UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

TESIS DOCTORAL

Polinomios Ortogonales, Funciones de Transferencia y Transformaciones Espectrales

AUTOR:
Javier Hernández Benítez

DIRECTOR:
Francisco Marcellán Español

Leganés, diciembre 2006

UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID
ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

POLINOMIOS ORTOGONALES, FUNCIONES DE TRANSFERENCIAS Y TRANSFORMACIONES ESPECTRALES

Autor: **Javier Hernández Benítez**
Lic. en Ciencias Matemáticas

Memoria presentada para optar al grado de doctor en Ingeniería Matemática. Realizada bajo la dirección de **Dr. Francisco Marcellán Español**.

Diciembre, 2006.

TESIS DOCTORAL

Polinomios Ortogonales, Funciones de Transferencia y Transformaciones Espectrales

Autor: Javier Hernández Benítez

Director: Francisco Marcellán Español

Tribunal Calificador

		Firma
Presidente:	________________________	____________
Vocal:	________________________	____________
Vocal:	________________________	____________
Vocal:	________________________	____________
Secretario:	________________________	____________

Calificación:

Leganés, de de 200

A mi madre,
a quien le debo,
entre muchas cosas,
una despedida.

Índice general

Índice de Tablas

Agradecimientos

Quiero expresar, en primer lugar, mi más sincero y profundo agradecimiento al Dr. Francisco Marcellán quien me aceptó como su alumno, gracias por inculcar en mí el amor por la investigación científica, por hacerme disfrutar de la maravillosa experiencia de encontrar resultados novedosos. Muchas gracias por confiar en mí, por valorar siempre mi esfuerzo y brindarme su apoyo en momentos difíciles. Gracias por estar siempre a la disposición de leer y corregir los resultados obtenidos, muchas veces sacrificando su tiempo libre.

También quiero agradecer al Departamento de Matemáticas de la Universidad Carlos III de Madrid, en especial al Dr. Guillermo López Lagomasino quien siempre estuvo presto a ayudarme en todas las oportunidades que lo requerí. Además, debo agradecerle que me haya dado a conocer este programa de Doctorado.

Debo agradecer también a la Fundación Universidad Carlos III por la ayuda económica recibida. Su apoyo ha hecho posible la realización de esta memoria.

Quiero agradecer, ya desde otra perspectiva, a mi esposa Maria Gabriela. Gracias por la infinita paciencia soportando los momentos de alegría y especialmente los de tristeza y una que otra desilusión, siempre estuvo atenta a escucharme y su apoyo hizo que este proyecto fuese más llevadero.

Igualmente, quiero agradecer a mi familia por ese gran apoyo que me brindaron, que a pesar de la distancia, siempre lo sentí muy cerca y me dio mucha fuerza para realizar el doctorado.

Quiero dar las gracias de manera muy especial a Omar y Betsy, su ayuda y apoyo fue mucho más allá de las “sumas y multiplicaciones”. Siempre le agradeceré a Dios todos los momentos que pudimos compartir.

Finalmente, también quiero manifestar mi agradecimiento a Carlos y Cristina, por ofrecerme su hogar en los primeros momentos del doctorado.

Introducción

Antecedentes

La teoría de polinomios ortogonales respecto a medidas soportadas en la recta real ha sido objeto de atención no sólo desde una perspectiva analítica (propiedades asintóticas, distribución de sus ceros) sino desde un amplio espectro de aplicaciones (integración numérica, métodos espectrales para el tratamiento de problemas de valores en la frontera, teoría de grafos, sistemas integrables, etc). Más recientemente, se ha desarrollado un tratamiento basado en las propiedades espectrales de las matrices de Jacobi asociadas a dichos polinomios ortogonales. De hecho, las matrices de Jacobi representan, en forma matricial, el operador de multiplicación respecto a la base de polinomios ortogonales. En **[70]** y **[78]** se ha abierto una interesante aproximación a la conexión entre perturbaciones de medidas y factorización LU de matrices de Jacobi que ha sido desarrollada tanto desde el aspecto teórico (**[10]**, **[11]**, **[76]**) como numérico (**[8]**, **[9]**) en el marco de las denominadas transformaciones de Darboux que tienen su origen en los problemas biespectrales (véase **[70]**), así como a través de la factorización QR (**[12]**).

Asimismo, y en un marco puramente algebraico, los polinomios ortogonales respecto a medidas soportadas en la recta real han sido utilizados de manera sistemática en el tratamiento de sistemas lineales a través de los denominados generadores de espacios de estado para controlabilidad de sistemas lineales (véase [2], [42] y [43]). En particular, la obtención de algoritmos tipo Leverrier está íntimamente ligada a la inversión de matrices polinómicas, i. e. al estudio de la función de transferencia del sistema lineal. Extensiones del algoritmo de Leverrier han sido analizadas en los trabajos pioneros de S. Barnett ([3], [4]) y J. C. Gower [31] y posteriormente ampliadas en el caso de haces lineales (véase [36], [48], [59], [73], [74]) y matrices polinómicas de grado arbitrario ([5], [19], [21]). Más recientemente, se han aplicado dichas técnicas en el estudio de inversas generalizadas de matrices polinómicas y racionales ([44], [45], [71]). La conexión con problemas de mecánica clásica (teoría de vibraciones) se ha puesto de manifiesto en [26] y [58] así como en relación con modelos 2-dimensionales de espacios de estado ([77], [79]). Finalmente, una interesante aplicación en sistemas expertos para la obtención de modelos a tiempo discreto utilizando identificación paramétrica, ha sido desarrollado en [66]. Un primer objetivo de nuestra memoria ha sido el tratamiento del algoritmo de Leverrier-Faddeev desde la perspectiva de los polinomios ortogonales clásicos. Dada una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ existe una conexión directa entre su polinomio característico $p_A(s)$ y la matriz adjunta de $sI_n - A$. De hecho, en el capítulo 2 ponemos de manifiesto (Lema 2.4.1) que

$$\frac{d}{ds}p_A(s) = \operatorname{tr}\operatorname{Adj}\,(sI_n - A).$$

En lugar de utilizar la representación del polinomio característico en términos de la base canónica $\{x^n\}_{n\geqslant 0}$, consideraremos bases de polinomios ortogonales clásicos (Hermite, Laguerre, Jacobi, Bessel) de manera que obtenemos un marco general que abarca los casos estudiados para familias particulares de polinomios ortogonales ([4], [74]). La clave es una propiedad estructural de los polinomios ortogonales clásicos.

En el capítulo 3, utilizamos la anterior descomposición para abordar el cálculo de la inversa de matrices polinómicas mostrando las ventajas frente a otras técnicas desarrolladas en [5], [19] y [21].

La segunda parte de la memoria aborda la teoría de polinomios ortogonales respecto a una medida positiva no trivial soportada sobre la circunferencia unidad. Esta teoría se inicia con los trabajos de G. Szegő (véase **[72]** y su exhaustivo conjunto de referencias) y se desarrolla desde una perspectiva analítica por Ya L. Geronimus (**[23]**, **[24]** y **[25]**) basada en la teoría clásica de funciones de variable compleja. La conexión con el problema trigonométrico de momentos y la teoría de procesos estocásticos estacionarios discretos constituyen un importante eje de actividad investigadora en la década de los cincuenta (véase a modo de ejemplo **[34]**). En la década de los ochenta se asiste un renovado interés por el tema tanto desde la perspectiva de la teoría de aproximación (fracciones continuas **[41]** y aproximación por polinomios trigonométricos **[65]**) como desde una perspectiva algebraica ligada al problema de factorización QR de matrices unitarias de Hessenberg de dimensión finita (**[33]**). En los años noventa se desarrolla una teoría constructiva de familias de polinomios ortogonales asociados a perturbaciones de medidas soportadas en la circunferencia unidad (véase **[6]**, **[27]**, **[28]**, **[40]**, **[49]**, **[51]**, **[56]**, **[57]**, **[63]**, entre otros) junto a una novedosa interpretación basada en la representación matricial del operador de multiplicación respecto a una base ortonormal en relación a medidas soportadas en un arco de la circunferencia unidad (**[29]**, **[30]**).

Sin duda alguna, el hito más relevante al comienzo del siglo XXI es la aparición de los dos volúmenes de la monografía de B. Simon **[68]** que constituyen la descripción mas exhaustiva del estado del arte en la teoría de polinomios ortogonales en la circunferencia unidad (véase también **[67]** a modo de síntesis). Una de sus aportaciones fundamentales es el tratamiento de la representación matricial del operador de multiplicación respecto a bases ortonormales en el espacio de los polinomios de Laurent $\Lambda = span\{z^n : n \in \mathbb{Z}\}$ construidas a partir del proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt de las familias $S = \left\{1, z, z^{-1}, z^2, z^{-2}, \ldots\right\}$ y $T = \left\{1, z^{-1}, z, z^{-2}, z^2, \ldots\right\}$. La matriz resultante es pentadiagonal y admite una factorización en términos de dos matrices diagonales por bloques de dimensión 2 la primera y de un único bloque de dimensión 1 y los restantes de dimensión 2 la segunda, cuyas entradas están relacionadas con los denominados parámetros de reflexión, i. e. las evaluaciones en el punto $z = 0$ de los polinomios ortonormales. Este resultado debido a D. S. Watkins (**[75]**) fue obtenido mediante una demostración alternativa e independiente en [13].

En esta memoria nos centramos en el análisis de ciertas perturbaciones canónicas de funcionales hermitianos definidos en el espacio Λ. En particular, establecemos la conexión entre las correspondientes funciones de Carathéodory mediante una transformación espectral lineal, siguiendo la línea esbozada en [50].

Estructura de la memoria y aportaciones originales

A continuación, explicamos los contenidos y aportaciones específicas de cada capítulo que conforma esta memoria. El capítulo 1 es una introducción que contiene conceptos básicos acerca de funcionales de momentos, caracterizaciones y operaciones algebraicas. También introducimos algunos aspectos de la teoría de polinomios ortogonales asociados a funcionales lineales al igual que damos ciertas caracterizaciones de los polinomios ortogonales clásicos. Al final de este capítulo estudiamos la relación entre polinomios ortogonales y funcionales lineales en el contexto de la conexión entre la matriz de momentos y los generadores de espacios de estado.

En el capítulo 2, estudiamos una herramienta útil para obtener en forma explícita la función de transferencia de un sistema lineal, el algoritmo de Leverrier-Faddeev. Hacemos un repaso de la evolución de este algoritmo desde su obtención al igual que presentamos sus ventajas y desventajas. En este capítulo desarrollamos una implementación sencilla del algoritmo de Leverrier-Faddeev en la que podemos expresar una función de transferencia de un sistema lineal en función de una base de polinomios ortogonales clásicos.

En el capítulo 3 abordamos dos adaptaciones del algoritmo de Leverrier-Faddeev basados en el algoritmo obtenido en el capítulo 2. La primera sirve para obtener de forma explícita la función de transferencia de un sistema lineal singular invariante en el tiempo. La otra adaptación del algoritmo fue motivada por el cómputo de la función de transferencia de un sistema de osciladores en función de una base de polinomios ortogonales clásicos.

En un marco más general, los algoritmos presentados en este capítulo forman una herramienta para el cómputo de la inversa de una matriz polinómica de orden arbitrario.

En el capítulo 4 abordamos el tema de transformaciones espectrales para matrices hermitianas Toeplitz. Comenzamos con los conceptos básicos de la teoría de polinomios ortogonales respecto a funcionales lineales hermitianos y se definen tres perturbaciones canónicas: Christoffel, Uvarov y Geronimus, así denominadas por su análogo con el caso real, analizando para la primera de ellas las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de polinomios ortogonales respecto al funcional perturbado y luego, la relación existente entre las correspondientes matrices de Hessenberg vía factorización LU y QR. Ésta última en el caso de funcionales lineales hermitianos definidos positivos.

En el capítulo 5 se estudian dos modelos de transformación de Uvarov y se dan condiciones necesarias y suficientes para que el funcional perturbado sea cuasi-definido. Finalmente se establece la relación entre las matrices de Hessenberg.

En el capítulo 6 consideramos la transformación de Geronimus μ_1, de una medida no trivial de probabilidad μ soportada en la circunferencia unidad, dada por

$$d\mu_1 = \frac{d\mu}{|z-\alpha|^2}, \quad \alpha \notin \mathbb{T},\ |z| = 1.$$

Tras introducir conceptos básicos y resultados preliminares, damos una expresión explícita de los polinomios ortonormales con respecto a μ_1 en función de los asociados a μ. Finalmente, usando los resultados obtenidos y desarrollados en el capítulo 4, mostramos una conexión entre las matrices de Hessenberg asociadas con el operador de multiplicación con respecto a las dos familias de polinomios, en la que interviene la factorización QR. Asimismo, mostramos algunos ejemplos de dichos tipos de transformaciones junto con las representationes explícitas de las sucesiones de polinomios ortogonales asociadas a la medida μ_1.

Finalmente, la última sección contiene algunos problemas abiertos.

Publicaciones resultado de la memoria

Los resultados del capítulo 2 han aparecido en [37], mientras que los del capítulo 3 han sido publicados en [35] y [36].

Algunas contribuciones del capítulo 4 han aparecido en [17] y [55], fundamentalmente en relación con los problemas de factorización. En [17] se presentan algunos resultados del capítulo 5 mientras que en [54] se han sintetizado los elementos básicos del capítulo 6.

Capítulo 1

Polinomios ortogonales y funcionales de momentos

1.1. Funcionales de momentos

Sea $\mathcal{U} : \mathbb{P} \mapsto \mathbb{C}$ un funcional lineal en el espacio vectorial $\mathbb{P}$ de los polinomios con coeficientes complejos y consideremos la base canónica $\{x^n\}_{n\geqslant 0}$.

Definición 1.1.1 *La sucesión $\{m_n\}_{n\geqslant 0}$ definida por*

$$\mathcal{U}(x^n) = m_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.1.1}$$

se denomina sucesión de momentos. El valor m_n se denomina momento de orden n y el funcional lineal $\mathcal{U}$ se llama funcional de momentos asociado a la sucesión $\{m_n\}_{n\geqslant 0}$.

La matriz semi-infinita H cuyas entradas están dadas por $h_{k,j} = m_{k+j}$, $k, j = 0, 1, \ldots$, se denomina *matriz de momentos estándar* asociada al funcional $\mathcal{U}$. H es una matriz de Hankel, esto es, una matriz cuyos elementos de las anti-diagonales son idénticos

$$H = \begin{bmatrix} m_0 & m_1 & m_2 & \cdots \\ m_1 & m_2 & m_3 & \cdots \\ m_2 & m_3 & m_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Definición 1.1.2 *Sea H_n la submatriz principal de H de dimensión $(n+1)\times(n+1)$. Diremos que el funcional lineal $\mathcal{U}$ es cuasi-definido si las submatrices principales H_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ de la matriz de Hankel semi-infinita $H = (m_{j+k})_{j,k=0}^{\infty}$ son no singulares.*

Diremos que $\mathcal{U}$ es definido positivo si $\mathcal{U}(p(x)) > 0$ para todo polinomio $p \in \mathbb{P}$ no nulo y no-negativo para todo $x \in \mathbb{R}$.

En un caso definido positivo, los momentos del funcional son reales (véase [16]).

Proposición 1.1.3 ([16]) *Un funcional lineal $\mathcal{U}$ es definido positivo si y solo*

$$\Delta_n := \begin{vmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_n \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_n & m_{n+1} & \cdots & m_{2n} \end{vmatrix} > 0, \tag{1.1.2}$$

para todo $n \geqslant 0$.

En el caso definido positivo, existe una medida de Borel positiva μ soportada en un subconjunto $\mathbb{E}$ de la recta real tal que el funcional lineal $\mathcal{U}$ tiene una representación integral

$$\mathcal{U}(p) = \int_{\mathbb{E}} p(x)d\mu(x). \tag{1.1.3}$$

A continuación describiremos una serie de operaciones básicas en el espacio de los funcionales lineales que serán de utilidad a lo largo de esta memoria.

Dado un polinomio $\phi \in \mathbb{P}$, con $\deg \phi = n$, podemos introducir un nuevo funcional lineal llamado *multiplicación a la izquierda de $\mathcal{U}$ por ϕ* de la siguiente forma

$$\left(\phi(x)\mathcal{U}\right)(p(x)) = \mathcal{U}\left(\phi(x)p(x)\right).$$

Asimismo, llamaremos *multiplicación por la izquierda de* $\mathcal{U}$ *por el polinomio inverso* ϕ al funcional definido por

$$\left(\phi(x)^{-1}\mathcal{U}\right)(p(x)) = \mathcal{U}\left(\frac{p(x) - L_{p,\phi}(x)}{\phi(x)}\right),$$

donde $L_{p,\phi}$ es el polinomio interpolador de grado $\deg(p) - 1$ que interpola a p en las raíces de ϕ.

Un caso particular de lo anterior es el siguiente: si $\alpha \in \mathbb{C}$, llamaremos *multiplicación por la izquierda de* $\mathcal{U}$ *por la función racional* $(x - \alpha)^{-1}$ al funcional lineal $\widetilde{\mathcal{U}}$ definido por

$$\widetilde{\mathcal{U}}(p) := (x - \alpha)^{-1}\mathcal{U}(p) = \mathcal{U}\left(\frac{p(x) - p(\alpha)}{x - \alpha}\right), \ p \in \mathbb{P}.$$

La *derivada distribucional* del funcional $\mathcal{U}$ está dada por

$$\left(D\mathcal{U}\right)(p(x)) = -\mathcal{U}\left(p'(x)\right), \ \text{para todo } \ p \in \mathbb{P}.$$

En base a lo anterior, introducimos los siguientes funcionales a partir de $\mathcal{U}$

(i) Sea $\alpha \in \mathbb{C}$. El funcional $\widetilde{\mathcal{U}} := (x - \alpha)\mathcal{U}$ se llama *transformado canónico de Christoffel* del funcional $\mathcal{U}$ (ver **[78]**).

(ii) Si $\alpha, m \in \mathbb{C}$, $\widetilde{\mathcal{U}} := \mathcal{U} + m\delta_\alpha$ recibe el nombre de *transformado canónico de Uvarov*, donde δ_α es el funcional de Dirac dado por $\delta_\alpha(p(x)) = p(\alpha), \ p \in \mathbb{P}$ (ver **[78]**).

(iii) Sean $\alpha, m \in \mathbb{C}$. El funcional $\widetilde{\mathcal{U}} := (x - \alpha)^{-1}\mathcal{U} + m\delta_\alpha$ se denomina *transformado canónico de Geronimus* (ver **[78]**).

1.2. Polinomios ortogonales asociados a funcionales lineales

Sean $\mathcal{L} : \mathbb{P} \mapsto \mathbb{C}$ un funcional lineal y $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ una sucesión de polinomios.

Definición 1.2.1 *Diremos que $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ es una sucesión de polinomios ortogonales respecto al funcional lineal $\mathcal{L}$ si*

(i) $\deg P_n(x) = n$ *para todo* $n \geqslant 0$.

(ii) $\mathcal{L}\left(P_n(x)P_m(x)\right) = \mathbf{k}_n\delta_{n,m}$, *con* $\mathbf{k}_n \neq 0$ *y* $\delta_{n,m}$ *es la delta de Kronecker definida por*

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & si \quad n = m, \\ 0 & si \quad n \neq m. \end{cases}$$

Diremos que $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ es ortonormal respecto al funcional lineal $\mathcal{L}$ si, además de cumplirse (i) y (ii), se tiene que $\mathbf{k}_n = 1$ para todo $n \geqslant 0$.

Teorema 1.2.2 *Sea $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ una sucesión de polinomios ortogonales respecto a $\mathcal{L}$. Entonces, para todo $p \in \mathbb{P}$ con $\deg p(x) = n$,*

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(x),$$

donde $\lambda_k = \frac{\mathcal{L}(P_k(x)p(x))}{\mathcal{L}\left(P_k(x)^2\right)}$, para $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Del anterior resultado, es sencillo comprobar que, si $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ es una sucesión de polinomios ortogonales respecto a $\mathcal{L}$, entonces $\{c_nP_n\}_{n\geqslant 0}$, con $c_n \neq 0$ para todo $n \geqslant 0$, también lo es. Si el coeficiente líder de cada $P_n(x)$ es igual a 1, entonces decimos que $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ es una sucesión de polinomios ortogonales *mónicos*.

Proposición 1.2.3 (ver [16]) *Sea $\mathcal{L}$ un funcional lineal. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(*i*) *$\mathcal{L}$ es un funcional lineal cuasi-definido.*

(*ii*) *Existe una única sucesión de polinomios ortogonales mónicos $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ respecto al funcional lineal $\mathcal{L}$, dada por*

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_n \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n-1} & m_n & \cdots & m_{2n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix}, \; n \geqslant 1, \qquad (1.2.1)$$

donde $\Delta_n = \det H_n,\ n \geqslant 0$.

(*iii*) *Existen sucesiones de números complejos $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $\gamma_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tales que la sucesión de polinomios mónicos $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ definida por la relación*

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x), \quad n \geqslant 0 \qquad (1.2.2)$$

es ortogonal respecto a $\mathcal{L}$ (con el convenio $P_{-1}(x) = 0$).

La representación matricial del operador asociado con la multiplicación por x en $\mathbb{P}$ respecto a la base de polinomios ortogonales mónicos es una matriz tridiagonal:

$$J = \begin{bmatrix} \beta_0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \gamma_1 & \beta_1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \gamma_2 & \beta_2 & 1 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Además, es fácil comprobar que el polinomio característico de la submatriz principal J_{n+1} de dimensión $(n+1)\times(n+1)$ es el polinomio P_{n+1}, $n \geqslant 0$.

1.3. Polinomios ortogonales clásicos

Los polinomios ortogonales clásicos son las familias más utilizadas en la literatura de polinomios ortogonales. Estos polinomios, aparecen como soluciones de ecuaciones diferenciales hipergeométricas (ver **[61]**).

Definición 1.3.1 *Sean $\mathcal{L} : \mathbb{P} \mapsto \mathbb{C}$ un funcional lineal cuasi-definido y $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos respecto a $\mathcal{L}$. Diremos que $\mathcal{L}$ es un funcional lineal clásico si existen polinomios ϕ y ψ con $\deg\phi \leqslant 2$ y $\deg\psi = 1$ tales que*

$$D(\phi\mathcal{L}) = \psi\mathcal{L}. \tag{1.3.1}$$

En este caso, se dice que $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ es una sucesión de polinomios ortogonales clásicos respecto a $\mathcal{L}$. La expresión (1.3.1) *se denomina ecuación distribucional de Pearson.*

Teorema 1.3.2 (ver [52]) *Sea $\mathcal{L}$ un funcional lineal cuasi-definido, entonces los siguientes enunciados son equivalentes*

(i) *$\mathcal{L}$ es un funcional lineal clásico.*

(ii) *Los polinomios mónicos $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$, ortogonales respecto al funcional lineal $\mathcal{L}$, son autofunciones del operador diferencial de segundo orden $\phi D^2 + \psi D$, esto es, $\exists\lambda_n \neq 0$ tal que*

$$\phi P_n'' + \psi P_n' + \lambda_n P_n = 0. \tag{1.3.2}$$

Como hemos señalado anteriormente, los polinomios $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ que satisfacen la ecuación (1.3.2) son los denominados de *tipo hipergeométrico*: polinomios de Hermite, polinomios de Laguerre, polinomios de Jacobi y polinomios de Bessel.

1.3.1. Polinomios de Hermite

La familia de los polinomios mónicos de Hermite $\{H_n\}_{n\geqslant 0}$ es ortogonal respecto al funcional definido positivo

$$\mathcal{L}_H\,(p(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\mathrm{e}^{-x^2}dx.$$

La familia $\{H_n\}_{n\geqslant 0}$ satisface la relación de recurrencia

$$xH_n(x) = H_{n+1}(x) + \frac{n}{2}H_{n-1}(x), \quad n \geqslant 0, \tag{1.3.3}$$

con el convenio $H_{-1}(x) = 0$.

El funcional lineal $\mathcal{L}_H$ satisface la ecuación distribucional de Pearson (1.3.1) con $\phi(x) = 1$ y $\psi(x) = -2x$.

1.3.2. Polinomios de Laguerre

Los polinomios mónicos de Laguerre $\left\{L_n^{(\alpha)}\right\}_{n\geqslant 0}$ con $\alpha > -1$ constituyen una familia uniparamétrica ortogonal respecto al funcional definido positivo

$$\mathcal{L}_L\,(p(x)) = \int_{0}^{+\infty} p(x)x^{\alpha}\mathrm{e}^{-x}dx.$$

Los polinomios $\phi(x) = x$, $\psi(x) = -x + \alpha + 1$ son los asociados a $\mathcal{L}_L$ en la ecuación distribucional de Pearson (1.3.1).

La sucesión $\left\{L_n^{(\alpha)}\right\}_{n\geqslant 0}$ satisface la relación de recurrencia

$$xL_n^{(\alpha)}(x) = L_{n+1}^{(\alpha)}(x) + (2n+\alpha+1)L_n^{(\alpha)}(x) + n(n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad n \geqslant 0, \tag{1.3.4}$$

con el convenio $L_{-1}^{(\alpha)}(x) = 0$.

1.3.3. Polinomios de Jacobi

Los polinomios mónicos de Jacobi $\left\{P_n^{(\alpha,\beta)}\right\}_{n\geqslant 0}$ constituye una familia dependiente de dos parámetros $\alpha,\beta > -1$ y son ortogonales respecto al funcional definido positivo

$$\mathcal{L}_P\left(p(x)\right) = \int_{-1}^{1} p(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx.$$

La relación de recurrencia que satisface $\left\{P_n^{(\alpha,\beta)}\right\}_{n\geqslant 0}$ es

$$xP_n^{(\alpha,\beta)}(x) = P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) + \beta_n P_n^{(\alpha,\beta)}(x) + \gamma_n P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x), \quad n \geqslant 0, \tag{1.3.5}$$

con el convenio $P_{-1}^{(\alpha,\beta)}(x) = 0$, donde

$$\begin{aligned}\beta_n &= \frac{\beta^2-\alpha^2}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)},\\ \gamma_n &= \frac{4n(n+\alpha)(n+\beta)(n+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)^2(2n+\alpha+\beta+1)}.\end{aligned}$$

En la ecuación (1.3.1) los polinomios asociados a $\mathcal{L}_P$ son $\phi(x) = 1-x^2$ y $\psi(x) = -(\alpha+\beta+2)x+\beta-\alpha$.

1.3.4. Polinomios de Bessel

Los polinomios mónicos de Bessel $\left\{B_n^{(\alpha)}\right\}_{n\geqslant 0}$ constituyen una familia uniparamétrica con parámetro $\alpha \neq -2,-3,-4,\ldots$ y son ortogonales respecto al funcional lineal cuasi-definido

$$\mathcal{L}_B\left(p(x)\right) = \int_{\mathbb{T}} p(x)x^{\alpha}\mathrm{e}^{-\frac{2}{x}}dx,$$

donde $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$.

Los polinomios $\left\{B_n^{(\alpha)}\right\}_{n\geqslant 0}$ satisfacen la relación de recurrencia

$$xB_n^{(\alpha)}(x) = B_{n+1}^{(\alpha)}(x) + \beta_n B_n^{(\alpha)}(x) + \gamma_n B_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad n \geqslant 0, \tag{1.3.6}$$

con el convenio $B_{-1}^{(\alpha)}(x) = 0$, donde

$$\beta_n = -\frac{2\alpha}{(2n+\alpha)(2n+\alpha+2)},$$

$$\gamma_n = -\frac{4n(n+\alpha)}{(2n+\alpha-1)(2n+\alpha)^2(2n+\alpha+1)}.$$

El funcional lineal $\mathcal{L}_B$ satisface la ecuación distribucional de Pearson (1.3.1) con $\phi(x) = x^2$ y $\psi(x) = (\alpha+2)x + 2$.

La siguiente tabla resume los valores de los coeficientes de la relación de recurrencia (1.2.2)

	β_n	γ_n
Hermite	0	$\frac{n}{2}$
Laguerre	$2n+\alpha+1$	$n(n+\alpha)$
Jacobi	$\frac{\beta^2-\alpha^2}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}$	$\frac{4n(n+\alpha)(n+\beta)(n+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)^2(2n+\alpha+\beta+1)}$
Bessel	$-\frac{2\alpha}{(2n+\alpha)(2n+\alpha+2)}$	$-\frac{4n(n+\alpha)}{(2n+\alpha-1)(2n+\alpha)^2(2n+\alpha+1)}$

Tabla 1.1: Coeficientes en la relación (1.2.2)

Otra caracterización de los polinomios ortogonales clásicos, viene dada por la siguiente

Proposición 1.3.3 (ver [52]) *Los siguientes enunciados son equivalentes.*

(i) $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ *es una sucesión de polinomios ortogonales clásicos.*

(ii) *La sucesión de polinomios mónicos* $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$ *dada por* $Q_n = \dfrac{P'_{n+1}}{n+1}$, *es también una sucesión de polinomios ortogonales.*

(*iii*) *En el desarrollo de* P_n *en términos de la base polinómica* $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$, *los coeficientes para* $0 \leqslant k \leqslant n-3$ *se anulan, es decir:*

$$P_n(x) = Q_n(x) + r_n Q_{n-1}(x) + s_n Q_{n-2}(x). \tag{1.3.7}$$

La familia $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$ es ortogonal respecto al funcional $\phi\mathcal{L}$, donde ϕ es el polinomio que aparece en la relación (1.3.1) (véase [52]). Los coeficientes r_n, s_n de la relación (1.3.7) para las distintas familias de polinomios ortogonales clásicos están dadas en la siguiente tabla

	r_n	s_n
Hermite	0	0
Laguerre	n	0
Jacobi	$\frac{2n(\alpha-\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}$	$-\frac{4n(n-1)(n+\alpha)(n+\beta)}{(2n+\alpha+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)^2(2n+\alpha+\beta+1)}$
Bessel	$\frac{4n}{(2n+\alpha)(2n+\alpha+2)}$	$\frac{4n(n-1)}{(2n+\alpha-1)(2n+\alpha)^2(2n+\alpha+1)}$

Tabla 1.2: Coeficientes en la relación (1.3.7)

1.4. Polinomios ortogonales y sistemas lineales

En el espacio vectorial $\mathbb{P}$ de los polinomios en una variable con coeficientes complejos introducimos un producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$, i. e. una aplicación de $\mathbb{P}\times\mathbb{P}$ en $\mathbb{C}$ tal que

(*i*) $\langle \alpha p + \beta q, r\rangle = \alpha\langle p, r\rangle + \beta\langle q, r\rangle$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $p, q, r \in \mathbb{P}$.

(*ii*) $\langle p, q\rangle = \overline{\langle q, p\rangle}$, $p, q \in \mathbb{P}$.

(*iii*) $\langle p, p\rangle \in \mathbb{R}_+$, $p \in \mathbb{P} \setminus \{0\}$.

Si se considera la base canónica $\{z^n\}_{n\geqslant 0}$ del espacio $\mathbb{P}$, tenemos asociada la matriz infinita de Gram $R = (r_{k,j})_{k,j=0}^{\infty}$, también denominada matriz de momentos, donde $r_{k,j} = \langle z^k, z^j\rangle$. R_n, $n = 0, 1, \ldots$, denotará la submatriz principal de dimensión $(n+1) \times (n+1)$ de la matriz R.

Por otra parte, aplicando a la base canónica el método de ortogonalización de Gram-Schmidt podemos construir una única familia de polinomios $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ tal que

(*i*) $P_n(z) = \kappa_n z^n +$ términos de grado inferior, $\kappa_n > 0$.

(*ii*) $\langle P_n, P_m\rangle = \delta_{n,m}$, para $0 \leqslant m \leqslant n$.

La familia $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ se denomina familia de polinomios ortonormales respecto al producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$. La familia $\left\{\kappa_n^{-1} P_n\right\}_{n\geqslant 0}$ se denomina familia de polinomios ortogonales mónicos respecto al anterior producto escalar.

Si mediante $w_{n+1} = [1, z, \ldots, z^n]^t$ y $v_{n+1} = [P_0(z), P_1(z), \ldots, P_n(z)]^t$ denotamos, respectivamente, los vectores polinómicos de orden $n+1$ correspondientes a las bases $\{z^n\}_{n\geqslant 0}$ y $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$, entonces se deduce fácilmente

Proposición 1.4.1

(*i*) $\langle w_{n+1}\, w_{n+1}^t\rangle = R_n$.

(*ii*) $\langle v_{n+1}\, v_{n+1}^t\rangle = I_{n+1}$.

Con la anterior notación queremos denotar que el producto escalar se aplica a cada una de las entradas de las matrices producto.

Por otra parte, $v_{n+1} = A_n w_{n+1}$ donde $A_n \in \mathbb{C}^{n+1,n+1}$ es una matriz triangular inferior con elementos diagonales positivos. Más concretamente, los elementos diagonales son los coeficientes líderes $\kappa_0, \kappa_1, \ldots, \kappa_n$ de los polinomios ortonormales $P_0(z), P_1(z), \ldots, P_n(z)$.

Teniendo en cuenta que

$$z v_{n+1} = M_n v_{n+1} + [0, \ldots, 0, \alpha_{n+1} P_{n+1}(z)]^t, \tag{1.4.1}$$

donde $\alpha_{n+1} = \frac{\kappa_n}{\kappa_{n+1}}$ y M_n una matriz Hessenberg inferior, se tiene

$$zA_n w_{n+1} = M_n A_n w_{n+1} + [0, \dots, 0, \alpha_{n+1} P_{n+1}(z)]^t,$$

esto es

$$zw_{n+1} = A_n^{-1} M_n A_n w_{n+1} + \left[0, \dots, 0, \frac{P_{n+1}(z)}{\kappa_{n+1}}\right]^t. \tag{1.4.2}$$

Identificando las entradas en los dos miembros de la anterior igualdad, se tiene

$$A_n^{-1} M_n A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & 1 \\ -a_{n+1,n+1} & -a_{n+1,n} & \cdots & & -a_{n+1,1} \end{bmatrix} = F_n^{(0)}, \tag{1.4.3}$$

donde $P_{n+1}(z) = \kappa_{n+1}\left(z^{n+1} + a_{n+1,1}z^n + \cdots + a_{n+1,n}z + a_{n+1,n+1}\right)$, $\left(F_n^{(0)}\right)^t = Z_n + u_n e_n^t$, $u_n = (-a_{n+1,n+1}, -a_{n+1,n}, \dots, -a_{n+1,1})^t \in \mathbb{C}^{n+1,1}$, $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)^t \in \mathbb{C}^{n+1,1}$ y Z_n es la matriz de dimensión $(n+1)\times(n+1)$ con 1 en la primera subdiagonal inferior y las restantes entradas son nulas.

De (1.4.3) se sigue que el polinomio característico de M_n es precisamente el polinomio $\kappa_{n+1}^{-1} P_{n+1}$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} R_n = &\ \langle w_{n+1}\, w_{n+1}^t \rangle = \langle A_n^{-1} v_{n+1}\, v_{n+1}^t A_n^{-t} \rangle \\ = &\ A_n^{-1} A_n^{-*} = L_n L_n^*. \end{aligned} \tag{1.4.4}$$

Puesto que $L_n = A_n^{-1}$ es triangular inferior con elementos diagonales positivos, (1.4.4) es la factorización de Cholesky de la matriz R_n.

En la teoría de sistemas lineales (véase **[42]**) el par $\left(\left(F_n^{(0)}\right)^t, e_0\right)$, donde $e_0 = (1, 0, \dots, 0)^t \in \mathbb{C}^{n+1,1}$, se denomina par canónico de controlabilidad de la matriz

R_n. De hecho, para $k = 0, 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned} r_{k,j} &= e_k^t \left(A_n^{-1} A_n^{-*}\right) e_j \\ &= e_0^t \left(F_n^{(0)}\right)^k A_n^{-1} A_n^{-*} \left(F_n^{(0)*}\right)^j e_0 \\ &= e_0^t \left(A_n^{-1} M_n^k\right) \left(M_n^j\right)^* A_n^{-*} e_0 \\ &= \left(e_0^* A_n^{-1}\right) M_n^k \left(M_n^j\right)^* \left(e_0^* A_n^{-1}\right)^* . \end{aligned}$$

Si denotamos $g_n^* = e_0^* A_n^{-1}$, esto es, $g_n = A_n^{-*} e_0 = L_n^* e_0$, entonces de la expresión anterior obtenemos

$$\begin{aligned} R_n &= \begin{bmatrix} g_n^* \\ g_n^* M_n \\ \vdots \\ g_n^* M_n^n \end{bmatrix} \left[g_n,\ M_n^* g_n, \ldots, (M_n^*)^n\, g_n\right] \\ &= C_n^* C_n, \end{aligned} \tag{1.4.5}$$

donde $C_n = \left[g_n,\ M_n^* g_n, \ldots, (M_n^*)^n\, g_n\right]$ es la matriz de controlabilidad asociada al par (M_n^*, g_n).

Ahora bien, de (1.4.3) se sigue que

$$A_n^* \left(M_n^*\right)^k = \left(F_n^{(0)*}\right)^k A_n^*, \quad k \in \mathbb{N},$$

y, por tanto,

$$A_n^* C_n = I_{n+1}.$$

En conclusión, la matriz de controlabilidad $C_n \in \mathbb{C}^{n+1,n+1}$ asociada al par (M_n^*, g_n) es la inversa de la matriz A_n^*.

En el caso del producto escalar estándar asociado a una medida positiva μ soportada en la recta real, la matriz M_n es una matriz de Jacobi, esto es, una matriz tridiagonal simétrica.

En el caso del producto escalar no estándar asociado a una medida positiva μ soportada en la circunferencia unidad, dado por

$$\langle p, q\rangle = \int_{\mathbb{T}} p(z)\overline{q(z)}d\mu,$$

la matriz M_n es una matriz cuasi-unitaria (ver **[55]**).

Definición 1.4.2 ([42], [43]) *La sucesión (F_n, g_n) donde $F_n \in \mathbb{C}^{n+1,n+1}$, $g_n \in \mathbb{C}^{n+1,1}$ se denomina sucesión generadora de espacios de estado para la matriz de momentos R si, para cada n, la matriz de controlabilidad de R_n es*

$$C_n = [g_n,\ F_n g_n, \ldots, F_n^n g_n]$$

.

El par (M_n^*, g_n) es una sucesión generadora de espacios de estado asociada a la matriz de momentos R. Veamos como se puede construir por inducción dicha sucesión generadora de espacios de estado, esto es, presentaremos un método recursivo que permite deducir $\left(M_{n+1}^*, g_{n+1}\right)$ a partir de (M_n^*, g_n).

Denotaremos $R_0 = [r_{0,0}]$,

$$R_{n+1} = \begin{bmatrix} R_n & a_n \\ a_n^* & r_{n+1,n+1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n+2,n+2},$$

para $n \in \mathbb{N}$, con $a_n \in \mathbb{C}^{n+1,1}$, y supongamos que hemos encontrado un generador de espacios de estado (F_n, g_n) para la matriz R_n. Queremos encontrar un generador de espacios de estado (F_{n+1}, g_{n+1}) para la matriz R_{n+1} de manera que

$$F_{n+1} = \begin{bmatrix} F_n & * \\ * & * \end{bmatrix}, \qquad g_{n+1} = \begin{bmatrix} g_n \\ * \end{bmatrix}. \tag{1.4.6}$$

Si $R_n = L_n L_n^*$, con L_n triangular inferior y elementos diagonales positivos, denota la factorización de Cholesky de la matriz R_n, es fácil probar que

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= \begin{bmatrix} R_n & a_n \\ a_n^* & r_{n+1,n+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} L_n & 0 \\ a_n^* L_n^{-*} & l_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_n^* & L_n^{-1} a_n \\ 0 & l_{n+1} \end{bmatrix} \\ &= L_{n+1} L_{n+1}^*, \end{aligned} \tag{1.4.7}$$

donde $l_{n+1} \in \mathbb{R}_+$ y $l_{n+1}^2 = r_{n+1,n+1} - a_n^* L_n^{-*} L_n^{-1} a_n \geqslant 0$ por ser R_{n+1} definido positivo. Así pues, la matriz L_{n+1}, es triangular inferior con elementos diagonales positivos y, por consiguiente, (1.4.7) es la factorización de Cholesky de R_{n+1}.

Por otra parte, $g_n = L_n^* e_0 = \left[r_{0,0}^{\frac{1}{2}}, 0, \ldots, 0 \right]^t$. Determinaremos, a continuación, F_{n+1}. Dado que, de acuerdo con (1.4.3), podemos asumir que

$$F_n = L_n^* \left(Z_n + \bar{u}_n e_n^t \right) L_n^{-*},$$

donde u_n es un vector a determinar en $\mathbb{C}^{n+1,1}$ y $e_n = [0, \ldots, 0, 1]^t \in \mathbb{C}^{n+1,1}$, se sigue que

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= L_{n+1}^* \left(Z_{n+1} + \bar{u}_{n+1} e_{n+1}^t \right) L_{n+1}^{-*} \\ &= L_{n+1}^* \begin{bmatrix} Z_n & v_n \\ e_n^t & \beta_n \end{bmatrix} L_{n+1}^{-*}, \end{aligned}$$

donde

$$\bar{u}_{n+1} = \begin{bmatrix} v_n \\ \beta_n \end{bmatrix}, \quad v_n \in \mathbb{C}^{n+1,1}, \ \beta_n \in \mathbb{C},$$

y Z_n es la matriz de dimensión $(n+1) \times (n+1)$ que tiene 1 en la primera subdiagonal inferior y las restantes entradas son nulas.

Utilizando (1.4.6)

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= \begin{bmatrix} L_n^* & L_n^{-1}a_n \\ 0 & l_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_n & v_n \\ e_n^t & \beta_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_n^{-*} & -l_{n+1}^{-1}L_n^{-*}L_n^{-1}a_n \\ 0 & l_{n+1}^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} L_n^*\left(Z_n + L_n^{-*}L_n^{-1}a_n e_n^t\right)L_n^{-*} & s_n \\ l_{n+1}e_n^t L_n^{-*} & \beta_n - e_n^t L_n^{-*}L_n^{-1}a_n \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde

$$s_n = l_{n+1}^{-1}\left(L_n^* v_n + \beta_n L_n^{-1}a_n - L_n^* F_n L_n^{-*}L_n^{-1}a_n\right).$$

Sin más que escoger

$$\bar{u}_n = L_n^{-*}L_n^{-1}a_n = R_n^{-1}a_n \tag{1.4.8}$$

se sigue

$$F_{n+1} = \begin{bmatrix} F_n & s_n \\ l_{n+1}e_n^t L_n^{-*} & \beta_n - e_n^t L_n^{-*}L_n^{-1}a_n \end{bmatrix}.$$

Así pues, hemos obtenido explícitamente F_{n+1} y g_{n+1} satisfaciendo las condiciones de anidamiento (1.4.6).

