

# Journal of Economics Bibliography

www.kspjournals.org

Volume 2

June 2015

Issue 2

## [Robust Control and Model Uncertainty] \* Belirsizlik Modelive Sağlamlılık Kontrolü

By Lars Peter HANSEN, & Thomas J. SARGENT

### Giriş

**B**u çalışma, Itzhak Gilboa ve David Schmeidler (1989)'in maks-min beklenen fayda teorisi ve Evan Anderson ve diğerleri (2000) ve Paul Dupuis ve diğerleri (1998) tarafından önerilen sağlamlık kontrolü uygulamaları arasındaki ilişkiyi tanımlamaktadır. <sup>1</sup>Maks-min beklenen fayda teorisi aşağıdaki şekilde;  $\mathbb{Q}$ ,  $c$  ve  $x$  için ölçüler bütünü ve  $\delta$  indirgenme oranını göstermek üzere,  $c$  kararları ve  $x$  durumlarında tercihlerin sıralanmasında belirsizlikten kaçınmayı ifade eder.

$$\inf_{Q \in \mathbb{Q}} E_Q \left[ \int_0^{\infty} \exp(-\delta t) U(c_t, x_t) dt \right] \quad (1)$$

Gilboa ve Schmeidler'in teorisi, belirli uygulamalarda  $\mathbb{Q}$ 'nin nasıl belirleneceğini noktasını açık bırakmıştır.

(1) numaralı denklemdaki kurallar aynı zamanda sağlamlılık kontrolü teorisindeki amaç fonksiyonlarında da ortaya çıkmaktadır. Sağlamlılık kontrol teorisi,  $\mathbb{Q}$ 'yi tek bir yaklaştırma modelialarak, onu istatistiksel olarak perturbe etmekte ve  $\mathbb{Q}$  pozitif bir penaltı değişkeni olan  $\theta$  ile sadece örtük şekilde ifade edilmektedir. Bu çalışma, penaltı probleminin aslında yakından ilişkili olduğu kısıt probleminin nasıl dönüştürülebileceği hakkındadır. Bu iki formülasyon birbirinden farklılaşmakta; ancak Lagrange çarpan teoremi yoluyla birbiri ile ilişkili olmaktadır. Örtük tercihler sıralaması birbirinden farklılaşmakta ama aynı kararları ifade etmektedir. Tercihlerin her ikisi de tekrarlanmakta ve bu nedenle her ikisi de zamansal tutarlılık göstermektedir. Bununla birlikte, kısıt spesifikasyonu içerisindeki zamansal tutarlılık, gelecek zamanda yeniden düşünülecek olan olasılık sapmalarının nasıl sınırlandırılacağı noktasında yeni bir içsel durum değişkeninin kullanılmasını gerekli kılmaktadır. Anderson ve diğerleri (2000) ve Zengjing Chen ve Larry G. Epstein (2000) çalışmaları ile karşılaştırmaya imkân vermesi açısından, tartışmamızı kesintisiz difüzyon modelleri içerisinde oluşturacağız.

### 1. Kaynak-Tahsis Problemi Kıyaslaması

\* Orijinal bilgiler: "Robuts Control and Model Uncertainty", American Economic Review, Vol.91, No.2, pp. 12-17, 2001. Bu makale, 14 Ocak 2015 tarihinde, bizzat T. J. Sargent'in kişisel izni ve AEA Telif Hakları Yetkilisi E. Lee tarafından sağlanan "Çevirisini Yayınlama" hakkındaki kurumsal izne dayanılarak yayınlanmaktadır. (Çeviri: Gülçin Beken, Gümüşhane Üniversitesi, İktisat Bölümü).

<sup>1</sup> Bu çalışma Hansen ve arkadaşları (2004) çalışmasındaki detaylı argümanları özetlemektedir.

