

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Introduzione alla Teoria Quantistica dei Campi:

Spazi di Fock e il modello $P(\varphi)_2$

Relatore:
Chiar.mo Prof.
André Martinez

Presentata da:
Alessandro Benedetti

Sessione Unica
Anno Accademico 2018-2019

Sommario

La QFT è una teoria nata in ambito fisico per risolvere alcune problematiche della teoria quantistica delle particelle, dando risultati sorprendenti. Nasce come teoria effettiva a cui fu successivamente necessario dare un rigore matematico. In generale le strutture matematiche teorizzate non risultano adeguate a modellare un ampio spettro di sistemi fisici. Esistono tuttavia dei modelli “giocattolo” perfettamente coerenti per i quali sono stati creati strumenti molto interessanti ed efficaci, come ad esempio gli spazi di Fock. In questa tesi oltre a una presentazione dettagliata degli spazi di Fock verrà descritto uno esempio non banale della loro applicazione: il modello interattivo e ristretto ad una sola dimensione spaziale $P(\varphi)_2$.

Indice

1	Basi di teoria quantistica dei campi	4
1.1	Perché una teoria quantistica dei campi?	4
1.2	Assiomi della meccanica quantistica	5
1.3	Principi fisici	6
1.4	Assiomi di Wightman	7
2	Spazi di Fock	9
2.1	Perché studiare gli spazi di Fock?	9
2.2	Gruppo di permutazione e stati di un sistema di particelle indistinguibili	12
2.3	Spazi di Fock	13
2.4	Operatori di creazione e annichilazione	15
3	Il modello $P(\varphi)_2$	21
3.1	Quantizzazione di un campo libero scalare	22
3.2	Il modello $P(\varphi)_2$	23
A		27
A.1	Operatori lineari	27
A.2	Distribuzioni	28

Prefazione

La presente tesi si pone come principale obiettivo quello d'illustrare alcuni dei concetti e degli strumenti di base per la costruzione di un formalismo matematico nell'ambito della teoria quantistica dei campi non perturbativa.

Questa teoria quantistica scaturì dalla necessità di risolvere problematiche della meccanica quantistica legate principalmente a una visione solo particellare dei sistemi, venne perciò naturale cercare d'integrare la meccanica quantistica con la teoria classica dei campi. Nacque e si sviluppò come una teoria effettiva, senza che ci fosse particolare attenzione al rigore matematico. Nonostante ciò, si rivelò un teoria estremamente prolifica e portò alla formalizzazione negli anni '70 del cosiddetto "Modello Standard", una teoria che descrive tre delle quattro forze fondamentali della natura e classifica tutte particelle elementari conosciute.

Allo stato attuale dell'arte non esiste un formalismo matematico generale per fondare una teoria quantistica dei campi non perturbativa, nella quale viene eliminata l'approssimazione ad intorni infinitesimi della teoria libera. Tuttavia, molti tentativi furono fatti per creare un sistema di assiomi su cui costruire una teoria rigorosa. Ognuno dei quali però si rivelò applicabile solo ad esempi particolarmente semplici, come teorie di campi liberi (privi d'interazioni) o in dimensione spaziotemporali ridotte.

La ricerca di un formalismo per una teoria oramai ampiamente sviluppata in fisica, come è appunto la teoria quantistica dei campi, è in genere un compito lungo e arduo, tuttavia i risultati che potrebbero essere ottenuti avrebbero grandi benefici sulla comprensione della teoria stessa. In primo luogo, permetterebbe di slegare la teoria fisica dalla sua interpretazione evidenziando la struttura matematica sottostante su cui svolgere i propri calcoli. Secondariamente, l'inquadramento all'interno del mondo matematico permetterebbe una maggiore chiarezza, favorendo una comprensione più profonda della teoria, spunti per gli sviluppi futuri e un più facile approccio alla teoria. Infine, sarebbe possibile dare "legittimità matematica" alle approssimazioni che vengono solitamente fatte in fisica per modellare il mondo reale, processo che è inerentemente approssimato.

Outline La presente tesi è divisa in 3 capitoli e 1 appendice.

Nel primo capitolo verranno presentate le basi della teoria quantistica dei campi, esaminando quali furono le necessità che portarono alla sua teorizzazione e quali furono le

“correzioni” applicate alla meccanica quantistica per integrarla con la relatività speciale.

Il secondo e principale capitolo introduce gli spazi di Fock. Verrà data una breve spiegazione del ruolo che essi svolgono all’interno della teoria quantistica dei campi e successivamente verranno definiti formalmente e si dimostreranno le principali proprietà. Di particolare interesse saranno gli operatori di creazione e annichilazione a cui verrà dedicata la sezione conclusiva del capitolo.

Nel terzo e ultimo capitolo verranno presentati brevemente due modelli matematici di sistemi quantistici. Il primo di un campo scalare libero e il secondo del cosiddetto modello $P(\varphi)_2$, nel quale viene introdotta un’interazione. Di questi due esempi verrà descritta la costruzione e alcune proprietà significative.

L’appendice contiene i risultati matematici che pur esulando dall’argomento principale della tesi verranno utilizzati al suo interno. Si presenta come un glossario di definizioni, proposizioni e teoremi circa gli operatori lineari su spazi di Hilbert e le distribuzioni, usualmente insegnate nei corsi di analisi avanzata.

Note bibliografiche Nella stesura dell’introduzione si è seguito principalmente [Attb] per la descrizione degli assiomi della meccanica quantistica e [Ran15] per la parte relativa agli assiomi di Wightman. Per la descrizione della quantizzazione canonica ci si è ispirati a [Fra18] e [Attc]. Per quanto riguarda la descrizione degli spazi di Fock e la loro formalizzazione matematica si è seguito il paper [Shc13]. Infine, per l’ultimo capitolo ci si è basati sull’ultima parte di [DG13] e sul articolo di approfondimento [DG00].

Capitolo 1

Basi di teoria quantistica dei campi

Cominciamo con una rapida trattazione delle basi della teoria quantistica dei campi, esaminando le motivazioni che hanno portato alla sua introduzione e analizzando gli assiomi su cui fondarla, dandone in modo informale una spiegazione fisica.

1.1 Perché una teoria quantistica dei campi?

La teoria quantistica dei campi, successivamente abbreviata in QFT (*quantum field theory*), è l'applicazione di una teoria quantistica ai sistemi dinamici di *campi*, seguendo un procedimento di quantizzazione simile a quello applicato in meccanica quantistica ai sistemi di particelle. Un campo è una grandezza fisica che associa ad ogni punto dello spaziotempo un valore scalare, vettoriale, tensoriale a seconda della natura del campo. La caratteristica principale di un campo è che esso possiede un numero infinito di gradi di libertà.

Ci si potrebbe chiedere quale sia la necessità di introdurre questa nuova teoria, abbandonando in particolare una visione esclusivamente particellare dei sistemi. Le motivazioni di tale interesse sono molteplici. Innanzitutto si era interessati a trovare una generalizzazione della teoria classica dei campi, che ebbe la sua massima espressione nella teoria del campo elettromagnetico di Maxwell, immergendola nel mondo quantistico. A ciò si aggiungono i fallimenti della meccanica quantistica delle particelle nel tener conto dei fenomeni relativistici di creazione e di annichilazione di particelle osservabili tramite esperimenti, che invece risultano integrabili facilmente in una teoria dei campi. Infine, anche una teoria relativistica di particelle quantistiche (RQM) presenta dei problemi, violando in particolare il principio di causalità. Infatti, vi è una probabilità non nulla che particelle localizzate in un determinato punto dello spazio in un certo tempo t_0 si trovino negli istanti successivi fuori dal cono luce. Riassumendo, la QFT nasce dalla necessità di creare una teoria coerente sia con la meccanica quantistica che con la relatività speciale. Prende le mosse dalla teoria classica dei campi, incapace di spiegare proprietà

quantistiche dei sistemi, e la trasporta nel mondo quantistico tramite un processo di quantizzazione. Per un'introduzione approfondita si veda, per esempio, [SP95].

1.2 Assiomi della meccanica quantistica

Elenchiamo il sistema di assiomi della meccanica quantistica che vengono solitamente utilizzati. Alla fine di questo capitolo esso verrà modificato e porterà alla definizione di un classico sistema di assiomi per la QFT: gli assiomi di Wightman.

Ricordiamo prima la definizione di misura spettrale.