Es importante reseñar que las matrices F_n son Hessenberg superiores, esto es, las entradas por debajo de la primera subdiagonal inferior son nulas. Además, la elección de u_n en (1.4.8) tiene una importancia especial. De hecho

$$\begin{aligned} [-u_n^t,\ 1]\, R_{n+1} &= [-u_n^t,\ 1] \begin{bmatrix} R_n & a_n \\ a_n^* & r_{n+1,n+1} \end{bmatrix} \\ &= \left[0, \dots, 0,\ l_{n+1}^2\right]. \end{aligned}$$

Esto significa que el vector fila $[-u_n^t,\ 1] \in \mathbb{C}^{1,n+2}$ define un polinomio mónico de grado $n+1$ que es ortogonal a $\mathbb{P}_n$ respecto al producto escalar asociado a la matriz de Gram R.

Obsérvese que $F_n = M_n^*$, de acuerdo con la notación (1.4.5).

Capítulo 2

El algoritmo de Leverrier-Faddeev

2.1. Introducción

El algoritmo de Leverrier-Faddeev es un método que permite calcular de forma simultánea, el polinomio característico de una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, y la matriz adjunta de $\lambda I_n - A$, basándose en la traza de las potencias de la matriz A. En sus trabajos de mecánica celeste en 1840 **[47]**, U. J. J. Leverrier obtuvo un algoritmo para calcular el polinomio característico de una matriz apoyado básicamente en la identidad de Newton que permite establecer una relación explícita entre los coeficientes de un polinomio y la suma de potencias de sus raíces. El algoritmo de Leverrier, según A. S. Householder **[39]**, fue "re-descubierto y mejorado" en varias ocasiones: Horst en 1935, y luego, en forma independiente, por J. M. Souriau (1948), J. S. Frame (1949), y D. K. Faddeev y I. S. Sominskii (1949). El algoritmo desarrollado por D. K. Faddeev se apoyó en las propiedades de la adjunta de la matriz $\lambda I_n - A$ (ver **[20]**, **[21]**). Hay una tercera forma de obtener el algoritmo de Leverrier-Faddeev, fue presentada por S. Barnett en su trabajo **[3]**, que se basa en las propiedades de la matriz companion (ver **[2]**).

El método de Leverrier-Faddeev no es práctico desde una perspectiva computacional ya que no es numéricamente estable y es muy costoso en cuanto a aritmética punto flotante, pero posee un gran atractivo para el cálculo simbólico. En particular, recientemente se ha utilizado en el cómputo de inversas (generalizadas) de matrices polinómicas y racionales (ver **[5]**, **[44]**, **[45]**, **[58]**, **[71]**, **[77]** y **[79]**). También se ha usado el algoritmo en el cómputo de autovalores de matrices con cierta estructura (ver **[31]**, **[32]**).

Asimismo, podemos encontrar aplicaciones de este algoritmo en Teoría de Control Lineal (ver **[2]**, **[42]**, **[66]**). En forma más precisa, considérese un sistema lineal e invariante en el tiempo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

donde x es el vector de estado de dimensión n, u el control de dimensión m, y el vector de las salidas de dimensión r, $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$ y $C \in \mathbb{C}^{r\times n}$. Dado que $\det(sI_n - A) \not\equiv 0$ entonces podemos obtener la matriz $(sI_n - A)^{-1}$, que se denomina *resolvente de la matriz* A. La función $H(s) := C(sI_n - A)^{-1}B$ es la función de transferencia del sistema lineal (2.1.1).

En 1996, S. Barnett **[4]** dedujo una implementación del algoritmo de Leverrier-Faddeev, con el objetivo de expresar el polinomio característico y la matriz adjunta en función de unas familias de polinomios ortogonales muy particulares (Hermite, Laguerre, Chebyshev y Legendre). Nuestra contribución en este aspecto (ver **[37]**) es presentar un método general para las familias de los polinomios ortogonales clásicos (Hermite, Laguerre, Jacobi y Bessel) teniendo en cuenta una caracterización de tales familias obtenida en **[52]** que representa una familia de polinomios ortogonales clásicos $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ como combinación lineal de sus derivadas primeras (véase también la Proposición 1.3.3 del capítulo anterior). De esa forma presentamos una implementación muy simple del algoritmo de Leverrier-Faddeev, donde la relación de recurrencia a tres términos juega un papel clave.

Si consideramos ahora el sistema lineal singular e invariante en el tiempo descrito por

$$\begin{aligned} E\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx, \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

donde $E \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz singular, x es el vector de estado de dimensión n, u el control de dimensión m, y el vector de las salidas de dimensión r, $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$ y $C \in \mathbb{C}^{r\times n}$, aplicando la transformada de Laplace al sistema (3.2.17), entonces la función de transferencia del sistema lineal asociado es

$$H(s) = C(sE - A)^{-1}B. \tag{2.1.3}$$

que en general, es una matriz cuyas entradas son funciones racionales, siempre y cuando $\det(sE - A) \not\equiv 0$. La matriz polinómica $sE - A$ se conoce en la literatura como haz regular lineal de matrices.

El cálculo de $(sE - A)^{-1}$ se puede realizar usando la regla de Cramer, para lo cual se requiere evaluar n^2 determinantes de matrices polinómicas de dimensión $(n - 1) \times (n - 1)$. Este proceso no es práctico para valores grandes de n. En los trabajos **[48]** y **[59]** aparece una versión del algoritmo de Leverrier-Faddeev tomando la base canónica $\{x^n\}_{n\geqslant 0}$ del espacio de los polinomios con coeficientes complejos. S. Barnett propuso en su trabajo **[4]**, aplicar una extensión del algoritmo de Leverrier-Faddeev usando bases de polinomios ortogonales. En un trabajo reciente, G. Wang y L. Qiu **[74]**, desarrollaron una extensión del algoritmo usando como base los polinomios de Chebyshev. En **[36]** obtenemos una generalización de los resultados de **[74]**, apoyados en el algoritmo obtenido en **[37]**.

También podemos adaptar el algoritmo de Leverrier-Faddeev para calcular la función de transferencia de un sistema de osciladores: si consideramos N masas conectadas por resortes de rigidez $\{k_r\}_{r=1}^{N}$ colocados en un eje horizontal y excitados por fuerzas $\{F_r(t)\}_{r=1}^{N}$, entonces las ecuaciones del movimiento newtoniano vienen dadas por

$$\begin{aligned} m_r\ddot{u}_r &= F_r + \theta_{r+1} - \theta_r, \quad r = 1, 2, \ldots, N-1, \\ m_N\ddot{u}_N &= F_N - \theta_N. \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

La ley de Hooke establece que las fuerzas de los resortes son

$$\theta_r = k_r(u_r - u_{r-1}), \quad r = 1, 2, \ldots, N. \tag{2.1.5}$$

Si el extremo izquierdo está fijo, entonces $u_0 = 0$.

El análisis de osciladores forzados aborda la solución de esas ecuaciones para funciones de fuerzas $F_r(t)$ dadas. El análisis de osciladores libres consiste en encontrar soluciones de las ecuaciones sin excitación externa, es decir, $F_r(t) \equiv 0$, $r = 1, 2, \ldots, N$ y que satisfacen las condiciones finales del estado (ver **[26]**).

Si expresamos las ecuaciones (2.1.4)-(2.1.5) en forma matricial, tenemos

$$A\ddot{u} + Cu = F \tag{2.1.6}$$

donde $A = diag(m_1, m_2, \ldots, m_N)$, $\quad F = (F_1, F_2, \ldots, F_N)^T$,

$$C = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & & k_{N-1} + k_N & -k_N \\ 0 & \cdots & 0 & -k_N & k_N \end{bmatrix},$$

y $u = (u_1, u_2, \ldots, u_N)^T$. Las matrices A y C son, respectivamente, la matriz de inercia y la matriz de rigidez del sistema.

Partiendo de condiciones iniciales $u(0)$ y $u'(0)$, y aplicando la transformada de Laplace en (2.1.6) obtenemos

$$(s^2A + C)\tilde{u} = \tilde{F}(s) + sB + G,$$

donde $\tilde{u}$ denota la transformada de Laplace de la función u. De esta manera, si asumimos que $\det\left(s^2A + C\right) \not\equiv 0$, se tiene

$$\tilde{u} = (s^2A + C)^{-1}\tilde{F}(s) + (s^2A + C)^{-1}(sB + G). \tag{2.1.7}$$

Para resolver este problema, es necesario encontrar la inversa de la matriz polinomial $s^2 A + C$ (ver [26]). Este problema fue analizado en un contexto más general por varios autores. En particular, en [19] se obtuvo un algoritmo para hallar el determinante y la adjunta de una matriz polinomial de cualquier orden, basado en el algoritmo de Leverrier. Nuestra contribución en [35] fue extender el algoritmo de Leverrier-Faddeev para expresar el determinante y la adjunta de una matriz polinómica en función de una base de polinomios ortogonales clásicos, un enfoque alternativo a los resultados de [19] y [73].

2.2. Descripción del algoritmo

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz con polinomio característico

$$\begin{aligned} p_A(s) &= \det(sI_n - A) \\ &= s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n, \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

donde I_n denota la matriz identidad de dimensión $n \times n$.

U. J. J. Leverrier generó un algoritmo que permite encontrar el polinomio característico de una matriz A, usando las trazas de las potencias de A. En este caso, la identidad de Newton juega un papel importante.

Lema 2.2.1 (Identidad de Newton, [38]) *Sean $s_1, s_2, \ldots, s_n$ las raíces del polinomio $p(s) = b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0$, con $b_n = 1$. Denotemos el momento de orden k asociado a p mediante $\mu_k = s_1^k + s_2^k + \cdots + s_n^k$. Entonces*

$$kb_{n-k} + \mu_1 b_{n-k+1} + \cdots + \mu_k b_n = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.2.2}$$

Consideremos el espectro de una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\sigma(A) = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$. Entonces el momento de orden k asociado al polinomio característico de A, es

$$\mu_k = \sum_{j=1}^{n} s_j^k = \operatorname{tr} A^k.$$

De la expresión (2.2.2), tenemos que los coeficientes de p_A, dado por (2.2.1), satisfacen

$$a_k = -\frac{1}{k}\left(\mu_k + a_1\mu_{k-1} + \cdots + a_{k-1}\mu_1\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

De esta forma, el algoritmo de Leverrier se formula de la siguiente manera (ver tabla 2.1)

Datos de entrada: $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$
Condición inicial: $a_0 = 1$,
FOR $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\mu_k = \operatorname{tr} A^k;$$

$$a_k = -\frac{1}{k}\left(\mu_k + a_1\mu_{k-1} + \cdots + a_{k-1}\mu_1\right);$$

END.

Tabla 2.1: Algoritmo de Leverrier

Años después, este algoritmo tuvo una "elegante" modificación, debida a D. K. Faddeev (ver **[20]**), J. M. Soriau, entre otros. Supongamos que el polinomio característico de A es

$$p_A(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n,$$

donde los coeficientes $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ se obtuvieron mediante el algoritmo de Leverrier.

Entonces

$$a_1 = \mu_1 = -\sum_{k=1}^{n} s_k = -\mathrm{tr}\, A.$$

Luego,

$$\begin{aligned} -2a_2 &= \mu_2 + a_1\mu_1 \\ &= \mathrm{tr}\, A^2 + a_1 \mathrm{tr}\, A \\ & \quad \mathrm{tr}\, (A(a_1 I_n + A)) . \end{aligned}$$

Si $B_k = a_k I_n + AB_{k-1}$, $k = 1, \ldots, n-1$, con $B_0 = I_n$, entonces tenemos

$$a_2 = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\, (AB_1) .$$

Para $k = 3, \ldots, n$ se tiene

$$\begin{aligned} -ka_k &= \mu_k + a_1\mu_{k-1} + \cdots + a_{k-1}\mu_1 \\ &= \mathrm{tr}\, \left(A^k + a_1 A^{k-1} + \cdots + a_{k-1}A\right) \\ &= \mathrm{tr}\, \left(A^{k-1}(a_1 I_n + A) + a_2 A^{k-2} + \cdots + a_{k-1}A\right) \\ &= \mathrm{tr}\, \left(A^{k-2}(a_2 I_n + AB_1) + a_3 A^{k-3} + \cdots + a_{k-1}A\right) \\ &= \mathrm{tr}\, (A(a_{k-1} I_n + AB_{k-2})) \\ &= \mathrm{tr}\, (AB_{k-1}) . \end{aligned}$$

De ahí,

$$a_k = -\frac{1}{k}\mathrm{tr}\, (AB_{k-1}) .$$

Por otra parte, como $\det(sI_n - A) \not\equiv 0$, consideremos

$$B(s) := \mathrm{Adj}\, (sI_n - A) = s^{n-1}I_n + s^{n-2}A_1 + \cdots + sA_{n-2} + A_{n-1}, \tag{2.2.3}$$

donde $A_1, \ldots, A_{n-1}$ son matrices de dimensión $n \times n$. De la igualdad

$$(sI_n - A)\left(s^{n-1}I_n + s^{n-2}A_1 + \cdots + sA_{n-2} + A_{n-1}\right) = p_A(s)I_n, \tag{2.2.4}$$

se sigue que

$$\sum_{k=0}^{n} a_k I_n s^k = I_n s^n - AA_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} (A_{n-k} - AA_{n-k-1})\, s^k.$$

Si identificamos los coeficientes en cada uno de los miembros de la expresión anterior obtenemos

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1 I_n + A = B_1, \\ A_2 &= a_2 I_n + AB_1 = B_2, \\ &\vdots \\ A_{n-1} &= a_{n-1} I_n + AB_{n-2} = B_{n-1}, \\ AB_{n-1} &= -a_n I_n. \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

En consecuencia,

$$B(s) := \mathrm{Adj}\ (sI_n - A) = s^{n-1}I_n + s^{n-2}B_1 + \cdots + sB_{n-2} + B_{n-1},$$

Así, este algoritmo determina, de forma simultánea, los coeficientes $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ y $\{B_k\}_{k=1}^{n-1}$ correspondientes al polinomio característico de A y la matriz adjunta de $sI_n - A$.

Datos de entrada: $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$;
Condición inicial: $a_0 = 1, \quad B_0 = I_n$;
FOR $\quad k = 1, 2, \ldots, n-1$

$$a_k = -\frac{1}{k}\operatorname{tr}(AB_{k-1});$$
$$B_k = a_k I_n + AB_{k-1};$$

END (FOR)

$$a_n = -\frac{1}{n}\operatorname{tr}(AB_{n-1}).$$

Tabla 2.2: Algoritmo de Leverrier-Faddeev

2.3. Ejemplos

Ejemplo 1: Consideremos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Si aplicamos el algoritmo anterior tenemos que

$$a_1 = -\operatorname{tr}\,(AB_0) = -\operatorname{tr} A = -5, \quad B_1 = a_1 I_4 + A = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -7 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$a_2 = -\operatorname{tr}\,(AB_1) = 9, \quad B_2 = a_2 I_4 + AB_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -10 & 5 \\ -9 & -10 & -33 & 3 \\ 5 & 9 & 26 & -3 \\ 7 & 7 & 22 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$a_3 = -\mathrm{tr}\ (AB_2) = -7, \quad B_3 = a_3 I_4 + AB_2 = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 8 & -4 \\ 1 & 8 & 22 & -5 \\ 0 & -6 & -16 & 4 \\ -1 & -6 & -16 & 3 \end{bmatrix}.$$

$a_4 = -\mathrm{tr}\ (AB_3) = 2.$

Por tanto, el polinomio característico de A es

$$P_A(s) = s^4 - 5s^3 + 9s^2 - 7s + 2,$$

y la matriz adjunta de $sI_4 - A$ es

$$\mathrm{Adj}\ (sI_4 - A) \ = \ s^3 I_4 + s^2 B_1 + sB_2 + B_3$$

$$= \begin{bmatrix} s^3 - 4s^2 + 2s - 2 & -4s^2 - s + 2 & -s^2 - 10s + 8 & -4s^2 + 5s - 4 \\ 2s^2 - 9s + 1 & s^3 - 5s^2 - s + 8 & 5s^2 - 33s + 22 & -4s^2 + 3s - 5 \\ -s^2 + 5s & s^2 + 9s - 6 & s^3 - 7s^2 + 26s - 16 & 3s^2 - 3s + 4 \\ -s^2 + 7s - 1 & s^2 + 7s - 6 & -s^2 + 22s - 16 & s^3 + s^2 + 3 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 2: En este ejemplo vamos a observar que el algoritmo de Leverrier-Faddeev no es un algoritmo adecuado desde un punto de vista computacional. Consideremos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon^{-2} \end{bmatrix},$$

con $\varepsilon > 0$. Su polinomio característico es

$$\begin{aligned} p_A(t) = \ & t^5 - \left(\tfrac{1}{\varepsilon^2} + \tfrac{1}{\varepsilon} + 3\varepsilon\right) t^4 + \left(\tfrac{1}{\varepsilon^3} + \tfrac{3}{\varepsilon} + 3 + 3\varepsilon^2\right) t^3 \\ & - \left(\tfrac{3}{\varepsilon^2} + 3 + 3\varepsilon + \varepsilon^3\right) t^2 + \left(\tfrac{3}{\varepsilon} + \varepsilon + \varepsilon^2\right) t - 1. \end{aligned}$$

Si tomamos $\varepsilon = 0{,}01$ entonces

$$\begin{aligned} p_A(t) = \; & t^5 - 10100{,}03t^4 + 1000303{,}0003t^3 - 30003{,}030001t^2 + \\ & +300{,}0101t - 1. \end{aligned}$$

Pero, si aplicamos el algoritmo de Leverrier-Faddeev (tabla 2.2), entonces obtenemos como polinomio característico de A

$$\begin{aligned} p_A(t) = \; & t^5 - 10100{,}03t^4 + 1000303{,}0003t^3 - 30003{,}02999t^2 + \\ & +300{,}063216t + 318{,}783294. \end{aligned}$$

NOTA: Estos cómputos fueron realizados con la ayuda del software MATLAB 7.

2.4. Algoritmo de Leverrier-Faddeev y los polinomios ortogonales clásicos

Consideremos una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y una familia de polinomios ortogonales clásicos mónicos $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$. Si expresamos el polinomio característico de A y la matriz $\tilde{A}(s) := \operatorname{Adj}(sI_n - A)$ en función de la base de $\mathbb{P}$ formada por dichos polinomios se tiene

$$p_A(s) = P_n(s) + \sum_{k=0}^{n-1} \hat{a}_{n-k} P_k(s), \tag{2.4.1}$$

$$\tilde{A}(s) = P_{n-1}(s) I_n + \sum_{k=0}^{n-2} P_k(s) \hat{B}_{n-k-1}. \tag{2.4.2}$$

Deduciremos nuestro algoritmo partiendo de la identidad que establece el siguiente

Lema 2.4.1 *Dada $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, sea $p_A(s)$ su polinomio característico. Entonces*

$$\frac{d}{ds}p_A(s) \quad = \quad \operatorname{tr}\operatorname{Adj}\,(sI_n - A). \tag{2.4.3}$$

Demostración:
De la fórmula para la derivada de un determinante (ver **[60]**), tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}p_A(s) &= \frac{d}{ds}\det(sI_n - A)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\det\mathbf{D}_k,\end{aligned}$$

donde $\mathbf{D}_k$, $k = 1, \ldots, n$, son matrices de dimensión $n \times n$ cuyas entradas coinciden con las de la matriz $sI_n - A$ excepto en la fila k, que se sustituye por la fila k de la matriz I_n. Entonces

$$\frac{d}{ds}p_A(s) = \sum_{k=1}^{n}\det(sI_n - A)_{(k|k)}. \tag{2.4.4}$$

La matriz $(sI_n - A)_{(k|k)}$ es de dimensión $(n-1)\times(n-1)$, y se obtiene eliminando las k-ésimas fila y columna de la matriz $sI_n - A$. En consecuencia, los términos $\det(sI_n - A)_{(k|k)}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, son las entradas de la diagonal de la matriz $\operatorname{Adj}\,(sI_n - A)$ y, por tanto, el segundo miembro de la expresión (2.4.4) representa la traza de la matriz $\operatorname{Adj}\,(sI_n - A)$, de donde se sigue el enunciado.

■

Notemos que $\tilde{A}(s)$ satisface

$$(sI_n - A)\tilde{A}(s) = p_A(s)I_n. \tag{2.4.5}$$

En consecuencia, deducimos

$$(sI_n - A)\left(P_{n-1}(s)I_n + \sum_{k=0}^{n-2} P_k(s)\hat{B}_{n-k-1}\right) = P_n(s)I_n + \sum_{k=0}^{n-1} \hat{a}_{n-k}P_k(s)I_n. \qquad (2.4.6)$$

Si usamos la relación de recurrencia a tres términos (1.2.2) correspondiente a la familia ortogonal $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$, en la expresión (2.4.6) se obtiene

$$\begin{aligned}
&[P_n(s) + \beta_{n-1}P_{n-1}(s) + \gamma_{n-1}P_{n-2}(s)]\, I_n - \\
&-P_{n-1}(s)A + \sum_{k=0}^{n-2} (P_{k+1}(s) + \beta_k P_k(s) + \gamma_k P_{k-1}(s))\, \hat{B}_{n-k-1} - \\
&- \sum_{k=0}^{n-2} P_k(s)A\hat{B}_{n-k-1} = P_n(s)I + \sum_{k=0}^{n-1} \hat{a}_{n-k}P_k(s)I_n.
\end{aligned}$$

Si reordenamos la expresión anterior, obtenemos

$$\begin{aligned}
&P_n(s)I_n + P_{n-1}(s)\Big(\beta_{n-1}I_n + \hat{B}_1 - A\Big) + P_{n-2}(s)\Big(\gamma_{n-2}I_n + \hat{B}_2 + \beta_{n-2}\hat{B}_1 - A\hat{B}_1\Big) + \\
&+ \sum_{k=1}^{n-3} P_k(s)\Big(\hat{B}_{n-k} + \beta_k\hat{B}_{n-k-1} + \gamma_{k+1}\hat{B}_{n-k-2} - A\hat{B}_{n-k-1}\Big) + \\
&+P_0(s)\Big(\beta_0\hat{B}_{n-1} + \gamma_1\hat{B}_{n-2} - A\hat{B}_{n-1}\Big) \;=\; P_n(s)I + \sum_{k=0}^{n-1} \hat{a}_{n-k}P_k(s)I_n.
\end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de $P_k,\;\; k = 0, 1, \ldots, n-1$, en los dos miembros de la anterior expresión se tiene

$$\begin{aligned}
A\hat{B}_0 &= -\hat{a}_1 I_n + \beta_{n-1}\hat{B}_0 + \hat{B}_1, \\
A\hat{B}_1 &= -\hat{a}_2 I_n + \gamma_{n-1}\hat{B}_0 + \beta_{n-2}\hat{B}_1 + \hat{B}_2, \\
&\;\;\vdots \\
A\hat{B}_{n-k-1} &= -\hat{a}_{n-k}I + \gamma_{k+1}\hat{B}_{n-k-2} + \beta_k\hat{B}_{n-k-1} + \hat{B}_{n-k}, \qquad (2.4.7) \\
&\quad\; k = 1, 2, \ldots, n-3, \\
\\
A\hat{B}_{n-1} &= -\hat{a}_n I_n + \gamma_1\hat{B}_{n-2} + \beta_0\hat{B}_{n-1},
\end{aligned}$$

con $\hat{B}_0 = I_n$. En forma matricial

$$A\begin{bmatrix} \hat{B}_{n-1} \\ \vdots \\ \hat{B}_0 \end{bmatrix} = M\begin{bmatrix} \hat{B}_{n-1} \\ \vdots \\ \hat{B}_0 \end{bmatrix}$$

donde $M = J_n - [0|\hat{a}]$. J_n es la matriz tridiagonal de dimensión $n \times n$, $n \geqslant 1$, asociada a la familia $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$, i. e.

$$J_n = \begin{bmatrix} \beta_0 & \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \beta_1 & \gamma_2 & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \gamma_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \beta_{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \hat{a} = \begin{bmatrix} \hat{a}_n \\ \hat{a}_{n-1} \\ \vdots \\ \hat{a}_1 \end{bmatrix}.$$

La matriz M se denomina *matriz compañera* (comrade matrix) de A respecto a la base ortogonal $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ (véase **[2]** pp. 372). Además

$$\operatorname{tr} A = -\sum_{j=0}^{n-1} \beta_j - \hat{a}_1.$$

Por otra parte, de la relación (2.4.3) tenemos

$$P_n'(s) + \sum_{k=0}^{n-1} \hat{a}_{n-k} P_k'(s) = nP_{n-1}(s) + \sum_{k=0}^{n-2} P_k(s) \operatorname{tr} \hat{B}_{n-k-1}, \quad n = 2, 3, \ldots. \tag{2.4.8}$$

Debido a que $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ es una familia de polinomios ortogonales clásicos, entonces de la Proposición 1.3.3, obtenemos

$$P_k(s) = \frac{P_{k+1}'(s)}{k+1} + r_k \frac{P_k'(s)}{k} + s_k \frac{P_{k-1}'(s)}{k-1}, \qquad k = 2, 3, \ldots$$

De esta forma, sustituyendo la expresión anterior en (2.4.8) se obtiene

$$\begin{aligned}P_n'(s)+\sum_{k=0}^{n-1}\hat{a}_{n-k}P_k'(s) &= P_n'(s)+r_{n-1}\frac{n}{n-1}P_{n-1}'(s)+s_{n-1}\frac{n}{n-2}P_{n-2}'(s)+\\ &+\sum_{k=2}^{n-2}\left(\frac{P_{k+1}'(s)}{k+1}+r_k\frac{P_k'(s)}{k}+s_k\frac{P_{k-1}'(s)}{k-1}\right)\operatorname{tr}\hat{B}_{n-k-1}+\\ &+\operatorname{tr}\hat{B}_{n-1}P_1'(s)+\operatorname{tr}\hat{B}_{n-2}\left(\frac{P_2'(s)}{2}+r_1P_1'(s)\right),\end{aligned}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{aligned}P_n'(s)+\sum_{k=0}^{n-1}\hat{a}_{n-k}P_k'(s) &= P_n'(s)+\left(\tfrac{n}{n-1}r_{n-1}+\tfrac{1}{n-1}\operatorname{tr}\hat{B}_1\right)P_{n-1}'(s)+\\ &+\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k}\left(\operatorname{tr}\hat{B}_{n-k}+r_k\operatorname{tr}\hat{B}_{n-k-1}+s_{k+1}\operatorname{tr}\hat{B}_{n-k-2}\right)P_k'(s).\end{aligned}$$

Si identificamos los coeficientes de P_k', $k=1,2,\ldots,n-1$, en ambos miembros de la expresión anterior obtenemos

$$\begin{aligned}(n-1)\hat{a}_1 &= nr_{n-1}+\operatorname{tr}\hat{B}_1,\\ (n-k)\hat{a}_k &= \operatorname{tr}\hat{B}_k+r_{n-k}\operatorname{tr}\hat{B}_{k-1}+s_{n-k+1}\operatorname{tr}\hat{B}_{k-2},\\ & k=2,3,\ldots,n-1.\end{aligned}\tag{2.4.9}$$

Finalmente, combinando (2.4.7) y (2.4.9), se obtiene

$$\hat{a}_k=\frac{1}{k}\left[(\beta_{n-k}-r_{n-k})\operatorname{tr}\hat{B}_{k-1}+(\gamma_{n-k+1}-s_{n-k+1})\operatorname{tr}\hat{B}_{k-2}-\operatorname{tr}\left(A\hat{B}_{k-1}\right)\right],\tag{2.4.10}$$

para $k=1,2,\ldots,n$. Como conclusión tenemos el siguiente

Teorema 2.4.2 *Dada $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, sean $p_A(s)$ su polinomio característico dado por (2.4.1) y $\tilde{A}(s)$ la matriz adjunta de sI_n-A dada por (2.4.2). Entonces*

(i) *Para* $k = 1, \ldots, n,$

$$\hat{a}_k = \frac{1}{k}\left[(\beta_{n-k} - r_{n-k})\text{tr}\,\hat{B}_{k-1} + (\gamma_{n-k+1} - s_{n-k+1})\text{tr}\,\hat{B}_{k-2} - \text{tr}\left(A\hat{B}_{k-1}\right)\right], \tag{2.4.11}$$

con $\hat{B}_{-1} = 0, \quad r_0 = 0, \quad s_1 = 0.$

(ii) *Para* $k = 1, 2, \ldots, n-1$

$$\hat{B}_k = \hat{a}_k I - \gamma_{n-k+1}\hat{B}_{k-2} - \beta_{n-k}\hat{B}_{k-1} + A\hat{B}_{k-1}. \tag{2.4.12}$$

Así el algoritmo queda de la forma mostrada en la tabla 2.3

DATOS DE ENTRADA: $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\{\beta_k\}_{k=0}^{n-1}, \ \{\gamma_k\}_{k=1}^{n}, \ \{r_k\}_{k=0}^{n-1}, \ \{s_k\}_{k=1}^{n}.$
Condiciones iniciales: $\hat{B}_{-1} = 0, \quad \hat{B}_0 = I_n.$
FOR $k = 1, 2, \ldots, n-1$

$$\hat{a}_k = \tfrac{1}{k}\left[(\beta_{n-k} - r_{n-k})\text{tr}\,\hat{B}_{k-1} + (\gamma_{n-k+1} - s_{n-k+1})\text{tr}\,\hat{B}_{k-2} - \text{tr}\left(A\hat{B}_{k-1}\right)\right],$$
$$\hat{B}_k = \hat{a}_k I - \beta_{n-k}\hat{B}_{k-1} - \gamma_{n-k+1}\hat{B}_{k-2} + A\hat{B}_{k-1}.$$

END (FOR)

$$\hat{a}_n = \frac{1}{n}\left[\beta_0\text{tr}\,\hat{B}_{n-1} + \gamma_1\text{tr}\,\hat{B}_{n-2} - \text{tr}\left(A\hat{B}_{n-1}\right)\right].$$

Tabla 2.3: Algoritmo de Leverrier-Faddeev usando SPOM clásicos

Las expresiones (2.4.11) y (2.4.12) pueden simplificarse si las aplicamos a ciertas familias de polinomios clásicos (para más detalles, ver **[37]**).

Polinomios de Hermite: Por el teorema 2.4.2 tenemos

$$\hat{a}_k = \frac{n-k+1}{2k}\text{tr}\,\hat{B}_k - 2 - \frac{1}{k}\text{tr}\,(AB_{k-1}) \tag{2.4.13}$$

y

$$\hat{B}_k = a_k I_n - \frac{n-k+1}{2}\hat{B}_{k-2} + AB_{k-1}. \tag{2.4.14}$$

Si consideramos la traza en (2.4.14) y la usamos en (2.4.13) obtenemos

$$\operatorname{tr} \hat{B}_k = (n-k)a_k.$$

Por otra parte, si sustituimos la expresión anterior en (2.4.13), entonces

$$\hat{a}_k = \frac{(n-k+1)(n-k+2)}{2k}\hat{a}_{k-2} - \frac{1}{k}\operatorname{tr}\left(AB_{k-1}\right). \tag{2.4.15}$$

Polinomios de Laguerre: De acuerdo con el teorema 2.4.2

$$k\hat{a}_k = (n-k+\alpha+1)\operatorname{tr} \hat{B}_{k-1} + (n-k+1)(n-k+\alpha+1)\hat{B}_{k-2} - \operatorname{tr}\left(A\hat{B}_{k-1}\right) \tag{2.4.16}$$

y

$$\hat{B}_k = \hat{a}_k I_n - (n-k+1)(n-k+\alpha+1)\hat{B}_{k-2} - (2(n-k)+\alpha+1)\hat{B}_{k-1} + AB_{k-1}. \tag{2.4.17}$$

Aplicando trazas en (2.4.17) y usando (2.4.16) se tiene

$$\operatorname{tr} \hat{B}_k = (n-k)\hat{a}_k - n - k\operatorname{tr} \hat{B}_{k-1}.$$

En consecuencia, se deduce

$$\hat{a}_k = \frac{(n-k+1)(n-k+\alpha+1)}{k}\hat{a}_{k-1} - \frac{1}{k}\operatorname{tr}\left(A\hat{B}_{k-1}\right). \tag{2.4.18}$$

Polinomios de Jacobi: Del teorema 2.4.2 se deduce

$$k\hat{a}_k = \tfrac{\beta-\alpha}{2(n-k)+\alpha+\beta+2}\operatorname{tr} \hat{B}_{k-1} + \tfrac{4(n-k+1)(n-k+1+\alpha)(n-k+1+\beta)}{(2(n-k)+\alpha+\beta+2)^2(2(n-k)+\alpha+\beta+3)}\operatorname{tr} \hat{B}_{k-2} - \operatorname{tr}\left(A\hat{B}_{k-1}\right). \tag{2.4.19}$$

Si $\alpha = \beta$, entonces aparece la familia de los polinomios de Gegenbauer. En este caso el funcional lineal es simétrico y, en consecuencia, la expresión anterior se reduce a

$$\hat{a}_k = \frac{n-k+1}{k(2(n-k)+2\alpha+3)}\operatorname{tr}\hat{B}_{k-2} - \frac{1}{k}\operatorname{tr}\left(A B_{k-1}\right). \tag{2.4.20}$$

La expresión (2.4.12) queda simplificada de la siguiente manera

$$\hat{B}_k = \hat{a}_k I_n - \frac{(n-k+1)(n-k+2\alpha+1)}{(2(n-k)+2\alpha+1)(2(n-k)+\alpha+3)}\hat{B}_{k-1}. \tag{2.4.21}$$

2.5. Ejemplo

Consideremos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Su polinomio característico es

$$p_A(s) = s^4 - 5s^3 + 9s^2 - 7s + 2.$$

Tomemos como base la familia de los polinomios de Hermite $\{H_n\}_{n\geqslant 0}$. Los parámetros que definen esta familia son: $\beta_n = r_n = s_n = 0$, $n \geqslant 0$, y $\gamma_n = \dfrac{n}{2}$, $n \geqslant 1$. Teniendo en cuenta las expresiones (2.4.15) y (2.4.14)

$$a_1 = -\operatorname{tr} A = -5,$$

así como

$$\hat{B}_1 = a_1 I_4 + A = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -7 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por otra parte,

$$a_2 = 3 - \frac{1}{2}\text{tr }(AB_1) = 12,$$

junto a

$$\hat{B}_2 = a_2 I_4 - \frac{3}{2}B_0 + AB_1 = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -1 & -10 & 5 \\ -9 & -\frac{17}{2} & -33 & 3 \\ 5 & 9 & \frac{55}{2} & -3 \\ 7 & 7 & 22 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Continuando el proceso

$$a_3 = a_1 - \frac{1}{3}\text{tr }(AB_2) = -\frac{29}{2},$$

y

$$\hat{B}_3 = a_3 I_4 - B_1 + AB_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -8 & 0 & 15 & -12 \\ 4 & 11 & 49 & -14 \\ -1 & -11 & -39 & 11 \\ -3 & -8 & -33 & 7 \end{bmatrix}.$$

Finalmente,

$$a_4 = \frac{1}{4}a_2 - \frac{1}{4}\text{tr }(AB_3) = \frac{29}{4}.$$

En consecuencia, el polinomio característico de la matriz A, expresado como combinación lineal de la base $\{H_n\}_{n\geqslant 0}$, resulta ser

$$a(s) = H_4(s) - 5H_3(s) + 12H_2(s) - \frac{29}{2}H_1(s) + \frac{29}{4}H_0(s),$$

y la matriz adjunta de $sI_4 - A$,

$$\text{Adj }(sI_4 - A) = H_3(s)I_4 + H_2(s)\hat{B}_1 + H_1(s)\hat{B}_2 + H_0(s)\hat{B}_3.$$

Si ahora consideramos la familia $\{U_n\}_{n\geqslant 0}$, con $U_n = P_n^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$, formada por los polinomios de Chebyshev de segunda especie donde $\beta_n = r_n = 0,\ n \geqslant 0,\ \gamma_n = \frac{1}{4},\ \ n \geqslant 1$, y $s_1 = 0,\ \ s_n = -\frac{1}{4},\ \ n \geqslant 2$, de (2.4.20), y de (2.4.21) se sigue

$a_1 = -\mathrm{tr}\, A = -5$, y

$$B_1 = a_1 I_4 + A = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -7 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por otra parte

$$a_2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\ (AB_1) = \frac{39}{4},$$

así como

$$B_2 = a_2 I_4 - \frac{1}{4}B_0 + AB_1 = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -1 & -10 & 5 \\ -9 & -\frac{19}{2} & -33 & 3 \\ 5 & 9 & \frac{53}{2} & -3 \\ 7 & 7 & 22 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Continuando el proceso

$$a_3 = \frac{1}{9}\mathrm{tr}\, B_1 - \frac{1}{3}\mathrm{tr}\ (AB_2) = -\frac{19}{2},$$

$$B_3 = a_3 I_4 - \frac{1}{4}B_1 + AB_2 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -12 & 4 & 31 & -20 \\ 6 & 27 & 93 & -24 \\ -1 & -23 & -71 & 19 \\ -5 & -20 & -65 & 13 \end{bmatrix}.$$

Finalmente,

$$a_4 = \frac{1}{16}\mathrm{tr}\, B_2 - \frac{1}{4}\mathrm{tr}\ (AB_3) = \frac{35}{8}.$$

En conclusión, la representación del polinomio característico de A en la base $\{U_n\}_{n\geqslant 0}$ es

$$p_A(s) = U_4(s) - 5U_3(s) + \frac{39}{4}U_2(s) - \frac{19}{2}U_1(s) + \frac{35}{8}U_0(s),$$

y la matriz adjunta de $sI_4 - A$ está dada por

$$\text{Adj}\,(sI_4 - A) = U_3(s)I_4 + U_2(s)B_1 + U_1(s)B_2 + U_0(s)B_3.$$

Si consideramos la familia $\left\{L_n^{(\alpha)}\right\}_{n\geqslant 0}$ de los polinomios de Laguerre con parámetro α se tiene $\beta_n = 2n + \alpha + 1$, $r_n = n$, $n \geqslant 0$, $\gamma_n = n(n+\alpha)$, $n \geqslant 1$, y $s_1 = 0$, $n \geqslant 1$. De (2.4.18) y (2.4.17) deducimos $a_1 = 4(4+\alpha) - \operatorname{tr} A = 4\alpha + 11$, y

$$B_1 = \begin{bmatrix} 5+3\alpha & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 4+3\alpha & 5 & -4 \\ -1 & 1 & 2+3\alpha & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 10+3\alpha \end{bmatrix}.$$

Por otra parte,

$$a_2 = 6\alpha^2 + 27\alpha + 36,$$

junto con

$$B_2 = \begin{bmatrix} 3\alpha^2+11\alpha+4 & -8\alpha-17 & -2\alpha-14 & -8\alpha-11 \\ 4\alpha-1 & 3\alpha^2+5\alpha-12 & 10\alpha-13 & -8\alpha-13 \\ -2\alpha+1 & 2\alpha+13 & 3\alpha^2+\alpha+16 & 6\alpha+9 \\ -2\alpha+3 & 8\alpha+23 & 2\alpha+18 & 3\alpha^2+17\alpha+22 \end{bmatrix}.$$

Continuando el proceso

$$a_3 = 4\alpha^3 + 21\alpha^2 + 47\alpha + 35,$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 4\alpha^3+21\alpha^2+47\alpha+35 & -4\alpha^2-13\alpha-7 & -\alpha^2-13\alpha-4 & -4\alpha^2-7\alpha-7 \\ 2\alpha^2-3\alpha-4 & 4\alpha^3+21\alpha^2+47\alpha+35 & 5\alpha^2-18\alpha-1 & -4\alpha^2-9\alpha-10 \\ -\alpha^2+2\alpha+3 & \alpha^2+12\alpha+5 & 4\alpha^3+21\alpha^2+47\alpha+35 & 3\alpha^2+6\alpha+7 \\ -\alpha^2+4\alpha+4 & 4\alpha^2+19\alpha+9 & -\alpha^2+19\alpha+4 & 4\alpha^3+21\alpha^2+47\alpha+35 \end{bmatrix}.$$

Finalmente,

$$a_4 = \alpha^4 + 5\alpha^3 + 14\alpha^2 + 15\alpha + 7$$

Por tanto, la representación del polinomio característico de A en la base $\left\{L_n^{(\alpha)}\right\}_{n\geqslant 0}$ es

$$\begin{aligned} p_A(s) = \; & L_4^{(\alpha)}(s) - (4\alpha + 11)\, L_3^{(\alpha)}(s) + \left(6\alpha^2 + 27\alpha + 36\right) L_2^{(\alpha)}(s) \\ & - \left(4\alpha^3 + 21\alpha^2 + 47\alpha + 35\right) L_1^{(\alpha)}(s) + \left(\alpha^4 + 5\alpha^3 + 14\alpha^2 + 15\alpha + 7\right) L_0^{(\alpha)}(s), \end{aligned}$$

y la matriz adjunta de $sI_4 - A$ está dada por

$$\text{Adj}\ (sI_4 - A) = L_3^{(\alpha)}(s)I_4 + L_2^{(\alpha)}(s)B_1 + L_1^{(\alpha)}(s)B_2 + L_0^{(\alpha)}(s)B_3.$$

Capítulo 3

Extensión del algoritmo de Leverrier-Faddeev

3.1. Algoritmo para haces lineales

Motivados por el sistema lineal invariante en el tiempo (2.1.2), estamos interesados en calcular $a(s) := \det(sE - A)$ y $B(s) := \mathrm{Adj}\ (sE - A)$ con $A, E \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $\det E = 0$, esto es, un modelo de haz regular lineal. La idea es sustituir la matriz A por la matriz $A(s) := -sE + A$ en el desarrollo del algoritmo mostrado en la tabla 2.3 del capítulo anterior, de manera que

$$\tilde{a}(\lambda, s) := \det(\lambda I_n - A(s)) = P_n(\lambda) + \sum_{k=0}^{n-1} \hat{a}_{n-k}(s) P_k(\lambda), \tag{3.1.1}$$

y

$$\tilde{B}(\lambda, s) := \mathrm{Adj}\ (\lambda I_n - A(s)) = P_{n-1}(\lambda) I_n + \sum_{k=0}^{n-2} P_k(\lambda) \hat{B}_{n-k-1}(s). \tag{3.1.2}$$

Así, de (2.4.11) y (2.4.12) obtenemos

$$\begin{aligned} k\hat{a}_k(s) &= (\beta_{n-k} - r_{n-k})\mathrm{tr}\,\hat{B}_{k-1}(s) - \mathrm{tr}\,A(s)\hat{B}_{k-1}(s)+ \\ &\quad +(\gamma_{n-k+1} - s_{n-k+1})\mathrm{tr}\,\hat{B}_{k-2}(s), \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

para $k = 1, \ldots, n$, junto con

$$\hat{B}_k(s) = \hat{a}_k(s)I_n - \gamma_{n-k+1}\hat{B}_{k-2}(s) - \beta_{n-k}\hat{B}_{k-1}(s) + A(s)\hat{B}_{k-1}(s), \tag{3.1.4}$$

para $k = 1, \ldots, n-1$.

