UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

documentos de trabajo

Documento de Trabajo 01-05
Serie de Economía de la Empresa 03
Diciembre 2001

Departamento de Economía de la Empresa
Universidad Carlos III de Madrid
Calle Madrid, 126
28903 Getafe (España)

FALSAS ANOMALÍAS DE LA FUNCIÓN VALOR ACTUAL NETO

Joan Pasqual*, José Antonio Tarrío y María José Pérez

Resumen

Las anomalías que surgen en el cálculo y la interpretación del Valor Actual Neto (VAN) y la Tasa Interna de Rendimiento son fácilmente superables, teniendo en cuenta las propiedades reales del VAN y redefiniendo adecuadamente lo que es una inversión y un crédito.

Keywords: Net Present Value; Internal Rate of Return; Investment Analysis; Project Evaluation; Project Selection.

JEL classification: D92

* Departament d'Economia Aplicada. Universitat Autònoma de Barcelona. 08193 Bellaterra. Spain. Phone: 34935811680. Fa:34935812292. E-mail address: joan.pasqual.rocabert@uab.es

1. Introducción

Un somero análisis de la literatura existente y de la práctica habitual entre profesionales y expertos, pone de manifiesto que existen todavía importantes lagunas en el conocimiento de las características del VAN y de la TIR así como errores de concepto en la interpretación de los resultados que de ellos se obtienen y que en ocasiones no son intuitivos.

Persiste además una polémica estéril acerca del criterio correcto a utilizar, el VAN o la TIR (Brealey-Myers, 1985), como si se tratara de criterios substitutivos en lugar de complementarios. Las ventajas del VAN frente a la TIR cuando se emplea como función objetivo son bien conocidas y, como criterios de decisión son equivalentes en términos cualitativos, si bien difieren en la forma de cuantificar la deseabilidad. Como el VAN cuantifica la bondad de un proyecto en términos absolutos netos y la TIR proporciona un índice relativo bruto, el uso de uno u otro criterio será más apropiado según el caso que se tenga entre manos.

Diversos autores reconocen la dificultad de aplicar el criterio de la TIR por la falta de buenas propiedades de este indicador, como Hirshleifer (1958), Peumans (1974), Weston y Brigham (1984), entre otros muchos, llegándose a recomendar -Ross (1995)- que desaparezca la TIR de los programas docentes de finanzas.

La dificultad en la interpretación económica de la TIR y la aparente discordancia con la aplicación del VAN, es un viejo problema que tiene una explicación muy simple. Es intuitivo que la rentabilidad de un proyecto de inversión disminuye al aumentar los costes y, en concreto, al aumentar el coste del capital r. Esta deseable característica sólo se conserva si la rentabilidad se mide con una función monótona decreciente respecto a r y al momento de ejecución M, y la función VAN no lo es, lo que da lugar a resultados contraintuitivos. Se ha intentado solucionar el problema mediante diversas aproximaciones, entre las que destacan la de Massé (1962) que reconoce que todas las raíces de la función VAN son relevantes y las de Teichroew, Robicheck y Montalbano (1965a, 1965b) por su distinción entre inversiones puras y mixtas que abre el camino para entender un proyecto como la agregación de varios subproyectos. Sin embargo, las recientes contribuciones de Oehmke (2000) y Castelo (2001) ilustran hasta que punto persisten importantes vacíos conceptuales al respecto. Tal vez la causa se encuentra en que algunos de los problemas no resueltos y otros que si lo están, no han recibido la atención que se merecen.

La falta de un estudio económico completo de la función VAN y, sobre todo, la proliferación de artículos de dudosa calidad ha ido generando más confusión que luz, como se pone de manifiesto a través de la siguiente selección de afirmaciones erróneas como: 1- la TIR no está siempre bien definida[1], 2- para aplicar la TIR se necesita menos información que para calcular el VAN[2]. 3- las raíces negativas no tienen significado económico[3], 4- los comportamientos anómalos de la función VAN dependen exclusivamente de cómo sean los flujos del proyecto[4]. 5. los casos en los que la función VAN puede presentar comportamientos anómalos son aquellos en los que existen

[1] Afirmación de Castelo (2001) que es irrefutable porque no se argumenta de ninguna manera. Como no hay más dificultad en definir correctamente la TIR que en definir las raíces de un polinomio entendemos que el problema de definición es inexistente.