Definizione 1.1. (Misura Spettrale) Sia (Ω, \mathcal{F}) un insieme misurabile e \mathcal{H} uno spazio di Hilbert. Denotiamo con $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ l'insieme dei proiettori ortogonali di \mathcal{H} . Una misura spettrale a valori in \mathcal{H} su (Ω, \mathcal{F}) è una mappa:

$$\begin{aligned}\xi : \mathcal{F} &\rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{H}) \\ E &\mapsto \xi(E)\end{aligned}$$

che soddisfi:

$$(i) \quad \xi(\Omega) = I,$$

$$(ii) \quad \xi(\cup_n E_n) = \sum_n \xi(E_n), \text{ per ogni successione } (E_n) \text{ di insiemi disgiunti.}$$

Definizione 1.2. (Assiomi della meccanica quantistica) Assumiamo che valgano i seguenti assiomi:

- (i) Lo spazio dei possibili stati di un sistema è uno spazio di Hilbert separabile. Gli stati sono le classi di equivalenza, costituite da vettori di \mathcal{H} che sono tra loro proporzionali. Uno rappresentante normalizzato di una classe di equivalenza viene chiamato **funzione d'onda** solitamente indicato da $\Psi \in \mathcal{H}$;
- (ii) I differenti **osservabili**, ossia le quantità fisiche misurabili di un sistema, sono rappresentate da operatori lineari autoaggiunti su \mathcal{H} . L'insieme dei valori che un osservabile \mathcal{O} può assumere è il suo spettro $\sigma(\mathcal{O})$;
- (iii) Il risultato di una misurazione di un osservabile è casuale, l'unica informazione disponibile è la distribuzione di probabilità del risultato, ottenuta dalla seguente legge:

$$\mathbb{P}(X \in A) = \|\xi_X(A)\Psi\|,$$

dove A è un boreliano di \mathbb{R} e ξ_X è la misura spettrale associata all'osservabile X . Inoltre, dopo aver misurato un risultato in A lo stato del sistema viene proiettato sull'autospazio generato da A , ossia:

$$\Psi' = \frac{\xi_X(A)\Psi}{\|\xi_X(A)\Psi\|};$$

(iv) In ogni sistema esiste un osservabile H chiamato **Hamiltoniano** che rappresenta l'energia totale del sistema e descrive l'evoluzione di esso secondo l'**equazione di Schrödinger**:

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H\Psi \quad (1.1)$$

(cioè $\Psi_t = e^{-itH}\Psi_0$, in cui l'esponenziale è definito tramite il teorema spettrale)

1.3 Principi fisici

Come ogni teoria matematica della fisica, la QFT deve inevitabilmente essere coerente con i principi fisici, in questo caso sia relativistici che non. Verranno quindi esposti come i concetti di località spaziale, microcausalità e Poincaré-invarianza vengono integrati nella QFT. Per semplicità nel resto del capitolo i concetti saranno esposti in modo informale e in particolare gran parte delle espressioni saranno imprecise, per tale motivo verrà usato il simbolo \approx . Una presentazione più rigorosa di alcuni dei concetti introdotti nel seguito verrà fatta nel capitolo seguente.

Località tramite prodotti tensoriali Introduciamo il concetto di località spaziale considerando dapprima un esempio elementare nello spazio \mathbb{R}^3 . Consideriamo un sistema fisico con due sottosistemi A e B , intendendo per sottosistema un sottoinsieme dello spazio che sia “locale” ad un osservatore che vi si trova all'interno, nel senso che tale osservatore avrà accesso solo agli osservabili del proprio sottosistema. Associamo ad ogni sottosistema uno spazio di Hilbert \mathcal{H}_A , \mathcal{H}_B e utilizziamo lo spazio $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ per modellare il sistema generale. In questo modo un osservabile \mathcal{O}_A del sottosistema A può essere visto come $\mathcal{O}_A \otimes I$ nel sistema intero, che per definizione di prodotto tensoriale non modificherà lo stato del sistema B e agirà su A indipendentemente dallo stato di B .

Estremizzando questo esempio potremmo pensare di associare ad ogni punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}_{\mathbf{x}}$ con una base $\{|z\rangle_{\mathbf{x}}, z \in \mathbb{R}\}$ costituita da un “continuo di elementi” e porre come spazio del sistema, ignorando le difficoltà di un prodotto tensoriale indicizzato da un insieme non numerabile

$$\mathcal{H} \approx \bigotimes_{\mathbb{R}^3} \mathcal{H}_{\mathbf{x}}, \text{ con} \quad (1.2)$$

$$\mathcal{H}_{\mathbf{x}} \approx \text{span}(\{|z\rangle_{\mathbf{x}}, z \in \mathbb{R}\}) \approx L^2(\mathbb{R})$$

Immaginando di lavorare nella rappresentazione di Schrödinger, in cui gli osservabili sono indipendenti dal tempo, possiamo coerentemente pensare un osservabile $\mathcal{O}_{\mathbf{x}}: \mathcal{H}_{\mathbf{x}} \rightarrow \mathcal{H}_{\mathbf{x}}$ come un osservabile locale $\mathcal{O}'_{\mathbf{x}}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, definendolo come $\mathcal{O}'_{\mathbf{x}} = \bigotimes_{x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{x}\}} I \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{x}}$.

Microcausalità e invarianza relativistica Dopo aver introdotto la località spaziale, poniamoci ora all'interno dello spaziotempo \mathbb{R}^4 . Possiamo in modo analogo al paragrafo precedente definire un concetto di località spaziotemporale e parlare di osservabili locali ad un punto $x = (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^4$. L'immersione nello spaziotempo, inerentemente relativistico, pone nuovi problemi di coerenza come la microcausalità e l'invarianza rispetto al gruppo di Poincaré.

Per microcausalità si intende che operazioni svolte da un osservatore locale non possono influenzare l'esito di misurazioni effettuate in una regione *spacelike-separated*. Diciamo che due regioni B_1, B_2 sono *spacelike-separated* se per ogni $x_1 = (t_1, \mathbf{x}_1) \in B_1, x_2 = (t_2, \mathbf{x}_2) \in B_2$ si ha che $(x_1 - x_2)$ è *spacelike*, cioè i due punti distano più nello spazio che nel tempo, formalmente

$$(c(t_1 - t_2))^2 < \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_{\mathbb{R}^3}^2.$$

In altre parole il principio di microcausalità ci dice che le informazioni sullo svolgimento di una operazione non possono viaggiare più velocemente della luce. La microcausalità si formalizza matematicamente con questa asserzione:

$$[\mathcal{O}_x, \mathcal{O}_{x'}] = 0 \text{ per ogni } (x - x') \text{ spacelike,}$$

che indica la possibilità di misurazioni di osservabili effettuate in due punti *spacelike-separated* di commutare in quanto non interferiscono le une con le altre.

L'invarianza relativistica è il principio fisico secondo cui osservatori in diversi sistemi di riferimento legati da una trasformazione del gruppo di Poincaré \mathcal{G} misurano il mondo nel medesimo modo. Per implementare questo principio si dovrà rappresentare ogni elemento di $g \in \mathcal{G}$ tramite un operatore unitario $U(g)$ sullo spazio \mathcal{H} che agisca per coniugio sugli osservabili.

$$\begin{aligned} U : \mathcal{G} &\rightarrow \{\text{Operatori unitari su } \mathcal{H}\} \subseteq B(\mathcal{H}) \\ g &\mapsto U(g) \\ U(g)^{-1} \mathcal{O}_x U(g) &= \mathcal{O}'_{gx} \end{aligned}$$

dove \mathcal{O}'_{gx} corrisponde all'osservabile \mathcal{O}_x visto dal sistema di riferimento trasformato da g . Richiediamo inoltre che la traslazione temporale tramite la rappresentazione del gruppo di Poincaré coincida con quella derivata dall'hamiltoniana, ossia

$$U(g_t)^{-1} \mathcal{O}_{t_0, x_0} U(g_t) = e^{iHt} \mathcal{O}_{t_0, x_0} e^{-iHt} = \mathcal{O}_{t_0+t, x_0}.$$

1.4 Assiomi di Wightman

Concludiamo questo capitolo con la definizione di un famoso sistema di assiomi per la teoria quantistica formulato da Wightman e Gårding nei primi anni '50.

Ricordiamo prima la definizione di spettro congiunto.

Definizione 1.3. Data una n -upla $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ di operatori limitati che commutano su uno spazio di Banach \mathcal{B} , chiamiamo **spettro congiunto** (joint spectrum) di A su \mathcal{B} : $\sigma_T(A, \mathcal{B}) := \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n : A_k - \lambda_k I \text{ è singolare, per ogni } k = 1, \dots, n\}$.

Definizione 1.4. (Assiomi di Wightman per QFT a scalari reali) Una **teoria quantistica dei campi** è il dato di uno spazio di Hilbert separabile \mathcal{H} , una rappresentazione unitaria $U: \mathcal{G} \rightarrow B(\mathcal{H})$ del gruppo di Poincaré \mathcal{G} , e una distribuzione a valori operatoriali Φ definita su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ tale che se f assume solo valori reali allora $\Phi(f)$ è un operatore autoaggiunto su \mathcal{H} , detto **operatore di campo**, e siano soddisfatte le seguenti proprietà:

- (i) **(Energia positiva)** I generatori P^μ della rappresentazione del gruppo di Poincaré commutano ed hanno spettro congiunto (joint spectrum) $S \subset \mathbb{R}^4$ contenuto nel semicono positivo della luce: $S \subset \{p^\mu = (p_0, p_1, p_2, p_3) : (p_0)^2 - \sum_{i=1,2,3} (p_i)^2 \geq 0\}$.
- (ii) **(Vuoto)** Esiste un vettore $|\Omega\rangle \in \mathcal{H}$ invariante rispetto a \mathcal{G} . Il vettore vuoto $|\Omega\rangle$ appartiene al dominio di ogni combinazione polinomiale di operatori di campo e il sottospazio generato algebricamente da queste polinomiali applicati a $|\Omega\rangle$ è denso in \mathcal{H} . Inoltre $|\Omega\rangle$ è l'unico vettore invariante per traslazioni temporali, ossia è l'unico autovettore dell'Hamiltoniana.
- (iii) **(Microcausalità)** Se $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ tali che $\text{supp}(f), \text{supp}(g) \subset \mathbb{R}^4$ sono spacelike separati, allora $[\Phi(f), \Phi(g)] = 0$.
- (iv) **(Covarianza di Poincaré)** Dato $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$, $U^{-1}(g)\Phi(f)U(g) = \Phi(fg)$ per ogni $g \in \mathcal{G}$

Capitolo 2

Spazi di Fock

In questo capitolo analizzeremo un famoso spazio di Hilbert, che data nella sua semplicità rappresenta uno strumento basilare tuttavia non banale utilizzato nella QFT: gli spazi di Fock.

