^{1,2}([0,1])$ *ha la proprietà di Pick completa.*

Dimostrazione. Per il Teorema 4.3.3 e per il Lemma 4.4.1 è sufficiente mostrare che per un qualunque insieme di punti $x_1, \dots, x_n$ in $[0,1]$ il determinante di

$$\left[\frac{1}{k(x_i, x_j)}\right]_{i,j=1}^{n} \tag{4.11}$$

abbia segno $(-1)^{n+1}$.

Senza perdere di generalità, possiamo assumere che $x_1 \leq \ldots \leq x_n$. In riferimento a (2.1) scriveremo u_i e v_j per $u(x_i)$ e $u(x_j)$ rispettivamente. Siano poi A_n la matrice (4.11) e A_{n-1} la matrice ottenuta togliendo da A_n la prima riga e la prima colonna, si ha quindi che

$$A_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{u_1v_1} & \frac{1}{u_1v_2} & \frac{1}{u_1v_3} & \cdots & \frac{1}{u_1v_n} \\ \frac{1}{u_1v_2} & \frac{1}{u_2v_2} & \frac{1}{u_2v_3} & \cdots & \frac{1}{u_2v_n} \\ \frac{1}{u_1v_3} & \frac{1}{u_2v_3} & \frac{1}{u_3v_3} & \cdots & \frac{1}{u_3v_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{u_1v_n} & \frac{1}{u_2v_n} & \frac{1}{u_3v_n} & \cdots & \frac{1}{u_nv_n} \end{pmatrix}.$$

Sviluppiamo ora il determinante di A_n lungo la prima colonna. Il primo termine è $\frac{1}{u_1v_1}$ moltiplicato per $\det(A_{n-1})$. Il secondo termine è $\frac{-1}{u_1v_2}$ volte il determinante della matrice ottenuta da A_{n-1} moltiplicando la prima riga per $\frac{u_2}{u_1}$. I termini rimanenti sono tutti zero, in quanto determinanti di matrici la cui prima riga è $\frac{u_2}{u_1}$ volte la seconda. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}\det(A_n) &= \frac{1}{u_1 v_1}\det(A_{n-1}) - \frac{u_2}{u_1^2 v_2}\det(A_{n-1}) \\ &= \left[1 - \left(\frac{u_2}{v_2}\right) / \left(\frac{u_1}{v_1}\right)\right]\left[\frac{1}{u_1 v_1}\right][\det(A_{n-1})] .\end{aligned}$$

Il primo termine è negativo, in quanto $\frac{u}{v}$ è monotona crescente nell'intervallo $[0,1]$, e il secondo termine è positivo, di conseguenza abbiamo

$$\operatorname{sign}(\det(A_n)) = -\operatorname{sign}(\det(A_{n-1})).$$

Concludiamo quindi per induzione che $\operatorname{sign}(\det(A_n)) = (-1)^{n+1}$. $\square$

Bibliografia

[**AF**] Adams, R.; Fournier, J.J. *Sobolev Spaces.* Academic Pess, 2003, p.67.

[**AM**] Agler, J.; McCarthy, J.E. *Pick Interpolation and Hilbert Function Spaces.* American Mathematical Society, 2002, pp.24; 44; 56-58; 81; 86-87; 91-93.

[**ARSW**] Arcozzi, N.; Rochberg, R.; Sawyer, E.; Wick, B.D. *Distance Functions for Reproducing Kernel Hilbert Spaces.* American Mathematical Society, 2010, pp.5-6.

[**MS**] Maz'ya, V.G.; Shaposhnikova, T.O. *Theory of Sobolev Multipliers.* Springer, 2009.

[**RS**] Reed, M.; Simon, B. *Methods of Modern Mathematical Physics. I: Functional Analysis.* Academic Press, 1980, pp.43; 49-52.