[2] Por ejemplo, sabiendo que "*The price, indeed, was very small, and instead of thirty times purchase, the ordinary price of land in the present times, (...)*"- se deduce que arrendar tierra proporcionaba una *TIR* del 3.3% y, por lo tanto, que el VAN es positivo para cualquier tasa de descuento inferior al 3,3%. Aunque para calcular la TIR no se necesita la tasa de descuento, sin este dato no puede aplicarse, con lo que ambos criterios requieren la misma información. Ver Cannan, E, ed. (1961) An Inquiry into the Nature and Causes of The Wealth of Nations by Adam Smith. Vol. 2 p. 129. Methuen & Co. Ltd. London.

[3] Falsa creencia compartida por muchos expertos, como Rodríguez (1984) y Solanet et al, (1984).

[4] La monotonía de la función VAN también depende del momento de ejecución, una variable que es habitual no tener en consideración.

2.5 tipos de proyectos (comportamiento)
a- Inversión: todo proyecto cuyas cantidades tienen signos diferentes se comporta como una inversión en el intervalo (r_a, r_b) si $\delta N(r)/\delta r < 0$ en el intervalo.
b- Crédito: todo proyecto cuyas cantidades tiene distinto signo se comporta como un crédito en el intervalo (r_a, r_b) si $\delta N(r)/\delta r > 0$ en dicho intervalo.
c- Regalo: Todo proyecto con flujos no negativos y al menos uno estrictamente positivo.
d- Pérdida: Todo proyecto con flujos no positivos y al menos uno estrictamente negativo
2.6 Criterios de aceptación
a- Aceptación de un proyecto. La regla de aceptación para el VAN, sea cual sea el tipo de proyecto es $N(r) \geq 0$[15]. El criterio de la TIR es aplicable cuando existe por lo menos una raíz de N(r); se acepta el proyecto si la TIR no es menor (no es mayor) que la tasa de descuento cuando se trata de una inversión (crédito).
b- Elección entre dos proyectos X e Y. Se conviene que X es preferible o indiferente a Y si y sólo si el proyecto diferencia (X-Y) es aceptable.

3. Algunas propiedades de la función N(r)
3.1 Si todos los flujos de un proyecto son positivos (negativos), entonces la N(r) es monótona decreciente (creciente) y no existe TIR; el recíproco no se cumple.
3.2 Si el primer flujo se produce en el momento cero, es positivo (negativo) y todos los demás son negativos (positivos), entonces N(r) es monótona creciente (decreciente) $\forall r > -1$ y existe una única TIR.
3.3 Si N(r) es monótona y existe TIR, ésta es única, pero la unicidad de la TIR no implica monotonía.
3.4 Una variación en el momento de ejecución del proyecto no modifica el valor de la TIR pero produce cambios en los intervalos de monotonía de la función N(r). Si N_0 es el valor actual neto del proyecto iniciado en t = 0 y N_M el correspondiente a ejecutar el proyecto en t = M, calculados ambos en el momento t = 0, entonces:

$$N_M = N_0 (1+r)^{-M}$$

y es evidente que las pendientes de N_0 y N_M pueden tener signos distintos:

$$\partial N_M / \partial r = (1+r)^{-M} (\partial N_0 / \partial r - M N_0 (1+r)^{-1})$$

3.5 El cambio en el momento de ejecución transforma el proyecto en otro distinto. Por ejemplo, el proyecto {-10, 4} es una inversión si se ejecuta en el momento cero, pero se comporta como un crédito $\forall r > 0$ si se ejecuta en el momento M=2.
3.6 La multiplicidad de raíces es condición suficiente para la no monotonía de N(r) pero no es necesaria. Por ejemplo, el proyecto con flujos {-1, ..., -1, 30}definidos en el intervalo temporal [0, 20] tiene una única TIR, r* = 3.72%, pero N(r) es decreciente sólo hasta el punto $\underline{r}$ = 14.4%.
3.7 Si N(r) tiene n raíces, entonces N(r) presenta como mínimo (n-1) cambios de pendiente. El recíproco no se cumple.

