Documento de Trabajo 93-01
Serie de Economía 01
Febrero de 1993

Departamento de Estadística y Econometría
Universidad Carlos III de Madrid
Calle Madrid, 126
28903 Getafe (Spain)
Fax (341) 624-9875

UNA NOTA SOBRE LA REPRESENTACION NUMERICA DE RELACIONES DE PREFERENCIA

Margarita Estévez, Carlos Hervés y Miguel A. López*

Resumen

En esta nota se estudia la existencia de representación de una preferencia $\prec$ definida en un espacio topológico X mediante dos funciones reales u y v, contínuas en X de modo que $x \prec y$ si o sólo si $u(x) < v(y)$. Generalizamos al caso pseudotransitivo un resultado de P.K. Monteiro relativo a preórdenes completos para obtener, en el marco de los espacios topológicos conexos por arcos, condiciones necesarias y suficientes para la existencia de representación.

Palabras clave
Preferencias; Representación Continua; Pseudotransitividad; Acotación numerable.

*Estévez, Departamento de Matemáticas de la Universidad de Vigo; Hervés, Departamento de Economía de la Universidad Carlos III de Madrid y López, Departamento de Algebra de la Universidad de Santiago. Esta investigación ha sido financiada por el proyecto de investigación D.G.I.C.Y.T. PS-0042.

1 Introducción

Una relación de preferencia en un conjunto X es una relación binaria asimétrica "$\prec$" $\subset X \times X$. Se dice que la relación de preferencia "$\prec$" está representada por una función de utilidad si existe una función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $x \prec y \Longleftrightarrow f(x) < f(y)$. La existencia de representación mediante una función de utilidad implica no sólo la transitividad de la relación "$\prec$" sino también la transitividad de la relación de indiferencia "$\sim$" definida por $x \sim y \Longleftrightarrow$ [no $x \prec y$, no $y \prec x$]. Así pues la existencia de función de utilidad obliga a que la relación de preferencia-indiferencia asociada "$\preceq$" definida por $x \preceq y \Longleftrightarrow$ no $y \prec x$] sea un preorden completo.

En el marco de los espacios topológicos es clásico un resultado de Eilenberg (1941) (ver también Debreu (1964)) que establece que si X es conexo y separable, toda relación de preferencia continua ("$\prec$" es abierto en $X \times X$) tal que "$\preceq$" es un preorden completo, es representable mediante una función de utilidad.

Fishburg (1970) propone la representación de una relación de preferencia "$\prec$" mediante un par de funciones $u, v : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $v(x) \leq u(x)$, de modo que $x \prec y \Longleftrightarrow u(x) < v(y)$. Este tipo de representación da una idea de la imprecisión con la que se percibe la "utilidad" proporcionada por un elemento x, que tiene una cota superior en $u(x)$ y una cota inferior en $v(x)$. Las relaciones de preferencia que pueden representarse mediante un par de funciones u, v no están obligadas a un comportamiento transitivo en la indiferencia, lo que parece razonable pues $x \sim y$ puede significar, además de la indiferencia, el hecho de que x e y no sean comparables. Dichas relaciones son pseudotransitivas; es decir, si $x \prec y \preceq y' \prec z$ entonces $x \prec z$.

Bridges (1983), Chateauneuf (1987) y, más recientemente, López (1992) estudian condiciones para la existencia de representación de una relación de preferencia pseudotransitiva definida en un espacio topológico. Un resultado de Chateauneuf (1987, (véase corolario p. 145)) generaliza el clásico resultado de Eilenberg en el sentido de que en un espacio topológico conexo y separable, toda relación de preferencia pseudotransitiva cuyos preórdenes asociados son continuos, es representable mediante un par de funciones continuas.

El objetivo fundamental de esta nota es obtener condiciones necesarias y suficientes para que una relación de preferencia definida en un espacio topológico conexo por arcos. sea representable mediante un par de funciones continuas. El resultado obtenido se basa en propiedades de acotación de las preferencias y generaliza el trabajo de Monteiro (1987) en el que se caracterizan los preórdenes completos que son representables mediante una función de utilidad.

