Documento de Trabajo 96-11
Serie de Economía 06
Julio 1996

Departamento de Economía
Universidad Carlos III de Madrid
Calle Madrid, 126
28903 Getafe (Spain)
Fax (341) 624-9849

COALICIONES Y COMPETENCIA PERFECTA

Carlos Hervés y Emma Moreno*

Resumen

En este trabajo estudiamos propiedades del mecanismo competitivo referentes a incentivos coalicionales. Para ello, definimos un test de competencia perfecta, que denominamos test de compatibilidad de incentivos coalicionales en el límite. Probamos que en el caso finito-dimensional existe un conjunto genérico de economías continuas que superan dicho test. Los resultados obtenidos para economías continuas que superan dicho test. Los resultados obtenidos para economías continuas admiten interpretaciones discretas que conducen a resultados límites sobre compatibilidad de incentivos coalicionales para sucesiones de economías finitas.

Palabras clave
Competencia Perfecta; Economías Continuas; Compatibilidad de Incentivos; Coaliciones.

* Hervés, Universidad de Vigo; Moreno, Departamento de Economía, Universidad Carlos III de Madrid. Este trabajo ha sido financiado por el proyecto de investigación PS93-0050 de la DGICYT, Ministerio de Educación.

1 Introducción

En economías de intercambio puro, con un número finito de consumidores, los agentes individuales pueden manipular el mecanismo competitivo en su propio beneficio. Es decir, en economías finitas los agentes individuales, y por tanto las coaliciones de agentes, tienen incentivos a declarar características distintas de las reales que mejoran su utilidad indirecta. Se sabe también (Roberts y Postlewaite (1976)) que en economías de intercambio, donde no se consideran bienes públicos, el incentivo individual a desviarse de un comportamiento precio-aceptante decrece conforme aumenta el número de agentes. El objetivo de este trabajo es obtener resultados en un marco más general, que no se concentre únicamente en acciones individuales y que considere estrategías colectivas. Ello nos permitirá estudiar propiedades del mecanismo competitivo referentes a incentivos coalicionales. Concretamente, formalizamos tests de competencia perfecta en términos de los incentivos que la s coaliciones tienen para desviarse de un comportamiento precio-aceptante en función de su tamaño.

En el marco de la Teoría de Juegos, Hurwicz (1972) introduce el término compatibilidad de incentivos. Los agentes económicos son los jugadores y las características declaradas (preferencias, dotaciones iniciales o tecnologías) son las variables estratégicas. Cuando se juega una estrategia se caracteriza un entorno económico, y el mecanismo en consideración determina una asignación resultante. Esta asignación, evaluada con las preferencias reales de cada consumidor, es el pago asociado a la estrategia jugada. Hurwicz dice que el mecanismo es compatible en incentivos individualmente si el vector de características reales es un equilibrio de Nash del juego. Utilizando el marco y el lenguaje de la Teoría de Juegos, considera una economía de intercambio con dos consumidores y dos mercancías, y prueba que si un consumidor falsifica sus preferencias puede manipular la formación de precios de equilibrio y obtener beneficios. Este resultado es generalizado por Otani y Sicilian (1982) para el caso de más consumidores o más mercancías. Postlewaite (1979) y Thomson (1979) prueban resultados análogos, referentes a falsificación de recursos. Más aún, Dasgupta, Hammond y Maskin (1979) prueban que con un número finito de agentes no existe ningún mecanismo de asignación que sea compatible en incentivos y óptimo de Pareto.

En vista de estos resultados negativos, y dado que la literatura de compatibilidad de incentivos consiste, en su mayoría, en resultados de imposibilidad, se plantean soluciones de tipo "second-best", que hacen referencia al grado de manipulación del mecanismo competitivo. Por ejemplo, se estudian cuestiones límites sobre qué sucede cuando aumenta el número de agentes de una economía. Este tipo de análisis tiene el interés añadido de que, desde el punto de vista de los incentivos, las diferencias notables entre bienes públicos y privados se manifiestan solamente al aumentar el número de agentes, y analizar el efecto que ello produce sobre los incentivos a una revelación sincera. (Véase Roberts (1974)). No obstante, en este trabajo nos centramos en economías de intercambio puro, sin bienes públicos, para estudiar problemas de incentivos coalicionales, referentes al grado de manipulación del mecanismo competitivo.

Los resultados obtenidos por Hurwicz (1979), Thomson (1979), Roberts (1980), y Otani y Sicilian (1990), entre otros, muestran que el conjunto de asignaciones de equilibrio de Nash de un juego de mercado (considerando como estrategias recursos, preferencias o demandas), puede estar lejos del conjunto de asignaciones de equilibrio walrasiano, independientemente del número de agentes. Por ello, estamos interesados en propiedades límites de compatibilidad de incentivos coalicionales del mecanismo competitivo desde un punto de vista genérico.

Roberts y Postlewaite (1976) prueban que el incentivo individual a desviarse de un comportamiento precio-aceptante converge a cero a medida que el número de agentes aumenta mediante réplicas, o bien si la sucesión de economías converge a una economía donde la correspondencia de precios de equilibrio sea continua.

Roberts (1980) utiliza también las técnicas de replicación de Debreu y Scarf (1963) para estudiar los puntos límites de equilibrios monopolísticamente competitivos. Con un análisis similar al utilizado por Gabszewicz y Vial (1972), pero con hipótesis menos restrictivas, prueba que, si los equilibrios perfectamente competitivos no son críticos (lo que ocurre genéricamente), entonces son puntos límite de equilibrios monopolísticamente competitivos.

Safra (1985) considera juegos de manipulación del equilibrio walrasiano vía dotaciones iniciales (sin destrucción), donde los agentes pueden declarar falsos recursos y añadir lo que ocultan a la asignación walrasiana resultante. Prueba que en economías con un número de agentes suficientemente grande existe equilibrio de Nash y que, bajo determinadas condiciones de regularidad la sucesión de asignaciones de equilibrio de Nash converge a las asignaciones walrasianas.

Los resultados previamente citados pueden interpretarse en términos de compatibilidad de incentivos de los individuos, sin considerar desviaciones de coaliciones. Roberts y Postlewaite (1976) señalan, de hecho, que la concentración en acciones individuales es, precisamente, el punto débil de esta línea de trabajo. Como ya se ha señalado, el objetivo fundamental de este trabajo es considerar comportamientos estratégicos de las coaliciones, y estudiar propiedades límites del mecanismo competitivo en términos de incentivos coalicionales. La intención no es más que obtener una justificación, distinta a las usuales, del supuesto competitivo en economías continuas y, por tanto, del acierto de denominarlas economías perfectamente competitivas.

Desde que Aumann (1964) introdujo un modelo de equilibrio general en una economía continua, la idea de competencia perfecta ha sido asociada a la no existencia de átomos en el espacio de los agentes. Ostroy y Zame (1994) muestran que si el espacio de mercancías es de dimenensión infinita, la hipótesis de no existencia de átomos difiere de la hipótesis de competencia perfecta. La distinción se basa en lo que ellos denominan "espesor" o "grosor" de la economía. Sugieren como test de competencia perfecta el hecho de que la manipulación de precios por grupos de agentes, vía falsificación de recursos, sea tan pequeña como se quiera si el tamaño de las coaliciones es arbitrariamente pequeño. Este test, que denominan test de withholding, es un modo de justificar la competencia perfecta que está en la línea de la justificación que proporciona la relación entre equilibrios no cooperativos y equilibrios walrasianos (véase, por ejemplo, Gabszewicz y Vial (1972); Roberts y Postlewaite (1976); Novshek y Sonnenschein (1978); Dubey, Mas-Colell y Shubik (1980)). Otra justificación alternativa es aportada por la literatura sobre la relación entre el Núcleo y las asignaciones de equilibrio competitivo (véase Edgeworth (1881); Shubik (1959); Debreu y Scarf (1963); Aumann (1964)), y nos referiremos a ella como test de equivalencia Core-Walras. Se sabe que en economías sin átomos definidas sobre un espacio de mercancías finito-dimensional, el Núcleo coinciden con el conjunto de asignaciones walrasianas. Más aún, basta considerar el veto de un subconjunto del conjunto total de coaliciones (el veto de coaliciones pequeñas) para eliminar los estados que no son perfectamente competitivos. (Véase Schmeidler (1972) y Moreno y Hervés (1996)). El concepto de Núcleo es un concepto de equilibrio cooperativo que no requiere el uso de los precios. Si suponemos que el intercambio en una economía es guiado por precios que los agentes individuales o las coaliciones de agentes van a intentar manipular, deberíamos poder obtener alguna propiedad del mecanismo competitivo, en términos del grado de manipulación o en términos de incentivos coalicionales, para poder concluir que la economía es perfectamente competitiva. Por ello, en este trabajo, formalizamos tests de competencia perfecta que consideran comportamientos estratégicos coalicionales, y que denominamos tests de compatibilidad de incentivos coalicionales en el límite. Esta denominación se debe a que este tipo de tests aportan una justificación de la competencia perfecta en términos del grado de manipulación de los precios por grupos de agentes, y en términos de medidas de incentivos coalicionales, en función del tamaño de las coaliciones.

En el artículo ya citado de Ostroy y Zame se prueba que, si el espacio de mercancías es de dimensión infinita, existen economías con un continuo de agentes que no superan el test de equivalencia Core-Walras ni el test de withholding. Concretamente, prueban que existe una familia de preferencias y un conjunto abierto de asignaciones iniciales que definen economías, cuyos equilibrios walrasianos no superan ninguno de los dos tests de competencia perfecta. Además, hacen ver que las mismas condiciones de "grosor" de los mercados, que conducen a la equivalencia Core-Walras, garantizan la continuidad genérica de la correspondencia de precios de equilibrio. De hecho, muestran que las economías que consideran tienen la propiedad de que si superan uno de los tests de competencia perfecta, también superan el otro, al menos genéricamente.

Estos resultados conducen a preguntarse si, en el caso finito-dimensional, el test de equivalencia Core-Walras es equivalente al test de compatibilidad de incentivos coalicionales en el límite. Más aún, nos preguntamos si cualquiera de estos tests de competencia perfecta son una caracterización de las economías perfectamente competitivas. Por ejemplo, el hecho de que una economía verifique que el veto de coaliciones pequeñas elimine los estados que no son de equilibrio competitivo, ¿permite concluir que dicha economía supera cualquiera de los tests de competencia perfecta a que hemos hecho referencia?. Es decir, cabe preguntarse si un resultado análogo se mantiene en cualquier economía perfectamente competitiva (economías "espesas", física o económicamente). Esto es, si en economías continuas que no son "espesas" (thin market economies) no es cierto que sea suficiente considerar el veto de coaliciones pequeñas para obtener los estados del núcleo y de equilibrio.

Como ya se ha señalado, se definen aquí tests de competencia perfecta en términos de los incentivos que pueden tener las coaliciones a adoptar un comportamiento estratégico, desviándose de un comportamiento precio-aceptante para manipular la formación de precios de equilibrio en su propio beneficio. Los resultados que se obtienen, ponen de manifiesto que, en el caso finito-dimensional, el problema de la competencia perfecta se resuelve al considerar un continuo de agentes, en el sentido de que los precios de equilibrio competitivo pueden considerarse como aquellos que no son manipulados por grupos de agentes arbitrariamente pequeños. En este trabajo, consideramos que el incentivo de una coalición a desviarse de un comportamiento precio-aceptante es medido bien por el incremento medio de utilidad indirecta que puedan conseguir los agentes que la forman o bien por el incremento agregado de ésta. Probamos que para un conjunto genérico de economías continuas, definidas sobre un espacio de mercancías de dimensión finita, el incentivo de una coalición a adoptar un comportamiento no competitivo puede ser despreciado si el tamaño de la coalición es arbitrariamente pequeño. Los resultados establecidos para economías continuas admiten interpretaciones discretas que conducen a resultados límites sobre compatibilidad de incentivos coalicionales para sucesiones de economías finitas, generalizando los resultados obtenidos por Roberts y Postlewaite.

El resto de esta nota se organiza como sigue. La sección 2 contiene notaciones y definiciones. Se formaliza un test de competencia perfecta, que denominamos test de compatibilidad de incentivos coalicionales. En la sección 3 se considera una economia con un continuo de agentes, donde sólo se distingue un número finito de consumidores distintos. Probamos que en estas economías continuas de m tipos el incentivo de cualquier coalición a comportarse no competitivamente es arbitrariamente pequeño si el tamaño de la coalición es suficientemente pequeño. Algunos resultados de García-Cutrín y Hervés (1993) nos permiten establecer, en la sección 4, una interpretación discreta para economías réplicas. En la sección 5 introducimos un concepto de compatibilidad de incentivos coalicionales en el límite en sentido fuerte. Probamos que el mecanismo competitivo satisface este tipo de compatibilidad en un conjunto residual de economías. Este resultado admite una interpretación discreta para sucesiones de economías descritas vía medidas simples, que establecemos en la sección 6. En la sección 7 consideramos un test de competencia perfecta más particular, considerando como estrategias únicamente recursos. La sección 8 contiene comentarios y observaciones finales.

2 Notación y definiciones

Consideremos una economía de intercambio puro $\mathcal{E}$ definida sobre el espacio de mercancías $X = \mathbb{R}^{\ell}$. El espacio de medida $(I, \mathcal{A}, \mu)$ representa los agentes que constituyen $\mathcal{E}$, siendo I el conjunto de agentes y μ una medida sobre la σ-álgebra $\mathcal{A}$ de conjuntos medibles. Cada agente $t \in I$ viene caracterizado por su conjunto de consumo $X_t \subset X$, sus recursos iniciales $\omega_t \in X_t$, y una relación de preferencias $\succeq_t$ sobre su conjunto de consumo, representable por una función de utilidad $U_t : X_t \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Sea P el simplex de $\mathbb{R}^{\ell}_{+}$. Denotemos por C_t la correspondencia de exceso de demanda competitiva del agente $t \in I$. Esto es, para cada $p \in P$ $C_t(p) = \{z \in \mathbb{R}^{\ell} | z + \omega_t$ maximiza U_t sobre $B_t(p)\}$, siendo $B_t(p) = \{x \in X_t | px \leq \omega_t\}$ la restricción presupuestaria del agente $t \in I$ cuando p es el sistema de precios que prevalece. Son bien conocidas condiciones suficientes para que $C_t(p) \neq \emptyset$. Obsérvese que $C_t(p)$ es cerrado para todo agente $t \in I$ y para todo sistema de precios $p \in P$. Se dice que el sistema de precios $p \in P$ es de equilibrio competitivo en la economía $\mathcal{E}$ si $0 \in \int_I C_t(p) d\mu(t)$. Denotemos por $\Pi(\mathcal{E})$ el conjunto de precios de equilibrio competitivo de la economía $\mathcal{E}$. Nótese que para determinar $\Pi(\mathcal{E})$ basta conocer las correspondencias de respuesta competitiva C_t para cada agente $t \in I$.