## Journal of Economics Bibliography

İlk olarak; sağlamlılık göz önüne alınmaksızın, indirgenmiş, sonsuz kaynak-tahsis problemi ortaya konulmaktadır.  $\{\beta_t : t \geq 0\}$ ; temelinde  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  olasılık uzayının bulunduğu,  $d$  boyutlu, standart Brown hareketini ifade etsin.  $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ , Brown hareketi tarafından yaratılan filtrasyonun tamamlanması anlamına gelmektedir. Karar alıcının eylemleri, artan biçimde ölçülebilir olan stokastik bir süreç  $\{c_t : t \geq 0\}$  ortaya çıkarmaktadır. U anlak bir fayda fonksiyonunu göstermek üzere ve indirgenen amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılarak,

$$\text{Sup } E \left[ \int_0^\infty \exp(-\delta t) U(c_t, x_t) dt \right]$$

$c \in C$

$$dx_t = \mu(c_t, x_t) dt + \sigma(c_t, x_t) dB_t \quad (2)$$

kısıtına tabi olmaktadır. Burada  $x_0$  veri başlangıç koşulu ve  $C$  de kabul edilebilir kontrol süreçleri grubudur.  $P$ , (2) nolu denklem tarafından yaratılan  $x_t$  'ye ait stokastik süreçleri ifade etmek için kullanılmaktadır. Denklem(2) daha sonraki kesitlerin yaklaştırma modeli olacak ve  $\mathbb{Q}$  içerisindeki diğer tüm perturbasyonlardır.  $\mu$  ve  $\sigma$  kısıtlandırıldığında,  $C$  içerisindeki artan yapıdaki herhangi bir ölçülebilir kontrol  $c$ , artan şekilde ölçülebilir durum vektör süreci  $x$ 'i ifade etmektedir. Buradaki varsayım, kontrol probleminin amacının, sağlamlılığa referans verilmeksizin, sonlu bir üst sınıra sahip olduğudur.

## 2. Model Biçim Hataları

Karar alıcı (2) nolu denklemi, (2) nolu denklemden istatistiksel olarak ayırmanın zor olduğu bir dizi alternatif modeli hesaba katarak bir yakınlaştırma olarak kabul eder. Perturbe modeli oluşturmak için, (2) nolu denklemdeki  $\beta_t$ ,  $h$  artan biçimde ölçülebilir ve  $\{\hat{\beta}_t\}$  Brown hareketini ifade ederken;  $\hat{\beta} + \int_0^t h_s ds$  yerine konulur. Sonrasında sürekli zamanda çarpıkstokastik değişim

$$dx_1 = \mu(c_t, x_t) dt + \sigma(c_t, x_t) (h_t dt + d\hat{\beta}_t)$$

şeklindeki Brown hareket olasılık tanımlaması altında yazılır.

### A. Ölçümde Değişim

$h$  süreci,  $(\Omega, \mathcal{F})$  üzerinde olasılık dağılımı  $P$ 'yi,  $P$ 'ye göre mutlak anlamda sürekli olan yeni dağılım  $Q$ 'ya dönüştürmenin bir aracı olarak kullanılmaktadır. Stokastik bir sürecin ölçümünde mutlak anlamda sürekli bir değişim, negatif olmayan martingale şeklinde gösterilebilir.  $Q, P$ 'ye göre mutlak anlamda sürekli bir olasılık dağılımını gösterebilir.  $Q$  ile ilişkili olan beklenti operatörleri ailesi, her bir  $t$  için ölçülebilir  $\mathcal{F}$  değerleri olan tesadüfi değişkenlere uygulanmaktadır. Yani,  $E_Q g_t = E_P g_t$  her sınırlı  $g_t$  değeri için yazılabilir ki;  $\mathcal{F}_t$  ölçülebilir ve negatif olmayan tesadüfi değişken  $q_t$  için  $\mathcal{F}_t$  ölçülebilirdir. Tesadüfi değişken  $q_t$ , Radon-Nikodym türevi olarak adlandırılır. Bizim modelimizde,  $q_t$  'yi göstermek için kullandığımız Girsanov Teoremine göre;

$$q_t = \exp \left[ \int_0^t h_T (d\hat{\beta}_T) - \int_0^t \frac{|h_T|^2}{2} dt \right]$$

## Journal of Economics Bibliography

Bu gösterimi, ölçümdeki mutlak anlamda sürekli değişimi parametrelerle ifade etmek adına  $h$ 'nin kullanımını doğrulamak için kullanılmaktadır.<sup>2</sup>  $h$  sıfıra eşit olduğunda, kıyaslama kriteri olan kontrol problemine geri dönülmektedir.