En la sección segunda se establecen las notaciones y se precisan las definiciones que van a ser utilizadas a lo largo del trabajo. En la sección tercera se establecen las condiciones necesarias para la existencia de representación y en la sección cuarta se comprueba que tales condiciones son también suficientes.

En la última sección analizamos en qué casos la separabilidad del espacio es condición necesaria y suficiente para que toda relación de preferencia pseudotransitiva con preórdenes inducidos continuos, sea representable mediante un par de funciones continuas.

2 Definiciones y notaciones

Una relación de preferencia en un conjunto X es una relación binaria asimétrica " $\prec$ " $\subset X \times X$. Escribiremos $x \prec y$ en lugar de $(x,y) \in$ " $\prec$ ". La notación $x \preceq y$ indicará que no se cumple $y \prec x$ y escribiremos $x \sim y$ si se verifican simultáneamente $x \preceq y$ e $y \preceq x$. De la asimetría de la relación $\prec$ se deduce que la relación de preferencia-indiferencia $\preceq$ es reflexiva y completa; esto es, dados $x, y \in X$ se cumple $x \preceq y$ o $y \preceq x$. Se dice que $\preceq$ es un preorden cuando además es transitiva, es decir si $x \preceq y \preceq z$ entonces $x \preceq z$. La relación $\preceq$ es pseudotransitiva cuando $x \prec y \preceq y' \prec z$ implica $x \prec z$. La pseudotransitividad de $\preceq$ lleva consigo la transitividad de $\prec$ pero no la transitividad de $\preceq$.

A la relación de preferencias $\prec$ se le asocian de forma natural dos relaciones, que denotamos $\preceq_1$ y $\preceq_2$ definidas de la forma siguiente:

$$x \preceq_1 y \text{ si y sólo si } [z \preceq x \text{ implica } z \preceq y]$$

$$x \preceq_2 y \text{ si y sólo si } [y \preceq z \text{ implica } x \preceq z]$$

Las relaciones $\preceq_1$ y $\preceq_2$ son, obviamente, transitivas y es fácil comprobar (ver Doignon *et al.*, 1984) que $\preceq$ es pseudotransitiva si y sólo si $\preceq_1$ (o equivalentemente $\preceq_2$) es un preorden completo.

También es fácil comprobar que las relaciones estrictas $\prec_1$ y $\prec_2$ asociadas a los preórdenes completos $\preceq_1$ y $\preceq_2$ están definidas del siguiente modo:

$$x \prec_1 y \text{ si y sólo si [existe } z \in X \text{ tal que } x \prec z \preceq y]$$

$$x \prec_2 y \text{ si y sólo si [existe } z \in X \text{ tal que } x \preceq z \prec y]$$

Diremos que $\prec$ es fuertemente separable (Chateauneuf (1987)) si existe un subconjunto numerable $A \subset X$ tal que si $x \prec y$ existen $a, b \in A$ tales que $x \prec a \preceq b \prec y$. Se dice que un subconjunto $A \subset X$ acota a $\preceq$ (Monteiro(1987)) si dado $x \in X$, existen $a, b \in A$ tales que $a \preceq x \preceq b$. Se dice que $\preceq$ es numerablemente acotada si existe un conjunto A finito o numerable que acota a $\preceq$. La misma definición se puede aplicar a la relación estricta $\prec$. Evidentemente, si $\prec$ está acotada por A, $\preceq$ también lo está.

Cuando X es un espacio topológico, se dice que la relación $\prec$ es continua si "$\prec$" es un abierto en el producto cartesiano $X \times X$. Un espacio topológico X es separable si tiene un subconjunto denso y numerable. Diremos que X es conexo si no es la unión de dos abiertos no vacíos disjuntos. X es conexo por arcos si para todo $x, y \in X$ existe $f : [0,1] \longrightarrow X$ continua con $f(0) = x, f(1) = y$. Todo espacio conexo por arcos es conexo. Todo subconjunto convexo de un espacio vectorial topológico es conexo por arcos.

3 Condiciones necesarias para la existencia de representación

Consideremos un espacio topológico conexo X, en el que está definida una relación de preferencias $\prec$. En esta sección se estudian condiciones necesarias para la existencia de un par de funciones continuas $u, v : X \longrightarrow \boldsymbol{R}$ que representen a la relación $\prec$ en el sentido de que $x \prec y$ si y sólo si $u(x) < v(y)$.