Una coalición de agentes en la economía $\mathcal{E}$ es un conjunto medible $S \subset I$, tal que $\mu(S) > 0$. Estamos interesados en estudiar propiedades de incentivos coalicionales del comportamiento competivo o precio-aceptante. Para ello, consideramos que los agentes pueden declarar otras correspondencias de respuesta a los precios diferentes de la competitiva C_t. Así pues, denotemos por Θ_t el conjunto de estrategias que el agente $t \in I$ puede utilizar para desviarse de un comportamiento precio-aceptante. Para cada $t \in I$ se define Θ_t como el siguiente conjunto de correspondencias de P en $\mathbb{R}^{\ell}$

$$\Theta_t = \{ \quad Z : P \rightarrow \mathbb{R}^{\ell} \ \mid \text{Para cada } \ p \in P \ \text{ se verifica que } \ Z(p) + \omega_t \subset X_t \\ \text{y,} \ \ p\theta \leq 0 \ \text{ cualquiera que sea } \ \theta \in Z(p)\}$$

Por ejemplo, las estrategias de un agente $t \in I$ pueden consistir en las correspondencias de exceso de demanda competitivas resultantes de declarar preferencias definidas por U'_t en vez de U_t y recursos iniciales $\omega'_t \leq \omega_t$. Un caso particular es el considerado por Hurwicz (1972) donde las estrategias consideradas son únicamente preferencias.

Un perfil de estrategias es una aplicación $\Theta : I \rightarrow \bigcup_{t \in I} \Theta_t$, tal que $\Theta(t) = \Theta_t \in \Theta_t$ para casi todo $t \in I$. Sea $S \subset I$ una coalición de agentes de la economía $\mathcal{E}$. Un perfil de estrategias para la coalición S es una aplicación $\Theta^S : S \rightarrow \bigcup_{t \in S} \Theta_t$ tal que $\Theta^S(t) = \Theta^S_t \in \Theta_t$ para casi todo $t \in S$. Decimos que un sistema de precios $p \in P$ es alcanzable por la coalición S en la economía $\mathcal{E}$, y denotamos $p \in \Pi(S,\mathcal{E})$, si existe un perfil de estrategias Θ^S para la coalición S tal que $0 \in \int_{I\setminus S} C_t(p)d\mu(t) + \int_S \Theta_t^S(p)d\mu(t)$. Es decir, si $p \in \Pi(S,\mathcal{E})$ entonces existen $z_t \in C_t(p)$, para cada $t \notin S$ y $\theta_t \in Z_i(p)$, para cada $t \in S_i$, con $Z_i \in \Theta_i$, tales que $0 = \int_{I\setminus S} z_t d\mu(t) + \int_S \theta_t d\mu(t)$. Decimos entonces que $x^S : S \to \bigcup_{t\in S} X_t$, con $x^S(t) = \theta_t + \omega_t$ es una asignación factible para la coalición S en la economía $\mathcal{E}$, y denotamos $x^S \in X(S,\mathcal{E})$.

Sea $\mathcal{S}$ un conjunto de coaliciones en la economía $\mathcal{E}$. Definamos $\Pi(\mathcal{S},\mathcal{E}) = \bigcup_{S\in\mathcal{S}} \Pi(S,\mathcal{E})$. Nótese que si $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$, entonces $\Pi(\mathcal{S}',\mathcal{E}) \subset \Pi(\mathcal{S},\mathcal{E})$. En particular, $\Pi(\mathcal{E}) \subset \Pi(S,\mathcal{E}) \subset \Pi(I,\mathcal{E})$ cualquiera que sea la coalición $S \subset I$.

Definición 2.1 *Decimos que la respuesta competitiva es $\mathcal{S}$-compatible en incentivos en la economía $\mathcal{E}$ si para cualquier coalición $S \in \mathcal{S}$ y cualquier $x \in X(S,\mathcal{E})$ existe una asignación competitiva x^* tal que $U_t(x_t^*) \geq U_t(x_t)$, para casi todo $t \in S$.*

Observaciones. Si $\mathcal{S}$ es el conjunto de coaliciones formados por un sólo agente, entonces la definición 2.1 coincide con la noción de compatibilidad de incentivos individual establecida por Roberts y Postlewaite (1976). En este caso, si la respuesta competitiva no es $\mathcal{S}$-compatible en incentivos, entonces declarar la verdadera demanda no es perfil de equilibrio Cournot-Nash en el sentido de Otani y Sicilian (1982).

Se sabe que en economías con un número finito de agentes hay incentivos a no adoptar un comportamiento precio-aceptante. Si un agente se comporta estratégicamente, puede manipular la formación de precios en su propio beneficio. Es decir, el mecanismo competitivo no es compatible en incentivos individualmente y, por tanto, tampoco es compatible en incentivos coalicionalmente. En economías continuas un agente individual (o un conjunto de agentes de medida nula) no influye en la formación de precios por un cambio de comportamiento. Sin embargo, si una coalición actúa estratégicamente puede modificar los precios de equilibrio en beneficio de todos los individuos que la constituyen. Por otra parte, si consideramos el juego de mercado asociado a una economía con un continuo de agentes, entonces los equilibrios de Nash de dicho juego conducen a los equilibrios walrasianos de la economía, y recíprocamente (véase Moreno y Hervés (1994)).

A pesar de que en economías sin átomos las coaliciones tengan incentivo a no adoptar un comportamiento precio-aceptante, cabe esperar que tal incentivo disminuya a medida que el tamaño de la coalición se hace menor. De hecho, para concluir que una economía continua es perfectamente competitiva deberíamos poder decir que tiene la propiedad de que la ganancia de utilidad que los miembros de una coalición pueden conseguir, actuando no competitivamente, converge a cero si consideramos sucesiones de coaliciones cuya medida converja a cero. Interpretamos esta propiedad como un test de competencia perfecta, y nos referiremos a él como test de compatibilidad de incentivos coalicionales en el límite. A continuación formalizamos dicho test.

Definición 2.2 *Decimos que el mecanismo competitivo es compatible en incentivos coalicionalmente en el límite en la economía $\mathcal{E}$ si para cualquier sucesión de coaliciones $(S_n) \subset I$, con $\mu(S_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$, se verifica que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\bar{n}$, tal que para todo $n \geq \bar{n}$ se tiene lo siguiente. Si $x^n \in X(S_n, \mathcal{E})$ entonces existe x asignación competitiva de $\mathcal{E}$ tal que $U_t(x(t)) > U_t(x^n(t)) - \varepsilon$, para casi todo $t \in S_n$.*

Definición 2.3 *Decimos que la economía sin átomos $\mathcal{E}$ supera el test de compatibilidad de incentivos coalicionales si mecanismo competitivo es compatible en incentivos coalicionalmente en el límite en la economía $\mathcal{E}$.*

La interpretación de la definición de compatibilidad coalicional en el límite es la siguiente. Consideremos que el incentivo de una coalición a comportarse no competitivamente viene dado por la ganancia agregada de utilidad (o si se quiere por la ganancia media) que los agentes que la forman pueden conseguir por desviarse de un comportamiento precio-aceptante. Entonces, si el mecanismo competitivo es compatible en incentivos coalicionalmente en el límite, se tiene que el incentivo de cualquier coalición $S \subset I$ a comportarse no competitivamente es arbitrariamente pequeño si el tamaño de la coalición es suficientemente pequeño. En este caso, diremos que la economía supera el test de competencia perfecta que hemos denominado test compatibilidad de incentivos coalicionales.

3 Compatibilidad coalicional de incentivos en el límite en economías continuas de m tipos de agentes

Consideremos una economía de intercambio puro $\mathcal{E}$ con un continuo de agentes, y definida sobre el espacio de mercancías $X = \mathbb{R}^\ell$. Los agentes que constituyen $\mathcal{E}$ vienen representados por el espacio de medida $(I, \mathcal{A}, \mu)$, siendo $I = [0,1]$ el conjunto de agentes, $\mathcal{A}$ la σ-álgebra de conjuntos medibles y μ la medida de Lebesgue sobre $\mathcal{A}$. A pesar de que la economía esté formada por un continuo de agentes, consideramos que el observador tiene una capacidad limitada y sólo distingue un número finito de tipos distintos. Así, el intervalo real $[0,1]$ está dividido en m subintervalos disjuntos dos a dos, cada uno de los cuales representa un tipo de agente. Esto es, $I = \bigcup_{i=1}^m I_i$, donde $I_i = [q_{i-1}, q_i)$, si $i \neq m$, $I_m = [q_{m-1}, 1]$; con $q_0 = 0, q_i \in \mathbb{Q}$, para cada $i = 1, \ldots, m-1$. La medida $\mu(I_i)$ de cada subintervalo I_i representa el peso relativo que los agentes de tipo i tienen en la economía.

Observación. Nótese que estamos considerando subintervalos de extremos racionales. Por tanto, podemos escribir $q_i = \frac{a_i}{q}$, con $a_i, q \in \mathbb{N}$, para cada $i = 1, \ldots, m-1$. De este modo, podemos considerar que el intervalo $I = [0,1]$ está dividido en q subintervalos de igual longitud, con $q \geq m$. En este caso puede suceder que subintervalos distintos represente tipos idénticos. Por ello, aunque los subintervalos que representan diferentes tipos no tengan por qué ser de la misma longitud, por simplicidad suponemos que $I_i = \left[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}\right)$, si $i \neq m$, $I_m = \left[\frac{m-1}{m}, 1\right]$.

Cada agente $t \in I$ viene caracterizado por su conjunto de consumo $X_t \subset X$ cerrado y convexo, sus recursos iniciales $\omega_t \in X_t$, y una relación de preferencias $\succsim_t$ sobre su conjunto de consumo, representable por una función de utilidad $U_t : X_t \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y cuasi-cóncava. Como en la economía $\mathcal{E}$ sólo distinguimos un número finito m de agentes distintos, se tiene que las características de cada consumidor $t \in I$ vienen dadas por $X_t = X_i$, $\omega_t = \omega_i$, y $U_t = U_i$, si $t \in I_i$, siendo I_i el conjunto de agentes de tipo i.

Consideramos que agentes pueden actuar estratégicamente. Así, para cada $t \in I$, el conjunto de estrategias Θ_t, viene dado por $\Theta_t = \Theta_i$, si $t \in I_i$.

Siguiendo la notación utilizada en la sección anterior, Θ_i es el siguiente conjunto de correspondencias de P en $\mathbb{R}^\ell$

$$\begin{aligned}\Theta_i = \{ \quad Z : P \longrightarrow \mathbb{R}^\ell \;\; & | \text{ Para cada } \; p \in P \;\text{ se verifica que } \; Z(p) + \omega_i \subset X_i \\ & \;\; \text{y, } \;\; p\theta \leq 0 \;\; \text{cualquiera que sea } \;\; \theta \in Z(p)\}\end{aligned}$$

Denotemos por C_i la correspondencia de exceso de demanda competitiva de los agentes $t \in I_i$, esto es, de los agentes de tipo i.

Como hemos señalado, aunque en economías continuas las coaliciones tengan incentivo a no adoptar un comportamiento precio-aceptante, cabe esperar que tal incentivo disminuya a medida que el tamaño de la coalición se hace menor. En efecto, el objetivo central de esta sección es demostrar que la ganancia de utilidad que los miembros de una coalición pueden conseguir, actuando no competitivamente, converge a cero si consideramos sucesiones de coaliciones cuya medida converja a cero. Esto es, se trata de probar que las economías continuas de m tipos de agentes superan el test de compatibilidad de incentivos coalicionales.

Para comprobar la compatibilidad de incentivos coalicionales en el límite del mecanismo competitivo, establecemos algunos resultados previos, donde utilizaremos la notación que sigue. Dada una coalición S, denotamos $S^i = S \bigcap I_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. Definimos $J_S = \{i \in \{1, \ldots, m\} | \mu(I_i \setminus S^i) = 0\}$, y $H_S = \{i \in \{1, \ldots, m\} | \mu(S^i) > 0\}$.

Lema 3.1 *Si $p \in \Pi(S, \mathcal{E})$ para alguna coalición $S \in \mathcal{A}$, entonces p es alcanzable por S vía una estrategia común para todos los agentes del mismo tipo.*

Demostración. Sea una coalición $S \subset I$ y sea $p \in \Pi(S, \mathcal{E})$. Veamos que entonces existen $z_i \in C_i(p)$, para cada $i \notin J_S$ y existen $\theta_i \in Z_t(p)$, con $Z_t \in \Theta_i$, para cada

$t \in S^i$, tales que $0 = \sum_{i=1}^m (\mu(I_i) - \mu(S^i)) z_i + \sum_{i=1}^m \mu(S^i)\theta_i$. Como $p \in \Pi(S, \mathcal{E})$ se tiene que existen $z_t \in C_t(p)$, para cada $t \in I \setminus S$ y existen $\theta_t \in Z_t(p)$, con $Z_t \in \Theta_t$, para cada $t \in S$, tales que $0 = \sum_{i=1}^m \int_{I_i \setminus S^i} z_t d\mu(t) + \sum_{i=1}^m \int_{S^i} \theta_t d\mu(t)$. Defininamos $z_i = \frac{1}{\mu(I_i \setminus S^i)} \int_{I_i \setminus S^i} z_t d\mu(t)$ para cada $i \notin J_S$, y $\theta_i = \frac{1}{\mu(S^i)} \int_{S^i} \theta_t d\mu(t)$ para cada $i \in H_S$. Por construcción de θ_i y por definición de los conjuntos de estrategias, se tiene que $\theta_i \in \Theta_i$, para todo i. Basta ahora probar que para cualquier tipo i se verifica que $z_i \in C_i(p)$. Supongamos que no sucede así. Por construcción $pz_i \leq 0$ para todo i. Luego, si $z_i \notin C_i(p)$ para algún tipo i, entonces existe x tal que $px \leq p\omega_i$ y $x \succ_i z_i + \omega_i$. Consideremos el conjunto $A = \{y \in X_i | y \succeq_i x\}$. Nótese que $z_t + \omega_i \in A$, para todo $t \in I_i \setminus S^i$. Teniendo en cuenta que los conjuntos de consumo son convexos y cerrados y las preferencias continuas y convexas, se deduce A es cerrado y convexo. Por otra parte, se tiene que $z_i + \omega_i \in co(z + \omega(I_i \setminus S^i))$. Luego $z_i + \omega_i \in A$, lo que contradice que $x \succ_i z_i + \omega_i$. En consecuencia, para todo i se tiene que $z_i \in C_i(p)$. Esto permite concluir que, si $p \in \Pi(S, \mathcal{E})$, entonces p es alcanzable por la coalición S vía un perfil de estrategias Θ^S constante en tipos.

Q.E.D.

Corolario 3.1 *Sean las coaliciones $S, S' \subset I$, verificando $\mu(S^i) \leq \mu(S'^i)$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$. Entonces $\Pi(S, \mathcal{E}) \subset \Pi(S', \mathcal{E})$.*

Demostración. Basta tener en cuenta que la correspondencia de exceso de demanda C_i de los agentes de tipo i pertenece a su conjunto de estrategias Θ_i cualquiera que sea $i \in \{1, \ldots, m\}$, y aplicar el lema anterior.

Q.E.D.

Lema 3.2 *Para cada sucesión de coaliciones (S_n), tal que $\mu(S_n)$ converge a cero, existe una sucesión de coaliciones (S'_n), tal que $\mu(S'_n)$ converge a cero y además $\Pi(S_{n+1}, \mathcal{E}) \subset \Pi(S'_{n+1}, \mathcal{E}) \subset \Pi(S'_n, \mathcal{E})$, para todo n.*

Demostración. Teniendo en cuenta que $\mu(S_n) \to 0$, definamos la aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ como sigue. Dado $k \in \mathbb{N}$, $\sigma(k)$ es un entero positivo, tal que para todo $n \geq \sigma(k)$ se verifica $\mu(S_n^i) \leq \frac{1}{m+k}$, para todo $i = 1, \ldots, m$. Además $\sigma(k+1) > \sigma(k)$, para todo k. Tomamos $S'_n = \bigcup_{i=1}^m S'^i_n$, con $S'^i_n = \left[\frac{i-1}{m}, \frac{i-1}{m} + \frac{1}{m+k}\right)$, si $\sigma(k) \leq n < \sigma(k+1)$. Por construcción $\mu(S'_n)$ converge a cero y para cada n se verifica $\mu(S_n^i) \leq \mu(S'^i_n)$ y $\mu(S'^i_n) \leq \mu(S'^i_{n+1})$, cualquiera que sea $i \in \{1, \ldots, m\}$. Luego, $\Pi(S_n, \mathcal{E}) \subset \Pi(S'_n, \mathcal{E})$ y $\Pi(S'_{n+1}, \mathcal{E}) \subset \Pi(S'_n, \mathcal{E})$, para todo n.