L'idea che sta alla base della definizione degli spazi di Fock è la seguente. Se \mathcal{H} è lo spazio di Hilbert dei possibili stati di una singola particella, allora $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ contiene i possibili stati di una coppia di particelle. $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ quelli di una terna e così via. La somma diretta di tutti questi spazi descrive un sistema nel quale possono esserci un qualunque numero di particelle. Il raggio di applicazione in fisica di questi spazi è limitato quindi a sistemi di particelle dello stesso tipo, tuttavia non viene fatta alcuna ipotesi sul loro numero permettendo così la rappresentazione di importanti fenomeni fisici quali la creazione e l'annichilazione di particelle.

2.1 Perché studiare gli spazi di Fock?

Per comprendere l'importanza degli spazi di Fock all'interno della QFT, introduciamo il procedimento di *quantizzazione canonica* nel caso particolare di un sistema libero.

Quantizzazione canonica in meccanica quantistica Descriviamo inizialmente il processo di quantizzazione che porta alla meccanica quantistica a partire dalla meccanica classica. Consideriamo un sistema dinamico con hamiltoniana $H(q, p)$ espressa nelle coordinate canoniche $q = (q_1, \dots, q_n)$ e $p = (p_1, \dots, p_n)$, cioè coordinate tali per cui valgono le equazioni di Hamilton del moto:

$$\dot{q} = \nabla_p H, \dot{p} = -\nabla_q H, \quad (2.1)$$

o equivalentemente per cui vale il seguente sistema di relazioni:

$$\begin{cases} \{q_k, p_l\} = \delta_{k,l} \\ \{q_k, q_l\} = \{p_k, p_l\} = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

dove

$$\{A, B\} \equiv \nabla_q A \cdot \nabla_p B - \nabla_p A \nabla_q B$$

è la parentesi di Poisson di A e B .

In meccanica quantistica le coordinate canoniche (\hat{q}, \hat{p}) saranno rappresentate, in quanto osservabili del sistema, come operatori lineari autoaggiunti sullo spazio degli stati \mathcal{H} . La procedura di quantizzazione consiste nel richiedere che ad ogni coppia di coordinate (q, p) che soddisfano (2.2) sia associata una coppia di operatori (\hat{q}, \hat{p}) per cui valga il sistema di relazioni

$$\begin{cases} [\hat{q}_k, \hat{p}_l] = i\hbar\delta_{k,l}I \\ [\hat{q}_k, \hat{q}_l] = [\hat{p}_k, \hat{p}_l] = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

dove

$$[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

è il commutatore di \hat{A} e \hat{B} . Per esempio gli operatori

$$\hat{q}_k(u) := q_k u, \quad \hat{p}_k(u) := \frac{\hbar}{i} \frac{\partial u}{\partial q_k}$$

soddisfano le (2.3). Da tali coordinate si possono trovare tutte le variabili del moto del sistema quantistico, tra cui l'Hamiltoniana \hat{H} , ottenuta sostituendo in $H(q, p)$ le coordinate canoniche q e p con gli operatori associati. L'Hamiltoniana così ottenuta descrive l'evoluzione del sistema in accordo con l'equazione di Schrödinger (1.1).

Quantizzazione canonica nella QFT Il processo di quantizzazione che introduce la QFT risulta del tutto analogo a quello esposto nel paragrafo precedente in cui però il punto di partenza sarà la teoria classica dei campi.

Per semplicità di trattazione descriviamo come viene quantizzata una teoria di un campo libero scalare reale $\phi(x)$. Quantizzare questa teoria significa associare ad ogni coppia (ϕ, π) , dove $\pi(x)$ è il momento canonico associato al campo, una coppia di distribuzioni a valori operatoriali $(\hat{\phi}, \hat{\pi})$, ognuna delle quali data una funzione reale nello spazio delle funzioni test restituisce un operatore autoaggiunto che agisce sulle funzioni d'onda Ψ , e che soddisfi le *canonical commutation relations*

$$\begin{cases} [\hat{\phi}(f), \hat{\pi}(g)] = i\hbar\langle f, g \rangle I \\ [\hat{\phi}(f), \hat{\phi}(g)] = [\hat{\pi}(f), \hat{\pi}(g)] = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

In letteratura fisica è facile incontrare la scrittura formale $\hat{\phi}(x)$ dell'operatore campo, espresso quindi in coordinate spaziali, definita da:

$$\hat{\phi}(f) = \int f(x)\hat{\phi}(x)dx \quad (2.5)$$

Questa rappresentazione presenta diverse problematiche. Dal punto di vista fisico si pone il quesito se sia effettivamente possibile parlare di osservabili localizzati in un singolo punto $x \in \mathbb{R}^3$. Dal punto di vista matematico tale rappresentazione porta frequentemente a somme indicizzate da insiemi non numerabili che quindi divergono.

Tuttavia questa scrittura descrive più chiaramente le motivazioni e i principi fisici che hanno portato alle *canonical commutation relations*, che in questo caso diventano:

$$\begin{cases} [\hat{\phi}(x), \hat{\pi}(y)] = i\hbar\delta(x-y)I \\ [\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] = [\hat{\pi}(x), \hat{\pi}(y)] = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Le equazioni del sistema di relazioni appena definito formalizzano il fatto che, data l'assenza di interazioni, due misurazioni di una qualunque combinazione dei due osservabili ϕ e π svolte in due punti distinti dello spazio non si influenzano (e quindi commutano). In più, nel caso più interessante, in cui si misurano l'operatore di campo e il momento canonico nello stesso punto, la prima equazione di (2.4) equivale al principio di indeterminazione di Heisenberg

$$\sigma_{\hat{\phi}(x)}\sigma_{\hat{\pi}(x)} \geq \frac{\hbar}{2},$$

dove σ è la deviazione standard. Infatti, fissata Ψ la funzione d'onda che descrive lo stato attuale e usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz si ha

$$\langle \Psi | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x) | \Psi \rangle \langle \Psi | \hat{\pi}(x) \hat{\pi}(x) | \Psi \rangle \geq |\langle \Psi | \hat{\phi}(x) \hat{\pi}(x) | \Psi \rangle|^2.$$

Possiamo ipotizzare che il valore atteso di $\hat{\phi}$ e $\hat{\pi}$ siano entrambi nulli e otteniamo:¹

$$\sigma_{\hat{\phi}(x)}\sigma_{\hat{\pi}(x)} \geq |\langle \Psi | \hat{\phi}(x) \hat{\pi}(x) | \Psi \rangle|,$$

Infine sfruttando la proprietà di autoaggiunzione vale:

$$\begin{aligned} |\langle \Psi | \hat{\phi}(x) \hat{\pi}(x) | \Psi \rangle| &\geq \left| \frac{1}{2i} [\langle \Psi | \hat{\phi}(x) \hat{\pi}(x) | \Psi \rangle - \langle \Psi | \hat{\phi}(x) \hat{\pi}(x) | \Psi \rangle^c] \right| = \\ &= \left| \frac{1}{2i} (\langle \Psi | \hat{\phi}(x) \hat{\pi}(x) | \Psi \rangle - \langle \Psi | \hat{\pi}(x) \hat{\phi}(x) | \Psi \rangle) \right| = \\ &= \left| \frac{1}{2i} \langle \Psi | [\hat{\phi}(x), \hat{\pi}(x)] | \Psi \rangle \right| = \\ &= \frac{\hbar}{2}. \end{aligned}$$

Un problema naturale del processo di quantizzazione appena descritto è come trovare esplicitamente le distribuzioni $\hat{\phi}$ e $\hat{\pi}$. L'importanza degli spazi di Fock viene dalla possibilità di dare una naturale realizzazione delle relazioni (2.4), indipendentemente dal numero di gradi di libertà coinvolti.

¹Nel caso generale si otterrebbe una maggiorazione più forte che tiene conto dei valori attesi

2.2 Gruppo di permutazione e stati di un sistema di particelle indistinguibili

Diremo che delle particelle sono identiche se hanno le stesse proprietà, se inoltre non sarà assegnato alcun indice diremo che sono tra loro indistinguibili.

Come accennato informalmente in (1.2) lo spazio di Hilbert utilizzato per rappresentare un sistema sarà un prodotto tensoriale di spazi di Hilbert. Nel caso particolare di N particelle identiche sarà costituito dal prodotto tensoriale di N copie dello spazio \mathcal{H} , che descrive lo stato di una singola particella, e verrà indicato con $\mathcal{H}^{\otimes n}$. Se N particelle identiche ma distinguibili si trovano negli stati $X_\alpha, X_\beta, \dots, X_\gamma$ useremo la seguente notazione con apici numerati per indicare che l'ordine delle particelle è significativo:

$$|X_\alpha^{(1)}, X_\beta^{(2)}, \dots, X_\gamma^{(N)}\rangle \equiv |X_\alpha\rangle |X_\beta\rangle \dots |X_\gamma\rangle. \quad (2.7)$$

Un generico vettore dello spazio di Hilbert $\mathcal{H}^{\otimes n}$ è dato da un arbitraria combinazione lineare di vettori definiti come in (2.7)

Per rappresentare correttamente un sistema di particelle indistinguibili, invece, avremo bisogno che gli stati rispecchino la naturale simmetria del sistema considerato. Se consideriamo particelle indistinguibili, la permutazione di due o più di esse non dovrebbe influenzare lo stato effettivo del sistema, modificandolo al più per una costante di fase. Nello specifico per ogni permutazione P si avrà $P|\Psi\rangle = e^{i\varphi(P)}|\Psi\rangle$, per una certa $\varphi(P)$ che descrive lo sfasamento. Le trasposizioni, i.e. permutazioni che scambiano solo due elementi, sono involutive, ossia si ha $P_{ij}^2 = I$, quindi il cambiamento di fase $\varphi(P_{ij})$ potrà essere solo 0 o π . Inoltre poiché ogni permutazione può essere decomposta in una sequenza di trasposizioni lo stesso vale per una permutazione generica.