Obsérvese que la asimetría de $\prec$ implica la irreflexividad, es decir, no se cumple $x \prec x$, lo que supone $v(x) \leq u(x)$ para todo $x \in X$.

Consecuencia inmediata de la existencia de representación es el siguiente lema (véase por ejemplo Bridges (1983))

Lema 1 *Si existe una representación de $\prec$, entonces $\preceq$ es pseudotransitiva.*

La demostración del siguiente resultado, que utiliza la conexión del espacio X, puede verse en Bridges (1983a) y en Chateauneuf (1987).

Lema 2 *Si existe una representación de $\prec$ mediante un par de funciones continuas u y v, entonces $\prec$, $\prec_1$ y $\prec_2$ son relaciones de preferencia continuas.*

Lema 3 *Si existe una representación de $\prec$ mediante un par de funciones u y v, entonces:*

a) Si $u(x) \leq u(y)$, entonces $x \preceq_1 y$

b) Si $v(x) \leq v(y)$, entonces $x \preceq_2 y$

Demostración.

Sea $z \preceq x$, por la existencia de la representación u, v, se tiene que $v(z) \leq u(x)$, pero por hipótesis $u(x) \leq u(y)$ luego $v(x) \leq u(y)$, esto es, $z \preceq y$. Así pues, si $z \preceq x$, entonces $z \preceq y$, es decir, $x \preceq_1 y$.

Análogamente, si $y \preceq z$ se tiene $v(y) \leq u(z)$, pero como $v(x) \leq v(y)$ tenemos $v(x) \leq u(z)$, lo que equivale a $x \preceq z$. Así pues, si $y \preceq z$, entonces $x \preceq z$, esto es, $x \preceq_2 y$.

Q.E.D.

El resultado anterior puede formularse también del siguiente modo:

a') Si $x \prec_1 y$, entonces $u(x) < u(y)$

b') Si $x \prec_2 y$, entonces $v(x) < v(y)$

Obsérvese sin embargo que, por ejemplo, $u(x) < u(y)$ no implica $x \prec_1 y$.

Ejemplo (Chateauneuf (1987)). Sea $X = [1,3]$ y $u(x) = x^2, v(x) = x$ para todo $x \in X$. Se tiene $u(2) = 4 < u(3) = 9$, pero $3 \preceq_1 2$ pues si $z \preceq 3$ también se cumple $z \preceq 2$ ya que $v(z) = z \in X$ es necesariamente menor o igual que $u(2) = 4$.

En consecuencia u y v son, respectivamente, funciones de utilidad débiles para $\prec_1$ y $\prec_2$ (según la terminología de Peleg (1970), entre otros) pero no necesariamente funciones de utilidad.

Lema 4 *Si existe una representación de $\prec$ mediante un par de funciones continuas u y v, entonces $\preceq$, $\preceq_1$ y $\preceq_2$ son numerablemente acotadas.*

Demostración. Obsérvese en primer lugar que si A acota a $\preceq_1$ (ó a $\preceq_2$) también acota a $\preceq$, pues, si $x \preceq_1 y$, entonces $x \preceq y$. Veamos que $\preceq_1$ está numerablemente acotada.

Sea Q el conjunto de los números reales racionales. Para cada $q_n \in Q$ tal qure $u^{-1}(q_n) \neq \emptyset$ elegimos $a_n \in X$ tal que $u(a_n) = q_n$. Si u tiene máximo en X sea $x_M \in X$ un punto donde u alcanza el máximo y si u tiene mínimo en X sea x_m un punto donde u alcanza el mínimo. Sea $A \subset X$ el conjunto formado por los elementos a_n y, en su caso, los puntos x_M y x_m. Entonces A es numerable y acota a $\preceq_1$. En efecto; si u tiene máximo, $x \preceq_1 x_M$ para todo $x \in X$ pues, en otro caso, existiría $x' \in X$ tal que $x_M \prec_1 x'$ lo que implicaría, por el lema 3, que $u(x_M) < u(x')$ lo que es imposible. Análogamente si u tiene mínimo $x_m \preceq_1 x$ para todo $x \in X$.