[15] La condición VAN ≥ 0 se puede interpretar como de no rechazo y no se mantiene necesariamente en un problema de selección de proyectos -ver Cantor y Lippman (1995)- dado que un proyecto puede comportarse como inversión o como crédito.

3.8 Cuando los flujos de un proyecto presentan más de un cambio de signo, entonces: a)- N(r) puede ser monótona o no y b)- la existencia y unicidad de la TIR no están garantizadas[16]:

a- El proyecto {-1, 6, -12, 8}con tres cambios de signo presenta una función N(r) monótona. La N(r) correspondiente al proyecto {10, -31, 20}no es monótona y tiene dos cambios de signo.

b- En el proyecto {h, -40, 40}, h > 0, tiene dos cambios de signo y en función del valor de h aparecen dos raíces positivas, una (doble) o ninguna:

valor de h	1	9	10	11
raíces	2.6% 3.797%	51.95% 192.5%	100% (doble)	no tiene

3.9 Coherencia de los criterios VAN y TIR.

Proposición. Si N(r) tiene por lo menos una TIR , entonces el criterio de aceptación de proyectos del VAN y el de la TIR coinciden.

Demostración.

Sean $r_1, ..., r_s, r_{s+1}, ..., r_n$ las raíces de N(r) ordenadas de menor a mayor, r_0, $-1 < r_0 < r_1$, una tasa arbitrariamente baja y r_{n+1}, $r_{n+1} > r_n$, una tasa arbitrariamente alta.

Si la tasa de descuento coincide con alguna raíz, entonces la proposición es trivialmente verdadera ya que la condición de aceptación se cumple con igualdad tanto para el VAN como para la TIR.

En otro caso, la tasa de descuento pertenecerá a uno de los intervalos abiertos (r_0, r_1), (r_1, r_2), ..., (r_n, r_{n+1}). Sea (r_s, r_{s+1}) dicho intervalo, como $N(r_s) = N(r_{s+1}) = 0$ entonces N(r) es positiva o negativa en ese intervalo, si en el punto $r_s+\varepsilon$, ε[17] > 0, $\delta N(r)/\delta r$ es menor (mayor) que cero entonces, la función N(r), es negativa (positiva) en este intervalo y también su derivada en el punto $r_{s+1}-\varepsilon$ es mayor (menor) que cero. En consecuencia se rechazaría (aceptaría) con el criterio del VAN; ocurre lo mismo si se emplea el criterio de la TIR si se toma la raíz r_s porque en este punto el proyecto se comporta como una inversión (crédito) y r_s es menor (no es menor) que la tasa de descuento, y también si se considera la raíz r_{s+1} porque en este punto el proyecto se comporta como un crédito (inversión) y r_{s+1} es mayor (no es mayor) que la tasa de descuento.

4. Interpretación

Como consecuencia de ejecutar un proyecto se produce un incremento (positivo o negativo) en la riqueza. El VAN calcula el aumento en la riqueza en el momento actual que resulta equivalente a ejecutar el proyecto y, por lo tanto, cuanto más alto es el VAN del proyecto, mejor. La TIR mide la tasa de crecimiento (positivo o negativo) del capital por período, por lo que, si se trata de una inversión, cuanto más grande mejor, y si se trata de un crédito ocurre lo contrario[18]. Aunque se ha demostrado que cuando la TIR existe proporciona el mismo resultado cualitativo que el VAN, es importante no dejar de lado la explicación económica que, en este caso, surge con facilidad al analizar con cierto detalle un ejemplo clásico.