### B. Stokastik Sürecin Görelî Entropisi

$\{g_t\}$  şeklinde artan biçimde ölçülebilir bir skaler stokastik süreç düşünelim. Bu süreç ürün uzayında bir tesadüfî değişkeni ifade etmektedir.  $\mathbb{R}^+$  negatif olmayan reel doğru iken  $\Omega^* = \Omega \times \mathbb{R}^+$  şekillenmekte;  $[0, t]$  aralığı içerisinde Borel dizileri toplamının  $\beta_t$  olduğu yerde herhangi bir  $t$  için en küçük sigma-algebra  $F_t \otimes \beta_t$ 'yi kapsayarak buna karşılık gelen sigma-algebra  $F^*$  oluşturulmakta; ve  $P^*, \delta \exp(-\delta t)$  yoğunluğu ile üssel dağılırken  $P \times M$  çarpım ölçüsü olarak şekillenmektedir.

Olasılık ölçüsü kullanılarak bu ifade genişletilmektedir.  $Q^* = Q \times M$  oluşturulmaktadır.  $\{q_t\}$  süreci  $P$ 'ye göre  $Q^*$  için Radon-Nikodym türevidir:

$$E_{Q^*}^*(g) = \delta \int_0^\infty \exp(-\delta t) E(q_t g_t) dt.$$

$Q^*$  değerleri, ölçümde mutlak anlamda sürekli bir değişim altında, indirgenmiş beklenen faydanın değerlendirilmesi için kullanılmaktadır.

$P$  ve  $Q$  dağılımları arasındaki farklılığı,  $Q^*$  ve  $P^*$  arasındaki görelî entropi olarak ölçeriz:

$$\begin{aligned} R(Q) &= \delta \int_0^\infty \exp(-\delta t) E_Q(\log q_t) dt \\ &= \int_0^\infty \exp(-\delta t) E_Q\left(\frac{|h_t|^2}{2}\right) dt. \end{aligned}$$

$Q^*$  ölçüsünde görelî entropi, dış bükeydir (Bunun için, Dupuis ve Richard S. Ellis, 1997 çalışmasına bakılabilir). Görelî entropi, sadece  $Q^*$  ve  $P^*$  olasılık dağılımları uyduğunda, negatif olmamakta ve sıfır olmaktadır.  $h$  süreci sıfır olduğunda da bu doğrudur.

### 3. İki Sağlamlılık-Kontrol Problemi

İki sağlamlılık- kontrol problemi arasındaki ilişkiyi incelemekteyiz.  $dB_t = d\hat{B}_t + h_t dt$  ve  $\{\hat{B}_t : \geq 0\}$   $P$  ve  $Q$ 'ya göre Brown hareketini gösterdiği yerde,  $E_Q$ , stokastik süreç  $\{B_t : t \geq 0\}$ 'e göre alınan matematiksel beklentiyi ifade etmektedir. Yani,  $Q$  sürüklenme sapması;  $\{h_t\}$  nin seçimi ve durum gelişim denkleminin kullanımı ile parametreleştirilmektedir:

$$dx_1 = \mu(c_t, x_t)dt + \sigma(c_t, x_t)dB_t. \quad (3)$$

İki kontrol problemi tanımlamaktayız. Çarpan sağlamlılık-kontrol problemi:

$\sup \inf E_Q \left[ \int_0^\infty \exp(-\delta t) U(c_t, x_t) dt \right] + \theta R(Q)$  (3) numaralı denklem kısıtına tabidir.

$c \in C \ Q$

<sup>2</sup> Mutlak olarak sürekli olmayan perturbasyonlar istatistiksel olarak kolaylıkla saptanabilir olduğundan Andersen ve diğerleri (2000) çalışmasında perturbasyonlar üzerine mutlak sürekliliği uygulamıştır.

## Journal of Economics Bibliography

(3) nolu denkleme ve  $R(Q) \leq \eta$  'ye tabi olan, kısıt sağlamlılık kontrol problemi,  $\sup_{c \in C} \inf_Q E_Q \left[ \int_0^\infty \exp(-\delta t) U(c_t, x_t) dt \right]$  şeklindedir.  $R(Q) \leq \eta$  ifadesinin, h sapmalarına ait tüm yol üzerinde tek zamanlararası kısıt olduğu da hatırlanmalıdır.

Bu iki problem birbiriyle yakından ilişkilidir. Tanımlama hatası kısıtı  $R(Q) \leq \eta$  üzerinde örtük Lagrange çarpanı şeklinde sağlamlık parametresi olan  $\theta$ , ilk problem içerisinde açıklanabilir<sup>3</sup>.  $\theta$ , çarpan sağlamlılık kontrol problemlerinin ailesini indekslemek için kullanılırken;  $\eta$  kısıt sağlamlılık kontrol problem ailesinin indekslenmesinde kullanılır.  $\theta$ 'nin tüm değerleri kabul edilebilir olmadığından,  $-\infty$  'dan daha büyük amaç fonksiyonuna ulaşmak için sadece uygun, negatif olmayan  $\theta$  değerlerini göz önüne aldık. Bu setin kapanması  $\theta$  olarak adlandırılabilir. Hansen ve diğerlerinde (2001), varsayımları ve kanıtı takip eden bölümde sunmaktayız.