Por tanto, si hacemos $\lambda = 0$ en (3.1.1) y (3.1.2) entonces

$$a(s) := \det(sE - A) = \tilde{a}(0, s) = P_n(0) + \sum_{k=0}^{n-1} \hat{a}_{n-k}(s)P_k(0), \tag{3.1.5}$$

$$B(s) := \mathrm{Adj}\ (sE - A) = \tilde{B}(0, s) = P_{n-1}(0)I_n + \sum_{k=0}^{n-2} P_k(0)\hat{B}_{n-k-1}(s). \tag{3.1.6}$$

Teniendo en cuenta que $\deg P_k(s) = k$, para todo $k \geqslant 0$, así como las expresiones (3.1.3) y (3.1.4), es fácil comprobar que $\deg \hat{a}_k(s) \leqslant k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, y $\deg \hat{B}_k(s) \leqslant k$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$. De esta forma podemos expresar $\hat{a}_k(s)$ y $\hat{B}_k(s)$ mediante los siguientes desarrollos en términos de los polinomios $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$

$$\begin{aligned} \hat{a}_k(s) &= \sum_{j=0}^{k} a_{k,j}P_j(s), \quad a_{k,j} \in \mathbb{C}, \\ \hat{B}_k(s) &= \sum_{j=0}^{k} P_j(s)B_{k,j}, \quad B_{k,j} \in \mathbb{C}^{n\times n}. \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

Sustituyendo (3.1.7) en (3.1.3) se tiene

$$
\begin{aligned}
k\sum_{j=0}^{k} a_{k,j}P_j(s) \quad = \quad & \operatorname{tr}\Bigg((\beta_{n-k}-r_{n-k})\sum_{j=0}^{k-1}P_j(s)B_{k-1,j}+ \\
& +(\gamma_{n-k+1}-s_{n-k+1})\sum_{j=0}^{k-2}P_j(s)B_{k-2,j}+ \\
& +(sE-A)\sum_{j=0}^{k-1}P_j(s)B_{k-1,j}\Bigg),
\end{aligned} \tag{3.1.8}
$$

y, aplicando la relación de recurrencia a tres términos, obtenemos

$$
\begin{aligned}
k\sum_{j=0}^{k} a_{k,j}P_j(s) = \quad & P_{k-1}(s)\Big((\beta_{n-k}-r_{n-k})\operatorname{tr}B_{k-1,k-1}+\beta_{k-1}\operatorname{tr}EB_{k-1,k-1} \\
& -\operatorname{tr}AB_{k-1,k-1}\Big)+\sum_{j=0}^{k-2}P_j(s)\Big((\beta_{n-k}-r_{n-k})\operatorname{tr}B_{k-1,j}+ \\
& +(\gamma_{n-k+1}-s_{n-k+1})\operatorname{tr}B_{k-2,j}+\beta_j\operatorname{tr}EB_{k-1,j}-\operatorname{tr}AB_{k-1,j}\Big)+ \\
& +\sum_{j=0}^{k-1}P_{j+1}(s)\operatorname{tr}EB_{k-1,j}+\sum_{j=0}^{k-1}\gamma_j P_{j-1}(s)\operatorname{tr}EB_{k-1,j}.
\end{aligned}
$$

Si reordenamos los términos en la expresión anterior, deducimos

$$\begin{aligned}
k\sum_{j=0}^{k} a_{k,j}P_j(s) \quad &= \quad \operatorname{tr} EB_{k-1,k-1}P_k(s) + \Big[(\beta_{n-k} - r_{n-k})\operatorname{tr} B_{k-1,k-1} - \operatorname{tr} AB_{k-1,k-1}\\
&\quad +\beta_{k-1}\operatorname{tr} EB_{k-1,k-1} + \operatorname{tr} EB_{k-1,k-2}\Big]P_{k-1}(s)\\
&\quad +\sum_{j=1}^{k-2}\Big[\gamma_{j+1}\operatorname{tr} EB_{k-1,j+1} + (\beta_{n-k} - r_{n-k})\operatorname{tr} B_{k-1,j}\\
&\quad +\beta_j\operatorname{tr} EB_{k-1,j} + (\gamma_{n-k+1} - s_{n-k+1})\operatorname{tr} B_{k-2,j} - \operatorname{tr} AB_{k-1,j}\\
&\quad +\operatorname{tr} EB_{k-1,j-1}\Big]P_j(s) + \Big[\gamma_1\operatorname{tr} EB_{k-1,1} + (\beta_{n-k} - r_{n-k})\operatorname{tr} B_{k-1,0}\\
&\quad +\beta_0\operatorname{tr} EB_{k-1,0} + (\gamma_{n-k+1} - s_{n-k+1})\operatorname{tr} B_{k-2,0} - \operatorname{tr} AB_{k-1,0}\Big]P_0(s).
\end{aligned}$$

Finalmente, igualando los coeficientes de $P_j,\ j = 0, 1, \ldots, k$, en los dos miembros de la expresión anterior, se tiene

$$\begin{aligned}
ka_{k,0} \quad &= \quad \gamma_1\operatorname{tr} EB_{k-1,1} + \beta_0\operatorname{tr} EB_{k-1,0} + (\beta_{n-k} - r_{n-k})\operatorname{tr} B_{k-1,0}\\
&\quad -\operatorname{tr} AB_{k-1,0} + (\gamma_{n-k+1} - s_{n-k+1})\operatorname{tr} B_{k-2,0},\\
&\ \ \vdots\\
ka_{k,j} \quad &= \quad \gamma_{j+1}\operatorname{tr} EB_{k-1,j+1} + \beta_j\operatorname{tr} EB_{k-1,j} + \operatorname{tr} EB_{k-1,j-1}\\
&\quad +(\gamma_{n-k+1} - s_{n-k+1})\operatorname{tr} B_{k-2,j} + (\beta_{n-k} - r_{n-k})\operatorname{tr} B_{k-1,j}\\
&\quad -\operatorname{tr} AB_{k-1,j}, \qquad j = 1, \ldots, k-2,\\
&\ \ \vdots\\
ka_{k,k-1} \quad &= \quad (\beta_{n-k} - r_{n-k})\operatorname{tr} B_{k-1,k-1} + \operatorname{tr} EB_{k-1,k-2}\\
&\quad +\beta_{k-1}\operatorname{tr} EB_{k-1,k-1} - \operatorname{tr} AB_{k-1,k-1},\\
ka_{k,k} \quad &= \quad \operatorname{tr} EB_{k-1,k-1}.
\end{aligned} \tag{3.1.9}$$

Análogamente, sustituyendo (3.1.7) en (3.1.4), se obtiene

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{k} P_j(s)B_{k,j} &= \sum_{j=0}^{k} a_{k,j}P_j(s)I_n - \gamma_{n-k+1}\sum_{j=0}^{k-2} P_j(s)B_{k-2,j} \\
&\quad -\beta_{n-k}\sum_{j=0}^{k-1} P_j(s)B_{k-1,j} + (-sE + A)\sum_{j=0}^{k-1} P_j(s)B_{k-1,j}.
\end{aligned}$$

Si usamos nuevamente la relación de recurrencia a tres términos (1.2.2), tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{k} P_j(s)B_{k,j} &= a_{k,k}P_k(s)I_n - \sum_{j=0}^{k-1} P_{j+1}(s)EB_{k-1,j} - \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j P_{j-1}(s)EB_{k-1,j} \\
&\quad +P_{k-1}(s)\Big(a_{k,k-1}I_n + \beta_{n-k}B_{k-1,k-1} - (\beta_{k-1}E - A)\,B_{k-1,k-1}\Big) \\
&\quad + \sum_{j=0}^{k-2} P_j(s)\Big(a_{k,j}I_n - \gamma_{n-k+1}B_{k-2,j} + \Big(A - \beta_{n-k}I_n - \beta_j E\Big)\,B_{k-1,j}\Big).
\end{aligned}$$

Reordenando los términos, se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{k} P_j(s)B_{k,j} &= P_k(s)\Big[a_{k,k}I_n - EB_{k-1,k-1}\Big] + P_{k-1}(s)\Big[a_{k,k-1}I_n - EB_{k-1,k-2} \\
&\quad + (A - \beta_{k-1}E - \beta_{n-k}I_n)\,B_{k-1,k-1}\Big] + \sum_{j=1}^{k-2} P_j(s)\Big[a_{k,j}I_n \\
&\quad -EB_{k-1,j-1} + \Big(A - \beta_j E - \beta_{n-k}I_n\Big)\,B_{k-1,j} - \gamma_{j+1}EB_{k-1,j+1} \\
&\quad -\gamma_{n-k+1}B_{k-2,j}\Big] + P_0(s)\Big[a_{k,0}I_n + (A - \beta_0 E - \beta_{n-k}I_n)\,B_{k-1,0} \\
&\quad -\gamma_1 EB_{k-1,1} - \gamma_{n-k+1}B_{k-2,0}\Big].
\end{aligned}$$

Finalmente, si igualamos los coeficientes de P_j, $\;j = 0, 1, \ldots, k$, en los dos miembros de la expresión anterior, se tiene para $k = 1, 2, \ldots, n-1$,

$$\begin{aligned}
B_{k,0} &= a_{k,0}I_n + (A - \beta_0 E - \beta_{n-k}I_n)\, B_{k-1,0} - \gamma_1 E B_{k-1,1} \\
&\quad -\gamma_{n-k+1} B_{k-2,0}, \\
&\ \vdots \\
B_{k,j} &= a_{k,j}I_n - EB_{k-1,j} + \Big(A - \beta_j E - \beta_{n-k}I_n\Big)\, B_{k-1,j} \\
&\quad -\gamma_{j+1} E B_{k-1,j+1} - \gamma_{n-k+1} B_{k-2,j}, \qquad j = 1, \ldots, k-2, \\
&\ \vdots \\
B_{k,k-1} &= a_{k,k-1}I_n - EB_{k-1,k-2} + (A - \beta_{k-1}E - \beta_{n-k}I_n)\, B_{k-1,k-1}, \\
B_{k,k} &= a_{k,k}I_n - EB_{k-1,k-1}.
\end{aligned} \tag{3.1.10}$$

Como conclusión, tenemos el siguiente teorema

Teorema 3.1.1 *Sean* $E, A \in \mathbb{C}^{n\times n}$*, E singular y* $\det(sE - A) \not\equiv 0$*, entonces los coeficientes* $a_{k,j}$ *y* $B_{k,j}$*,* $k = 1, 2, \ldots, n-1$*,* $j = 0, 1, \ldots, k$*, en las expresiones (3.1.7) se obtienen mediante el siguiente proceso:*

Teniendo en cuenta $B_{k,j} = 0$*, si* $k < j$ *ó* $j < 0$ *y* $a_{0,0} = 1$*,* $B_{0,0} = I_n$*.*

(*i*) *Para* $k = 1, \ldots, n$ *y* $j = 0, 1, \ldots, k$*,*

$$\begin{aligned}
a_{k,j} &= \frac{1}{k}\Big[\gamma_{j+1}\mathrm{tr}\, EB_{k-1,j+1} + \beta_j \mathrm{tr}\, EB_{k-1,j} + (\beta_{n-k} - r_{n-k})\,\mathrm{tr}\, B_{k-1,j} + \\
&\quad +\mathrm{tr}\, EB_{k-1,j-1} + (\gamma_{n-k+1} - s_{n-k+1})\,\mathrm{tr}\, B_{k-2,j} - \mathrm{tr}\, AB_{k-1,j}\Big].
\end{aligned} \tag{3.1.11}$$

(*ii*) *Para* $k = 1, 2, \ldots, n-1$ *y* $j = 0, 1, \ldots, k$*,*

$$\begin{aligned}
B_{k,j} &= a_{k,j}I_n - EB_{k-1,j} - \gamma_{j+1}EB_{k-1,j+1} - \gamma_{n-k+1}B_{k-2,j} + \\
&\quad + \Big(A - \beta_{n-k} - \beta_j E\Big)\, B_{k-1,j}.
\end{aligned} \tag{3.1.12}$$

De esta forma, mostramos en la tabla 3.1 un algoritmo para calcular los coeficientes $a_{k,j}$ y $B_{k,j}$ $k = 1, 2, \ldots, n-1,\ j = 0, 1, \ldots, k$, en (3.1.7).

A continuación presentamos un resultado que extiende el presentado en el Lema 2.4.1.

Teorema 3.1.2 *Dadas $A, E \in \mathbb{C}^{n\times n}$, tales que $\det(sE - A) \not\equiv 0$, sean $a(s) = \det(sE - A)$, y $B(s) = \mathrm{Adj}\,(sE - A)$. Entonces*

$$\frac{d}{ds}a(s) = \mathrm{tr}\,\left(EB(s)\right).$$

Demostración: Si la matriz E es no singular. entonces

$$sE - A = \left(sI_n - AE^{-1}\right)E.$$

Del lema 2.4.1, se sigue

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}a(s) &= \det(E)\frac{d}{ds}\left(\det\left(sI_n - AE^{-1}\right)\right),\\
&= \det(E)\mathrm{tr}\left(\mathrm{Adj}\ \left(sI_n - AE^{-1}\right)\right),\\
&= \det(E)\det(E)^{-1}\det(sE - A)\,\mathrm{tr}\left(E(sE - A)^{-1}\right),\\
&= \det(sE - A)\,\mathrm{tr}\left(E(sE - A)^{-1}\right)\\
&= \mathrm{tr}\,\left(EB(s)\right).
\end{aligned}$$

Ahora, si E es una matriz singular, considérese $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \text{mín}\Big\{|\lambda_i| : \lambda_i \in \sigma(E) \setminus \{0\}\Big\}$. Entonces $E_\varepsilon := E + \varepsilon I_n$ es una matriz no singular. Si usamos el resultado anterior, se tiene

$$\frac{d}{ds}a_\varepsilon(s) = \mathrm{tr}\,\left(E_\varepsilon B_\varepsilon(s)\right)$$

donde $a_\varepsilon(s) = \det(sE_\varepsilon - A)$ y $B_\varepsilon(s) := \mathrm{Adj}\,(sE_\varepsilon - A)$.

Teniendo en cuenta que $E_\varepsilon \to E$, $a_\varepsilon(s) \to a(s)$ y $B_\varepsilon(s) \to B(s)$, cuando $\varepsilon \to 0$, deducimos el enunciado.

■

DATOS DE ENTRADA: $A, E \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\{\beta_k\}_{k=0}^{n-1}$, $\{\gamma_k\}_{k=1}^{n}$, $\{r_k\}_{k=0}^{n-1}$, $\{s_k\}_{k=1}^{n}$.
Condiciones iniciales: $B_{k,j} = 0$, si $k < j$ o $j < 0$, $a_{0,0} = 1$, $B_{0,0} = I_n$.
FOR $k = 1, \ldots, n-1$

$\alpha_{n-k} := \beta_{n-k} - r_{n-k}$; $\delta_{n-k+1} := \gamma_{n-k+1} - s_{n-k+1}$; $A_k := A - \beta_{n-k} I_n$.

FOR $j = 0, 1, \ldots, k$

$$\begin{aligned} a_{k,j} &:= \frac{1}{k}\Big[\gamma_{j+1}\mathrm{tr}\, EB_{k-1,j+1} + \beta_j \mathrm{tr}\, EB_{k-1,j} + \alpha_{n-k}\mathrm{tr}\, B_{k-1,j} + \\ &\quad + \mathrm{tr}\, EB_{k-1,j-1} + \delta_{n-k+1}\mathrm{tr}\, B_{k-2,j} - \mathrm{tr}\, AB_{k-1,j}\Big] \\ B_{k,j} &:= a_{k,j}I_n - EB_{k-1,j} + \left(A_k - \beta_j E\right) B_{k-1,j} - \gamma_{j+1}EB_{k-1,j+1} \\ &\quad -\gamma_{n-k+1}B_{k-2,j} \end{aligned}$$

END

END

FOR $j = 0, 1, \ldots, n$

$$\begin{aligned} a_{n,j} &:= \frac{1}{n}\Big[\gamma_{j+1}\mathrm{tr}\, EB_{n-1,j+1} + \beta_j \mathrm{tr}\, EB_{n-1,j} + \beta_0\mathrm{tr}\, B_{n-1,j} + \\ &\quad + \mathrm{tr}\, EB_{n-1,j-1} + \gamma_1\mathrm{tr}\, B_{n-2,j} - \mathrm{tr}\, AB_{n-1,j}\Big]. \end{aligned}$$

END.

Tabla 3.1: Algoritmo de Leverrier-Faddeev para haz regular

3.1.1. Ejemplo

Consideremos las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Obsérvese que *rank* $E = 2$. Aplicaremos el algoritmo descrito en la tabla 3.1.

Es fácil probar que

$$a(s) = \det(sE - A) = -s^2 \quad \text{y} \quad B(s) = \text{Adj}\,(sE - A) = \begin{bmatrix} -s & 0 & s \\ 0 & -s & s \\ s & s & s^2 - 2s \end{bmatrix}.$$

Aplicando el algoritmo de la tabla 3.1 usando como base los polinomios de Hermite $\{H_n\}_{n \geqslant 0}$, obtenemos

$a_{1,0} = -\operatorname{tr} A = -3, \quad a_{1,1} = \operatorname{tr} E = 2.$

$$B_{1,0} = a_{1,0} I_3 + A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B_{1,1} = a_{1,1} I_3 - E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Por otra parte,

$a_{2,0} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\operatorname{tr} EB_{1,1} - \operatorname{tr} AB_{1,0} + 3\right] = 2, \quad a_{2,1} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{tr} EB_{1,0} - \operatorname{tr} AB_{1,1}\right] = -4,$

$a_{2,2} = \frac{1}{2}\operatorname{tr} EB_{1,1} = 1,$

junto con

$$B_{2,0} = a_{2,0} I_3 + AB_{1,0} - \tfrac{1}{2} EB_{1,1} - I_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_{2,1} = a_{2,1} I_3 + AB_{1,1} - EB_{1,0} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$B_{2,2} = a_{2,2} I_3 - EB_{1,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Finalmente

$$a_{3,0} = \tfrac{1}{3}\left[\tfrac{1}{2}\operatorname{tr} EB_{2,1} - \operatorname{tr} AB_{2,0} + \tfrac{1}{2}\operatorname{tr} B_{1,0}\right] = -2,$$

$$a_{3,1} = \tfrac{1}{3}\left[\operatorname{tr} EB_{2,2} - \operatorname{tr} AB_{2,1} + \operatorname{tr} EB_{2,0} + \tfrac{1}{2}\operatorname{tr} B_{1,1}\right] = 1,$$

$$a_{3,2} = \tfrac{1}{3}\left[\operatorname{tr} EB_{2,1} - \operatorname{tr} AB_{2,2}\right] = -1, \quad a_{3,3} = \tfrac{1}{3}\operatorname{tr} EB_{2,2} = 0.$$

Como conclusión, deducimos que

$$\hat{a}_1(s) = a_{1,0}H_0(s) + a_{1,1}H_1(s) = -3H_0(s) + 2H_1(s),$$

$$\hat{a}_2(s) = a_{2,0}H_0(s) + a_{2,1}H_1(s) + a_{2,2}H_2(s) = 2H_0(s) - 4H_1(s) + H_2(s),$$

$$\hat{a}_3(s) = a_{3,0}H_0(s) + a_{3,1}H_1(s) + a_{3,2}H_2(s) + a_{3,3}H_3(s) = -2H_0(s) + H_1(s) - H_2(s).$$

$$\hat{B}_1(s) = H_0(s)B_{1,0} + H_1(s)B_{1,1},$$

$$\hat{B}_2(s) = H_0(s)B_{2,0} + H_1(s)B_{2,1} + H_2(s)B_{2,2}.$$

El determinante $a(s)$ de $sE - A$ está dado por

$$\begin{aligned} a(s) &= H_3(0) + \hat{a}_1(s)H_2(0) + \hat{a}_2(s)H_1(0) + \hat{a}_3(s)H_0(0) \\ &= -\tfrac{1}{2}\hat{a}_1(s) + \hat{a}_3(s) \\ &= -H_2(s) - \tfrac{1}{2}H_0(s), \end{aligned}$$

y la matriz adjunta $B(s)$

$$\begin{aligned} B(s) &= H_2(0)\hat{B}_0(s) + H_1(0)\hat{B}_1(s) + H_0(0)\hat{B}_2(s) \\ &= -\tfrac{1}{2}I_3 + \hat{B}_2(s) \\ &= H_0(s)\Big[-\tfrac{1}{2}I_3 + B_{2,0}\Big] + H_1(s)B_{2,1} + H_2(s)B_{2,2}. \end{aligned}$$

De manera que,

$$\begin{aligned} B(s) &= H_0(s)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + H_1(s)\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \\ &\quad + H_2(s)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A continuación, aplicamos el algoritmo para la familia $\left\{L_n^{(\alpha)}\right\}_{n\geqslant 0}$ de los polinomios de Laguerre con parámetro α, de manera que

$$a_{1,0} = (1+\alpha)\operatorname{tr}E + 3(3+\alpha) - \operatorname{tr}A = 8 + 5\alpha, \quad a_{1,1} = \operatorname{tr}E = 2,$$

junto con

$$B_{1,0} = (a_{1,0} - 5 - \alpha)I_3 + A - (1+\alpha)E = \begin{bmatrix} 3+3\alpha & 1 & 1 \\ 1 & 3+3\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 4+4\alpha \end{bmatrix},$$

$$B_{1,1} = a_{1,1}I_3 - E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} a_{2,0} &= \tfrac{1}{2}\big[(1+\alpha)\left(\operatorname{tr}(EB_{1,1}) + \operatorname{tr}(EB_{1,0})\right) + (2+\alpha)\left(\operatorname{tr}B_{1,0} + 6\right) - \operatorname{tr}(AB_{1,0})\big] \\ &= 4(1+\alpha)(3+2\alpha), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{2,1} &= \tfrac{1}{2}\big((2+\alpha)\mathrm{tr}\, B_{1,1} + \mathrm{tr}\,(EB_{1,0}) + (3+\alpha)\mathrm{tr}\,(EB_{1,1}) - \mathrm{tr}\,(AB_{1,1})\big) \\ &= 8 + 6\alpha, \\ a_{2,2} &= \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\,(EB_{1,1}) = 1. \end{aligned}$$

junto con

$$\begin{aligned} B_{2,0} &= \big(a_{2,0} - 4 - 2\alpha\big) I_3 + \big(A - (1+\alpha)E - (3+\alpha)I_3\big) B_{1,0} - (1+\alpha)EB_{1,1} \\ &= (1+\alpha)\begin{bmatrix} 2\alpha & 1 & 2 \\ 1 & 2\alpha & 2 \\ 2 & 2 & 2+4\alpha \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$B_{2,1} = a_{2,1}I_3 + EB_{1,0} + (A - (3+\alpha)(E+I_3))B_{1,1} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 4+4\alpha \end{bmatrix},$$

$$B_{2,2} = a_{2,2}I_3 - EB_{1,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} a_{3,0} &= \tfrac{1}{3}\big[(1+\alpha)\big(\mathrm{tr}\, EB_{2,1} + \mathrm{tr}\, EB_{2,0} + \mathrm{tr}\, B_{2,0} + \mathrm{tr}\, B_{1,0}\big) - \mathrm{tr}\, AB_{2,0}\big] \\ &= 2\alpha(1+\alpha)(3+2\alpha), \\ a_{3,1} &= \tfrac{1}{3}\big(2(2+\alpha)\mathrm{tr}\,(EB_{2,2}) + (3+\alpha)\mathrm{tr}\,(EB_{2,1}) + \mathrm{tr}\,(EB_{2,0}) + \\ &\quad +(1+\alpha)\mathrm{tr}\, B_{2,1} + (1+\alpha)\mathrm{tr}\, B_{1,1} - \mathrm{tr}\,(AB_{2,1})\big) \\ &= 2\alpha(3+2\alpha), \\ a_{3,2} &= \tfrac{1}{3}\big((1+\alpha)\mathrm{tr}\, B_{2,2} + \mathrm{tr}\,(EB_{2,1}) + (5+\alpha)\mathrm{tr}\,(EB_{2,2}) - \mathrm{tr}\,(AB_{2,2})\big) \\ &= \alpha, \\ a_{3,3} &= \tfrac{1}{3}\mathrm{tr}\,(EB_{2,2}) = 0. \end{aligned}$$

Así

$$\hat{a}_1(s) = a_{1,0}L_0^{(\alpha)}(s) + a_{1,1}L_1^{(\alpha)}(s) = (8+5\alpha)L_0^{(\alpha)}(s) + 2L_1^{(\alpha)}(s),$$

$$\begin{aligned}
\hat{a}_2(s) = &\quad a_{2,0}L_0^{(\alpha)}(s) + a_{2,1}L_1^{(\alpha)}(s) + a_{2,2}L_2^{(\alpha)}(s) \\
= &\quad 4(1+\alpha)(3+2\alpha)L_0^{(\alpha)}(s) + (8+6\alpha)L_1^{(\alpha)}(s) + L_2^{(\alpha)}(s), \\
\hat{a}_3(s) = &\quad a_{3,0}L_0^{(\alpha)}(s) + a_{3,1}L_1^{(\alpha)}(s) + a_{3,2}L_2^{(\alpha)}(s) + a_{3,3}L_3^{(\alpha)}(s) \\
= &\quad 2\alpha(1+\alpha)(3+2\alpha)L_0^{(\alpha)}(s) + 2\alpha(3+2\alpha)L_1^{(\alpha)}(s) + \alpha L_2^{(\alpha)}(s).
\end{aligned}$$

$$\hat{B}_1(s) = L_0^{(\alpha)}(s)B_{1,0} + L_1^{(\alpha)}(s)B_{1,1},$$

$$\hat{B}_2(s) = L_0^{(\alpha)}(s)B_{2,0} + L_1^{(\alpha)}(s)B_{2,1} + L_2^{(\alpha)}(s)B_{2,2}.$$

El determinante $a(s)$ de $sE - A$ está dado por

$$\begin{aligned}
a(s) &= L_3^{(\alpha)}(0) + \hat{a}_1(s)L_2^{(\alpha)}(0) + \hat{a}_2(s)L_1^{(\alpha)}(0) + \hat{a}_3(s)L_0^{(\alpha)}(0) \\
&= -(1+\alpha)(2+\alpha)L_0^{(\alpha)}(s) - 2(2+\alpha)L_1^{(\alpha)}(s) - L_2^{(\alpha)}(s),
\end{aligned}$$

y la matriz adjunta $B(s)$

$$\begin{aligned}
B(s) &= L_2^{(\alpha)}(0)\hat{B}_0(s) + L_1^{(\alpha)}(0)\hat{B}_1(s) + L_0^{(\alpha)}(0)\hat{B}_2(s) \\
&= L_0^{(\alpha)}(s)[(1+\alpha)(2+\alpha)I_3 - (1+\alpha)B_{1,0} + B_{2,0}]+ \\
&\quad +L_1^{(\alpha)}(s)[-(1+\alpha)B_{1,1} + B_{2,1}] + L_2^{(\alpha)}(s)B_{2,2}.
\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}
B(s) = (1+\alpha)L_0^{(\alpha)}(s)\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & \alpha \end{bmatrix} + L_1^{(\alpha)}(s)\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 5+3\alpha \end{bmatrix}+ \\
+L_2^{(\alpha)}(s)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Finalmente, si consideramos la familia $\{T_n\}_{n\geqslant 0}$ de los polinomios de Chebyshev de primera especie,

$a_{1,0} = -\mathrm{tr}\, A = -3, \quad a_{1,1} = \mathrm{tr}\, E = 2.$

$$B_{1,0} = a_{1,0}I_3 + A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B_{1,1} = a_{1,1}I_3 - E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Por otra parte,

$$a_{2,0} = \tfrac{1}{2}\big(\tfrac{1}{4}\mathrm{tr}\,(EB_{1,1}) - \mathrm{tr}\,(AB_{1,0}) + \tfrac{3}{2}\big) = \tfrac{5}{4},$$

$$a_{2,1} = \tfrac{1}{2}\big(\mathrm{tr}\,(EB_{1,0}) - \mathrm{tr}\,(AB_{1,1})\big) = -4, \quad a_{2,2} = \tfrac{1}{2}\big(\mathrm{tr}\,(EB_{1,1})\big) = 1,$$

junto con

$$B_{2,0} = a_{2,0}I_3 + AB_{1,0} - \tfrac{1}{4}EB_{1,1} - \tfrac{1}{4}I_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_{2,1} = a_{2,1}I_3 - EB_{1,0} + AB_{1,1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$B_{2,2} = a_{2,2}I_3 - EB_{1,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Finalmente,

$$a_{3,0} = \tfrac{1}{3}\big(\tfrac{1}{4}\mathrm{tr}\,(EB_{2,1}) + \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\, B_{1,0} - \mathrm{tr}\,(AB_{2,0})\big) = -2,$$

$$a_{3,1} = \tfrac{1}{3}\big(\tfrac{1}{4}\mathrm{tr}\,(EB_{2,2}) + \mathrm{tr}\,(EB_{2,0}) + \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\, B_{1,1} - \mathrm{tr}\,(AB_{2,1})\big) = 1,$$

$$a_{3,2} = \tfrac{1}{3}\big(\mathrm{tr}\,(EB_{2,1}) - \mathrm{tr}\,(AB_{2,2})\big) = -1,$$

$$a_{3,3} = \tfrac{1}{3}\mathrm{tr}\,(EB_{2,2}) = 0.$$

De esta manera,

$\hat{a}_1(s) = a_{1,0}T_0(s) + a_{1,1}T_1(s) = -3T_0(s) + 2T_1(s),$

$\hat{a}_2(s) = a_{2,0}T_0(s) + a_{2,1}T_1(s) + a_{2,2}T_2(s) = \frac{5}{4}T_0(s) - 4T_1(s) + T_2(s),$

$$\begin{aligned} \hat{a}_3(s) &= a_{3,0}T_0(s) + a_{3,1}T_1(s) + a_{3,2}T_2(s) + a_{3,3}T_3(s) \\ &= -2T_0(s) + T_1(s) - T_2(s). \end{aligned}$$

$\hat{B}_1(s) = T_0(s)B_{1,0} + T_1(s)B_{1,1},$

$\hat{B}_2(s) = T_0(s)B_{2,0} + T_1(s)B_{2,1} + T_2(s)B_{2,2}.$

El determinante $a(s)$ de $sE - A$ está dado por

$$\begin{aligned} a(s) &= T_3(0) + \hat{a}_1(s)T_2(0) + \hat{a}_2(s)T_1(0) + \hat{a}_3(s)T_0(0) \\ &= -\tfrac{1}{2}T_0(s) - T_2(s), \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

y la matriz adjunta $B(s)$

$$\begin{aligned} B(s) &= T_2(0)\hat{B}_0(s) + T_1(0)\hat{B}_1(s) + T_0(0)\hat{B}_2(s) \\ &= T_0(s)(B_{2,0} - \tfrac{1}{2}I_3) + T_1(s)B_{2,1} + T_2(s)B_{2,2}. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} B(s) &= T_0(s)\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} + T_1(s)\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} + \\ & +T_2(s)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

3.2. Algoritmo para matrices polinomiales de orden arbitrario

La siguiente aportación en este capítulo la constituye la extensión del algoritmo de Leverrier-Faddeev para el cálculo simultáneo del determinante y la matriz adjunta de una matriz polinómica

$$M(s) = s^p A_p + s^{p-1} A_{p-1} + \cdots + sA_1 + A_0, \tag{3.2.1}$$

donde $A_i \in \mathbb{C}^{n\times n},\ i = 1,2,\ldots,p,\ p \geqslant 1$. La motivación para el análisis de esta extensión se basa en dos hechos. El primero está ligado al cálculo de la función de transferencia de un sistema lineal de orden mayor que 1 como, por ejemplo, el sistema de osciladores (2.1.6) (ver [26]), el cual involucra el cómputo de la inversa de una matriz polinómica de grado 2, es decir, para hallar esta función de transferencia es preciso encontrar la inversa de una matriz polinómica $s^2A_2 + sA_1 + A_0$ con $A_i \in \mathbb{C}^{n\times n},\ i = 0,1,2$. La segunda motivación reside en el estudio de los ceros de una matriz polinómica de la forma (3.2.1), lo que equivale a calcular los ceros del polinomio escalar $\det\left(s^p A_p + s^{p-1} A_{p-1} + \cdots + sA_1 + A_0\right)$.

Esta extensión está basada en los trabajos [35], [36], donde se desarrolla el algoritmo de Leverrier-Faddeev usando bases polinómicas. De esta forma presentamos un enfoque alternativo a los resultados expuestos en [19] y [73], usando bases de polinomios ortogonales clásicos y tomando como A_p en (3.2.1) cualquier matriz, no necesariamente la identidad.

Consideremos una matriz polinómica dada por (3.2.1). Procediendo de la misma forma que en el caso del haz lineal (para más detalles, ver [35]), reemplazamos en el algoritmo del capítulo anterior (tabla 2.3) la matriz A por $A(s) = -M(s) = -(s^p A_p + s^{p-1}A_{p-1} + \cdots + sA_1 + A_0)$ y obtenemos fórmulas análogas a las expresiones (3.1.1-3.1.4). Pero, en este caso, $\deg(\hat{a}_k(s)), \deg(\hat{B}_k(s)) \leqslant pk$. Así pues,

$$\begin{aligned} \hat{a}_k(s) &= \sum_{j=0}^{kp} a_{k,j} P_j(s), \quad a_{k,j} \in \mathbb{C}, \\ \hat{B}_k(s) &= \sum_{j=0}^{kp} P_j(s) B_{k,j}, \quad B_{k,j} \in \mathbb{C}^{n\times n}. \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Sustituyendo (3.2.2) en (3.1.3) obtenemos

$$\begin{aligned} k\sum_{j=0}^{kp} a_{k,j} P_j(s) &= \operatorname{tr}\Bigg((\beta_{n-k} - r_{n-k}) \sum_{j=0}^{(k-1)p} P_j(s) B_{k-1,j} + \\ &\quad + \sum_{m=0}^{p} \sum_{j=0}^{(k-1)p} s^m P_j(s) A_m B_{k-1,j} + \\ &\quad + (\gamma_{n-k+1} - s_{n-k+1}) \sum_{j=0}^{(k-2)p} P_j(s) B_{k-2,j} \Bigg). \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Necesitamos una expresión para $s^m P_j(s)$ en términos de la base $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$. La podemos obtener reiterando m-veces la relación de recurrencia a tres términos (1.2.2). De esta manera

$$x^m P_j(x) = \sum_{i=j-m}^{j+m} \alpha_i^{j,m} P_i(x), \tag{3.2.4}$$

donde $\alpha_i^{j,m} = \dfrac{\langle u, f_m P_j P_i \rangle}{\langle u, P_i^2 \rangle}$. Obsérvese que $\alpha_{j+m}^{j,m} = 1$.

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\alpha_i^{j,m} &= \frac{\langle u, f_{m-1}P_j f_1 P_i\rangle}{\langle u, P_i^2\rangle}\\
&= \frac{\langle u, f_{m-1}P_j\,(P_{i+1}+\beta_i P_i+\gamma_i P_{i-1})\rangle}{\langle u, P_i^2\rangle}\\
&= \frac{\langle u, f_{m-1}P_jP_{i+1}\rangle}{\langle u, P_i^2\rangle}+\beta_i\frac{\langle u, f_{m-1}P_jP_i\rangle}{\langle u, P_i^2\rangle}+\gamma_i\frac{\langle u, f_{m-1}P_jP_{i-1}\rangle}{\langle u, P_i^2\rangle}\\
&= \frac{\langle u, P_{i+1}^2\rangle}{\langle u, P_i^2\rangle}\alpha_{i+1}^{j,m-1}+\beta_i\alpha_i^{j,m-1}+\gamma_i\frac{\langle u, P_{i-1}^2\rangle}{\langle u, P_i^2\rangle}\alpha_{i-1}^{j,m-1},
\end{aligned}$$

donde $f_{m-1}(x) = x^{m-1}$.

Ahora, si usamos nuevamente la relación de recurrencia a tres términos (1.2.2), obtenemos $\gamma_i = \dfrac{\langle u, P_i^2\rangle}{\langle u, P_{i-1}^2\rangle}$ para $i = 1, 2 \ldots$. De esta forma los coeficientes $\alpha_i^{n,m}$ pueden obtenerse de manera recursiva mediante

$$\alpha_i^{j,m} = \gamma_{i+1}\alpha_{i+1}^{j,m-1} + \beta_i\alpha_i^{j,m-1} + \alpha_{i-1}^{j,m-1} \tag{3.2.5}$$

y $\alpha_{i-1}^{i,1} = \gamma_i$, $\alpha_i^{i,1} = \beta_i$, $\alpha_{i+1}^{i,1} = 1$, para $i = 1, 2, \ldots$

Sustituyendo (3.2.4) en (3.2.3) tenemos

$$\begin{aligned}
k\sum_{j=0}^{kp} a_{k,j}P_j(s) \quad = \quad & \sum_{j=p}^{kp} \alpha_j^{j-p,p} \operatorname{tr} A_p B_{k-1,j-p} P_j(s) + \\
& + \sum_{j=p-1}^{kp-1} \left(\sum_{i=0}^{1} \alpha_j^{j-p+1,p-i} \operatorname{tr} A_{p-i} B_{k-1,j-p+1} \right) P_j(s) + \\
& \vdots \\
& + \sum_{j=1}^{(k-1)p+1} \left(\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_j^{j-1,p-i} \operatorname{tr} A_{p-i} B_{k-1,j-1} \right) P_j(s) + \\
& + \sum_{j=0}^{(k-1)p} \left(\sum_{i=0}^{p} \alpha_j^{j,p-i} \operatorname{tr} A_{p-i} B_{k-1,j} + (\beta_{n-k} - r_{n-k}) \operatorname{tr} B_{k-1,j} \right) P_j(s) + \\
& + \sum_{j=0}^{(k-1)p-1} \left(\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_j^{j+1,p-i} \operatorname{tr} A_{p-i} B_{k-1,j+1} \right) P_j(s) + \\
& \vdots \\
& + \sum_{j=0}^{(k-2)p+1} \left(\sum_{i=0}^{1} \alpha_j^{j+p-1,p-i} \operatorname{tr} A_{p-i} B_{k-1,j+p-1} \right) P_j(s) + \\
& + \sum_{j=0}^{(k-2)p} \left(\alpha_j^{j+p,p} \operatorname{tr} A_p B_{k-1,j+p} + (\gamma_{n-k+1} - s_{n-k+1}) \operatorname{tr} B_{k-2,j} \right) P_j(s).
\end{aligned}$$

Identificando los coeficientes de P_j, $\quad j = 0, 1, \ldots, kp$, en ambos miembros de la expresión anterior obtenemos

Para $j = 0, 1, \ldots, p-1$

$$\begin{aligned} ka_{k,j} &= \delta_k \mathrm{tr}\, B_{k-1,j} + \eta_k \mathrm{tr}\, B_{k-2,j} + \sum_{l=p-j}^{p} \sum_{i=0}^{l} \alpha_j^{l-p+j,p-i} \mathrm{tr}\, A_{p-i} B_{k-1,l-p+j} + \\ &+ \sum_{l=0}^{p-1} \sum_{i=0}^{l} \alpha_0^{p-l+j,p-i} \mathrm{tr}\, A_{p-i} B_{k-1,p-l+j}, \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

Si $j = p, p+1, \ldots, (k-2)p$ (en el caso que $k > 2$), se tiene

$$\begin{aligned} ka_{k,j} &= \delta_k \mathrm{tr}\, B_{k-1,j} + \eta_k \mathrm{tr}\, B_{k-2,j} + \sum_{l=0}^{p} \sum_{i=0}^{l} \alpha_j^{j-p+l,p-i} \mathrm{tr}\, A_{p-i} B_{k-1,j-p+l} \\ &+ \sum_{l=0}^{p-1} \sum_{i=0}^{l} \alpha_{p-1}^{j+p-l,p-i} \mathrm{tr}\, A_{p-i} B_{k-1,j+p-l}, \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Para $j = (k-2)p+1, (k-2)p+2, \ldots, (k-1)p-1$ (si $k > 2$)

$$\begin{aligned} ka_{k,j} &= \delta_k \mathrm{tr}\, B_{k-1,j} + \sum_{l=0}^{p} \sum_{i=0}^{l} \alpha_j^{l-p+j,p-i} \mathrm{tr}\, A_{p-i} B_{k-1,l-p+j} + \\ &+ \sum_{l=j-(k-2)p}^{p-1} \sum_{i=0}^{l} \alpha_j^{p-l+j,p-i} \mathrm{tr}\, A_{p-i} B_{k-1,p-l+j}, \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Así como

$$ka_{k,(k-1)p} = \delta_k \mathrm{tr}\, B_{k-1,(k-1)p} + \sum_{l=0}^{p} \sum_{i=0}^{l} \alpha_{(k-1)p}^{(k-2)p+l,p-i} \mathrm{tr}\, A_{p-i} B_{k-1,(k-2)p+l}, \tag{3.2.9}$$

Finalmente, para $j = (k-1)p+1, (k-1)p+2, \ldots, kp$

$$ka_{k,j} = \sum_{l=0}^{kp-j} \sum_{i=0}^{l} \alpha_j^{l-p+j,p-i} \mathrm{tr}\, A_{p-i} B_{k-1,l-p+j}, \tag{3.2.10}$$

donde $\delta_k = \beta_{n-k} - r_{n-k}$, $\eta_k = \gamma_{n-k+1} - s_{n-k+1}$.