Si u no tiene máximo, dado $x \in X$, como X es conexo y u es continua existe $q_n \in Q$, $u(x) \leq q_n$ siendo q_n un valor de u es decir $u(x) \leq u(a_n)$ y entonces $x \preceq_1 a_n$. De modo análogo se razona si u no tiene mínimo y se concluye que A acota a $\preceq_1$.

Utilizando v en lugar de u en el razonamiento anterior se concluye que $\preceq_2$ es numerablemente acotada.

Q.E.D.

4 Caracterización de las relaciones de preferencia que son representables

En esta sección ponemos de manifiesto que si X es un espacio conexo por arcos, las condiciones necesarias para la existencia de un par de funciones continuas u y v que representen a la relación de preferencia $\prec$ obtenidas en la sección anterior, son también suficientes.

Un ejemplo, al final de la sección, nos permitirá comprobar que la conexión por arcos del espacio X no puede ser suprimida.

El resultado fundamental de esta sección se establece en el teorema siguiente.

Teorema 5 *Sea X un espacio topológico conexo por arcos y $\prec$ una relación de preferencias definida en X.*

Existen funciones continuas $u', v' : X \longrightarrow \mathbb{R}$ que representan a la relación de preferencia $\prec$ si y sólo si se verifican las siguientes condiciones:

1.- $\preceq$ es pseudotransitiva.

2.- $\prec$, $\prec_1$ y $\prec_2$ son continuas.

3.- $\preceq_1$ y $\preceq_2$ son numerablemente acotadas.

Además, si existe la representación, puede obtenerse otra representación $u, v : X \longrightarrow \mathbb{R}$ de modo que u es una función de utilidad para $\prec_1$ y v es función de utilidad para $\prec_2$.

Para demostrar el teorema será útil estudiar previamente las relaciones que una relación de preferencia pseudotransitiva $\prec$ definida en cualquier espacio topológico X induce en un subconjunto $A \subset X$.

Sea $A \subset X$; dados $a, b \in A$, definimos $a \preceq_1^A b$ si y sólo si dado $a' \in A$ tal que $a' \preceq a$ implica $a' \preceq b$, y análogamente $a \preceq_2^A b$ si y sólo si dado $b' \in A$ tal que $b \preceq b'$ implica $a \preceq b'$. Obsérvese que $a \prec_1^A b$ si y sólo si existe $c \in A$ tal que $a \prec c \preceq b$, y que $a \prec_2^A b$ si y sólo si existe $c \in A$ tal que $a \preceq c \prec b$. Nótese que $a \preceq_1 b$ implica $a \preceq_1^A b$ y que $a \preceq_2 b$ implica $a \preceq_2^A b$, pero que, en general, las relaciones $\preceq_1$ y $\preceq_1^A$ así como $\preceq_2$ y $\preceq_2^A$ no tienen porque coincidir, como se pone de manifiesto en el ejemplo siguiente

Ejemplo. Sea $X = [1, 10]$, $x \prec y$ si y sólo si $x^2 < y$. Sea $A = [1, 3]$. Se tiene $2 \prec_1 3$ pues existe $z \in X$ tal que $2 \prec z \preceq 3$ (cualquier z tal que $4 < z \leq 9$). Sin embargo, no se cumple $2 \prec_1^A 3$.

Proposición 6 *Si $\prec$, $\prec_1$ y $\prec_2$ son continuas en X y si $A \subset X$ es un conjunto conexo que acota a $\preceq_1$ y $\preceq_2$, entonces $\preceq_1 = \preceq_1^A$ y $\preceq_2 = \preceq_2^A$.*

Demostración.- Probaremos en primer lugar que $\preceq_1 = \preceq_1^A$; para ello, será suficiente demostrar que si $a \prec_1 b$ se tiene $a \prec_1^A b$.