**ÖNERME 1:** Varsayalım;  $\eta = \eta^*$  için,  $c^*$  ve  $Q^*$  kısıt sağlamlılık kontrol problemini çözüyor olsun. Çarpan ve kısıt sağlamlılık-kontrol problemlerinin aynı çözüme sahip olduğu,  $\theta^* \in \theta$  şeklinde bir durum bulunmaktadır.

Çarpanı oluşturmak için,  $J(c, \eta)$  ifadesi;

$J(c, \eta) = \inf E_Q \left[ \int_0^\infty \exp(-\delta t) U(c_t, x_t) dt \right]$  koşulunu karşılamakta ve  $R(Q) \leq \eta$  ve  $J^*(\eta) = \sup_{c \in C} J(c, \eta)$  kısıtınatabi olmaktadır. David G.Luenberger (1969) çalışmasında iddia edildiği gibi,  $J(c, \eta)$ ,  $\eta$  'de azalan ve dışbükeydir. Bu özelliklerin aynısı optimize edilen  $J^*$  fonksiyonuna da taşınabilir.  $\eta^*$  veriiken,  $\theta^* \eta^* 'de J^*$  subgradientin eğimi negatif olsun.(örneğin,  $\theta^*$ ,  $\eta^* 'de J^*$  'nin tanjantının eğiminin mutlak değeridir)

Hansen ve diğerleri (2001) ayrıca aşağıdaki koşulları da ortaya koymuştur.

**ÖNERME 2:**  $J^*$  tam anlamıyla azalan,  $\theta^*$ ,  $\theta$  nin içerisinde ve çarpan sağlamlılık-kontrol problemine  $c^*$  ve  $Q^*$  çözümü bulunduğu varsayılın. Yani,  $c^*$  aynı zamanda  $\eta = \eta^* = R(Q^*)$  için kısıt sağlamlılık-kontrol problemini de çözmektedir.

Önerme 1 ve 2 gözlemsel eşdeğer sonuçlarıdır; çünkü çarpan ve kısıt sağlamlılık-kontrol problemlerinin aynı kararları nasıl ortaya çıkardığını göstermektedir. Hansen ve Sargent (1995) ve Anderson ve diğerleri (2000) çalışmalarındaki kanıtlar kullanıldığında, çarpan sağlamlılık-kontrol probleminin,  $-\theta^{-1}$  risk duyarlılık parametresini ifade etmek üzere, tekrarlayan risk-duyarlı kontrol problemi ile aynı çözüme sahip olduğu gösterilmektedir. 1 ve 2 nolu önermeler, risk-duyarlı kontrol problemini, kısıt sağlamlılık-kontrol problemi ile ilişkilendirmektedir.

### 4. Çarpan formülasyonunda tekrarlılık

$dx_t = \mu(c_t, x_t)dt + \sigma(c_t, x_t)(h_t dt + d\hat{B}_t)$  kısıtına tabi olmak üzere, çarpan sağlamlılık-kontrol problemi;

$\sup_c \inf_h \hat{E} \exp(-\delta t) \times \left[ U((c_t, x_t) + \frac{\theta}{2} (h_t \cdot h_t)) \right] dt$  olarak ifade edilebilir.

h, iki oyunculu sıfır toplamlı bir oyundaki ikinci kontrol süreci olarak görülebilir. h veri iken iken,  $\hat{\beta}$  dağılımını çok değişkenli standart Brown hareketi gibi düzeltebiliriz. Sonrasında oyunda sadece tek olasılık dağılımı kalmaktadır ve

<sup>3</sup> Bu bağlantı, lineer ikinci dereceden kontrol problemi bağlamında, enformel biçimde de olsa Hansen ve diğerleri (1999) çalışmasında ve formel biçimde de Hansen ve Sargent (2001) çalışmasında keşfedilmiştir. Biz, I.R.Peterson ve diğerleri (2000) ve David G.Luenberger (1969) çalışmalarındaki argümanları kullandık.