Q.E.D.

Lema 3.3 *Sean C_i, $i = 1, \ldots, m$, conjuntos cerrados y acotados inferiormente de $\mathbb{R}^\ell$, y $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^m_{++}$ cualquier cerrado de $\mathbb{R}^m$. Entonces, la correspondencia $F : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^\ell$, definida por $F(\alpha) = \sum_{i=1}^m \alpha_i C_i$, es cerrada.*

Demostración. Consideremos la sucesión (α^n, z^n), tal que $z^n \in F(\alpha^n)$ para todo n, (α^n) converge a $\alpha \in \mathrm{IR}^m_{++}$ y (z^n) converge a $z \in \mathrm{IR}^\ell$. Veamos que $z \in F(\alpha)$. En efecto, $z^n = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^n c_i^n$, con $c_i^n \in \mathcal{C}_i$, para todo n. Luego para cualquier $h \in \{1, \ldots, \ell\}$ se tiene que $(c_k^n)_h = \frac{z_h^n}{\alpha_k^n} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{m} \frac{\alpha_i^n}{\alpha_k^n}(c_i^n)_h$. Como los conjuntos $\mathcal{C}_i$ están acotados inferiormente, la sucesión (α^n, z^n) está acotada, y $\alpha >> 0$, se deduce entonces que la sucesión (c_i^n) está en un compacto, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$. Por tanto, existe una subsucesión $(c_i^{n_k})$ convergente a $c_i \in \mathcal{C}_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. Se concluye entonces que $z = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i c_i$, y por tanto $z \in F(\alpha)$.

Q.E.D.

Observaciones.

1. Nótese que en el lema puede sustituirse IR^ℓ_{++} por $-\mathrm{IR}^\ell_{++}$.

2. Si alguna coordenada de α es cero, entonces el lema puede no ser cierto. Por ejemplo, consideremos $\mathcal{C}_1 = [1, \infty) \times \{0\}$ y $\mathcal{C}_1 = \{0\} \times [1, \infty)$. Se tiene que $(1,1) \in F\left(\left(\frac{1}{n}, 1\right)\right)$, para todo n, y sin embargo, $(1,1) \notin F((0,1)) = \{(0,y) \in \mathrm{IR}^2 | y \geq 1\}$. Por tanto, en este caso F no es cerrada en ningún entorno de $\alpha = (0,1)$. Más aún, nótese que la correspodencia F no tiene grafo cerrado en ningún entorno de $(x,y) \in Fr(\mathrm{IR}^2_+$, donde $Fr(\mathrm{IR}^2_+$ denota la frontera de IR^2_+.

3. Señalar también que bajo las condiciones del lema, e incluso añadiendo el supuesto de convexidad de los conjuntos $\mathcal{C}_i$, $F : \mathrm{IR}^m \to \mathrm{IR}^\ell$ no tiene por qué ser cerrada. En efecto, sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ los conjuntos cerrados, acotados inferiormente y convexos, definidos por $\mathcal{C}_1 = \left\{(x,y) \in \mathrm{IR}^2 | x \geq 1,\ y \geq x + \frac{1}{x}\right\}$, $\mathcal{C}_2 = \left\{(x,y) \in \mathrm{IR}^2 | 0 \leq y \leq x - \frac{1}{x}\right\}$, y sea $F : \mathrm{IR}^2 \to \mathrm{IR}^2$ definida por $F(\alpha) = \alpha_1 \mathcal{C}_1 + \alpha_2 \mathcal{C}_2$. Tomemos $\alpha^n = \left(1 + \frac{1}{n^2}, -1 + \frac{1}{n^2}\right)$. La sucesión (α^n) converge a $(1,-1)$. Por otra parte $z^n = \left(\frac{2}{n}, \frac{4}{n}\right) \in F(\alpha^n)$ para todo n, y (z^n) converge a $(0,0)$. Sin embargo, $(0,0) \notin F(1,-1)$, ya que $\mathcal{C}_1 \bigcap \mathcal{C}_2 \neq \emptyset$.

4. Nótese que la suma de cerrados no es, en general, un conjunto cerrado. La acotación inferior de que los conjuntos $\mathcal{C}_i$ es pues, necesaria para garantizar que la correspondencia F tome valores cerrados.

5. Por otra parte, observése que la correspondencia F no tiene por qué ser semicontinua superiormente. Para ello, considérese $F : \mathrm{IR}^2 \to \mathrm{IR}^2$ definida por $F(\alpha) = \alpha_1 \mathcal{C}_1 + \alpha_2 \mathcal{C}_2$,siendo $\mathcal{C}_1 = [1, \infty) \times \{0\}$ y $\mathcal{C}_1 = \{0\} \times [1, \infty)$. Veamos que F no es semicontinua superiormente en $(1,1)$. En efecto, sea

$U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \dfrac{x}{1+x} < y,\ x > 0\right\} \bigcap \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \dfrac{y}{1+y} < x,\ y > 0\right\}$. U es entorno de $F(1,1) = [1,\infty) \times [1,\infty)$, y para cualquier entorno V de $(1,1)$ se verifica que $F(\alpha') \bigcap U^c \neq \emptyset$, con $\alpha' \in V$. Más aún, análogamente se prueba que F no es semicontinua superiormente en ningún punto de $\mathbb{R}^2$.

Lema 3.4 *Supongamos que para cada i los conjuntos de consumo X_i son acotados inferiormente y que dado $p = (p_1, \dots, p_\ell) \in P$ se verifica que $p_h = 0 \Rightarrow z_h > 0$ para todo $z \in C_i(p)$, para todo $i \in \{1, \dots, m\}$. Sea (S_n) una sucesión de coaliciones, tal que $\mu(S_n)$ converge a cero. Si $p \in \Pi(S_n, \mathcal{E})$, para todo $n \geq n_0$, entonces $p \in \Pi(\mathcal{E})$.*

Demostración. Supongamos que $p \in \Pi(S_n, \mathcal{E})$ para todo $n \geq n_0$ y $p \notin \Pi(\mathcal{E})$. Entonces, para cada $n \geq n_0$ existen $z_i^n \in C_i(p)$, para cada $i \notin J_{S_n} = J_n$, y $\theta_i^n \in Z_i(p)$, con $Z_i \in \Theta_i$, para cada $i \in H_{S_n} = H_n$, tales que $0 = \sum_{i \notin J_n} \frac{\mu(I_i \setminus S_n^i)}{\mu(I_i)} z_i^n + \sum_{i \in H_n} \frac{\mu(S_n^i)}{\mu(I_i)} \theta_i^n$. Sea $a \in \mathbb{R}^\ell$ una cota inferior para todo X_i. Podemos suponer $a \leq 0$. Se deduce entonces que $\sum_{i \in H_n} \mu(S_n^i) \theta_i^n \geq \sum_{i \in H_n} \mu(S_n^i)(a - \omega_i)$. Consideremos una sucesión de números reales (k_n) tal que para todo n se verifica $\frac{\mu(S_n^i)}{\mu(I_i)} \leq \frac{1}{k_n}$ para todo i, y $k_n \to \infty$. Tomando $h^n = -\left(\sum_{i \notin J_n} \frac{\mu(I_i \setminus S_n^i)}{\mu(I_i)} z_i^n\right)$, se tiene que $h^n \geq \sum_{i \in H_n} \frac{1}{k_n}(a - \omega_i)$.

Definamos la siguiente correspondencia F. Dado $\alpha = (\alpha_i)_{i=1}^m$, con $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $F(\alpha) = \sum_{i=1}^n \alpha_i C_i(p)$. $0 \notin F(1)$, pues $p \notin \Pi(\mathcal{E})$. Por el lema 3.3 se tiene que F tiene grafo cerrado en cualquier entorno U de $1 \in \mathbb{R}^m$, que esté contenido en $\mathbb{R}^m_{++}$. Por tanto, existe n^*, tal que para todo $n > n^*$ se verifica $0 \notin F(\alpha_n)$, siendo $\alpha_n = \left(\frac{\mu(I_i \setminus S_n^i)}{\mu(I_i)}\right)_{i=1}^m$. Más aún, como $h^n \in F(\alpha_n)$ y (α_n) converge a $1 \in \mathbb{R}^m$, la sucesión h^n no puede converger a cero.

Sea $B = \{h \in \{1, \dots, \ell\} | p_h = 0\}$. Si $B \neq \emptyset$, entonces, por hipótesis, $(z_i^n)_h > 0$, para todo $h \in B$, para todo n y para todo $i \in \{1, \dots, m\}$. De la desigualdad $k_n h^n \geq \sum_{i \in H_n}(a - \omega_i)$ para todo n, se deduce que $(z_i^n)_h$ converge a cero, para todo $h \in B$, todo $i \in \{1, \dots, m\}$. Luego $(h^n)_h$ converge a cero, para todo $h \in B$. Por otra parte se tiene que $ph^n = 0$ para todo n. Esto implica que la sucesión (h^n) converge a cero, lo que está en contradicción con el carácter cerrado de F.

Supongamos ahora $B = \emptyset$, esto es $p >> 0$. Veamos que entonces que alguna componente de h^n es estrictamente negativa. Supongamos que no es así, es decir, supongamos $p >> 0$ y $h^n \geq 0$. Como los conjuntos de consumo son acotados inferiormente se deduce entonces que $-h^n \geq \sum_{i=1}^m (a - \omega_i)$. Luego, $-h^n$ tiene alguna subsucesión convergente a h y $h \neq 0$, pues $0 \notin F(1)$. Por otra parte, $-h^n = \sum_{i \in H_n} \frac{\mu(S_n^i)}{\mu(I_i)} \theta_i^n$, y $\mu(S_n^i) \to 0$, para todo i. Esto implica que existe i tal que la sucesión (θ_i^n) no está acotada en alguna componente k. Pero esto contradice el que $p\theta_i^n \leq 0$ para todo n y para todo i. Luego, en efecto, h^n tiene alguna componente negativa para todo $n > n^*$. Para cada $n > n^*$ sea $j(n)$ tal que $h^n_{j(n)} < 0$. Pero como $k_n h^n_{j(n)} \geq (\sum_{i\in H_n}(a-\omega_i))_{j(n)}$, y $k_n h^n_{j(n)} < 0$ para todo $n \geq n^*$, se deduce que la sucesión $h^n_{j(n)}$ converge a cero. Por tanto, la sucesión cuyo n-ésimo término es la coordenada menor de h^n converge a cero. Como $ph^n = 0$ para todo n y $p >> 0$, se obtiene que (h^n) converge a $0 \in \mathbb{R}^\ell$. Esto contradice el que F sea cerrada. La contradicción proviene de haber supuesto que $p \notin \Pi(\mathcal{E})$.

Q.E.D.

El siguiente lema establece condiciones suficientes para que el conjunto de precios alcanzables por una coalición sea un conjunto cerrado. Para ello, denotemos $P^* = \{p \in P | \int_I C_t(p) d\mu(t) \neq \emptyset\}$.

Lema 3.5 *Supongamos que la economía $\mathcal{E}$ verifica*

(i) X_i es acotado inferiormente para todo $i \in \{1,\ldots,m\}$

(ii) C_t tiene grafo cerrado sobre P^* para todo $t \in I$, y

(iii) Si $p \in P \setminus P^*$ se verifica lo siguiente. Para cada $r \in \mathbb{R}$ existe un entorno V de p y un tipo de agente $i \in \{1,\ldots,m\}$ tal que si $z = (z_1,\ldots,z_\ell) \in C_i(p')$, con $p' \in V$, entonces $z_h > r$, para algún $h \in \{1,\ldots,\ell\}$.

Entonces $\Pi(S,\mathcal{E})$ es cerrado para cualquier coalición S que verifique $J_S = \emptyset$, es decir, $\mu(I_i \setminus S^i) > 0$ para todo $i \in \{1,\ldots,m\}$.

Demostración. Sea $S \subset I$ en las condiciones del lema y sea (p_k) una sucesión de precios convergente a p_0, tal que $p_k \in \Pi(S,\mathcal{E})$, para todo k. Nótese que entonces $(p_k) \subset P^*$. Definamos la correspondencia G como la que a cada $p \in P$ le asocia el conjunto $G(p) = C(p)+\sum_{i=1}^m \mu(S^i)G_i(p)$ en $\mathbb{R}^\ell$, siendo $C(p) = \sum_{i=1}^m \mu(I_i \setminus S^i)C_i(p)$ y $G_i(p) = \{Z_i(p) | Z_i \in \Theta_i\}$. C tiene grafo cerrado sobre P^*, pues para todo $t \in I$ se verifica que C_t es cerrada sobre P^* y toma valores cerrados y acotados inferiormente. Por definición de Θ_i, se tiene que G_i es cerrada y toma valores cerrados y acotados inferiormente. Luego, G tiene grafo cerrado sobre P^*. Basta ahora probar que $p_0 \in P^*$. Supongamos que no ocurre así. Como $0 \in G(p_k)$, para todo k, existen $z_i^k \in C_i(p_k)$, y existen $\theta_i^k \in G_i(p_k)$, tales que para todo k se verifica $\sum_{i=1}^m \mu(I_i \setminus S^i) z_i^k + \sum_{i=1}^m \mu(S^i)\theta_i^k = 0$. Además, existe $b < 0$, tal que $b \leq (z_i^k)_h$ y $b \leq (\theta_i^k)_h$, para todo $h \in \{1,\ldots,\ell\}$ y para todo k. Sea $r > -b\left(\frac{1}{\min_i \mu(I_i \setminus S_i)} - 1\right)$. Por *(iii)* existe $\bar{k}$ tal que para cada $k > \bar{k}$ se tiene que $(z_i^k)_h > r$, para algún $i \in \{1,\ldots,m\}$ y para algún bien $h \in \{1,\ldots,\ell\}$. Lo cual contradice el que $0 \in G(p_k)$, para todo k ó, equivalentemente, $p_k \in \Pi(S,\mathcal{E})$, para todo k.

Q.E.D.

Consideremos una sucesión de coaliciones (S_n), con $\mu(S_n) \to 0$. Supongamos que el incentivo de la coalición S_n a desviarse de un comportamiento precio-aceptante viene dado bien por el incremento medio de utilidad que pueden conseguir los agentes que la forman, o bien por el incremento agregado. A continuación se prueba que entonces el incentivo de la coalición S_n a adoptar un comportamiento no competitivo es arbitrariamente pequeño si n es suficientemente grande.