Sea $a \prec_1 b$, existe $x \in X$ tal que $a \prec x \preceq b$. Como A acota (superiormente) a $\preceq_2$ existe $c \in A$ tal que $x \preceq_2 c$. Se tiene pues $a \prec x \preceq_2 c$ lo que implica $a \prec c$ (pues en otro caso $c \preceq a \prec x$ lo que equivale a $c \prec_2 x$ en contra de que $x \preceq_2 c$). Consideramos el abierto $(a, \rightarrow) \cap A = \{a' \in A, a \prec a'\}$ que es no vacío pues contiene al punto $c \in A$.

El abierto $(\leftarrow, x)_2 \cap A = \{a' \in A; a' \prec_2 a\}$ es no vacío pues contiene al punto $a \in A$ ya que $a \prec x$ implica $a \prec_2 x$.

Se verifica que $(a, \rightarrow) \cap A \bigcup (\leftarrow, x)_2 \cap A = A$. En efecto, si $d \in A$ y $d \notin (a, \rightarrow)$ entonces $d \preceq a \prec x$, lo que implica que $d \prec_2 x$ y por tanto $d \in (\leftarrow, x)_2 \cap A$.

Como consecuencia de la conexión de A, ha de existir $d \in A$ tal que $d \in (a, \rightarrow) \cap (\leftarrow . x)_2$ esto es

$$a \prec d \prec_2 x \preceq b \Longrightarrow a \prec d \preceq b \Longrightarrow a \prec_1^A b$$

Demostremos ahora que $\preceq_2 = \preceq_2^A$. Sea $a \prec_2 b$ y veamos que $a \prec_2^A b$, por hipótesis existe $x \in X$ tal que $a \preceq x \prec b$. Como A acota (inferiormente) a $\preceq_1$, existe $c \in A$ tal que $c \preceq_1 x \prec b$, de donde, $c \prec b$. Consideremos los abiertos $(\leftarrow, b) \cap A$ y $(x, \rightarrow)_1 \cap A$ que son no vacíos pues $c \in (\leftarrow, b) \cap A$ y $b \in (x, \rightarrow)_1 \cap A$. Se verifica que su unión es A pues si $d \in A$ y $d \notin (\leftarrow, b)$, entonces $x \prec b \preceq d$ lo que implica $x \prec_1 d$ por tanto $d \in (x, \rightarrow)_1$. Como consecuencia de la conexión de A existe $d \in (\leftarrow, b) \cap (x, \rightarrow)_1 \cap A$, es decir

$$a \preceq x \prec_1 d \prec b \Longrightarrow a \preceq d \prec b \Longrightarrow a \prec_2^A b$$

Q.E.D.

Obsérvese que en el ejemplo el conjunto A no acota a $\preceq_1$ y $\preceq_2$. Un ejemplo análogo en el que $X = [1,10]$ y $A = [1,3] \cup \{10\}$ pone de manifiesto que también la hipótesis de conexión del conjunto A es, en general, necesaria en la proposición anterior.

El resultado siguiente es esencialmente idéntico a un resultado de Monteiro (véase Monteiro (1987, teorema 2)).

Proposición 7 *Sea $\prec$ una relación de preferencia pseudotransitiva definida en un espacio X conexo por arcos. Si los preórdenes $\preceq_1$ y $\preceq_2$ están numerablemente acotados, existe un conjunto $A \subset X$ conexo y separable que acota a $\preceq_1$ y $\preceq_2$.*

Demostración.

Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $\preceq_1$ y $\preceq_2$ están acotadas por la sucesión $\{x_n, n \in I\!N\}$. Fijado un punto $a \in X$, se considera, para cada entero $n \in I\!N$, una función continua $f_n : [0,1] \longrightarrow X$ tal que $f_n(0) = a$ y $f_n(1) = x_n$. Sea $A = \bigcup_{n \in I\!N} f_n([0,1])$; el conjunto A es conexo por arcos, separable por ser unión numerable de conjuntos separables y acota a $\preceq_1$ y $\preceq_2$ pues contiene a la sucesión $\{x_n, n \in I\!N\}$

Q.E.D.

Demostración del teorema 5.

Puesto que la necesidad de las condiciones fue establecida en la sección anterior habrá que probar la suficiencia.

Ya que $\preceq_1$ y $\preceq_2$ están numerablemente acotadas, por la proposición 7 existe un subconjunto $A \subset X$, conexo y separable que acota a $\preceq_1$ y $\preceq_2$. En el subespacio A, en virtud de la proposición 6 se tiene que $\preceq_1^A = \preceq_1$ y $\preceq_2^A = \preceq_2$.