## Journal of Economics Bibliography

biz de  $\hat{E}$  notasyonunu, ilgili beklenti operatörünü tanımlamak için kullanabiliriz. W.H. Fleming ve P.E. Souganidis (1989) çalışmasında bizlere, durum vektörü  $x_t$  'nin fonksiyonları olan her iki oyuncunun (agent) karar kurallarının Markoven iyi oyununda 0-zamanı bağıllığına önerdiği çözümlerle, Bellman-Isaacs koşulununun tekrarlayan çözümünün nasıl haklı çıkardığını göstermektedir. Bellman-Isaacs koşulu aşağıdaki gibidir.

**VARSAYIM 1:** V gibi bir değer fonksiyonu bulunmaktadır:

$$\begin{aligned} \delta V = \max_{c, h} \min U(c, x) + \frac{\theta}{2} (h \cdot h) + [\mu(c, x) + \sigma(c, x)h] \frac{\partial V(x)}{\partial x} \\ + \text{trace} \left[ \sigma(c, x) \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x \partial x'} \sigma(c, x) \right] \\ = \min_h \max_c U(c, x) + \frac{\theta}{2} (h \cdot h) + [\mu(c, x) + \sigma(c, x)h] \frac{\partial V(x)}{\partial x} + \\ \text{trace} \left[ \sigma(c, x) \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x \partial x'} \sigma(c, x) \right]. \end{aligned}$$

Bellman-Isaacs koşulu, iki oyunculu sıfır toplamlı bir oyunda, her iki oyuncunun da 0 zamanında ya da tekrarlayan şekilde karar verdikleri durum için Bellman denklemini tanımlamaktadır.

### 5. İki Tercihler Sıralaması

Lagrange çarpan teoremi iki sağlamlılık-kontrol problemini ilişkilendirirken, örtük tercihler sıralaması farklılaşmaktadır. Bununla birlikte, kayıtsızlık eğrileri teğet olduklarında, her iki problemin ortak çözümü ile ilişkili olmaktadır.

#### A. Tercih Sıralaması

İki tercih sıralamasını oluşturabilmek için, içsel durum vektörü  $s_t$  varsayıldığında:

$$ds_t = \mu_s(s_t, c_t) dt \quad (4)$$

bu diferansiyel eşitlik sadece  $s_t$  için veri  $s_0$  ve  $\{c_s : 0 \leq s < t\}$  süreci için çözülebilmektedir. Çözümün artan biçimde ölçülebilir süreç  $\{s_t : t \geq 0\}$  olduğunu varsaymaktayız.  $s_t$ ;  $x_t$  durum vektörünün içsel değişkeni olarak kabul edilmektedir.  $s_t$  davranış süreğenliğine sahip modellerde olduğu gibi zamanla ayrılmayan tercihlerin yapılması için kullanılır. Gerçekleşme fonksiyonu,  $(s_t, c_t)$ 'de ayrılabilir olan tercih sıralamasını temsil etmek amacıyla kullanılır.

Tercihler sırası;  $D_T(c, s_T)$  ve  $R_T(Q)$  fonksiyonları ve  $T \geq 0$  zamanları için tanımlanır. İlk olarak,  $s_T$  T zamanında diferansiyel eşitliğindeki (4) başlangıç koşulunu ifade etmek üzere,

$D_T(c, s_T) = \int_0^T \exp(-\delta t) u(s_{t+T}, c_{t+T}) dt$  tanımlanır. 0 ve T zamanı arasındaki tüketim etkisi durum değişkeni  $s_T$  tarafından yakalanmaktadır. Sonrasında, T zaman modeli fark ölçüsünü tanımladığımızda,

$$R_T(Q) = \delta \int_0^T \exp(-\delta t) \times E_Q(\log q_t | F_T) dt \text{ olmaktadır.}$$

## Journal of Economics Bibliography

$R(Q)$ 'nin yerel gelişimi, başlangıç koşulu  $R_0(Q) = R(Q)$  iken;  $dR_t(Q) = \left[ -\frac{|h_t|^2}{2} + \delta R_t(Q) \right] dt$  eşitliği ile ifade edilebilir.  $D_T(c, s_T)$  ifadesini; T'deki tercih tanımlamalarını temsil etmek üzere ve  $R_t(Q)$  ifadesini de kısıt tanımlaması altında tercihlerin temsil edilmesi için kullanıyoruz.