Riassumendo, gli stati del sistema possono avere solo due comportamenti: simmetrico, se lo sfasamento delle trasposizioni è 0 , oppure antisimmetrico, se è π . Nel primo caso parleremo di particelle bosoniche o *bosoni*, nel secondo di particelle fermioniche o *fermioni*. In questa trattazione ci limiteremo a descrivere il caso dei bosoni, una costruzione del tutto analoga può essere fatta nel caso dei fermioni, quindi nel seguito sottintenderemo di star sempre lavorando con particelle bosoniche.

Definizione 2.1. *Indichiamo con S_N l'operatore di simmetrizzazione di uno stato di N particelle identiche, definito da:*

$$S_N = \frac{1}{N!} \sum_P P$$

dove P varia sull'insieme delle permutazioni di un insieme di cardinalità N .

Proposizione 2.1. *L'operatore S_N è un proiettore ortogonale dello spazio prodotto $\mathcal{H}^{\otimes n}$.*

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} S_N^2 &= \left(\frac{1}{N!}\right)^2 \sum_P P \circ \sum_{P'} P' = \left(\frac{1}{N!}\right)^2 \sum_P \left(\sum_{P'} P \circ P' \right) \\ &= \left(\frac{1}{N!}\right)^2 \sum_P \left(\sum_{P'} P' \right) = \frac{1}{N!} \sum_{P'} P' = S_N \end{aligned}$$

Si nota facilmente dalla definizione che ogni permutazione P è un operatore unitario, ciò equivale per la prop.(A.2) a dire che vale $P^* = P^{-1}$. Quindi si ha

$$\begin{aligned} S_N^* &= \frac{1}{N!} \sum_P P^* = \frac{1}{N!} \sum_P P^{-1} = \\ &= \frac{1}{N!} \sum_P P = S_N \end{aligned}$$

la Prop. A.1 conclude. □

Rappresenteremo uno stato di un sistema a N particelle (bosoniche) indistinguibili, ricordando la notazione di (2.7), come una combinazione lineare di stati simmetrizzati

$$\begin{aligned} |X_1, X_2, \dots, X_N\rangle &:= S_N |X_1^{(1)}, X_2^{(2)}, \dots, X_N^{(N)}\rangle \\ &= S_N (|X_1\rangle |X_2\rangle \dots |X_N\rangle) = \\ &= \frac{1}{N!} \sum_P |X_{P^{-1}(1)}\rangle |X_{P^{-1}(2)}\rangle \dots |X_{P^{-1}(N)}\rangle. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Indicheremo con $\mathcal{H}_{sym}^{\otimes N} = S_N(\mathcal{H}^{\otimes N})$ il sottospazio di Hilbert formato dalle arbitrarie combinazioni di vettori del tipo (2.8) e utilizziamo la convenzione $\mathcal{H}_{sym}^{\otimes 0} = \mathbb{C}$.

2.3 Spazi di Fock

Ricordiamo come sia possibile combinare tra loro spazi di Hilbert tramite somma diretta.

Definizione 2.2. Sia $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_n$ una famiglia finita di spazi di Hilbert definiamo la **somma diretta** degli spazi \mathcal{H}_i

$$\bigoplus_{1 \leq i \leq n} \mathcal{H}_i$$

come lo spazio vettoriale costituito dal prodotto cartesiano $\prod \mathcal{H}_i$ con le ovvie operazioni dotato del prodotto interno $\langle x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \rangle = \sum \langle x_i, y_i \rangle_{\mathcal{H}_i}$. Con la norma indotta lo spazio così definito è completo.

La nozione di somma diretta può essere generalizzata in vari modi nel caso di famiglie infinite di spazi vettoriali. Utilizzeremo due di queste generalizzazioni.

Definizione 2.3. Sia $\{\mathcal{H}_i\}_{i \in I}$ una famiglia di spazi di Hilbert la **somma diretta algebrica**, denotata con

$$\bigoplus_{i \in I}^{al} \mathcal{H}_i$$

è il sottoinsieme del prodotto cartesiano $\prod \mathcal{H}_i$ costituito dagli elementi con un numero finito di termini diversi da zero e equipaggiato con il prodotto interno $\langle \{x_i\}, \{y_i\} \rangle = \sum_{i \in I} \langle x_i, y_i \rangle_{\mathcal{H}_i}$. Notiamo che quest'ultima serie si riduce ad una somma finita ed il prodotto scalare è quindi ben definito.

Chiamiamo **somma diretta nel senso degli spazi di Hilbert** il completamento metrico della somma diretta algebrica

$$\bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_i := \left(\bigoplus_{i \in I}^{al} \mathcal{H}_i \right)^{cpl}.$$

Possiamo finalmente dare la definizione di spazio di Fock simmetrico (o bosonico).

Definizione 2.4. (Spazio di Fock simmetrico) Dato uno spazio di Hilbert \mathcal{H} definiamo lo **spazio di Fock simmetrico** su \mathcal{H} come la somma diretta degli spazi $\mathcal{H}_{sym}^{\otimes N}$ al variare di N sui naturali,

$$\Gamma(\mathcal{H}) = \bigoplus_{0 \leq n < \infty} \mathcal{H}_{sym}^{\otimes n}. \quad (2.9)$$

Tornerà utile anche la definizione di spazio di Fock con numero finito di particelle

$$\Gamma_f(\mathcal{H}) = \bigoplus_{0 \leq n < \infty}^{al} \mathcal{H}_{sym}^{\otimes n}.$$

Cerchiamo ora una base comoda per tale spazio. Supponiamo di avere una base ortonormale \mathcal{B} dello spazio \mathcal{H} dei possibili stati di una singola particella

$$|1\rangle, |2\rangle, \dots, |k\rangle, \dots$$

In generale le componenti dei vettori del tipo $|k_1, k_2, \dots, k_N\rangle$ con $k_j \in \mathcal{B}$ non sono tra loro distinti e il vettore risulta quindi non normalizzato. La norma di tale vettore tuttavia dipende solamente dal numero di particelle che si trovano in ciascuno stato.

Proposizione 2.2. Per un sistema di particelle bosoniche, vale:

$$\| |k_1, k_2, \dots, k_N\rangle \| = \left(\frac{\prod_j n_j!}{N!} \right)^{1/2}, \quad (2.10)$$

dove ogni n_j è uguale al numero di k_l che si trovano nello stato $|j\rangle \in \mathcal{B}$.

Dimostrazione. Da un semplice calcolo combinatorio otteniamo che la relazione di equivalenza $P \sim P' \Leftrightarrow P|k_1, k_2, \dots, k_N\rangle = P'|k_1, k_2, \dots, k_N\rangle$ genera una partizione del gruppo delle permutazioni in cui ogni classe $[P]$ ha cardinalità $\prod_j n_j!$. Il numero di classi sarà quindi $\frac{N!}{\prod_j n_j!}$. Da ciò si ottiene

$$\begin{aligned} \||k_1, k_2, \dots, k_N\rangle\|^2 &= \left(\frac{1}{N!}\right)^2 \left\| \sum_P |k_{P^{-1}(1)}\rangle \dots |k_{P^{-1}(N)}\rangle \right\|^2 = \\ &= \left(\frac{\prod_j n_j!}{N!}\right)^2 \left\| \sum_{[P]} |k_{P^{-1}(1)}\rangle \dots |k_{P^{-1}(N)}\rangle \right\|^2 = \\ &= \left(\frac{\prod_j n_j!}{N!}\right)^2 \sum_{[P]} \||k_{P^{-1}(1)}\rangle \dots |k_{P^{-1}(N)}\rangle\|^2 = \\ &= \frac{\prod_j n_j!}{N!} \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato (2.8) e il fatto che il prodotto tra $|k_1\rangle \dots |k'_N\rangle$ e $|k'_1\rangle \dots |k'_N\rangle$ è uguale a 1 se $k_i = k'_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$, ed è 0 altrimenti. \square

Da questa proprietà si deduce come il parametro più importante per definire uno stato del sistema sia il numero di particelle, tra le N presenti, che si trovano in un determinato stato, ossia il **numero di occupazione**. Si giunge quindi ad una rappresentazione dello spazio $\Gamma(\mathcal{H})$ tramite numeri di occupazione, e indicheremo in seguito con n_j il numero di particelle nello stato $|j\rangle$.

Definizione 2.5. (Stato di Fock) Dato uno spazio di Hilbert \mathcal{H} e una sua base ortonormale \mathcal{B} chiamiamo **stato prodotto** uno stato del tipo $|k_1, k_2, \dots, k_N\rangle \in \mathcal{H}_{sym}^{\otimes N}$ con $k_i \in \mathcal{B}$. Ogni vettore di $\Gamma(\mathcal{H})$ è una combinazione lineare di stati prodotto, che costituiscono quindi una base ortogonale dello spazio di Fock.

Inoltre preso uno stato prodotto $|k_1, k_2, \dots, k_N\rangle \in \mathcal{H}_{sym}^{\otimes N}$ possiamo identificare il vettore normalizzato di $|k_1, k_2, \dots, k_N\rangle$ con il vettore di numeri naturali $|n_1, n_2, \dots, n_s, \dots\rangle$ in cui n_j è uguale al numero di particelle k_j che si trovano nello stato $|j\rangle \in \mathcal{B}$. Chiamiamo i vettori $|n_1, n_2, \dots, n_s, \dots\rangle$ **stati di Fock** ed essi formano una base ortonormale di $\Gamma(\mathcal{H})$ che prende il nome di **occupation number basis**.