Teorema 3.1 *Sea $\mathcal{E}$ una economía en las condiciones de los lemas anteriores. Supongamos que las funciones indirectas de utilidad V_i son continuas en cualquier $p \in \Pi(\mathcal{E})$, para todo $i \in \{1,\ldots,m\}$. Entonces el mecanismo competitivo es compatible en incentivos coalicionalmente en el límite en $\mathcal{E}$.*

Demostración. Supongamos que no se verifica la compatibilidad en incentivos coalicional en el límite. Entonces, existe $\varepsilon > 0$ y existe una sucesión de asignaciones (x^k) tal que $x^k \in X(S_k, \mathcal{E})$, y tal que para cada asignación competitiva x existe algún tipo de agente $i_0 \in \{1,\ldots,m\}$ para el que se verifica $U_{i_0}(x_t^k) > U_{i_0}(x_t) + \varepsilon$, , para casi todo $t \in S^{i_0}$, para todo k. Sea $p^k \in \Pi(S_k, \mathcal{E})$ el sistema de precios vía el cual x^k es una asignación alcanzable por la coalición S. Por el lema 3.1, existe (S'_k), con $\mu(S'_k) \to 0$, tal que $p^k \in \Pi(S'_{k'}, \mathcal{E})$, para todo $k' \leq k$. (p^k) es acotada y, por tanto, contiene una subsucesión, que también denotamos (p^k), convergente a p. Por el lema 3.5, $\Pi(S'_k, \mathcal{E})$ es cerrado para todo $k > k_0$. Luego, $p \in \bigcap_{k>k_0} \Pi(S'_k, \mathcal{E})$. Aplicando el lema 3.4 se tiene que $p \in \Pi(\mathcal{E})$. Por otra parte se tiene que $V_i(p^k) \geq U_t(x_t^k)$, para casi todo $t \in S^i$, para todo i y para todo k. Sea x asignación de equilibrio competitivo a precios p, con $x_t = x_i$ para casi todo $t \in I_i$, para todo i. Como V_i es continua en p, se deduce que $\lim_k sup\ U_t(x_t^k) \leq V_t(p) = V_t(x_t)$, para casi todo $t \in I$. Por definición, existe $\bar{k}$ tal que $\lim_k sup\ U_i(x_i^k) \geq U_i(x_i^k) - \frac{\varepsilon}{2}$, para todo i, para todo $k \geq \bar{k}$. Se obtiene entonces una contradicción con que $U_{i_0}(x_t^k) > U_{i_0}(x_t) + \varepsilon$, para casi todo $t \in S^{i_0}$, para todo k.

Q.E.D.

Obtenemos de este modo que una economía con un continuo de agentes, donde sólo se distinguen un número finito de características distintas, supera el test de compatibilidad de incentivos coalicionales.

4 Una interpretación discreta: Sucesiones de economías réplicas

Por lo que al equilibrio competitivo se refiere, una economía con un continuo de agentes, donde sólo se distinguen un número finito de características distintas, puede entenderse como una economía con un conjunto finito de agentes, y viceversa. (Véase García-Cutrín y Hervés (1993)). Siguiendo esta idea, el objetivo de esta sección es discretizar el resultado límite de compatibilidad en incentivos coalicionales obtenido para economías continuas de m tipos.

A pesar de que en economías finitas los agentes individuales, y por tano las coaliciones, tengan incentivos a adoptar un comportamiento no competitivo, cabe esperar que tal incentivo disminuya a medida que aumenta el número de agentes. En efecto, Roberts y Postlewaite (1976) prueban que la ganancia de utilidad que un agente individual puede conseguir actuando estratégicamente converge a cero si el número de agentes aumenta mediante réplicas o si la sucesión de economías converge a una economía en la que la correspondencia de precios de equilibrio competitivo sea continua. En lo que sigue probamos que se obtiene el mismo resultado si consideramos desviaciones de coaliciones. De hecho, como veremos, no es más que una interpretación discreta del resultado obtenido para economías continuas en la sección anterior.

Consideremos una economía continua $\mathcal{E}_c$ como la descrita en la sección 3, donde sólo se distinguen m tipos de agentes. Siguiendo García-Cutrín y Hervés (1993), podemos interpretar esta economía continua $\mathcal{E}_c$ como una economía con m agentes donde el agente i representa infinitos agente idénticos. También podemos interpretar $\mathcal{E}_c$ como una economía con m agentes no homogéneos, donde la influencia relativa del agente i viene dada por la medida $\mu(I_i)$ del subintervalo I_i que representa el tipo i. Para ello, asociamos a la economía $\mathcal{E}_c$ una economía discreta $\mathcal{E}_m$ con m agentes, donde cada agente $i \in I_m = \{1, \ldots, m\}$ viene caracterizado por su conjunto de consumo X_i, sus dotaciones iniciales ω_i y su relación de preferencias $\succeq_i$, representable por la función de utilidad U_i. De este modo, una asignación f en $\mathcal{E}_c$ puede interpretarse como una asignación $x = (x_1, \ldots, x_m)$ en $\mathcal{E}_m$, donde $x_i = \frac{1}{\mu(I_i)} \int_{I_i} f d\mu$. Recíprocamente, una asignación x en $\mathcal{E}_m$ puede interpretarse como una asignación f en $\mathcal{E}_c$, donde f es la función escalonada definida por $f(t) = x_i$, si $t \in I_i$.

Para cada r entero positivo, definimos la r-réplica de la economía $\mathcal{E}_m$, que denotamos por $r\mathcal{E}_m$, como una nueva economía con rm agentes indiciados por $ij, i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, r$, tal que cada consumidor ij viene caracterizado por su conjunto de consumo $X_{ij} = X_i$, sus recursos iniciales $\omega_{ij} = \omega_i$ y su función de utilidad $U_{ij} = U_i$. Sea Θ_{ij} el conjunto de estrategias del agente ij en la economía $r\mathcal{E}_m$. Para cada $i \in I_m$ definimos $\Theta_{ij} = \Theta_i$ para todo $j \in \{1, \ldots, r\}$.

Consideremos la sucesión de economías réplicas $(r\mathcal{E}_m)$. Denotemos por rI_m (resp. por $\mathcal{P}(rI_m)$) el conjunto de agentes (resp. el conjunto de coaliciones) en cada economía $r\mathcal{E}_m$. Sea $\bar{r}$ entero positivo y sea $S \subset \bar{r}I_m$ (resp. $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(\bar{r}I_m)$) una coalición (resp. un conjunto de coaliciones) en la economía réplica $\bar{r}\mathcal{E}_m$. A continuación introducimos la noción de compatibilidad en incentivos coalicional en el límite asociada a una coalición S y a un conjunto de coaliciones $\mathcal{S}$, respectivamente.

Definición 4.1 *Decimos que el mecanismo competitivo es compatible en incentivos para la coalición S (o S-compatible en incentivos) en el límite en la sucesión de economías réplicas $(r\mathcal{E}_m)$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe r^*, tal que para todo $r \geq r^*$ se verifica lo siguiente. Si $x^r \in X(S, r\mathcal{E}_m)$ entonces existe x asignación competitiva de $\mathcal{E}_m$ tal que $U_i(x_i) > U_i(x^r_{ij}) - \varepsilon$, para todo $ij \in S$.*

Definición 4.2 *Decimos que el mecanismo competitivo es compatible en incentivos para el conjunto de coaliciones $\mathcal{S}$ (o $\mathcal{S}$-compatible en incentivos) en el límite en la sucesión de economías réplicas $(r\mathcal{E}_m)$ si es S-compatible en incentivos en el límite en $(r\mathcal{E}_m)$ para toda coalición $S \in \mathcal{S}$.*

La interpretación de la definición de compatibilidad coalicional en el límite en economías réplicas es la siguiente. Consideremos que el incentivo de una coalición a comportarse no competitivamente viene dado por la suma (o si se quiere por la media) de la ganancia de utilidad que los agentes que la forman pueden conseguir por desviarse de un comportamiento precio-aceptante. Entonces, si el mecanismo competitivo es $\mathcal{S}$-compatible en incentivos en el límite en $(r\mathcal{E}_m)$, se tiene que el incentivo de cualquier coalición $S \in \mathcal{S}$ a comportarse no competitivamente es arbitrariamente pequeño si el número de agentes es suficientemente grande.

A continuación obtenemos la compatibilidad de incentivos coalicional en el límite del mecanismo competitivo en economías réplicas como una interpretación discreta del resultado establecido para economías continuas de m tipos de agentes. Para ello, necesitamos un lema previo que relaciona el conjunto de precios alcanzables por una coalición en una economía finita con el conjunto de precios alcanzables por determinadas coaliciones asociadas en la economía continua. Utilizaremos la siguiente notación. Para cada coalición S en $r\mathcal{E}_m$, sea $S_i = \{j \in \{1,\ldots,r\} | ij \in S\}$ y sea $r_i = card(S_i)$. Dada una coalición cualquiera $S \subset rI_m$ le asociamos el conjunto $\mathcal{S}_c$ de coaliciones en la economía continua $\mathcal{E}_c$. $\mathcal{S}_c$ está formado por las coaliciones $S_c \subset [0,1]$, tales que $\mu(S_c^i) = \frac{r_i}{rm}$, para todo $i \in \{1,\ldots,m\}$.

Lema 4.1 *Sea S una coalición en la economía réplica $r\mathcal{E}$. Se verifica que $\Pi(S, r\mathcal{E}) = \Pi(\mathcal{S}_c, \mathcal{E}_c)$, siendo $\mathcal{S}_c$ el conjunto de coaliciones asociado a S en la economía continua $\mathcal{E}_c$.*

Demostración. Sea p un sistema de precios alcanzable por la coalición S en $r\mathcal{E}_m$ vía el perfil de estrategias $(\theta_{ij})_{ij\in S}$. Basta hacer notar que entonces existen $z_i \in C_i(p)$, para cada $i \in I_m$, tales que $0 = \sum_{i=1}^m r_i\theta_i + \sum_{i=1}^m (r - r_i)z_i$, con $\theta_i = \frac{1}{r_i}\sum_{j\in S_i}\theta_{ij}$. Por definición de los conjuntos de estrategias, se tiene que $\theta_i \in \Theta_i$, para todo $i \in \{1,\ldots,m\}$. Por tanto $p \in \Pi(S_c, \mathcal{E}_c)$, cualquiera que sea $S_c \in \mathcal{S}_c$. Recíprocamente, si $p \in \Pi(S_c, \mathcal{E}_c)$, para alguna coalición $S_c \in \mathcal{S}_c$, entonces por el lema 3.1 existen $z_i \in C_i(p)$, para cada $i \notin J_{S_c}$ y existen $\theta_i \in Z_t(p)$, con $Z_t \in \Theta_i$, para cada $t \in S_c^i$, tales que $0 = \sum_{i=1}^m (\mu(I_i) - \mu(S_c^i))\, z_i + \sum_{i=1}^m \mu(S_c^i)\theta_i$. Luego $p \in \Pi(S, r\mathcal{E}_m)$.

Q.E.D.

Hemos obtenido que un sistema de precios p es alcanzable por una coalición S en la economía $r\mathcal{E}_m$ si y sólo si p es alcanzable por cualquier coalición $S_c \in \mathcal{S}_c$ en la economía continua $\mathcal{E}_c$. Como consecuencia inmediata se tiene que si los consumos $(x_{ij})_{ij\in S}$ son factibles para la coalición S en $r\mathcal{E}_m$, entonces $f(t) = \frac{1}{r_i}\sum_{ij\in S_i} x_{ij}$, si $t \in S_c^i$, es factible para la coalición $S_c \in \mathcal{S}_c$. Recíprocamente, si $f \in X(S_c, \mathcal{E}_c)$, con $S_c \in \mathcal{S}_c$, entonces $x_{ij} = x_i = \frac{1}{\mu(S_c^i)}\int_{S_c^i} f d\mu$ es factible para S en $r\mathcal{E}_m$.

Los siguientes lemas permiten caracterizar los precios de equilibrio competitivo de la economía $\mathcal{E}_m$ como aquellos que son alcanzables por alguna coalición en cualquier réplica $r\mathcal{E}_m$, con r suficientemente grande.

Lema 4.2 *Sea* $S \in \mathcal{S} \subset \mathcal{P}(\bar{r}I)$. *Entonces* $\Pi(S, r\mathcal{E}_m) \subset \Pi(S, \bar{r}\mathcal{E}_m)$ *para todo* $r > \bar{r}$. *Por tanto,* $\Pi(\mathcal{S}, r\mathcal{E}_m) \subset \Pi(\mathcal{S}, \bar{r}\mathcal{E}_m)$, *para todo* $r > \bar{r}$.

Demostración. Basta hacer notar que si $r > \bar{r}$, entonces $\Pi(S, r\mathcal{E}_m) = \Pi(S_c, \mathcal{E}_c)$ y $\Pi(S, \bar{r}\mathcal{E}_m) = \Pi(\bar{S}_c, \mathcal{E}_c)$, con $\mu(S_c^i) < \mu(\bar{S}_c^i)$, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Q.E.D.

Observaciones. Obsérvese que $\Pi(S, r\mathcal{E}) \subset \Pi(\bar{r}I_m, \bar{r}\mathcal{E}_m)$, para todo $r \geq \bar{r}$. Además $\Pi(rI_m, r\mathcal{E}_m) = \Pi(r'I_m, r'\mathcal{E}_m)$, para cualesquiera r, r' enteros positivos. Luego, para todo $r' \in \mathbb{N}$ se verifica $\Pi(S, r\mathcal{E}_m) \subset \Pi(r'I_m, r'\mathcal{E}_m)$. Por el lema anterior, considerando $S \in \mathcal{P}(\bar{r}I_m)$, se tiene que $\Pi(S, r\mathcal{E}_m) \subset \Pi(S, \bar{r}\mathcal{E}_m)$, para todo $r \geq \bar{r}$. La pregunta es, si $S \in \mathcal{P}(rI_m) \setminus \mathcal{P}(r'I_m)$ con $r' < r$, ¿existe alguna coalición $S' \in \mathcal{P}(r'I_m)$, distinta de $r'I_m$ tal que $\Pi(S, r\mathcal{E}_m) \subset \Pi(S', r'\mathcal{E}_m)$?. La respuesta es si. En efecto, sea $S \in \mathcal{P}(rI_m) \setminus \mathcal{P}(r'I_m)$ y sea $H = \{i \in I_m | r_i > r'\}$, $H \neq \emptyset$ pues $S \notin \mathcal{P}(r'I_m)$. Tomemos $S' \in \mathcal{P}(r'I_m)$ como la coalición formada por r_i agentes de tipo i, si $i \notin H$, y r' agentes de tipo i, si $i \in H$. Sea ahora $p \in \Pi(S, r\mathcal{E}_m)$. Entonces existen $z_i \in C_i(p)$, para cada $i \in I$, y $\theta_i \in Z_i(p)$, con $Z_i \in \Theta_i$, para cada $i \in J$, tales que $0 = \sum_{i=1}^{m}(r - r_i)z_i + \sum_{i=1}^{m} r_i\theta_i$. Sea $J = \{i \in I_m | r_i > 0\}$.Definamos para cada $i \in J$ la estrategia $\theta_i' = (1 - \lambda_i)z_i + \lambda\theta_i$, con $\lambda_i = \frac{r'}{r}$ si $i \notin H$ y $\lambda_i = \frac{r_i}{r}$ si $i \in H$. Se deduce que $0 = \sum_{i \notin H}(r' - r_i)z_i + \sum_{i \notin H} r_i\theta_i' + \sum_{i \in H} r'\theta_i'$. Por tanto $p \in \Pi(S', r'\mathcal{E}_m)$.

Como interpretación discreta del lema 3.4 se obtiene el siguiente resultado.

Lema 4.3 *Supongamos que la economía* $\mathcal{E}_m$ *verifica las condiciones del lema 3.2. Entonces, si existe* $S \subset \bar{r}I_m$ *tal que* $p \in \Pi(S, r\mathcal{E}_m)$ *para todo* $r \geq \bar{r}$ *se tiene que* $p \in \Pi(\mathcal{E}_m)$.