Sabit  $\theta$  için, T zaman çarpan tercihlerini değerlendirme fonksiyonunu kullanarak gösteriyoruz:

$$\widehat{W}_T(c; \theta) = \inf E_Q [D_T(c, s_T) | F_T] + \theta R_t(Q).$$

Negatif olmayan  $r_T$  için  $F_T$  ölçülebilir olmakta ve T zaman kısıt tercihlerini değerlendirme fonksiyonu içerisinde

$$W_t(c; r_T) = \inf E_Q [D_T(c, s_T) | F_T].$$

şeklinde ifade ediyoruz

$$R_T(Q) \leq r_T$$

Uygunluk için, 0-zaman versiyonları;  $W_0(c, r_0) = W(c, \eta)$  ve  $\widehat{W}_0(c, \theta) = \widehat{W}(c, \theta)$  şeklinde yazılabilmektedir.

Tercihler sıralamasını şu şekilde tanımlamaktayız. Eğer,  $W(c^*; \eta) \geq W(c; \eta)$  ise iki artan şekilde ölçülebilir  $c$  ve  $c^*$  için,  $c^* \geq \eta c$  olmaktadır. İki artan şekilde ölçülebilir  $c$  ve  $c^*$  için, eğer,  $\widehat{W}(c^*; \theta) \geq \widehat{W}(c; \theta)$ . ise,  $c^* \geq \theta c$  olmaktadır. Tercihler sıralamasına ait olan T zaman versiyonlarına yönelik olarak benzer tanımlamalar kullanabiliriz.

Çarpan tercih sıralaması,  $\theta > 0$  şartını karşılayacak şekilde riske duyarlı, tekrarlamalı tercihler sıralaması ile örtüşmektedir.

### B.Tercih sıralamaları arasındaki ilişki

İki 0-zamanlı tercih sıralaması birbirinden farklıdır. Daha da ötesi,  $\eta$  veri iken, iki tercih sıralamasını uyumlu kılan herhangi bir  $\theta$  bulunmamaktadır. Bununla birlikte, Lagrange çarpan teoremi bizim için oldukça faydalı olan daha zayıf bir sonucu ortaya çıkarmaktadır. Evrensel olarak tercihler sıralaması farklılaşırken, çözüm  $c^*$  den geçen kayıtsızlık eğrileri, optimal kaynak dağılım problemine teğet olmaktadır.

Lagrange çarpan teoremi kullanılarak,

$W(c^*; \eta^*) = \max \inf E_Q D(c^*) + \theta [R(Q) - \eta^*]$  yazılmakta ve burada  $\theta^*$ ,  $\theta^*$ 'yı maksimize eden

$$\theta Q$$

değeri göstermektedir ki; bu değer kati şekilde pozitif olduğu varsayılmıştır.  $c^* \geq \eta^* c$  olduğunu varsayalım. Bunu takiben,  $\widehat{W}(c; \theta^*) - \theta^* \eta^* \leq W(c; \eta^*) \leq W(c^*; \eta^*) = \widehat{W}(c^*; \theta^*) - \theta^* \eta^*$  yazılmaktadır. Yani;  $c^* \geq \theta^* c$  olmaktadır.

1.ve 2. önermelerden elde edilen gözlemsel eşdeğerlik sonuçları  $c^*$  tüketim profiline uygulanabilir. Bu noktada, kayıtsızlık eğrileri teğet olmakta ve bu da aynı fiyatlar tarafından desteklendiklerini ifade etmektedir. Ekonometri uzmanları tarafından yapılan gözlemsel eşdeğerlik iddiaları genellikle denge yörüngesini işaret etmekte ve tercih sıralamasının denge dışı yönünü göz önüne almamaktadır.

## 6. Tercih sıralamasının tekrarlılığı

Zaman tutarlılığını çalışmak için, tercih sıralamasını tanımlayan 0-zamanı ve T zamanı >0 değerlendirme fonksiyonu arasındaki ilişkiyi tanımlarız. T zamanında, bazı bilgiler realize edilmiştir ve biraz tüketim yapılmıştır. Bizim tercih sıralamamız, mevcut bilgiye göre realize edilebilir durumda sonradan gelen tüketim hakkında karar alıcının dikkatine odaklanmıştır. Bu değerlendirme,  $W_T(c, \theta)$  ve  $\widehat{W}_T(c, r_T)$ 'nin betimlenmesi için  $D_T$  ve  $R_T$ 'yi kullanmamızın temelinde yer alan nedendir.  $D_T$  fonksiyonu zaman geçtikçe bakış açısında görülen değişimi yansıtmaktadır.  $s_T$  hariç,  $D_T$  fonksiyonu sadece T zamanından ilerisine olan tüketim sürecine bağlı olmaktadır.