[16] Regla de Descartes: El número de ceros positivos de un polinomio, p(x), es igual al número de cambios de signo en la sucesión de sus coeficientes, o a un número menor que difiere de éste en un número par positivo. El número de ceros negativos se obtiene de forma similar a partir del polinomio p(-x).

[17] Se toma el valor de ε de forma que la distancia a la tasa r_s sea pequeña.

[18] Se puede entender un crédito como el alquiler de un capital, siendo la TIR el precio que se paga por período y unidad de capital. La operación contraria, una inversión, equivaldría a prestar capital por un precio que se cobra por período y unidad de capital igual a la TIR de la operación.

Sea por ejemplo, el proyecto de Hirshleifer (1958) que aquí se designa por H, sus flujos son {-1, 6, -11, 6}, presenta tres TIR, r_1 = 0%, r_2 = 100% y r_3 = 200% y la función correspondiente N(r) tiene pendiente negativa hasta llegar a un mínimo en el punto $\underline{r}$ = 24%, sigue con pendiente positiva hasta alcanzar un máximo en $\underline{\underline{r}}$ = 146% y pendiente negativa a partir de $\underline{\underline{r}}$; la existencia de tres raíces y la consiguiente falta de monotonía de N(r) dificulta la interpretación económica aunque, como se verá a continuación, no la impide.
En una primera aproximación se puede acotar H situándolo entre otros dos, H^+ y H^- de forma que ambos tengan una sola raíz, H^+ sea mejor que H y H^- peor que H,

	0	1	2	3	TIR	VAN(r =10%)
H	-1	6	-11	6	0%, 100%, 200%	-0,1285
H^+	-0,7	6	-11	6	528,97%	0,1753
H^-	-1,1	6	-11	6	-4,14%	-0,2285

Al modificar H se han obtenido dos proyectos de inversión, ambos con una sola TIR, el H^- que tiene una TIR y un VAN negativos y el H^+ para el que ocurre lo contrario; las TIR encontradas son más extremas que las del proyecto original H. En H^+ puede sorprender que el valor de la TIR sea muy alto en comparación con el que arroja el VAN, pero la explicación es muy simple; H^+ equivale a una mezcla de inversiones y créditos por lo que, en promedio, el capital invertido es muy bajo. Por lo tanto, cuando hay más de una raíz no sólo es necesario averiguar qué significa cada una sino también cuál es la cantidad de capital que, en promedio, se ha invertido o tomado en préstamo. En este caso se trata de hallar los flujos a_0 y a_1 tales que el VAN sea nulo para la TIR de H^+ y coincida con el valor de VAN(H^+) para r = 10%:

$$a_0 + a_1/(1+5{,}2897) = 0$$

$$a_0 + a_1/(1+0{,}1) = 0{,}1753$$

La solución del sistema de ecuaciones son los flujos a_0 y a_1 del proyecto de inversión h^+, que se ha formado mediante la reducción a dos períodos del proyecto H^+, con un capital inicial de a_0 = -0,03716 que proporciona un flujo positivo en el siguiente período por valor de a_1 = 0,2337:

	0	1	2	3	TIR	VAN(r =10%)
H^+	-0,7	6	-11	6	528,97%	0,1753
h^+	-0,03716	0,2337			528,97%	0,1753

la rentabilidad del proyecto H^+ es pues muy baja en término absolutos y muy alta en términos relativos porque el capital invertido, en promedio, es también muy bajo. Conviene destacar que el proyecto h^+ es distinto del H^+, ambos tienen la misma rentabilidad absoluta y relativa, pero el h^+ es mejor, porque consigue el mismo resultado en dos períodos mientras el proyecto H^+ tiene una duración de cuatro períodos.
Aplicando la propiedad aditiva del VAN, es posible entender el proyecto H como la suma de otros, lo que permite descomponerlo a afectos de análisis. Es inmediato ver por qué el proyecto de Hirshleifer parece conflictivo, basta con truncar H separando los flujos de los períodos 0 y 1 que formarán el proyecto A = {-1, 6} y los flujos de los períodos 2 y 3 que constituirán el B = {-11, 6}. A es una inversión con una rentabilidad