Demostración. Para cada $r \in \mathbb{N}$, se tiene que $\Pi(S, r\mathcal{E}_m) = P(S_c^r, \mathcal{E}_c)$, y $\mu(S_c^r)$ converge a cero cuando $r \to \infty$. Por el teorema 1 a) en García-Cutrín y Hervés, se verifica que $\Pi(\mathcal{E}_m) = \Pi(\mathcal{E}_c)$. Basta aplicar ahora el lema 3.2.

Q.E.D.

La interpretación discreta del lema 3.5 establece condiciones suficientes para que el conjunto de precios alcanzables por una coalición en una economía réplica sea un conjunto cerrado. Para ello, consideremos una coalición $S \subset \bar{r}I$. Recordar que $r_i = card(S_i)$, siendo $S_i = \{j \in \{1, \ldots, \bar{r}\} | ij \in S\}$. Recordar también que $P^* = \{p \in P | \sum_{i=1}^{m} C_i(p) \neq \emptyset\}$.

Lema 4.4 *Supongamos que la economía* $\mathcal{E}_m$ *verifica las condiciones establecidas en el lema 3.5. Entonces* $\Pi(S, r\mathcal{E}_m)$ *es cerrado para todo* $r > \max_{i \in I_m}\{r_i\}$.

Demostración. Es suficiente tener en cuenta que $\Pi(S, r\mathcal{E}_m) = \Pi(S_c^r, \mathcal{E}_c)$, y $(\mu(I_i) - \mu(I_i \bigcap S_c^r)) > 0$, para todo $i \in I_m$ si y sólo si $r > \max_{i \in I_m}\{r_i\}$.

Q.E.D.

Por último, el teorema 3.1 permite concluir que para sucesiones de economías réplicas $(r\mathcal{E}_m)$, el mecanismo competitivo es $\mathcal{S}$-compatible en incentivos en el límite, cualquiera que sea el conjunto de coaliciones $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(rI_m)$, para algún r entero positivo. En particular, el mecanismo competitivo es compatible en incentivos individualmente en el límite.

Teorema 4.1 *Sea la economía $\mathcal{E}_m$ en las condiciones del teorema 3.1. Consideremos la sucesión de economías réplicas $(r\mathcal{E}_m)$, y una coalición $S \subset rI_m$, para algún r. Entonces, el mecanismo competitivo es compatible en incentivos para la coalición S en el límite en $(r\mathcal{E}_m)$.*

Demostración. Si f es asignación de equilibrio competitivo en $\mathcal{E}_c$, entonces x, con $x_i = \frac{1}{\mu(I_i)} \int_{I_i} f d\mu$, es asignación de equilibrio competitivo en $\mathcal{E}_m$ (teorema 1.a) en García-Cutrín y Hervés). Utilizando ahora el teorema 3.1 se concluye la prueba.

Q.E.D.

5 Compatibilidad coalicional de incentivos en el límite en sucesiones de economías continuas

En la sección 3 se ha probado que el mecanismo competitivo es compatible en incentivos coalicionalmente en el límite en economías continuas con un número finito de tipos. Ello, permite generalizar el resultado obtenido por Roberts y Postlewaite (1976) para sucesiones de economías réplicas, donde sólo se consideran incentivos individuales. Concretamente, permite obtener, como una interpretación discreta, la compatibilidad de incentivos coalicional en el límite del mecanismo competitivo en economías réplicas. En el citado artículo de Roberts y Postlewaite se establece un ejemplo de una sucesión de economías finitas, donde el número de agentes converge a infinito de modo que la dotación de cada agente se hace arbitrariamente pequeña respecto a la dotación agregada y, sin embargo, el mecanismo competitivo no es compatible en incentivos individualmente en el límite. Por tanto, si consideramos situaciones en las que el número de agentes aumenta de manera arbitraria, el resultado obtenido para economías réplicas no es, en general, cierto.

El objetivo de esta sección es extender el teorema 3.1 a situaciones más generales, de modo que nos permita obtener una interpretación discreta en términos de sucesiones de economías finitas, donde el número de agentes no aumente mediante réplicas, sino de manera arbitraria. Como veremos a continuación, para obtener la compatibilidad coalicional en el límite en casos más generales, es condición suficiente la continuidad de la correspondencia Π de precios que vacia los mercados. Para formalizar dicha condición necesitamos definir una topología en el conjunto de economías.

Sea $\mathcal{E}$ una economía de intercambio puro sin átomos. El espacio de agentes viene representado por el espacio de medida $(I, \mathcal{A}, \mu)$, siendo $I = [0,1]$ el conjunto de consumidores, $\mathcal{A}$ el conjunto formado por los subconjuntos medibles de I y μ la medida de Lebesgue. Cada agente $t \in I$ viene caracterizado por su conjunto de consumo $X_t = \mathbb{R}^{\ell}_{+}$, sus recursos iniciales $\omega_t \in X_t$, y una relación de preferencias $\succeq_t$ sobre su conjunto de consumo, representable por una función de utilidad $U_t : X_t \to \mathbb{R}$ continua. Sea C_t la correspondencia de exceso de demanda competitiva del agente $t \in I$ en la economía $\mathcal{E}$. Para estudiar propiedades de incentivos coalicionales en estas economías más generales que la economía continua de m tipos de agentes, consideramos que los agentes pueden declarar otras correspondencias de respuesta a los precios diferentes de la competitiva. Denotemos por Θ el conjunto de estrategias de cada agente $t \in I$, definido como sigue

$$\Theta = \{ \; Z : P \to \overline{\mathbb{R}}^{\ell} | Z \text{ es una correspondencia cerrada, con valores no vacios,} \\ \text{y para cada } \; p \in P \; \text{ se verifica que } \; p\theta \leq 0 \; \text{ para todo } \; \theta \in Z(p)\}$$

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \bigcup \{\infty\}$ denota la compactificación de Alexandroff de $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ es un espacio métrico, localmente compacto y separable $\overline{\mathbb{R}}$ es compacto y metrizable. Tómese, por ejemplo, la distancia definida por $d(x,y) = \min\{\mid arctg\, x - arctg\, y \mid, \pi - \mid arctg\, x - arctg\, y \mid\}$, si $x, y \neq \infty$, y $d(x, \infty) = \min\{\frac{\pi}{2} - arctg\, x, \frac{\pi}{2} + arctg\, x\}$. Consideremos en $\overline{\mathbb{R}}^{\ell}$ la topología producto. Decimos que una correspondencia Z definida en P y con valores en $\overline{\mathbb{R}}^{\ell}$ es cerrada si su grafo $\mathcal{G}r(Z) = \{(p, \theta) \in P \times \overline{\mathbb{R}}^{\ell} | \theta \in Z(p)\}$ es cerrado en $P \times \overline{\mathbb{R}}^{\ell}$. Denotemos por $\mathcal{F}(P \times \overline{\mathbb{R}}^{\ell})$ el conjunto formado por todos los subconjuntos cerrados no vacios de $P \times \overline{\mathbb{R}}^{\ell}$. Consideremos en $\mathcal{F}(P \times \overline{\mathbb{R}}^{\ell})$ la la distancia de Hausdorff, que denotamos por δ_H. $P \times \overline{\mathbb{R}}^{\ell}$ es un espacio métrico compacto. Por tanto, $(\mathcal{F}(P \times \overline{\mathbb{R}}^{\ell}), \delta_H)$ es un espacio métrico compacto. Como cada correspondencia $Z \in \Theta$ es cerrada, podemos interpretar Θ como un subconjunto de $\mathcal{F}(P \times \overline{\mathbb{R}}^{\ell})$. Consideremos en Θ la distancia δ_H.

Observaciones. Supongamos que el comportamiento estratégico de cada agente $t \in I$ consiste en declarar una función de utilidad U'_t, que representa unas preferencias distintas de sus preferencias reales, y unos recursos iniciales $\omega'_t \leq \omega_t$. Entonces, las correspondencias de exceso de demanda, procedentes de dicho comportamiento, son semicontinuas superiormente en $int(P)$ y toman valores cerrados en $\mathbb{R}^{\ell}$, por tanto, tienen grafo cerrado en $int(P) \times \mathbb{R}^{\ell}$. (Véase Hildebrand (1974)). Sea $Z : int(P) \to \mathbb{R}^{\ell}$ una correspondencia de exceso de demanda de este tipo que procede de una función de utilidad U y unos recursos iniciales ω. Sea $F_h = \{x \in \overline{\mathbb{R}}^{\ell} | x_h = \infty \;\; \text{y} \;\; x_k \in [-\omega_k, \infty] \;\; \text{para todo} \;\; k \neq h\}$, donde para cada $x \in \overline{\mathbb{R}}^{\ell}$, x_h denota la h-ésima coordenada de x. Para cada $p \in P$ sea $H(p) = \{h \in \{1, \ldots, \ell\} | p_h = 0\}$. Definamos $\widehat{Z}$ como la correspondencia dada por $\widehat{Z}(p) = Z(p)$, si $H(p) = \emptyset$, y $\widehat{Z}(p) = \{x \in \overline{\mathbb{R}}^{\ell} | px \leq 0\} \bigcap \{\bigcup_{h \in H(p)} F_h\}$, si

$H(p) \neq \emptyset$. Nótese que $\widehat{Z} \in \Theta$. En efecto, por construcción se tiene que cualquiera que sea $p \in P$ se verifica $p\theta \leq 0$ para todo $\theta \in \widehat{Z}(p)$. Como Z tiene grafo cerrado en $int(P) \times \mathbb{R}^\ell$, se deduce que $\widehat{Z}$ tiene grafo cerrado en $P \times \overline{\mathbb{R}}^\ell$. Además $0 \in \int_I Z_t(p)d\mu$ si y sólo si $0 \in \int_I \widehat{Z}_t(p)d\mu$. Así pues, podemos considerar, como caso particular, que las estrategias de un agente $t \in I$ consisten en las correspondencias de exceso de demanda resultantes de declarar características diferentes de las reales, es decir, correspondencias de exceso de demanda procedentes de preferencias definidas por U_t' y recursos iniciales ω_t', en vez de U_t y ω_t.

Por último, señalar que uno podría pensar en definir $\widehat{Z}$ de modo que $(\widehat{Z}(p))_h = \infty$, para cada $h \in H(p)$. Pero en este caso no podemos garantizar que $\widehat{Z}$ tenga grafo cerrado en $P \times \overline{\mathbb{R}}^\ell$. La razón es que si (p_n) en $int(P)$ converge a p, con $Card(H(p)) > 1$, entonces existe $h \in H(p)$ tal que $(Z(p_n))_h$ converge a ∞, pero $(Z(p_n))_h$ puede no converger a ∞ para todo $h \in H(p)$. (Véase Aliprantis, Brown y Burkinshaw (1990), pág. 27).

Un perfil de estrategias para es una aplicación medible $\theta : I \longrightarrow \Theta$. Sea $\widehat{\theta}$ el perfil de estrategias dado por $\widehat{\theta}(t) = \widehat{C}_t$, para cada $t \in I$. Para determinar los precios de equilibrio competitivo de la economía $\mathcal{E}$ es suficiente describir $\mathcal{E}$ como una medida $\widehat{\alpha}$ sobre Θ, definida por $\widehat{\alpha} = \mu \circ \widehat{\theta}^{-1}$. Nos referiremos a $\widehat{\alpha}$ como la medida de probabilidad que describe la economía $\mathcal{E}$. Sea $\mathcal{M}(\Theta)$ el conjunto de medidas de probabilidad de Borel sobre Θ. Consideremos en $\mathcal{M}(\Theta)$ la topología de la convergencia débil de medidas. Cada perfil de estrategias θ define una medida de probabilidad $\alpha_\theta \in \mathcal{M}(\Theta)$ dada por $\alpha_\theta = \mu \circ \theta^{-1}$. Además, cada elemento de $\mathcal{M}(\Theta)$ puede entenderse como la descripción de una economía abstracta.

Dado un sistema de precios $p \in P$ definimos la correspondencia $\varphi(\cdot, p) : \Theta \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^\ell$ dada por $\varphi(Z,p) = Z(p)$, para cada $Z \in \Theta$. Decimos que $p \in P$ es un sistema de precios que vacia los mercados en la economía descrita por la medida $\alpha \in \mathcal{M}(\Theta)$, y denotamos $p \in \Pi(\alpha)$, si $0 \in \int_\Theta \varphi(Z,p)d\alpha = \int_\Theta Z(p)d\alpha$. Decimos que un sistema de precios $p \in P$ es alcanzable por la coalición S en la economía $\mathcal{E}$, y denotamos $p \in \Pi(S, \mathcal{E})$, si existe un perfil de estrategias θ, con $\theta(t) = \widehat{C}_t$ para cada $t \notin S$, tal que $0 \in \int_\Theta \varphi(Z,p)d\alpha_\theta$, equivalentemente, $p \in \Pi(\alpha_\theta)$. Luego, si $p \in \Pi(S, \mathcal{E})$ entonces existen $z_t \in \widehat{C}_t(p)$, para cada $t \notin S$ y $\theta_t \in Z_t(p)$, con $Z_t \in \Theta$ para cada $t \in S$, tales que $0 = \int_{I\setminus S} z_t d\mu(t) + \int_S \theta_t d\mu(t)$. Si para todo $t \in S$ se verifica que $\theta_t + \omega_t \in \mathbb{R}_+^\ell$, decimos entonces que $x^S : S \longrightarrow \mathbb{R}_+^\ell$, con $x^S(t) = \theta_t + \omega_t$ es una asignación factible para la coalición S en la economía $\mathcal{E}$, y denotamos $x^S \in X(S, \mathcal{E})$.

Consideremos ahora una sucesión $(\mathcal{E}_n)$ de economías de intercambio puro sin átomos. En cada economía $\mathcal{E}_n$ el espacio de agentes viene representado por el espacio de medida $(I, \mathcal{A}, \mu)$, siendo $I = [0,1]$ el conjunto de condumidores, $\mathcal{A}$ el conjunto formado por los subconjuntos medibles de I y μ la medida de Lebesgue. Cada agente t en la economía $\mathcal{E}_n$ viene caracterizado por su conjunto de consumo $X_t = \mathbb{R}_+^\ell$, sus recursos iniciales $\omega_t^n \in X_t$, y una relación de preferencias $\succeq_t^n$ sobre su conjunto de consumo, representable por una función de utilidad $U_t^n : X_t \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Sea C_t^n la correspondencia de exceso de demanda competitiva del agente $t \in I$ en la economía $\mathcal{E}_n$. Sea S una coalición en la economía $\mathcal{E}_n$. Decimos que S pertenece también a la economía $\mathcal{E}_{n'}$ si existe una coalición S' en $\mathcal{E}_{n'}$ con $\mu(S) = \mu(S')$ y una biyección $\pi : S \rightarrow S'$, tal que para todo agente $t \in S$ se verifica que $\omega_t^n = \omega_{\pi(t)}^{n'}$ y $U_t^n = U_{\pi(t)}^{n'}$. Como el mecanismo competitivo es anónimo, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que π es la identidad. Decimos que la sucesión de economías $(\mathcal{E}_n)$ coverge a la economía $\mathcal{E}$ si la sucesión de medidas α_n converge débilmente a α, siendo α_n (resp. α) la medida que describe $\mathcal{E}_n$ (resp. $\mathcal{E}$).