Buna ek olarak, T zamanında karar alıcı T zamanından ilerisine realize edilebilecek durumlar üzerine odaklanmaktadır. Durum ortalaması olarak kullanılan beklentiler, T zamanındaki bilgi üzerine koşullanmıştır. Bu bağlamda, T zamanındaki bilgi koşullandırılırken sadece 0-zamanındaki görel entropiyi kullanarak, olasılıkların kısıtlanması uygun olmayacaktır. T zamanında 0-zamanı görel entropi kısıtının uygulanması, minimizasyon amaçlı oyuncunun, çoktan ortaya çıkmış zaman ve durumlarda T zamanında realize edilemeyecek herhangi bir olasılık sapması olmadan kaymasına izin vererek, zamansal tutarsızlığı ortaya çıkaracaktır. Bunun yerine, T zamanında karar alıcının, sadece T zamanından öteye tercihlerini değiştiren olasılık sapmalarını keşfetmesine izin veririz. Bu bize, görel entropi ölçümümüzün koşullu emsali  $R_T$ 'yi kullanma imkânı verir.

Entropi ölçümümüz tekrarlamalı bir yapıya sahiptir. 0-zamanında görel entropi, kolaylıkla gelecek dönemlerdeki koşullu görel entropilerden oluşturulabilir. Bu durumda;

$$R(Q) = E_Q \left[ \int_0^T \exp(-\delta t) \frac{|h_t|^2}{2} dt + \exp(-\delta T) R_T(Q) \right] \quad (5)$$

yazabiliriz.

Çarpan tercihinin bu tekrarlamalı yapısı, bu gösterimden izlenebilir. 0 zaman değerlendirme fonksiyonu  $\widehat{W}$ , T ayrıık zamanındaki olaylar ile ayrılabilir ve aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$\widehat{W}(c; \theta) = \inf \widehat{E} \left( \int_0^T \exp(-\delta t) \times \left[ U(c_t, s_t) + \theta \frac{|h_t|^2}{2} \right] dt + \widehat{W}_T(c; \theta) \right)$$

$$dB_t = d\widehat{B}_t + h_t dt \quad (6)$$

$$ds_t = \mu_s(s_t, c_t) dt. \quad (7)$$

kısıtına tabidir.

T zamanındaki kısıt tercihleri karar alıcının, T zamanından sonrasına olasılık dağılımındaki değişiklikleri fark etmesini sağlar. Daha önceki zamanlarda bilinen olayların ve ortaya çıkmadığı bilinen olayların olasılıklarındaki değişim olasılığını dışarda tutmak istiyoruz(exclude). 0 zamanındaki kısıt tercihleri için, c veri iken,  $W(c, \eta)$  oluşturmak için  $\tilde{h}$  sürecini bulabiliriz. Bu  $\tilde{h}$  süreci ile ilişkili olarak, T zamanındaki koşullu görel entropiyi  $R_T(\tilde{Q})$  hesaplayabiliriz. Yani, değer fonksiyonun  $W(c, \eta)$  oluşturulmasında örtük olan, (5) nolu denklemdeki durum ve zaman boyunca görel entropinin parçalanmasıdır. T zamanında karar alıcının, gelecekte realize edilebilecek sadece çıktıları etkileyen tutumlardaki değişimleri keşfetmesini isteriz. Bu,  $0 \leq t \leq T$  için sabitlenen  $\tilde{h}_t$  yanında,  $r_T = R_T(\tilde{Q})$  için  $R_T(Q) \leq r_T$  kısıtının uygulanmasıdır. Dikkat edilmesi gereken, bu kısıtın

## Journal of Economics Bibliography

uygulanmasıyla  $R(Q) \leq R(\tilde{Q})$ , 0 zamandaki görelî entropikısıtını karşılamaya devam etmiş olduğumuzdur. Böylece, T zamanında karar alıcının, T zamanında realize edilen durumlar arasındaki koşullu görelî entropiyi miras almasının önüne geçmiş oluyoruz. (Chen ve Epstein(2000), her durum ve zamanda h için ayrı kısıtlar uygulayarak bu durumdan kaçınabilmiştir.) Tekrarlamalı kısıt problemi için değeri fonksiyonu şu şekilde yazılabilir.