de r_A = 500% que se ejecuta en el momento 0, A_0, y el B, otra inversión de rentabilidad r_B = - 45,45% y que se ejecuta en el momento 2, B_2, de forma que H = A_0 + B_2:

	0	1	2	3	TIR
A_0	-1	6			500%
B_2			-11	6	- 45,45%
H = A_0 + B_2	-1	6	-11	6	0%, 100%, 200%

Expresado de esta forma, la interpretación del proyecto H es simple. El problema es que para llevar a cabo la buena (y pequeña) inversión A en el momento 0 es necesario ejecutar también la mala (y grande) inversión B en el momento 2. El que H sea o no interesante depende del coste del capital; cuanto más baja sea r, más rentable será la inversión A_0 y lo mismo ocurriría con la B si se ejecutara en el momento 0, pero como se ejecuta en el momento 2 la función VAN de B_2 es $N(B_2; r) = -11(1+r)^{-2} + 6(1+r)^{-3}$ y para que su pendiente sea positiva basta con que r también lo sea, comportándose como un crédito a pesar de que el proyecto B_0 es una inversión si se lleva a cabo en el momento inicial, lo que pone de manifiesto que el momento de ejecución de un proyecto es una variable no negligible. Como al aumentar el coste del capital r el VAN de A_0 disminuye mientras que el de B_2 aumenta, existe un conflicto y la bondad del resultado de la agregación de A_0 + B_2 = H depende del peso relativo de uno y otro, lo que, a su vez, depende de la tasa r. Por este motivo es natural que la interpretación del proyecto H esté en función de la tasa r.

Para comprender por qué H tiene tres raíces y cuál es su significado económico se descompondrá H en tres. Sea el proyecto de inversión H1 = {-1, 2}, el crédito H2 = {4, -8}y la inversión H3 = {-3, 6}, todos ellos con una misma TIR, r* = 100%, el proyecto H se forma con el proyecto H1 ejecutado en el momento 0, ($H1_0$), más el H2 ejecutado en el momento 1, ($H2_1$), y el H3 ejecutado en el momento 2, ($H3_2$), es decir,

	0	1	2	3	TIR	operación
$H1_0$	-1	2			100%	inversión
$H2_1$		4	-8		100%	crédito
$H3_2$			-3	6	100%	inversión
H= $H1_0$ + $H2_1$ + $H3_2$	-1	6	-11	6	0%, 100%, 200%	?

El VAN de H se puede expresar como

$$N(H; r) = N(H1, r) + (1+r)^{-1}\cdot N(H2; r) + (1+r)^{-2}\cdot N(H3; r) = ... =$$

$$= N(H1; r)\cdot r\cdot(r - 2)(1+r)^{-2}$$

La raíz r_1 = 0% surge trivialmente porque los flujos del proyecto H suman cero, la raíz r_2 = 100% es inevitable ya que es común a H1, H2 y H3 y la tercera raíz, r_3 = 200% es el resultado de retrasar la ejecución de los proyectos H2 y H3.

Por otra parte, es sabido que si se mejora una inversión (crédito) la TIR aumenta (disminuye) reflejando una mayor rentabilidad (menor coste). Si mejoramos el proyecto H aumentando el valor del flujo en el período 3 en una centésima, obtenemos el proyecto mejorado H^+ = {-1, 6, -11, 6,01}, que también tiene tres raíces, r_1^+ = 0,5 %, r_2^+ = 99% y r_3^+ = 200,5%. Como consecuencia de la mejora del proyecto H, las TIRs r_1 y r_3 aumentan en tanto que r_2 disminuye, lo que indica que H es un proyecto que se comporta en la práctica como si fuera el resultado de agregar proyectos antagónicos.