Definición 5.1 *Sea $(\mathcal{E}_n)$ una sucesión de economía sin átomos que converge a la economía $\mathcal{E}$. Decimos que el mecanismo competitivo es compatible en incentivos coalicionalmente en el límite en sentido fuerte en la sucesión de economías $(\mathcal{E}_n)$ si para cualquier sucesión de coaliciones (S_n) con las propiedades*

i) S_n pertenece a $\mathcal{E}_n$ para todo n,

ii) Existe $\bar{n}$ tal que, para cada $n \geq \bar{n}$ S_n pertenece a $\mathcal{E}_{n'}$ para todo $\bar{n} \leq n' \leq n$, y,

iii) $\mu(S_n)$ converge a cero,

se verifica que para cada $\varepsilon > 0$ existe n^*, tal que para todo $n \geq n^*$ se tiene que si $x^n \in X(S_n, \mathcal{E}_n)$, entonces existe x_n^* asignación walrasiana de $\mathcal{E}_n$, tal que $U_t(x_n^*(t)) > U_t(x^n(t)) - \varepsilon$, para casi todo $t \in S_n$.

Definición 5.2 *Decimos que el mecanismo competitivo es compatible en incentivos coalicionalemte en el límite en sentido fuerte en la economía sin átomos $\mathcal{E}$ si lo es en cualquier sucesión de economías $(\mathcal{E}_n)$ que converja a $\mathcal{E}$. En este caso diremos que $\mathcal{E}$ supera el test de compatibilidad de incentivoa coalicionales en sentido fuerte.*

Nótese que la compatibilidad coalicional de incentivos en el límite en sentido fuerte implica la compatibilidad coalicional de incentivos en el límite. La interpretación continua del ejemplo que aparece en Roberts y Postlewaite (1976) prueba que las hipótesis que garantizan que el mecanismo competitivo sea compatible en incentivos coalicionalmente en el límite en economías continuas de m tipos no son suficientes si consideramos economías más generales. Probamos a continuación que la continuidad de la correspondencia de precios que vacían los mercados es condición suficiente para obtener la compatibilidad coalicional de incentivos en el límite en sentido fuerte. Probablemente esta condición de continuidad sea más fuerte que necesaria. Lo que realmente necesitamos es que cuando $n \rightarrow \infty$ y las economías reales y aparentes están cerca, entonces los precios que vacían los mercados estén también cerca. Esto es precisamente lo establecido directamente en el lema 3.2 para el caso de economías continuas de m tipos de agentes y, en el lema 4.3 para el caso de economías réplicas.

Teorema 5.1 *Sea $\mathcal{E}$ una economía continua y sea $\alpha \in \mathcal{M}(\Theta)$ una medida de probabilidad que describe a $\mathcal{E}$. Supongamos que la correspondencia de precios que vacian los mercados es continua en α y que las funciones indirectas de utilidad V_t existen y son continuas en un entorno de $\Pi(\alpha)$ para casi todo agente $t \in I$. Entonces $\mathcal{E}$ supera el test de compatibilidad de incentivoa coalicionales en sentido fuerte.*

Demostración. Supongamos que no se verifica la compatibilidad de incentivos coalicional en el límite en sentido fuerte. Entonces, existen una sucesión de economías $(\mathcal{E}_n)$ que converge a $\mathcal{E}$, una sucesión de coaliciones (S_n) con las propiedades *(i)*, *(ii)* y *(iii)* en la definición 5.1, existe $\varepsilon > 0$ y, existe una sucesión de asignaciones $(x^n) \in X(S_n, \mathcal{E}_n)$, tales que para cada asignación competitiva x_n^* de $\mathcal{E}_n$ se verifica $U_t(x^n(t)) > U_t(x_n^*(t)) + \varepsilon$, para todo $t \in S_n' \subset S_n$, con $\mu(S_n') > 0$, para todo n. Para cada n, sea $p_n \in \Pi(S_n, \mathcal{E}_n)$ el sistema de precios vía el cual x^n es una asignación alcanzable por la coalición S_n en la economía $\mathcal{E}_n$, y sea θ_n el perfil de estrategias vía el cual p_n es alcanzable por la coalición S_n en la economía $\mathcal{E}_n$. Consideremos $\alpha_n' = \mu \circ \theta_n^{-1}$. Como $\mu(S_n)$ converge a cero, se tiene que α_n' converge débilmente a α. Sea α_n la medida de probabilidad que describe a la economía $\mathcal{E}_n$. Por la desigualdad triangular, se tiene que para cada $\delta > 0$ existe $\bar{n}$ tal que $\delta_H(\Pi(\alpha_n'), \Pi(\alpha_n)) < \delta$, para todo $n \geq \bar{n}$. Luego, para cada n suficientemente grande, existe $\bar{p}_n \in \Pi(\alpha_n)$ tal que $\bar{p}_n$ está arbitrariamente cercano a p_n y ambos en un entorno de $\Pi(\alpha)$, donde las funciones V_t son continuas. Sea $\bar{x}^n$ asignación competitiva a precios $\bar{p}_n$ en la economía $\mathcal{E}_n$. Se tiene entonces que $V_t(p_n) \geq U_t(x^n(t)) > U_t(\bar{x}^n(t)) + \varepsilon = V_t(\bar{p}_n) + \varepsilon$, para todo $t \in S_n'' \subset S_n'$, con $\mu(S_n'') > 0$, para cada n suficientemente grande. Pero esto contradice la continuidad de las funciones de utilidad indirecta.

Q.E.D.

Corolario 5.1 *Sea $\mathcal{E}$ una economía continua y sea $\alpha \in \mathcal{M}(\Theta)$ una medida de probabilidad que describe a $\mathcal{E}$. Supongamos que la correspondencia de precios que vacian los mercados es continua en α y que las funciones indirectas de utilidad V_t existen y son continuas en un entorno de $\Pi(\alpha)$ para casi todo agente $t \in I$. Entonces el mecanismo competitivo es compatible en incentivos coalicionalmente en el límite en la economía $\mathcal{E}$.*

Demostración. Basta considerar $\mathcal{E}_n = \mathcal{E}$ para todo n.

Q.E.D.

Para establecer el resultado de compatibilidad coalicional en el límite en sentido fuerte en economías continuas más generales que las de m tipos, hemos supuesto que la correspondencia de precios que vacían los mercados sea continua en la medida de probabilidad que describe la economía. En lo que sigue, obtenemos que esta continuidad es genérica, en el sentido de que se verifica en un conjunto residual de $\mathcal{M}(\Theta)$. Un conjunto residual de un espacio métrico es aquel que contiene una intersección numerable de subconjuntos abiertos y densos o, equivalentemente, su complementario está contenido en un conjunto de primera categoría (unión numerable de conjuntos diseminados, esto es, unión numerable de conjuntos cuya clausura tiene interior vacío). El teorema de Baire establece que un residual de un espacio métrico completo es denso. su complementario es de primera categoría (unión numerable de conjuntos diseminados, esto es, unión numerable de conjuntos cuya clausura tiene interior vacío).

En la prueba de que la correspondencia Π es continua en un subconjunto residual de $\mathcal{M}(\Theta)$, utilizaremos el siguiente lema.

Lema 5.1 *La correspondencia* $\varphi : \Theta \times P \to \overline{\mathbb{R}}^{\ell}$, *definida por* $\varphi(Z,p) = Z(p)$, *es semicontinua superiormente.*

Demostración. Supongamos que φ no es semicontinua superior en $(Z,p) \in \Theta \times P$. Entonces, existe una sucesión (Z_n, p_n) en $\Theta \times P$, tal que (Z_n) converge a Z con la distancia de Hausdorff δ_H y (p_n) converge a p, y existe un abierto G entorno de $\varphi(Z,p)$ en $\overline{\mathbb{R}}^{\ell}$, tal que existe una subsucesión (Z_{n_k}, p_{n_k}), que verifica $Z_{n_k}(p_{n_k}) \bigcap G^c \neq \emptyset$. Denotemos $F_{n_k} = Z_{n_k}(p_{n_k}) \bigcap G^c$. (F_{n_k}) es una sucesión de subconjuntos cerrados no vacios de $\overline{\mathbb{R}}^{\ell}$. Por tanto, existe una subsucesión, que también denotamos por (F_{n_k}) y existe $F \subset \overline{\mathbb{R}}^{\ell}$, $F \neq \emptyset$ tal que $Li(F_{n_k}) = F = Ls(F_{n_k})$. (Véase Hildebrand (1974)). Sea $\theta \in F$, recurriendo si es necesario a una subsucesión, existe $\theta_{n_k} \in Z_{n_k}(p_{n_k}) \bigcap G^c$, tal que θ_{n_k} converge a θ. Como Z tiene grafo cerrado y G^c es cerrado, se deduce que $\theta \in Z(p) \bigcap G^c$. Lo que contredice que $\varphi(Z,p) \subset G$.

Q.E.D.

Teorema 5.2 *Consideremos el espacio* $\mathcal{M}(\Theta)$ *con la topología de la convergencia débil. La correspondencia que vacía los mercados es continua en un subconjunto residual de* $\mathcal{M}(\Theta)$.

Demostración. Veamos en primer lugar que Θ es compacto. Para ello basta ver que es cerrado, pues $(\mathcal{F}(P \times \overline{\mathbb{R}}^{\ell}), \delta_H)$ es un espacio métrico y compacto. Sea (Z_n) una sucesión en Θ que converge a Z con δ_H. Entonces $Li(\mathcal{G}r(Z_n)) = \mathcal{G}r(Z) = Ls(\mathcal{G}r(Z_n))$. Por definición de límite superior e inferior, se tiene que Z toma valores no vacios, tiene grafo cerrado y $p\theta \leq 0$ para cada $p \in P$. Luego $Z \in \Theta$. Por tanto, Θ es un subconjunto compacto de un espacio métrico y, en consecuencia es separable y completo. Se obtiene entonces que la convergencia débil define una topología separable y metrizable en $\mathcal{M}(\Theta)$ y además, por ser Θ compacto y completo, $\mathcal{M}(\Theta)$ es compacto y completo. (Véase Mas-Colell (1985)). Así pues, la correspondencia de precios que vacían los mercados está definida en un espacio métrico completo y toma valores en un espacio métrico completo y separable. Luego, para demostrar que Π es continua en un subconjunto residual de $\mathcal{M}(\Theta)$

basta ver que es semicontinua superiormente. (Véase teorema 1.4.13 en Aubin y Frankowska (1990)).

Sea θ un perfil de estrategias y $\alpha_\theta \in \mathcal{M}(\Theta)$ la medida de probabilidad asociada. Sea $p \in P$. Definimos $F(\alpha_\theta, p) = \int_\Theta \varphi(Z,p)d\alpha_\theta = \int_I \theta(t)d\mu$. Como φ es semicontinua superiormente, se verifica si $\mu \circ \theta_n^{-1}$ converge débilmente a $\mu \circ \theta^{-1}$ y p_n converge a p, entonces $Ls(F(\alpha_{\theta_n}, p_n)) \subset F(\alpha_\theta, p)$. (Véase Mas-Colell (1985)). Por tanto, Π es semicontinua superiormente.

Q.E.D.

Observaciones. Supongamos que las estrategias son funciones de demanda, consideradas como características de los agentes. Entonces, se sabe que el conjunto de economías regulares es abierto y denso en el espacio de economías. Para este tipo de resultados véase, por ejemplo, Hildebrand (1974) (teorema 5, pág. 171), Dierker (1982) (pág. 816-817), y Mas-Colell (1985) (cap. 8).

6 Una interpretación discreta: Sucesiones de economías descritas vía medidas simples

Como hemos visto, el teorema 3.1, establecido para economías continuas de m tipos de agentes, permite una interpretación discreta en términos de economías réplicas. Veremos en esta sección que el correspondiente resultado para economías continuas más generales, permite una interpretación discreta en términos de economías descritas vía medidas simples.

Sea $\mathcal{E}$ una economía de intercambio puro con un conjunto finito de agentes $I = \{1, \ldots, n\}$ definida sobre el espacio de mercancías $X = \mathbb{R}^\ell$. Cada agente $i \in I$ se caracteriza por su conjunto de consumo $X_i = \mathbb{R}^\ell_+$, sus recursos iniciales $\omega_i \in X_i$ y su función de utilidad $U_i : X_i \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y creciente. Sea C_i la correspondencia de exceso de demanda del agente $i \in I$ y sea $\Theta_i = \Theta$ el conjunto de estrategias para cada agente $i \in I$. Para determinar los precios de equilibrio competitivo de la economía $\mathcal{E}$ basta describir $\mathcal{E}$ por la medida simple $\alpha \in \mathcal{M}(\Theta)$, definida por $\alpha(B) = \frac{Card(B \cap \{\widehat{C}_1, \ldots, \widehat{C}_n\})}{n}$, para cada subconjunto de Borel B de Θ.

Asociemos a la economía discreta $\mathcal{E}$ la economía continua $\mathcal{E}_c$ de m tipos distintos, com $m \leq n$, donde el conjunto de agentes, representado por el intervalo $[0,1]$ se divide en n subintervalos disjuntos $I_1, \ldots, I_n$, con $I_i = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)$, si $i \neq n$, $I_n = \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$. Las características de cada consumidor $t \in [0,1]$ vienen dadas por $X_t = X_i$, $\omega_t = \omega_i$, y $U_t = U_i$, si $t \in I_i$, siendo I_i el conjunto de agentes asociado al agente i.

Consideremos ahora una sucesión $(\mathcal{E}_n)$ de economías discretas. En cada economía $\mathcal{E}_n$ el espacio de agentes viene representado por el espacio de medida $(I_n, \mathcal{P}(I_n), \mu)$, siendo I_n el conjunto de condumidores, $\mathcal{P}(I_n)$ el conjunto formado por los subconjuntos no vacios de I_n y μ la medida de contar. En cada economía $\mathcal{E}_n$ cada agente agente $i \in I_n$ viene caracterizado por su conjunto de consumo $X_i = \mathbb{R}_+^\ell$, sus recursos iniciales $\omega_i^n \in X_i$, y una función de utilidad $U_i^n : X_i \to \mathbb{R}$ continua y creciente. Sea C_i^n la correspondencia de exceso de demanda competitiva del agente $i \in I_n$ en la economía $\mathcal{E}_n$. Sea S una coalición en la economía $\mathcal{E}_n$. Decimos que S pertenece también a la economía $\mathcal{E}_{n'}$ si existe una coalición S' en $\mathcal{E}_{n'}$ con $Card(S) = Card(S')$ y una biyección $\pi : S \to S'$, tal que para todo agente $i \in S$ se verifica que $\omega_i^n = \omega_{\pi(i)}^{n'}$ y $U_i^n = U_{\pi(i)}^{n'}$. Como en la sección anterior, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que π es la identidad.

A continuación introducimos la noción de compatibilidad en incentivos coalicional en el límite en la sucesión de economías $(\mathcal{E}_n)$ asociada a una coalición S y a un conjunto de coaliciones $\mathcal{S}$, respectivamente.