Análogamente, obtenemos expresiones de las matrices $B_{k,j}$ en términos de las matrices $B_{k-1,j}$

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{kp} P_j(s)B_{k,j} &= \sum_{j=0}^{kp} a_{k,j}P_j(s)I_n - \sum_{m=0}^{p}\sum_{j=0}^{(k-1)p} s^m P_j(s)A_m B_{k-1,j} \\ &\quad - \sum_{j=0}^{(k-1)p} \beta_{n-k}P_j(s)B_{k-1,j} - \sum_{j=0}^{(k-2)p} \gamma_{n-k+1}P_j(s)B_{k-2,j}.\end{aligned}$$

Reemplazando (3.2.4) en la ecuación anterior, obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{kp} P_j(s)B_{k,j} &= \sum_{j=0}^{kp} a_{k,j}P_j(s)I_n - \sum_{j=p}^{kp} P_j(s)\alpha_j^{j-p,p}A_pB_{k-1,j-p} \\ &\quad - \sum_{j=p-1}^{kp-1} P_j(s)\left(\sum_{i=0}^{1}\alpha_j^{j-p+1,p-i}A_{p-i}\right)B_{k-1,j-p+1} \\ &\quad \vdots \\ &\quad - \sum_{j=1}^{(k-1)p+1} P_j(s)\left(\sum_{i=0}^{p-1}\alpha_j^{j-1,p-i}A_{p-i}\right)B_{k-1,j-1} \\ &\quad - \sum_{j=0}^{(k-1)p} P_j(s)\left(\beta_{n-k}I_n + \sum_{i=0}^{p}\alpha_j^{j,p-i}A_{p-i}\right)B_{k-1,j} \\ &\quad - \sum_{j=0}^{(k-1)p-1} P_j(s)\left(\sum_{i=0}^{p-1}\alpha_j^{j+1,p-i}A_{p-i}\right)B_{k-1,j+1} \\ &\quad \vdots \\ &\quad - \sum_{j=0}^{(k-2)p+1} P_j(s)\left(\sum_{i=0}^{1}\alpha_j^{j+p-1,p-i}A_{p-i}\right)B_{k-1,j+p-1} \\ &\quad - \sum_{j=0}^{(k-2)p} P_j(s)\left(\alpha_j^{j+p,p}A_pB_{k-1,j+p} + \gamma_{n-k+1}B_{k-2,j}\right).\end{aligned}$$

Identificando los coeficientes de P_j, $\ j = 0, 1, \ldots, kp$, en ambos miembros de la expresión anterior obtenemos

Si $j = 0, 1, \ldots, p-1$ se tiene

$$\begin{aligned} B_{k,j} &= a_{k,j} I_n - \beta_{n-k} B_{k-1,j} - \gamma_{n-k+1} B_{k-2,j} - \sum_{l=p-j}^{p} \sum_{i=0}^{l} \alpha_j^{l-p+j,p-i} A_{p-i} B_{k-1,l-p+j} \\ &\quad - \sum_{l=0}^{p-1} \sum_{i=0}^{l} \alpha_j^{p-l+j,p-i} A_{p-i} B_{k-1,p-l+j} \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

Luego, para $j = p, p+1, \ldots, (k-2)p$, (en el caso $k > 2$), tenemos

$$\begin{aligned} B_{k,j} &= a_{k,j} I_n - \beta_{n-k} B_{k-1,j} - \gamma_{n-k+1} B_{k-2,j} \\ &\quad - \sum_{l=0}^{p} \sum_{i=0}^{l} \alpha_j^{j-p+l,p-i} A_{p-i} B_{k-1,j-p+l} - \sum_{l=0}^{p-1} \sum_{i=0}^{l} \alpha_{p-1}^{j+p-l,p-i} A_{p-i} B_{k-1,j+p-l}, \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

Si $j = (k-2)p + 1, (k-2)p + 2, \ldots, (k-1)p - 1$ (cuando $k > 2$), entonces

$$\begin{aligned} B_{k,j} &= a_{k,j} I_n - \beta_{n-k} B_{k-1,j} - \sum_{l=0}^{p} \sum_{i=0}^{l} \alpha_j^{l-p+j,p-i} A_{p-i} B_{k-1,l-p+j} \\ &\quad - \sum_{l=j-(k-2)p}^{p-1} \sum_{i=0}^{l} \alpha_j^{p-l+j,p-i} A_{p-i} B_{k-1,p-l+j}, \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

Además,

$$B_{k,(k-1)p} = a_{k,(k-1)p} I_n - \beta_{n-k} B_{k-1,(k-1)p} - \sum_{l=0}^{p} \sum_{i=0}^{l} \alpha_{(k-1)p}^{(k-2)p+l,p-i} A_{p-i} B_{k-1,(k-2)p+l}, \tag{3.2.14}$$

Finalmente, para $j = (k-1)p + 1, (k-1)p + 2, \ldots, kp$ tenemos

$$B_{k,j} = a_{k,j} I_n - \sum_{l=0}^{kp-j} \sum_{i=0}^{l} \alpha_j^{l-p+j,p-i} A_{p-i} B_{k-1,l-p+j}, \tag{3.2.15}$$

Finalmente, obtenemos el siguiente algoritmo

DATOS DE ENTRADA: $A_0, A_1, \ldots, A_p \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\{\beta_k\}_{k=0}^{n-1}$, $\{\gamma_k\}_{k=1}^{n}$, $\{r_k\}_{k=0}^{n-1}$, $\{s_k\}_{k=1}^{n}$.

Condiciones iniciales: $\hat{a}_0(s) = 1$, $\hat{B}_{-1}(s) = 0$, $\hat{B}_0(s) = I_n$ y

$B_{k,j} = 0$ si $k, j < 0$ ó $k < pj$.

FOR $k = 1, \ldots, n-1$

- De $\hat{B}_{k-2}(s)$ y $\hat{B}_{k-1}(s)$ y tomando en cuenta (3.2.6)-(3.2.10) obtenemos $\hat{a}_k(s)$.
- De (3.2.11)-(3.2.15) obtenemos $\hat{B}_k(s)$.

END (FOR)

De $\hat{B}_{n-2}(s)$ y $\hat{B}_{n-1}(s)$ teniendo en cuenta((3.2.6)-(3.2.10)) obtenemos $\hat{a}_n(s)$.

Tabla 3.2: Algoritmo para matrices de orden arbitrario.

3.2.1. Ejemplos

Ejemplo 1: Consideremos la matriz polinómica de grado 2

$$A(s) = \begin{bmatrix} s^2 - s & -s^2 + s - 1 & 0 \\ 0 & 3 & s^2 + 2s \\ s^2 - 1 & -s^2 & s^2 + s \end{bmatrix}, \tag{3.2.16}$$

de modo que, de acuerdo con (3.2.1),

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se puede deducir fácilmente que

$$\det A(s) = 3s^4 - s^3 - 4s^2 + 2s$$

y

$$\operatorname{Adj} A(s) = \begin{bmatrix} s^4+2s^3+3s^2+3s & s^4+s & -s^4-s^3+s^2-2s \\ s^4+2s^3-s^2-2s & s^4-s^2 & -s^4-s^3+2s^2 \\ s^2-1 & -s^2 & s^2+s \end{bmatrix}.$$

Aplicaremos el algoritmo de la sección anterior usando la base $\{T_n\}_{n=0}^{4}$, de los polinomios de Chebyshev de primera especie. Los parámetros correspondientes a la familia mencionada son $\beta_n = r_n = 0,\ n \geqslant 0$ y $\gamma_1 = \frac{1}{2},\ s_1 = 0,\ \ \gamma_n = \frac{1}{4},\ \ s_n = -\frac{1}{4},\ \ n \geqslant 2$.

De (3.2.6)-(3.2.10) y (3.2.11)-(3.2.15) obtenemos

Para $\mathbf{k} = \mathbf{1}$

$$a_{1,0} = 4, \quad a_{1,1} = 0, \quad a_{1,2} = 2.$$

$$B_{1,0} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}, \quad B_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para $\mathbf{k} = \mathbf{2}$

$$a_{2,0} = 4, \quad a_{2,1} = \frac{3}{2}, \quad a_{2,2} = 7, \quad a_{2,3} = 2, \quad a_{2,4} = 2.$$

$$B_{2,0} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 19 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 12 & 8 & 16 \end{bmatrix}, \quad B_{2,1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 18 & 4 & -11 \\ -2 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & -12 \end{bmatrix},$$

$$B_{2,2} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B_{2,3} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{2,4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para $\mathbf{k = 3}$

$$a_{3,0} = \frac{9}{8}, \quad a_{3,1} = \frac{5}{4}, \quad a_{3,2} = 0, \quad a_{3,3} = -1, \quad a_{3,4} = 3, \quad a_{3,5} = 0 = a_{3,6}.$$

De esta manera, de (3.1.5) se sigue que

$$\det A(s) = 3T_4(s) - T_3(s) - T_2(s) + \frac{5}{4}T_1(s) - \frac{7}{8}T_0(s),$$

y de (3.1.6) obtenemos

$$\begin{aligned} \text{Adj } A(s) \quad &= \quad T_4(s)\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + T_3(s)\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + T_2(s)\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \\ &+\tfrac{1}{4}T_1(s)\begin{bmatrix} 18 & 4 & -11 \\ -2 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & -12 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{8}T_0(s)\begin{bmatrix} 15 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 5 \\ 12 & 8 & 12 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2: Consideremos la matriz polinómica de grado 4

$$U(t) = \begin{bmatrix} 13t^4 - 32t^3 + 24t^2 - 6t & 21t^4 - 52t^3 + 39t^2 - 8t \\ \\ 21t^4 - 52t^3 + 39t^2 - 8t & 34t^4 - 84t^3 + 63t^2 - 14t \end{bmatrix}. \qquad (3.2.17)$$

Necesitamos calcular $\det(U(t))$ para encontrar los ceros de $U(t)$. De nuevo, de acuerdo con (3.2.1)

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = -\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 14 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 24 & 39 \\ 39 & 63 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = -\begin{bmatrix} 32 & 52 \\ 52 & 84 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 13 & 21 \\ 21 & 34 \end{bmatrix}.$$

Apliquemos el algoritmo de la sección anterior usando la base de los polinomios de Chebyshev de segunda especie, $\{U_n\}_{n=0}^{8}$. Los parámetros correspondientes son $\beta_n = r_n = 0,\ n \geqslant 0$ y $\gamma_n = \frac{1}{4},\ \ n \geqslant 1$ y $s_1 = 0,\ \ s_n = -\frac{1}{4},\ \ n \geqslant 2$.

De (3.2.6)-(3.2.10) y (3.2.11)-(3.2.15) se tiene

Para $\mathbf{k} = \mathbf{1}$

$$a_{1,0} = \frac{221}{8}, \quad a_{1,1} = -78, \quad a_{1,2} = \frac{489}{4}, \quad a_{1,3} = -116, \quad a_{1,4} = 47,$$

y

$$B_{1,0} = \tfrac{1}{8}\begin{bmatrix} 160 & -99 \\ -99 & 61 \end{bmatrix}, \quad B_{1,1} = \begin{bmatrix} -56 & 34 \\ 34 & -22 \end{bmatrix}, \quad B_{1,2} = \tfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 354 & -219 \\ -219 & 135 \end{bmatrix},$$

$$B_{1,3} = \begin{bmatrix} -84 & 52 \\ 52 & -32 \end{bmatrix}, \quad B_{1,4} = \begin{bmatrix} 34 & -21 \\ -21 & 13 \end{bmatrix}.$$

Para $\mathbf{k} = \mathbf{2}$

$$a_{2,0} = \frac{2265}{128}, \quad a_{2,1} = -\frac{209}{4}, \quad a_{2,2} = 93, \quad a_{2,3} = -\frac{225}{2}, \quad a_{2,4} = \frac{177}{2},$$

$$a_{2,5} = -20, \quad a_{2,6} = -\frac{69}{4}, \quad a_{2,7} = 4, \quad a_{2,8} = 1.$$

Así,

$$\begin{aligned} \hat{a}_2(t) &= \sum_{j=0}^{8} a_{2,j} U_j(t) \\ &= t^8 + 4t^7 - 19t^6 - 26t^5 + 111t^4 - 90t^3 + 20t^2 + \tfrac{1}{4}. \end{aligned}$$

Obsérvese que U es el polinomio matricial de Chebyshev de segunda especie y grado 4 introducido por A. J. Duran **[18]**. No es necesario calcular $\hat{a}_1(t)$ porque $U_1(0) = 0$. Entonces la expresión del determinante de $U(t)$ es

$$\begin{aligned} \det U(t) &= U_2(0) + U_0(0)\hat{a}_2(t) \\ &= t^8 + 4t^7 - 19t^6 - 26t^5 + 111t^4 - 90t^3 + 20t^2. \end{aligned}$$

Capítulo 4

Transformaciones espectrales para matrices hermitianas Toeplitz

4.1. Polinomios ortogonales en la circunferencia unidad

Sea $\mathcal{S}$ un funcional lineal

$$\mathcal{S} : \Lambda \mapsto \mathbb{C},$$

donde $\Lambda = span\{z^n \ : \ n \in \mathbb{Z}\}$ es el espacio lineal de los polinomios de Laurent con coeficientes complejos. A partir del funcional $\mathcal{S}$ podemos definir un funcional bilineal $\mathcal{L} : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \mapsto \mathbb{C}$ de la manera siguiente

$$\mathcal{L}(p(z), q(z)) := \mathcal{S}\left(p(z)\bar{q}(z^{-1})\right), \quad p, q \in \mathbb{P},$$

donde $\mathbb{P}$ es el espacio lineal de los polinomios con coeficientes complejos.

Obsérvese que

$$\mathcal{L}\left(zp(z), zq(z)\right) = \mathcal{L}\left(p(z), q(z)\right).$$

Definición 4.1.1 *Consideremos la matriz* $T = \left(t_{m,n}\right)_{m,n=0}^{\infty}$, *donde* $t_{m,n} := \mathcal{L}(z^m, z^n) = \mathcal{S}(z^{m-n}) = t_{n-m}$ *y sea* $T_n = \left(t_{k,j}\right)_{k,j=0}^{n}$ *la submatriz principal de* T *de dimensión* $(n+1)\times(n+1)$. *Entonces*

(*i*) *Diremos que* $\mathcal{L}$ *es un funcional bilineal hermitiano en* $\mathbb{P}$ *si* $t_{-n} = \overline{t_n}$ *para* $n \in \mathbb{N}$.

(*ii*) *Diremos que* $\mathcal{L}$ *es un funcional bilineal cuasi-definido en* $\mathbb{P}$ *si* $\det T_n \neq 0$ *para todo entero no negativo* n.

(*iii*) $\mathcal{L}$ *es un funcional bilineal definido positivo en* $\mathbb{P}$ *si* $\mathcal{L}(p,p) > 0$ *para todo* $p \in \mathbb{P} \setminus \{0\}$, *o, equivalentemente,* $\det T_n > 0$ *para todo entero no negativo* n.

En el caso en que $\mathcal{L}$ es definido positivo (ver **[25]**, **[34]**), existe una medida de probabilidad no trivial μ soportada en la circunferencia unidad tal que el funcional $\mathcal{L}$ admite una representación integral

$$\mathcal{L}(p,q) = \int_0^{2\pi} p(\mathrm{e}^{i\theta})\overline{q(\mathrm{e}^{i\theta})}d\mu(\theta).$$

Por convenio, el funcional bilineal $\mathcal{L}$ se dice definido positivo sobre la circunferencia unidad. La matriz semi-infinita T es una matriz de Toeplitz, esto es, las entradas de cada subdiagonal son constantes

$$T = \begin{bmatrix} t_0 & t_1 & \cdots & t_n & \cdots \\ t_{-1} & t_0 & \ddots & \vdots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_1 & \\ t_{-n} & \cdots & t_{-1} & t_0 & \ddots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Sea $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ una sucesión de polinomios con coeficientes complejos. Diremos que $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ es ortogonal con respecto a $\mathcal{L}$ si

- $\deg P_n = n$,
- $\mathcal{L}(P_m, P_n) = \mathbf{k}_n \delta_{m,n}$, con $\mathbf{k}_n \neq 0$,

donde $\delta_{m,n}$ es la delta de Kronecker definida por

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad m = n, \\ 0 & \text{si} \quad m \neq n. \end{cases}$$

Diremos, también, que la sucesión $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ es *ortonormal* con respecto a $\mathcal{L}$ si $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ es una sucesión ortogonal y $\mathbf{k}_n = 1$ para todo n. En este caso, también podemos decir indistintamente que $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ es ortonormal con respecto a μ.

Teorema 4.1.2 (i) *Si el funcional bilineal $\mathcal{L}$ es cuasi-definido, entonces existe una sucesión $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ de polinomios ortogonales mónicos asociada con el funcional $\mathcal{L}$ dada por*

$$P_0(z) = 1, \quad P_n(z) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{-n} \\ t_1 & t_0 & \cdots & t_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{n-1} & t_{n-2} & \cdots & t_{-1} \\ 1 & z & \cdots & z^n \end{bmatrix}, \quad n \geqslant 1, \tag{4.1.1}$$

donde $\Delta_{n-1} = \det T_{n-1}$.

(ii) *Si $\mathcal{L}$ es definido positivo, entonces existe una única sucesión $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ de polinomios ortonormales asociados con $\mathcal{L}$ dados por*

$$\varphi_n(z) = \kappa_n P_n(z), \tag{4.1.2}$$

con $P_n(z)$ dado en (4.1.1) y $\kappa_n = \mathbf{k}_n^{-\frac{1}{2}}$, donde $\mathbf{k}_n = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$.

Proposición 4.1.3 ([24], [68], [72]) *La sucesión $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ satisface dos tipos de relaciones de recurrencia*

(i) *Recurrencia ascendente:*

$$P_{n+1}(z) = zP_n(z) + P_{n+1}(0)P_n^*(z). \tag{4.1.3}$$

(ii) *Recurrencia descendente*

$$P_{n+1}(z) = \left(1 - |P_{n+1}(0)|^2\right) zP_n(z) + P_{n+1}(0)P_{n+1}^*(z), \tag{4.1.4}$$

donde $P_n^*(z) = z^n \overline{P_n(\bar{z}^{-1})}$

Las evaluaciones $P_{n+1}(0)$ de los polinomios ortogonales en $z = 0$ se denominan *coeficientes de reflexión*.

Una demostración de este resultado utilizando los generadores de espacios de estado de la matriz de Toeplitz T aparece en **[43]**. Sin embargo, utilizando el hecho de que el operador de multiplicación por z es unitario respecto al funcional bilineal $\mathcal{L}$ se puede dar una demostración alternativa.

Lema 4.1.4 *Si* $J_n \in \mathbb{C}^{n+1,n+1}$ *es una matriz con* 1 *en la anti-diagonal principal y las restantes entradas son nulas, entonces*

$$J_n \bar{T}_n J_n = T_n$$

Demostración: Es inmediata teniendo en cuenta que T_n es una matriz Toeplitz y Hermitiana.

■

Lema 4.1.5

$$\mathcal{L}\left(P_n^*, z^k\right) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$
$$\mathcal{L}\left(P_n^*, 1\right) = \mathbf{k}_n.$$

Demostración:

Si $P_n(z) = z^n + a_{n,1}z^{n-1} + \cdots + a_{n,n}$ entonces tenemos

$$[a_{n,n},\ \ldots,\ a_{n,1},\ 1]T_n = [0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \mathbf{k}_n].$$

Considerando conjugados

$$\begin{aligned} [\bar{a}_{n,n},\ \ldots,\ \bar{a}_{n,1},\ 1]\,\overline{T_n} &= [0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \mathbf{k}_n] \\ [1,\ \bar{a}_{n,1},\ \ldots,\ \bar{a}_{n,n}]\,J_n\overline{T_n} &= [0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \mathbf{k}_n]. \end{aligned}$$

Multiplicando a la derecha por J_n

$$[1,\ \bar{a}_{n,1},\ \ldots,\ \bar{a}_{n,n}]T_n = [\mathbf{k}_n,\ 0,\ \ldots,\ 0].$$

De aquí se sigue el enunciado.

■

Demostración (de Proposición 4.1.3):

(i) $P_{n+1}(z) - zP_n(z) \in \mathbb{P}_n$ y, además,

$$\mathcal{L}\left(P_{n+1}(z) - zP_n(z), z^k\right) = 0,$$

para $k = 1, 2, \ldots, n$.

Por tanto, $P_{n+1}(z) - zP_n(z) = \lambda_n P_n^*(z)$. Evaluando esta igualdad en $z = 0$ se tiene $\lambda_n = P_{n+1}(0)$, de donde se sigue el enunciado.

(ii) $P_{n+1}(z) - P_{n+1}(0)P_{n+1}^*(z) \in z\mathbb{P}_n$ y, además,

$$\mathcal{L}\left(P_{n+1}(z) - P_{n+1}(0)P_{n+1}^*(z), z^k\right) = 0,$$

para $k = 1, 2, \ldots, n$.

Por tanto,

$$P_{n+1}(z) - P_{n+1}(z)P_{n+1}^*(z) = \xi_n z P_n(z). \tag{4.1.5}$$

Identificando los coeficientes de z^{n+1} en ambos miembros de la igualdad anterior, se tiene $\xi_n = 1 - |P_{n+1}(0)|^2$, de donde se sigue el enunciado.

■

Corolario 4.1.6
$$\frac{\mathbf{k}_{n+1}}{\mathbf{k}_n} = 1 - |P_{n+1}(0)|^2\,, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Demostración: Es una consecuencia inmediata de multiplicar los dos miembros de la igualdad (4.1.5) por $zP_n(z)$ y aplicar el producto escalar.

■

De aquí se sigue que $|P_{n+1}(0)| \neq 1$. Recíprocamente, dada una sucesión $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ de números complejos tales que $|a_n| \neq 1$ existe un único funcional lineal hermitiano $\mathcal{S}$ tal que la correspondiente sucesión de polinomios ortogonales mónicos $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ satisface $P_{n+1}(0) = a_n$. Para ello, basta utilizar la recurrencia ascendente y construir la familia de polinomios mónicos $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ de manera que los momentos se determinan de forma recurrente a partir de

$$\mathcal{L}\,(zP_n(z), 1) = -P_{n+1}(0)\mathbf{k}_n,$$

esto es,
$$c_{-n-1} + a_{n,1}c_{-n} + \cdots + a_{n,n}c_{-1} = -P_{n+1}(0)\mathbf{k}_n,$$

para $n \in \mathbb{N}$ con $\mathbf{k}_0 = c_0$, donde $\mathcal{L}$ viene dado en términos de $\mathcal{S}$ tal y como se ha indicado al comienzo de esta sección.

Este resultado es una extensión al caso de los polinomios ortogonales sobre la circunferencia unidad del teorema de Favard (véase **[1]**).

Notemos que $\mathcal{L}$ es cuasi-definido si y sólo si $|P_n(0)| \neq 1$ para todo $n \geqslant 1$. $\mathcal{L}$ es definido positivo si y sólo si $|P_n(0)| < 1$ para todo $n \geqslant 1$.

Por otra parte, si $\mathcal{L}$ es definido positivo y $P_n(\alpha) = 0$, entonces $|\alpha| < 1$. Si $\mathcal{L}$ es cuasi-definido se tiene el siguiente resultado

Lema 4.1.7 ([22]) *Sean $\mathcal{L}$ un funcional bilineal cuasi-definido, $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a $\mathcal{L}$, y $\alpha \in \mathbb{C}$.*

(i) Si $P_n(\alpha) = 0$ y $|\alpha| \neq 1$, entonces $P_n^*(\alpha) \neq 0$.

(ii) Si $|\alpha| = 1$, entonces $P_n(\alpha) \neq 0$ para todo $n \geqslant 0$.

Demostración: (i) Si existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $P_n(\alpha) = P_n^*(\alpha) = 0$ con $|\alpha| \neq 1$, entonces aplicando reiteradamente la relación de recurrencia regresiva, tenemos $P_1(\alpha) = P_1^*(\alpha) = 0$. En consecuencia

$$P_1(z) = z - \alpha \quad \text{y} \quad P_1^*(z) = 1 - \alpha\bar{z},$$

y por tanto, se tiene que $P_1^*(\alpha) = 1 - |\alpha|^2 = 0$, contradiciendo así la hipótesis.

(ii) Sea $|\alpha| = 1$. Si $P_{n_0}(\alpha) = 0$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$ entonces $P_{n_0}^*(\alpha) = 0$. Usando reiteradamente la relación de recurrencia regresiva, obtenemos

$$P_1(z) = z - \alpha,$$

lo que implica $|P_1(0)| = 1$, lo que nos llevaría a una contradicción. Por tanto, $P_n(\alpha) \neq 0$ para todo $n \geqslant 1$.

■

El núcleo reproductor de grado n, $K_n(z,\zeta)$, respecto a la familia $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ se define mediante

$$K_n(z,\zeta) = \sum_{j=0}^{n} \frac{P_j(z)\overline{P_j(\zeta)}}{\mathbf{k}_j}. \tag{4.1.6}$$

Teorema 4.1.8 ([25], [34], [68], [72]) *Sean $\zeta \in \mathbb{C}$ y $p \in \mathbb{P}_n$. Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

(i) ***Propiedad reproductora****:*

$$\mathcal{L}(p(z), K_n(z,\zeta)) = p(\zeta). \tag{4.1.7}$$

(ii) ***Fórmula de Christoffel-Darboux****:*

$$K_n(z,\zeta) = \frac{P_{n+1}^*(z)\overline{P_{n+1}^*(\zeta)} - P_{n+1}(z)\overline{P_{n+1}(\zeta)}}{\mathbf{k}_{n+1}(1 - z\bar{\zeta})}. \tag{4.1.8}$$

Si el funcional bilineal $\mathcal{L}$ es definido positivo, la expresión (4.1.6) se transforma en

$$K_n(z,\zeta) = \sum_{j=0}^{n} \varphi_j(z)\overline{\varphi_j(\zeta)}. \tag{4.1.9}$$

En este caso, diremos que $K_n(z,\zeta)$ es el núcleo reproductor de grado n asociado a la familia $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$, y satisface

Proposición 4.1.9 *Si $K_n(z,\zeta) = \sum_{j=0}^{n} \varphi_j(z)\overline{\varphi_j(\zeta)}$ es el núcleo reproductor asociado a $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$, entonces*

$$K_n(z,0) = \sum_{j=0}^{n} \overline{\varphi_j(0)}\varphi_j(z) = \kappa_n \varphi_n^*(z), \tag{4.1.10}$$

y

$$K_n(0,0) = \sum_{j=0}^{n} |\varphi_j(0)|^2 = \kappa_n^2. \tag{4.1.11}$$

De la relación (4.1.11) se tiene

$$\kappa_n^2 - \kappa_{n-1}^2 = |\varphi_n(0)|^2 = \kappa_n^2 |P_n(0)|^2,$$

de donde se sigue que

$$\left(\frac{\kappa_{n-1}}{\kappa_n}\right)^2 = 1 - |P_n(0)|^2,\ n \in \mathbb{N}. \tag{4.1.12}$$

En el caso definido positivo, el núcleo reproductor de grado n está asociado con el siguiente problema extremal

$$\lambda_n(y) = \text{mín}\left\{ \int_0^{2\pi} |p(e^{i\theta})|^2 d\mu(\theta) : \deg p \leqslant n,\ p(y) = 1 \right\}.$$

De hecho,

$$\lambda_n(y) := \frac{1}{K_n(y,y)},$$

siendo $\dfrac{K_n(z,y)}{K_n(y,y)}$ el polinomio en el que se alcanza dicho mínimo.

Para cada $y \in \mathbb{C}$, $\lambda_n(y)$ es una función decreciente con respecto a n y, en consecuencia, podemos definir

$$\begin{aligned}\lambda_\infty(y) &= \lim_{n\to\infty} \lambda_n(y) \\ &= \inf\left\{\int_0^{2\pi} |p(\mathrm{e}^{i\theta})|^2 d\mu(\theta) : \ p \in \mathbb{P},\ p(y) = 1\right\} \geqslant 0.\end{aligned}$$

λ_∞ se denomina *Función de Christoffel asociada a μ*. Uno de los resultados principales de relativos a la función de Christoffel se muestra a continuación

Proposición 4.1.10 ([68], Thm. 2.2.1) *Sea μ una medida de probabilidad no trivial soportada en el círculo unidad.*

(*i*) *Si $|y| > 1$, entonces $\lambda_\infty(y) = 0$.*

(*ii*) *Si $|y| = 1$, entonces $\lambda_\infty(y) = \mu(\{y\})$.*

(*iii*) *Si $\sum_{n=0}^{\infty} |P_n(0)|^2 = +\infty$, entonces $\lambda_\infty(y) = 0$ para todo $y \in \mathbb{C}$ con $|y| < 1$.*

(*iv*) *Si $\sum_{n=0}^{\infty} |P_n(0)|^2 < +\infty$, entonces $\lambda_\infty(y) > 0$ para todo $y \in \mathbb{C}$ con $|y| < 1$.*

Por otra parte,

$$\lambda_\infty(0) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - |P_n(0)|^2\right).$$

4.2. Polinomios ortogonales en la circunferencia unidad y transformaciones espectrales

Sea $F : \Omega \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ una función compleja que es analítica en un entorno de $z = 0$, i. e.

$$F(z) = c_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k, \tag{4.2.1}$$

donde $c_0 \in \mathbb{R}$, $c_k \in \mathbb{C}$ para $k \in \mathbb{N}$ y $\limsup |c_k|^{\frac{1}{k}} < \infty$. A dicha función le podemos asociar un funcional lineal $\mathcal{S}_F$ definido en el espacio de los polinomios de Laurent Λ de manera que

$$\mathcal{S}_F\left(z^k\right) = c_{-k}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

donde asumimos que $c_{-k} = \bar{c}_k, \ k \in \mathbb{N}$. $\mathcal{S}_F$ define una aplicación bilineal $\langle \, , \, \rangle$ en el espacio $\mathbb{P}$ de los polinomios con coeficientes complejos de la siguiente forma

$$\langle p, q \rangle_{\mathcal{S}_F} = \mathcal{S}_F\left(p(z)\bar{q}(z^{-1})\right).$$

La aplicación bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{S}_F}$ satisface las propiedades (i) y (ii) de los productos escalares introducidos en la sección 1.4. Si, además, se satisface (iii) diremos que $\mathcal{S}_F$ es un funcional definido positivo. En este caso (véase **[21]**, **[24]**), existe una medida no trivial μ soportada en la circunferencia unidad de manera que

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu. \tag{4.2.2}$$

Definición 4.2.1 ([24], [63]) *Una función compleja F que admite una representación de la forma (4.2.2) donde μ es una medida positiva se denomina función de Carathéodory (C-función).*

Es inmediato probar que F es C-función si y sólo si F es analítica en $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$ y $\Re\mathfrak{e}\,(F(z)) > 0$ para $|z| < 1$.

De acuerdo con este resultado, F es una C-función si y sólo si $\dfrac{1}{F}$ es una C-función.

Definición 4.2.2 ([24], [68]) *Los polinomios mónicos Ω_n de grado n definidos mediante*

$$\Omega_n(z) = \frac{1}{c_0} \mathcal{S}_F\left(\tfrac{y+z}{y-z}\left(P_n(y) - P_n(z)\right)\right) \tag{4.2.3}$$

se denominan polinomios de segunda especie asociados al funcional $\mathcal{S}_F$.

Es un sencillo ejercicio comprobar que

$$\Omega_{n+1}(z) = z\Omega_n(z) - P_{n+1}(0)\Omega_n^*(z)$$

y, por tanto, $\{\Omega_n\}_{n\geqslant 0}$ es una sucesión de polinomios ortogonales mónicos respecto a un funcional lineal $\mathcal{S}_{\tilde{F}}$.

Proposición 4.2.3 ([64])

$$(i) \left\{ \begin{array}{rcl} F(z)P_n(z) + \Omega_n(z) & = & O\left(z^n\right), \\ F(z)P_n^*(z) - \Omega_n^*(z) & = & O\left(z^{n+1}\right). \end{array} \right.$$

$$(ii) \ \ \tilde{F}(z) = \frac{1}{F(z)}.$$

De esta forma, aparece un primer ejemplo de lo que denominaremos transformación espectral de funcionales lineales $\mathcal{S}_F$.

Definición 4.2.4 *Dada una función F analítica en un entorno de $z = 0$ diremos que $\tilde{F}$, función analítica en un entorno de $z = 0$, es una transformación espectral racional de F si existen polinomios A, B, C, D tales que*

$$\tilde{F}(z) = \frac{A(z)F(z) + B(z)}{C(z)F(z) + D(z)}, \tag{4.2.4}$$

con $A(z)D(z) - B(z)C(z) \neq 0$.

Si $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ es una sucesión de polinomios ortogonales mónicos respecto a $\mathcal{S}_F$, parece natural analizar las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una sucesión de polinomios ortogonales mónicos respecto a $\mathcal{S}_{\tilde{F}}$. Este es un problema abierto. Algunas situaciones particulares han sido estudiadas en **[63]**.

Mostraremos a continuación algunos ejemplos de transformaciones racionales.

4.2.1. Transformación de Christoffel

Considérese un funcional lineal υ tal que la forma bilineal asociada satisface

$$\langle p, q\rangle_{\upsilon} = \langle (z-a)p, (z-a)q\rangle_{\mathcal{S}_F}, \quad a \in \mathbb{C}. \tag{4.2.5}$$

$\upsilon = C_a\left(\mathcal{S}_F\right)$ se denomina transformada canónica de Christoffel de $\mathcal{S}_F$.

Veamos que $\tilde{F}(z) = v_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} v_k z^k$, donde $v_{-k} = \upsilon\left(z^k\right)$ es una transformación racional de F.

$$\begin{aligned} v_{-k} &= \upsilon\left(z^k\right) = \langle z^k, 1\rangle_{\upsilon} \\ &= \langle (z-a)z^k, z-a\rangle_{\mathcal{S}_F} = \langle z^{k+1} - az^k, z-a\rangle_{\mathcal{S}_F} \\ &= c_{-k} - ac_{-(k-1)} - \bar{a}c_{-(k+1)} + |a|^2 c_{-k} \\ &= \left(1+|a|^2\right)c_{-k} - ac_{-(k-1)} - \bar{a}c_{-(k+1)}. \end{aligned}$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} \tilde{F}(z) &= v_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} v_k z^k \\ &= \left(1+|a|^2\right)c_0 - ac_1 - \bar{a}c_{-1} - 2\bar{a}\sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1}z^k - 2a\sum_{k=1}^{\infty} c_{k+1}z^k + \\ &\quad +2\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+|a|^2\right)c_k z^k \\ &= \left(1+|a|^2\right)F(z) - \bar{a}\left(c_{-1} + 2\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+1}\right) - a\left(c_1 + 2\sum_{k=2}^{\infty} c_k z^{k-1}\right), \end{aligned}$$

y, como consecuencia

$$\begin{aligned} \tilde{F}(z) &= \left(1+|a|^2\right)F(z) - \bar{a}\Big(c_{-1} + z\left(F(z)+c_0\right)\Big) - a\left(c_1 + \frac{1}{z}\left(F(z) - c_0 - 2c_1 z\right)\right) \\ &= \left(1+|a|^2 - \bar{a}z - \frac{a}{z}\right)F(z) + a\left(c_1 + \frac{c_0}{z}\right) - \bar{a}\left(c_{-1} + c_0 z\right). \end{aligned}$$

Proposición 4.2.5
$$\tilde{F}(z) = \frac{A(z)F(z) + B(z)}{D(z)},$$
donde
$$\begin{aligned} A(z) &= -\bar{a}z^2 + \left(1 + |a|^2\right) z - a, \\ B(z) &= -\bar{a}c_0 z^2 + (ac_1 - \bar{a}c_{-1})\, z + ac_0, \\ D(z) &= z. \end{aligned}$$

En el caso definido positivo, iteraciones de estas transformaciones de Christoffel han sido estudiadas en [27], [40] y [49].

4.2.2. Transformación de Uvarov

Considérese un funcional lineal υ tal que la forma bilineal asociada satisface

$$\langle p, q\rangle_\upsilon = \langle p, q\rangle_{\mathcal{S}_F} + mp(a)\bar{q}(a^{-1}) + \overline{m}p(\bar{a}^{-1})\overline{q(a)}, \tag{4.2.6}$$

con $|a| \neq 1$ y $m \in \mathbb{C}$. $\upsilon = U_{a,m}(\mathcal{S}_F)$ se denomina transformada canónica de Uvarov de $\mathcal{S}_F$.

Veamos que $\tilde{F}(z) = v_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} v_k z^k$, donde $v_{-k} = \upsilon\left(z^k\right)$ es una transformación racional de F.
$$v_{-k} = \langle z^k, 1\rangle_\upsilon = \langle z^k, 1\rangle_{\mathcal{S}_F} + ma^k + \overline{m}\bar{a}^{-k}.$$

Así pues

$$\begin{aligned} \tilde{F}(z) &= c_0 + m + \overline{m} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(c_k + \overline{m}\bar{a}^k + ma^{-k}\right) z^k \\ &= F(z) + \overline{m}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\bar{a}^k z^k\right) + m\left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} a^{-k} z^k\right) \\ &= F(z) + \overline{m}\frac{1 + \bar{a}z}{1 - \bar{a}z} + m\frac{a + z}{a - z} \\ &= F(z) + \frac{a\,(m + \overline{m}) + \left(1 - |a|^2\right)(m - \overline{m})\, z - \bar{a}\,(m + \overline{m})\, z^2}{(z - a)(\bar{a}z - 1)}. \end{aligned}$$

Proposición 4.2.6

$$\tilde{F}(z) = \frac{A(z)F(z) + B(z)}{D(z)},$$

donde

$$\begin{aligned} A(z) &= D(z) = (z-a)(\bar{a}z-1), \\ B(z) &= (a-\bar{a}z^2)(m+\overline{m}) + \left(1-|a|^2\right)(m-\overline{m})\,z. \end{aligned}$$

Propiedades asintóticas de polinomios ortogonales asociados a algunos casos particulares de transformadas de Uvarov han sido analizadas en **[53]**.

4.2.3. Transformación de Geronimus

Considérese un funcional lineal υ tal que la forma bilineal asociada satisface

$$\langle (z-a)p, (z-a)q \rangle_{\upsilon} = \langle p, q \rangle_{\mathcal{S}_F}, \quad a \neq 0. \tag{4.2.7}$$

$\upsilon = G_a(\mathcal{S}_F)$ se denomina transformada canónica de Geronimus de $\mathcal{S}_F$. Entonces

$$\begin{aligned} c_k &= \langle 1, z^k \rangle_{\mathcal{S}_F} = \langle z-a, z^k(z-a) \rangle_{\upsilon} \\ &= v_k\left(1+|a|^2\right) - a v_{k+1} - \bar{a} v_{k-1}, \quad k \geqslant 0. \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

Haciendo $s_k = \dfrac{c_k}{\bar{a}^k}$, $t_k = \dfrac{v_k}{\bar{a}^k}$, la anterior expresión resulta ser

$$s_k = \left(1+|a|^2\right) t_k - |a|^2 t_{k+1} - t_{k-1}, \ \ k \geqslant 0,$$

de modo que

$$s_k = t_k - t_{k-1} - |a|^2\left(t_{k+1} - t_k\right), \ \ k \geqslant 0.$$

Si hacemos $q_k = t_k - t_{k-1}$, $k \geqslant 0$,

$$s_k = q_k - |a|^2 q_{k-1}, \quad k \geqslant 0,$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned}
q_k &= \frac{q_0 - s_0 - |a|^2 s_1 - \cdots - |a|^{2k-2} s_{k-1}}{|a|^{2k}} \\
&= \frac{q_0 - c_0 - a c_1 - \cdots - a^{k-1} c_{k-1}}{|a|^{2k}}, \quad k \geqslant 1, \qquad (4.2.9)
\end{aligned}$$

así como

$$\begin{aligned}
q_0 &= t_0 - t_{-1} = v_0 - \bar{a}\bar{v}_1 \\
q_1 &= \frac{q_0 - c_0}{|a|^2} = t_1 - t_0 = \frac{v_1}{\bar{a}} - v_0.
\end{aligned}$$

q_0 aparece como un parámetro libre. De esta forma

$$\begin{aligned}
v_0 - a v_1 &= \bar{q}_0 \\
v_0 - \frac{v_{-1}}{\bar{a}} &= \frac{c_0 - q_0}{|a|^2}
\end{aligned} \qquad (4.2.10)$$

y, por tanto,

$$\left(1 - |a|^2\right) v_0 = 2\mathfrak{Re}\,(q_0) - c_0,$$

esto es, $v_0 \in \mathbb{R}$. Si asumimos $|a| \neq 1$, v_0 queda unívocamente determinado y de (4.2.10) deducimos v_1. Reiterando (4.2.9) se sigue que

$$\frac{v_k}{\bar{a}^k} = v_0 + \sum_{j=1}^{k} q_j, \quad k \geqslant 2.$$

Por tanto, disponemos de un grado de libertad que es la elección de q_0. Por otra parte, multiplicando en (4.2.8) por z^k, $k \geqslant 1$, se tiene

$$\begin{aligned}
F(z) &= v_0\left(1+|a|^2\right) - av_1 - \bar{a}\bar{v}_1 + 2\left(1+|a|^2\right)\sum_{k=1}^{\infty} v_k z^k - 2a\sum_{k=1}^{\infty} v_{k+1}z^k - 2\bar{a}\sum_{k=1}^{\infty} v_{k-1}z^k \\
&= \left(1+|a|^2\right)\tilde{F}(z) - a\left(v_1 + \frac{2}{z}\sum_{k=2}^{\infty} v_k z^k\right) - \bar{a}\left(\bar{v}_1 + 2z\sum_{k=0}^{\infty} v_k z^k\right) \\
&= \left(1+|a|^2\right)\tilde{F}(z) - a\left(v_1 + \frac{1}{z}\left(\tilde{F}(z) - v_0 - 2v_1 z\right)\right) - \bar{a}\left(\bar{v}_1 + z\left(v_0 + \tilde{F}(z)\right)\right) \\
&= \left(1+|a|^2\right)\tilde{F}(z) + a\left(v_1 + \frac{v_0}{z}\right) - \frac{a}{z}\tilde{F}(z) - \bar{a}\left(\bar{v}_1 + v_0 z\right) - \bar{a}z\tilde{F}(z) \\
&= \left(1+|a|^2 - \frac{a}{z} - \bar{a}z\right)\tilde{F}(z) + av_1 - \bar{a}\bar{v}_1 + v_0\left(\frac{a}{z} - \bar{a}z\right) \\
&= \left(1+|a|^2 - \frac{a}{z} - \bar{a}z\right)\tilde{F}(z) + v_0 - \bar{q}_0 - \bar{v}_0 + q_0 + v_0\left(\frac{a}{z} - \bar{a}z\right).
\end{aligned} \tag{4.2.11}$$

Así pues,

Proposición 4.2.7

$$\tilde{F}(z) = \frac{A(z)F(z) + B(z)}{D(z)},$$

donde

$$\begin{aligned}
A(z) &= z, \\
B(z) &= \bar{a}v_0 z^2 - 2i\mathfrak{Im}\,(q_0)\,z - av_0, \\
D(z) &= -\bar{a}z^2 + \left(1+|a|^2\right)z - a.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(z) &= \frac{A(z)}{D(z)}F(z) + \frac{B(z)}{D(z)} \\
&= \frac{A(z)}{D(z)}F(z) + \frac{\bar{a}v_0 z^2 - 2i\mathfrak{Im}\,(q_0)\,z - av_0}{-\bar{a}z^2 + (1+|a|^2)\,z - a} \\
&= \frac{A(z)}{D(z)}F(z) + \frac{\left(\bar{a}z^2 - a\right)(q_0 + \bar{q}_0 - c_0) - \left(1-|a|^2\right)(q_0 - \bar{q}_0)\,z}{(1-|a|^2)\,(-\bar{a}z^2 + (1+|a|^2)\,z - a)} \\
&= \frac{A(z)}{D(z)}F(z) + \frac{\left(\bar{a}z^2 - a\right)\left(l_0 + \bar{l}_0\right) + \left(1-|a|^2\right)\left(l_0 - \bar{l}_0\right)z}{-\bar{a}z^2 + (1+|a|^2)\,z - a}
\end{aligned}$$

con $l_0 = \dfrac{\bar{q}_0 - \frac{c_0}{2}}{1 - |a|^2}$, de modo que

$$\begin{aligned}\tilde{F}(z) &= \frac{A(z)}{D(z)}F(z) + \frac{\left(\bar{a}z^2 - a\right)\left(l_0 + \bar{l}_0\right) + \left(1 - |a|^2\right)\left(l_0 - \bar{l}_0\right)z}{(\bar{a}z - 1)(z - a)} \\ &= \frac{A(z)}{D(z)}F(z) + m\frac{a + z}{a - z} + \overline{m}\frac{1 + \bar{a}z}{1 - \bar{a}z},\end{aligned}$$

donde $m = \bar{l}_0 = \dfrac{q_0 - \frac{c_0}{2}}{1 - |a|^2}$.

En el caso definido positivo, un ejemplo de transformación de Geronimus con $m = 0$ ha sido analizado en **[28]**, así como en **[6]**, **[56]**, **[57]** en el marco de problemas inversos para polinomios ortogonales que se expresan como combinaciones lineales, a su vez, de polinomios ortogonales.