Si en lugar de mejorar H se empeora, por ejemplo disminuyendo en una centésima el flujo que se produce en el período 3, resulta el proyecto H^- = {-1, 6, -11, 5,99}que tiene asimismo tres raíces, r_1^- = -0,5%[19], r_2^- = 101% y r_3^- = 199,5%, y el resultado es una disminución de r_1 y r_3 junto con un aumento de r_2. En resumen:

	0	1	2	3	r_1	r_2	r_3
H	-1	6	-11	6	0%	100%	200%
H^+	-1	6	-11	6,01	0,5%	99%	200,5%
H^-	-1	6	-11	5,99	- 0,5%	101%	199,5%
como consecuencia de mejorar H, la TIR					aumenta	disminuye	aumenta
como consecuencia de empeorar H, la TIR					disminuye	aumenta	disminuye
la pendiente $\delta N(r)/\delta r$ en este punto es					negativa	positiva	negativa
en este caso, la TIR mide					rentabilidad	coste	rentabilidad
por lo tanto, en este punto, H actúa como					inversión	crédito	inversión

Una vez conocidas las propiedades básicas del VAN y las características propias del proyecto H, el análisis económico es inmediato. Sabemos que toda inversión (crédito) es tanto mejor (peor) cuanto menor sea el coste de capital, lo que se refleja en el signo negativo (positivo) de la pendiente del VAN y, además, que la TIR correspondiente mide la tasa de rentabilidad (de coste) por período.

Por otra parte, se ha visto que el proyecto H es equivalente a un conjunto de proyectos, de los cuales unos disminuyen de valor con la tasa de descuento (las inversiones) mientras la deseabilidad de otros aumenta al incrementarse el coste de capital r (los créditos). El resultado -el proyecto original H- será como una inversión o un crédito según el peso de cada subproyecto, lo que depende a su vez de la tasa r. En consecuencia, H deberá analizarse como una inversión o un crédito cuando en un intervalo determinado, H se comporte de una u otra manera, es decir, según que la pendiente del VAN sea negativa o positiva.

Para analizar la deseabilidad del proyecto H es necesario considerar intervalos diferentes en función de las raíces de H. Considérese el intervalo cerrado formado por una tasa r_0 arbitrariamente pequeña (que puede suponerse mayor que menos 100%) y la TIR r_1, la TIR que se encuentra en este intervalo es $r_1 = 0$; en este punto la pendiente de N(r) es negativa, H se comporta por tanto como una inversión y H es rentable en el intervalo siempre que la tasa de descuento pertenezca al mismo intervalo $[r_0, r_1]$, o sea si $r \leq 0$, lo que se cumple por hipótesis.

El segundo intervalo es (r_1, r_2) y el VAN es negativo en todo el intervalo. Si se toma la primera TIR r_1, H se comporta como una inversión no rentable porque $r_1 < r$. Si se toma la la segunda TIR, r_2, como la pendiente de N(r) en r_2 es positiva H se comporta como un crédito y tampoco es interesante ya que la tasa de descuento es menor que r_2.

En el intervalo $[r_2, r_3]$ el VAN es siempre no negativo. Tomando la TIR r_2, H aparece como un crédito deseable ya que la tasa de descuento $r > r_2$; si se considera la TIR r_3 entonces H juega el papel de una buena inversión ya que la pendiente de N(r) en este punto vuelve a ser negativa y $r < r_3$.

Por último, en el intervalo (r_3, r_4) el VAN es siempre negativo. La TIR del intervalo es r_3, H se comporta como una inversión no rentable ya que $r > r_3$.

[19] Como r_1^- es negativa y las otras dos son positivas existe la tentación de negarle sentido económico a r_1^-. Sin embargo, si la TIR r_1 del proyecto H tiene sentido, la r_1^- del H^-, que surge como consecuencia de una pequeña modificación de H debería tenerlo también.