2.4 Operatori di creazione e annichilazione

Introduciamo ora gli operatori di creazione a_β^* e di annichilazione a_β che rispettivamente “creano” e “distruggono” una singola particella nello stato β . Definiremo tali operatori

indicando come essi agiscono lavorando con una base di $\Gamma(\mathcal{H})$ costituita da stati prodotto e successivamente vedremo come cambia la loro azione considerando l'occupation number basis.

Definizione 2.6. Consideriamo un sistema di N particelle indistinguibili, definiamo $a_\beta: \Gamma_f(\mathcal{H}) \rightarrow \Gamma_f(\mathcal{H})$ e $a_\beta^*: \Gamma_f(\mathcal{H}) \rightarrow \Gamma_f(\mathcal{H})$ che agiscono su uno stato di $\mathcal{H}_{sym}^{\otimes N}$ nel seguente modo:

$$a_\beta |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\rangle = \sqrt{N} \langle \beta^{(1)}, (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \rangle, \quad (2.11)$$

$$a_\beta^* |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\rangle = \sqrt{N+1} S_{N+1} (|\beta\rangle |\alpha_1\rangle |\alpha_2\rangle \dots, |\alpha_N\rangle), \quad (2.12)$$

dove il prodotto in (2.11) è definito da

$$\langle \beta^{(1)}, (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \rangle := S_{N-1} \langle \beta | \otimes^{(N-1)} id_{\mathcal{H}} | \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N \rangle$$

o esplicitando l'operatore di simmetrizzazione

$$\begin{aligned} \langle \beta^{(1)}, (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \langle \beta, \alpha_l | \alpha_1, \dots, \alpha_{l-1}, \alpha_{l+1}, \dots, \alpha_N \rangle \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \langle \beta, \alpha_l | \underbrace{\alpha_1, \dots, \alpha_N}_{\setminus \alpha_l} \rangle. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Osservazione. Una volta definita l'azione di a_β e a_β^* su ogni spazio $\mathcal{H}_{sym}^{\otimes N}$ la definizione si estende a tutto $\Gamma_f(\mathcal{H})$ per linearità

$$a_\beta \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} |v_n\rangle = \bigoplus_{N \in \mathbb{N}} a_\beta |v_n\rangle,$$

$$a_\beta^* \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} |v_n\rangle = \bigoplus_{N \in \mathbb{N}} a_\beta^* |v_n\rangle.$$

Possiamo poi estendere in modo unico l'operatore così definito ad $\Gamma(\mathcal{H}) = \Gamma_f(\mathcal{H})^{cpl}$

Osservazione. Si può notare direttamente dalla definizione che l'operatore di annichilazione (resp. creazione) porta stati di $\mathcal{H}_{sym}^{\otimes N}$ a stati in $\mathcal{H}_{sym}^{\otimes(N-1)}$ (resp. $\mathcal{H}_{sym}^{\otimes(N+1)}$).

Osservazione. Si può inoltre notare dalla definizione che l'operatore a_β^* (resp. a_β) è lineare (resp. antilineare) rispetto allo stato creato (resp. distrutto) β . In particolare, è possibile scomporre entrambi gli operatori rispetto ad una base $|j\rangle$ di \mathcal{H} nel seguente modo:

$$a_\beta^* = \sum_j \langle j, \beta \rangle a_j^*, \quad a_\beta = \sum_j \langle j, \beta \rangle a_j. \quad (2.14)$$

Dimostriamo alcune proprietà di base degli operatori di creazione e annichilazione.

Teorema 2.1. *Per ogni $\beta, \gamma \in \mathcal{H}$ possibili stati di una singola particella, valgono le seguenti proprietà:*

$$(a_\beta^*)^* = a_\beta, (a_\beta)^* = a_\beta^* \quad (2.15)$$

$$[a_\beta, a_\gamma] = [a_\beta^*, a_\gamma^*] = 0 \quad (2.16)$$

$$[a_\beta, a_\gamma^*] = \langle \beta, \gamma \rangle I \quad (2.17)$$

Dimostrazione. 1. Dati $|\alpha_1, \dots, \alpha_N\rangle \in \mathcal{H}_{sym}^{\otimes N}$ e $|\alpha'_1, \dots, \alpha'_{(N+1)}\rangle \in \mathcal{H}_{sym}^{\otimes (N+1)}$ cominciamo provando che:

$$(\langle \alpha'_1, \dots, \alpha'_{(N+1)} | a_\beta^* | \alpha_1, \dots, \alpha_N \rangle)^c = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_N | a_\beta | \alpha'_1, \dots, \alpha'_{(N+1)} \rangle.$$

Dalla definizione (2.12), indicando con una c ad apice il coniugio di \mathbb{C} , abbiamo che

$$\begin{aligned} & (\langle \alpha'_1, \dots, \alpha'_{(N+1)} | a_\beta^* | \alpha_1, \dots, \alpha_N \rangle)^c = \\ & = \sqrt{N+1} (\langle \alpha'_1, \dots, \alpha'_{(N+1)} | S_{N+1}(|\beta\rangle | \alpha_1\rangle | \alpha_2\rangle \dots | \alpha_N\rangle) \rangle)^c = \\ & = \sqrt{N+1} (\langle \alpha'_1, \dots, \alpha'_{(N+1)} | S_{N+1}^* (|\beta\rangle | \alpha_1\rangle | \alpha_2\rangle \dots | \alpha_N\rangle) \rangle)^c = \\ & = \sqrt{N+1} \left(\frac{1}{(N+1)!} \sum_P P(\langle \alpha'_1 |, \dots, \langle \alpha'_{(N+1)} |) (|\beta\rangle | \alpha_1\rangle | \alpha_2\rangle \dots | \alpha_N\rangle) \right)^c = \\ & = \sqrt{N+1} \left(\frac{1}{(N+1)} \sum_{l=1}^N \langle \alpha_l, \beta \rangle \underbrace{\langle \alpha'_1, \dots, \alpha'_{(N+1)} |}_{\setminus \alpha_l} | \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N \rangle \right)^c = \\ & = \sqrt{N+1} (\langle (\alpha'_1, \dots, \alpha'_{(N+1)}), \beta^{(1)} | \alpha_1, \dots, \alpha_N \rangle)^c = \\ & = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_N | \sqrt{N+1} \langle \beta^{(1)}, (\alpha'_1, \dots, \alpha'_{(N+1)}) \rangle = \\ & = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_N | a_\beta | \alpha'_1, \dots, \alpha'_{(N+1)} \rangle, \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato che $S_N = S_N^*$. Questo dimostra che $(a_\beta^*)^* \supseteq a_\beta$, infatti posto $u \in \mathcal{H}_{sym}^{\otimes N+1} \subseteq \mathcal{D}(a_\beta)$ e $v \in \mathcal{H}_{sym}^{\otimes N}$ infatti si ha

$$|\langle u | a_\beta^* | v \rangle| = |\langle v | a_\beta | u \rangle| \leq \|a_\beta | u \rangle\| \cdot \|v\|.$$

Per linearità della somma diretta vale per ogni elemento di $\Gamma(\mathcal{H})$.

Per provare l'inclusione opposta dimostriamo che se $|u\rangle \in \mathcal{D}((a_\beta^*)^*)$ allora $a_\beta |u\rangle$ è ben definita, i.e. la somma $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|a_\beta^* |u_n\rangle\|^2$ è finita. Sia $|v\rangle$ tale che $|u\rangle = a_\beta |v\rangle$,

possiamo decomporli in $|u\rangle = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} |u_n\rangle$ e $|v\rangle = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} |v_n\rangle$ con $|u_n\rangle, |v_n\rangle \in \mathcal{H}_{sym}^{\otimes n}$. Per quanto osservato sopra e per linearità della somma diretta si ha che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $v_n = a_\beta^* u_{n-1}$. In particolare

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \|a_\beta^* |u_n\rangle\|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \|v_n\|^2 < +\infty$$

. Analogamente si può dimostrare che $(a_\beta)^* = a_\beta^*$.

2. Consideriamo la proprietà (2.16). Per l'equazione 2.13 abbiamo

$$\begin{aligned} a_\beta a_\gamma |\alpha_1, \dots, \alpha_N\rangle &= a_\beta \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^N \langle \gamma, \alpha_l \rangle \underbrace{|\alpha_1, \dots, \alpha_N\rangle}_{\setminus \alpha_l} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{N-1}} \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\sum_{l=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq l}}^N \langle \beta, \alpha_m \rangle \langle \gamma, \alpha_l \rangle \underbrace{|\alpha_1, \dots, \alpha_N\rangle}_{\setminus \{\alpha_l, \alpha_m\}} \right) \end{aligned}$$

Scambiando l'ordine di applicazione otteniamo:

$$\begin{aligned} a_\gamma a_\beta |\alpha_1, \dots, \alpha_N\rangle &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{N-1}} \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\sum_{l=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq l}}^N \langle \gamma, \alpha_m \rangle \langle \beta, \alpha_l \rangle \underbrace{|\alpha_1, \dots, \alpha_N\rangle}_{\setminus \{\alpha_l, \alpha_m\}} \right), \end{aligned}$$

ciò dimostra la proprietà (2.16) per l'operatore di annichilazione e usando (2.15) si conclude anche per l'operatore di creazione.