En el conjunto conexo y separable A existen funciones continuas $f, g : A \longrightarrow [0,1]$ tales que $a \prec b \iff f(a) < g(b)$, siendo f y g funciones de utilidad para $\prec_1^A$ y $\prec_2^A$ respectivamente (Véase Chateauneuf (1987, sección 4)).

Veamos ahora que f y g pueden extenderse a X. Dado $x \in X$, los conjuntos $\{a \in A; a \preceq_1 x\}$ y $\{a \in A; x \preceq_1 a\}$ son no vacíos (A acota a $\preceq_1$) y cerrados en A; como A es conexo existe un elemento, que denotamos $a_1(x)$, en la intersección de ambos, es decir $a_1(x) \sim_1 x$. Definimos $u(x) = f(a_1(x))$. Se tiene que $x \prec_1 y$ si y sólo si $a_1(x) \prec_1^A a_1(y)$ lo que equivale a que $f(a_1(x)) < f(a_1(y))$ y por tanto $u : X \longrightarrow [0,1]$ es una función de utilidad parqa $\prec_1$ y por lo tanto es continua.

Análogamente, para cualquier $x \in X$ se obtiene $a_2(x) \in A$ tal que $a_2(x) \sim_2 x$ y $v : X \longrightarrow [0,1]$ definida por $v(x) = g(a_2(x))$ es una función de utilidad para $\prec_2$.

Veamos que el par de funciones continuas u y v es una representación de $\prec$. Obsérvese que $x \prec y$ es equivalente a $a_1(x) \prec a_2(y)$. En efecto, si $x \prec y$ se tiene $a_1(x) \prec a_2(y)$ pues en caso contrario $a_2(y) \preceq a_1(x) \sim_1 x$ de donde $a_2(y) \preceq x$ y así $y \sim_2 a_2(y) \preceq x$ que implica $y \preceq x$ en contra de lo supuesto. La otra implicación se razona de forma análoga.

Así pues $x \prec y$ equivale a $a_1(x) \prec a_2(y)$ que equivale a $f(a_1(x)) < g(a_2(y))$ es decir $u(x) < v(y)$.

Q.E.D.

El ejemplo siguiente pone de manifiesto que la hipótesis de conexión por arcos no puede ser suprimida.

Ejemplo. Sea $X = [0,1] \times [0,1]$ y sea $\prec$ la relación de preferencia que define en X el denominado orden lexicográfico; es decir, $(x,y) \prec (x',y')$ si $x < x'$ o si $x = x'$ e $y < y'$.

El conjunto X dotado de la topología del orden es conexo y no es conexo por arcos. Puesto que $\preceq$ es transitiva tenemos que $\preceq = \preceq_1 = \preceq_2$ y en consecuencia si $\prec$ fuera representable existiría una función continua $u : X \longrightarrow \boldsymbol{R}$ tal que $(x,y) \prec (x',y')$ si y sólo si $u(x,y) < u(x',y')$. Como para cada $x \in [0,1]$, $(x,0) \prec (x,1)$, el intervalo $(u(x,o), u(x,1))$ no tiene puntos en común con el intervalo $(u(x',0), u(x',1))$ si $x \neq x'$ y existiría una colección no numerable de intervalos abiertos disjuntos, lo cual es imposible.

Así pues $\prec$ no es representable aún cuando los preórdenes asociados $\preceq_1$ y $\preceq_2$ que coinsiden con $\preceq$ están acotados inferiormente por $(0,0)$ y superiormente por $(1,1)$.

5 Comentarios y observaciones

La caracterización obtenida de las relaciones de preferencia pseudotransitivas que son representables ha de compararse con la dada por Chateauneuf (1987), quien establece un resultado similar en el que en lugar de la hipótesis de acotación numerable, se utiliza la condición de que $\prec$ es fuertemente separable y exige sólo la conexión y no la conexión por arcos del espacio X.