Como ya se había observado, las condiciones de aceptación para las TIRs coinciden con la regla VAN ≥ 0:

tramo	VAN	aceptación	N'	en	naturaleza	TIR	aceptación
$r_0 \leq r \leq r_1$	≥ 0	sí	< 0	r_1	inversión	$r_1 \geq r$	sí
$r_1 < r < r_2$	< 0	no	< 0	$r_1+\varepsilon$	inversión	$r_1 < r$	no
			> 0	$r_2-\varepsilon$	crédito	$r_2 > r$	no
$r_2 \leq r \leq r_3$	≥ 0	sí	> 0	r_2	crédito	$r_2 \leq r$	sí
			< 0	r_3	inversión	$r_3 \geq r$	sí
$r_3 < r < r_4$	< 0	no	< 0	$r_3+\varepsilon$	inversión	$r_3 < r$	no

Como en este caso sólo hay un cambio de pendiente entre dos raíces, la explicación económica es inmediata y simple. En lugar del procedimiento habitual para delimitar los tramos se toma un primer tramo que empieza en una tasa de descuento arbitrariamente pequeña r_0 y se cierra con el primer punto singular de N(r), un mínimo en este caso, y que se produce en el punto $\underline{r}$ = 24% aproximadamente. En este intervalo $(r_0, \underline{r})$ existe la raíz r_1 = 0% y ocurre que $\delta N(r)/\delta r < 0$ por lo que H se comporta como una inversión. Si la tasa de descuento r se halla en esta tramo, H será rentable si $r_1 \geq r$.
El segundo tramo comprende el mínimo $\underline{r}$ = 24% y el siguiente punto singular, el máximo $\underline{\underline{r}}$ = 146% aproximadamente. En este intervalo $(\underline{r}, \underline{\underline{r}})$ existe la raíz r_2 = 100% y H se comporta como un crédito ya que $\delta N(r)/\delta r > 0$, por lo tanto H será deseable si $r_2 \leq r$. El tercer y último tramo empieza en el punto singular $\underline{\underline{r}}$ = 146% y se cierra en el punto r_4, una tasa arbitrariamente grande. En este intervalo $(\underline{\underline{r}}, r_4)$ H vuelve a comportarse como inversión ya que $\delta N(r)/\delta r < 0$, la raíz es r_3 = 200% y H será rentable si $r_3 \geq r$. Estas tres condiciones para que H sea un proyecto recomendable se resumen en dos, o bien $r \leq 0$ o bien $100\% \leq r \leq 200\%$, que equivalen a exigir VAN(H) ≥ 0 como ya se sabía.
En resumen, un proyecto puede comportarse como una inversión o como un crédito en función de la tasa de descuento y del momento de ejecución. Teniendo en cuenta esta propiedad, la presencia de raíces múltiples o la simple falta de monotonía no supone anomalía alguna sino que tiene una explicación simple y, contra lo que se pensaba, si se aplica correctamente el criterio de la TIR, se obtiene la misma recomendación que con el criterio del VAN.

5. Conclusiones

La función VAN no es monótona excepto en casos particulares[20], lo que causa las mal llamadas anomalías que dificultan la interpretación de los resultados. Refinando la definición de proyecto de inversión se mejora la capacidad explicativa del modelo VAN y las anomalías denunciadas para la TIR desaparecen. De esta forma es posible interpretar correctamente los resultados contraintuitivos que provoca la falta de monotonía de la función VAN, manteniendo las reglas de decisión habituales y sin que sea preciso modificar las hipótesis del modelo estándar ya que las decisiones tomadas con el VAN y la TIR coinciden. Sin embargo, persisten ciertos problemas sin resolver, como determinar cuál es la tasa social de descuento apropiada. No es necesario añadir que si se relaja alguna de las hipótesis básicas del modelo VAN, como la de mercado

[20] El análisis de la monotonía de la función VAN aquí realizado contrasta con la reciente contribución de Saak y Hennessy (2001), menos general de lo que parece.

perfecto de capitales, los resultados generales pierden validez y es necesario recurrir a modelos de evaluación más generales[21].