Definición 6.1 *Sea $(\mathcal{E}_n)$ de sucesión economías finitas y S una coalición perteneciente a $\mathcal{E}_n$ para todo $n \geq \bar{n}$. Decimos que el mecanismo competitivo es compatible en incentivos para la coalición S (o S-compatible en incentivos) en el límite en la sucesión de economías $(\mathcal{E}_n)$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe n^*, tal que para todo $n \geq n^*$ se verifica lo siguiente. Si $x^n \in X(S, \mathcal{E}_n)$ entonces existe $\bar{x}^n$ asignación competitiva de $\mathcal{E}_m$ tal que $U_i(\bar{x}_i^n) > U_i(x_i^n) - \varepsilon$, para todo $i \in S$.*

Definición 6.2 *Sea $\mathcal{S}$ un conjunto de coaliciones tal que cada coalición $S \in \mathcal{S}$ pertenece a $\mathcal{E}_n$ para todo $n \geq \bar{n}$. Decimos que el mecanismo competitivo es compatible en incentivos para el conjunto de coaliciones $\mathcal{S}$ (o $\mathcal{S}$-compatible en incentivos) en el límite en la sucesión de economías finitas $(\mathcal{E}_n)$ si es S-compatible en incentivos en el límite en $(\mathcal{E}_n)$ para toda coalición $S \in \mathcal{S}$.*

Si consideramos que la sucesión de economías $\mathcal{E}_n$ verifica que $Card(I_n)$ converge a ∞, entonces la interpretación de la definición coalicional en el límite en este tipo de economías, donde el número de agentes aumenta de manera arbitraria, es la misma que en el caso de economías réplicas.

A continuación obtenemos la compatibilidad de incentivos coalicional en el límite del mecanismo competitivo en sucesiones de economías finitas, más generales que las economías réplicas, como una interpretación discreta del resultado establecido para economías continuas más generales que las de m tipos de agentes.

Teorema 6.1 *Sea $(\mathcal{E}_n)$ una sucesión de economías con un conjunto finito de agentes (I_n), tal que $k(n) = Card(I_n)$ converge a ∞. Supongamos que la sucensión de medidas simples (α_n) en $\mathcal{M}(\Theta)$ que describe la sucesión de economías $(\mathcal{E}_n)$ converge a una medida $\alpha \in \mathcal{M}(\Theta)$ donde la correspondencia Π de precios que vacían los mercados es continua. Sea S una coalición de agentes en la economía $\mathcal{E}_n$ para todo $n \geq n_0$. Supongamos que para cada $i \in S$ la función indirecta de utilidad V_i esxiste y es continua en un entorno de $\Pi(\alpha)$. Entonces el mecanismo competitivo es compatible en incentivos en el límite para la coalición S en la sucesión de economías $(\mathcal{E}_n)$.*

Demostración. Denotemos por $\mathcal{E}_{c(n)}$ la economía continua de $m(n)$ tipos, con $m(n) \leq k(n)$ asociada a la economía finita $\mathcal{E}_n$. La sucensión de medidas simples (α_n) en $\mathcal{M}(\Theta)$, que describe la sucesión de economías $(\mathcal{E}_n)$, describe también la sucesión de economías continuas $(\mathcal{E}_{c(n)})$. Asociemos a la coalición S en la economía $\mathcal{E}_n$ la coalición $S_{c(n)}$ en la economía $\mathcal{E}_{c(n)}$, definida por $S_{c(n)} = \bigcup_{i \in S} I_i^{k(n)}$, siendo $I_i^{k(n)} = \left[\frac{i-1}{k(n)}, \frac{i}{k(n)}\right)$, si $i \neq k(n)$, $I_{k(n)}^{k(n)} = \left[\frac{k(n)-1}{k(n)}, 1\right]$. Por el teorema 5.1 se obtiene que el mecanismo competitivo es compatible en incentivos coalicionalmente en el límite en sentido fuerte en la sucesión de economías $(\mathcal{E}_{c(n)})$. Por otra parte $\Pi(S, \mathcal{E}_n) = \Pi(S_{c(n)}, \mathcal{E}_{c(n)})$ y $(S_{c(n)})$ verifica las condiciones establecidas en la definición 5.1. Luego se tiene, en particular, que el mecanismo competitivo es compatible en incentivos en el límite para la coalición S en la sucesión de economías $(\mathcal{E}_n)$.

Q.E.D.

7 El problema de withholding en el límite

En una economía de intercambio puro, fijados los conjuntos de consumo, cada agente se caracteriza por sus preferencias y sus recursos iniciales. Podemos considerar situaciones donde obtener información completa de las dotaciones iniciales de cada agente no sea siempre posible, o situaciones donde conseguir tal información suponga costes muy altos. Así, en una economía de propiedad privada, parece razonable considerar que los agentes tienen la posibilidad de llevar al mercado no todos sus recursos sino únicamente parte de ellos. Con un comportamiento estratégico de este tipo los agentes pueden alterar la formación de precios, guiados a su propio benefecio. De hecho, situaciones económicas donde se queman bienes con la intención de manipular precios son bastante comunes en la realidad, por ejemplo, cuando hay un exceso de producción de determinadas mercancías. En este caso se ocultan bienes únicamente para alterar la formación de los precios. Pero este tipo de comportamiento estratégico en recursos puede considerarse no sólo guiado a variar precios sino también con la intención de dedicar al consumo todo o parte de aquello que se oculta. Este problema de poder manipular precios y obtener beneficios falsificando recursos, se conoce en la literatura como problema de withholding (con rendimiento total o parcial, según se consuma todo o parte de lo que no se lleva al mercado).

Postlewatite (1979) y Thomson (1987) prueban que cualquier mecanismo de asignación de recursos óptimo de Pareto e individualmente racional está sujeto al problema de withholding con rendimiento total (Postlewaite) y rendimiento parcial (Thomson). Posteriormente Yi (1991) generaliza estos resultados y prueba que la hipótesis de individualidad racional puede ser eliminada en ambos casos, es decir, el problema de withholding se presenta en cualquier mecanismo de asignación óptimo de Pareto, sea o no individualmente racional, tanto si los agentes consumen la totalidad de los recursos que ocultan como si consumen únicamente parte de aquello que no llevan al mercado.

Por otra parte, desde que Aumann (1964) planteó un modelo de equilibrio general sin átomos y presentó su conexión con el supuesto de competencia perfecta, la hipótesis de un comportamiento precio-aceptante ha sido unida a la no existencia de átomos. Sin embargo, Ostroy y Zame (1994) ponen de manifiesto que, en general, el problema de la competencia perfecta no se resuelve al considerar un continuo de agentes, pues, aún siendo así, depende de los que ellos denominan "espesor" o "grosor" de la economía. A pesar de esto y de los resultados de imposibilidad anteriormente mencionados, cabe conjeturar que en economías con un continuo de agentes y con un espacio de mercancías de dimensión finita se verifique (al menos genéricamente), que grupos arbitrariamente pequeños de agentes tengan una influencia arbitariamente pequeña en la formación de precios, si adoptan un comportamiento estratégico consistente en ocultar parte de sus recursos iniciales. El objetivo de esta sección es probar que dicha conjetura es cierta. Para ello, consideramos una economía $\mathcal{E}$ con un continuo de agentes, como la definida en la sección 5, esto es, $\mathcal{E} = ((I = [0,1], \mathcal{A}, \mu), X_t = \mathbb{R}^\ell_+, \omega_t \in X_t, U_t, t \in I)$. Suponemos que $\mathcal{E}$ verifica los supuestos establecidos en Aumann (1964) que garantizan la existencia de equilibrio competitivo en economías continuas
(H.1) $\int_I \omega(t) d\mu(t) >> 0$,
(H.2) Las funciones de utilidad U_t son estrictamente monótonas, y
(H.3) Las funciones $U_t(x)$ son medibles simultáneamente en x y t respecto a la topología compacto-abierta.

Como ya hemos señalado, queremos concentrarnos ahora en manipulación de precios vía comportamientos estratégicos en recursos. Por ello, supondremos que las preferencias de los agentes son fijas y bien conocidas.

Sea $\Theta_t = \{ \theta \in \mathbb{R}^\ell_+ \mid \theta \leq \omega_t \}$ el conjunto de estrategias del agente $t \in I$. Un perfil de estrategias es una aplicación $\theta : I \to \bigcup_{t \in I} \Theta_t$, tal que $\theta(t) \in \Theta_t$ para todo $t \in I$. Así, si los agentes declaran un perfil de estrategias θ diferente de ω, aparentan una economía $\mathcal{E}_\theta$ distinta de la real $\mathcal{E}$, definida por recursos iniciales $\theta(t)$ en vez de ω_t, para cada $t \in I$. Para garantizar que exista equilibrio competitivo en las economías aparentes, decimos que un perfil θ es admisible si $\int_I \theta(t) d\mu(t) >> 0$.

Siguiendo Ostroy y Zame (1994), para concluir que un equilibrio walrasiano (p, x) de la economía $\mathcal{E}$ es perfectamente competitivo deberíamos poder decir que, si (S_n) es una sucesión de coaliciones cuyo tamaño converge a cero y (θ_n) es una sucesión de perfiles (que converge a ω) en los que S_n oculta parte de sus dotaciones, entonces debe existir una sucesión de equilibrios walrasianos (p_n, x_n) asociados a la sucesión de economías $(\mathcal{E}_{\theta_n})$, tal que p_n converge a p. Esto es un modo de decir que los precios de equilibrio competitivo pueden considerarse como aquellos que no pueden ser manipulados por grupos de agentes arbitrariamente pequeños. A continuación formalizamos este test de competencia perfecta.

Definición 7.1 *Sea (p, x) un equilibrio competitivo de la economía $\mathcal{E}$. Decimos* *que (p,x) pasa el test de withholding si se verifica lo siguiente. Dada cualquier sucesión de coaliciones (S_n) tal que $\mu(S_n)$ converge a cero y, dada una sucesión de perfiles (θ_n) tal que $\theta_n(t) = \omega_t$ para todo $t \notin S_n$, existe un equilibrio walrasiano (p_n, x_n) para cada $\mathcal{E}_{\theta_n}$, tal que p_n converge a p.*

El test de withholding hace referencia a convergencia de precios y no a convergencia de asignaciones. Nótese que, aunque las asignaciones walrasianas no tienen por qué estar únicamente determinadas por precios, las utilidades correspondientes sí lo están. Por tanto, aunque las asignaciones x_n no converjan a x, las utilidades $U_t(x_n(t))$ sí convergen a $U_t(x(t))$. Nótese también que no se dice que la coalición que actúa estratégicamente se beneficie de dicho comportamiento. Esto está en relación con la interpretación de competencia perfecta como la no manipulación de precios por grupos arbitrariamente pequeños. Cualquier manipulación de precios, favorable o no, contradice la noción de competencia perfecta. En un modelo con un mecanismo competitivo bien definido, la manipulación no favorable podría ser ignorada. Sin embargo, en un modelo de negociación, a pesar de que los individuos puedan no beneficiarse directamente, su capacidad para influir en la formación de precios podría favorecer o perjudicar a otros agentes, lo que da lugar a una oportunidad de beneficio potencial (por ejemplo, los agente podrían amenazar con un posible comportamiento estratégico para obtener alguna recompensa por no actuar de ese modo).

El test de withholding está relacionado con propiedades de continuidad de la correspondencia de precios de equilibrio walrasiano. Cuando una coalición pequeña falsifica sus recursos produce una perturbación pequeña en los datos de la economía. El test de withholding requiere que, ante tales pertubaciones pequeñas, los precios de equilibrio no varíen demasiado. Esto es, la correspondencia de precios de equilibrio debe ser continua.

Sería demasiado pedir que todo equilibrio walrasiano pase el test de withholding. De hecho no es el caso. (Véase Ostroy (1980)). Por ello, para aplicar este test tomamos un punto de vista genérico, es decir, nos preguntamos si el test de withholding se verifica para un conjunto genérico de equilibrios walrasianos. Concretamente, digamos que la asignación inicial $\omega : I \longrightarrow \mathbb{R}^\ell_+$ pasa el test de withholding si todo equilibrio walrasiano correspondiente a ω pasa dicho test. Probamos en esta sección que un conjunto residual de recursos iniciales supera el test de withholding.

Sea $W = \{ \omega : I \rightarrow \mathbb{R}^\ell_+ \mid \int_I \omega_t d\mu(t) >> 0 \} \subset L_1(\mu)$. Consideremos en W la norma $\|\cdot\|_1$. Para cada $\omega \in W$ sea $\mathcal{E}_\omega$ una economía cuyos recursos iniciales vienen dados por ω. Las funciones de utilidad de cada agente $t \in I$ están fijas y verifican (H.2) y (H.3). Sea $\Pi : W \rightarrow P$ la correspondencia que a cada $\omega \in W$ le asigna los precios de equilibrio competitivo de $\mathcal{E}_\omega$. Dado $L \subset W$, denotemos por $\Pi|_L$ la restricción de Π a L. Para cada n entero positivo sea $\overline{W}_n = \{ \omega : I \rightarrow \mathbb{R}^\ell_+ \mid \int_I \omega_t d\mu(t) \geq (\frac{1}{n}, \overset{\ell)}{\ldots}, \frac{1}{n}) \}$ y sea $W_n = \{ \omega : I \rightarrow \mathbb{R}^\ell_+ \mid \int_I \omega_t d\mu(t) > (\frac{1}{n}, \overset{\ell)}{\ldots}, \frac{1}{n}) \}$. Así, podemos escribir $W = \bigcup_{n=1}^\infty W_n = \bigcup_{n=1}^\infty \overline{W}_n$.

A continuación establecemos algunos resultadas que utilizaremos para probar que un conjunto genérico de dotaciones iniciales pasa el test de withholding. En particular, obtenemos que existe un conjunto denso de dotaciones iniciales que pasa dicho test.

Lema 7.1 *Para cada n entero positivo se verifica que $\Pi|_{\overline{W}_n}$ es semicontinua superiormente.*

Demostración. Como $\Pi|_{\overline{W}_n}$ toma valores en un compacto, basta probar que $\Pi|_{\overline{W}_n}$ tiene grafo cerrado. Sea (ω_n) una sucesión de asignaciones iniciales en $\overline{W}_n$ que converge en $\|\cdot\|_1$ a ω y sea (p_n) una sucesión de precios que converge a p, tal que $p_n \in \Pi(\omega_n)$ para todo n. Se tiene entonces que $\lim_{n\to\infty} \int_I \omega_n(t)d\mu(t) = \int_I \omega(t)d\mu(t)$. Por tanto, $\omega \in \overline{W}_n$. Además, existe una subsucesión (ω_{n_k}), y una función $h \in L_1(\mu)$, tal que $\omega_{n_k}(t) \leq h(t)$ para casi todo $t \in I$ y ω_{n_k} converge a ω en casi todo punto. Luego, por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, obtenemos que $\mu \circ \omega_{n_k}^{-1}$ converge débilmente a $\mu \circ \omega^{-1}$. Como las preferencias están fijas, podemos concluir que la distribución de características en $\mathcal{E}_{\omega_{n_k}}$ converge débilmente a la distribución de características en $\mathcal{E}$. Por tanto, $Ls(\Pi|_{\overline{W}_n}(\omega_{n_k})) \subset \Pi|_{\overline{W}_n}(\omega)$. (Véase Hildebrand (1974), proposición 4, pág. 152). Luego $p \in \Pi|_{\overline{W}_n}(\omega)$, lo que nos permite concluir que $\Pi|_{\overline{W}_n}$ es semicontinua superiormente en cualquier $\omega \in \overline{W}_n$.

Q.E.D.