3. Consideriamo i due termini dell'equazioni applicati a un vettore di stato. Dalle definizioni (2.11) e (2.12),

$$\begin{aligned} a_\beta a_\gamma^* |\alpha_1, \dots, \alpha_N\rangle &= \langle \beta | S_{N+1} \{ |\gamma\rangle |\alpha_1\rangle \dots |\alpha_N\rangle \} \\ &= \langle \beta, \gamma \rangle |\alpha_1, \dots, \alpha_N\rangle + \sum_{l=1}^N \langle \beta, \alpha_l \rangle \underbrace{|\gamma, \alpha_1, \dots, \alpha_N\rangle}_{\setminus \alpha_l} \end{aligned} \quad (2.18)$$

D'altra parte, si ha

$$\begin{aligned}
a_\gamma^* a_\beta |\alpha_1, \dots, \alpha_N\rangle &= \sum_{l=1}^N \langle \beta, \alpha_l | S_N \{ |\gamma\rangle \underbrace{|\alpha_1, \dots, \alpha_N\rangle}_{\setminus \alpha_l} \} \\
&= \sum_{l=1}^N \langle \beta, \alpha_l | \underbrace{|\gamma, \alpha_1, \dots, \alpha_N\rangle}_{\setminus \alpha_l} \rangle
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Sottraendo (2.19) a (2.18) si ottiene la proprietà (2.17) □

Osservazione. La proprietà (2.15) equivale a dire che gli operatori di creazione e di annichilazione sono mutualmente aggiunti, ciò motiva la scelta dei simboli a^* e a .

Teorema 2.2. La coppia di operatori $(\hat{\phi}, \hat{\pi})$ definiti come

$$\hat{\phi}(\beta) := \frac{1}{\sqrt{2}}(a_\beta + a_\beta^*),$$

$$\hat{\pi}(\beta) := -\frac{i}{\sqrt{2}}(a_\beta - a_\beta^*)$$

realizzano il sistema di relazioni (2.6).

Dimostrazione. Diretta conseguenza del teorema 2.1. □

Analizziamo ora l'azione degli operatori di creazione e annichilazione sugli stati di Fock.

$$\begin{aligned}
a_k |n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle &= \left(\frac{N!}{\prod_j n_j!} \right)^{1/2} a_k |k_1, k_2, \dots, k_N\rangle = \\
&= \left(\frac{N!}{\prod_j n_j!} \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^N \langle k, k_l | \underbrace{|k_1, k_2, \dots, k_N\rangle}_{\setminus k_l} \rangle = \\
&= \left(\frac{(N-1)!}{\prod_j n_j!} \right)^{1/2} \sum_{k_l=k} \underbrace{|k_1, k_2, \dots, k_N\rangle}_{\setminus k_l} = \\
&= \begin{cases} \sqrt{n_k} |n_1, n_2, \dots, n_k - 1, \dots\rangle & \text{se } n_k \neq 0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}
\end{aligned}$$

dove $|k_1, k_2, \dots, k_N\rangle$ è il vettore di $\mathcal{H}_{sym}^{\otimes N}$ che induce lo stato di Fock $|n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle$. Similmente

$$\begin{aligned}
a_k^* |n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle &= \left(\frac{N!}{\prod_j n_j!} \right)^{1/2} \sqrt{N+1} S_{N+1} \{ |k\rangle |k_1, k_2, \dots, k_N\rangle \} = \\
&= \left(\frac{(N+1)!}{\prod_j n_j!} \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^N \langle k, k_l | \underbrace{|k_1, k_2, \dots, k_N\rangle}_{\setminus k_l} = \\
&= \left(\frac{(N-1)!}{(n_k+1)! \cdot \prod_{j \neq k} n_j!} \right)^{1/2} \sqrt{n_k+1} |k, k_1, k_2, \dots, k_N\rangle = \\
&= \sqrt{n_k+1} |n_1, n_2, \dots, n_k+1, \dots\rangle
\end{aligned}$$

Indichiamo con $|\Omega\rangle$ il vettore del vuoto, corrispondente allo stato in cui non sono presenti particelle $|0, 0, 0, \dots\rangle$. Il vettore $|\Omega\rangle$ gode, per quanto dimostrato sopra, della seguente proprietà:

$$a_k |\Omega\rangle = 0, \text{ per ogni } k.$$

Possiamo definire questa importante rappresentazione per gli stati di Fock:

$$|n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle = \frac{(a_1^*)^{n_1} \dots (a_k^*)^{n_k} \dots}{\sqrt{n_1! \dots n_k! \dots}} |\Omega\rangle. \quad (2.20)$$

Infine possiamo definire l'operatore di moltiplicazione per un certo numero di occupazione n_k :

$$n_k = a_k^* a_k.$$

Capitolo 3

Il modello $P(\varphi)_2$

In questo capitolo descriveremo un esempio particolare di utilizzo dallo spazio di Fock definito nel capitolo precedente: il modello $P(\varphi)_2$. I modelli della QFT usati dai fisici per descrivere interazioni di base, nonostante il loro successo sperimentale, sono definiti in modo formale e perturbativo, ossia definito solo localmente. Alla formulazione degli assiomi di Wightman nel 1952, descritti nel primo capitolo, è seguito un periodo di grande interesse per la ricerca di modelli fisici che soddisfacessero questi sistema di assiomi. Wightman propose di costruire tali modelli uno ad uno partendo dal più semplice, anche se fisicamente non utilizzabili, e procedendo per ordine crescente di complessità. La classe di modelli più semplice inserita nel programma costruttivo di Wightman è il modello $P(\varphi)_2$, che è il modello di bosoni autointerattivi in uno spaziotempo bidimensionale nella quale l'interazione è data da un polinomio $P(\varphi)$ di grado almeno 4 inferiormente limitato. Per ovvie ragioni la teoria che stiamo per presentare non gode di invarianza relativistica (non è nemmeno invariante per traslazione) ed è invece una teoria locale, nel senso che l'interazione dipende solo dal valore del campo in un intorno del punto.

Il problema che andremo ad affrontare sarà quantizzare un sistema classico la cui evoluzione è descritta dall'equazione d'onda non lineare, detta equazione di Klein-Gordon:

$$\begin{cases} \partial_t^2 \varphi(t, x) - \Delta_x \varphi(t, x) + m^2 \varphi(t, x) + gP'(\varphi(t, x)) = 0, & \text{su } \mathbb{R}^{(d+1)}, \\ \varphi|_{t=0} = \varphi_0, \\ \partial_t \varphi|_{t=0} = \pi_0, \end{cases} \quad (3.1)$$

dove $m \geq 0$ è detta parametro di massa, la funzione $g = g(x) > 0, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ è una funzione reale di troncatura (o cut-off) e P è un polinomio, per ragioni di stabilità richiediamo inferiormente limitato.

Nel caso particolare in cui $g = 0$ la prima equazione di (3.1) diventa un'equazione lineare e descrive l'evoluzione di un campo libero. Il problema di quantizzare una teoria per un campo libero è relativamente semplice e preliminare per la trattazione del caso

con interazione. Una descrizione dettagliata di tale teoria sarà l'oggetto della prossima sezione.

3.1 Quantizzazione di un campo libero scalare

Per tutto il capitolo ipotizzeremo sempre di usare opportune unità di misura in modo che valga $\hbar = c = 1$.

Ricordiamo alcune definizioni preliminari riguardanti la relatività ristretta.

Definizione 3.1. Chiamiamo **quadrivettore** la generalizzazione d'impulso tridimensionale allo spaziotempo di una particella di massa a riposo m e velocità (non relativistica) $\mathbf{v}(t)$ definita da:

$$p = (p_0, p_1, p_2, p_3) = (E, p_x, p_y, p_z),$$

dove $E = \frac{m}{\sqrt{1-\mathbf{v}(t)^2}}$ è detta energia relativistica e $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z) = \frac{m\mathbf{v}(t)}{\sqrt{1-\mathbf{v}(t)^2}}$ è detto momento relativistico.

Osservazione. Dalla definizione di quadrivettore si può notare che $p^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$, ciò permette di esprimere l'energia relativistica in funzione del momento e usiamo la seguente notazione: $\omega_{\mathbf{p}} = p_0 = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$

Definizione 3.2. Chiamiamo **shell di massa** di massa m la sottovarietà di \mathbb{R}^4 :

$$X_m = \{p \in \mathbb{R}^4 : p^2 = m^2, p_0 \geq 0\}.$$

Definiamo inoltre su tale insieme la misura λ_m , invariante rispetto al gruppo di Poincaré:

$$\int_{X_m} f(p) d\lambda_m(p) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_{\mathbf{p}}} f(\omega_{\mathbf{p}}, \mathbf{p}) d^3\mathbf{p}$$

Rappresentazione del campo libero scalare Sia $\mathcal{H} = L^2(X_m, \lambda_m)$ e sia Γ lo spazio di Fock (simmetrico) costruito su \mathcal{H} . Introduciamo le espressioni formali a_p, a_p^* definite da

$$a_f = \int a_p \bar{f}(p) d\lambda_m(p), \quad a_f^* = \int a_p^* f(p) d\lambda_m(p),$$

per ogni $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$

Inoltre definiamo distribuzioni a valori operatoriali analoghe alle precedenti che restringono il dominio allo spazio \mathbb{R}^3 :

$$a_{\mathbf{p}} = \frac{1}{\sqrt{\omega_{\mathbf{p}}}} a_p, \quad a_{\mathbf{p}}^* = \frac{1}{\sqrt{\omega_{\mathbf{p}}}} a_p^*.$$