7. Referencias bibliográficas

Alchian, A. A. (1955) "The rate of interest, Fisher's rate of return over costs and Keines' internal rate of return". *The American Economic Review, 45, 5, 938-943.*

Arrow K. and Levahare (1969). "Uniquiness of the internal rate of return with variable life of investment". *Economic Journal, 79, 315, 560-566*.

Brealey R. and Myers, S. (1985) *Principles of corporate finance*. 3ª Ed. (5ª Ed.1996) Mc Graw-Hill. Nueva York.

Cantor, D. G. and Lippman, S. A. (1995). "Optimal Investment Selection with a Multitude of Projects". *Econometrica, 63, 5, 1231-1240.*

Castelo, D. (2001). "Anomalies in net present value calculations?. *Economics Letters, 72, 127-129.*

Herreolen, W. S., Van der Dommelen, P. and Demeulemeester, E. L. (1995) "Project network models with discounted cash flows a guided tour trough recent developments". *European Journal of Operational Research, 100, 97-121.*

Hirshleifer, J. (1958) "On the Theory of Optimal Investment Decision". *The Journal of Political Economy, 66, 4, 329-352.*

Massé, P. (1962) *Optimal investment decisions. Rules for action and criteria for choice.* Prentice-Hall Inc. London.

Montllor, J. (1978). "Un modelo determinista de proyectos agregados de inversión-financiación: El valor final neto". *Económicas y empresariales, nº 9, p. 152-163.*

Oehmke, J. F. (2000) “Anomalies in net present value calculations” *Economics Letters 67, 349-351*

Peumans, H. (1974). *Valoración de proyectos de inversión*. Ed. Deusto. Bilbao.

Promislov, D. S. and Spring D. (1996) "Postulates for the internal rate of return of an investment project" *Journal of Mathematical Economics, 26, 325-361.*

Ramsey, J. (1970) "The Marginal Efficiency of Capital, the Internal Rate of Return, and Net Present Value: An Analysis of Investment Criteria." *Journal of Poltical Economy, 78, 727-730*.

Rodríguez, A. (1984) *Matemática del inversor*. Ed El Autor. Barcelona.

Ross, S. R. (1995) "Uses, Abuses, and Alternatives to the Net-Present-Value Rule". *Financial Management, 24, 3, pp 96-102*.

Saak, A. and Hennessy D. A. (2001). "Well-behaved cash flows". *Economics Letters 73, 81-88.*

Solanet, M. A., Cozzetti, A and Rapetti, E. O. (1984) *Evaluación económica de proyectos de inversión*. Ed. El Ateneo. Buenos Aires.

Teichroew, Daniel, Robicheck, A. and Montalbano, M. (1965a) "Mathematical Analysis of Rates of Return under Certainty". *Management Science, 11 395-403.*

Teichroew, Daniel, Robicheck, A. and Montalbano, M. (1965b) "An Analysis of Criteria for Investment and Financing Decisions under Certainty". *Management Science, 12, 151-179.*

[21] Por ejemplo, cuando la tasa de inversión y la de reinversión no coinciden es necesario aplicar un modelo más general, como el de Montllor (1978). Por otra parte, no se ha tratado aquí el problema de la selección de proyectos; se pueden consultar al respecto las aportaciones de Cantor y Lippman (1995) y Herreolen, Van der Dommelen y Demeulemeester (1995).

Weston, J. F. - Brigham, E. F. (1984) *Finanzas en administración*. Ed. Interamericana. México.

Agradecimientos
Los autores están en deuda por las sugerencias y comentarios de Joan Montllor y María Antonia Tarrazón del Departamento. de Economía de la Empresa de la UAB.