Proposición 4.2.8

(i) $G_a \circ C_a = U_{a,\widetilde{m}}$.

(ii) $C_a \circ G_a = Id$.

Demostración:

(i) Sea G la función analítica asociada al funcional C_a. Entonces, de acuerdo con la Proposición 4.2.5

$$G(z) = \frac{A(z)}{z}F(z) - \left(\bar{a}c_0 z - (ac_1 - \bar{a}\bar{c}_1) - ac_0\frac{1}{z}\right)$$

donde $A(z) = -(\bar{a}z - 1)(z - a)$.

Si H es la función analítica asociada al funcional $G_a \circ C_a$ de acuerdo con la

Proposición 4.2.7,

$$\begin{aligned}
H(z) &= \frac{z}{A(z)}G(z) + m\frac{a+z}{a-z} + \overline{m}\frac{1+\bar{a}z}{1-\bar{a}z} \\
&= F(z) + \frac{\bar{a}c_0z^2 - (ac_1 - \bar{a}\bar{c}_1)z - ac_0}{(\bar{a}z-1)(z-a)} + m\frac{a+z}{a-z} + \overline{m}\frac{1+\bar{a}z}{1-\bar{a}z} \\
&= F(z) + \widetilde{m}\frac{a+z}{a-z} + \overline{\widetilde{m}}\frac{1+\bar{a}z}{1-\bar{a}z}
\end{aligned}$$

donde

$$\widetilde{m} = m - \frac{1}{2}\left(c_0 + \frac{ac_1 - \bar{a}\bar{c}_1}{1-|a|^2}\right).$$

(ii) Sea $\tilde{F}$ la función analítica asociada al funcional $\upsilon = G_a$. Entonces, de acuerdo con la Proposición 4.2.7

$$\tilde{F}(z) = \frac{z}{A(z)}F(z) + m\frac{a+z}{a-z} + \overline{m}\frac{1+\bar{a}z}{1-\bar{a}z},$$

donde $A(z) = -(\bar{a}z-1)(z-a)$.

Si K es la función analítica asociada al funcional $C_a \circ G_a$ de acuerdo con la Proposición 4.2.5 se tiene

$$\begin{aligned}
K(z) &= \frac{A(z)}{z}\tilde{F}(z) - \left(\bar{a}v_0z + (av_1 - \bar{a}\bar{v}_1) - \frac{av_0}{z}\right) \\
&= F(z) + \frac{A(z)}{z}\left(m\frac{a+z}{a-z} + \overline{m}\frac{1+\bar{a}z}{1-\bar{a}z}\right) - \frac{A(z)}{z}\left(m\frac{a+z}{a-z} + \overline{m}\frac{1+\bar{a}z}{1-\bar{a}z}\right) \\
&= F(z).
\end{aligned}$$

■

Las transformaciones de Christoffel, Uvarov y Geronimus se denominan transformaciones espectrales lineales canónicas. En un caso definido positivo, corresponden a transformaciones de las medidas dadas por

$$\begin{aligned} d\tilde{\mu} &= \left|e^{i\theta} - a\right|^2 d\mu, \\ d\tilde{\mu} &= d\mu + m\delta_a + \overline{m}\delta_{\bar{a}^{-1}}, \quad |a| \neq 1, \\ d\tilde{\mu} &= \frac{d\mu}{|e^{i\theta} - a|^2} + m\delta_a + \overline{m}\delta_{\bar{a}^{-1}}, \quad |a| \neq 1, \end{aligned}$$

respectivamente.

Ejemplos de transformaciones espectrales racionales propias aparecen en la literatura cuando se perturban los parámetros de reflexión mediante desplazamientos en los subíndices (véase **[63]**).

4.3. Matrices de Hessenberg asociadas a polinomios ortogonales

Teniendo en cuenta que $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ es una base ortogonal en $\mathbb{P}$, y combinando la fórmula de Christoffel-Darboux y las relaciones de recurrencia (4.1.3) y (4.1.4) se obtiene

$$zP_n(z) = P_{n+1}(z) - \sum_{j=0}^{n} \frac{\mathbf{k}_n}{\mathbf{k}_j} P_{n+1}(0)\overline{P_j(0)}P_j(z). \tag{4.3.1}$$

En notación matricial la relación anterior se traduce en

$$zP(z) = H_P P(z)$$

donde $P(z) = \left[P_0(z), P_1(z), \ldots\right]^t$ y H_P es una matriz de Hessenberg inferior

$$H_P = \begin{bmatrix} h_{0,0} & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ h_{1,0} & h_{1,1} & 1 & 0 & \cdots \\ h_{2,0} & h_{2,1} & h_{2,2} & 1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{4.3.2}$$

cuyas entradas son

$$h_{k,j} = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad j = k+1, \\ \frac{\mathbf{k}_k}{\mathbf{k}_j} P_{k+1}(0)\overline{P_j(0)}, & \text{si} \quad j \leqslant k, \\ 0, & \text{si} \quad j > k+1. \end{cases}$$

En lo sucesivo, diremos que H_P es la *matriz de Hessenberg* asociada a la familia de polinomios ortogonales mónicos $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$.

En el caso definido positivo, si $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ es la base de $\mathbb{P}$ formada por los polinomios ortonormales, la relación (4.3.1) se convierte en

$$z\varphi_n(z) = \frac{\kappa_n}{\kappa_{n+1}}\varphi_{n+1}(z) - \frac{P_{n+1}(0)}{\kappa_n}\sum_{j=0}^{n}\kappa_j\overline{P_j(0)}\varphi_j(z), \; n \geqslant 0. \tag{4.3.3}$$

Si escribimos la relación anterior en forma matricial obtenemos

$$z\varphi(z) = H_\varphi \varphi(z),$$

donde $\varphi(z) = [\varphi_0(z), \;\varphi_1(z), \;\ldots]^t$ y H_φ es una matriz de Hessenberg inferior con entradas

$$h_{n,j} = \begin{cases} -\frac{\kappa_j}{\kappa_n} P_{n+1}(0)\overline{P_j(0)}, & \text{si} \quad 0 \leqslant j \leqslant n, \\ \frac{\kappa_n}{\kappa_{n+1}}, & \text{si} \quad j = n+1, \\ 0, & \text{si} \quad j > n+1. \end{cases}$$

Nota 4.3.1 (i) *Dado un funcional bilineal $\mathcal{F}$ en $\mathbb{P}$, sea $P(z) := [p_0(z), p_1(z), \ldots]^t$ con $p_k(z) \in \mathbb{P}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ La expresión $\mathcal{F}(P, P^t)$ denota una matriz semi-infinita cuyas entradas están dadas por*

$$\left(\mathcal{F}(P, P^t)\right)_{k,j} = \mathcal{F}(p_k, p_j), \;\; k, j = 0, 1, 2, \ldots$$

(ii) *Sea A una matriz con entradas complejas. En lo sucesivo, las expresiones $A_{(n)}$ y $(A)_{(n)}$ denotan la n-ésima fila de la matriz A. Análogamente, $A^{(n)}$ y*

$(A)^{(n)}$ *denotan la n-ésima columna de A.*

Proposición 4.3.2 *Sea $\mathcal{L}$ un funcional bilineal definido positivo sobre la circunferencia unidad. Si $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ es la sucesión de polinomios ortonormales correspondiente a $\mathcal{L}$ y H_φ es la matriz Hessenberg inferior tal que*

$$z\varphi(z) = H_\varphi \varphi(z),$$

donde $\varphi(z) = [\varphi_0(z),\ \varphi_1(z),\ \ldots]^t$, entonces

(i) $H_\varphi H_\varphi^* = I$,

(ii) $H_\varphi^* H_\varphi = I - \lambda_\infty(0)\varphi(0)\varphi(0)^*$,

donde I es la matriz unidad semi-infinita.

Demostración: (i) El funcional bilineal $\mathcal{L}$ satisface

$$\mathcal{L}(zp, zq) = \mathcal{L}(p, q), \quad \text{para todo} \quad p, q \in \mathbb{P}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} H_\varphi H_\varphi^* &= H_\varphi \mathcal{L}(\varphi, \varphi^t) H_\varphi^* \\ &= \mathcal{L}(H_\varphi \varphi, \varphi^t H_\varphi^t) \\ &= \mathcal{L}(z\varphi, z\varphi^t) = \mathcal{L}(\varphi, \varphi^t) = I. \end{aligned}$$

(ii) Para $n \geqslant 0$, tenemos

$$\left(H_\varphi^*\right)_{(n)} \left(H_\varphi\right)^{(n)} = \left(\frac{\kappa_{n-1}}{\kappa_n}\right)^2 + |P_n(0)|^2 |P_{n+1}(0)|^2 + \kappa_n^2 |P_n(0)|^2 \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{|P_{j+1}(0)|^2}{\kappa_j^2}.$$

Usando, en forma reiterada, la relación (4.1.12), se deduce

$$
\begin{aligned}
\left(H_\varphi^*\right)_{(n)}\left(H_\varphi\right)^{(n)} &= 1-\left(\tfrac{\kappa_n}{\kappa_{n+1}}\right)^2|P_n(0)|^2\left(1-|P_{n+1}(0)|^2\right)+\kappa_n^2|P_n(0)|^2\sum_{j=n+1}^{\infty}\tfrac{|P_{j+1}(0)|^2}{\kappa_j^2}\\
&= 1-\left(\tfrac{\kappa_n}{\kappa_{n+2}}\right)^2|P_n(0)|^2\left(1-|P_{n+2}(0)|^2\right)+\kappa_n^2|P_n(0)|^2\sum_{j=n+2}^{\infty}\tfrac{|P_{j+1}(0)|^2}{\kappa_j^2}\\
&\ \ \vdots\\
&= 1-\kappa_n^2|P_n(0)|^2\lim_{j\to\infty}\frac{1}{\kappa_j^2}=1-|\varphi_n(0)|^2\lim_{j\to\infty}\frac{1}{K_j(0,0)}\\
&= 1-|\varphi_n(0)|^2\lambda_\infty(0).
\end{aligned}
$$

Por otra parte, para $0\leqslant j<n$,

$$
\left(H_\varphi^*\right)_{(n)}\left(H_\varphi\right)^{(j)}=\varphi_n(0)\overline{\varphi_j(0)}\left(-\frac{1}{\kappa_n^2}+\sum_{l=n}^{\infty}\tfrac{|P_{l+1}(0)|^2}{\kappa_l^2}\right).
$$

Usando la relación (4.1.12),

$$
\begin{aligned}
\left(H_\varphi^*\right)_{(n)}\left(H_\varphi\right)^{(j)} &= \varphi_n(0)\overline{\varphi_j(0)}\left(-\tfrac{1}{\kappa_{n+1}^2}+\sum_{l=n+1}^{\infty}\tfrac{|P_{l+1}(0)|^2}{\kappa_l^2}\right)\\
&= \varphi_n(0)\overline{\varphi_j(0)}\left(-\tfrac{1}{\kappa_{n+2}^2}+\sum_{l=n+2}^{\infty}\tfrac{|P_{l+1}(0)|^2}{\kappa_l^2}\right).
\end{aligned}
$$

Finalmente, si aplicamos reiteradamente (4.1.12), se obtiene

$$
\begin{aligned}
\left(H_\varphi^*\right)_{(n)}\left(H_\varphi\right)^{(j)} &= \varphi_n(0)\overline{\varphi_j(0)}\lim_{l\to\infty}\frac{1}{\kappa_l^2}=\varphi_n(0)\overline{\varphi_j(0)}\lim_{l\to\infty}\frac{1}{K_l(0,0)}\\
&= \varphi_n(0)\overline{\varphi_j(0)}\lambda_\infty(0).
\end{aligned}
$$

■

Corolario 4.3.3 *La matriz H_φ es unitaria si y sólo si* $\sum_{n=0}^{\infty}|P_n(0)|^2=+\infty$*, lo que se* *traduce en términos de la medida μ en que $\log \mu' \notin L^1\left(\frac{d\theta}{2\pi}\right)$, esto es, la medida μ no pertenece a la clase de Szegő (ver* [68]*).*

4.4. Funcionales lineales cuasi-definidos y la factorización LU

Consideremos un funcional bilineal hermitiano cuasi-definido $\mathcal{L}$. Sean $\alpha \in \mathbb{C}$ y el funcional bilineal $\mathcal{L}_1$ definido mediante

$$\mathcal{L}_1(p,q) := \mathcal{L}((z-\alpha)p,q), \quad p,q \in \mathbb{P}. \tag{4.4.1}$$

El funcional $\mathcal{L}_1$ no es hermitiano y, por tanto, no hay garantías de la existencia de una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a $\mathcal{L}_1$. Sin embargo podemos analizar la existencia de sucesiones polinómicas que sean ortogonales a la derecha o izquierda con respecto a $\mathcal{L}_1$.

Definición 4.4.1 *Sean $\mathcal{F}$ un funcional bilineal en $\mathbb{P}$ y $\{L_n\}_{n\geqslant 0}$, $\{R_n\}_{n\geqslant 0}$ sucesiones de polinomios mónicos. Entonces*

(i) Diremos que $\{L_n\}_{n\geqslant 0}$ es una sucesión de polinomios ortogonales por la izquierda con respecto a $\mathcal{F}$ si, para todo $n \geqslant 0$, se cumple

- $\deg L_n = n$,
- $\mathcal{F}\left(L_n(z), z^k\right) = 0, \ \ 0 \leqslant k \leqslant n-1$,
- $\mathcal{F}\left(L_n(z), z^n\right) \neq 0$.

(ii) Diremos que $\{R_n\}_{n\geqslant 0}$ es una sucesión de polinomios ortogonales por la izquierda con respecto a $\mathcal{F}$ si, para todo $n \geqslant 0$, se tiene

- $\deg R_n = n$,
- $\mathcal{F}\left(z^k, R_n(z)\right) = 0, \ \ 0 \leqslant k \leqslant n-1$,

- $\mathcal{F}(z^n, R_n(z)) \neq 0$.

Teniendo en cuenta la definición anterior podemos probar la siguiente

Proposición 4.4.2 *Consideremos un funcional bilineal hermitiano cuasi-definido $\mathcal{L}$ y su correspondiente familia de polinomios ortogonales mónicos $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$. Sea $\mathcal{L}_1$ definido como en (4.4.1), con $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $P_n(\alpha) \neq 0$ para todo $n \geqslant 1$. Entonces*

(i) La sucesión $\{R_n\}_{n\geqslant 0}$ dada por

$$R_n(z,\alpha) = \frac{\mathbf{k}_n}{\overline{P_n(\alpha)}} K_n(z,\alpha) = P_n(z) + \frac{\mathbf{k}_n}{\overline{P_n(\alpha)}} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{k}_j^{-1} \overline{P_j(\alpha)} P_j(z), \quad n \geqslant 0 \tag{4.4.2}$$

es ortogonal a la derecha con respecto a $\mathcal{L}_1$. De nuevo, K_n es el núcleo polinómico de grado n correspondiente a la familia $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$.

(ii) La sucesión $\{S_n\}_{n\geqslant 0}$ definida por

$$S_n(z,\alpha) = \frac{1}{z-\alpha}\left(P_{n+1}(z) - \frac{P_{n+1}(\alpha)}{P_n(\alpha)} P_n(z)\right), \quad n \geqslant 0 \tag{4.4.3}$$

es ortogonal a la izquierda con respecto a $\mathcal{L}_1$.

Demostración: (i) De (4.4.2) se deduce fácilmente que $\deg R_n = \deg P_n = n$, para todo $n \geqslant 0$.

Usando la propiedad reproductora (4.1.7) y la fórmula de Christoffel-Darboux

(4.1.8), para $0 \leqslant k \leqslant n$ se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1\left(z^k, R_n(z,\alpha)\right) &= \frac{\mathbf{k}_n}{P_n(\alpha)}\mathcal{L}_1\left(z^k, K_n(z,\alpha)\right)\\
&= \frac{\mathbf{k}_n}{P_n(\alpha)}\mathcal{L}\left(z^k(z-\alpha), K_n(z,\alpha)\right)\\
&= \frac{\mathbf{k}_n}{P_n(\alpha)}\mathcal{L}\left(z^k(z-\alpha), K_{n+1}(z,\alpha) - \mathbf{k}_{n+1}^{-1}P_{n+1}(z)\overline{P_{n+1}(\alpha)}\right)\\
&= -\mathbf{k}_n\frac{P_{n+1}(\alpha)}{P_n(\alpha)}\delta_{n,k}.
\end{aligned}$$

(ii) Partiendo de (4.4.3), es fácil comprobar que $\deg S_n = n$ para todo $n \geqslant 0$. Para $0 \leqslant k \leqslant n$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1\left(S_n(z,\alpha), z^k\right) &= \mathcal{L}\left((z-\alpha)S_n(z,\alpha), z^k\right)\\
&= \mathcal{L}\left(P_{n+1}(z) - \frac{P_{n+1}(\alpha)}{P_n(\alpha)}P_n(z), z^k\right)\\
&= \mathcal{L}\left(P_{n+1}(z), z^k\right) - \frac{P_{n+1}(\alpha)}{P_n(\alpha)}\mathcal{L}\left(P_n(z), z^k\right)\\
&= -\mathbf{k}_n\frac{P_{n+1}(\alpha)}{P_n(\alpha)}\delta_{n,k}.
\end{aligned}$$

■

La sucesión $\{S_n(z,\alpha)\}_{n\geqslant 0}$ fue usada en **[11]** para el estudio de perturbaciones no-simétricas de funcionales bilineales simétricos. En **[17]**, de manera alternativa, se trabaja con la familia $\{R_n(z,\alpha)\}_{n\geqslant 0}$.

Sean H_P y H_R las matrices de Hessenberg inferiores asociadas a $\{P_n(z)\}_{n\geqslant 0}$ y $\{R_n(z,\alpha)\}_{n\geqslant 0}$, respectivamente. Vamos a establecer una relación entre H_P y H_R. Para ello, dado que tanto $\{P_n(z)\}_{n\geqslant 0}$ como $\{R_n(z,\alpha)\}_{n\geqslant 0}$ son bases de polinomios mónicos en el espacio lineal $\mathbb{P}$ de los polinomios con coeficientes complejos, existe una matriz triangular inferior L_{PR} con 1 como entradas en la diagonal principal tal que

$$R(z) = L_{PR}P(z),$$

donde $P(z) = [P_0(z),\ P_1(z),\ \ldots]^t$ y $R(z) = [R_0(z,\alpha),\ R_1(z,\alpha),\ \ldots]^t$. Las entradas de la matriz L_{PR} están dadas por

$$(L_{PR})_{k,j} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = j, \\ \dfrac{\mathbf{k}_k\overline{P_j(\alpha)}}{\mathbf{k}_j\overline{P_k(\alpha)}} & \text{si} \quad k > j, \\ 0 & \text{si} \quad k < j. \end{cases}$$

Lema 4.4.3 *Consideremos el funcional bilineal $\mathcal{L}_1$ definido en (4.4.1) y $P(z) = [P_0(z), P_1(z), \ldots]^t$. Sea $D_P = \mathcal{L}(P, P^t)$, entonces*

(*i*) $\mathcal{L}_1\left(P, P^t\right) = \left(H_P - \alpha I\right) D_P$,

(*ii*) $\mathcal{L}_1\left((z-\alpha)P, P^t\right) = \left(H_P - \alpha I\right)^2 D_P$.

Demostración: *(i)*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1\left(P, P^t\right) &= \mathcal{L}\left((z-\alpha)P, P^t\right) = \mathcal{L}\left(\left(H_P - \alpha I\right) P, P^t\right) \\ &= \left(H_P - \alpha I\right) \mathcal{L}(P, P^t) = \left(H_P - \alpha I\right) D_P. \end{aligned}$$

De forma análoga se demuestra el segundo enunciado.

∎

Debido al carácter ortogonal de la familia $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$, la matriz D_P es una matriz diagonal, no singular, cuyas entradas son

$$(D_P)_{k,j} = \begin{cases} \mathbf{k}_j & \text{si} \quad k = j, \\ 0 & \text{si} \quad k \neq j. \end{cases}$$

Dado que la familia $\{R_n\}_{n\geqslant 0}$ es ortogonal a la derecha con respecto a $\mathcal{L}_1$, entonces la matriz D_R es triangular inferior no singular y sus entradas vienen dadas por

$$
\left(D_R\right)_{k,j} = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{k}_k\mathbf{k}_j}{P_k(\alpha)\overline{P_j(\alpha)}} \Bigg[\displaystyle\sum_{l=0}^{k} \left(\frac{P_l(\alpha)\overline{P_{l-1}(\alpha)}}{\mathbf{k}_{l-1}} + \frac{P_l(\alpha)\overline{P_l(0)}}{\mathbf{k}_l} \sum_{i=l}^{k} P_{i+1}(0)\overline{P_i(\alpha)} \right) & \\ -\alpha K_j(\alpha,\alpha) \Bigg], & \text{si} \quad j \leqslant k, \\ 0, & \text{si} \quad j > k, \end{cases}
$$

asumiendo que $P_{-1}(z) = 0$.

Proposición 4.4.4 *Sea L_{PR} la matriz de cambio de base tal que $R(z) = L_{PR}P(z)$. Entonces $H_P - \alpha I = LU$, donde*

$$
L = L_{PR}^{-1} D_R \tag{4.4.4}
$$

es una matriz triangular inferior, y

$$
U = L_{PR}^{-*} D_P^{-1} \tag{4.4.5}
$$

es una matriz triangular superior.

Demostración: Del lema 4.4.3, se tiene

$$
\begin{aligned}
(H_P - \alpha I)\, D_P &= \mathcal{L}_1\left(P, P^t\right) \\
&= \mathcal{L}_1\left(L_{PR}^{-1} R, R^t L_{PR}^{-t}\right) \\
&= L_{PR}^{-1} \mathcal{L}_1\left(R, R^t\right) L_{PR}^{-*} \\
&= L_{PR}^{-1} D_R L_{PR}^{-*}.
\end{aligned}
$$

De esta forma,

$$
H_P - \alpha I = L_{PR}^{-1} D_R L_{PR}^{-*} D_P^{-1}.
$$

■

La proposición anterior nos brinda una factorización LU de la matriz $H_P - \alpha I$ que no es única.

Ahora mostramos la relación entre las matrices H_P y H_R.

Proposición 4.4.5 *Si $H_P - \alpha I = LU$, donde L y U están dadas por (4.4.4) y (4.4.5), respectivamente, entonces*

$$H_R = D_R\,(UL)\,D_R^{-1} + \alpha I,$$

donde $D_R = \mathcal{L}_1(R, R^t)$.

Demostración: De la proposición anterior, se sigue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1\left((z-\alpha)R, R^t\right) &= \mathcal{L}_1\left((z-\alpha)L_{PR}P, P^t L_{PR}^t\right) \\
&= L_{PR}\mathcal{L}_1\left((z-\alpha)P, P^t\right) L_{PR}^* \\
&= L_{PR}\,(H_P - \alpha I)^2\, D_P L_{PR}^* \\
&= L_{PR}\,(LU)^2\, D_P L_{PR}^*.
\end{aligned}$$

Por otra parte, se tiene

$$\mathcal{L}_1\left((z-\alpha)R, R^t\right) = (H_R - \alpha I)\,\mathcal{L}_1\left(R, R^t\right) = (H_R - \alpha I)\,D_R.$$

De esta forma,

$$H_R - \alpha I = L_{PR}L_{PR}^{-1}D_R U L D_P^{-1} D_P D_R^{-1} = D_R U L D_R^{-1}.$$

■

A continuación, si perturbamos el funcional $\mathcal{L}_1$ de la manera siguiente

$$\mathcal{L}_2(p,q) := \mathcal{L}_1(p,(z-\alpha)q) = \mathcal{L}((z-\alpha)p,(z-\alpha)q), \quad p,q \in \mathbb{P}, \tag{4.4.6}$$

entonces el funcional bilineal $\mathcal{L}_2$ es hermitiano (ver **[51]**), y una condición necesaria y suficiente para que $\mathcal{L}_2$ sea cuasi-definido se muestra en el siguiente

Teorema 4.4.6 *El funcional bilineal $\mathcal{L}_2$, definido por (4.4.6), es cuasi-definido si y sólo si $K_n(\alpha, \alpha) \neq 0$, para todo $n \geqslant 0$.*

Demostración: Supongamos que $\mathcal{L}_2$ es cuasi-definido y sea $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos asociada a $\mathcal{L}_2$. Denotemos por $span\{p(z)\}$ al subespacio lineal de $\mathbb{P}$ generado por el polinomio $p \in \mathbb{P}$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_n &= (z-\alpha)\mathbb{P}_{n-1} \oplus span\{K_n(z,\alpha)\}\\ &= span\{(z-\alpha)Q_{n-1}(z)\} \oplus (z-\alpha)\mathbb{P}_{n-2} \oplus span\{K_n(z,\alpha)\},\end{aligned}$$

donde las sumas directas son también ortogonales.

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_n &= \mathbb{P}_{n-1} \oplus span\{P_n(z)\}\\ &= span\{P_n(z)\} \oplus span\{K_{n-1}(z,\alpha)\} \oplus (z-\alpha)\mathbb{P}_{n-2}.\end{aligned}$$

De esta manera, dada la unicidad del complemento ortogonal del subespacio vectorial $(z-\alpha)\mathbb{P}_{n-2}$ respecto a $\mathbb{P}_n$

$$span\{(z-\alpha)Q_{n-1}(z)\} \oplus span\{K_n(z,\alpha)\} = span\{P_n(z)\} \oplus span\{K_{n-1}(z,\alpha)\}.$$

En consecuencia,

$$P_n(z) = (z-\alpha)Q_{n-1}(z) + \beta_n K_{n-1}(z,\alpha). \tag{4.4.7}$$

Ahora bien, si $K_{n_0-1}(\alpha,\alpha) = 0$ para algún n_0, entonces, de la expresión (4.4.7), tenemos $P_{n_0}(\alpha) = 0$. Esto significa que

$$K_n(\alpha,\alpha) = 0, \ \text{ para todo } \ n \geqslant n_0,$$

y, por tanto,

$$P_{n+1}(\alpha) = 0, \ n \geqslant n_0.$$

Si $|\alpha| \neq 1$, teniendo en cuenta que $P_n^*(\alpha) \neq 0$, $n \geqslant n_0$, así como la fórmula de Christoffel-Darboux (4.1.8), para $n \geqslant n_0$ obtenemos

$$K_n(\alpha,\alpha) = \mathbf{k}_{n+1}^{-1} \frac{|P_{n+1}^*(\alpha)|^2 - |P_{n+1}(\alpha)|^2}{1-|\alpha|^2} = \mathbf{k}_{n+1}^{-1} \frac{|P_{n+1}^*(\alpha)|^2}{1-|\alpha|^2} \neq 0,$$

contradiciendo así nuestra hipótesis.

Si $|\alpha| = 1$, entonces $P_n^*(\alpha) = 0$, $P_{n-1}(\alpha) = 0$ y, por tanto de la relación de recurrencia regresiva $P_1(\alpha) = 0$, i. e. $P_1(z) = z - \alpha$, o, equivalentemente, $|P_1(0)| = 1$, contradiciendo así, el carácter cuasi definido de $\mathcal{L}$. En consecuencia $K_n(\alpha,\alpha) \neq 0$, para todo $n \geqslant 0$.

Supongamos ahora que $K_n(\alpha,\alpha) \neq 0$ para todo $n \geqslant 0$ y consideremos la sucesión de polinomios mónicos $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$ definidos por

$$(z-\alpha)Q_n(z) = P_{n+1}(z) - \frac{P_{n+1}(\alpha)}{K_n(\alpha,\alpha)} K_n(z,\alpha). \tag{4.4.8}$$

Entonces, para $0 \leqslant k \leqslant n$, se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2\left(Q_n(z),(z-\alpha)^k\right) &= \mathcal{L}\left((z-\alpha)Q_n(z),(z-\alpha)^{k+1}\right) \\
&= \mathcal{L}\left(P_{n+1}(z) - \tfrac{P_{n+1}(\alpha)}{K_n(\alpha,\alpha)} K_n(z,\alpha),(z-\alpha)^{k+1}\right) \\
&= \mathcal{L}\left(P_{n+1},(z-\alpha)^{k+1}\right) - \tfrac{P_{n+1}(\alpha)}{K_n(\alpha,\alpha)} \mathcal{L}\left(K_n(z,\alpha),(z-\alpha)^{k+1}\right) \\
&= \mathbf{k}_{n+1}\delta_{n,k} - \tfrac{P_{n+1}(\alpha)}{K_n(\alpha,\alpha)} \mathcal{L}\left(K_{n+1}(z,\alpha) - \tfrac{\overline{P_{n+1}(\alpha)}}{\mathbf{k}_{n+1}} P_{n+1}(z),(z-\alpha)^{k+1}\right) \\
&= \mathbf{k}_{n+1}\delta_{n,k} + \tfrac{P_{n+1}(\alpha)\overline{P_{n+1}(\alpha)}}{K_n(\alpha,\alpha)} \delta_{n,k} \\
&= \mathbf{k}_{n+1} \tfrac{K_{n+1}(\alpha,\alpha)}{K_n(\alpha,\alpha)} \delta_{n,k}.
\end{aligned}$$

Así $\{Q_n\}_{n\geqslant 0}$ es la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto al funcional $\mathcal{L}_2$.

■

Sea H_Q la matriz de Hessenberg inferior tal que

$$zQ(z) = H_Q Q(z),$$

donde $Q(z) = [Q_0(z),\ Q_1(z),\ \ldots]^t$. Mostraremos la relación entre las matrices H_Q y H_R y veremos que la matriz H_Q se obtiene a partir de una factorización LU de la matriz H_R. Para ello, primero probaremos el siguiente

Lema 4.4.7 *Consideremos el funcional bilineal hermitiano $\mathcal{L}_2$, y sea H_R la matriz de Hessenberg inferior tal que $zR(z) = H_R R(z)$, con $R(z) = [R_0(z), R_1(z), \ldots]^t$. Entonces*

(i) $\mathcal{L}_2\,(R, R^t) = D_R\,(H_R - \alpha I)^*$.

(ii) $\mathcal{L}_2\,(R, (z-\alpha)R^t) = D_R\,((H_R - \alpha I)^*)^2$.

Demostración: (i)

$$\mathcal{L}_2\,(R, R^t) \;\; = \mathcal{L}_1(R, (z-\alpha)R^t) = \mathcal{L}_1(R, R^t)\,(H_R - \alpha I)^* = D_R\,(H_R - \alpha I)^*\,.$$

Usando un procedimiento similar, se deduce (ii).

■

Proposición 4.4.8 *Sea L_{RQ} la matriz triangular inferior tal que $Q(z) = L_{RQ}R(z)$. Entonces,*

$$H_R - \alpha I = L_{RQ}^{-1}\tilde{U},$$

donde $\tilde{U}$ es una matriz triangular superior.

Demostración: Del Lema 4.4.7, se tiene

$$\begin{aligned} D_R\,(H_R - \alpha I)^* &= \mathcal{L}_2\,(R, R^t) = \mathcal{L}_2\left(L_{RQ}^{-1}Q, Q^t L_{RQ}^{-t}\right) \\ &= L_{RQ}^{-1}\mathcal{L}_2\,(Q, Q^t)\,L_{RQ}^{-*} \\ &= L_{RQ}^{-1} D_Q L_{RQ}^{-*}, \end{aligned}$$

donde $D_Q = \mathcal{L}_2\,(Q, Q^t)$ es una matriz diagonal no singular. De esta forma

$$H_R - \alpha I = L_{RQ}^{-1} D_Q^* \, (D_R L_{RQ})^{-*} \, .$$

En consecuencia podemos ver que

$$H_R - \alpha I = \tilde{L}\tilde{U},$$

con $\tilde{L} = L_{RQ}^{-1}$ y $\tilde{U} = D_Q^* \, (D_R L_{RQ})^{-*}$.

■

La estructura de la matriz D_Q proviene de la caracterización de ortogonalidad de la familia $\{Q_n\}_{n \geqslant 0}$. Las entradas de la matriz D_Q están dadas por

$$(D_Q)_{k,j} = \begin{cases} \mathbf{k}_j \frac{K_{j+1}(\alpha,\alpha)}{K_j(\alpha,\alpha)} & \text{si} \quad k = j, \\ 0, & \text{si} \quad k \neq j. \end{cases}$$

Por otra parte, las entradas de la matriz cambio de base L_{RQ} son

$$(L_{RQ})_{n,j} = \begin{cases} \frac{P_{n+1}(\alpha) K_j(\alpha,\alpha)}{P_{j+1}(\alpha) K_n(\alpha,\alpha)} & \text{si} \quad n \geqslant j, \\ 0, & \text{si} \quad n < j. \end{cases}$$

Proposición 4.4.9 *Sea L_{RQ} la matriz triangular inferior tal que $Q = L_{RQ}R$. Si $H_R - \alpha I = \tilde{L}\tilde{U}$ es la factorización LU sin pivoteo de $H_R - \alpha I$, entonces*

$$H_Q - \alpha I = \tilde{U}\tilde{L}.$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2\,(Q, (z-\alpha)Q^t) &= \mathcal{L}_2\,(L_{RQ}R, (z-\alpha)R^t L_{RQ}) \\ &= L_{RQ}\mathcal{L}_2\,(R, (z-\alpha)R^t)\, L_{RQ}^*. \end{aligned}$$

De esta manera

$$\mathcal{L}_2\,(Q, Q^t)\,(H_Q - \alpha I)^* = L_{RQ} D_R \left((H_R - \alpha I)^*\right)^2 L_{RQ}^*,$$

o, equivalentemente,

$$D_Q\,(H_Q - \alpha I)^* = L_{RQ} D_R D_R^{-1} L_{RQ}^{-1} D_Q L_{RQ}^{-*} D_R^{-1} L_{RQ}^{-1} D_Q L_{RQ}^{-*} L_{RQ}^{*}.$$

Finalmente

$$\begin{aligned} (H_Q - \alpha I)^* &= L_{RQ}^{*} D_R^{-1} L_{RQ} D_Q, \quad \text{i. e.,} \\ H_Q - \alpha I &= D_Q^{*} L_{RQ}^{-*} D_R^{-*} L_{RQ}^{-1} = \tilde{U}\tilde{L}. \end{aligned}$$

■

4.5. Funcionales lineales definidos positivos y la factorización QR

Supongamos ahora que el funcional bilineal $\mathcal{L}$ es definido positivo, y sea $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ la sucesión de polinomios ortonormales con respecto a $\mathcal{L}$, dada por

$$\varphi_n(z) = \kappa_n P_n(z),$$

donde $\kappa_n = \mathbf{k}_n^{-\frac{1}{2}}$.

Nos ocuparemos de la perturbación polinómica $\mathcal{L}_2$ del funcional $\mathcal{L}$ introducida en (4.4.6). Notemos que el nuevo funcional $\mathcal{L}_2$ es también hermitiano y definido positivo y, por tanto, podemos considerar la familia $\{\psi_n\}_{n\geqslant 0}$ de polinomios ortonormales asociada al funcional $\mathcal{L}_2$.

Nuestro objetivo es hallar la relación entre las matrices de Hessenberg H_φ y H_ψ asociadas al operador de multiplicación por z en $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ y $\{\psi_n\}_{n\geqslant 0}$ respectivamente. En primer lugar, deduciremos una expresión que relacione los polinomios ortonormales $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ y $\{\psi_n\}_{n\geqslant 0}$ con respecto a $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}_2$, respectivamente. Así, obtenemos a partir de (4.4.8) mediante la correspondiente normalización

$$(z-\alpha)\psi_n(z) = \sqrt{\frac{K_n(\alpha,\alpha)}{K_{n+1}(\alpha,\alpha)}}\varphi_{n+1}(z) - \sum_{j=0}^{n} \frac{\varphi_{n+1}(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)}}{\sqrt{K_{n+1}(\alpha,\alpha)K_n(\alpha,\alpha)}}\varphi_j(z). \qquad (4.5.1)$$

Si consideramos

$$\varphi(z) = [\varphi_0(z),\ \varphi_1(z),\ \ldots, \varphi_n(z), \ldots]^t \quad \text{y} \quad \psi(z) = [\psi_0(z),\ \psi_1(z),\ \ldots, \psi_n(z), \ldots]^t,$$

entonces, en forma matricial, la expresión (4.5.1) resulta ser

$$(z-\alpha)\Psi(z) = M\Phi(z), \qquad (4.5.2)$$

donde M es una matriz Hessenberg inferior cuyas entradas $m_{i,j}$ están dadas por

$$m_{i,j} = \begin{cases} -\frac{\varphi_{i+1}(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)}}{\sqrt{K_{i+1}(\alpha,\alpha)K_i(\alpha,\alpha)}}, & \text{si} \quad j \leqslant i, \\ \sqrt{\frac{K_i(\alpha,\alpha)}{K_{i+1}(\alpha,\alpha)}}, & \text{si} \quad j = i+1, \\ 0, & \text{si} \quad j > i+1. \end{cases} \qquad (4.5.3)$$

Proposición 4.5.1 ([55]) *La matriz M satisface*

(i) $MM^* = I$.

(ii) $M^*M = I - \lambda_\infty(\alpha)\Phi(\alpha)\Phi(\alpha)^*$,

Demostración: Debido a la ortogonalidad de $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ y $\{\psi_n\}_{n\geqslant 0}$ con respecto a $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}_2$, respectivamente, obtenemos

$$\begin{aligned} I &= \mathcal{L}_2\left(\Psi(z), \Psi(z)^t\right) = \mathcal{L}\left((z-\alpha)\Psi(z), (z-\alpha)\Psi^t(z)\right) \\ &= \mathcal{L}\left(M\Phi(z), \Phi(z)^t M^t\right) = M\mathcal{L}\left(\Phi(z), \Phi(z)^t\right) M^* = MM^*. \end{aligned}$$

(ii) Para $j = 0, 1, \ldots$

$$
\begin{aligned}
M^*_{(j)} M^{(j)} &= \frac{K_{j-1}(\alpha,\alpha)}{K_j(\alpha,\alpha)} + |\varphi_j(\alpha)|^2 \sum_{l=j}^{\infty} \frac{|\varphi_{l+1}(\alpha)|^2}{K_{l+1}(\alpha,\alpha)K_l(\alpha,\alpha)} \\
&= \frac{K_{j-1}(\alpha,\alpha)}{K_j(\alpha,\alpha)} + |\varphi_j(\alpha)|^2 \sum_{l=j}^{\infty} \left(\frac{1}{K_l(\alpha,\alpha)} - \frac{1}{K_{l+1}(\alpha,\alpha)} \right) \\
&= 1 - \frac{|\varphi_j(\alpha)|^2}{K_\infty(\alpha,\alpha)} \\
&= 1 - \lambda_\infty(\alpha)|\varphi_j(\alpha)|^2.
\end{aligned}
$$

Para $k < j$

$$
\begin{aligned}
M^*_{(k)} M^{(j)} &= -\frac{1}{K_j(\alpha,\alpha)} \varphi_k(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)} + \varphi_k(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)} \sum_{l=j}^{\infty} \frac{|\varphi_{l+1}(\alpha)|^2}{K_{l+1}(\alpha,\alpha)K_l(\alpha,\alpha)} \\
&= \varphi_k(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)} \left(-\frac{1}{K_j(\alpha,\alpha)} + \sum_{l=j}^{\infty} \left(\frac{1}{K_l(\alpha,\alpha)} - \frac{1}{K_{l+1}(\alpha,\alpha)} \right) \right) \\
&= -\frac{\varphi_k(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)}}{K_\infty(\alpha,\alpha)} \\
&= -\varphi_k(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)}\lambda_\infty(\alpha).
\end{aligned}
$$

■

Nota 4.5.2 *De acuerdo con la Proposición 4.1.10, la matriz M es unitaria si* $|\alpha| > 1$. *Si* $|\alpha| = 1$ *entonces* $\lambda_\infty(\alpha) = 0$ *siempre y cuando* $\mu(\{\alpha\}) = 0$.

Si $|\alpha| < 1$ *y* $\sum_{n=0}^{\infty} |P_n(0)|^2 = \infty$, *esto es, la medida* μ *no pertenece a la clase de Szegő, entonces M es unitaria.*

A continuación, mostramos el resultado análogo a la proposición anterior para las submatrices principales (ver **[55]**)

Proposición 4.5.3 *Sea* M_n *la submatriz principal de dimensión* $n \times n$ *de* M.

(*i*) *Consideremos el vector columna* $e_n = [0, \ldots, 0, 1]^t \in \mathbb{C}^{(n,1)}$, *entonces*

$$M_n M_n^* = I_n - \tfrac{K_{n-1}(\alpha,\alpha)}{K_n(\alpha,\alpha)} e_n e_n^*,$$

donde I_n *denota la matriz unidad de dimensión* $n \times n$.