In questo modo fissata la massa di una particella possiamo indifferentemente ragionare sulla shell di massa o nello spazio tridimensionale. L'operatore di campo $\varphi(f) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_f + a_f^*)$ può quindi essere espresso come

$$\begin{aligned}\varphi(f) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_f + a_f^*) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{X_m} (f(p)a_p^* + \bar{f}(p)a_p) d\lambda_m \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{\omega_{\mathbf{p}}}} (f(\omega_{\mathbf{p}}, \mathbf{p})a_{\mathbf{p}}^* + \bar{f}(\omega_{\mathbf{p}}, \mathbf{p})a_{\mathbf{p}}) d^3\mathbf{p}\end{aligned}$$

ed utilizzando la trasformata di Fourier si ottiene la cosiddetta rappresentazione puntuale di φ

$$\varphi(f) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}^4} f(x) \underbrace{\left[\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{\omega_{\mathbf{p}}}} e^{-i\langle x, p \rangle} (a_{\mathbf{p}}^* + a_{-\mathbf{p}}) d^3\mathbf{p} \right]}_{:=\varphi(x)} d^4x$$

Infine, anche l'hamiltoniana H_0 , definita su X_m da

$$H_0 = \int_{X_m} p^0 a_p^* a_p d\lambda_m$$

può essere espressa in \mathbb{R}^3 come

$$\begin{aligned}H_0 &= \int_{X_m} p^0 a_p^* a_p d\lambda_m \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_{\mathbf{p}}} \omega_{\mathbf{p}} \sqrt{\omega_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^* \sqrt{\omega_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}} d^3\mathbf{p} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^* a_{\mathbf{p}} d^3\mathbf{p}.\end{aligned}$$

3.2 Il modello $P(\varphi)_2$

Il modello $P(\varphi)_2$ descrive una teoria quantistica in uno spaziotempo bidimensionale, quindi lo spazio di Hilbert \mathcal{H} che verrà utilizzato per la costruzione dello spazio di Fock sarà $L^2(\mathbb{R}, dk)$. I risultati e le notazioni del paragrafo precedente sono relativi ad un caso più generale e continuano quindi a valere con qualche variazione in una sola dimensione spaziale.

Consideriamo ora la rappresentazione puntuale dell'operatore di campo φ in una dimensionale

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{\omega_k}} e^{-i\langle x, k \rangle} (a_k^* + a_{-k}) dk.$$

Tale rappresentazione è definita solo nel senso delle distribuzioni e siccome l'interazione viene espressa tramite una funzione polinomiale nell'indeterminata $\phi(x)$ si pone la questione di come si possa definire la moltiplicazioni di distribuzioni. Questo problema è ben conosciuto e viene incontrato frequentemente in teoria dei campi e prende il nome di **divergenza ultravioletta**.

Per risolvere questo problema introduciamo i campi UV-cutoff. Sia $\chi \in L^1(\mathbb{R}, dx) \cap L^2(\mathbb{R}, dx)$ una funzione a valori reali con $\int \chi(x) dx = 1$ e sia $\kappa \geq 1$ un parametro di UV-cutoff grande a piacere, definiamo un campo UV-cutoff come

$$\begin{aligned} \varphi_\kappa(x) &:= \kappa \int \varphi(x) \chi(\kappa(y-x)) dy = \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{\omega_k}} e^{-i\langle k, x \rangle} \hat{\chi}\left(\frac{k}{\kappa}\right) (a_k^* + a_{-k}) dk \end{aligned}$$

Per definire una interazione $P(\varphi)_2$ troncata nello spazio fissiamo un polinomio reale di grado $2n$, quindi inferiormente limitato

$$P(\lambda) = \sum_{j=0}^{2n} a_j \lambda^j, \text{ con } a_{2n} > 0,$$

e una funzione a valori reali $g \in L^1(\mathbb{R}, dx) \cap L^2(\mathbb{R}, dx)$ con $g \geq 0$. Fissato $\kappa < +\infty$ definiamo

$$\begin{aligned} M_{p,\kappa} &:= \int g(x) : \varphi_\kappa(x)^p : dx = \\ &= \sum_{r=0}^p \binom{p}{r} \int w_{p,\kappa}(k_1, \dots, k_r, k_{r+1}, \dots, k_p) \\ &\quad \times a_{k_1}^* \cdots a_{k_r}^* a_{-k_{r+1}} \cdots a_{-k_p}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

dove

$$w_{p,\kappa}(k_1, \dots, k_p) = \hat{g}\left(\sum_{i=1}^p k_i\right) \prod_{i=1}^p \left[\hat{\chi}\left(\frac{k_i}{\kappa}\right) \omega_{k_i}^{-\frac{1}{2}} \right] \tag{3.3}$$

e sono detti **kernel di interazione**.

Definizione 3.3. Fissato $\kappa < +\infty$ definiamo tramite linearità

$$V_\kappa = \int g(x) : P(\varphi_\kappa(x)) : dx,$$

e chiamiamo **interazione** $P(\varphi)_2$ **con UV-cutoff** la funzione

$$V = \int g(x) : P(\varphi(x)) : dx = \lim_{\kappa \rightarrow +\infty} V_\kappa$$

Definiamo

$$H = H_0 + V = H_0 + \int g(x) : P(\varphi_\kappa(x)) : dx, \quad (3.4)$$

l'**Hamiltoniana** $P(\varphi)_2$ (**troncata spazialmente**).

Abbiamo quindi definito cosa si intende per interazione nel modello $P(\varphi)_2$ tuttavia le definizioni appena date necessitano di qualche chiarimento, in particolare sulla scrittura $: \varphi(x) :$. Con tale scrittura intendiamo l'**ordine di Wick** dell'operatore $\varphi(x)$, ossia l'operatore ottenuto spostando tutti gli operatori di creazione a sinistra degli operatori di annichilazione senza applicare le relazioni di commutazione. L'equazione (3.2) è diretta conseguenza del seguente teorema, di cui daremo solo l'enunciato, che esplicita l'ordine di Wick in funzione degli operatori di creazione e annichilazione

Teorema 3.1. (di Wick) *Sia $k \in \mathcal{H}$ allora*

$$: \varphi(k)^p := \frac{1}{\omega_k^{(p/2)}} \sum_{r=0}^p \binom{p}{r} (a_k^*)^r (a_{\bar{k}})^{p-r}$$

Manca da dimostrare che l'operatore V è il limite dei V_κ . La seguente proposizione assicura la convergenza dei kernel d'interazione e per linearità del polinomio P e di (3.2) ciò si estende ai V_κ

Lemma 3.1. *Definito $w_{p,\infty}(k_1, \dots, k_p) = \hat{g}(\sum_{i=1}^p k_i) \prod_{i=1}^p \omega_{k_i}^{-\frac{1}{2}}$ si ha che i kernel $w_{p,\kappa}$ appartengono ad $L^2(\mathbb{R}^p)$ per ogni $1 \leq \kappa \leq \infty$ e inoltre $w_{p,\kappa} \xrightarrow{\kappa \rightarrow \infty} w_{p,\infty}$ in norma L^2 .*

Dimostrazione. Dalla seguente disuguaglianza, valida per $\lambda_i \geq 0$

$$\left(\prod_{i=1}^p \lambda_i \right)^{1/p} \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i$$

applicata a $\lambda_i = \prod_{j \neq i} \omega_{k_j}^{-\frac{p}{2(p-1)}}$ si ottiene la maggiorazione

$$\prod_{i=1}^p \omega_{k_i}^{-\frac{1}{2}} = \prod_{i=1}^p \prod_{j \neq i} \omega_{k_i}^{-\frac{1}{2(p-1)}} \leq \sum_{i=1}^p \prod_{j \neq i} \omega_{k_j}^{-\frac{p}{2(p-1)}}.$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^p} \left| \hat{g}\left(\sum_{i=1}^p k_i\right) \prod_{i=1}^p \omega_{k_i}^{-\frac{1}{2}} \right|^2 dk_1 dk_2 \dots dk_p \\
& \leq \int_{\mathbb{R}^p} \left| \hat{g}\left(\sum_{i=1}^p k_i\right) \sum_{i=1}^p \prod_{j \neq i} \omega_{k_j}^{-\frac{p}{2(p-1)}} \right|^2 dk_1 dk_2 \dots dk_p \\
& \leq \int_{\mathbb{R}^p} \left| \hat{g}\left(\sum_{i=1}^p k_i\right) \right|^2 \sum_{i=1}^p \prod_{j \neq i} \omega_{k_j}^{-\frac{p}{(p-1)}} dk_1 dk_2 \dots dk_p \\
& \leq \sum_{i=1}^p \int_{\mathbb{R}^p} \left| \hat{g}\left(\sum_{i=1}^p k_i\right) \right|^2 \prod_{j \neq i} \omega_{k_j}^{-\frac{p}{(p-1)}} dk_1 dk_2 \dots dk_p \\
& \leq \sum_{i=1}^p \int_{\mathbb{R}^p} |\hat{g}(s)|^2 \prod_{j \neq i} \omega_{k_j}^{-\frac{p}{p-1}} ds dk_1 \dots dk_{i-1} dk_{i+1} \dots dk_p \\
& \leq \sum_{i=1}^p \int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(s)|^2 ds \prod_{j \neq i} \int_{\mathbb{R}} \omega_{k_j}^{-\frac{p}{p-1}} dk_j \\
& < +\infty.
\end{aligned}$$

Quindi $\omega_{p,\infty} \in L^2(\mathbb{R}^p)$ a maggior ragione vi appartengono i kernel $\omega_{p,\kappa}$. Dimostriamo ora la convergenza in L^2 . Notiamo che $\omega_{p,\kappa}$ converge puntualmente a $\omega_{p,\infty}$ ed il calcolo precedente ci assicura che la differenza $|\omega_{p,\kappa} - \omega_{p,\infty}|$ è uniformemente limitata rispetto a κ dalla funzione $2 \cdot \omega_{p,\infty} \in L^2(\mathbb{R}^p)$. Il teorema di convergenza dominata di Lebesgue conclude la dimostrazione. \square

Concludiamo questo capitolo con un risultato interessante sull'Hamiltoniana, a cui non verrà dato tuttavia dimostrazione.