Lema 7.2 *Para cada n, sea D_n un subconjunto residual de W_n. Entonces, $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ es un subconjunto residual de W.*

Demostración. Para probar que D es residual en W veamos que es residual en $\overline{W} = \{\ \omega : I \to \mathbb{R}_+^\ell \mid \int_I \omega_t d\mu(t) \geq 0\ \}$. Como $\overline{W}$ es un espacio métrico completo, basta ver que D es de primera categoría en $\overline{W}$. Para ello, consideremos el conjunto $A = \left\{\ \omega : I \to \mathbb{R}_+^\ell \mid \left(\int_I \omega_t d\mu(t)\right)_h = 0, \text{ para algún } h \in \{1,\ldots,\ell\}\ \right\}$. Así, $\overline{W} = W \bigcup A$, y $\overline{W} \setminus D = (A \bigcup (\bigcup_{n=1}^{\infty} W_n)) \setminus D \subset A \bigcup (\bigcup_{n=1}^{\infty} (W_n \setminus D_n))$. El conjunto A es cerrado en $\overline{W}$ y tiene interior vacío, luego A es de primera categoría en $\overline{W}$. Por hipótesis, para cada n, D_n es residual en W_n, que es un conjunto abierto cuya frontera tiene interior vacío en $\overline{W}$, luego $W_n \setminus D_n$ es de primera categoría en $\overline{W}$. Por tanto, se tiene que $\overline{W} \setminus D$ es de primera categoría, por ser unión numerable de conjuntos de primera categoría. El teorema de Baire nos permite concluir que D es residual en $\overline{W}$.

Q.E.D.

Observación. La prueba del lema se basa en la definición de W y en la construcción paricular de los conjuntos W_n. En realidad el resultado es cierto en un marco general, independiente de la definición de W y W_n. En efecto, se verifica la siguiente proposición.

Proposición 7.1 *Sea X un espacio topológico, y sea (X_n) un recubrimiento abierto de X que verifica $\overline{X}_n \subset X_{n+1}$, donde $\overline{X}_n$ denota la clausura de X_n. Sea D un subconjunto de X tal que $D \bigcap X_n = D_n$ es residual en X_n para cada n. Entonces D es residual en X.*

Demostración. Denotemos $F = X \setminus D$, y $F_n = X_n \setminus D_n = F \bigcap X_n$. Veamos que F está contenido en un conjunto que es unión numerable de cerrados con interior vacío. Por hipótesis $F_n \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_{nj}$, donde C_{nj} son cerrados sin interior de X_n. Veamos que $C'_{nj} = C_{nj} \bigcap \overline{X}_{n-1}$ es un cerrado sin interior de X. Se tiene que C'_{nj} es un cerrado de $\overline{X}_{n-1}$, pues C_{nj} es cerrado de X_n. Como un cerrado C'_{nj} de un cerrado $\overline{X}_{n-1}$ es un cerrado del espacio, concluimos que C'_{nj} es cerrado de X. Evidentemente C'_{nj} tiene interior vacío. Basta ahora ver que $F \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C'_{nj}$. En efecto, $\bigcup_{n,j} C'_{nj} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(C_{nj} \bigcap \overline{X}_{n-1}\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} C_{nj}\right) \bigcap \overline{X}_{n-1}\right) \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(F_n \bigcap \overline{X}_{n-1}\right) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \bigcap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{X}_{n-1}\right) = F \bigcap X = F$.

Q.E.D.

Corolario 7.1 *Para cada n, sea D_n un subconjunto residual de W_n. Entonces, $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ es un subconjunto residual de W. Además, si D_n es intersección numerable de abiertos densos de W_n, entonces D es intersección numerable de abiertos densos de W.*

Demostración. Para probar la primera afirmación basta notar que $D_n \subset D \bigcap W_n$, y por tanto $D \bigcap W_n$ es residual en W_n. La misma demostración de la proposición, sustituyendo $\subset$ y $\supset$ por igualdades, prueba la segunda parte.

Q.E.D.

A continuación probamos que la economía continua $\mathcal{E}$ supera el test de withholding genéricamente.

Teorema 7.1 *Existe un subconjunto residual en W que pasa el test de withholding.*

Demostración. Basta probar que Π es continua en un subconjunto residual de W. Para cada n consideremos $\Pi|_{\overline{W_n}}$. Por el lema 7.1, $\Pi|_{\overline{W}_n}$ es semicontinua superiormente. $\overline{W}_n$ es un espacio métrico completo y P es un espacio métrico completo y separable. Por tanto, para cada n, existe un subconjunto residual $\overline{D}_n$ de $\overline{W}_n$, tal que $\Pi|_{\overline{W}_n}$ es continua en $\overline{D}_n$. Denotemos $D'_n = \overline{D}_n \bigcap W_n$ y $D_n = \bigcup_{k=1}^{n} D'_k$. Para cada n, se tiene que D_n es residual en W_n y $\Pi|_{W_n}$ es continua en D_n. Como W_n es abierto, Π es continua en D_n. Luego, podemos concluir que Π es continua en $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Por el corolario 7.1, D es residual en W.

Q.E.D.

Observación. Nótese que la construcción de los conjuntos D_n se debe a que, en general, no podemos concluir que Π sea continua en $\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{D}_n$. Consideremos el siguiente ejemplo. Sea $A_n = [-n, n]$. Sea $f : \mathrm{I\!R} \to \mathrm{I\!R}$ definida por $f(x) = 1$, si $x \in A_1$ y, $f(x) = n$, si $x \in A_n \setminus A_{n-1}$, con $n > 1$. $f|_{A_1}$ es continua en $D_1 = A_1$. Para cada $n > 1$, se tiene que $f|_{A_n}$ es continua en $D_n = (\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n-1}\{k\}\right)$. Sin embargo, f no es continua en $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$.

Este resultado puede interpretarse como una justificación más de que, en el caso finito-dimensional, el lugar adecuado donde suponer un comportamiento precio-aceptante lo proporciona el marco de las economías continuas, denominadas economías perfectamente competitivas.

8 Conclusiones

En este trabajo, se han obtenido resultados límites de compatibilidad de incentivos coalicionales del mecanismo competitivo en economías continuas y en sucesiones de economías finitas. El conjunto de estrategias considerado es lo suficientemente general como para permitir considerar como casos particulares falsificación de preferencias y/o de recursos, que es lo que realmente caracteriza a un consumidor en una economía de intercambio puro. Como ya se ha señalado en la introducción, la interpretación no es más que una justificación del supuesto competitivo en economías continuas o en economías suficientemente grandes, definidas sobre un espacio de mercancías de dimensión finita. De hecho, las nociones que se han introducido de compatibilidad de incentivos coalicionales son interpretadas como tests de competencia perfecta.

Ostroy y Zame (1994) prueban que los resultados obtenidos en la sección 7 no son ciertos en el caso infinito-dimensional. Argumentan que si el espacio de mercancías es de dimensión infinita, entonces es el "espesor" de los mercados, más que la no existencia de átomos, lo que conduce a la competencia perfecta. Más aún, muestran que esta misma condición de "espesor" o "grosor" de los mercados, que conduce a la equivalencia Core-Walras, garantiza la continuidad genérica de la correspondencia de precios de equilibrio.

La literatura económica sugiere varios tests para distinguir la existencia de equilibrio walrasiano del supuesto de competencia perfecta, esto es, de suponer un comportamiento precio-aceptante por parte de los agentes. Esto conduce a plantear algunas preguntas de interés. Por ejemplo, ¿son equivalentes, al menos genéricamente, cualquiera de los tests de competencia perfecta que se han citado?. Concretamente, en el caso finito-dimensional ¿el test de equivalencia Core-Walras es equivalente a los tests de compatibilidad de incentivos coalicionales?. Más aún, ¿Constituyen estos tests una caracterización de las economías perfectamente competitivas?. En economías que no sean física o económicamente "espesas" (thin market economies), ¿no es cierto que sea suficiente considerar el veto de coaliciones pequeñas para obtener los estados del núcleo y de equilibrio?. Será objeto de investigaciones posteriores tratar de dar respuesta a este tipo de preguntas.

En este trabajo, simplemente se ha probado que la ganancia de utilidad que una coalición puede conseguir por desviarse de un comportamiento precio-aceptante es muy pequeña si aumentamos lo suficiente el número de agentes que constituyen la economía. Ello se ha obtenido como interpretaciones discretas de resultados obtenidos para economías continuas. Concretamente, en economías con un continuo de agente el incentivo de una coalición a no comportarse competitivamente es muy pequeño si el tamaño de la coalición es suficientemente pequeño. De aquí no se deduce que las respuestas a los precios que son óptimas para una coalición converjan a la respuesta competitiva cuando aumenta el número de agentes. Jackson (1992) prueba que cuando aumenta la economía, las funciones de demanda que son óptimas para cada agente converjen a la demanda competitiva. Sería interesante generalizar este resultado a situaciones más generales, considerando acciones colectivas.

Por otra parte, el hecho de considerar desviaciones de grupos de agentes de un comportamiento precio-aceptante, conduce a plantear conceptos de equilibrio con estrategias colectivas y estudiar propiedades límites.

Por último, es clara la conexión del tema de incentivos con ciertas áreas de la Economía del Bienestar. De hecho, el término compatibilidad de incentivos fue introducido por Hurwicz (1972) precisamente para referirse al problema de implementación de las denominadas reglas de elección social. Así, podrían plantearse estudios que relacionasen estos resultados con temas de Economía del Bienestar.

Referencias

[1] AUBIN, J.P., FRANKOWSKA, H. (1990): *Set-Valued Analysis.* Birkhäuser, Boston.

[2] ALIPRANTIS, C.D., BROWN, D., BURKINSHAW, O. (1989): *Existence and Optimality of Competitive Equilibria.* Springer-Verlarg. New York.

[3] AUMANN, R.J. (1964): "Markets with a Continum of Traders." *Econometrica*, 34, 1-17.

[4] AUMANN, R.J. (1966): "Existence of Competitive Equilibria in Markets with a Continum of Traders." *Econometrica*, 52, 39-50.

[5] BILLINGSLEY, P. (1968): *Convergence of probability measures.* Wiley, New York.

[6] DASGUPTA, P.S., HAMMOND, P.J., MASKIN, E.S. (1979): "The implementation of Social Choice Rules: Some General Results on Incentive Compatibility." *Review of Economics Studies*, 46, 163-170.

[7] DEBREU, G., SCARF, H. (1963): "A Limit theorem on the Core of an Economy." *International Economic Review*, 4, 235-246.

[8] DIERKER, E. (1982): Regular economies, in *Handbook of Mathematical Economics.* K. J. Arrow and M. D. Intriligator, Eds. Volume II, Chap. 17. North-Holland, Amsterdam.

[9] DIESTEL S., UHL J. (1977): *Vector Measures.* Mathematical Surveys and Monographs, 15. Published by the American Mathematical Society.

[10] DUBEY, P., MAS-COLELL, A., SHUBIK, M. (1980): "Efficiency Properties of Strategic Markets Games: An Axiomatic Apprroach." *Journal of Economic Theory*, 22, 339-362.

[11] EDGEWORTH, F.Y. (1881): *Mathematical Psychics.* London: Paul Kegan.

[12] GABSZEWICZ, J.J., VIAL, J.P. (1972): "Oligopoly "a la Cournot" in a general equilibrium analysis." *Journal of Economic Theory*, 4, 381-400.

[13] GARCÍA-CUTRÍN, J., HERVÉS, C. (1993): "A Discrete Approach to Continuum Economies." *Economic Theory*, 3, 577-584.

[14] HAMMOND, P.J. (1987): " Markets as Constraint: Multilateral Incentive Compatibility in Continuum Economies." *Review of Economics Studies*, 54, 399-412.

[15] HERVÉS, C., MORENO, E. (1994): "Strategic Equilibrium in Economies with a Continuum of Agents". Working Paper, 94-35. Departamento de Economía. Universidad Carlos III de Madrid. ASSET 95.

[16] HERVÉS, C., MORENO, E. (1996): "Algunas consideraciones sobre el mecanismo del veto." Documento de Trabajo, 96-01. Departamento de Economía. Universidad Carlos III de Madrid.

[17] HILDEBRAND, W. (1974): *Core and Equilibria of a Large Economy.* Princeton, University Press.

[18] HURWICZ, L. (1972): "On informationally decentralized system." In *Decisions and Organization.* A Volume in Honor of Jacob Marschek. C. B. McGuire and R. Radner, Eds. North-Holland, Amsterdam.

[19] HURWICZ, L. (1979): "On the interaction between information and incentives in organizations." In *Communication and Control in Society.* K. Krippendorff, Ed. Gordon & Breach, New York.

[20] ICHIISHI, T. (1983): *Game Theory for Economic Analysis.* Academic Press.

[21] JACKSON, M.O. (1992): "Incentive compatibility and competitive allocations." *Economic Letters*, 40, 299-302.

[22] KHAN, M.A., YANNELIS, N.C. (1991): *Equilibrium Theory in Infinite Dimensional Spaces.* Springer-Verlag. New York.

[23] KLEIN, E., THOMSON, A. (1984): *Theory of Correspondences.* John Wiley & sons. New York.

[24] MAS-COLELL, A. (1974): "Continuous and Smooth Consumers: Approximation Theorems." *Journal of Economic Theory*, 8, 305-336.

[25] MAS-COLLEL, A., NEUEFEIND, W. (1977): "Some generic properties of aggregate excess demand and an application." *Econometrica*, 45, 591-599.

[26] MAS-COLELL, A. (1985): *The theory of general economic equilibrium: a differentiable approach.* Cambridge University Press.

[27] NOVSHEK, W., SONNENSCHEIN, H. (1978): "Cournot and Walras Equilibrium." *Journal of Economic Theory*, 15, 223-260.

[28] OSTROY, J.M. (1980): "The No-Surplus Condition as a Characterization of Perfectly Competitive Equilibrium." *Journal of Economic Theory*, 22, 183-207.

[29] OSTROY, J.M., ZAME, W.R. (1994): "Nonatomic economies and the boundaries of perfect competition." *Econometrica*, 62, 593-633.

[30] OTANI, Y., SICILIAN, J. (1982): "Equilibrium Allocations of Walrasian Preference Games." *Journal of Economic Theory*, 27, 47-68.

[31] OTANI, Y., SICILIAN, J. (1990): "Limit Properties of Equilibrium Allocations of Walrasian Strategic Games." *Journal of Economic Theory*, 51, 295-312.

[32] POSTLEWAITE, A. (1979): "Manipulation via endowments." *Review of Economic Studies,* 46, 255-262.

[33] ROBERTS, J. (1976): "The Incentives for corresct revelation of preferences and the number of consumers." *Journal of Public Economics*, 6, 359-374.

[34] ROBERTS, K. (1980): "The limit points of Monopolistic Competition." *Journal of Economic Theory*, 22, 256-278.

[35] ROBERTS, D.J., POSTLEWAITE, A. (1976): "The incentives for price-taking behavior in large exchange economies." *Econometrica*, 44, 115-127.

[36] ROCKAFELLAR, T. (1970): *Convex Analysis.* Princeton.

[37] SAFRA, Z. (1985): "Existence of Equilibrium for Walrasian Endowment Games." *Journal of Economic Theory*, 37, 366-378.

[38] SCHMEIDLER, D. (1972): "A Remark on the Core of an Atomless Economy." *Econometrica*, 40, 579-580.

[39] SHUBIK, M. (1959): "Edgeworth Market Games." In *Contribution to the Theory of Games*, vol. IV, ed. by R. Luce and A. Tucker. Princeton University Press.

[40] THOMSON, W. (1979): "The Equilibrium Allocations of Walras and Lindhal Manipulation Games." University of Minnesota. Discussion Paper No. 111.

[41] THOMSON, W. (1987): "Monotonic allocation mechanism." Workin Paper No.116, University of Rochester.

[42] YI, G. (1991): "Manipulation via Withholding: A Generalization." *Review of Economic Studies*, 58, 817-820.