(*ii*) *Sea* $P_n(\alpha) = [\varphi_0(\alpha), \varphi_1(\alpha), \ldots, \varphi_{n-1}(\alpha)]^t$, *entonces*

$$M_n^* M_n = I_n - \tfrac{1}{K_n(\alpha,\alpha)} P_n P_n^*.$$

Demostración: Para $0 \leqslant k \leqslant n-2$, deducimos

$$\begin{aligned}(M_n)_{(k)}(M_n^*)^{(k)} &= \tfrac{|\varphi_{k+1}(\alpha)|^2}{K_{k+1}(\alpha,\alpha)K_k(\alpha,\alpha)} \sum_{l=0}^{k} |\varphi_l(\alpha)|^2 + \frac{K_k(\alpha,\alpha)}{K_{k+1}(\alpha,\alpha)} \\ &= \tfrac{|\varphi_{k+1}(\alpha)|^2}{K_{k+1}(\alpha,\alpha)K_k(\alpha,\alpha)} K_k(\alpha,\alpha) + \tfrac{K_k(\alpha,\alpha)}{K_{k+1}(\alpha,\alpha)} = 1.\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}(M_n)_{(n-1)}(M_n^*)^{(n-1)} &= \tfrac{|\varphi_n(\alpha)|^2}{K_n(\alpha,\alpha)K_{n-1}(\alpha,\alpha)} \sum_{l=0}^{n-1} |\varphi_l(\alpha)|^2 \\ &= \tfrac{|\varphi_n(\alpha)|^2}{K_n(\alpha,\alpha)} = 1 - \tfrac{K_{n-1}(\alpha,\alpha)}{K_n(\alpha,\alpha)}.\end{aligned}$$

Finalmente, para $k < j$, obtenemos

$$\begin{aligned}(M_n)_{(k)}(M_n^*)^{(j)} = & \sum_{l=0}^{k} \frac{\varphi_{k+1}(\alpha)\overline{\varphi_{j+1}(\alpha)}\,|\varphi_l(\alpha)|^2}{\sqrt{K_{k+1}(\alpha,\alpha)K_k(\alpha,\alpha)}\,\sqrt{K_{j+1}(\alpha,\alpha)K_j(\alpha,\alpha)}} \\ & - \frac{\varphi_{k+1}(\alpha)\overline{\varphi_{j+1}(\alpha)}}{\sqrt{K_{j+1}(\alpha,\alpha)K_j(\alpha,\alpha)}} \sqrt{\frac{K_k(\alpha,\alpha)}{K_{k+1}(\alpha,\alpha)}} \\ = & \frac{\varphi_{k+1}(\alpha)\overline{\varphi_{j+1}(\alpha)}}{\sqrt{K_{k+1}(\alpha,\alpha)K_k(\alpha,\alpha)K_{j+1}(\alpha,\alpha)K_j(\alpha,\alpha)}} \left(\sum_{l=0}^{k} |\varphi_l(\alpha)|^2 - K_i(\alpha,\alpha) \right) \\ = & \; 0.\end{aligned}$$

(*ii*) Para $1 \leqslant k \leqslant n-1$,

$$
\begin{aligned}
(M_n^*)_{(k)}(M_n)^{(k)} &= \frac{K_{k-1}(\alpha,\alpha)}{K_k(\alpha,\alpha)} + \sum_{l=k}^{n-1} \frac{|\varphi_k(\alpha)|^2|\varphi_{l+1}(\alpha)|^2}{K_{l+1}(\alpha,\alpha)K_l(\alpha,\alpha)} \\
&= \frac{K_{k-1}(\alpha,\alpha)}{K_k(\alpha,\alpha)} + |\varphi_k(\alpha)|^2 \sum_{l=k}^{n-1}\left(\frac{1}{K_l(\alpha,\alpha)} - \frac{1}{K_{l+1}(\alpha,\alpha)}\right) \\
&= \frac{K_{k-1}(\alpha,\alpha)}{K_k(\alpha,\alpha)} + |\varphi_k(\alpha)|^2 \left(\frac{1}{K_k(\alpha,\alpha)} - \frac{1}{K_n(\alpha,\alpha)}\right) \\
&= 1 - \frac{|\varphi_k(\alpha)|^2}{K_n(\alpha,\alpha)},
\end{aligned}
$$

así como

$$
\begin{aligned}
(M_n^*)_{(0)}(M_n)^{(0)} &= \sum_{l=0}^{n-1} \frac{|\varphi_0(\alpha)|^2|\varphi_{l+1}(\alpha)|^2}{K_{l+1}(\alpha,\alpha)K_l(\alpha,\alpha)} \\
&= |\varphi_0(\alpha)|^2 \sum_{l=0}^{n-1}\left(\frac{1}{K_l(\alpha,\alpha)} - \frac{1}{K_{l+1}(\alpha,\alpha)}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{K_n(\alpha,\alpha)}.
\end{aligned}
$$

Finalmente, para $k < j$,

$$
\begin{aligned}
(M_n^*)_{(k)}(M_n)^{(j)} &= -\frac{\varphi_k(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)}}{\sqrt{K_j(\alpha,\alpha)K_{j-1}(\alpha,\alpha)}}\sqrt{\frac{K_{j-1}(\alpha,\alpha)}{K_j(\alpha,\alpha)}} + \sum_{l=k}^{n-1} \frac{|\varphi_{l+1}(\alpha)|^2\varphi_k(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)}}{K_{l+1}(\alpha,\alpha)K_l(\alpha,\alpha)} \\
&= -\frac{\varphi_k(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)}}{K_j(\alpha,\alpha)} + \varphi_k(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)} \sum_{l=j}^{n-1} \frac{|\varphi_{l+1}(\alpha)|^2}{K_{l+1}(\alpha,\alpha)K_l(\alpha,\alpha)} \\
&= -\varphi_k(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)}\left(\frac{1}{K_j(\alpha,\alpha)} - \sum_{l=j}^{n-1}\left(\frac{1}{K_l(\alpha,\alpha)} - \frac{1}{K_{l+1}(\alpha,\alpha)}\right)\right) \\
&= -\frac{\varphi_k(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)}}{K_n(\alpha,\alpha)}.
\end{aligned}
$$

■

En la literatura, la matriz M_n se denomina *cuasi unitaria* (ver **[43]**, **[68]**) en el sentido de que las primeras $n-1$ filas constituyen un conjunto ortonormal, y la última fila es ortogonal con respecto a ese conjunto, pero no está normalizada.

Para obtener una relación entre las matrices de Hessenberg H_φ y H_ψ,(i. e. $H_\varphi \varphi(z) = z\varphi(z)$, ver **[29]**, **[30]**) introducimos la matriz cambio de base L tal que $\varphi(z) = L\psi(z)$. Esta matriz puede expresarse en términos de las matrices H_φ y M de la siguiente manera

Proposición 4.5.4

$$L = (H_\varphi - \alpha I)M^*. \tag{4.5.4}$$

Demostración: Sea L la matriz cambio de base tal que $\varphi(z) = L\psi(z)$. Entonces

$$(z-\alpha)\psi(z) = (z-\alpha)L^{-1}\varphi(z).$$

De la relación (4.5.2), obtenemos

$$M\varphi(z) = L^{-1}(H_\varphi - \alpha I)\varphi(z).$$

De esta forma,

$$LM = H_\varphi - \alpha I,$$

y dado que $MM^* = I$ (Proposición 4.5.1), se sigue el enunciado.

■

De la proposición anterior, obtenemos

Proposición 4.5.5

$$H_\psi - \alpha I = ML.$$

Demostración: De la expresión (4.5.2),

$$(z-\alpha)\psi(z) = M\varphi(z).$$

Por tanto,

$$(H_\psi - \alpha I)\psi(z) = ML\psi(z),$$

y, en consecuencia, deducimos el enunciado.

■

Para calcular H_ψ partiendo de H_φ, primero se necesita encontrar la matriz triangular inferior L. De las expresiones (4.5.3) y (4.5.4), mediante cálculos sencillos deducimos

Proposición 4.5.6 *Las entradas $l_{i,j}$ de la matriz L son*

$$l_{n,j} = \begin{cases} \frac{\kappa_n}{\kappa_{n+1}} \sqrt{\frac{K_{n+1}(\alpha,\alpha)}{K_n(\alpha,\alpha)}}, & n = j, \\ \frac{\overline{\varphi_n(\alpha)}\left(\frac{P_{n+1}(0)}{\kappa_n}\kappa_{n-1}\varphi^*_{n-1}(\alpha)\right)}{\sqrt{K_n(\alpha,\alpha)K_{n-1}(\alpha,\alpha)}} - \left(P_{n+1}(0)\overline{P_n(0)} + \alpha\right)\sqrt{\frac{K_{n-1}(\alpha,\alpha)}{K_n(\alpha,\alpha)}}, & j = n-1, \\ \frac{P_{n+1}(0)}{\kappa_n\sqrt{K_j(\alpha,\alpha)K_{j+1}(\alpha,\alpha)}}\left(\kappa_j\overline{\varphi_{j+1}(\alpha)}\varphi^*_j(\alpha) - \overline{\varphi_{j+1}(0)}K_j(\alpha,\alpha)\right), & j \leqslant i-2. \end{cases}$$

4.5.1. Ejemplos

Ejemplo 4.5.7 *Sean $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| = 1$ y $\mathcal{L}$ el funcional bilineal definido por*

$$\mathcal{L}(p,q) = \int_{-\pi}^{\pi} p(e^{i\theta})\overline{q(e^{i\theta})}\frac{d\theta}{2\pi}.$$

Es bien conocido (ver [68]*) que el n-ésimo polinomio ortonormal con respecto a $\mathcal{L}$ es $P_n(z) = \varphi_n(z) = z^n$, para todo $n \geqslant 0$.*

Entonces, el núcleo reproductor de grado n asociado a $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$, es

$$K_n(z,\alpha) = \sum_{j=0}^{n} \frac{z^j}{\alpha^j} = \frac{1}{\alpha^n}\frac{z^{n+1} - \alpha^{n+1}}{z - \alpha},$$

y, en consecuencia, $K_n(\alpha,\alpha) = n+1$, para todo $n \geqslant 0$.

Por otra parte

$$H_\varphi - \alpha I = \begin{bmatrix} -\alpha & 1 & 0 & \dots \\ 0 & -\alpha & 1 & \ddots \\ 0 & 0 & -\alpha & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Las entradas $m_{k,j}$ de M son

$$m_{k,j} = \begin{cases} -\dfrac{\alpha^{k-j+1}}{\sqrt{(k+2)(k+1)}}, & \text{si} \quad j \leqslant k, \\ \sqrt{\dfrac{k+1}{k+2}}, & \text{si} \quad j = k+1, \\ 0, & \text{si} \quad j > k+1. \end{cases} \tag{4.5.5}$$

En este caso, de la Proposición 4.5.6 deducimos $l_{k,j} = 0$, para $j \leqslant k-2$. Así, L es una matriz bidiagonal inferior

$$l_{k,k-1} = -\alpha \sqrt{\frac{k}{k+1}} \ \text{ y } \ l_{k,k} = \sqrt{\frac{k+2}{k+1}}. \tag{4.5.6}$$

Para la determinación de la matriz H_ψ, analizaremos varios casos.

Para $j \geqslant k+2$, fácilmente se puede ver que $M_{(k)}L^{(j)} = 0$.

Para $j = k+1$, $M_{(k)}L^{(k+1)} = m_{k,k+1}l_{k+1,k+1} = \sqrt{\dfrac{k+1}{k+2}}\sqrt{\dfrac{k+3}{k+2}} = \dfrac{\sqrt{(k+1)(k+3)}}{k+2}$.

Para $j = k$,

$$\begin{aligned} M_{(k)}L^{(k)} &= m_{k,k}l_{k,k} + m_{k,k+1}l_{k+1,k} \\ &= -\frac{\alpha}{\sqrt{(k+2)(k+1)}}\sqrt{\frac{k+2}{k+1}} - \alpha\frac{k+1}{k+2} = -\alpha\frac{k+2+(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}. \end{aligned}$$

Finalmente, para $j < k$,

$$\begin{aligned} M_{(k)}L^{(j)} &= m_{k,j}l_{j,j} + m_{k,j+1}l_{j+1,j} \\ &= \frac{\alpha^{k-j+1}}{\sqrt{(j+2)(j+1)}}\left(\sqrt{\frac{j+1}{j+2}} - \sqrt{\frac{j+2}{j+1}}\right) \\ &= -\frac{\alpha^{k-j+1}}{\sqrt{(k+2)(k+1)(j+2)(j+1)}}. \end{aligned}$$

De esta forma, las entradas $\tilde{h}_{k,j}$ de la matriz de Hessenberg $H_\psi - \alpha I$ son

$$\tilde{h}_{k,j} = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad j \geqslant k+2, \\ \dfrac{\sqrt{(k+1)(k+3)}}{k+2}, & \text{si} \quad j = k+1, \\ -\alpha \dfrac{k+2+(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}, & \text{si} \quad j = k, \\ -\dfrac{\alpha^{k-j+1}}{\sqrt{(k+2)(k+1)(j+2)(j+1)}}, & \text{si} \quad j < k. \end{cases}$$

Ejemplo 4.5.8 *Consideremos ahora los funcionales bilineales*

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(p,q) &= \int_0^{2\pi} p(e^{i\theta})\overline{q(e^{i\theta})}\frac{1}{|e^{i\theta}-\beta|^2}\frac{d\theta}{2\pi} \\ \mathcal{S}_2(p,q) &= \int_0^{2\pi} p(e^{i\theta})\overline{q(e^{i\theta})}\frac{|e^{i\theta}-\alpha|^2}{|e^{i\theta}-\beta|^2}\frac{d\theta}{2\pi}, \end{aligned}$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $|\beta| < 1$ y $|\alpha| = 1$ (ver **[28]***). Es sencillo probar que la sucesión $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ está dada por*

$$\varphi_0(z) = \left(1-|\beta|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \varphi_n(z) = z^{n-1}(z-\beta), \ \ para \ \ n \geqslant 1.$$

Así

$$H_\varphi - \alpha I = \begin{bmatrix} \beta-\alpha & \left(1-|\beta|^2\right)^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\alpha & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -\alpha & 1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix},$$

y el n-ésimo núcleo reproductor $K_n(z,\alpha)$ asociado a $\mathcal{S}$ es

$$K_n(z,\alpha) = 1 - |\beta|^2 + \sum_{j=1}^{n} (z-\beta)\overline{(\alpha-\beta)}\left(\frac{z}{\alpha}\right)^{j-1}.$$

En consecuencia, se tiene

$$K_n(\alpha,\alpha) = 1 - |\beta|^2 + n|\alpha-\beta|^2.$$

Las entradas $m_{k,j}$ de M son

$$m_{l,j} = \begin{cases} -\dfrac{\alpha^l(\alpha-\beta)(1-|\beta|^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{K_l(\alpha,\alpha)K_{l+1}(\alpha,\alpha)}} & \text{si} \quad j = 0, \\ -\dfrac{|\alpha-\beta|^2\alpha^{l-j+1}}{\sqrt{K_l(\alpha,\alpha)K_{l+1}(\alpha,\alpha)}}, & \text{si} \quad 1 \leqslant j \leqslant l, \\ \sqrt{\dfrac{K_l(\alpha,\alpha)}{K_{l+1}(\alpha,\alpha)}}, & \text{si} \quad j = l+1, \\ 0, & \quad \textit{en otro caso}. \end{cases} \tag{4.5.7}$$

De (4.5.4), deducimos la matriz L mediante $L = (H_\varphi - \alpha I)M^*$. De ahí, obtenemos las entradas $l_{r,j}$ de la matriz L

$$l_{r,j} = \begin{cases} \sqrt{K_1(\alpha,\alpha)} & j = r = 0, \\ -\alpha\sqrt{\dfrac{K_{r-1}(\alpha,\alpha)}{K_r(\alpha,\alpha)}}, & j = r-1, \\ \sqrt{\dfrac{K_{r+1}(\alpha,\alpha)}{K_r(\alpha,\alpha)}}, & j = r, \\ 0, & \textit{en otro caso}. \end{cases} \tag{4.5.8}$$

De acuerdo con la Proposición 4.5.5 las entradas $\tilde{h}_{r,j}$ de la matriz $H_\psi - \alpha I$ son

$$\tilde{h}_{r,j} = \begin{cases} -\left(\alpha - \beta + \alpha \dfrac{K_0(\alpha,\alpha)}{K_1(\alpha,\alpha)}\right) & \text{si} \quad r = j = 0, \\ -\dfrac{\alpha^{r-1}(1-|\beta|^2)^{\frac{1}{2}}(\alpha-\beta)^2}{\sqrt{K_1(\alpha,\alpha)K_r(\alpha,\alpha)K_{r+1}(\alpha,\alpha)}} & \text{si} \quad j = 0,\ r \geqslant 1, \\ \dfrac{\sqrt{K_r(\alpha,\alpha)K_{r+2}(\alpha,\alpha)}}{K_{r+1}(\alpha,\alpha)}, & \text{si} \quad j = r+1, \\ -\alpha\left(\dfrac{|\alpha-\beta|^2}{K_r(\alpha,\alpha)} - \dfrac{K_r(\alpha,\alpha)}{K_{r+1}(\alpha,\alpha)}\right), & \text{si} \quad 1 \leqslant j = r, \\ -\dfrac{|\alpha-\beta|^4\alpha^{r-j+1}}{\sqrt{K_r(\alpha,\alpha)K_{r+1}(\alpha,\alpha)K_j(\alpha,\alpha)K_{j+1}(\alpha,\alpha)}}, & \text{si} \quad 1 \leqslant j < r, \\ 0, & \textit{en otro caso}. \end{cases}$$

Como hemos visto en los ejemplos anteriores, los cómputos son relativamente laboriosos. Es por ello que hemos intentado relacionar el cálculo de la matriz de Hessenberg H_ψ con alguna factorización de la matriz H_φ. De forma más precisa, hemos usado la factorización QR de la matriz $H_\varphi - \alpha I$ para obtener $H_\psi - \alpha I$. De hecho, si suponemos que Q^*R^* es la factorización QR de la matriz $(H_\varphi - \alpha I)^*$, donde $QQ^* = I$ y R^* es una matriz triangular superior cuyas entradas de la diagonal principal son positivas, entonces $H_\varphi - \alpha I = RQ$ y podemos probar la siguiente proposición

Proposición 4.5.9 *Consideremos la factorización*

$$(H_\varphi - \alpha I)^* = Q^*R^*,$$

donde $QQ^* = I$ y R^* es una matriz triangular superior tal que las entradas de la diagonal principal son positivas. Si L es una matriz triangular inferior tal que $\varphi(z) = L\psi(z)$, entonces $R = L$,

Demostración: Notemos que $\mathcal{L}_2(\varphi, \varphi^t) = \mathcal{L}_2(L\psi, \psi^t L^t) = L\mathcal{L}_2(\psi, \psi^t)L^* = LL^*$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2(\varphi,\varphi^t) &= \mathcal{L}((z-\alpha)\varphi,(z-\alpha)\varphi^t)\\ &= (H_\varphi-\alpha I)\mathcal{L}(\varphi,\varphi^t)(H_\varphi-\alpha I)^*\\ &= (H_\varphi-\alpha I)(H_\varphi-\alpha I)^*\\ &= (RQ)(Q^*R^*) = RR^*.\end{aligned}$$

De la Proposición 4.5.6, se observa que las entradas $l_{k,k}$ de L, con $k \geqslant 0$, son positivas. De esta forma, LL^* representa la descomposición de Cholesky de la matriz de Gram del funcional bilineal $\mathcal{L}_2$ con respecto a la base ortonormal $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$. De esta forma $R = L$.

■

Ahora, probaremos la siguiente

Proposición 4.5.10 $H_\psi - \alpha I = QL$.

Demostración:

$$\begin{aligned}H_\psi-\alpha I &= (H_\psi-\alpha I)\mathcal{L}_2(\psi,\psi^t)\\ &= \mathcal{L}_2(H_\psi-\alpha I)\psi(z),\psi(z)^t)\\ &= \mathcal{L}_2((z-\alpha)\psi(z),\psi(z)^t)\\ &= \mathcal{L}_2((z-\alpha)L^{-1}\varphi(z),\varphi(z)^tL^{-t})\\ &= L^{-1}\mathcal{L}_2((z-\alpha)\varphi(z),\varphi(z)^t)\left(L^{-1}\right)^*\\ &= L^{-1}(H_\varphi-\alpha I)\mathcal{L}_2(\varphi(z),\varphi(z)^t)\,(L^*)^{-1}\\ &= L^{-1}(LQ)(LL^*)\,(L^*)^{-1}\\ &= QL.\end{aligned}$$

■

Nota 4.5.11 *Notemos que, teniendo en cuenta las Proposiciones 4.5.5 y 4.5.10, se deduce $Q = M$.*

Con el fin de dar una versión de la Proposición anterior para submatrices principales, se tiene

Proposición 4.5.12 *Sea* $(H_\varphi - \alpha I)_n$ *la submatriz principal de dimensión* $n \times n$ *de la matriz de Hessenberg* $H_\varphi - \alpha I$ *y consideremos la factorización*

$$(H_\varphi - \alpha I)_n = R_n Q_n,$$

donde R_n *es una matriz triangular inferior y* Q_n *es una matriz unitaria. En otras palabras* $(H_\varphi - \alpha I)_n^* = Q_n^* R_n^*$ *es la factorización QR de la matriz* $(H_\varphi - \alpha I)_n^*$*. Entonces*

$$\left(H_\psi - \alpha I\right)_{n-1} = (Q_n R_n)_{n-1}\,.$$

Demostración: Consideremos la factorización $H_\varphi - \alpha I = LM$ y sean L_{11}, M_{11} las submatrices principales de dimensión $n \times n$ de L y M, respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned} H_\varphi - \alpha I &= \left[\begin{array}{c|c} L_{11} & 0 \\ \hline L_{21} & L_{22} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} M_{11} & M_{12} \\ \hline M_{21} & M_{22} \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} L_{11}M_{11} & L_{11}M_{12} \\ \hline L_{21}M_{11} + L_{22}M_{21} & L_{21}M_{12} + L_{22}M_{22} \end{array}\right], \end{aligned}$$

y, en consecuencia,

$$\left(H_\varphi - \alpha I\right)_n = L_{11}M_{11}.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} H_\psi - \alpha I &= ML \\ &= \left[\begin{array}{c|c} M_{11}L_{11} + M_{12}L_{21} & M_{12}L_{21} \\ \hline M_{21}L_{11} + M_{22}L_{21} & M_{22}L_{21} \end{array}\right]. \end{aligned}$$

Así,

$$\left(H_\psi - \alpha I\right)_n = M_{11}L_{11} + M_{12}L_{21},$$

pero

$$M_{12}L_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & \\ m_{n-1,n} & 0 & \cdots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{n,1} & \cdots & l_{n,n} \\ \vdots & & \vdots \\ & & \\ & & \end{bmatrix} = m_{n-1,n} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ l_{n,1} & \cdots & l_{n,n} \end{bmatrix}.$$

De esta forma,

$$\left(H_\psi - \alpha I\right)_{n-1} = (M_{11}L_{11})_{n-1}\,. \tag{4.5.9}$$

Dado que $MM^* = I$, se tiene

$$M_{11}M_{11}^* = I_n - |m_{n-1,n}|^2 E_{nn},$$

donde $E_{nn} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$ es una matriz de dimensión $n \times n$ y I_n es la matriz identidad de dimensión $n \times n$.

Ahora, consideremos la matriz de dimensión $n \times n$, $E := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\delta} \end{bmatrix}$,

con $\delta = \left(1 - |m_{n-1,n}|^2\right)^{\frac{1}{2}} > 0$.

Sean $\hat{Q} = EM_{11}$ y $\hat{R} = L_{11}E^{-1}$. Probaremos que $\hat{Q}$ es una matriz unitaria de dimensión $n \times n$.

Sea $\hat{q}_i,\ i = 0, 1, \ldots, n-1$, la i-ésima fila de $\hat{Q}$. Entonces

$$\hat{q}_i = \begin{cases} m_i, & 0 \leqslant i \leqslant n-2, \\ \frac{1}{\delta} m_n, & i = n-1, \end{cases}$$

donde $m_i,\ i = 0, 1, \ldots, n-1$ es la i-ésima fila de M_{11}.

Si $0 \leqslant i, j \leqslant n-2$, entonces obtenemos

$$\left(\hat{Q}\hat{Q}^*\right)_{i,j} = \hat{q}_i\hat{q}_j^* = m_i m_j^* = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Si $i = n-1$, ó $j = n-1$ y $i \neq j$, entonces

$$\hat{q}_i\hat{q}_j^* = \frac{1}{\delta} m_i m_j^* = 0.$$

Finalmente,

$$\hat{q}_{n-1}\hat{q}_{n-1}^* = \frac{1}{\delta^2} m_{n-1} m_{n-1}^* = \frac{1}{\delta^2}\left(1 - |m_{n-1,n}|^2\right) = 1.$$

La matriz $\hat{R}$ es triangular inferior, con entradas positivas en la diagonal principal.

Además,
$$\hat{Q}^*\hat{R}^* = M_{11}^* E E^{-1} L_{11}^* = M_{11}^* L_{11}^* = \left(H_\varphi - \alpha I\right)_n^*.$$

Así, por la unicidad de la factorización QR de la matriz $\left(H_\varphi - \alpha I\right)_n^*$, se deduce

$$\hat{Q} = Q_n \text{ y } \hat{R} = R_n.$$

Pero Q_n y M_{11} difieren en la última fila, y R_n y L_{11} difieren en la última columna. Por tanto,

$$(Q_n R_n)_{n-1} = (M_{11} L_{11})_{n-1} = \left(H_\psi - \alpha I\right)_{n-1}.$$

■

Capítulo 5

Transformación de Uvarov

5.1. Transformación $\mathcal{L}_3(p,q) = \mathcal{L}(p,q) + mp(\alpha)\overline{q(\alpha)}$

Consideremos, nuevamente un funcional bilineal hermitiano $\mathcal{L}$ y sea $\mathcal{L}_3$ una perturbación del funcional bilineal $\mathcal{L}$ definida por

$$\mathcal{L}_3(p,q) = \mathcal{L}(p,q) + mp(\alpha)\overline{q(\alpha)}, \quad p,q \in \mathbb{P}, \tag{5.1.1}$$

donde $m \in \mathbb{R}$ y $|\alpha| = 1$. Dado que $m \in \mathbb{R}$, el funcional bilineal $\mathcal{L}_3$ es también hermitiano.

Esta transformación del funcional bilineal $\mathcal{L}$ es un caso particular de la transformación de Uvarov (ver **[46]**, **[70]** y **[78]**)

Proposición 5.1.1 *El funcional bilineal $\mathcal{L}_3$ es cuasi-definido si y sólo si*

$$1 + mK_{n-1}(\alpha,\alpha) \neq 0,$$

para todo $n \geqslant 1$.

Demostración: Supongamos que $\mathcal{L}_3$ es cuasi-definido y sea $\{U_n\}_{n\geqslant 0}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a $\mathcal{L}_3$.

Queremos obtener una relación entre las familias de polinomios ortogonales mónicos $\{U_n\}_{n\geqslant 0}$ y $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$. Para ello, podemos escribir

$$U_n(z) = P_n(z) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_{n,j} P_j(z), \tag{5.1.2}$$

donde $\{\lambda_{n,j}\}_{j=0}^{n-1}$ son los coeficientes de Fourier dados por

$$\lambda_{n,j} = \frac{\mathcal{L}(U_n, P_j)}{\mathcal{L}(P_j, P_j)}, \ \ j = 0, \dots, n-1.$$

De la expresión (5.1.1) y la condición de ortogonalidad de U_n con respecto a $\mathcal{L}_3$, se tiene

$$\lambda_{n,j} = \frac{\mathcal{L}_3(U_n, P_j) - mU_n(\alpha)\overline{P_j(\alpha)}}{\mathcal{L}(P_j, P_j)} = -\frac{mU_n(\alpha)\overline{P_j(\alpha)}}{\mathcal{L}(P_j, P_j)}, \ \ j = 0, \dots, n-1.$$

De esta manera,

$$U_n(z) = P_n(z) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_{n,j} P_j(z) = P_n(z) - mU_n(\alpha) K_{n-1}(z, \alpha).$$

Si hacemos $z = \alpha$ en la expresión anterior, entonces obtenemos

$$P_n(\alpha) = U_n(\alpha)\left(1 + mK_{n-1}(\alpha, \alpha)\right).$$

Si $1 + mK_{n_0-1}(\alpha, \alpha) = 0$ para algún n_0, entonces $P_{n_0}(\alpha) = 0$. esto significa que $1 + mK_{n_0}(\alpha, \alpha) = 0$, i. e., $P_{n_0+1}(\alpha) = 0$. En consecuencia

$$P_n(\alpha) = 0 \quad \text{para todo } \ n \geqslant n_0.$$

Por otra parte, teniendo en cuenta $|\alpha| = 1$, se tiene que $P^*_{n_0}(\alpha) = 0$. Aplicando la relación de recurrencia descendente (4.1.4), se obtiene $P_{n_0-1}(\alpha) = 0$, y si usamos dicha relación reiteradamente, llegamos a $P_1(\alpha) = 0$, así $P_1(z) = z - \alpha$ y $|P_1(0)| =$

1, contradiciendo el carácter cuasi-definido de $\mathcal{L}$. De esta manera

$$1 + mK_{n-1}(\alpha, \alpha) \neq 0,$$

para todo $n \geqslant 1$.

Supongamos ahora que $1 + mK_{n-1}(\alpha, \alpha) \neq 0$ para todo $n \geqslant 1$, y sea la familia de polinomios mónicos $\{U_n\}_{n\geqslant 0}$ definida por

$$U_n(z) = P_n(z) - \frac{mP_n(\alpha)}{1 + mK_{n-1}(\alpha, \alpha)} K_{n-1}(z, \alpha). \tag{5.1.3}$$

Entonces, para $0 \leqslant k \leqslant n$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_3\left(U_n(z), (z-\alpha)^k\right) &= \mathcal{L}\left(P_n(z), (z-\alpha)^k\right) - \tfrac{mP_n(\alpha)}{1+mK_{n-1}(\alpha,\alpha)} \mathcal{L}\left(K_{n-1}(z,\alpha), (z-\alpha)^k\right) \\
&= \mathbf{k}_n \delta_{n,k} - \frac{mP_n(\alpha)}{1 + mK_{n-1}(\alpha, \alpha)} \mathcal{L}\left(K_n(z,\alpha) - \tfrac{\overline{P_n(\alpha)}}{\mathbf{k}_n} P_n(z), (z-\alpha)^k\right) \\
&= \mathbf{k}_n \delta_{n,k} + m \frac{P_n(\alpha)\overline{P_n(\alpha)}}{1 + mK_{n-1}(\alpha, \alpha)} \delta_{n,k},
\end{aligned}$$

en consecuencia

$$\mathcal{L}_3\left(U_n(z), (z-\alpha)^k\right) = \mathbf{k}_n \frac{1 + mK_n(\alpha, \alpha)}{1 + mK_{n-1}(\alpha, \alpha)} \delta_{n,k}. \tag{5.1.4}$$

Así pues, $\{U_n\}_{n\geqslant 0}$ es la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a $\mathcal{L}_3$.

■

Si el funcional $\mathcal{L}$ es definido positivo y $m > 0$, entonces $1 + mK_n(\alpha, \alpha) > 0$ para todo $n \geqslant 0$. En consecuencia $\mathcal{L}_3$ es también definido positivo.

En este caso, sea $\{\sigma_n\}_{n\geqslant 0}$ la familia de polinomios ortonormales con respecto a $\mathcal{L}_3$. Para encontrar una expresión de los elementos de la familia $\{\sigma_n\}_{n\geqslant 0}$ en términos de $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$, debemos obtener la norma de U_n respecto a $\mathcal{L}_3$. Así, de (5.1.4)

$$||U_n||^2_{\mathcal{L}_3} = \mathcal{L}_3\left(U_n, U_n\right) = \frac{1}{\kappa_n^2}\frac{1 + mK_n(\alpha, \alpha)}{1 + mK_{n-1}(\alpha, \alpha)}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \sigma_n(z) &= \left(\tfrac{1}{\kappa_n||U_n||_{\mathcal{L}_3}}\right)\varphi_n(z) - \sum_{j=0}^{n-1}\tfrac{mP_n(\alpha)}{||U_n||_{\mathcal{L}_3}(1+mK_{n-1}(\alpha,\alpha))}\overline{\varphi_j(\alpha)}\varphi_j(z) \\ &= \left(\sqrt{\tfrac{1+mK_{n-1}(\alpha,\alpha)}{1+mK_n(\alpha,\alpha)}}\right)\varphi_n(z) - \sum_{j=0}^{n-1}\tfrac{m\varphi_n(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)}}{\sqrt{(1+mK_n(\alpha,\alpha))(1+mK_{n-1}(\alpha,\alpha))}}\varphi_j(z). \end{aligned} \tag{5.1.5}$$

De esta manera, hemos demostrado la siguiente

Proposición 5.1.2 *Sea $L_{\sigma\varphi}$ una matriz triangular inferior tal que* $\sigma(z) = L_{\sigma\varphi}\varphi(z)$, *donde* $\sigma(z) = [\sigma_0(z), \sigma_1(z), \ldots]^t$ *y* $\varphi(z) = [\varphi_0(z), \varphi_1(z), \ldots]^t$. *Entonces las entradas de $L_{\sigma\varphi}$ están dadas por*

$$(L_{\sigma\varphi})_{n,j} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1 + mK_{n-1}(\alpha, \alpha)}{1 + mK_n(\alpha, \alpha)}}, & n = j, \\ -\dfrac{m\varphi_n(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)}}{\sqrt{(1 + mK_n(\alpha, \alpha))(1 + mK_{n-1}(\alpha, \alpha))}}, & n > j, \\ 0, & n < j. \end{cases}$$

Para calcular $L^{-1}_{\sigma\varphi}$, hacemos

$$P_n(z) = U_n(z) + \sum_{j=0}^{n-1}\gamma_{n,j}U_j(z),$$

donde $\gamma_{n,j}$, $0 \leqslant j \leqslant n-1$, son los coeficientes de Fourier dados por

$$\gamma_{n,j} = \frac{\mathcal{L}_3(P_n, U_j)}{\mathcal{L}_3(U_j, U_j)} = \frac{\mathcal{L}(P_n, U_j) + mP_n(\alpha)\overline{U_j(\alpha)}}{||U_j||^2_{\mathcal{L}_3}} = \frac{mP_n(\alpha)\overline{U_j(\alpha)}}{||U_j||^2_{\mathcal{L}_3}}.$$

Así pues, para las familias correspondientes de polinomios ortonormales se tiene

$$\begin{aligned}\varphi_n(z) &= \kappa_n \|U_n\|_{\mathcal{L}_3} \sigma_n(z) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{m\varphi_n(\alpha)\overline{U_j(\alpha)}}{\|U_j\|_{\mathcal{L}_3}} \sigma_j(z) \\ &= \sqrt{\tfrac{1+mK_n(\alpha,\alpha)}{1+mK_{n-1}(\alpha,\alpha)}}\sigma_n(z) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{m\varphi_n(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)}}{\sqrt{(1+mK_j(\alpha,\alpha))(1+mK_{j-1}(\alpha,\alpha))}}\sigma_j(z).\end{aligned}$$

En consecuencia, hemos dado la demostración de la siguiente

Proposición 5.1.3 *Las entradas de la matriz $L_{\sigma\varphi}^{-1}$ están dadas por*

$$\left(L_{\sigma\varphi}^{-1}\right)_{n,j} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1+mK_n(\alpha,\alpha)}{1+mK_{n-1}(\alpha,\alpha)}}, & n = j, \\ \dfrac{m\varphi_n(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)}}{\sqrt{(1+mK_j(\alpha,\alpha))(1+mK_{j-1}(\alpha,\alpha))}}, & n > j \\ 0, & n < j. \end{cases}$$

Ahora, queremos establecer una relación entre las matrices de Hessenberg H_φ y H_σ asociadas a $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}_3$, respectivamente. Para ello podemos usar los resultados presentados en la Sección 4.5 del Capítulo 4, observando lo siguiente

Si al funcional bilineal $\mathcal{L}_3$ le aplicamos la transformación definida en (4.4.6), se tiene

$$|z-\alpha|^2\mathcal{L}_3 = |z-\alpha|^2\mathcal{L} = \mathcal{L}_2. \tag{5.1.6}$$

Sabemos, por la Proposición 4.5.10 que

$$H_\psi - \alpha I = ML,$$

donde M es la matriz cuasi-unitaria dada por (4.5.2) y L es una matriz triangular inferior tal que $\varphi(z) = L\psi(z)$.

Teniendo en cuenta (5.1.6), podemos entonces aplicar el mismo proceso con el funcional bilineal $\mathcal{L}_3$. De esta forma, para las familias de polinomios ortonormales

$\{\sigma_n\}_{n\geqslant 0}$ y $\{\psi_n\}_{n\geqslant 0}$ asociadas a $\mathcal{L}_3$ y $\mathcal{L}_2$, respectivamente, tenemos las relaciones siguientes

$$(z-\alpha)\psi(z) = M_3\sigma(z) \quad \text{y} \quad \sigma(z) = L_3\psi(z).$$

Entonces, por la Proposición 4.5.10, $H_\psi - \alpha I = M_3 L_3$.

Proposición 5.1.4

$$L_3 = L_{\sigma\varphi}L \quad \text{y} \quad M_3 = ML_{\sigma\varphi}^{-1}. \tag{5.1.7}$$

Demostración: Dado que $\sigma(z) = L_{\sigma\varphi}\varphi(z)$ y $\varphi(z) = L\psi(z)$, entonces se tiene $\sigma(z) = L_{\sigma\varphi}L\psi(z)$.

Por otra parte, como $\sigma(z) = L_3\psi(z)$, entonces obtenemos $L_3 = L_{\sigma\varphi}L$.

Ahora, dado que $H_\psi - \alpha I = ML = M_3L_3$, entonces

$$M_3 = MLL_3^{-1} = ML(L^{-1}L_{\sigma\varphi}^{-1}) = ML_{\sigma\varphi}^{-1}.$$

■

De esta manera, para calcular $H_\sigma - \alpha I$ partiendo de $H_\varphi - \alpha I$, necesitamos obtener las matrices M y L definidas en (4.5.3) y (4.5.4), respectivamente. Luego calculamos M_3 y L_3 mediante las expresiones (5.1.4) y, finalmente, hacemos $H_\sigma - \alpha I = L_3M_3$.

El resultado análogo para las submatrices principales es el siguiente

Proposición 5.1.5 *Sea $(H_\varphi - \alpha I)_n$ la submatriz principal de dimensión $n\times n$ de $H_\varphi - \alpha I$ y consideremos la factorización $(H_\varphi - \alpha I)_n = R_nQ_n$ donde R_n es una matriz triangular inferior y Q_n es una matriz unitaria, tal que $(H_\varphi - \alpha I)_n^* = Q_n^*R_n^*$. Entonces*

$$(H_\sigma - \alpha I)_{n-1} = \left(\hat{L}_{11}R_nQ_n\hat{L}_{11}^{-1}\right)_{n-1},$$

donde $\hat{L}_{11}$ es la submatriz principal de dimensión $n\times n$ de la matriz $L_{\sigma\varphi}$, que satisface $\sigma(z) = L_{\sigma\varphi}\varphi(z)$.

Demostración: Consideremos la factorización $H_\varphi - \alpha I = LM$, y sean L_{11}, M_{11} las submatrices principales de dimensión $n \times n$ de L y M, respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned}(M_3)_n &= M_{11}\hat{L}_{11}^{-1} + M_{12}L_{21} \quad \text{y} \\ (L_3)_n &= \hat{L}_{11}L_{11}\end{aligned}$$

donde $L_{\sigma\varphi}^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \hat{L}_{11}^{-1} & 0 \\ \hline L_{21} & L_{22} \end{array}\right]$. Por lo tanto,

$$(L_3M_3)_n = \hat{L}_{11}L_{11}\left(M_{11}\hat{L}_{11}^{-1} + M_{12}L_{21}\right),$$

pero $\hat{L}_{11}L_{11}M_{11}\hat{L}_{11}^{-1}$ y $(L_3M_3)_n$ difieren en la última fila. en consecuencia,

$$(H_\sigma - \alpha I)_{n-1} = (L_3M_3)_{n-1} = \left(\hat{L}_{11}L_{11}M_{11}\hat{L}_{11}^{-1}\right)_{n-1}.$$

Así,

$$(H_\sigma - \alpha I)_{n-1} = \left(\hat{L}_{11}R_nQ_n\hat{L}_{11}^{-1}\right)_{n-1},$$

ya que $R_nQ_n = L_{11}E^{-1}EM_{11} = L_{11}M_{11}$.

■

5.1.1. Ejemplo

Sea $\mathcal{L}$ el funcional bilineal dado por

$$\mathcal{L}(p,q) = \int_{-\pi}^{\pi} p(e^{i\theta})\overline{q(e^{i\theta})}\frac{d\theta}{2\pi},$$

y consideremos el funcional bilineal $\mathcal{L}_3$ definido por

$$\mathcal{L}_3(p,q) = \mathcal{L}(p,q) + p(1)\overline{q(1)}.$$

Es bien conocido que $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ con $\varphi_n(z) = z^n$, es la sucesión de polinomios ortonormales asociados a $\mathcal{L}$. En consecuencia $1 + K_n(1,1) = n + 2$, para todo $n \geqslant 0$.

De (4.5.5) y (4.5.6) obtenemos las entradas $m_{k,j}$ de M y $l_{k,j}$ de L, respectivamente

$$m_{k,j} = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{(k+2)(k+1)}}, & \text{si} \quad j \leqslant k, \\ \sqrt{\frac{k+1}{k+2}}, & \text{si} \quad j = k+1, \\ 0, & \text{si} \quad j > k+1, \end{cases} \quad \text{y} \quad l_{k,j} = \begin{cases} -\sqrt{\frac{k}{k+1}}, & \text{si} \quad j = k-1, \\ \sqrt{\frac{k+2}{k+1}}, & \text{si} \quad j = k, \\ 0, & \text{si} \quad j < k+1, \\ 0, & \text{si} \quad j > k. \end{cases}$$

Las entradas $\left(L_{\sigma\varphi}\right)_{k,j}$ y $\left(L_{\sigma\varphi}^{-1}\right)_{k,j}$ de las matrices triangulares inferiores $L_{\sigma\varphi}$ y $L_{\sigma\varphi}^{-1}$, son, respectivamente

$$\left(L_{\sigma\varphi}\right)_{k,j} = \begin{cases} \sqrt{\frac{k+1}{k+2}}, & \text{si} \quad k = j, \\ -\frac{1}{\sqrt{(k+1)(k+2)}}, & \text{si} \quad k > j, \end{cases} \qquad \left(L_{\sigma\varphi}^{-1}\right)_{k,j} = \begin{cases} \sqrt{\frac{k+2}{k+1}}, & \text{si} \quad k = j, \\ \frac{1}{\sqrt{(k+1)(k+2)}}, & \text{si} \quad k > j. \end{cases}$$

El siguiente paso es calcular L_3 y M_3, que se deduce de (5.1.7), y en consecuencia, las entradas de M_3 son

$$(M_3)_{k,j} = \begin{cases} -\frac{1}{(k+2)(k+1)}, & \text{si} \quad j = k, \\ \frac{\sqrt{(k+1)(k+3)}}{k+2}, & \text{si} \quad j = k+1, \\ 0, & \text{si} \quad j > k+1 \text{ ó } j < k, \end{cases}$$

y las entradas de L_3 son

$$(L_3)_{k,j} = \begin{cases} -\frac{k+1}{\sqrt{k(k+2)}}, & \text{si} \quad j = k-1, \\ 1, & \text{si} \quad j = k, \\ -\frac{1}{\sqrt{(k+1)(k+2)(j+1)(j+2)}}, & \text{si} \quad j < k-1, \\ 0, & \text{si} \quad j > k. \end{cases}$$

Finalmente, para obtener $H_\sigma - I$, necesitamos hacer la multiplicación de L_3

por M_3, del cual obtenemos

$$(H_\sigma - I)_{k,j} = \begin{cases} -\frac{1}{(k+1)(k+2)} - 1, & \text{si} \quad j = k, \\ \frac{\sqrt{(k+1)(k+3)}}{k+2}, & \text{si} \quad j = k+1, \\ 0, & \text{si} \quad j > k+1, \\ -\frac{j+3}{(j+2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(k+1)(k+2)(j+1)}}, & \text{si} \quad j < k. \end{cases}$$

5.2. Transformación $\mathcal{L}_4(p,q) = \mathcal{L}(p,q) + mp(\alpha)\bar{q}(\alpha^{-1}) + \bar{m}p(\bar{\alpha}^{-1})\bar{q}(\bar{\alpha})$

Consideremos ahora la transformación $\mathcal{L}_4$ del funcional bilineal $\mathcal{L}$ definida por

$$\mathcal{L}_4(p,q) = \mathcal{L}(p,q) + mp(\alpha)\bar{q}(\alpha^{-1}) + \bar{m}p(\bar{\alpha}^{-1})\bar{q}(\bar{\alpha}), \tag{5.2.1}$$

con $|\alpha| \neq 1$ y $m \in \mathbb{C}$. El funcional bilineal $\mathcal{L}_4$ es también hermitiano.