Teorema 3.2. *L'Hamiltoniana H in (3.4) è un operatore essenzialmente autoaggiunto definito su $\mathcal{D}(H_0) \cap \mathcal{D}(V)$.*

Appendice A

In questa appendice saranno illustrate le strutture matematiche e le notazioni che sono utilizzate nella tesi. Le proposizioni e i teoremi verranno solamente enunciati, per una trattazione approfondita della teoria degli operatori si veda [Atta].

Osservazione. Uno spazio di Hilbert \mathcal{H} sarà inteso, secondo la notazione fisica, come uno spazio vettoriale complesso dotato di una forma hermitiana $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ lineare nel secondo argomento e antilineare nel primo e completo rispetto alla norma indotta da tale forma.

Osservazione. Indichiamo con

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty, \forall \alpha, \beta\},$$

chiamato lo spazio di Schwartz su \mathbb{R}^n .

A.1 Operatori lineari

Teorema A.1. Diciamo che S è un'estensione di T se $\mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{D}(S)$ e $Tx = Sx$ per ogni $x \in \mathcal{D}(T)$.

Se T è un operatore limitato da \mathcal{H}_1 a \mathcal{H}_2 con dominio denso, allora esiste un'unica estensione S di T definita su tutto \mathcal{H}_1 . Inoltre questa estensione è un operatore limitato e $\|T\| = \|S\|$.

Definizione A.1. (Operatore aggiunto) Dati due spazi di Hilbert $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ e un operatore $T: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ con dominio $\mathcal{D}(T)$ denso in \mathcal{H}_1 chiamiamo **operatore aggiunto** di T l'operatore $T^*: \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1$ definito sull'insieme $\{\varphi \in \mathcal{H}_2 \mid \exists C_\varphi > 0, |\langle \varphi, T\psi \rangle| < C_\varphi \|\psi\|, \forall \psi \in \mathcal{D}(T)\}$ e tale che $\langle \varphi, T\psi \rangle = \langle T^*\varphi, \psi \rangle$.

Definizione A.2. (Operatore autoaggiunto) Data uno spazio di Hilbert \mathcal{H} e un operatore $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ con dominio denso diciamo che T è **autoaggiunto** se $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^*)$ e $T = T^*$ in $\mathcal{D}(T)$.

Definizione A.3. (Proiettore ortogonale) Dato un sottospazio chiuso E di uno spazio di Hilbert \mathcal{H} , ogni $f \in \mathcal{H}$ può essere decomposto in modo unico in $f = g + h$ dove $g \in E$ e $h \in E^\perp$. Chiamiamo **proiettore ortogonale** (o semplicemente proiettore) di \mathcal{H} su E l'operatore P_E tale che:

$$P_E f = g.$$

Una caratterizzazione dei proiettori è contenuta nella seguente

Proposizione A.1. Un operatore P con dominio denso in uno spazio di Hilbert \mathcal{H} è un proiettore se e solo se

$$P^2 = P^* = P$$

e vi è uguaglianza di dominio tra essi.

Definizione A.4. (Operatore Unitario) Un operatore U su \mathcal{H} è un **isometria** se è definito su un sottoinsieme denso di \mathcal{H} e $\|Uf\| = \|f\|$ per ogni f . Un operatore si dice **unitario** se è un isometria suriettiva.

Una caratterizzazione degli operatori unitari che ci tornerà utile è la seguente

Proposizione A.2. Sia U un operatore con dominio denso in \mathcal{H} . Le seguenti asserzioni sono equivalenti:

- (i) U è unitario,
- (ii) $U^*U = UU^* = I$,
- (iii) U^* è unitario.

A.2 Distribuzioni

Introduciamo il concetto di distribuzione, utilizzato per definire gli operatori di campi. L'idea che sta dietro alla definizione di questa struttura matematica è quella di generalizzare lo spazio funzionale $L^1_{loc}(\Omega)$ delle funzioni $\mathcal{L}eb$ -integrabili su ogni $K \subset\subset \Omega$. A tale scopo le distribuzioni sono rappresentati tramite integrali contro funzioni particolarmente regolari dette *test functions*, appartenenti per esempio allo spazio $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, delle funzioni lisce a supporto compatto. Indichiamo con $\mathcal{D}(\Omega)$ l'insieme delle funzioni test su Ω .

Definizione A.5. (Distribuzione) Una **distribuzione** a valori scalari su Ω è una funzionale lineare $S: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ che soddisfi la seguente condizione:

$$\forall K \subset\subset \Omega. \exists C_K, m_K > 0: \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \mid \text{supp}(\varphi) \subseteq K\}$$

$$|S(\varphi)| \leq C_K \sum_{|\alpha| \leq m_K} \text{sup} |\partial^\alpha \varphi|$$

Indichiamo con $\mathcal{D}'(\Omega)$ lo spazio delle distribuzioni che può essere visto come lo spazio duale continuo dello spazio delle funzioni test $\mathcal{D}(\Omega)$ se dotato di un'opportuna topologia.

Più che le distribuzioni a valori scalari in teoria quantistica dei campi capita di incontrare distribuzioni a valori operatoriali che vengono definiti per analogia a quelle a valori scalari.

Definizione A.6. (Distribuzioni a valori operatoriali) Dato due spazi di Hilbert $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$, una **distribuzione a valori operatoriali** su \mathcal{H} è una funzione lineare $S: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ che soddisfi la seguente condizione:

$$\forall K \subset\subset \Omega. \exists C_K, m_K > 0: \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \mid \text{supp}(\varphi) \subseteq K\}$$

$$\|S(\varphi)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)} \leq C_K \sum_{|\alpha| \leq m_K} \sup |\partial^\alpha \varphi|.$$

Osservazione. Si noti che nella definizione (A.6) si richiede che la distribuzione prenda valori nello spazio degli operatori lineari limitati, in modo da avere una norma ben definita. In pratica capiterà spesso di definire la distribuzione a valori operatoriali in un sottospazio denso di \mathcal{H} , in cui è facilmente dimostrabile la limitatezza, per poi estendere questi operatori a tutto \mathcal{H} grazie al teorema (A.1).

Osservazione. Identifichiamo sempre una funzione $\phi \in L^1_{loc}(\Omega)$ con la distribuzione a valori scalari $\mathcal{D}(\Omega) \ni f \mapsto \int_{\Omega} \phi(x) f(x) dx \equiv \langle \phi, f \rangle$.

Similmente data $\phi \in L^1_{loc}(\Omega, \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)) := \{\phi: \Omega \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \mid \int_K \|\phi(x)\| dx < \infty, \forall K \subset\subset \Omega\}$ la identifichiamo con la distribuzione a valori operatoriali $\mathcal{D}(\Omega) \ni f \mapsto \int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx$.

Osservazione. Fissato $f \in \mathcal{D}(\Omega)$, notiamo che $\mathcal{H} \ni u \mapsto \int_{\Omega} f(x) \phi(x) u dx \in \mathcal{H}$ è un operatore su \mathcal{H} e che possiamo definire una forma hermitiana $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \ni (u, v) \mapsto \int_{\Omega} f(x) \langle \phi(x) u, v \rangle dx \in \mathbb{C}$.

Bibliografia

- [Atta] Stéphane Attal. «Lecture 1, Operator and spectral theory». In: *Lectures on Quantum Noise Theory*. disponibile solo online, pp. 7–21. URL: http://math.univ-lyon1.fr/~attal/Op_and_Spect.pdf.
- [Attb] Stéphane Attal. «Lecture 5, Quantum Mechanics». In: *Lectures on Quantum Noise Theory*. disponibile solo online, pp. 2–6, 9–10. URL: http://math.univ-lyon1.fr/~attal/Quantum_Mechanics.pdf.
- [Attc] Stéphane Attal. «Lecture 8, Fock Spaces». In: *Lectures on Quantum Noise Theory*. disponibile solo online, pp. 2–4. URL: http://math.univ-lyon1.fr/~attal/Fock_Spaces.pdf.
- [DG00] Jan Dereziński e Christian Gérard. «Spectral and Scattering Theory of Spatially Cut-Off $P(\varphi)_2$ Hamiltonians». In: *Communications in Mathematical Physics* (2000), pp. 68–74. URL: <https://www.researchgate.net/publication/226315408>.
- [DG13] Jan Dereziński e Christian Gérard. *Mathematics of Quantization and Quantum Fields*. Cambridge University Press, 2013, pp. 641–655.
- [Fra18] Eduardo Fradkin. *Lecture 4, Canonical Quantization*. 2018. URL: <http://eduardo.physics.illinois.edu/phys582/582-chapter4.pdf>.
- [Ran15] Daniel Ranard. *An introduction to rigorous formulations of quantum field theory*. articolo. Perimeter Institute for Theoretical Physics, 2015, pp. 3–17, 23–24, 32.
- [Shc13] Valery Shchesnovich. *The second quantization method for indistinguishable particles*. 2013, pp. 4–15. URL: <https://arxiv.org/abs/1308.3275v1>.
- [SP95] Daniel Schroeder e Michael Peskin. *An Introduction To Quantum Field Theory*. CRC Press, 1995, pp. 13–18.