$W(c, \eta) = \inf \widehat{E} \int_0^T \exp(-\delta t) U(c_t, s_t) dt + \widehat{E} W_T(c, r_T)$  (6) ve (7) nolukısıt fonksiyonuna tabidir ve  $r_T \geq 0$ ,  $0 \leq t < T$  için ilk koşul  $r_0 = \eta$  ile  $dr_t = (\delta r_t - |h_t|^2/2)dt$  çözülür.

### 7. Sonuç Tespitleri

Finans ve makroekonomideki ampirik çalışmalar genellikle tek ve belirgin şekilde tanımlanmış dinamik istatistiksel modelleri varsaymaktadır. Gilboa ve Schmeidler'in (1989) çoklu model beklenen fayda teorisini kullanmak adına, oldukça zengin alternatif dinamiklerle bir dizi tutumlu (tek bileşenli/parametrelî) alternatif modeller için sağlamlılık-kontrol teorisine başvurulmuştur. Bu alternatif modeller, karar alıcının yaklaştırma modelini perturbe ederek, ortaya çıkan şokların durum değişkenleri üzerindeki rasgele geri bildirimlerine olanak vermektedir. Bu durum yaklaştırma modelinin işlevsel şeklini, şokların ve dışsal değişkenlerin sıralı korelasyonlarını kaçırmaya ve bu dışsal değişkenlerin içsel durum değişkenlerini nasıl etkilediğini görmeye olanak vermektedir. Anderson ve arkadaşları (2000), sağlamlılık-kontrol problemlerindeki çoklu parametrenin T zaman serili gözlemlere ait veri örnekteki yaklaştırma modelinden istatistiksel olarak ayırmanın zor olduğu bir dizi pertürbasyonproblemini nasıl endekslediğini göstermektedir.

### Kaynakça

- Anderson, Evan; Hansen, Lars Peter and Sargent, Thomas.** "Robustness, Detection and the Price of Risk." Mimeo, University of Chicago, March 2000.
- Chen, Zengjing and Epstein, Larry G.** "Ambiguity, Risk and Asset Returns in Continuous Time." Mimeo, University of Rochester, 2000.
- Duffie, Darrell and Epstein, Larry G.** "Stochastic Differential Utility." *Econometrica*, March 1992, 60(2), pp. 353-94.
- Dupuis, Paul and Ellis, Richard S.** *A weak convergence approach to the theory of large deviations*, Wiley Series in Probability and Statistics. New York: Wiley, 1997.
- Dupuis, Paul; James, Matthew R. and Petersen, Ian.** "Robust Properties of Risk Sensitive Control." Discussion Paper No. LCDS 98-15, Brown University, 1998.
- Epstein, Larry G. and Zin, Stanley E.** "Substitution, Risk Aversion and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns: A Theoretical Framework." *Econometrica*, July 1989, 57(4), pp. 937-69.
- Fleming, W. H. and Souganidis, P. E.** "On the Existence of Value Functions of Two-Player, Zero Sum Stochastic Differential Games." *Indiana University Mathematics Journal*, Summer 1989, 38(2), pp. 293-314.
- Gilboa, Itzhak and Schmeidler, David.** "Maxmin Expected Utility with Non-Unique Prior." *Journal of Mathematical Economics*, 1989, 18(2), pp. 141-53.
- Hansen, Lars Peter and Sargent, Thomas.** "Discounted Linear Exponential Quadratic Gaussian Control." *IEEE Transactions on Automatic Control*, May 1995, 40(5), pp. 968-71.
- *Elements of robust control and filtering for macroeconomics*. Unpublished manuscript, University of Chicago, 2001.



## Journal of Economics Bibliography

- Hansen, Lars Peter; Sargent, Thomas and Tallarini, Thomas.** “Robust Permanent Income and Pricing.” *Review of Economic Studies*, October 1999, 66(4), pp. 873–907.
- Hansen, L. P.; Sargent, T. J.; Turmuhambetova, G. A. and Williams, N.** “Robust Control and Model Uncertainty.” Mimeo, University of Chicago, 2001.
- Luenberger, David G.** *Optimization by vector space methods*. New York: Wiley, 1969.
- Peterson, I. R.; James, M. R. and Dupuis, P.** “Minimax Optimal Control of Stochastic Uncertain Systems with Relative Entropy Constraints.” *IEEE Transactions on Automatic Control*, March 2000, 45(3), pp. 398 – 412.



### Copyrights

Copyright for this article is retained by the author(s), with first publication rights granted to the journal. This is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution license (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0>).