Proposición 5.2.1 *El funcional bilineal $\mathcal{L}_4$ es cuasi-definido si y sólo si*

$$\Lambda_n := \begin{vmatrix} 1 + mK_n(\alpha, \bar{\alpha}^{-1}) & \bar{m}K_n(\alpha, \alpha) \\ mK_n(\bar{\alpha}^{-1}, \bar{\alpha}^{-1}) & 1 + \bar{m}K_n(\bar{\alpha}^{-1}, \alpha) \end{vmatrix} \neq 0,$$

para todo $n \geqslant 0$, o equivalentemente,

$$\begin{vmatrix} K_n(\alpha, \alpha) & \frac{1}{m} + K_n(\alpha, \bar{\alpha}^{-1}) \\ \frac{1}{\bar{m}} + K_n(\bar{\alpha}^{-1}, \alpha) & K_n(\bar{\alpha}^{-1}, \bar{\alpha}^{-1}) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Demostración: Supongamos que $\mathcal{L}_4$ es cuasi-definido, y sea $\{V_n\}_{n\geqslant 0}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a $\mathcal{L}_4$. Entonces

$$V_n(z) = P_n(z) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_{n,j} P_j(z),$$

donde

$$\lambda_{n,j} = \frac{\mathcal{L}\left(V_n, P_j\right)}{\mathcal{L}\left(P_j, P_j\right)} = -\frac{mV_n(\alpha)\bar{P}_j(\alpha^{-1}) + \bar{m}V_n(\bar{\alpha}^{-1})\overline{P_j(\alpha)}}{\mathbf{k}_j}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} V_n(z) &= P_n(z) - mV_n(\alpha)\sum_{j=0}^{n-1}\mathbf{k}_j^{-1}\overline{P_j(\bar{\alpha}^{-1})}P_j(z) - \bar{m}V_n(\bar{\alpha}^{-1})\sum_{j=0}^{n-1}\mathbf{k}_j^{-1}\overline{P_j(\alpha)}P_j(z) \\ &= P_n(z) - mV_n(\alpha)K_{n-1}(z,\bar{\alpha}^{-1}) - \bar{m}V_n(\bar{\alpha}^{-1})K_{n-1}(z,\alpha). \end{aligned}$$

Ahora, si evaluamos la expresión anterior en $z = \alpha$ y $z = \bar{\alpha}^{-1}$, entonces se tiene

$$\begin{aligned} -P_n(\alpha) + \left(1 + mK_{n-1}(\alpha,\bar{\alpha}^{-1})\right)V_n(\alpha) + \bar{m}K_{n-1}(\alpha,\alpha)V_n(\bar{\alpha}^{-1}) &= 0, \\ -P_n(\bar{\alpha}^{-1}) + mK_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1},\bar{\alpha}^{-1})V_n(\alpha) + \left(1 + \bar{m}K_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1},\alpha)\right)V_n(\bar{\alpha}^{-1}) &= 0. \end{aligned}$$

o, equivalentemente

$$\begin{bmatrix} 1 + mK_n(\alpha,\bar{\alpha}^{-1}) & \bar{m}K_n(\alpha,\alpha) \\ mK_n(\bar{\alpha}^{-1},\bar{\alpha}^{-1}) & 1 + \bar{m}K_n(\bar{\alpha}^{-1},\alpha) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_n(\alpha) \\ V_n(\bar{\alpha}^{-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_n(\alpha) \\ P_n(\bar{\alpha}^{-1}) \end{bmatrix}.$$

Teniendo en cuenta la unicidad de los valores $V_n(\alpha)$ y $V_n(\bar{\alpha}^{-1})$, entonces, la matriz del sistema lineal anterior

$$B_{n-1} := \begin{bmatrix} 1 + mK_{n-1}(\alpha,\bar{\alpha}^{-1}) & mK_{n-1}(\alpha,\alpha) \\ mK_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1},\bar{\alpha}^{-1}) & 1 + \bar{m}K_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1},\alpha) \end{bmatrix}$$

debe ser no singular. En consecuencia $\Lambda_n = \det B_n \neq 0$ para todo $n \geqslant 0$.

Supongamos ahora que $\Lambda_n \neq 0$, para todo $n \geqslant 0$, y consideremos el polinomio mónico

$$V_n(z) = \frac{1}{\Lambda_{n-1}}\begin{vmatrix} P_n(z) & mK_{n-1}(z,\bar{\alpha}^{-1}) & \bar{m}K_{n-1}(z,\alpha) \\ P_n(\alpha) & 1 + mK_{n-1}(\alpha,\bar{\alpha}^{-1}) & \bar{m}K_{n-1}(\alpha,\alpha) \\ P_n(\bar{\alpha}^{-1}) & mK_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1},\bar{\alpha}^{-1}) & 1 + \bar{m}K_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1},\alpha) \end{vmatrix}, \quad n \geqslant 0. \tag{5.2.2}$$

Para $0 \leqslant k \leqslant n-1$ obtenemos

$$\mathcal{L}_4\left(V_n(z),(z-\alpha)^k\right) = \frac{1}{\Lambda_{n-1}}\begin{vmatrix} \mathcal{L}_4\left(P_n(z),(z-\alpha)^k\right) & m\mathcal{L}_4\left(K_{n-1}\left(z,\bar{\alpha}^{-1}\right),(z-\alpha)^k\right) & \bar{m}\mathcal{L}_4\left(K_{n-1}(z,\alpha),(z-\alpha)^k\right) \\ P_n(\alpha) & 1+mK_{n-1}(\alpha,\bar{\alpha}^{-1}) & \bar{m}K_{n-1}(\alpha,\alpha) \\ P_n(\bar{\alpha}^{-1}) & mK_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1},\bar{\alpha}^{-1}) & 1+\bar{m}K_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1},\alpha) \end{vmatrix}.$$

Por otra parte, para $0 \leqslant k \leqslant n-1$, se tiene

$$\mathcal{L}_4\left(P_n(z),(z-\alpha)^k\right) = mP_n(\alpha)\left(\alpha^{-1}-\bar{\alpha}\right)^k,$$
$$\mathcal{L}_4\left(K_{n-1}(z,\bar{\alpha}^{-1}),(z-\alpha)^k\right) = \left(\alpha^{-1}-\bar{\alpha}\right)^k\left(1+mK_n(\alpha,\bar{\alpha}^{-1})\right),$$
$$\mathcal{L}_4\left(K_{n-1}(z,\alpha),(z-\alpha)^k\right) = mK_{n-1}(\alpha,\alpha)\left(\alpha^{-1}-\bar{\alpha}\right)^k.$$

Así pues,

$$\mathcal{L}_4\left(V_n(z),(z-\alpha)^k\right) =$$

$$= \frac{m\left(\bar{\alpha}^{-1}-\bar{\alpha}\right)^k}{\Lambda_{n-1}}\begin{vmatrix} P_n(\alpha) & 1+mK_{n-1}(\alpha,\bar{\alpha}^{-1}) & \bar{m}K_{n-1}(\alpha,\alpha) \\ P_n(\alpha) & 1+mK_{n-1}(\alpha,\bar{\alpha}^{-1}) & \bar{m}K_{n-1}(\alpha,\alpha) \\ P_n(\bar{\alpha}^{-1}) & mK_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1},\bar{\alpha}^{-1}) & 1+\bar{m}K_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1},\alpha) \end{vmatrix} = 0.$$

Ahora,

$$\mathcal{L}_4\left(V_n,V_n\right) = \mathcal{L}_4\left(V_n,P_n\right) =$$

$$= \frac{1}{\Lambda_{n-1}}\begin{vmatrix} \mathcal{L}_4\left(P_n,P_n\right) & m\mathcal{L}_4\left(K_{n-1}(z,\bar{\alpha}^{-1}),P_n\right) & \bar{m}\mathcal{L}_4\left(K_{n-1}(z,\alpha),P_n\right) \\ P_n(\alpha) & 1+mK_{n-1}(\alpha,\bar{\alpha}^{-1}) & \bar{m}K_{n-1}(\alpha,\alpha) \\ P_n(\bar{\alpha}^{-1}) & mK_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1},\bar{\alpha}^{-1}) & 1+\bar{m}K_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1},\alpha) \end{vmatrix}.$$

Pero,

$$\mathcal{L}_4\left(P_n,P_n\right) = \mathbf{k}_n + mP_n(\alpha)\overline{P_n\left(\bar{\alpha}^{-1}\right)} + \bar{m}P_n\left(\bar{\alpha}^{-1}\right)\overline{P_n(\alpha)},$$

$$\mathcal{L}_4\left(K_{n-1}\left(z,\bar{\alpha}^{-1}\right),P_n\right) = mK_{n-1}\left(\alpha,\bar{\alpha}^{-1}\right)\overline{P_n\left(\bar{\alpha}^{-1}\right)} + \bar{m}K_{n-1}\left(\bar{\alpha}^{-1},\bar{\alpha}^{-1}\right)\overline{P_n\left(\alpha\right)},$$

$$\mathcal{L}_4\left(K_{n-1}\left(z,\alpha\right),P_n\right) = mK_{n-1}\left(\alpha,\alpha\right)\overline{P_n\left(\bar{\alpha}^{-1}\right)} + \bar{m}K_{n-1}\left(\bar{\alpha}^{-1},\alpha\right)\overline{P_n\left(\alpha\right)}.$$

de esta manera tenemos,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_4\left(V_n, V_n\right) &= \frac{1}{\Lambda_{n-1}}\begin{vmatrix} \mathbf{k}_n & -m\overline{P_n\left(\alpha^{-1}\right)} & -\bar{m}\overline{P_n\left(\alpha\right)} \\ P_n(\alpha) & 1+mK_{n-1}(\alpha,\bar{\alpha}^{-1}) & \bar{m}K_{n-1}(\alpha,\alpha) \\ P_n(\bar{\alpha}^{-1}) & mK_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1},\bar{\alpha}^{-1}) & 1+\bar{m}K_{n-1}\left(\bar{\alpha}^{-1},\alpha\right) \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\Lambda_{n-1}}\begin{vmatrix} \mathbf{k}_n & -m\overline{P_n\left(\alpha^{-1}\right)} & -\bar{m}\overline{P_n\left(\alpha\right)} \\ 0 & 1+mK_n\left(\alpha,\bar{\alpha}^{-1}\right) & \bar{m}K_n\left(\alpha,\alpha\right) \\ 0 & mK_n\left(\bar{\alpha}^{-1},\bar{\alpha}^{-1}\right) & 1+\bar{m}K_n\left(\bar{\alpha}^{-1},\alpha\right) \end{vmatrix} \\
&= \mathbf{k}_n\frac{\Lambda_n}{\Lambda_{n-1}} \neq 0.
\end{aligned} \tag{5.2.3}$$

■

Como consecuencia inmediata se tiene

Corolario 5.2.2 *Si $\mathcal{L}$ es un funcional bilineal definido positivo, entonces, el funcional bilineal $\mathcal{L}_4$ es definido positivo si y sólo si $\Lambda_{n+1}\Lambda_n > 0,$ para todo $n \geqslant 0.$*

Bajo esa condición, sea $\{\phi_n\}_{n\geqslant 0}$ la sucesión de polinomios ortonormales con respecto a $\mathcal{L}_4$. Entonces $\phi_n(z) = \frac{1}{||V_n||}V_n(z)$, donde

$$||V_n|| = ||P_n||\sqrt{\frac{\Lambda_n}{\Lambda_{n-1}}}. \tag{5.2.4}$$

En lo sucesivo, vamos a suponer que $m \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Proposición 5.2.3 *Sea $L_{\phi\varphi}$ la matriz triangular inferior tal que $\phi(z) = L_{\phi\varphi}\varphi(z)$, donde $\phi(z) = [\phi_0(z), \phi_1(z), \ldots]^t$ y $\varphi(z) = [\varphi_0(z), \varphi_1(z), \ldots]^t$. Entonces, las entradas* *de $L_{\phi\varphi}$ están dadas por*

$$(L_{\phi\varphi})_{n,j} = \begin{cases} \sqrt{\frac{\Lambda_{n-1}}{\Lambda_n}}, & n = j, \\ -\frac{m}{\sqrt{\Lambda_{n-1}\Lambda_n}}\left(A_n(\alpha)\overline{\varphi_j(\bar{\alpha}^{-1})} + A_n(\bar{\alpha}^{-1})\overline{\varphi_j(\alpha)}\right), & n > j, \\ 0, & n < j, \end{cases}$$

donde $A_n(z) := \varphi_n(z) + m\varphi_n(z)K_{n-1}(\bar{z}^{-1}, z) - m\varphi_n(\bar{z}^{-1})K_{n-1}(z,z)$. Las entradas de la matriz $L_{\phi\varphi}^{-1}$ son

$$(L_{\phi\varphi}^{-1})_{n,j} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\Lambda_{n-1}\Lambda_n}}\left(\Lambda_{n-1} + m\varphi_n(\alpha)\overline{A_n(\bar{\alpha}^{-1})} + m\varphi_n(\bar{\alpha}^{-1})\overline{A_n(\alpha)}\right), & n = j, \\ \frac{m}{\sqrt{\Lambda_{j-1}\Lambda_j}}\left(A_n(\alpha)\overline{\varphi_j(\bar{\alpha}^{-1})} + A_n(\bar{\alpha}^{-1})\overline{\varphi_j(\alpha)}\right), & n > j. \\ 0, & n < j. \end{cases}$$

Demostración: Podemos expresar $V_n(z)$ en términos de $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$

$$V_n(z) = P_n(z) + \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_{n,j} P_j(z),$$

donde $\gamma_{n,j} = \frac{\mathcal{L}(V_n, P_j)}{\|P_j\|^2}$, $0 \leqslant j \leqslant n-1$.

Así, de (5.2.4), para los polinomios ortonormales, se tiene

$$\phi_n(z) = \sqrt{\frac{\Lambda_{n-1}}{\Lambda_n}}\varphi_n(z) + \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_{n,j}\|P_j\| \sqrt{\frac{\Lambda_{n-1}}{\Lambda_n}}\varphi_j(z). \tag{5.2.5}$$

Por (5.2.1) y la condición de ortogonalidad de V_n con respecto a $\mathcal{L}_4$

$$\begin{aligned} \gamma_{n,j} &= -\frac{m}{\|P_j\|^2}\left(V_n(\alpha)\overline{P_j(\bar{\alpha}^{-1})} + V_n(\bar{\alpha}^{-1})\overline{P_j(\alpha)}\right) \\ &= -\frac{m}{\|P_j\|}\left(V_n(\alpha)\overline{\varphi_j(\bar{\alpha}^{-1})} + V_n(\bar{\alpha}^{-1})\overline{\varphi_j(\alpha)}\right). \end{aligned}$$

Por otra parte, de (5.2.2)

$$V_n(\alpha) = \frac{\|P_n\|}{\Lambda_{n-1}} A_n(\alpha) \quad \text{y} \quad V_n(\bar{\alpha}^{-1}) = \frac{\|P_n\|}{\Lambda_{n-1}} A_n(\bar{\alpha}^{-1}).$$

Así, si $n > j$ se tiene

$$(L_{\phi\varphi})_{n,j} = \gamma_{n,j}\|P_j\| \sqrt{\frac{\Lambda_{n-1}}{\Lambda_n}} = -\frac{m}{\sqrt{\Lambda_{n-1}\Lambda_n}} \left(A_n(\alpha)\overline{\varphi_j(\bar{\alpha}^{-1})} + A_n(\bar{\alpha}^{-1})\overline{\varphi_j(\alpha)} \right).$$

De (5.2.5), obtenemos $(L_{\phi\varphi})_{n,n} = \sqrt{\frac{\Lambda_{n-1}}{\Lambda_n}}$.

Por otra parte

$$\varphi_n(z) = \sum_{j=0}^{n} \beta_{n,j} \phi_j(z),$$

con $\beta_{n,j} = \mathcal{L}_4(\varphi_n, \phi_j)$.

Así,

$$\beta_{n,j} = \mathcal{L}(\varphi_n, \phi_j) + m\varphi_n(\alpha)\overline{\phi_j(\bar{\alpha}^{-1})} + m\varphi_n(\bar{\alpha}^{-1})\overline{\phi_j(\alpha)}.$$

De (5.2.2) y (5.2.4), se tiene

$$\phi_j(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\Lambda_{j-1}\Lambda_j}} A_j(\alpha) \quad \text{y} \quad \phi_j(\bar{\alpha}^{-1}) = \frac{1}{\sqrt{\Lambda_{j-1}\Lambda_j}} A_j(\bar{\alpha}^{-1}).$$

Por tanto, si $n > j$

$$\tilde{l}_{n,j}^{(-1)} = \beta_{n,j} = \frac{m}{\sqrt{\Lambda_{j-1}\Lambda_j}} \left(\varphi_n(\alpha)\overline{A_j(\bar{\alpha}^{-1})} + \varphi_n(\bar{\alpha}^{-1})\overline{A_j(\alpha)} \right),$$

y, si $n = j$

$$\tilde{l}_{n,n}^{(-1)} = \beta_{n,n} = \sqrt{\frac{\Lambda_{n-1}}{\Lambda_n}} + \frac{m}{\sqrt{\Lambda_{n-1}\Lambda_n}} \left(\varphi_n(\alpha)\overline{A_n(\bar{\alpha}^{-1})} + \varphi_n(\bar{\alpha}^{-1})\overline{A_n(\alpha)} \right).$$

∎

Notemos que, al igual que la sección anterior, si aplicamos a $\mathcal{L}_4$ la transformación descrita en (4.4.6),es decir, si hacemos $|z-\alpha|^2\mathcal{L}_4$, resulta

$$|z-\alpha|^2\mathcal{L}_4 = |z-\alpha|^2\mathcal{L} = \mathcal{L}_2. \tag{5.2.6}$$

Por la Proposición 4.5.4, se tiene

$$H_\varphi - \alpha I = LM,$$

donde M es la matriz cuasi-unitaria dada en (4.5.3) y L es la matriz triangular inferior tal que $\varphi(z) = L\psi(z)$. Además, de la Proposición 4.5.10, se tiene $H_\psi - \alpha I = ML$.

Por tanto, teniendo en cuenta (5.2.6), podemos aplicar el mismo procedimiento al funcional bilineal $\mathcal{L}_4$.De esta manera, las familias de polinomios ortonormales $\{\phi_n\}_{n\geqslant 0}$ y $\{\psi_n\}_{n\geqslant 0}$ con respecto a $\mathcal{L}_4$ y $\mathcal{L}_2$, respectivamente, satisfacen

$$(z-\alpha)\psi(z) = M_4\sigma(z) \quad \text{y} \quad \sigma(z) = L_4\psi(z).$$

Finalmente, de la proposición 4.5.10, deducimos

$$H_\psi - \alpha I = M_4 L_4.$$

Proposición 5.2.4

$$L_4 = L_{\phi\varphi}L \ \text{ y } \ M_4 = ML_{\phi\varphi}^{-1}, \tag{5.2.7}$$

donde M está dada por (4.5.3) y L es la matriz triangular inferior definida en (4.5.4).

La versión para el caso de las submatrices principales se muestra a continuación

Proposición 5.2.5 *Sea $(H_\varphi - \alpha I)_n$ la submatriz principal de dimensión $n \times n$ de $H_\varphi - \alpha I$ y consideremos la factorización $(H_\varphi - \alpha I)_n = R_n Q_n$ donde R_n es una* *matriz triangular inferior, y Q_n es una matriz unitaria tal que $(H_\varphi - \alpha I)_n^* = Q_n^* R_n^*$. Entonces*

$$\left(H_\phi - \alpha I\right)_{n-1} = \left(L_{11} R_n Q_n L_{11}^{-1}\right)_{n-1},$$

donde L_{11} es la submatriz principal de dimensión $n \times n$ de la matriz $L_{\phi\varphi}$, que satisface $\phi = L_{\phi\varphi}\varphi$.

Demostración: Es análoga a la demostración de la Proposición 5.1.5.

■

Capítulo 6

Transformación de Geronimus y funcionales definidos positivos

Sea $\mathcal{S}$ un funcional lineal hermitiano definido positivo. Como hemos visto anteriormente, el funcional $\mathcal{S}$ admite una representación integral de la forma

$$\mathcal{S}(p) = \int_0^{2\pi} p(e^{i\theta})d\mu(\theta), \quad p \in \mathbb{P},$$

donde μ es una medida no trivial de probabilidad soportada en la circunferencia unidad $\mathbb{T}$. Debido al carácter hermitiano del funcional $\mathcal{S}$, podemos definir un producto escalar

$$\langle p, q\rangle_\mu = \int_0^{2\pi} p(e^{i\theta})\overline{q(e^{i\theta})}d\mu(\theta), \quad p, q \in \mathbb{P}.$$

Sea $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ la familia de polinomios ortogonales mónicos respecto a μ y $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ la correspondiente familia de polinomios ortonormales. De (4.1.2) se tiene

$$\varphi_n(z) = \kappa_n(\mu)P_n(z), \quad n \geqslant 0.$$

Las funciones

$$q_j(t) = \int_{\mathbb{T}} \frac{\overline{\varphi_j(z)}}{t-z} d\mu(z), \quad t \notin \mathbb{T}, \quad j \geqslant 0, \tag{6.0.1}$$

se denominan *funciones de segunda especie* asociadas a μ. A partir de estas funciones, definimos

$$Q_j(t) = \int_{\mathbb{T}} \frac{\overline{P_j(z)}}{t-z} d\mu(z) = \frac{1}{\kappa_j(\mu)} q_j(t).$$

Ahora, dado $\alpha \notin \mathbb{T}$, consideremos la siguiente perturbación de la medida μ

$$d\mu_1 = \frac{d\mu}{|z-\alpha|^2}. \tag{6.0.2}$$

Esta clase de perturbación fue estudiada en **[28]** , así como la correspondiente sucesión de polinomios ortogonales. Este tipo de perturbación es un ejemplo de transformación canónica de Geronimus de la medida μ.

Sean $\left\{\tilde{P}_n\right\}_{n\geqslant 0}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos en $\mathbb{T}$ con respecto a μ_1 y $\{\psi_n\}_{n\geqslant 0}$ su correspondiente familia de polinomios ortonormales. Nuevamente , vamos a estudiar la relación entre las matrices de Hessenberg H_φ y H_ψ asociadas con el operador multiplicación por z, respecto a $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ y $\{\psi_n\}_{n\geqslant 0}$.

6.1. Resultados preliminares

Nuestro primer objetivo es encontrar una expresión para obtener la familia $\left\{\tilde{P}_n\right\}_{n\geqslant 0}$ en términos de la sucesión $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$.

Proposición 6.1.1 *Sea* $\varepsilon_n(\alpha) = \|\mu_1\| - \sum_{l=0}^{n} |q_l(\alpha)|^2$, $n \geqslant 0$. *Entonces*

$$\frac{\Delta_n(\mu_1)}{\Delta_{n-1}(\mu)} = \varepsilon_{n-1}(\alpha), \quad n \geqslant 1. \tag{6.1.1}$$

Notemos que $\|\mu_1\| = \Delta_0(\mu_1)$.

Demostración: Si consideramos la familia $\{1, z-\alpha, \ldots, (z-\alpha)^n, \ldots\}$ y definiendo

$$d_{k,j}(\mu) = \int_{\mathbb{T}} (z-\alpha)^k \overline{(z-\alpha)^j} d\mu = \int_{\mathbb{T}} (z-\alpha)^{k+1} \overline{(z-\alpha)^{j+1}} d\mu_1 = d_{k+1,j+1}(\mu_1),$$

con $k, j \geqslant 0$, entonces los polinomios ortogonales mónicos $P_n(z)$ están dados por

$$P_n(z) = \frac{1}{\Delta_{n-1}(\mu)} \begin{vmatrix} d_{0,0}(\mu) & d_{1,0}(\mu) & \cdots & d_{n,0}(\mu) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{0,n-1}(\mu) & d_{1,n-1}(\mu) & \cdots & d_{n,n-1}(\mu) \\ 1 & z-\alpha & \cdots & (z-\alpha)^n \end{vmatrix},$$

donde

$$\Delta_n(\mu_1) = \begin{vmatrix} d_{0,0}(\mu_1) & \cdots & d_{n,0}(\mu_1) \\ \vdots & & \vdots \\ & & \\ d_{0,n}(\mu_1) & \cdots & d_{n,n}(\mu_1) \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{c|ccc} d_{0,0}(\mu_1) & d_{1,0}(\mu_1) & \cdots & d_{n,0}(\mu_1) \\ \hline d_{0,1}(\mu_1) & d_{0,0}(\mu) & \cdots & d_{n-1,0}(\mu) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{0,n}(\mu_1) & d_{0,n-1,}(\mu) & \cdots & d_{n-1,n-1}(\mu) \end{array}\right|.$$

Si usamos la identidad de Sylvester (ver **[38]**, pag. 22), entonces obtenemos

$$\Delta_n(\mu_1)\Delta_{n-2}(\mu) = \Delta_{n-1}(\mu_1)\Delta_{n-1}(\mu) - \left(\frac{\Delta_{n-2}(\mu)}{\kappa_{n-1}(\mu)}\right)^2 |q_{n-1}(\alpha)|^2, \quad n \geqslant 1.$$

De ahí, deducimos

$$\frac{\Delta_n(\mu_1)}{\Delta_{n-1}(\mu)} = \frac{\Delta_{n-1}(\mu_1)}{\Delta_{n-2}(\mu)} - |q_{n-1}(\alpha)|^2, \quad n \geqslant 1.$$

De esta manera

$$\frac{\Delta_n(\mu_1)}{\Delta_{n-1}(\mu)} = \Delta_0(\mu_1) - \sum_{l=0}^{n-1} |q_l(\alpha)|^2, \quad n \geqslant 1.$$

Dado que $\Delta_0(\mu_1) = \|\mu_1\|$, el enunciado queda demostrado. ■

A continuación, como consecuencia del resultado anterior, se tiene

Corolario 6.1.2
$$\left(\frac{\kappa_n(\mu)}{\kappa_{n+1}(\mu_1)}\right)^2 = \frac{\varepsilon_n(\alpha)}{\varepsilon_{n-1}(\alpha)}, \quad n \geqslant 0,$$
donde $\varepsilon_{-1}(\alpha) = \|\mu_1\|$.

Demostración: Es fácil comprobar que

$$\left(\frac{\kappa_n(\mu)}{\kappa_{n+1}(\mu_1)}\right)^2 = \frac{\Delta_{n+1}(\mu_1)}{\Delta_n(\mu)}\frac{\Delta_{n-1}(\mu)}{\Delta_n(\mu_1)},$$

y usando (6.1.1) en la proposición anterior, obtenemos

$$\left(\frac{\kappa_n(\mu)}{\kappa_{n+1}(\mu_1)}\right)^2 = \frac{\varepsilon_n(\alpha)}{\varepsilon_{n-1}(\alpha)}, \quad n \geqslant 1.$$

Si $n = 0$, entonces se tiene

$$\left(\frac{\kappa_0(\mu)}{\kappa_1(\mu_1)}\right)^2 = \frac{\Delta_1(\mu_1)}{\Delta_0(\mu_1)\Delta_0(\mu)} = \frac{\varepsilon_0(\alpha)}{\|\mu_1\|}.$$

■

Proposición 6.1.3 *La sucesión de polinomios ortogonales mónicos* $\left\{\tilde{P}_n\right\}_{n\geqslant 0}$ *se pueden obtener mediante la relación*

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{n+1}(z) = {} & (z-\alpha)P_n(z) + \tfrac{\overline{Q_n(\alpha)}}{\varepsilon_{n-1}(\alpha)}S_n(z,\alpha), \;\; n \geqslant 1, \\ & \tilde{P}_0(z) = 1, \quad \tilde{P}_1(z) = z - \alpha + \tfrac{\overline{Q_0(\alpha)}}{\|\mu_1\|}, \end{aligned} \tag{6.1.2}$$

donde
$$S_n(z,\alpha) = \int_{\mathbb{T}} \frac{z-t}{\alpha-t} K_{n-1}(z,t)d\mu(t), \;\; n \geqslant 1, \tag{6.1.3}$$
y $K_{n-1}(z,\alpha)$ *es el núcleo reproductor de grado* $n-1$ *asociado a la familia* $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$.

Demostración: Como $\{(z-\alpha)\varphi_n(z)\}_{n\geqslant 0}$ es una base ortonormal en $(z-\alpha)\mathbb{P}$ con respecto al producto escalar

$$\langle f, g\rangle_{\mu_1} = \int_{\mathbb{T}} f(z)\overline{g(z)}d\mu_1,$$

entonces el desarrollo de Fourier del polinomio $\psi_{n+1}(z) - \psi_{n+1}(\alpha)$ en términos de la base mencionada es

$$\psi_{n+1}(z) - \psi_{n+1}(\alpha) = (z-\alpha)\sum_{j=0}^{n} \lambda_{n+1,j}\varphi_j(z), \text{ para todo } n \geqslant 0.$$

En consecuencia

$$\begin{aligned}
\lambda_{n+1,j} = & \int_{\mathbb{T}} (\psi_{n+1}(t) - \psi_{n+1}(\alpha))\,\overline{(t-\alpha)\varphi_j(t)}d\mu_1(t) \\
= & \int_{\mathbb{T}} \psi_{n+1}(t)\overline{(t-\alpha)\varphi_j(t)}d\mu_1(t) - \psi_{n+1}(\alpha)\int_{\mathbb{T}} \overline{(t-\alpha)\varphi_j(t)}d\mu_1(t) \\
= & \tfrac{\kappa_n(\mu)}{\kappa_{n+1}(\mu_1)}\delta_{n,j} + \psi_{n+1}(\alpha)\int_{\mathbb{T}} \frac{\overline{\varphi_j(t)}}{\alpha - t}d\mu(t).
\end{aligned}$$

Así obtenemos,

$$\begin{aligned}
\psi_{n+1}(z) = & \psi_{n+1}(\alpha)\left(1 + (z-\alpha)\sum_{j=0}^{n-1}\int_{\mathbb{T}} \frac{\overline{\varphi_j(t)}}{\alpha - t}\varphi_j(z)d\mu(t)\right) + \\
& + \left[\tfrac{\kappa_n(\mu)}{\kappa_{n+1}(\mu_1)} + q_n(\alpha)\psi_{n+1}(\alpha)\right](z-\alpha)\varphi_n(z) \\
= & \psi_{n+1}(\alpha)\int_{\mathbb{T}} \frac{z-t}{\alpha - t}K_{n-1}(z,t)d\mu(t) + \\
& + \left[\tfrac{\kappa_n(\mu)}{\kappa_{n+1}(\mu_1)} + q_n(\alpha)\psi_{n+1}(\alpha)\right](z-\alpha)\varphi_n(z).
\end{aligned}$$

Si re-escribimos la expresión anterior en términos de las sucesiones de polinomios ortogonales mónicos $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ y $\left\{\tilde{P}_n\right\}_{n\geqslant 0}$, tenemos

$$\tilde{P}_{n+1}(z) = \tilde{P}_{n+1}(\alpha)S_n(z,\alpha) + \left(\left(\tfrac{\kappa_n(\mu)}{\kappa_{n+1}(\mu_1)}\right)^2 + \kappa_n(\mu)^2 Q_n(\alpha)\tilde{P}_{n+1}(\alpha)\right)(z-\alpha)P_n(z). \quad (6.1.4)$$

Notemos que $S_n(z, \alpha; \mu)$ es un polinomio de grado n. Entonces, para cada $n \geqslant 0$, teniendo en cuenta los coeficientes de z^{n+1} en ambos miembros de (6.1.4), se deduce

$$\frac{1}{\kappa_n(\mu)} - \frac{1}{\kappa_{n+1}(\mu_1)} = Q_n(\alpha)\tilde{P}_{n+1}(\alpha), \tag{6.1.5}$$

y del corolario 6.1.2,

$$\begin{aligned}\tilde{P}_{n+1}(\alpha) &= \left(\frac{\kappa_n(\mu)}{\kappa_{n+1}(\mu_1)}\right)^2 \frac{\overline{Q_n(\alpha)}}{\varepsilon_n(\alpha)} \\ &= \frac{\overline{Q_n(\alpha)}}{\varepsilon_{n-1}(\alpha)}.\end{aligned}$$

Finalmente, de la expresión (6.1.4), obtenemos

$$\tilde{P}_{n+1}(z) = (z-\alpha)P_n(z) + \tfrac{\overline{Q_n(\alpha)}}{\varepsilon_{n-1}(\alpha)} S_n(z, \alpha; \mu).$$

■

Nota 6.1.4 *Si usamos en (6.1.3) la fórmula de Christoffel-Darboux (4.1.8), entonces la sucesión* $\left\{\tilde{P}_n\right\}_{n\geqslant 0}$ *satisface*

$$\tilde{P}_{n+1}(z) = \left(z - \alpha\frac{\varepsilon_n(\alpha)}{\varepsilon_{n-1}(\alpha)}\right)P_n(z) + \frac{\overline{q_n(\alpha)}\,\overline{q_n(\bar{\alpha}^{-1})}}{\varepsilon_{n-1}(\alpha)\alpha^{n+1}}P_n^*(z), \quad n \geqslant 1. \tag{6.1.6}$$

Este resultado se puede ver con más detalle en **[28]**.

6.2. Matrices de Hessenberg y la transformación de Geronimus

Con el fin de obtener una relación entre las matrices de Hessenberg H_φ y H_ψ, la expresión (6.0.2), es equivalente a

$$d\mu = |z-\alpha|^2 d\mu_1. \tag{6.2.1}$$

En [17] se ha obtenido una relación entre dichas matrices

$$H_\psi - \alpha I = LM, \quad \text{y} \quad H_\varphi - \alpha I = ML, \tag{6.2.2}$$

donde L es una matriz triangular inferior, tal que

$$\psi(z) = L\varphi(z)$$

y M es una matriz de Hessenberg inferior que satisface

$$(z-\alpha)\varphi(z) = M\psi(z),$$

donde $\varphi(z) = [\varphi_0(z), \varphi_1(z), \ldots]^t$ y $\psi(z) = [\psi_0(z), \psi_1(z), \ldots]^t$.

Por tanto, nuestro segundo objetivo es encontrar expresiones explícitas para M y L.

Proposición 6.2.1 ([54]) *Las sucesiones $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ y $\{\psi_n\}_{n\geqslant 0}$ satisfacen*

$$(z-\alpha)\varphi(z) = M\psi(z),$$

donde $\varphi(z) = [\varphi_0(z), \varphi_1(z), \ldots]^t$, $\psi(z) = [\psi_0(z), \psi_1(z), \ldots]^t$, y M es una matriz de Hessenberg inferior con entradas

$$m_{k,j} = \begin{cases} -\dfrac{\overline{q_k(\alpha)}}{\sqrt{\|\mu_1\|}}, & si \quad j=0, k\geqslant 0, \\ \sqrt{\dfrac{\varepsilon_0(\alpha)}{\|\mu_1\|}}, & si \quad k=0, j=1, \\ -\dfrac{\overline{q_k(\alpha)}q_0(\alpha)}{\sqrt{\|\mu_1\|}\sqrt{\varepsilon_0(\alpha)}}, & si \quad j=1, k\geqslant 1, \\ -\dfrac{\overline{q_k(\alpha)}q_{j-1}(\alpha)}{\sqrt{\varepsilon_{j-2}(\alpha)}\sqrt{\varepsilon_{j-1}(\alpha)}}, & si \quad 2\leqslant j\leqslant k, \\ \sqrt{\dfrac{\varepsilon_k(\alpha)}{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}}, & si \quad j=k+1, \\ 0, & si \quad j>k+1. \end{cases} \tag{6.2.3}$$

Demostración: Teniendo en cuenta (6.1.2) para $n = 0$, obtenemos

$$\tilde{P}_1(z) - \frac{\overline{Q_0(\alpha)}}{\|\mu_1\|}\tilde{P}_0(z) = (z-\alpha)P_0(z)$$

y, en consecuencia,

$$\frac{\kappa_0(\mu)}{\kappa_1(\mu_1)}\psi_1(z) - \frac{\overline{q_0(\alpha)}}{\|\mu_1\|^{\frac{1}{2}}}\psi_0(z) = (z-\alpha)\varphi_0(z).$$

Ahora, para $n = 1$,

$$\begin{aligned}\tilde{P}_2(z) - \beta_2\frac{\|\mu_1\|}{\overline{Q_0(\alpha)}}\tilde{P}_1(z) &= (z-\alpha)\left[P_1(z) + \beta_2\left(q_0(\alpha)\varphi_0(z) - \frac{\|\mu_1\|}{\overline{Q_0(\alpha)}}P_0(z)\right)\right]\\ \tilde{P}_2(z) - \frac{\overline{Q_1(\alpha)}\|\mu_1\|}{\varepsilon_0(\alpha)\overline{Q_0(\alpha)}}\tilde{P}_1(z) &= (z-\alpha)\left[P_1(z) - \left(\frac{\overline{Q_1(\alpha)}}{\overline{q_0(\alpha)}}\right)\varphi_0(z)\right].\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\frac{\kappa_1(\mu)}{\kappa_2(\mu_1)}\psi_2(z) - \frac{\|\mu_1\|}{\varepsilon_0(\alpha)}\frac{\overline{q_1(\alpha)}}{\overline{q_0(\alpha)}}\frac{\kappa_0(\mu)}{\kappa_1(\mu_1)}\psi_1(z) = (z-\alpha)\left(\varphi_1(z) - \frac{\overline{q_1(\alpha)}}{\overline{q_0(\alpha)}}\varphi_0(z)\right).$$

Finalmente, para $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}\tilde{P}_{n+1}(z) - \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}\tilde{P}_n(z) = \quad & (z-\alpha)\Big[P_n(z) - \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}P_{n-1}(z) + \\ & +\beta_{n+1}q_{n-1}(\alpha)\varphi_{n-1}(z)\Big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{P}_{n+1}(z) - \frac{\overline{Q_n(\alpha)}\varepsilon_{n-2}(\alpha)}{Q_{n-1}(\alpha)\varepsilon_{n-1}(\alpha)}\tilde{P}_n(z) = \quad & (z-\alpha)\Big[P_n(z)\\ & -\frac{\overline{Q_n(\alpha)}}{\varepsilon_{n-1}(\alpha)}\left(\frac{\varepsilon_{n-2}(\alpha)}{\kappa_{n-1}(\mu)\overline{Q_{n-1}(\alpha)}} - q_{n-1}(\alpha)\right)\varphi_{n-1}(z)\Big],\end{aligned}$$

en consecuencia,

$$\tilde{P}_{n+1}(z) - \frac{\overline{Q_n(\alpha)}}{\overline{Q_{n-1}(\alpha)}} \frac{\varepsilon_{n-2}(\alpha)}{\varepsilon_{n-1}(\alpha)} \tilde{P}_n(z) = \begin{aligned}[t] &(z-\alpha)\Big[P_n(z) \\ &-\beta_{n+1}\left(\frac{\varepsilon_{n-2}(\alpha)}{\overline{q_{n-1}(\alpha)}} - q_{n-1}(\alpha)\right)\varphi_{n-1}(z)\Big]. \end{aligned}$$

Luego

$$\tilde{P}_{n+1}(z) - \frac{\kappa_{n-1}(\mu)}{\kappa_n(\mu)} \frac{\overline{q_n(\alpha)}}{\overline{q_{n-1}(\alpha)}} \frac{\varepsilon_{n-2}(\alpha)(\mu)}{\varepsilon_{n-1}(\alpha)(\mu_1)} \tilde{P}_n(z) = (z-\alpha)\left[P_n(z) - \frac{\overline{q_n(\alpha)}}{\kappa_n(\mu)\overline{q_{n-1}(\alpha)}}\varphi_{n-1}(z)\right].$$

o, equivalentemente, para los polinomios ortonormales

$$\frac{\kappa_n(\mu)}{\kappa_{n+1}(\mu_1)}\psi_{n+1}(z) - \frac{\kappa_n(\mu_1)}{\kappa_{n-1}(\mu)} \frac{\overline{q_n(\alpha)}}{\overline{q_{n-1}(\alpha)}}\psi_n(z) = (z-\alpha)\left[\varphi_n(z) - \frac{\overline{q_n(\alpha)}}{\overline{q_{n-1}(\alpha)}}\varphi_{n-1}(z)\right].$$

De esta forma, teniendo en cuenta el Corolario 6.1.2

$$\left(\frac{\varepsilon_n(\alpha)}{\varepsilon_{n-1}(\alpha)}\right)^{1/2}\psi_{n+1}(z) - \left(\frac{\varepsilon_{n-2}(\alpha)}{\varepsilon_{n-1}(\alpha)}\right)^{1/2} \frac{\overline{q_n(\alpha)}}{\overline{q_{n-1}(\alpha)}}\psi_n(z) = (z-\alpha)\left[\varphi_n(z) - \frac{\overline{q_n(\alpha)}}{\overline{q_{n-1}(\alpha)}}\varphi_{n-1}(z)\right].$$

Si representamos las expresiones anteriores en forma matricial, se obtiene

$$(z-\alpha)\tilde{M}\varphi(z) = \hat{M}\psi(z), \tag{6.2.4}$$

donde $\tilde{M}$ y $\hat{M}$ son matrices bidiagonales inferior y superior respectivamente, con entradas

$$\tilde{m}_{k,j} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ -\frac{\overline{q_k(\alpha)}}{\overline{q_{k-1}(\alpha)}}, & j = k-1, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \qquad \hat{m}_{k,j} = \begin{cases} -\frac{\overline{q_0(\alpha)}}{\sqrt{\|\mu_1\|}}, & j = k = 0, \\ -\frac{\overline{q_1(\alpha)}}{\overline{q_0(\alpha)}}\sqrt{\frac{\|\mu_1\|}{\varepsilon_0(\alpha)}}, & j = k = 1, \\ -\frac{\overline{q_k(\alpha)}}{\overline{q_{k-1}(\alpha)}}\sqrt{\frac{\varepsilon_{k-2}(\alpha)}{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}}, & j = k \geqslant 2, \\ \sqrt{\frac{\varepsilon_0(\alpha)}{\|\mu_1\|}}, & k = 0, j = 1, \\ \sqrt{\frac{\varepsilon_k(\alpha)}{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}}, & j = k+1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es fácil verificar que $\tilde{M}$ es una matriz no singular. Por tanto, la expresión (6.2.4) es equivalente a

$$(z-\alpha)\varphi(z) = \tilde{M}^{-1}\hat{M}\psi(z).$$

Como consecuencia,

$$M = \tilde{M}^{-1}\hat{M}. \tag{6.2.5}$$

$\tilde{M}^{-1}$ es una matriz triangular inferior con entradas $\tilde{m}_{k,j}^{(-1)}$ dadas por

$$\tilde{m}_{k,j}^{(-1)} = \begin{cases} \frac{\overline{q_k(\alpha)}}{\overline{q_j(\alpha)}}, & 0 \leqslant j \leqslant k, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Así, la multiplicación en (6.2.5) produce (6.2.3).