Como es fácil de comprobar, la hipótesis de separabilidad fuerte implica la acotación numerable, pero en general no son equivalentes como se pone de manifiesto en el último ejemplo, en el que la relación de preferencia $\prec$ es numerablemente acotada y no es fuertemente separable.

Una consecuencia del teorema 5 y de la caracterización dada por Chateauneuf es que, en el marco de los espacios topológicos conexos por arcos, la acotación numerable y la separabilidad fuerte son equivalentes si se dan las restantes hipótesis que, sobre la relación de preferencia $\prec$, establece el teorema.

El interés principal de la caracterización obtenida está en su aplicabilidad a espacios no separables, donde la condición de que $\prec$ sea fuertemente separable es de difícil comprobación mientras que, quizás la acotación numerable puede obtenerse fácilmente. Así por ejemplo, si X es compacto y los preórdenes inducidos por la relación de preferencia pseudotransitiva $\preceq_1$ y $\preceq_2$ son continuos, existen puntos x_m^1, x_m^2, x_M^1 y x_M^2 tales que $x_m^1 \preceq_1 x \preceq_1 x_M^1$ y $x_m^2 \preceq_2 x \preceq_2 x_M^2$ para todo $x \in X$. Si X es σ compacto, es decir X es unión de una familia numerable de conjuntos compactos K_n, el razonamiento anterior puede aplicarse a cada compacto K_n y por tanto se obtiene la acotación numerable de los preórdenes $\preceq_1$ y $\preceq_2$ asociados a $\prec$.

En consecuencia, en un espacio σ compacto y conexo por arcos X, todas las relaciones de preferencia pseudotransitivas, cuyos preórdenes asociados sean continuos son representables por un par de funciones continuas.

Obsérvese que si X es un espacio métrico σ compacto entonces X es separable. En consecuencia, la observación anterior no se aplica a los espacios métricos no separables. En realidad, y como consecuencia de un resultado de Arias de Reyna (1990), en cualquier espacio métrico no separable, existe al menos una relación de preferencia pseudotransitiva, con preórdenes asociados continuos, que no es representable mediante un par de funciones.

Referencias

[1] Arias de Reyna, J., 1990, "Preferencias sin utilidad", pendiente de publicación.

[2] Bridges, D.S., 1983a, "A numerical representation of preferences with intransitive indifference", *Journal of Mathematical Economics, 11*, pp. 25-42.

[3] Bridges, D.S., 1983b, "Numerical representation of intransitive preferences on a countable set", *Journal of Economic Theory, 30*, pp. 213-217.

[4] Chateauneuf, A., 1987, "Continuous representation of a preference relation on a connected topological space", *Journal of Mathematical Economics, 16*, pp. 139-146.

[5] Debreu, G., 1954, "Representation of a preference ordering by a numerical function", *Decision Processes, Thall, R.M., Coombs, C.H., Davis, R.L., Wiley, New York.*

[6] Debreu, G., 1959, *Theory of value.* Wiley. New York.

[7] Debreu, G., 1964, "Continuity properties of Paretian utility", *International Economic Review, 5*, pp. 285-293.

[8] Doignon, J.P., Ducamp, A., Falmagne, J.C., 1984, "On realizable biorders and the biorder dimension of a relation", *Journal of Mathematical Psychology, 28*, pp. 29-62.

[9] Eilenberg, S., 1941, "Ordered topological spaces", *American Journal of Mathematics, 63*, pp. 39-45.

[10] Fishburn, P.C., 1970a, *Utility theory for decision making*. Wiley. New York.

[11] Fishburn, P.C., 1970b, "Intransitive indifference with unequal indifference intervals", *Journal of Mathematical Psychology, 7*, pp. 144-179.

[12] Fishburn, P.C., 1983, "Utility functions on ordered convex sets", *Journal of Mathematical Economics, 12*, pp. 221-232.

[13] López López, M.A., 1992, "Representación continua de relaciones que modelan preferencias", *Documentos de trabajo, Universidad Carlos III.*

[14] Monteiro, P.K., 1987, "Some results on the existence of utility functions on path connected spaces", *Journal of Mathematical Economics, 16*, pp. 147-156.

[15] Peleg, B., 1970, "Utility functions for partially ordered topological spaces", *Econometrica, 38*, pp. 93-96.