■

Por otra parte, la matriz M es cuasi-unitaria (ver **[55]**). De hecho se tiene

Proposición 6.2.2

(i) $MM^* = I$

(ii) $M^*M = I - \varepsilon_\infty(\alpha)\psi(\alpha)\psi(\alpha)^*$ *donde*

$$\varepsilon_\infty(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n(\alpha) = \|\mu_1\| - \sum_{l=0}^{\infty} |q_l(\alpha)|^2 \geqslant 0,$$

Demostración: (i)

$$\begin{aligned} I &= \langle \varphi(z), \varphi(z)^t \rangle_\mu \\ &= \langle (z-\alpha)\varphi(z), (z-\alpha)\varphi(z)^t \rangle_{\mu_1} \\ &= \langle M\psi(z), \psi(z)^t M^t \rangle_{\mu_1} \\ &= M\langle \psi(z), \psi(z)^t \rangle_{\mu_1} M^* = MM^* \end{aligned}$$

(ii)

$$(M^*)_{(0)}M^{(0)} = \kappa_0(\mu_1)^2 \sum_{l=0}^{\infty} |q_l(\alpha)|^2 = 1 - \frac{\varepsilon_\infty(\alpha)}{\|\mu_1\|}$$

$$\begin{aligned} (M^*)_{(1)}M^{(1)} &= \tfrac{1}{\varepsilon_0(\alpha)}\left(\varepsilon_0(\alpha)^2 + |q_0(\alpha)|^2 \sum_{l=1}^{\infty} |q_l(\alpha)|^2\right) \\ &= \tfrac{1}{\|\mu_1\|\varepsilon_0(\alpha)}\left(\|\mu_1\|\varepsilon_0(\alpha) - \|\mu_1\||q_0(\alpha)|^2 + |q_0(\alpha)|^2 \sum_{l=0}^{\infty} |q_l(\alpha)|^2\right) \\ &= 1 - \tfrac{|q_0(\alpha)|^2}{\|\mu_1\|\varepsilon_0(\alpha)}\varepsilon_\infty(\alpha). \end{aligned}$$

Para $j \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} (M^*)_{(j)}M^{(j)} &= \tfrac{\varepsilon_{j-1}(\alpha)}{\varepsilon_{j-2}(\alpha)}\left(1 + \tfrac{|q_{j-1}(\alpha)|^2}{\varepsilon_{j-1}(\alpha)^2} \sum_{l=j}^{\infty} |q_l(\alpha)|^2\right) \\ &= \tfrac{1}{\varepsilon_{j-2}(\alpha)\varepsilon_{j-1}(\alpha)}\left(\varepsilon_{j-1}(\alpha)^2 + |q_{j-1}(\alpha)|^2 \sum_{l=j}^{\infty} |q_l(\alpha)|^2\right) \\ &= 1 - \tfrac{|q_{j-1}(\alpha)|^2}{\varepsilon_{j-2}(\alpha)\varepsilon_{j-1}(\alpha)}\varepsilon_\infty(\alpha). \end{aligned}$$

$$(M^*)_{(0)}M^{(1)} = -\tfrac{q_0(\alpha)}{\|\mu_1\|\sqrt{\|\mu_1\| - |q_0(\alpha)|^2}}\varepsilon_\infty(\alpha).$$

Para $j \geqslant 2$,

$$(M^*)_{(0)}M^{(j)} = -\frac{q_{j-1}(\alpha)}{\sqrt{\|\mu_1\|}\sqrt{\varepsilon_{j-2}(\alpha)\varepsilon_{j-1}(\alpha)}}\varepsilon_\infty(\alpha)$$

$$\begin{aligned}(M^*)_{(1)}M^{(j)} &= -\frac{\overline{q_0(\alpha)}q_{j-1}(\alpha)\sqrt{\varepsilon_{j-1}(\alpha)}}{\sqrt{\|\mu_1\|}\sqrt{\varepsilon_0(\alpha)\varepsilon_{j-2}(\alpha)}}\left[1-\frac{1}{\varepsilon_{j-1}(\alpha)}\sum_{l=j}^{\infty}|q_l(\alpha)|^2\right]\\ &= -\frac{\overline{q_0(\alpha)}q_{j-1}(\alpha)}{\sqrt{\|\mu_1\|}\sqrt{\varepsilon_0(\alpha)\varepsilon_{j-2}(\alpha)\varepsilon_{j-1}(\alpha)}}\varepsilon_\infty(\alpha).\end{aligned}$$

Finalmente, para $2 \leqslant k < j$,

$$\begin{aligned}(M^*)_{(k)}M^{(j)} &= -\frac{\overline{q_{k-1}(\alpha)}q_{j-1}(\alpha)\sqrt{\varepsilon_{j-1}(\alpha)}}{\sqrt{\varepsilon_{k-2}(\alpha)\varepsilon_{k-1}(\alpha)\varepsilon_{j-2}(\alpha)}}\left[1-\frac{1}{\varepsilon_{j-1}(\alpha)}\sum_{l=j}^{\infty}|q_l(\alpha)|^2\right]\\ &= -\frac{\overline{q_{k-1}(\alpha)}q_{j-1}(\alpha)}{\sqrt{\varepsilon_{k-2}(\alpha)\varepsilon_{k-1}(\alpha)\varepsilon_{j-2}(\alpha)\varepsilon_{j-1}(\alpha)}}\varepsilon_\infty(\alpha).\end{aligned}$$

Dado que $\tilde{P}_{n+1}(\alpha) = \frac{\overline{Q_n(\alpha)}}{\varepsilon_{n-1}(\alpha)}$ con $n \geqslant 1$, tenemos

$$\begin{aligned}\psi_{n+1}(\alpha) &= \frac{\kappa_{n+1}(\mu_1)}{\kappa_n(\mu)}\frac{\overline{q_n(\alpha)}}{\varepsilon_{n-1}(\alpha)}\\ &= \frac{\overline{q_n(\alpha)}}{\sqrt{\varepsilon_{n-1}(\alpha)\varepsilon_n(\alpha)}}, \quad n \geqslant 1.\end{aligned}$$

■

Ahora, sea L la matriz triangular inferior tal que $\psi(z) = L\varphi(z)$. Entonces, teniendo en cuenta (6.2.4), obtenemos

$$\hat{M}L = \tilde{M}(H_\varphi - \alpha I). \tag{6.2.6}$$

Las entradas $\tilde{h}_{k,j}$ de la matriz $\tilde{H} := \tilde{M}(H_\varphi - \alpha I)$ están dadas por

$$\tilde{h}_{k,j} = \begin{cases} -\frac{\varphi_1(0)\overline{\varphi_0(0)}}{\kappa_1(\mu)\kappa_0(\mu)}, & j = k = 0, \\ -\frac{\kappa_{k-1}(\mu)\overline{q_k(\alpha)}}{\kappa_k(\mu)q_{k-1}(\alpha)} - \frac{\varphi_{k+1}(0)\overline{\varphi_k(0)}}{\kappa_k(\mu)\kappa_{k+1}(\mu)}, & j = k, \\ \frac{\kappa_k(\mu)}{\kappa_{k+1}(\mu)}, & j = k+1, \\ \frac{\overline{\varphi_j(0)}}{\kappa_k(\mu)}\left(\frac{\overline{q_k(\alpha)}}{q_{k-1}(\alpha)}\frac{\varphi_k(0)}{\kappa_{k-1}(\mu)} - \frac{\varphi_{k+1}(0)}{\kappa_{k+1}(\mu)}\right), & j \leqslant k-1, \\ 0, & j > k+1, \end{cases}$$

y las entradas $\hat{l}_{k,j}$ de $\hat{L} = \hat{M}L$ son

$$\hat{l}_{k,j} = \begin{cases} -\frac{\overline{q_0(\alpha)}}{\sqrt{\|\mu_1\|}}l_{0,0} + \sqrt{\frac{\varepsilon_1(\alpha)}{\varepsilon_0(\alpha)}}l_{1,0}, & j = k = 0, \\ -\frac{\overline{q_1(\alpha)}}{q_0(\alpha)}\sqrt{\frac{\|\mu_1\|}{\varepsilon_0(\alpha)}}l_{1,1} + \sqrt{\frac{\varepsilon_1(\alpha)}{\varepsilon_0(\alpha)}}l_{2,1}, & j = k = 1, \\ \sqrt{\frac{\varepsilon_0(\alpha)}{\|\mu_1\|}}l_{1,1}, & k = 0,\, j = 1, \\ -\frac{\overline{q_1(\alpha)}}{q_0(\alpha)}\sqrt{\frac{\|\mu_1\|}{\varepsilon_0(\alpha)}}l_{1,0} + \sqrt{\frac{\varepsilon_1(\alpha)}{\varepsilon_0(\alpha)}}l_{2,0}, & k = 1,\, j = 0, \\ \sqrt{\frac{\varepsilon_0(\alpha)}{\|\mu_1\|}}l_{1,1}, & k = 0,\, j = 1, \\ \sqrt{\frac{\varepsilon_k(\alpha)}{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}}l_{k+1,k+1}, & j = k+1, \\ -\frac{\overline{q_k(\alpha)}}{q_{k-1}(\alpha)}\sqrt{\frac{\varepsilon_{k-2}(\alpha)}{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}}l_{k,j} + \sqrt{\frac{\varepsilon_k(\alpha)}{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}}l_{k+1,j}, & j \leqslant k, \\ 0, & j > k+1. \end{cases}$$

Dado que $l_{0,0} = \sqrt{\frac{\|\mu\|}{\|\mu_1\|}}$ y teniendo en cuenta (6.2.6), las entradas $l_{k,j}$ de L

satisfacen

$$
\begin{aligned}
l_{1,0} &= \sqrt{\frac{\|\mu_1\|}{\varepsilon_0(\alpha)}}\left(\tilde{h}_{0,0} + \frac{\overline{q_0(\alpha)}\sqrt{\|\mu\|}}{\|\mu_1\|}\right),\\
l_{2,0} &= \sqrt{\frac{\varepsilon_0(\alpha)}{\varepsilon_1(\alpha)}}\left(\tilde{h}_{1,0} + \frac{\overline{q_1(\alpha)}}{\overline{q_0(\alpha)}}\sqrt{\frac{\|\mu_1\|}{\varepsilon_0(\alpha)}}l_{1,0}\right),\\
l_{k+1,0} &= \sqrt{\frac{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}{\varepsilon_k(\alpha)}}\left(\tilde{h}_{k,0} + \frac{\overline{q_k(\alpha)}}{\overline{q_{k-1}(\alpha)}}\sqrt{\frac{\varepsilon_{k-2}(\alpha)}{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}}l_{k,0}\right), \quad k \geqslant 2.\\
\\
l_{1,1} &= \sqrt{\frac{\|\mu_1\|}{\varepsilon_0(\alpha)}}\tilde{h}_{0,1},\\
l_{2,1} &= \sqrt{\frac{\varepsilon_0(\alpha)}{\varepsilon_1(\alpha)}}\left(\tilde{h}_{1,1} + \frac{\overline{q_1(\alpha)}}{\overline{q_0(\alpha)}}\sqrt{\frac{\|\mu_1\|}{\varepsilon_0(\alpha)}}l_{1,1}\right),\\
l_{k+1,1} &= \sqrt{\frac{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}{\varepsilon_k(\alpha)}}\left(\tilde{h}_{k,1} + \frac{\overline{q_k(\alpha)}}{\overline{q_{k-1}(\alpha)}}\sqrt{\frac{\varepsilon_{k-2}(\alpha)}{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}}l_{k,1}\right), \quad k \geqslant 2.\\
\\
l_{k+1,k+1} &= \sqrt{\frac{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}{\varepsilon_k(\alpha)}}\tilde{h}_{k,k+1}, \quad k \geqslant 1,\\
l_{k+1,j} &= \sqrt{\frac{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}{\varepsilon_k(\alpha)}}\left(\tilde{h}_{k,j} + \frac{\overline{q_k(\alpha)}}{\overline{q_{k-1}(\alpha)}}\sqrt{\frac{\varepsilon_{k-2}(\alpha)}{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}}l_{k,j}\right), \quad k \geqslant 1, j \geqslant 2, j \leqslant k+1.
\end{aligned}
\tag{6.2.7}
$$

O, de manera más explícita,

$$
l_{k,j} = \begin{cases}
\sqrt{\dfrac{\|\mu\|}{\|\mu_1\|}}, & \text{si} \quad j = k = 0,\\[2ex]
\dfrac{\overline{q_{k-1}(\alpha)}}{\sqrt{\varepsilon_{k-2}(\alpha)\varepsilon_{k-1}(\alpha)}}\left(\sqrt{\|\mu\|} + \displaystyle\sum_{l=0}^{k-1}\frac{\varepsilon_{l-1}(\alpha)}{\overline{q_l(\alpha)}}\tilde{h}_{l,0}\right), & \text{si} \quad j = 0, k > 1,\\[2ex]
\dfrac{\overline{q_{k-1}(\alpha)}}{\sqrt{\varepsilon_{k-2}(\alpha)\varepsilon_{k-1}(\alpha)}}\displaystyle\sum_{l=0}^{k-1}\frac{\varepsilon_{l-1}(\alpha)}{\overline{q_l(\alpha)}}\tilde{h}_{l,1}, & \text{si} \quad j = 1, k \geqslant 0,\\[2ex]
\sqrt{\dfrac{\varepsilon_{k-2}(\alpha)}{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}}\tilde{h}_{k-1,k}, & \text{si} \quad j = k \geqslant 1,\\[2ex]
\dfrac{\overline{q_{k-1}(\alpha)}}{\sqrt{\varepsilon_{k-2}(\alpha)\varepsilon_{k-1}(\alpha)}}\displaystyle\sum_{l=j-1}^{k}\frac{\varepsilon_{l-1}(\alpha)}{\overline{q_l(\alpha)}}\tilde{h}_{l,j}, & \text{si} \quad j < k.
\end{cases}
\tag{6.2.8}
$$

Para las submatrices principales se tiene la siguiente

Proposición 6.2.3 *Sean $(H_\psi - \alpha I)_n$, M_n y L_n las submatrices principales de dimensión $n \times n$ de $H_\psi - \alpha I$, M y L respectivamente. Entonces*

(*i*) $(H_\psi - \alpha I)_n = L_n M_n$.

(ii) *La factorización QR de* $(H_\psi - \alpha I)_n^*$ *es*

$$(H_\psi - \alpha I)_n^* = \hat{Q}_n^* \hat{R}_n^*,$$

donde $\hat{Q}_n = EM_n$, $\hat{R}_n = L_n E^{-1}$ *y* E *es una matriz diagonal con entradas* $E_{k,k}$ *dadas por*

$$E_{k,k} = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant k \leqslant n-1, \\ \frac{|q_n(\alpha)|}{\sqrt{\varepsilon_{n-1}(\alpha)}}, & k = n. \end{cases}$$

Demostración: (i) La expresión (6.2.2) escrita mediante matrices por bloques, resulta ser

$$\begin{aligned} H_\psi - \alpha I &= \left[\begin{array}{c|c} L_n & 0 \\ \hline L_{21} & L_{22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} M_n & M_{12} \\ \hline M_{21} & M_{22} \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} L_n M_n & L_n M_{12} \\ \hline L_{21} M_n + L_{22} M_{21} & L_{21} M_{12} + L_{22} M_{22} \end{array}\right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(H_\psi - \alpha I)_n = L_n M_n$.

(ii) La matriz $\hat{R}_n$ es triangular inferior con entradas positivas en su diagonal principal, de manera que, basta probar que la matriz $\hat{Q}_n$ es unitaria. De hecho,

$$\left(\hat{Q}_n^*\right)_{(0)} \left(\hat{Q}_n\right)^{(0)} = \frac{1}{\|\mu_1\|} \left(\sum_{l=0}^{n-2} |q_l(\alpha)|^2 + \varepsilon_{n-2}(\alpha) \right) = 1,$$

$$\left(\hat{Q}_n^*\right)_{(n-1)} \left(\hat{Q}_n\right)^{(n-1)} = \frac{\varepsilon_{n-2}(\alpha)}{\varepsilon_{n-3}(\alpha)} + \frac{|q_{n-2}(\alpha)|^2}{\varepsilon_{n-3}(\alpha)} = 1.$$

Para $1 \leqslant k \leqslant n-2$, se tiene

$$\begin{aligned} \left(\hat{Q}_n^*\right)_{(k)} \left(\hat{Q}_n\right)^{(k)} &= \frac{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}{\varepsilon_{k-2}(\alpha)} + \frac{|q_{k-1}(\alpha)|^2}{\varepsilon_{k-2}(\alpha)\varepsilon_{k-1}(\alpha)} \left(\sum_{l=k}^{n-2} |q_l(\alpha)|^2 + \varepsilon_{n-2}(\alpha) \right) \\ &= \frac{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}{\varepsilon_{k-2}(\alpha)} + \frac{|q_{k-1}(\alpha)|^2}{\varepsilon_{k-2}(\alpha)} = 1, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\left(\hat{Q}_n^*\right)_{(0)}\left(\hat{Q}_n\right)^{(k)} &= -\frac{q_{k-1}(\alpha)}{\|\mu_1\|}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}{\varepsilon_{k-2}(\alpha)}}-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{k-2}(\alpha)\varepsilon_{k-1}(\alpha)}}\left[\sum_{l=k}^{n-2}|q_l(\alpha)|^2+\varepsilon_{n-2}(\alpha)\right]\right)\\
&= -\frac{q_{k-1}(\alpha)}{\|\mu_1\|}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}{\varepsilon_{k-2}(\alpha)}}-\sqrt{\frac{\varepsilon_{k-1}(\alpha)}{\varepsilon_{k-2}(\alpha)}}\right)=0.
\end{aligned}
$$

Ahora, para $1 \leqslant j < k \leqslant n-2$

$$
\begin{aligned}
\left(\hat{Q}_n^*\right)_{(k)}\left(\hat{Q}_n\right)^{(j)} &= -\frac{\overline{q_{j-2}(\alpha)}q_{j-1}(\alpha)}{\varepsilon_{j-2}(\alpha)}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_{j-1}(\alpha)}{\varepsilon_{j-3}(\alpha)}}-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{j-3}(\alpha)\varepsilon_{j-1}(\alpha)}}\left[\sum_{l=j}^{n-2}|q_l(\alpha)|^2+\varepsilon_{n-2}(\alpha)\right]\right)\\
&= -\frac{\overline{q_{j-2}(\alpha)}q_{j-1}(\alpha)}{\varepsilon_{j-2}(\alpha)}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_{j-1}(\alpha)}{\varepsilon_{j-3}(\alpha)}}-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{j-3}(\alpha)\varepsilon_{j-1}(\alpha)}}\varepsilon_{j-1}(\alpha)\right)=0.
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
\left(\hat{Q}_n^*\right)_{(n-1)}\left(\hat{Q}_n\right)^{(k)} = \frac{\overline{q_{k-1}(\alpha)}q_{n-2}(\alpha)\varepsilon_{n-2}(\alpha)}{\sqrt{\varepsilon_{k-2}(\alpha)\varepsilon_{k-1}(\alpha)\varepsilon_{n-3}(\alpha)\varepsilon_{n-2}(\alpha)}}-\sqrt{\frac{\varepsilon_{n-2}(\alpha)}{\varepsilon_{n-3}(\alpha)}}\frac{\overline{q_{k-1}(\alpha)}q_{n-2}(\alpha)}{\sqrt{\varepsilon_{k-2}(\alpha)\varepsilon_{k-1}(\alpha)}}=0.
$$

Así pues, $\hat{Q}_n$ es una matriz unitaria.

■

6.3. Ejemplos

Ejemplo 6.3.1 *Consideremos en la circunferencia unidad, la medida*

$$
d\mu = |z-1|^2\frac{d\theta}{2\pi}, \quad z = \mathrm{e}^{i\theta},
$$

donde $d\theta$ es la medida de Lebesgue. Entonces la sucesión de polinomios ortogonales mónicos en $\mathbb{T}$ respecto a μ es (véase **[27]**, **[68]***)*

$$
P_n(z) = \sum_{k=0}^{n}\frac{k+1}{n+1}z^k, \quad \forall n \geqslant 0.
$$

Es fácil comprobar que

$$\kappa_n(\mu) = \left(\int_{\mathbb{T}} |P_n(z)|^2 d\mu\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}.$$

En consecuencia $\|\mu\| = 2$ *y la sucesión de polinomios ortonormales con respecto a* μ *es*

$$\begin{aligned} \varphi_n(z) = & \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} \sum_{k=0}^{n} (k+1) z^k \\ = & \frac{(n+1)z^{n+2} - (n+2)z^{n+1} + 1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}(z-1)^2}, \quad n \geqslant 0. \end{aligned}$$

Ahora, definimos la transformación de Geronimus de la medida μ *mediante*

$$d\mu_1 = \frac{d\mu}{|z-\alpha|^2} = \frac{|z-1|^2}{|z-\alpha|^2} \frac{d\theta}{2\pi}, \quad |\alpha| > 1, \ \ z = \mathrm{e}^{i\theta}.$$

Entonces, se obtiene

$$\|\mu_1\| = \frac{2|\alpha|^2 - \alpha - \bar{\alpha}}{|\alpha|^2 - 1}. \tag{6.3.1}$$

De (6.0.1), obtenemos las funciones de segunda especie asociadas a μ

$$q_n(\alpha) = \left(1 - \alpha^{-1}\right)^2 \varphi_n(\alpha^{-1}), \tag{6.3.2}$$

y de (6.3.1) y (6.3.2) se tiene

$$\begin{aligned} \varepsilon_n(\alpha) = & \|\mu_1\| - \sum_{l=0}^{n} |q_l(\alpha)|^2 \\ = & \frac{2|\alpha|^2 - \alpha - \bar{\alpha}}{|\alpha|^2 - 1} - \left|1 - \alpha^{-1}\right|^4 \sum_{l=0}^{n} \left|\varphi_l(\alpha^{-1})\right|^2 \\ = & \frac{2|\alpha|^2 - \alpha - \bar{\alpha}}{|\alpha|^2 - 1} - \left|1 - \alpha^{-1}\right|^4 K_n(\alpha^{-1}, \alpha^{-1}). \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}\varepsilon_n(\alpha) = \; & \tfrac{1}{|\alpha|^2-1}\left[2|\alpha|^2 - (\alpha+\bar{\alpha}) - \tfrac{1}{(n+1)(n+2)|\alpha|^{2(n+2)}}\left(\left|(n+1)\alpha^{n+3} - (n+2)\alpha^{n+1} + \alpha\right|^2\right.\right. \\ & \left.\left. - \left|\alpha^{n+2} - (n+2)\alpha + n + 1\right|^2\right)\right].\end{aligned} \tag{6.3.3}$$

Las entradas $\tilde{h}_{k,j}$ *de la matriz* $\tilde{H} = M(H_\varphi - \alpha I)$ *son*

$$\tilde{h}_{k,j} = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}, & j = k = 0, \\ -\dfrac{k}{k+1}\left(\dfrac{\bar{\alpha}^{k+2} - (k+2)\bar{\alpha} + k + 1}{\bar{\alpha}^{k+2} - (k+2)\bar{\alpha}^2 + k\bar{\alpha}} + \dfrac{1}{k(k+2)}\right), & j = k \geqslant 1, \\ \dfrac{\sqrt{(k+1)(k+3)}}{k+2}, & j = k+1, \\ \dfrac{\sqrt{k+1}\left(1 - \bar{\alpha}^{-1}\right)^2}{\sqrt{(j+1)(j+2)(k+2)}\left(\bar{\alpha}^{k+1} - (k+2)\bar{\alpha} + k\right)}, & j \leqslant k-1, \\ 0, & j > k. \end{cases} \tag{6.3.4}$$

Las entradas $m_{k,j}$ *y* $l_{k,j}$ *de* M *y* L*, respectivamente, se obtienen sustituyendo las expresiones (6.3.1), (6.3.2), (6.3.3), y (6.3.4) en (6.2.3) y (6.2.8).*

Ejemplo 6.3.2 *Consideremos ahora la siguiente medida en la circunferencia unidad*

$$d\mu = \frac{d\theta}{2\pi} + m\delta(\mathrm{e}^{i\theta} - 1),$$

donde $m > 0$*.*

La sucesión de polinomios ortogonales mónicos en $\mathbb{T}$ *asociados a* μ *es (ver* **[17]** *y* **[68]***)*

$$P_n(z) = z^n - \frac{m}{1+nm}\sum_{k=0}^{n-1} z^k,$$

para todo $n \geqslant 1$*.*

Entonces, obtenemos para $n \geqslant 1$

$$
\begin{aligned}
\kappa_n(\mu) &= \left(\int_0^{2\pi} P_n(z)\bar{z}^n \frac{d\theta}{2\pi} + mP_n(1)\right)^{-\frac{1}{2}}, \ \ z = \mathrm{e}^{i\theta}, \\
&= \left(\int_0^{2\pi} \left(z^n - \frac{m}{1+nm}\sum_{k=0}^{n-1} z^k\right)\bar{z}^n \frac{d\theta}{2\pi} + \frac{m}{1+nm}\right)^{-\frac{1}{2}}, \ \ z = \mathrm{e}^{i\theta},
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
\kappa_n(\mu) = \sqrt{\frac{1+nm}{1+(n+1)m}}, \tag{6.3.5}
$$

así como $\|\mu\| = 1+m$. La familia $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ de polinomios ortonormales asociados a μ está dada por

$$
\begin{aligned}
\varphi_n(z) &= \sqrt{\tfrac{1+nm}{1+(n+1)m}}\, z^n - \tfrac{m}{\sqrt{(1+nm)(1+(n+1)m)}} \sum_{k=0}^{n-1} z^k \\
&= \frac{(1+nm)z^{n+1} - mz^n + m}{\sqrt{(1+nm)(1+(n+1)m)}(z-1)}, \quad n \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Por otra parte, las entradas $\tilde{h}_{k,j}$ de la matriz $\tilde{H} = M(H_\varphi - \alpha I)$ son

$$
\tilde{h}_{k,j} = \begin{cases}
-\frac{m^2}{1+m}, & j = k = 0, \\
-\frac{1+(k-1)m}{1+km}\left(\frac{(1+(k+1)m)\bar{\alpha}-(1+km)}{(1+km)\bar{\alpha}^2-(1+(k-1)m)\bar{\alpha}} + \frac{m^2}{(1+(k-1)m)(1+(k+1)m)}\right), & j = k \geqslant 1, \\
\frac{\sqrt{(1+km)(1+(k+2)m)}}{1+(k+1)m}, & j = k+1, \\
\frac{m}{\sqrt{(1+jm)(1+(j+1)m)(1+km)(1+(k+1)m)}}\left(\frac{(1+(k+1)m)\bar{\alpha}-(1+km)}{(1+km)\bar{\alpha}^2-(1+(k-1)m)\bar{\alpha}} - m\right), & j \leqslant k-1, \\
0, & j > k.
\end{cases} \tag{6.3.6}
$$

Sea μ_2 la transformación de Geronimus de μ, dada por

$$
d\mu_2 = \frac{d\mu}{|z-\alpha|^2} = \frac{1}{|z-\alpha|^2}\frac{d\theta}{2\pi} + \frac{m}{|\alpha-1|^2}\delta(z-1), \quad |\alpha| > 1, \ \ z = \mathrm{e}^{i\theta}.
$$

Entonces

$$\|\mu_2\| = \frac{1}{|\alpha|^2 - 1} + \frac{m}{|\alpha - 1|^2}. \tag{6.3.7}$$

Las funciones de segunda especie asociadas a μ evaluadas en α son

$$q_n(\alpha) = \frac{(1 + (n+1)m)\alpha - (1 + nm)}{\sqrt{(1 + nm)(1 + (n+1)m)}(\alpha - 1)\alpha^{n+1}}. \tag{6.3.8}$$

De (6.3.7) y (6.3.8) obtenemos

$$\varepsilon_n(\alpha) = \frac{1}{|\alpha|^2 - 1} + \frac{1}{|\alpha - 1|^2|\alpha|^2}\left(m|\alpha|^2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{|(1 + (k+1)m)\alpha - (1 + km)|^2}{(1 + km)(1 + (k+1)m)|\alpha|^{2k}}\right). \tag{6.3.9}$$

Las expresiones de las entradas de las matrices M y L son muy engorrosas, pero se obtienen sustituyendo las expresiones (6.3.5), (6.3.6), (6.3.7), (6.3.8), y (6.3.9) en(6.2.3) y (6.2.8).

Problemas abiertos

En el análisis de los problemas estudiados a lo largo de la memoria, surgen de manera natural una serie de cuestiones que pretendemos abordar en el futuro próximo.

1. Implementación del algoritmo de Leverrier-Faddeev en el caso de matrices por bloques. Dichos tipos de matrices aparecen en el tratamiento de sistemas lineales, en particular en el estudio de filtros de predicción para sistemas de múltiples entradas y salidas (véase **[42]** y **[43]**).

2. El análisis del carácter unitario del operador de multiplicación para medidas soportadas en la circunferencia unidad está ligado al hecho de que la medida no pertenezca a la clase de Szegő. Recientemente, M. J. Cantero, L. Moral y L. Velázquez han eliminado dicho requisito a cambio de utilizar sendas bases en el espacio de los polinomios de Laurent (véase **[13]**, **[14]** y **[15]**). De esta forma aparece una representación de dicho operador mediante una matriz pentadiagonal (CMV matriz) cuyas propiedades espectrales permiten un estudio novedoso de la teoría de polinomios ortogonales en la circunferencia unidad (véase **[67]**, **[68]** y **[69]**). Queremos abordar la repercusión de las transformaciones espectrales racionales desde esta nueva perspectiva y su conexión con la factorización de la matriz CMV tanto desde el enfoque LU como QR.

3. La transformación UL de las matrices de Jacobi da lugar a la aparición del

parámetro libre en la transformación de Geronimus. En el caso estudiado en la memoria y puesto que se ha de preservar el carácter hermitiano, parece natural considerar la transformación de Uvarov en dos pasos en la línea seguida en el capítulo 4 para la transformación canónica de Christoffel. Conjeturamos que de la factorización UL de la matriz de Hessenberg inicial se sigue la dependencia uniparamétrica vinculada a la adición de la masa de Dirac.

4. En el capítulo 6 se ha abordado el análisis de un tipo particular de transformación de Geronimus que no incorpora masas de Dirac. Estamos desarrollando el caso general junto con el análisis de la correspondiente matriz de Hessenberg, sobre la base de preservar el carácter cuasi-definido del funcional lineal transformado.

5. Como se ha señalado en el capítulo 4, la caracterización de las transformaciones espectrales racionales que transforman una C-función en otra C-función constituye un problema abierto. En **[62]** se ha resuelto para el caso de funciones de Stieltjes que son transformadas de Cauchy de medidas soportadas en la recta real.

6. En **[43]** se aplica el método de generación de espacios de estados para matrices de momentos con estructura Hankel y Toeplitz. Parece natural analizar dicho método en el caso de matrices de momentos con una estructura derivada de las propiedades algebraicas del soporte de la medida espectral. El caso de curvas algebraicas (véase **[7]**) constituye un interesante proyecto de investigación dado que las entradas de la matriz de momentos satisfacen relaciones lineales.

Bibliografía

[1] R. Alvarez-Nodarse y F. Marcellán, *On the Favard Theorem and its extensions*, J. Comput. Appl. Math. **127** (2001), 231–254.

[2] S. Barnett, *Polynomials and Linear Control Systems*, Marcel Dekker, New York, 1983.

[3] ______, *Leverrier's algorithm: a new proof and extension*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. **10** (1989), 551–556.

[4] ______, *Leverrier's algorithm for orthogonal polynomial bases*, Linear Alg. and Appl. **236** (1996), 245–263.

[5] J. C. Basilio, *Inversion of polynomial matrices via state-space*, Linear Alg. and Appl. **357** (2002), 259–271.

[6] A. Branquinho, L. Golinskii y F. Marcellán, *Orthogonal polynomials and rational modification of the Lebesgue measure on the unit circle. An inverse problem*, Complex Variables **38** (1999), 137–154.

[7] C. Brezinski, *Formal orthogonality on an algebraic curve*, Annals Numer. Math. **2** (1995), 21–33.

[8] M. I. Bueno y F. M. Dopico, *Stability and sensitivity of tridiagonal LU factorization without pivoting*, BIT **44** (2004), 651–673.

[9] ______, *Stability and sensivity of Darboux tranformation without parameter*, Electr. Trans. on Numer. Anal. **18** (2004), 101–136.

[10] M. I. Bueno y F. Marcellán, *Darboux transformations and perturbation of linear functionals*, Linear Alg. and Appl. **384** (2004), 215–242.

[11] ______, *Polynomial perturbations of bilinear functionals and Hessenberg matrices*, Linear Alg. and Appl. **414** (2006), 64–83.

[12] M. Buhmann y A. Iserles, *On orthogonal polynomials transformed by the QR algorithm*, J. Comput. Appl. Math. **43** (1992), 117–134.

[13] M. J. Cantero, L. Moral y L. Velázquez, *Five-diagonal matrices and zeros of orthogonal polynomials*, Linear Alg. and Appl. **362** (2003), 29–56.

[14] ______, *Minimal representations of unitary operators and orthogonal polynomials on the unit circle*, Linear Alg. and Appl. **408** (2005), 40–65.

[15] ______, *Measures on the unit circle and unitary truncations of unitary operators*, J. Approx. Theory **139** (2006), 430–468.

[16] T. S. Chihara, *An introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, New York, 1978.

[17] L. Daruis, J. Hernández y F. Marcellán, *Spectral transformations for Hermitian Toeplitz matrices*, J. Comput. Appl. Math. (2007), En prensa.

[18] A. Durán, P. López-Rodriguez y E. B. Saff, *Zero asymptotic behavior for orthogonal polynomials*, J. d'Anal. Math. **78** (1999), 37–60.

[19] E. Emre y O. Hüseying, *Generalization of Leverrier's algorithm to polynomial matrices of arbitrary degree*, IEEE Trans. Automat. Control **20** (1975), 136.

[20] P. K. Faddeev y V. N. Faddeeva, *Computational Methods of Linear Algebra*, W. H. Freeman and Co., San Francisco, CA., 1963.

[21] J. S. Frame, *Matrix functions and applications IV: Matrix functions and constituent matrices*, IEEE Spectrum **1** (1964), 123–131.

[22] P. García Lázaro y F. Marcellán, *On zeros of regular orthogonal polynomials on the unit circle*, Ann. Polon. Math. **58** (1993), 287–298.

[23] Ya. L. Geronimus, *On the trigonometric moment problem*, Ann. of Math. **47** (1946), 742–761.

[24] ______, *Orthogonal Polynomials: Estimates, Asymptotic Formulas, and Series of Polynomials Orthogonal on the Unit Circle and on an Interval*, Consultants Bureau, New York, 1961.

[25] ______, *Polynomials orthogonal on a circle and their applications*, AMS Transl. **1** (1962), 1–78.

[26] G. M. L. Gladwell, *Inverse Problems in Vibrations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1986.

[27] E. Godoy y F. Marcellán, *An analogue of the Christoffel formula for polynomial modification of a measure on the unit circle*, Boll. Un. Mat. Ital A **5** (1991), 1–12.

[28] ______, *Orthogonal polynomials and rational modification of measures*, Canad. J. Math. **45** (1993), 930–943.

[29] L. Golinskii, P. Nevai y W. Van Assche, *Perturbation of orthogonal polynomials on an arc of the unit circle*, J. Approx. Theory **83** (1995), 392–422.

[30] L. Golinskii, P. Nevai, W. Van Assche y F. Pintér, *Perturbation of orthogonal polynomials on an arc of the unit circle, II*, J. Approx. Theory **96** (1999), 1–32.

[31] J. C. Gower, *A modified Leverrier-Faddeev algorithm for matrices with multiple eigenvalues*, Linear Alg. and Appl. **31** (1980), 61–70.

[32] ______, *An application of the modified Leverrier-Faddeev algorithm to the spectral decomposition of symmetric block-circulant matrices*, Comp. Statist. and Data Anal. **50** (2006), 89–106.

[33] W. B. Gragg, *The QR algorithm for unitary Hessenberg matrices*, J. Comput. Appl. Math. **16** (1986), 1–8.

[34] U. Grenander y G. Szegő, *Toeplitz Forms and their Applications*, 2^{nd} ed., University of California Press, Berkeley 1958, Chelsea, New York, 1984.

[35] J. Hernández y F. Marcellán, *An extension of Leverrier-Faddeev algorithm using basis of classical orthogonal polynomials*, Facta Universitatis **19** (2004), 73–92.

[36] ______, *Classical orthogonal polynomials and Leverrier-Faddeev algorithm for the matrix pencil $sE - A$*, Inter. J. Math. and Math. Sciences **2006** (2006), Article ID 74507, 13 pages.

[37] J. Hernández, F. Marcellán y C. Rodríguez, *Leverrier-Faddeev algorithm and classical orthogonal polynomials*, Rev. Acad. Colomb. Ciencias Exactas, Físicas y Naturales **28** (2004), no. 106, 39–47.

[38] R. Horn y C. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[39] A. S. Householder, *The Theory of Matrices in Numerical Analysis*, Dover Publications, New York, 1975.

[40] M. E. H. Ismail y R. W. Ruedemann, *Relation between polynomials orthogonal on the unit circle with respect to different weigths*, J. Approx. Theory **71** (1992), 39–60.

[41] W. B. Jones, O. Njåstad y W. J. Thron, *Moment theory, orthogonal polynomials, quadrature, and continued fractions associated with the unit circle*, Bull. London Math. Soc. **21** (1989), 113–152.

[42] T. Kailath, *Linear Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1980.

[43] T. Kailath y B. Porat, *State-space generators for orthogonal polynomials*, Prediction Theory and Harmonic Analysis (V. Mandrekar y H. Salehi, eds.), The Pesi Massani Volume, North-Holland, 1983, 131–163.

[44] N. P. Karampetakis y P. S. Stanimirović, *Symbolic implementation of Leverrier-Faddeev algorithm and applications*, 8^{th} IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation (Patras, Greece), 2000.

[45] ______, *On the computation of the Drazin inverse of a polynomial matrix*, 1^{st} IFAC Symposium on System Structure and Control (Prague, Czech Republic), 2001.

[46] D. H. Kim y K. H. Kwon, *Quasi-definiteness of generalized Uvarov transforms of moment functionals*, J. Appl. Math. **1** (2001), 69–90.

[47] U. J. J. Leverrier, *Sur les variations séculaires des éléments elliptiques des sept planètes principales: Mercure, Venus, La Terre, Mars, Jupiter, Saturne et Uranus*, J. Math. Pures Appl. **4** (1840), 220–254.

[48] F. L. Lewis, *Further remark on the Cayley-Hamilton theorem and Leverrier's method for the matrix pencil* $s\mathrm{E} - \mathrm{A}$, IEEE Trans. Automat. Control **AC-31** (1986), 869–870.

[49] X. Li y F. Marcellán, *Representation of Orthogonal Polynomials for modified measures*, Comm. in the Anal. Theory of Cont. Fract. **7** (1999), 9–22.

[50] F. Marcellán, *Polinomios ortogonales no estándar. Aplicaciones en Análisis Numérico y Teoría de Aproximación*, Rev. Acad. Colomb. Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (2007), En prensa.

[51] F. Marcellán y M. Alfaro, *Recent trends in orthogonal polynomials on the unit circle*, En Erice International Symposium on Orthogonal Polynomials and Their Applications, IMACS Annals on Comput. and Appl. Math. J. C. Baltzer, Basel (1991), 3–14.

[52] F. Marcellán, A. Branquinho y J. C. Petronilho, *Classical orthogonal polynomials: A functional approach*, Acta Appl. Math. **34** (1994), 283–303.

[53] F. Marcellán y A. Cachafeiro, *Orthogonal Polynomials and Jump Modifications*, En Orthogonal Polynomials and their Applications (M. Alfaro et al. Editors), Lect. Notes in Math. 1329, Springer Verlag, Berlin, 1988, 236–240.

[54] F. Marcellán y J. Hernández, *Geronimus spectral transforms and measures on the complex plane*, Sometido.

[55] ———, *Christoffel transforms and Hermitian linear functionals*, Mediterr. J. Math. **2** (2005), 451–458.

[56] F. Marcellán, F. Peherstorfer y R. Steinbauer, *Orthogonality Properties of Linear Combinations of Orthogonal Polynomials I*, Adv. in Comput. Math. **5** (1996), 281–295.

[57] ———, *Orthogonality Properties of Linear Combinations of Orthogonal Polynomials II*, Adv. in Comput. Math. **7** (1997), 401–428.

[58] W. Marszalek y H. Unbehauen, *Second order generalized linear systems arising in analysis of the flexible beams*, 31st Conference on the Decision and Control (Tucson, Arizona), 1992, 3514–3518.

[59] B. G. Mertzios, *Leverrier's algorithm for singular systems*, IEEE Trans. Automat. Control **AC-29** (1984), 652–653.

[60] C. D. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, PA, 2000.

[61] A. F. Nikoforov y V. B. Uvarov, *Special Functions of Mathematical Physics: An Unified Approach*, Birkhauser Verlag, Basel, 1988.

[62] F. Peherstorfer, *Finite perturbations of orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **44** (1992), 275–302.

[63] ______, *A special class of polynomials orthogonal on the unit circle including the associated polynomials*, Constr. Approx. **12** (1996), 161–185.

[64] F. Peherstorfer y R. Steinbauer, *Characterization of orthogonal polynomials with respect to a functional*, J. Comput. Appl. Math. **65** (1995), 339–355.

[65] L. Reichel, G.S. Ammar y W.B. Gragg, *Discrete least squares approximation by trigonometric polynomials*, Math. Comp. **57** (1991), 273–289.

[66] M. de la Sen, A. J. Garrido, O. Barambones y F. J. Maseda, *An expert network for the obtaining of approximate discrete-time models for LTI systems under real sampling using parameter identification*, ICSE Sixteenth International Conference on Systems Engineering, The Institution of Electrical Engineers IEE (Coventry, UK), vol. 1, 2003, 132–139.

[67] B. Simon, *OPUC on one foot*, Bull. Amer. Math. Soc. **42** (2005), 431–460.

[68] ______, *Orthogonal polynomials on the unit circle*, vol. 1 y 2, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. Series, vol. 54, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 2005.

[69] ______, *CMV matrices: five years after*, To appear in the Proceedings of the W.D. Evans 65th Birthday Conference, 2006.

[70] V. Spiridonov, L. Vinet y A. Zhedanov, *Spectral transformations, self-similar reductions and orthogonal polynomials*, J. Phys. A: Math. Gen. **30** (1997), 7621–7637.

[71] P. S. Stanimirović, *A finite algorithm for generalized inverses of polynomial and rational matrices*, Appl. Math. and Comp. **144** (2003), 199–214.

[72] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, 4^{th} ed., Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Series, vol. 23, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1975.

[73] G. Wang y Y. Lin, *A new extension of Leverrier's algorithm*, Linear Alg. and Appl. **180** (1993), 227–238.

[74] G. Wang y L. Qiu, *Leverrier-Chebyshev algorithm for the singular pencils*, Linear Alg. and Appl. **345** (2002), 1–8.

[75] D. S. Watkins, *Some perspectives on the eigenvalue problem*, SIAM Review **35** (1993), 430–471.

[76] G. J. Yoon, *Darboux transforms and orthogonal polynomials*, Bull. Korean Math. Soc. **39** (2002), 359–376.

[77] Z. Yun y Y. Chengwu, *Algorithms for the computation of the transfer function matrix for two-dimensional regular and singular general state-space models*, Automatica **31** (1995), 1311–1315.

[78] A. Zhedanov, *Rational spectral transformations and orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **85** (1997), 67–83.

[79] B. Zheng y G. Wang, *Leverrier's algorithm and Cayley-Hamilton theorem for 2-D system*, Appl. Math. and Comp. **160** (2005), 725–738.